|  |  |
| --- | --- |
| Gerb-BMSTU_01 | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11)

**РАСЧЁТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

**к курсовой работе на тему:**

*Исследование и решение краевой задачи с нелокальными граничными условиями*

Дисциплина: *Дифференциальные уравнения*

Студент группы ФН11-42Б  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** М.Х. Хаписов

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель курсовой работы,

канд. физ.-мат. наук, доцент  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** И.Л. Покровский

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Оценка: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Москва, 2022

**СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ**

Руководитель курсовой работы \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Покровский И.Л.

подпись, дата

Исполнитель,

студент группы ФН11-42Б \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Хаписов М.Х.

подпись, дата

Нормоконтролёр ,

ст. преп. каф. ФН-11 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Прозоровский А.А.

подпись, дата

**СОДЕРЖАНИЕ**

с.

[ВВЕДЕНИЕ 5](#_Toc40799299)

[1 Теоретическая часть 6](#_Toc40799300)

[2 Первая задача D(+) 7](#_Toc40799301)

[2.1 Постановка задачи 7](#_Toc40799302)

[2.2 Решение задачи D(+) в общем виде 8](#_Toc40799303)

[2.3 Решение с заданными значениями 10](#_Toc40799304)

[2.3.1 Решение для спектрального набора ( 10](#_Toc40799305)

[2.3.2 Решение для спектрального набора ( 17](#_Toc40799306)

[2.4 Обсуждение результатов 25](#_Toc40799307)

[3 Вторая задача D(-) 26](#_Toc40799308)

[3.1 Постановка задачи 26](#_Toc40799309)

[3.2 Решение задачи D(-) в общем виде 27](#_Toc40799310)

[3.3 Решение с заданными значениями 31](#_Toc40799311)

[3.3.1 Решение для спектрального набора ( 3](#_Toc40799312)1

[3.3.2 Решение для спектрального набора ( 38](#_Toc40799313)

[3.4 Обсуждение результатов 45](#_Toc40799314)

[4 Третья задача N(+) 4](#_Toc40799315)6

[4.1 Постановка задачи 46](#_Toc40799316)

[4.2 Решение задачи N(+) в общем виде 47](#_Toc40799317)

[4.3 Решение с заданными значениями 49](#_Toc40799318)

[4.3.1 Решение для спектрального набора ( 49](#_Toc40799319)

[4.3.2 Решение для спектрального набора ( 53](#_Toc40799320)

[4.4 Обсуждение результатов 59](#_Toc40799321)

[5 Четвёртая задача N(-) 60](#_Toc40799315)

[5.1 Постановка задачи 60](#_Toc40799316)

[5.2 Решение задачи N(-) в общем виде 61](#_Toc40799317)

[5.3 Решение с заданными значениями 64](#_Toc40799318)

[5.3.1 Решение для спектрального набора ( 6](#_Toc40799319)4

[5.3.2 Решение для спектрального набора (](#_Toc40799320) 69

[5.4 Обсуждение результатов](#_Toc40799321) 74

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 75](#_Toc40799322)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 77](#_Toc40799323)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А 78](#_Toc40799324)

[ПРИЛОЖЕНИЕ Б 79](#_Toc40799325)

**ВВЕДЕНИЕ**

Курсовая работа – вид учебной работы, направленный на развитие практических навыков и умений, а также формирование компетенций обучающихся в процессе выполнения определенных видов заданий, связанных с будущей профессиональной деятельностью. Работа рассчитана на закрепление и применение полученных навыков в процессе учёбы.

Классические задачи на собственные значения оператора Лапласа хорошо изучены. Однако, некоторые свойства собственных значений не удается получить, оставаясь в рамках граничных условий I, II, III рода. К этой ситуации можно отнести задачу максимизации разности между первым и вторым собственными значениями, возникающая в квантовой термодинамике. К задачам такого рода можно применить подход, связанный с подбором иных граничных условий. Поэтому рассмотрим нелокальные граничные условия специального типа [1].

Целью данной курсовой работы является исследование заданных краевых задач.

Задачами этой работы является (с полным текстом задания можно ознакомиться в ПРИЛОЖЕНИИ А):

- вывести уравнения для нахождения собственных значений;

- исследовать свойства собственных значений оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями указанного типа, относящиеся к локализации собственных значений, асимптотическим свойствам собственных значений, а также виду собственных функций задачи.

В данной курсовой работе используются следующие обозначения: D(+), D(-), N(-). Их расшифровку можно найти в ПРИЛОЖЕНИИ А.

**1 Теоретическая часть**

Оператором Штурма-Лиувилля называется дифференциальный оператор из пространства функций c областью определения *,* где коэффициенты удовлетворяют условиям: непрерывно дифференцируемая, а и непрерывные на функции, причем [2].

Наша цель найти такие числа , при которых существует нетривиальное решение краевой задачи

(1)

Задача (1) называется краевой задачей на собственные значения для оператора Штурма-Лиувилля (задача Штурма-Лиувилля). Нетривиальные решения задачи называются собственными функциями, а числа , при которых существуют эти нетривиальные решения, называются собственными значениями [3].

**2 Первая задача D(+)**

**2.1 Постановка задачи**

Одномерная краевая задача D(+) на собственные значения и на собственные функции с параметром выглядит следующим образом:

(2)

где y(x) – неизвестная функция;

– спектральный параметр;

r > 0 – вещественный параметр;

– известные вещественные постоянные.

Требуется:

**–** для нескольких значений параметра r численно найти первые три собственных значения;

**–** изобразить графически соответствующие собственные функции;

**–** определить характер эволюции собственных значений и вида собственных функций в зависимости от изменения параметра r.

**2.2 Решение задачи D(+) в общем виде**

Решение уравнения задачи (2) при >0 и его производная имеют вид [4]:

(3)

(4)

После замены и подстановки (3), (4) в граничные условия (2) получим линейную однородную систему:

(5)

Необходимым и достаточным условием наличия нетривиальных решений данной линейной однородной системы является равенство нулю определителя матрицы этой системы:

, (6)

. (7)

После замены *P = и Q = 2,* получим:

(8)

Уравнение (8) при любом положительном r имеет счетное множество решений, локализованных между корнями уравнения .

Докажем, что все собственные значения задачи (1) будут положительными.

Умножим обе части уравнения на и проинтегрируем по Полученный интеграл на решениях должен равняться нулю:

Значения в точках из равны:

С учетом преобразуем первое слагаемое из правой части к виду:

Покажем, что Предположим, а значит Но тогда в силу граничных условий окажется, что и, следовательно, что противоречит определению собственного вектора.

Предположим, Тогда выполняется , что с учётом оценки делает невозможным . Значит, наше предположение неверно, и отсюда следует положительность собственных значений [5].

**2.3 Решение с заданными значениями**

**2.3.1 Решение для спектрального набора (**

Подставим спектральные значения в (2):

(12)

тогда соотношение (8) примет вид:

(13)

Таблица 1 **–** Собственные значения для задачи D(+) для значений (5,6)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| r |  |  |  |  |
| 0,0010 | 9,8658 | 39,4776 | 88,7929 | 157,9134 |
| 0,0300 | 8,0089 | 39,3129 | 73,1025 | 157,6312 |
| 0,0600 | 4,9729 | 39,1876 | 54,9081 | 156,8453 |
| 0,0900 | 2,9929 | 38,8129 | 47,6100 | 155,8853 |
| 0,2000 | 0,7921 | 37,8225 | 42,6409 | 154,1351 |
| 0,4000 | 0,2304 | 37,4544 | 41,9904 | 153,5920 |
| 1,0000 | 0,0625 | 37,2100 | 40,9600 | 153,4223 |
| 1000,0000 | 0,0329 | 37,2328 | 41,7898 | 153,3894 |
| 1000000,0000 | 0,0329 | 37,2329 | 41,7913 | 153,3891 |

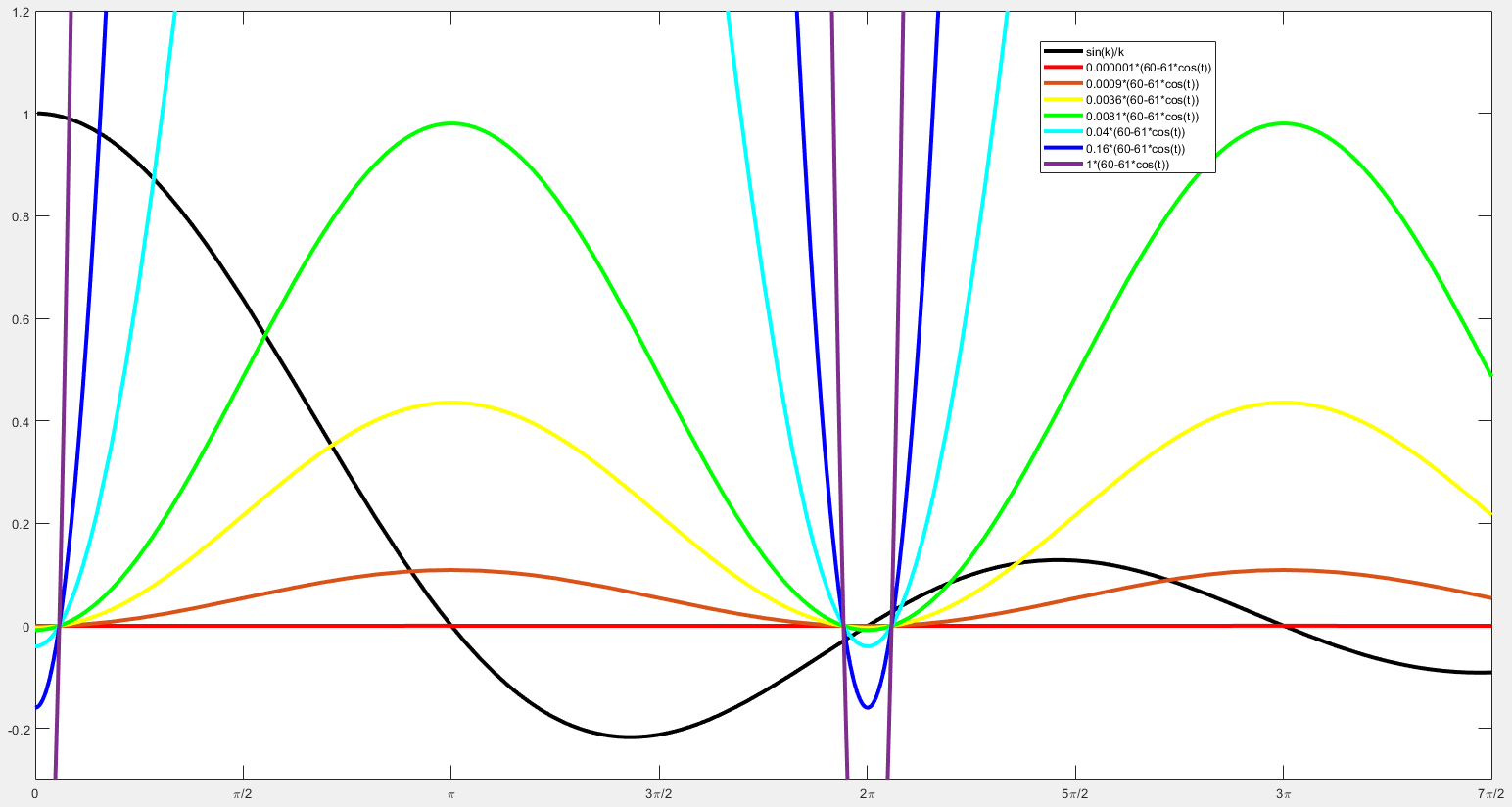
Найдем для соответствующей собственной функции (3) коэффициенты A и B. Для этого воспользуемся условиями нормировки , .

(14)

Окончательно получим:

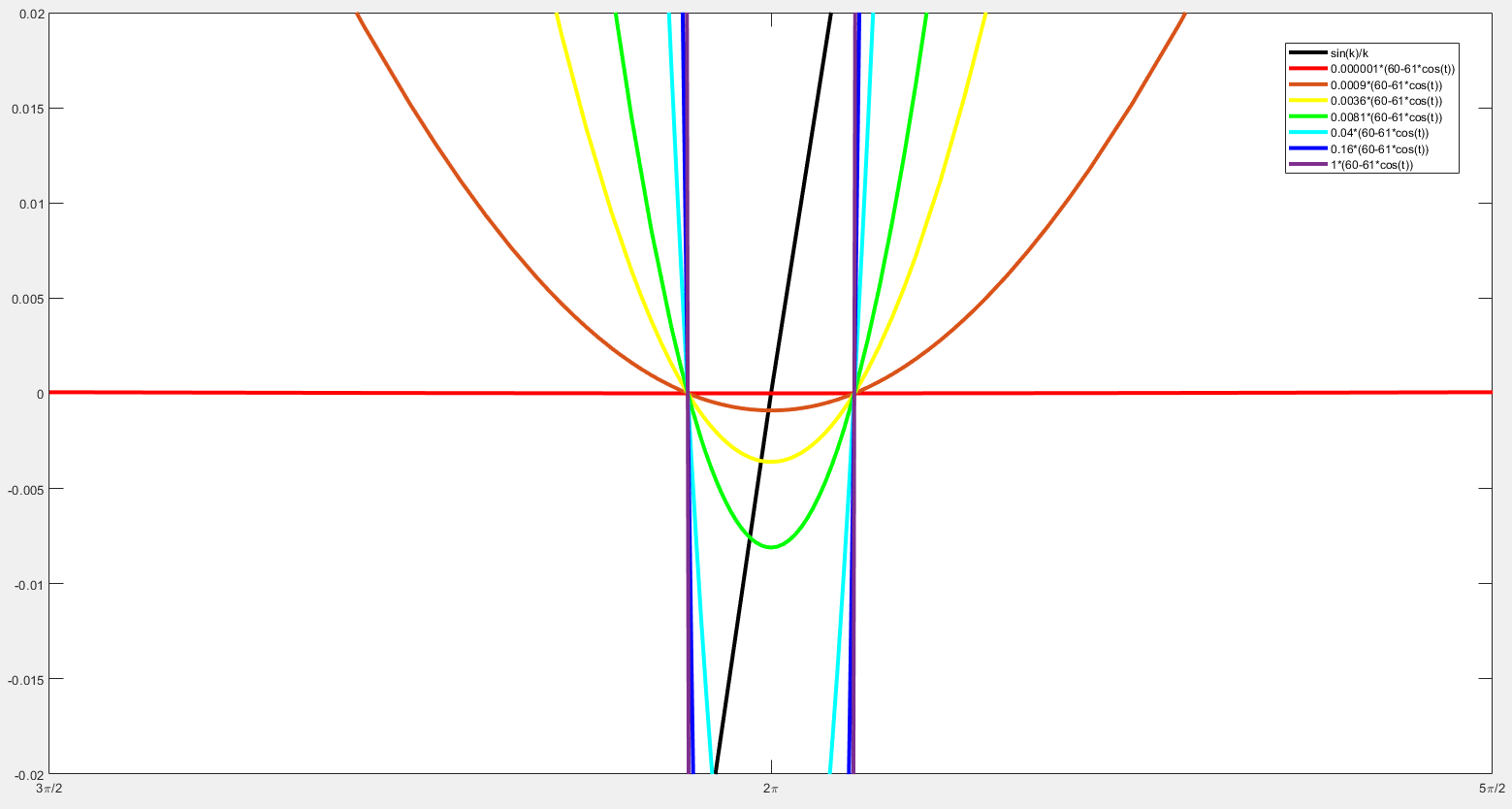
(15)

y



t

Рисунок 1 – Графическое решение уравнения задачи D(+) с параметрами (5,6)



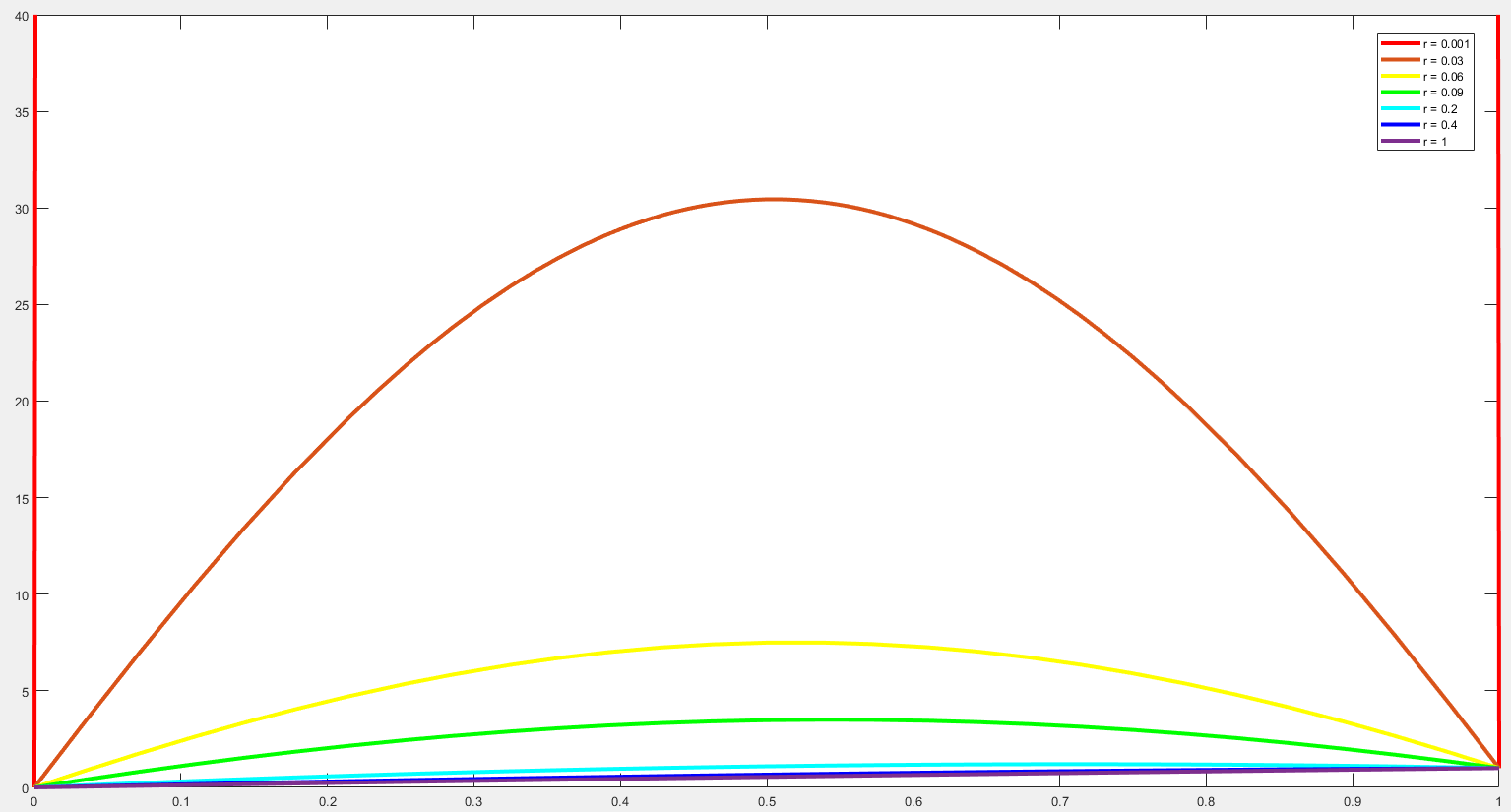
y

t

Рисунок 1.1 – “Микроскоп” для графического решение уравнения

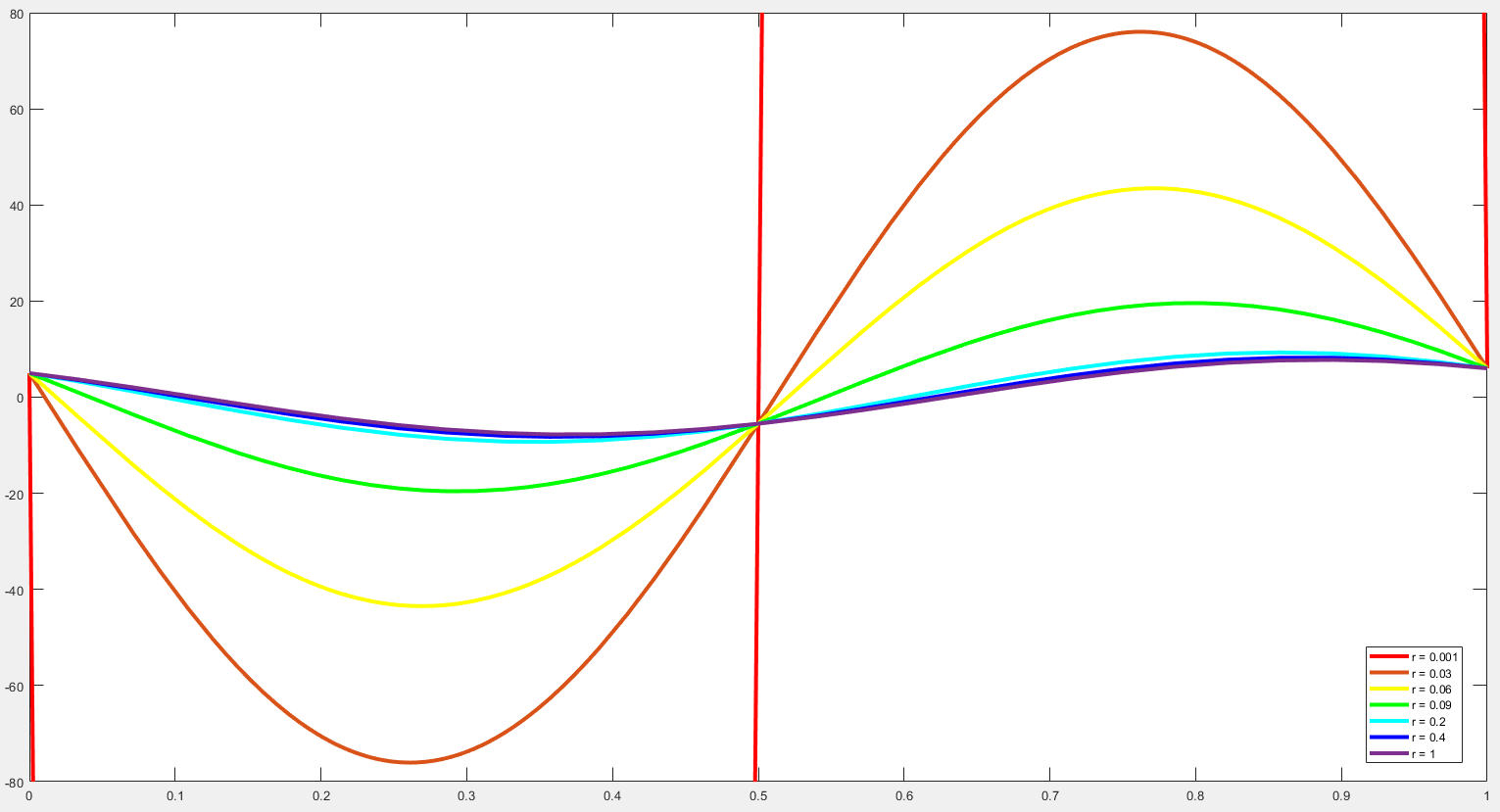
задачи D(+) с параметрами (5,6)

y



x

Рисунок 2 – Графики собственной функции для задачи D(+) с параметрами (5,6)



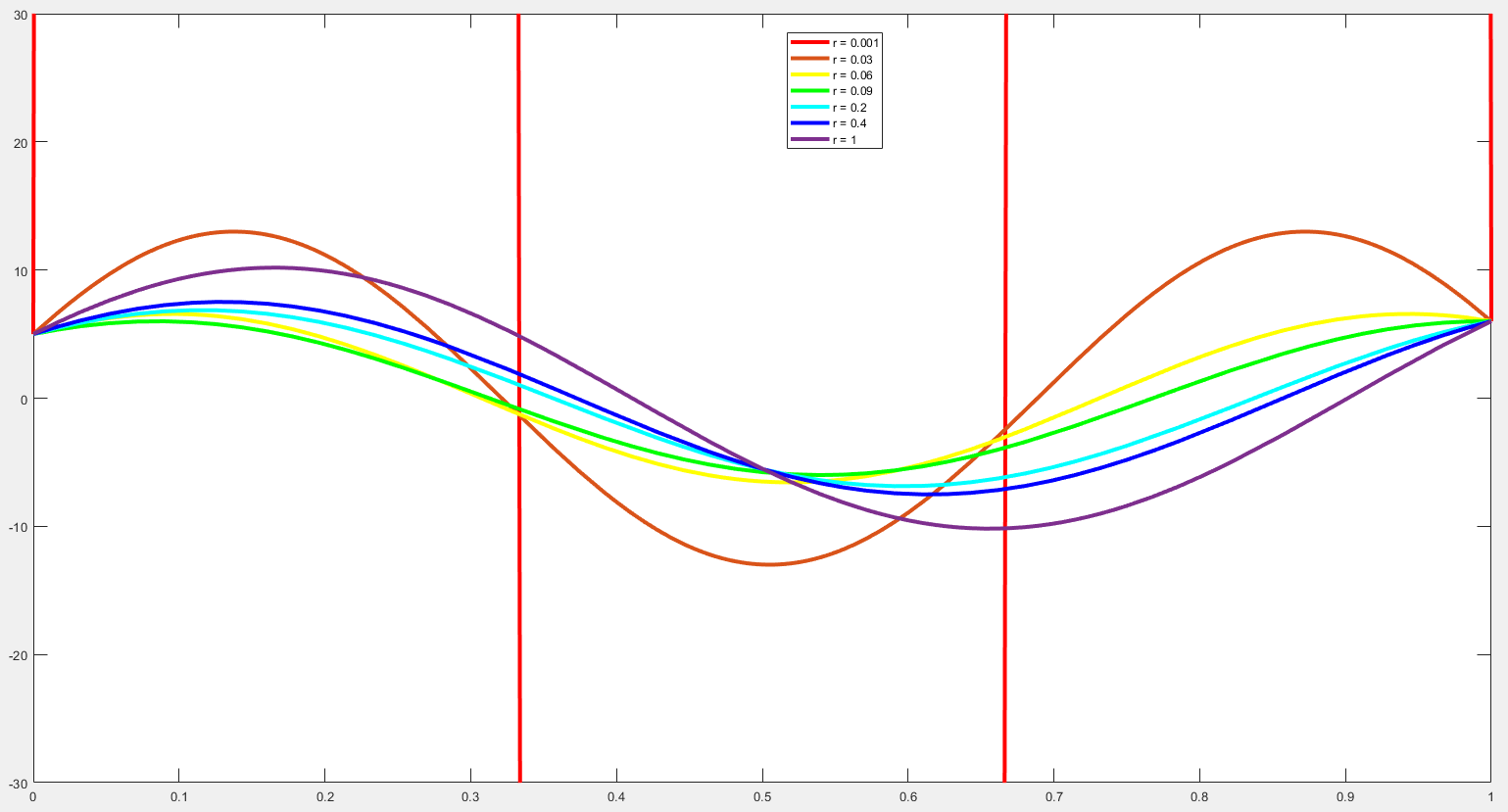
y

x

Рисунок 3 – Графики собственной функции

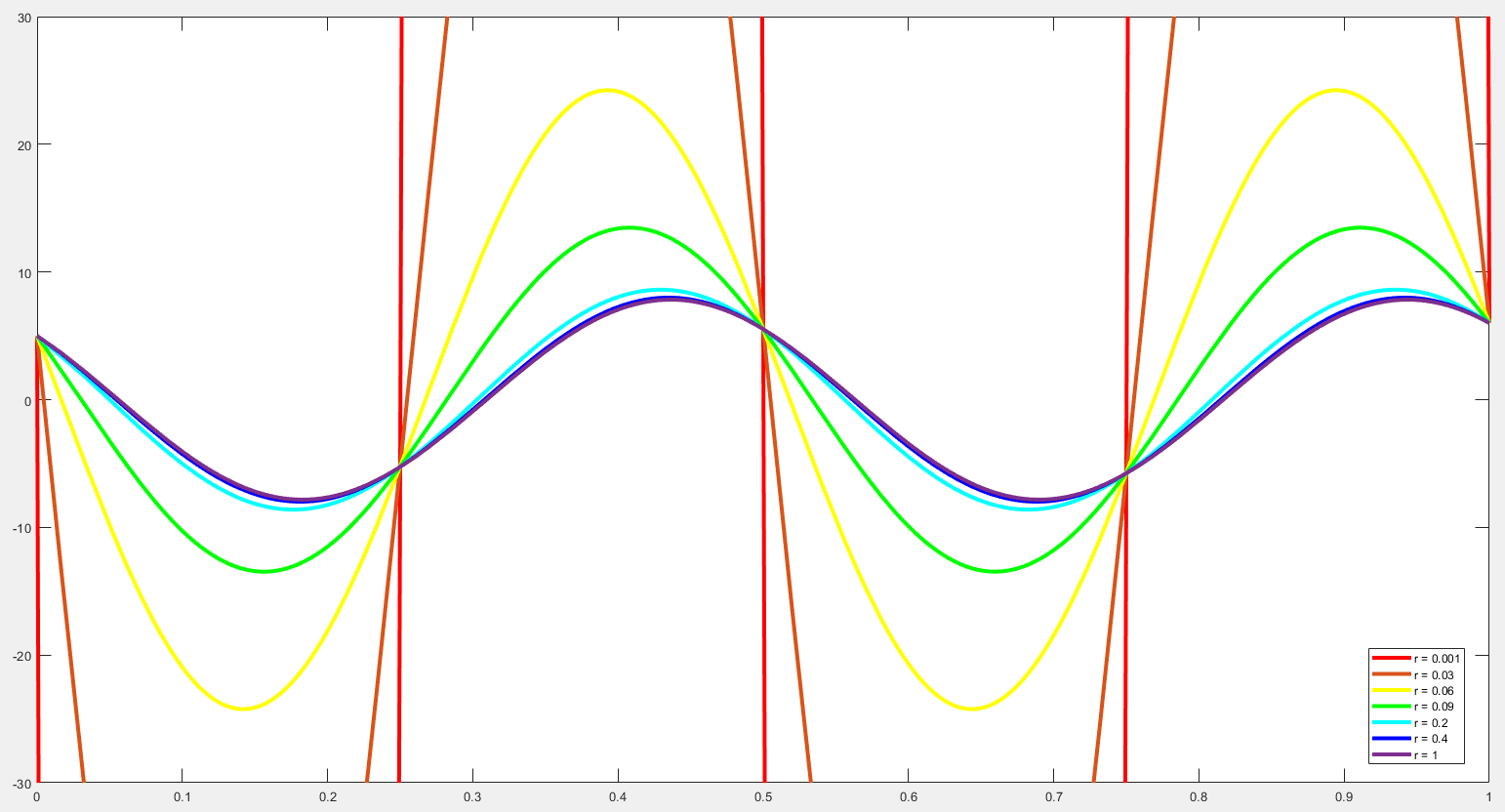
для задачи D(+) с параметрами (5,6)

y

 Рисунок 4 – Графики собственной функции

x

для задачи D(+) с параметрами (5,6)

 Рисунок 5 – Графики собственной функции

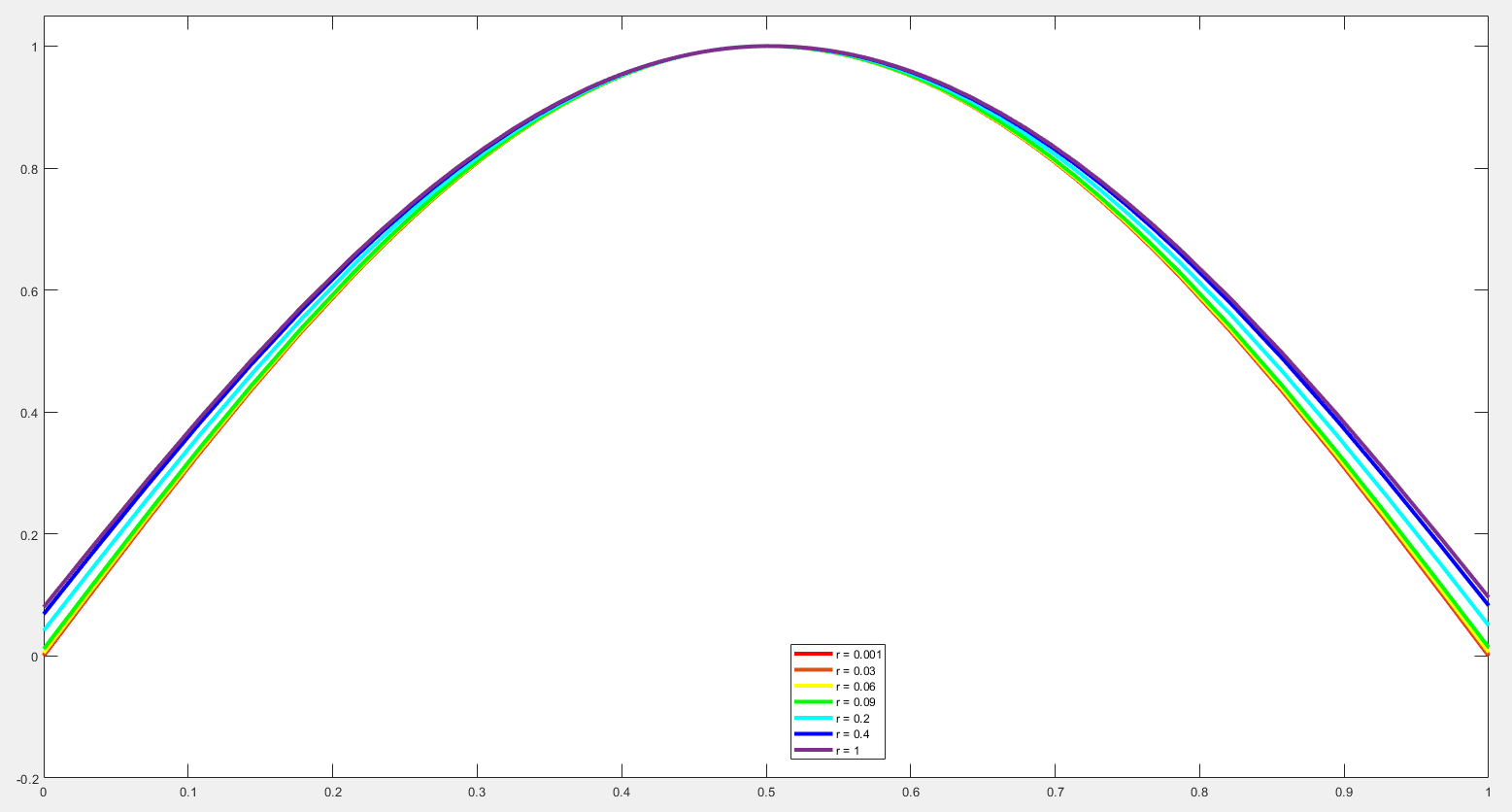
y

x

для задачи D(+) с параметрами (5,6)

Теперь найдём для соответствующей собственной функции (3) коэффициенты A и B из условий нормировки.

Окончательно получим:

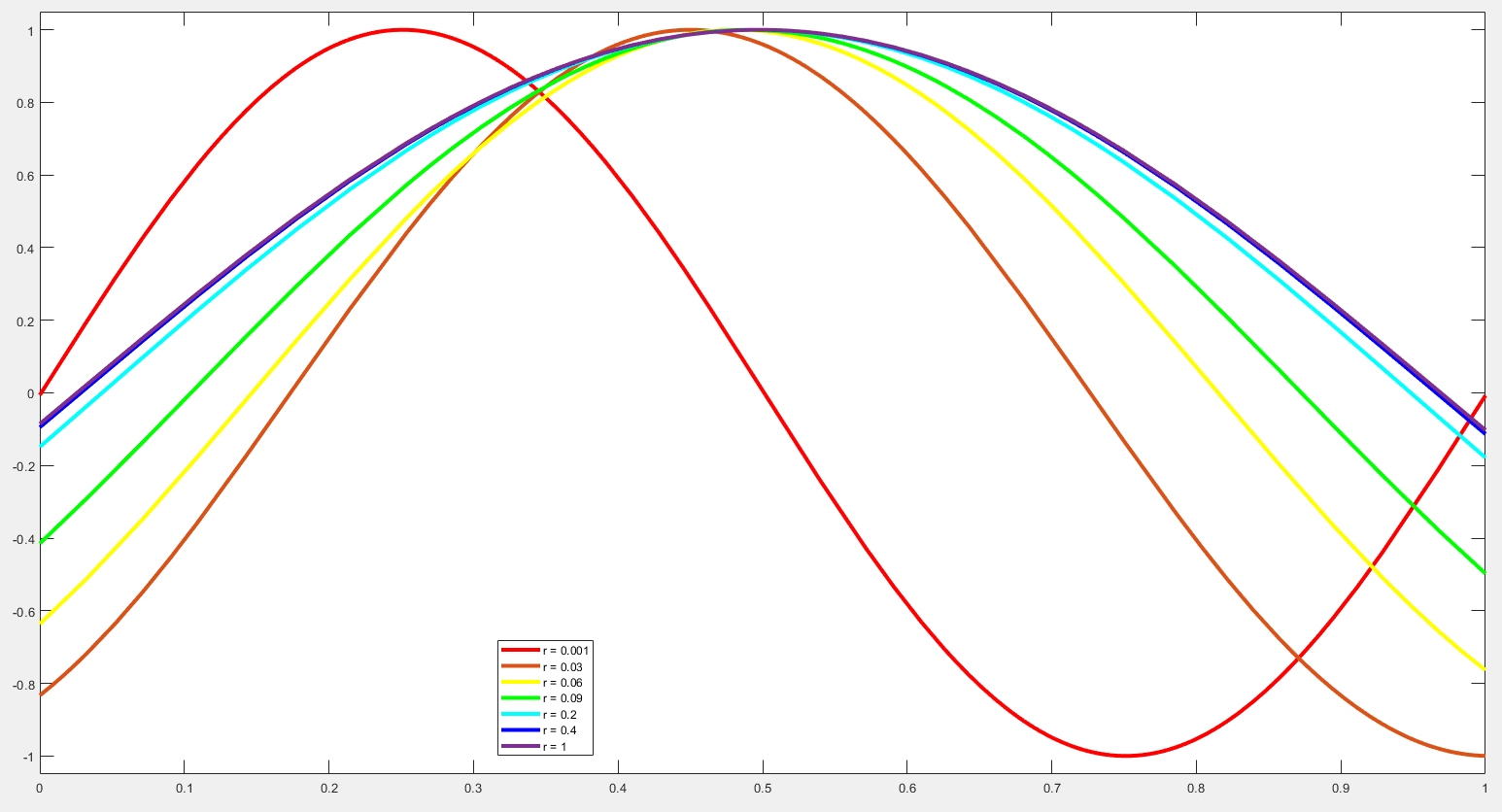


y

x

Рисунок 6 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (5,6)

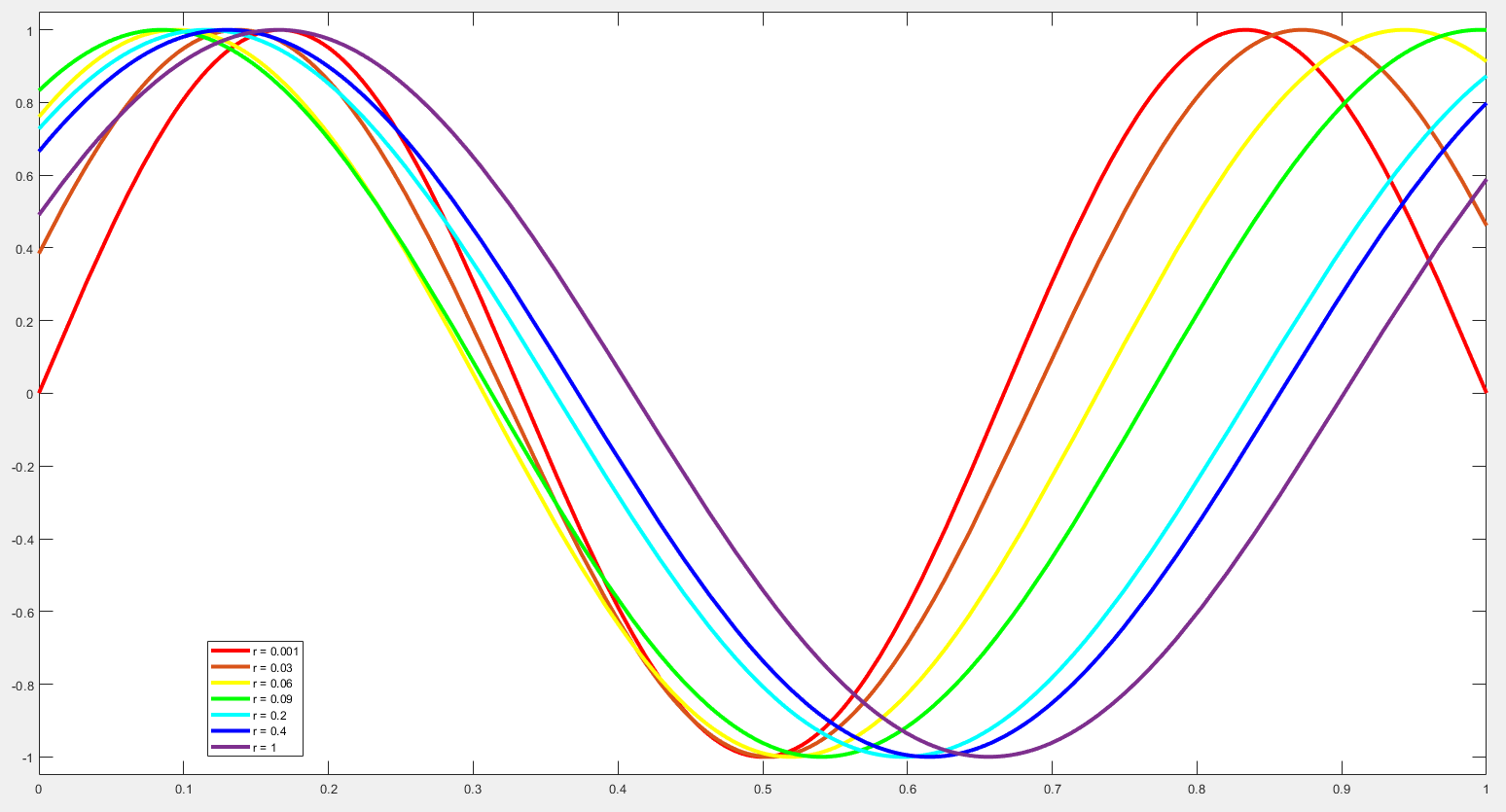


y

x

Рисунок 7 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (5,6)

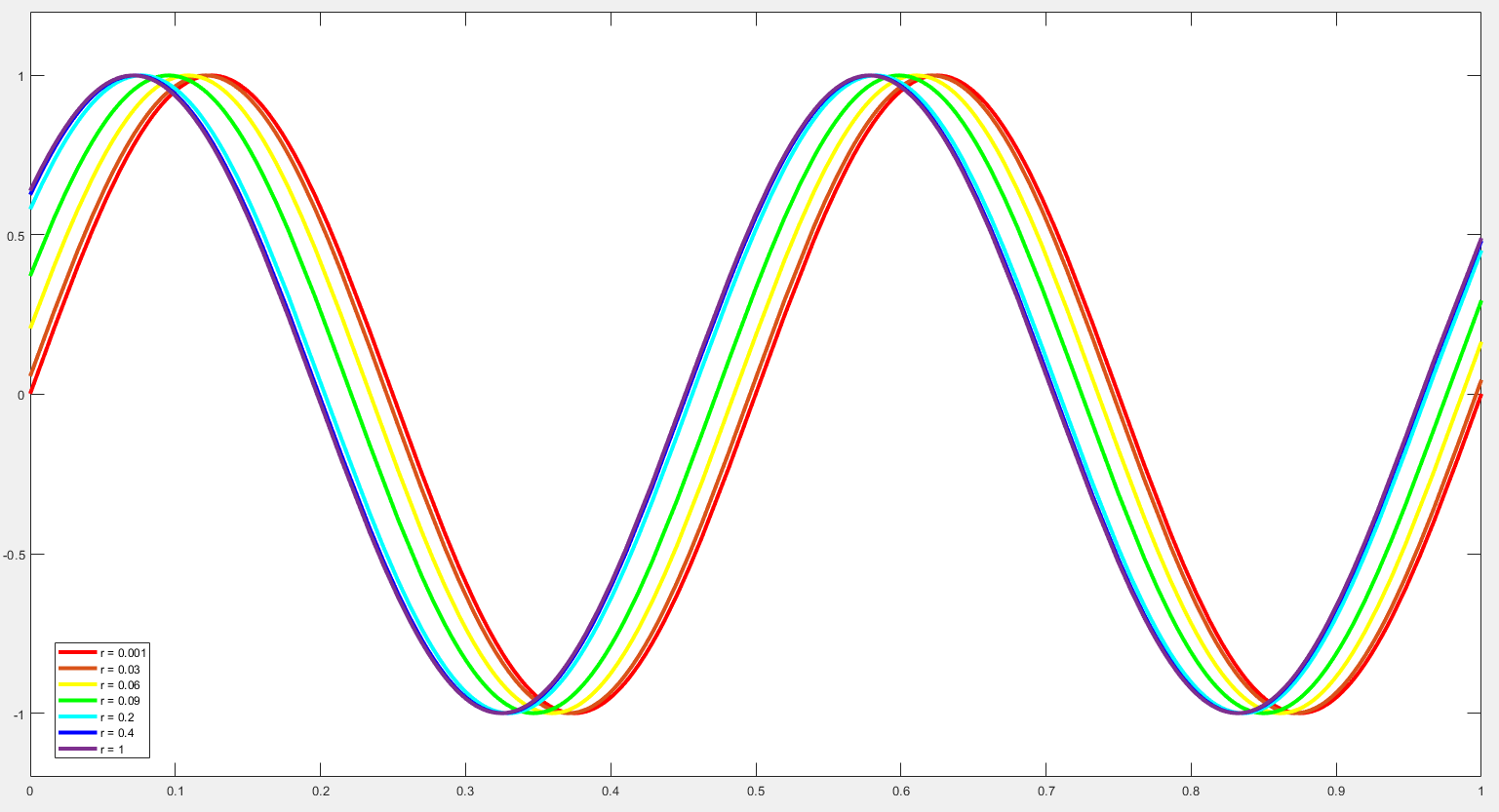


y

x

Рисунок 8 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (5,6)



y

x

Рисунок 9 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (5,6)

**2.3.2 Решение для спектрального набора (**

Подставим спектральные значения в (2):

(16)

тогда соотношение (8) примет вид:

(17)

Таблица 2 **–** Собственные значения для задачи D(+) для значений (-5,6)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| r |  |  |  |  |
| 0,0010 | 9,8669 | 39,4685 | 88,8117 | 157,8752 |
| 0,0300 | 9,8470 | 32,2964 | 88,6610 | 131,1931 |
| 0,0600 | 9,7969 | 22,0618 | 88,2096 | 105,9553 |
| 0,0900 | 9,7094 | 16,7281 | 87,4225 | 97,9490 |
| 0,2000 | 9,3025 | 12,0686 | 86,1184 | 93,1881 |
| 0,4000 | 8,9401 | 11,2560 | 85,6365 | 92,4882 |
| 1,0000 | 8,7912 | 11,0689 | 85,4700 | 92,3102 |
| 1000,0000 | 8,7632 | 11,0417 | 85,4415 | 92,2771 |
| 1000000,0000 | 8,7630 | 11,0415 | 85,4415 | 92,2770 |

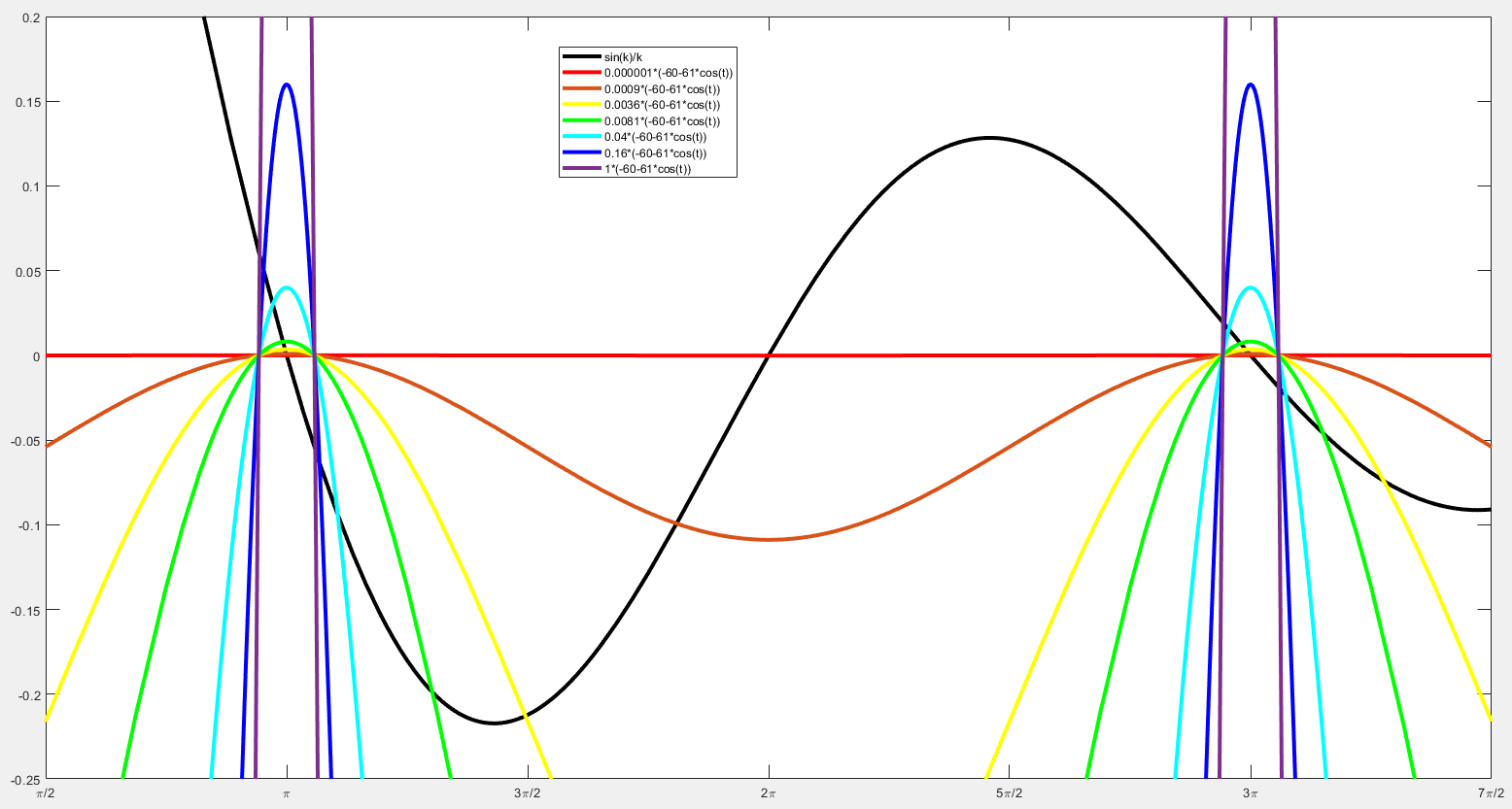
Найдем для соответствующей собственной функции (3) коэффициенты A и B из условий нормировки , .

(18)

Окончательно получим:

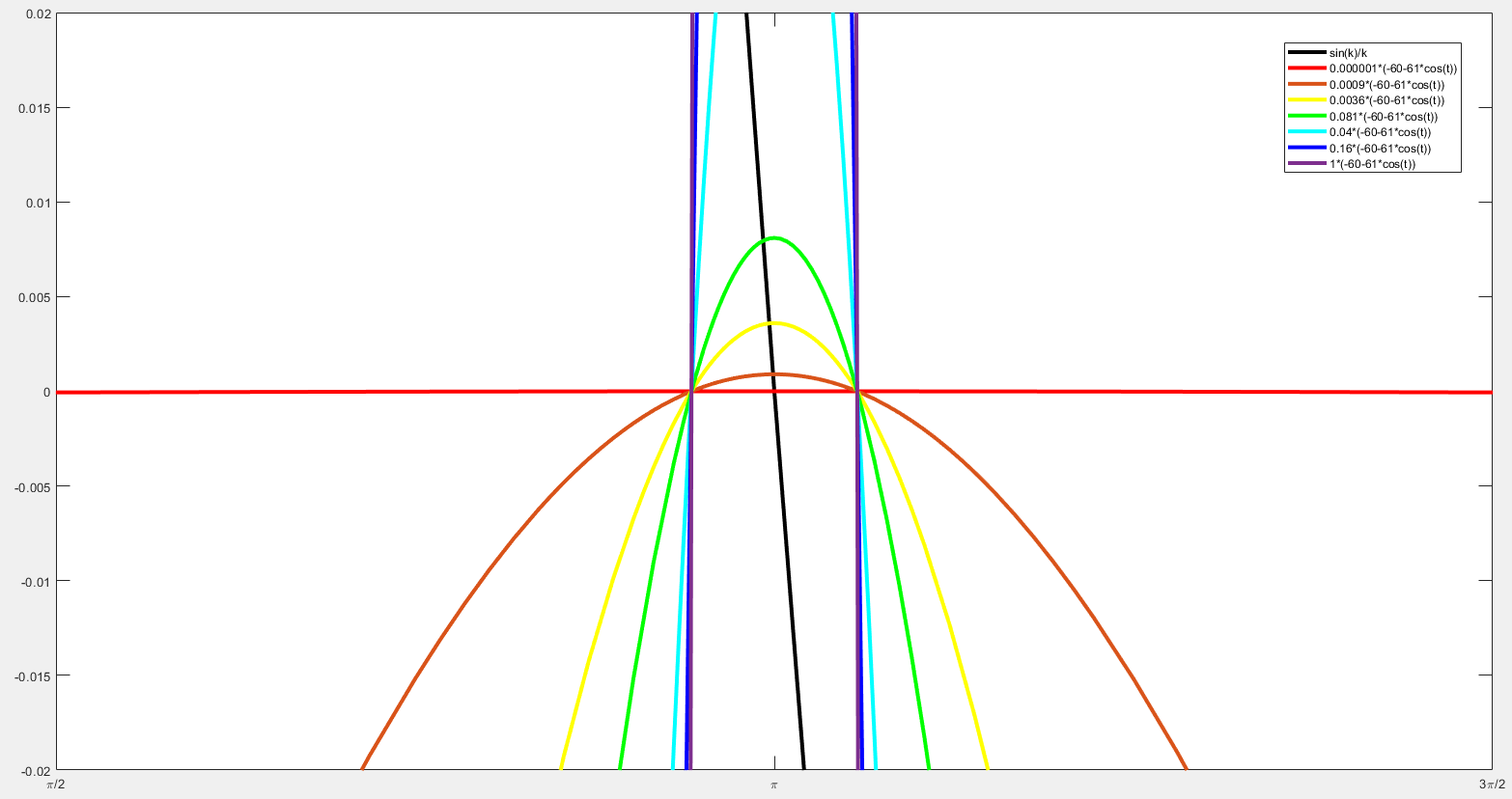
(19)

y



t

Рисунок 10 – Графическое решение уравнения задачи D(+) с параметрами (-5,6)



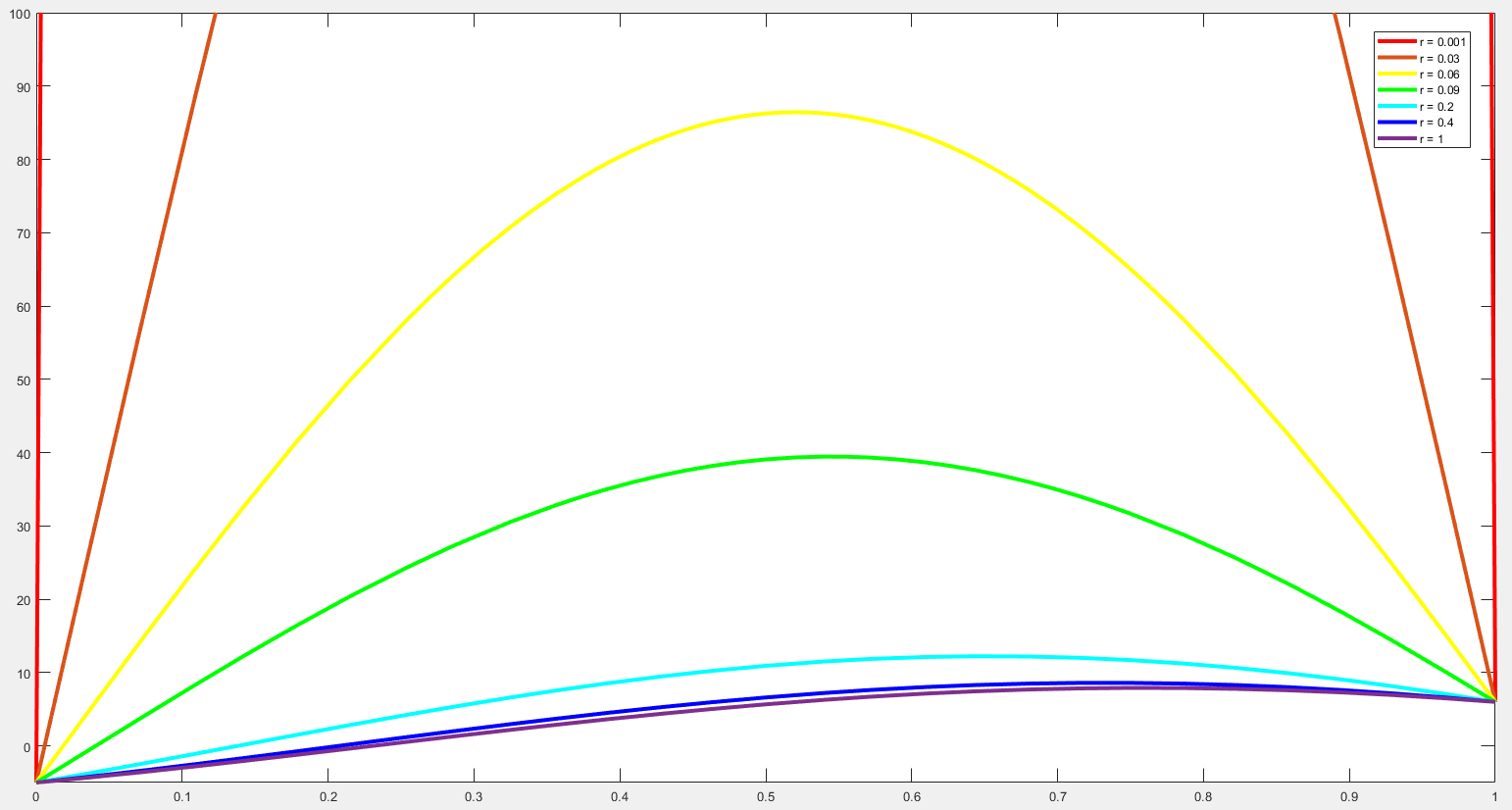
t

y

Рисунок 10.1 – “Микроскоп” для графического решение уравнения

задачи D(+) с параметрами (-5,6)

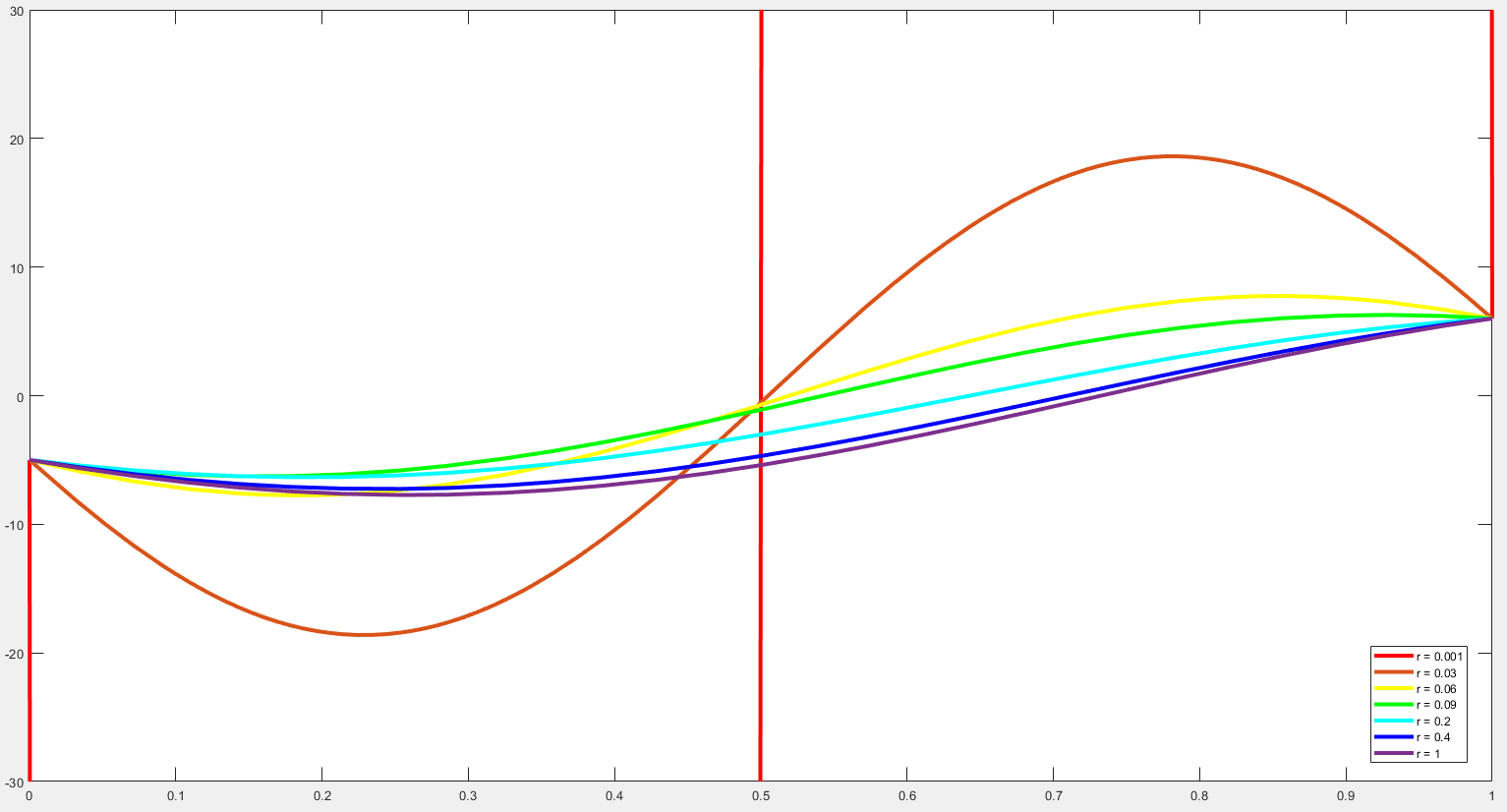
y



x

Рисунок 11 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (-5,6)



x

y

Рисунок 12 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (-5,6)

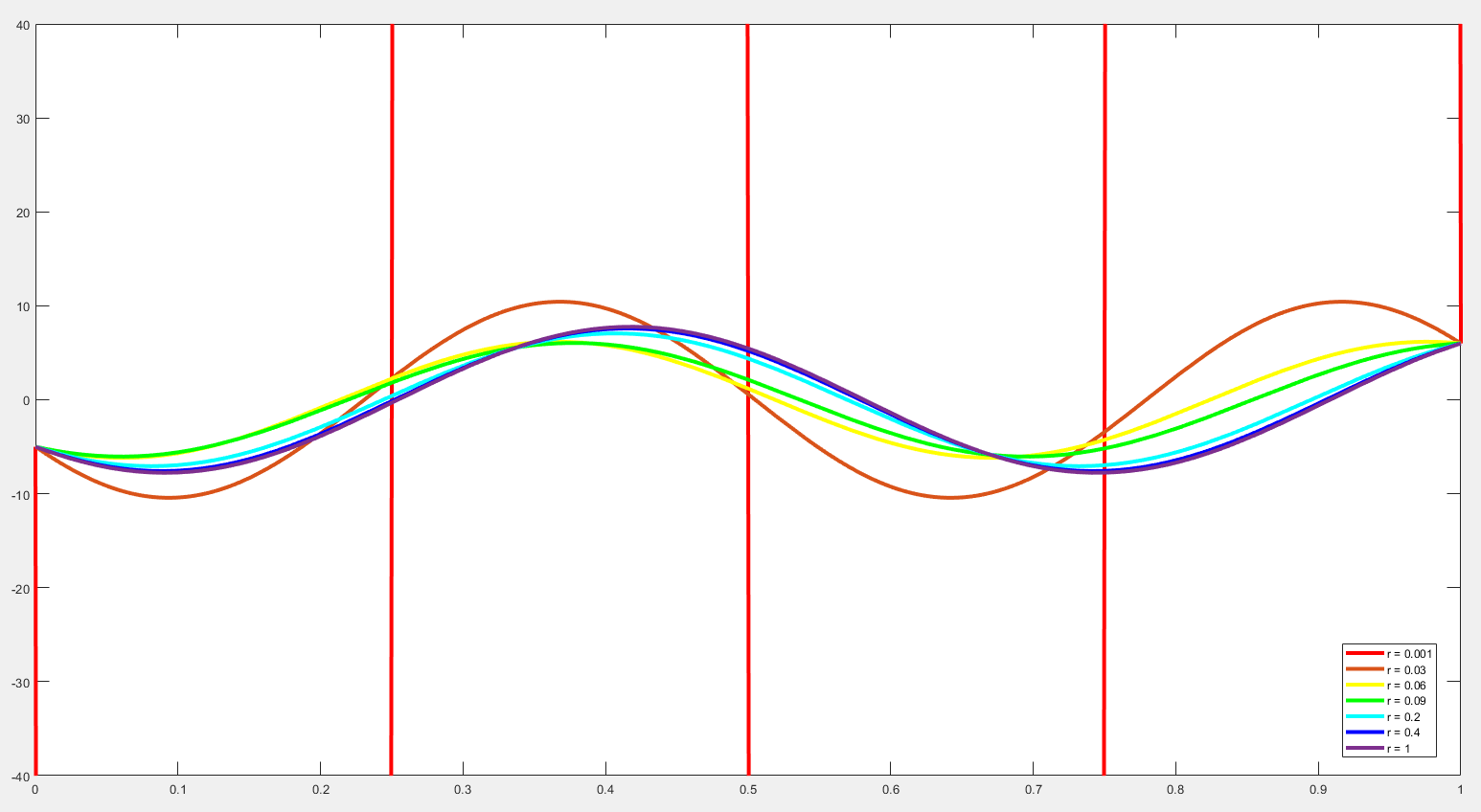


y

x

Рисунок 13 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (-5,6)



y

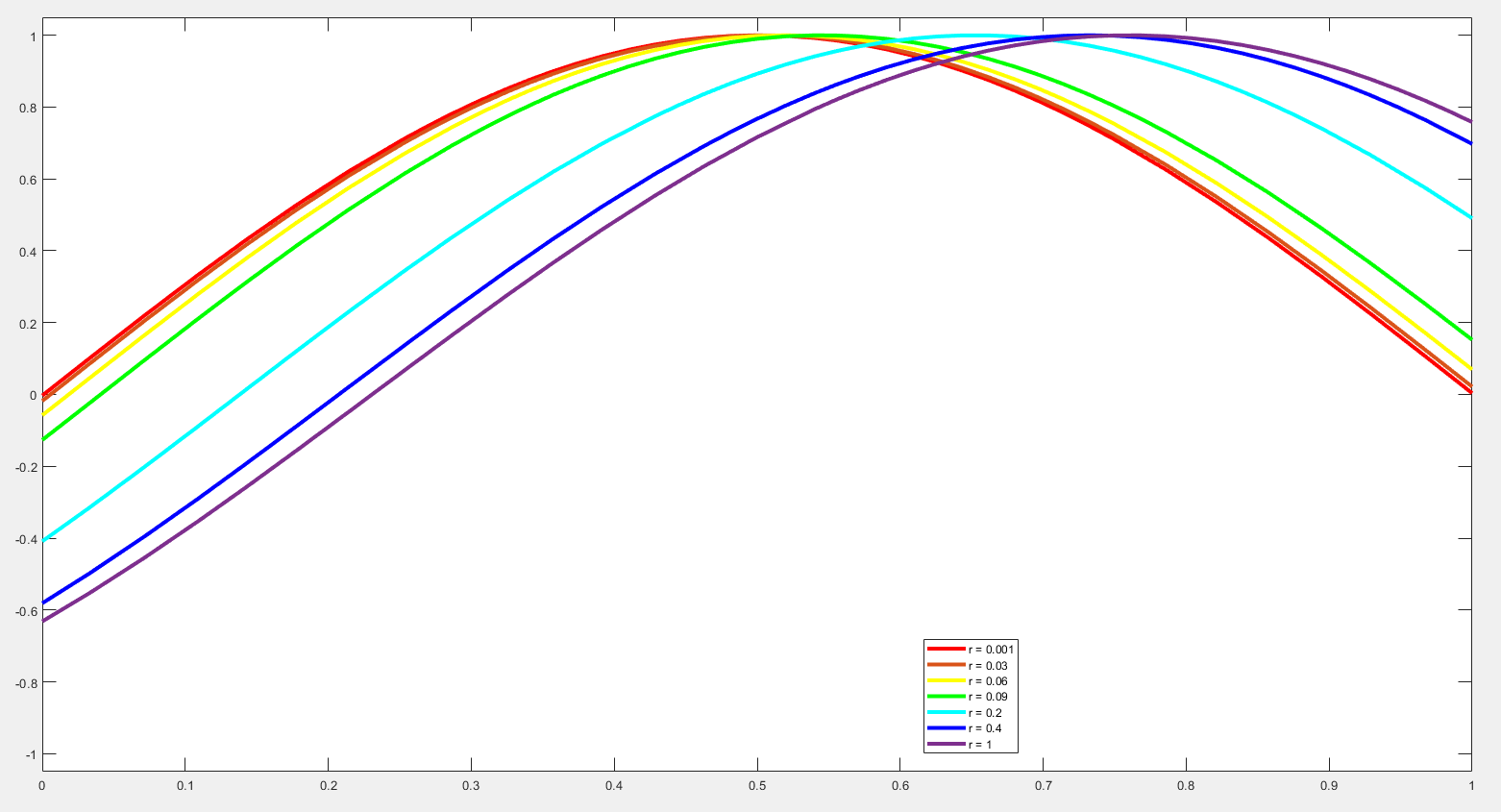
x

Рисунок 14 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (-5,6)

Теперь найдём для соответствующей собственной функции (3) коэффициенты A и B из условий нормировки.

Окончательно получим:

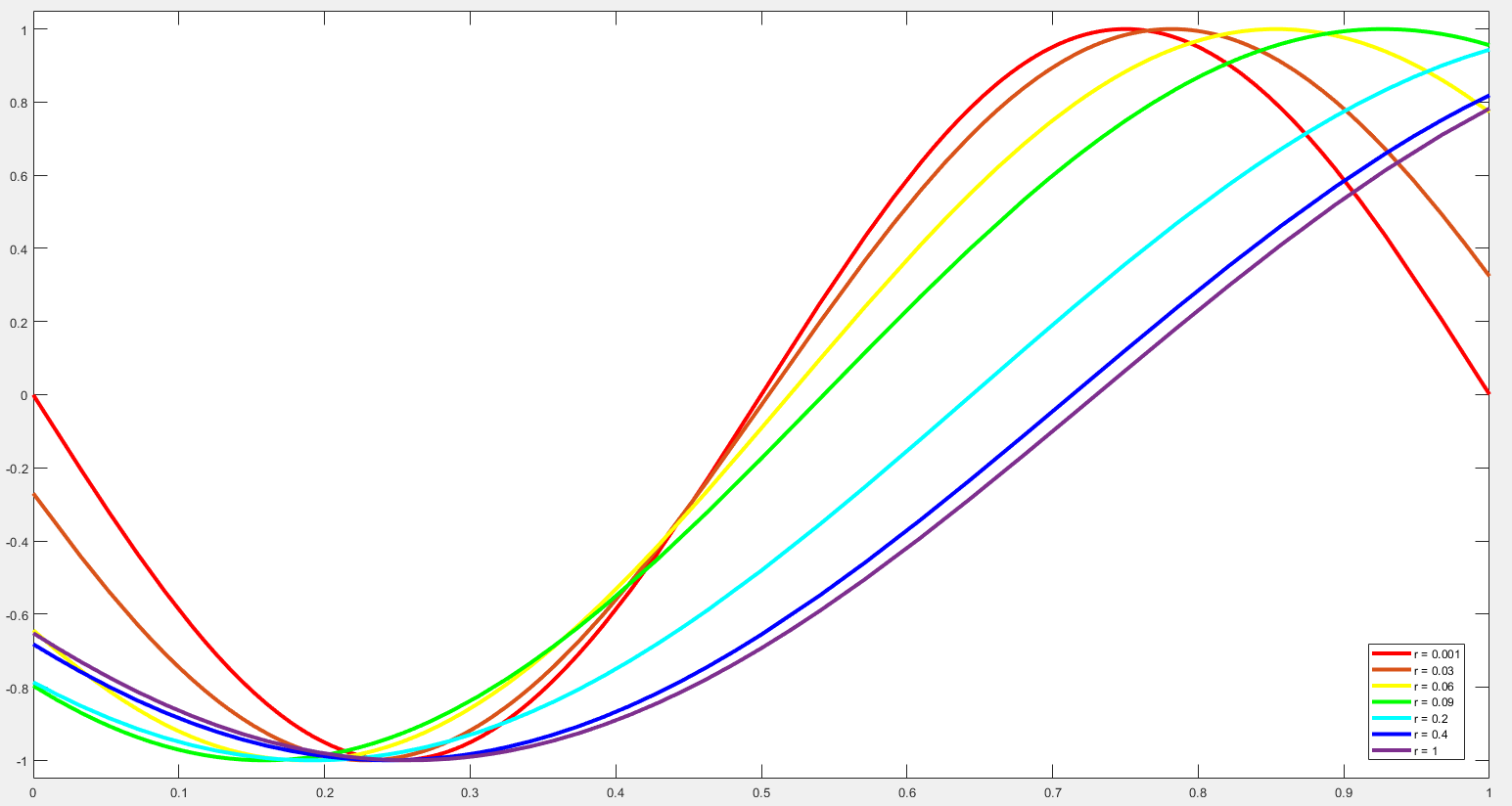


y

x

Рисунок 15 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (-5,6)

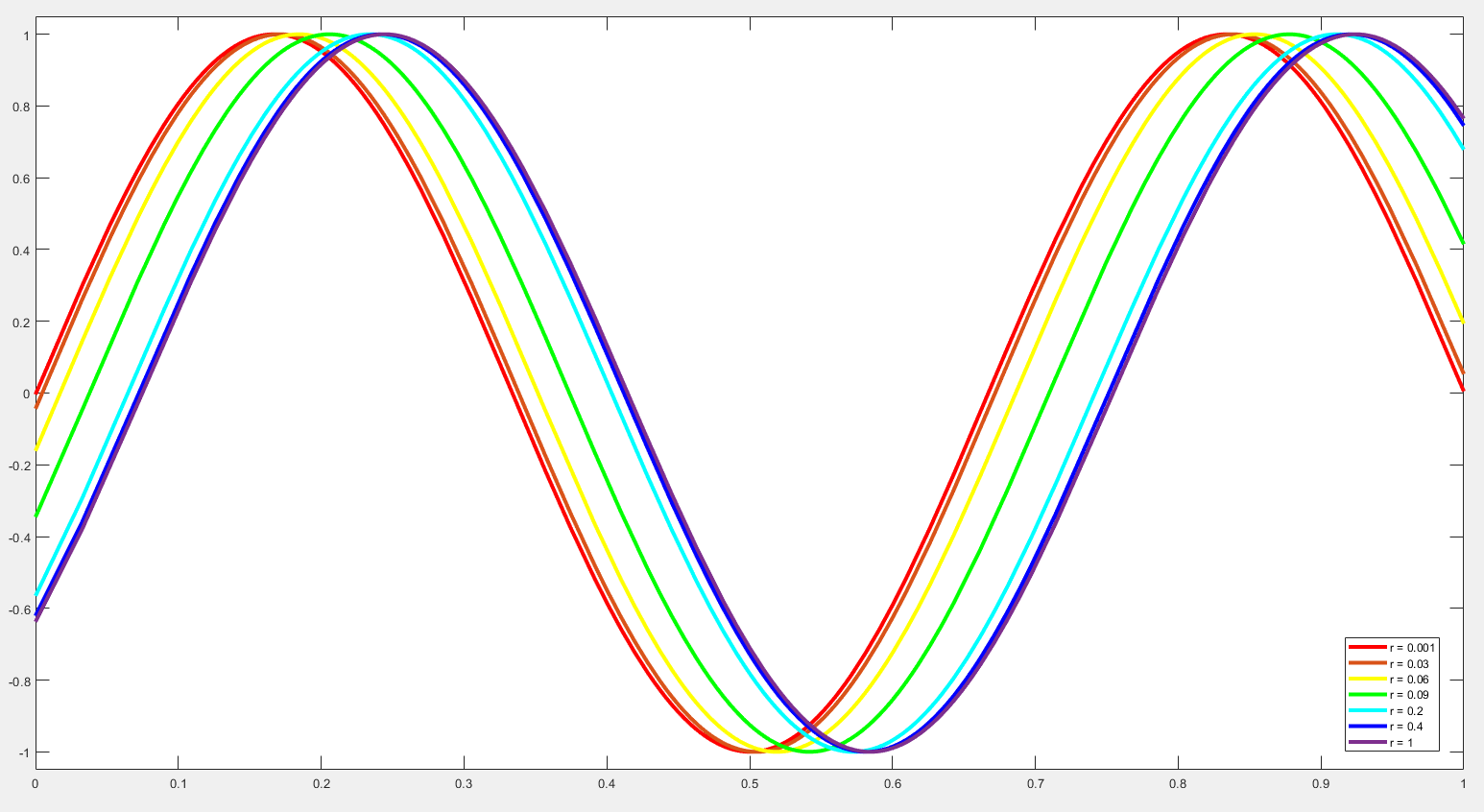


y

x

Рисунок 16 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (-5,6)

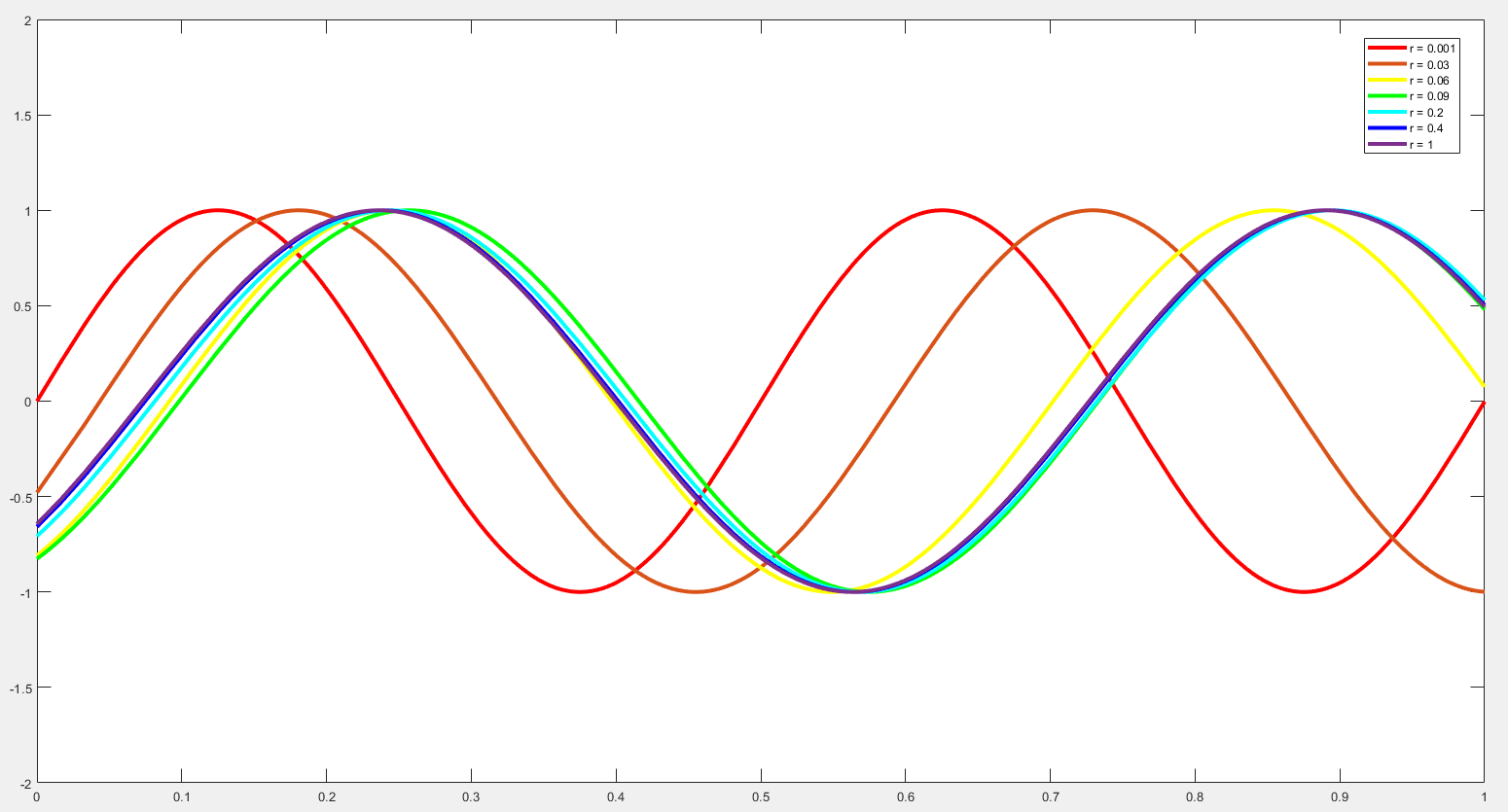


y

x

Рисунок 17 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (-5,6)



y

x

Рисунок 18 – Графики собственной функции

для задачи D(+) с параметрами (-5,6)

**2.4 Обсуждение результатов**

На основании Таблицы 1 делаем вывод о том, что собственные значения при наборе параметров (5,6) существенно зависят от параметра С его увеличением скорость изменения собственных значений уменьшается, при , а при

На основании Таблиц 2 можно сделать вывод о том, что собственные значения зависят от параметра менее существенно, чем в задаче D(+) со спектральными параметрами но с его увеличением скорость изменения собственных значений всё также уменьшается, при , а при

В задаче D(+) для спектральных параметров скорость изменения собственных значений и выше, чем .

**3 Вторая задача D(-)**

**3.1 Постановка задачи**

Одномерная краевая задача D(-) на собственные значения и на собственные функции с параметром выглядит следующим образом:

(20)

где y(x) – неизвестная функция;

– спектральный параметр;

r > 0 – вещественный параметр;

– известные вещественные постоянные.

Требуется:

**–** для нескольких значений параметра r найти численно первые три собственные значения;

**–** изобразить графически соответствующие собственные функции;

**–** определить характер эволюции собственных значений и вида собственных функций в зависимости от изменения параметра r.

**3.2 Решение задачи D(-) в общем виде**

Решение уравнения задачи (20) при >0 и его производная имеют вид:

(21)

(22)

После замены и подстановки (21), (22) в граничные условия (20) получим линейную однородную систему:

(23)

Необходимым и достаточным условием наличия нетривиальных решений данной линейной однородной системы является равенство нулю определителя матрицы этой системы:

, (24)

. (25)

После замены *P = и Q = 2,* получим:

(26)

Подставив в (26) значения параметра и заданных коэффициентов , найдем положительные собственные значение . Затем, подставив их в первое уравнение системы (20), получим собственные функции, соответствующие каждому .

Для нахождения коэффициентов A и B, соответствующих собственным функциям (21) воспользуемся следующими условиями нормировки:

(27)

Окончательно получим:

(28)

Найдём значение параметра , соответствующее нулевому собственному значению , и соответствующую собственную функцию. Для этого возьмём предел от (26) при :

(29)

Решим уравнение (29) относительно .

(30)

Подставим в первое уравнение (20) и найдем соответствующую собственную функцию. Получим:

(31)

Для нахождения коэффициентов A и B, соответствующих данной собственной функции воспользуемся следующими условиями нормировки:

Окончательно получим:

, (32.1)

(32.2)

Чтобы первое собственное значение было отрицательным, должно выполняться соотношение

Решение уравнения задачи (20) при <0 и его производная имеют вид:

. (33)

(34)

После замены и подстановки (33), (34) в граничные условия (20) получим линейную однородную систему:

(35)

Необходимым и достаточным условием наличия нетривиальных решений данной линейной однородной системы является равенство нулю определителя матрицы этой системы:

(36)

Упростив, получим:

(37)

Применим замену

(38)

Подставив в (38) значения параметра и заданных коэффициентов , найдем положительные собственные значение . Затем, подставив их в первое уравнение системы (20), получим собственные функции, соответствующие каждому .

Для нахождения коэффициентов A и B, соответствующих собственным функциям (33) воспользуемся следующими условиями нормировки:

Окончательно получим:

(39)

(40)

**3.3 Решение с заданными значениями**

**3.3.1 Решение для спектрального набора (**

Подставим спектральные значения в (20):

(41)

тогда соотношения (26) и (38) примут вид:

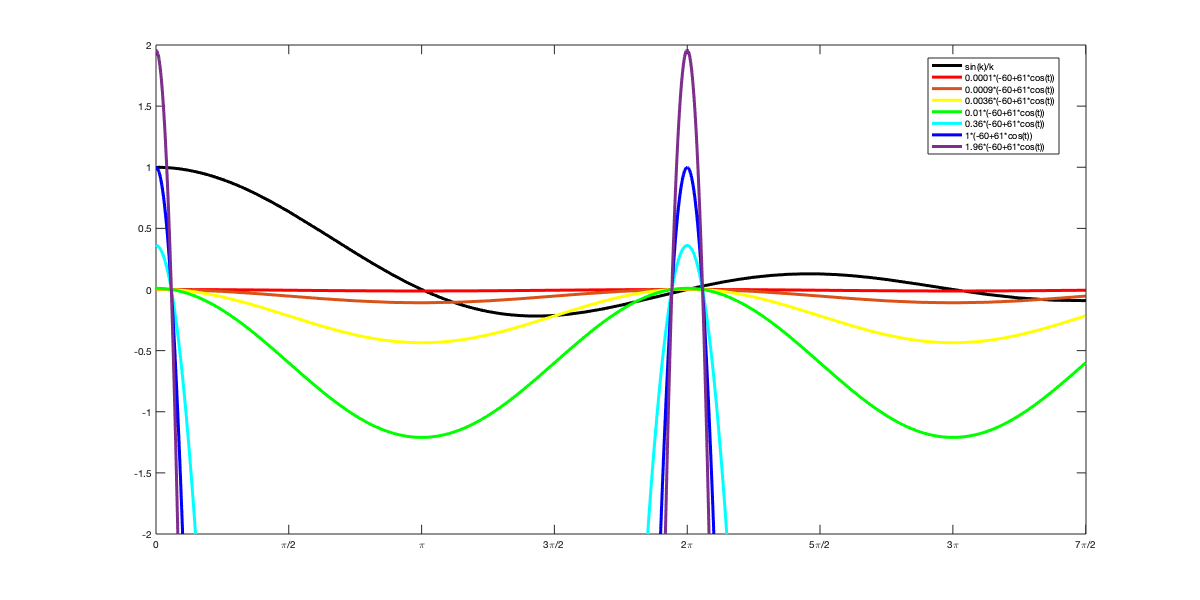
(42)

(43)

Найдем первые 3 собственных значения для различных параметров r.

Таблица 3 **–** Собственные значения для задачи D(-) для значений (5,6)

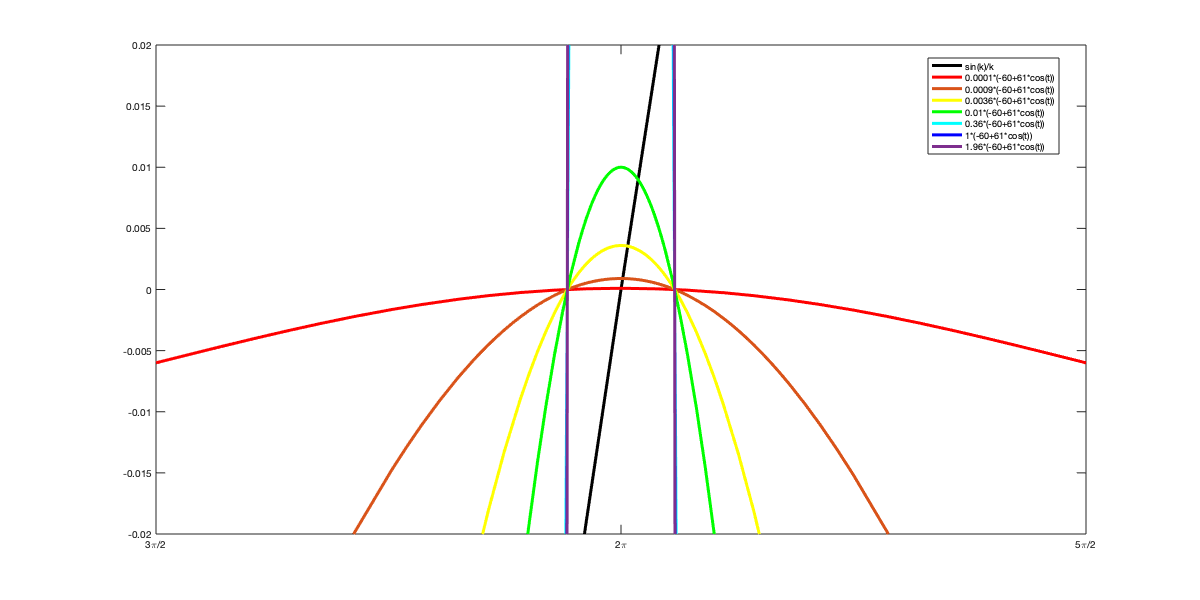
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| r |  |  |  |  |
| 0,0100 | -26863,0000 | 10,1124 | 39,4760 | 88,8482 |
| 0,0300 | -331,7497 | 12,3904 | 39,5495 | 109,3654 |
| 0,0600 | -21,5296 | 22,3729 | 39,6900 | 138,9750 |
| 0,1000 | -4,3681 | 32,0356 | 40,1956 | 149,0391 |
| 0,6000 | -0,0585 | 37,1368 | 41,6928 | 153,2973 |
| 1,0000 = | 0,0000 | 37,1978 | 41,7445 | 153,3572 |
| 1,4000 | 0,0158 | 37,7200 | 41,7703 | 153,3734 |
| 1000,000 | 0,0329 | 37,2328 | 41,7898 | 153,3892 |
| 1000000,000 | 0,0329 | 37,2332 | 41,7903 | 153,3894 |



y

t

Рисунок 19 – Графическое решение уравнения задачи D(-) c параметрами (5,6)



y

t

Рисунок 19.1 – “Микроскоп” для графического решение уравнения

задачи D(-) с параметрами (5,6)

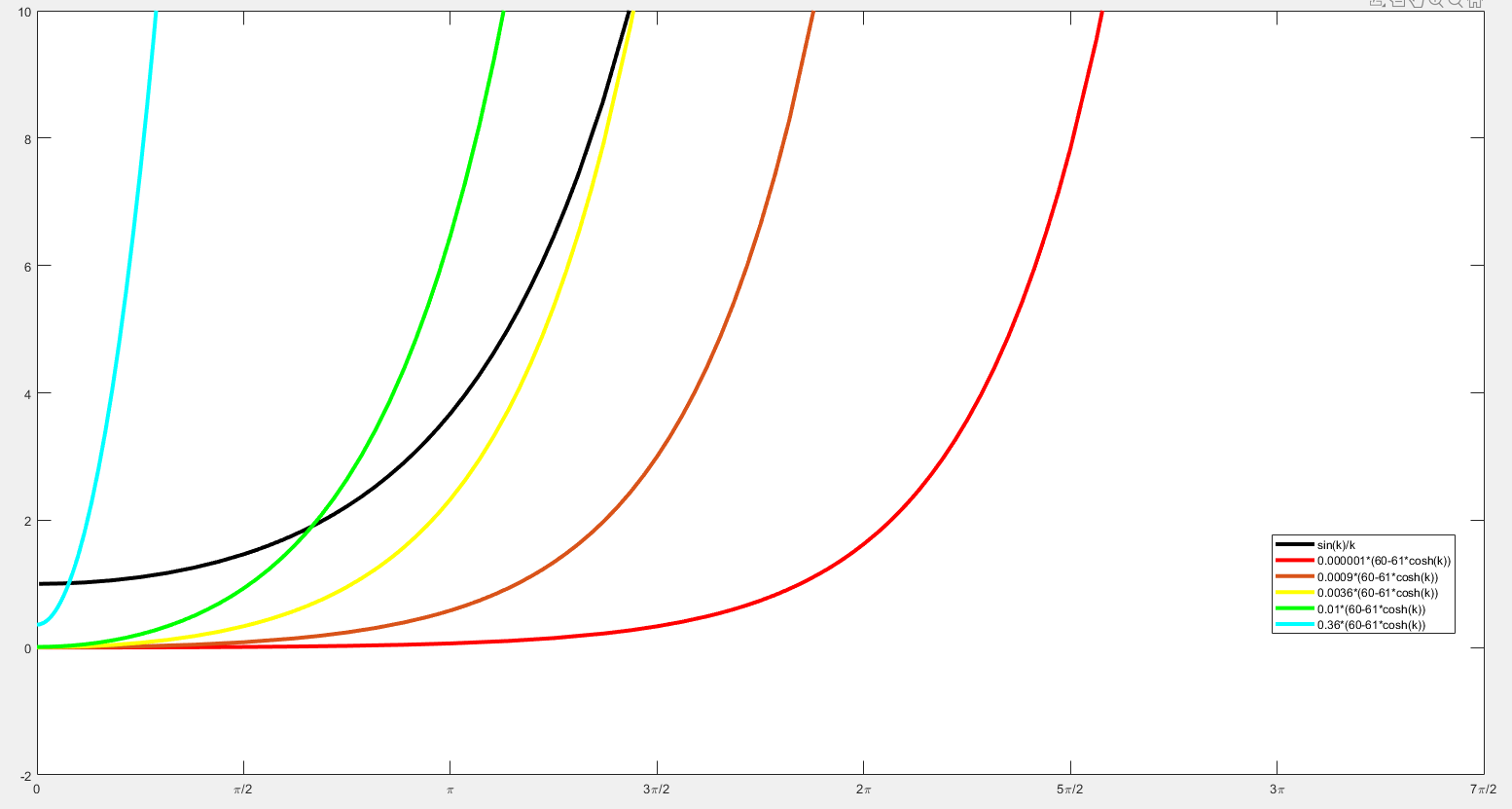
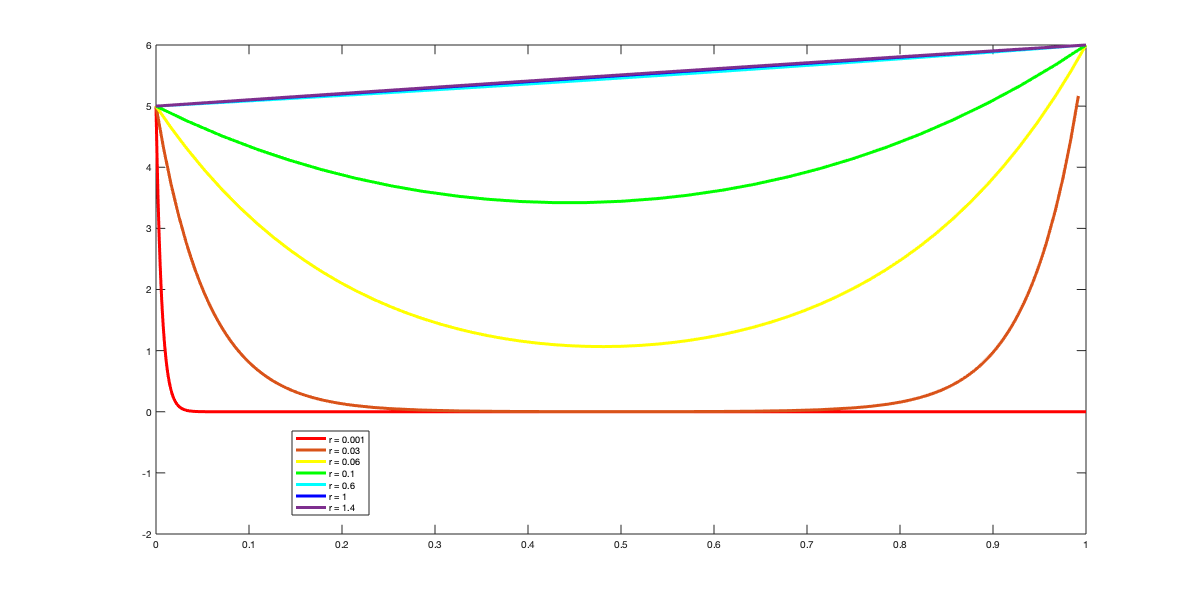


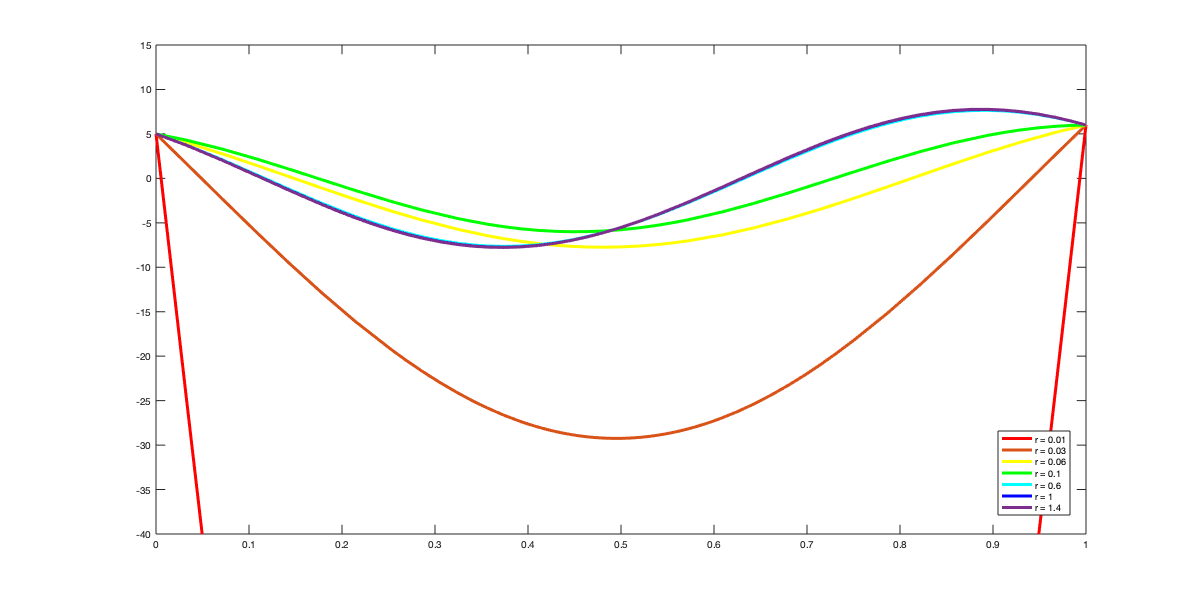
Рисунок 20 – Графическое решение уравнения задачи D(-) c параметрами (5,6)



y

x

Рисунок 21 – Графики собственной функции, соответствующей для задачи D(-) c параметрами (5,6):

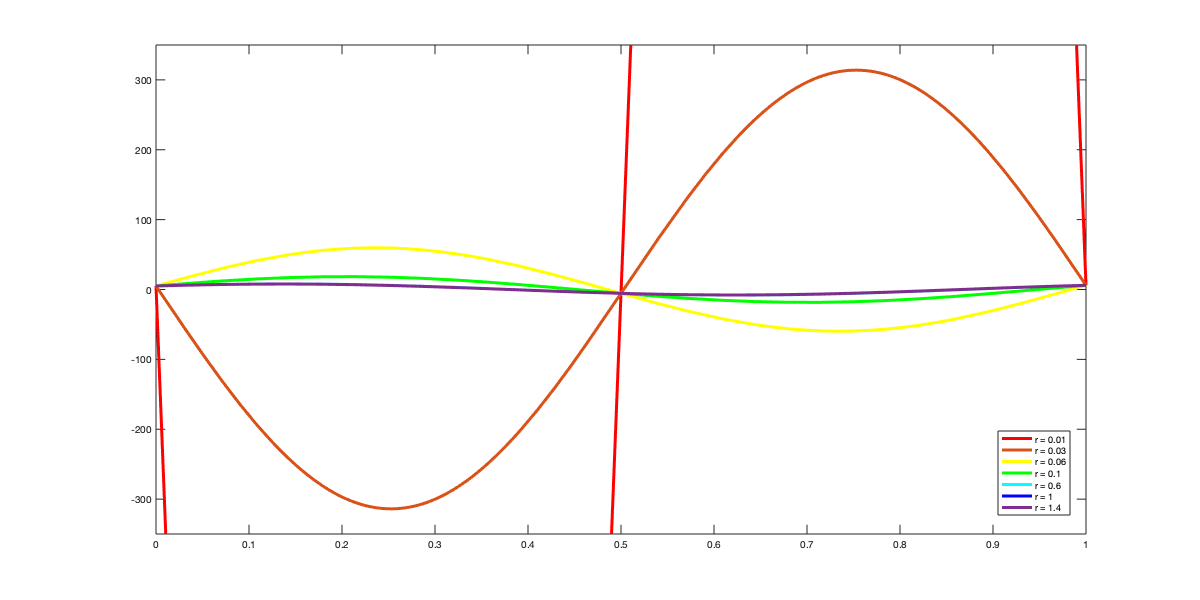


y

x

Рисунок 22 – Графики собственной функции

для задачи D(-) c параметрами (5,6)



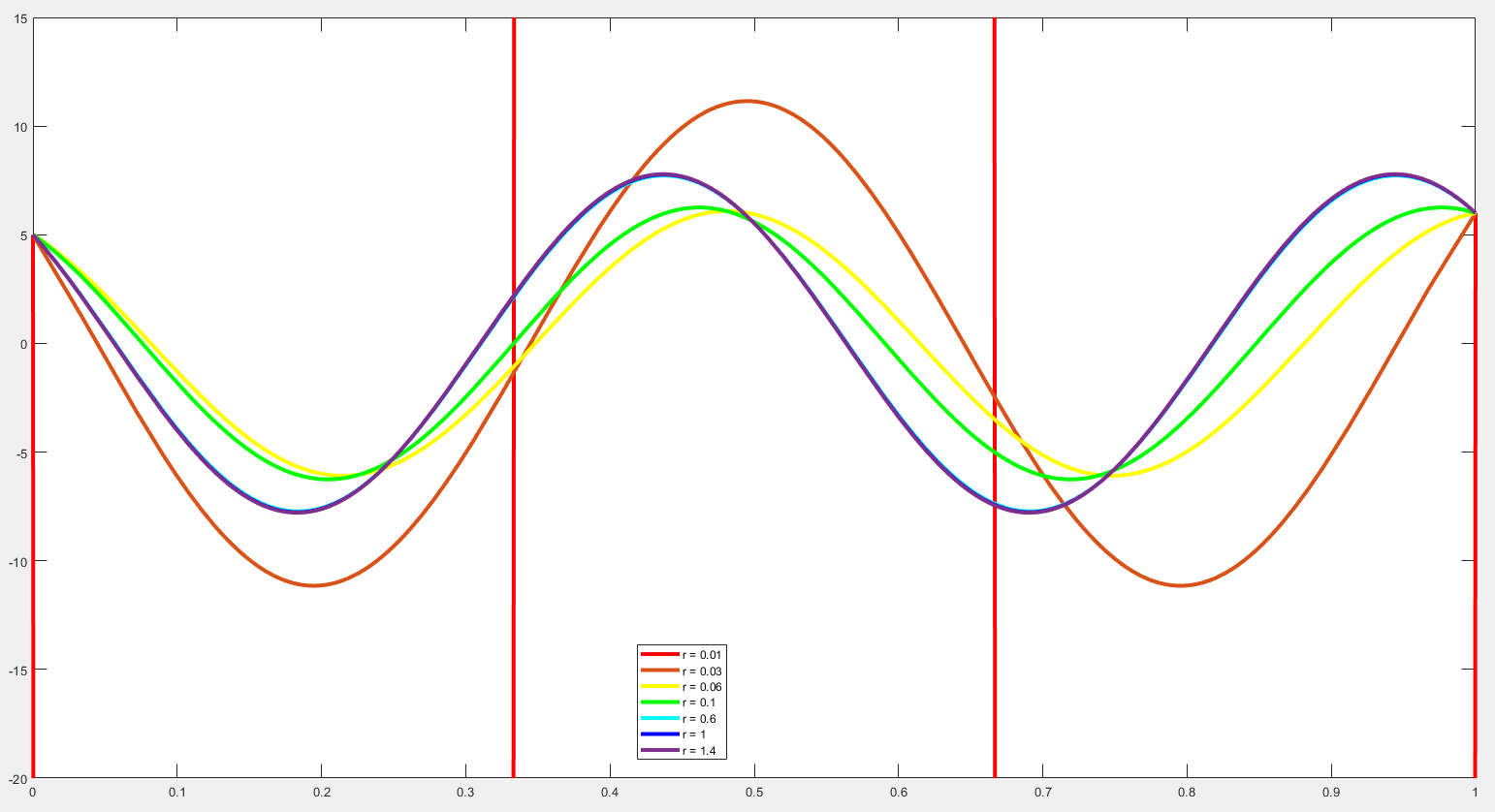
y

x

Рисунок 23 – Графики собственной функции

для задачи D(-) c параметрами (5,6)

y



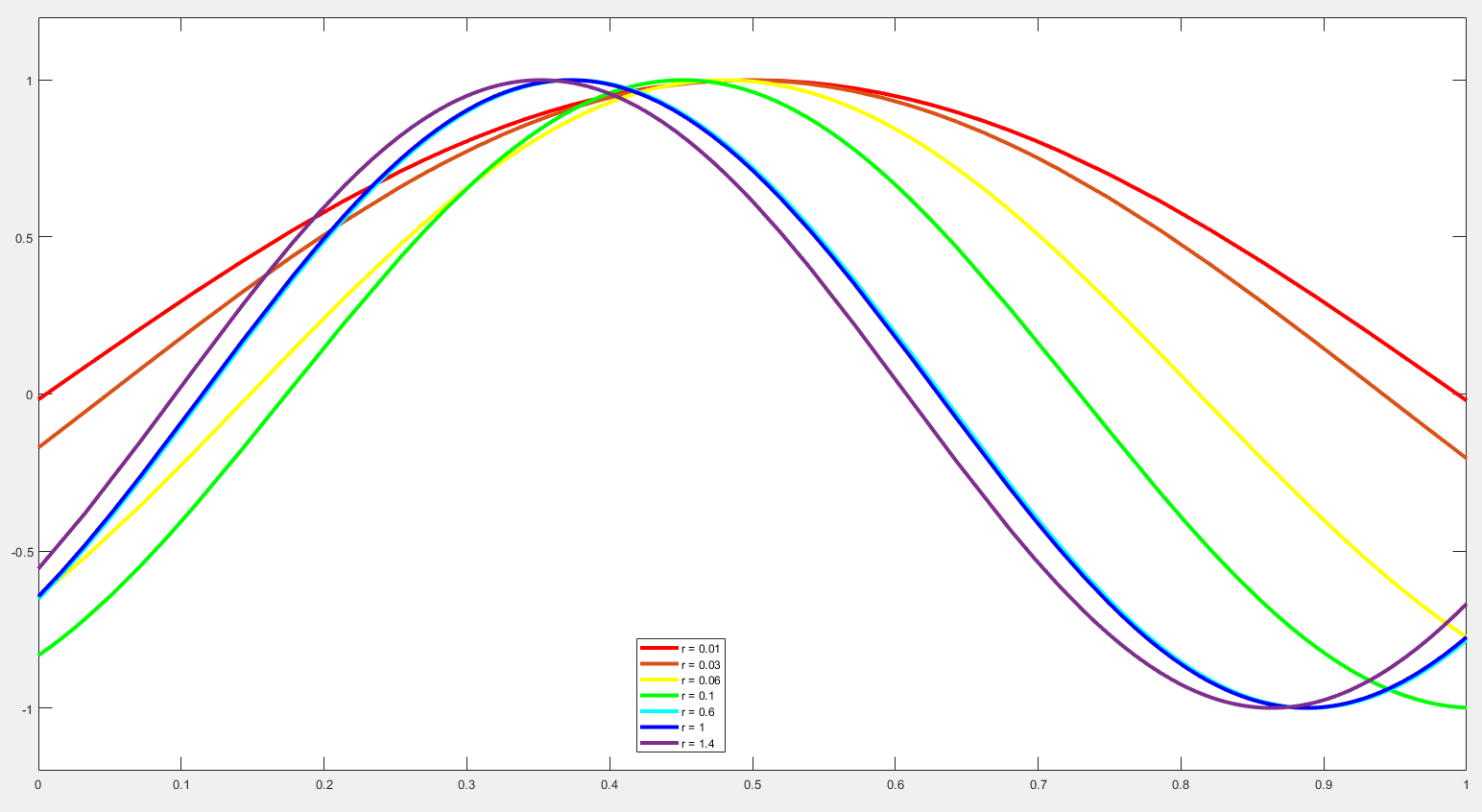
x

Рисунок 24 – Графики собственной функции

для задачи D(-) c параметрами (5,6)

Теперь найдём для соответствующей собственной функции (3) коэффициенты A и B из условий нормировки.

Окончательно получим:

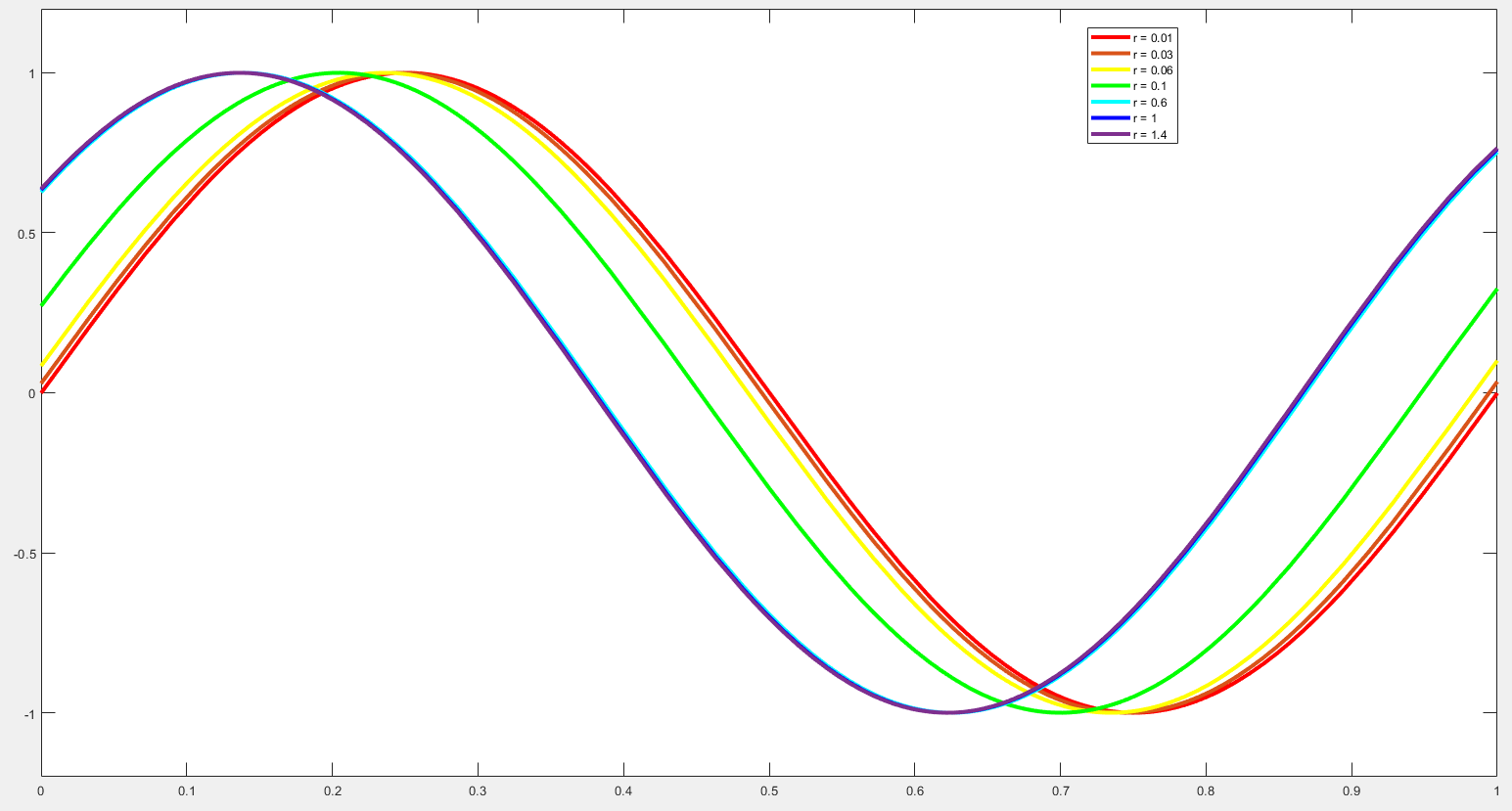


y

x

Рисунок 25 – Графики собственной функции

для задачи D(-) c параметрами (5,6)

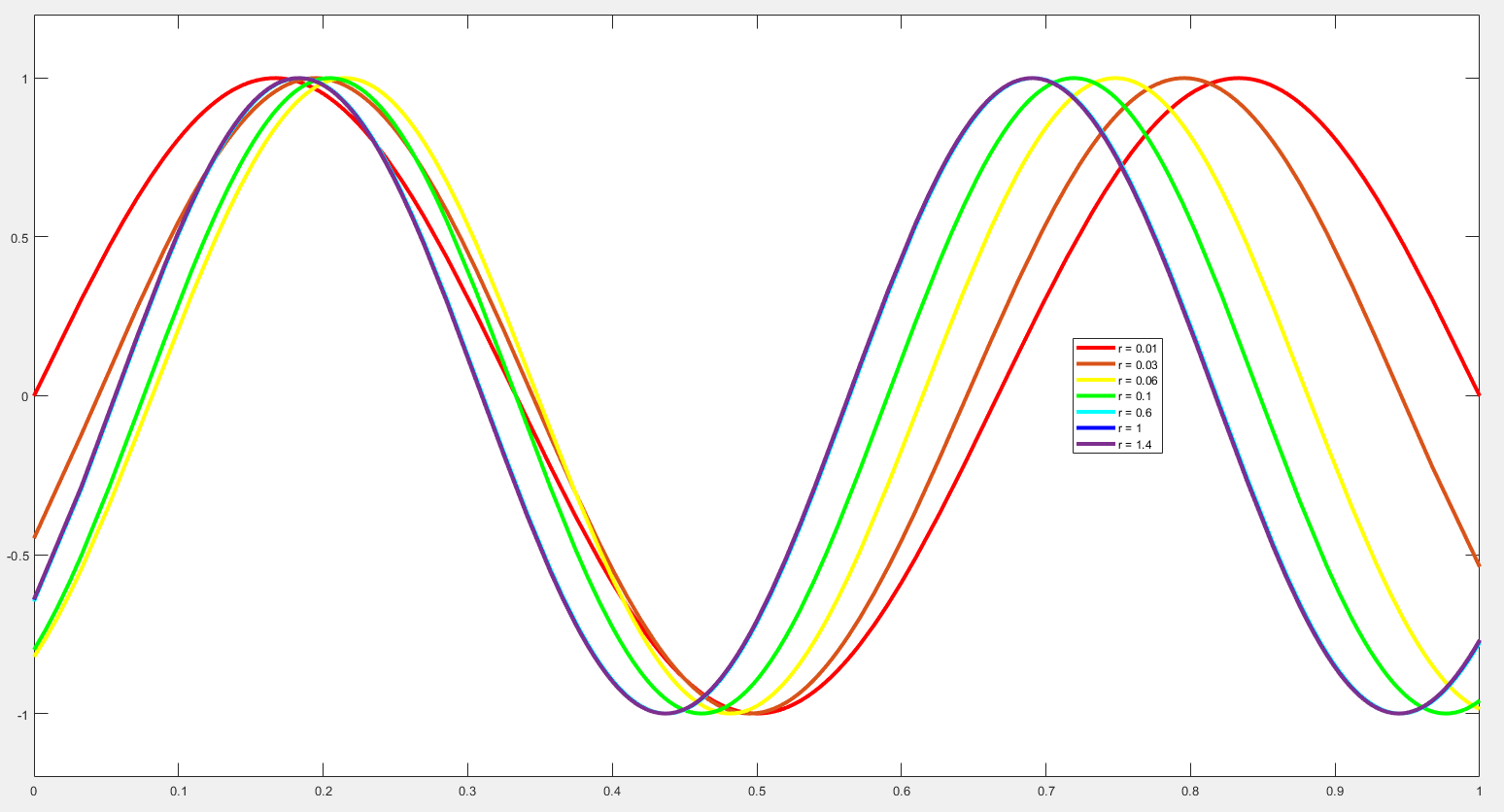


y

x

Рисунок 26 – Графики собственной функции

для задачи D(-) c параметрами (5,6)



y

x

Рисунок 27 – Графики собственной функции

для задачи D(-) c параметрами (5,6)

**3.3.2 Решение для спектрального набора (**

Подставим спектральные значения в (20):

(44)

тогда соотношения (26) и (38) примут вид:

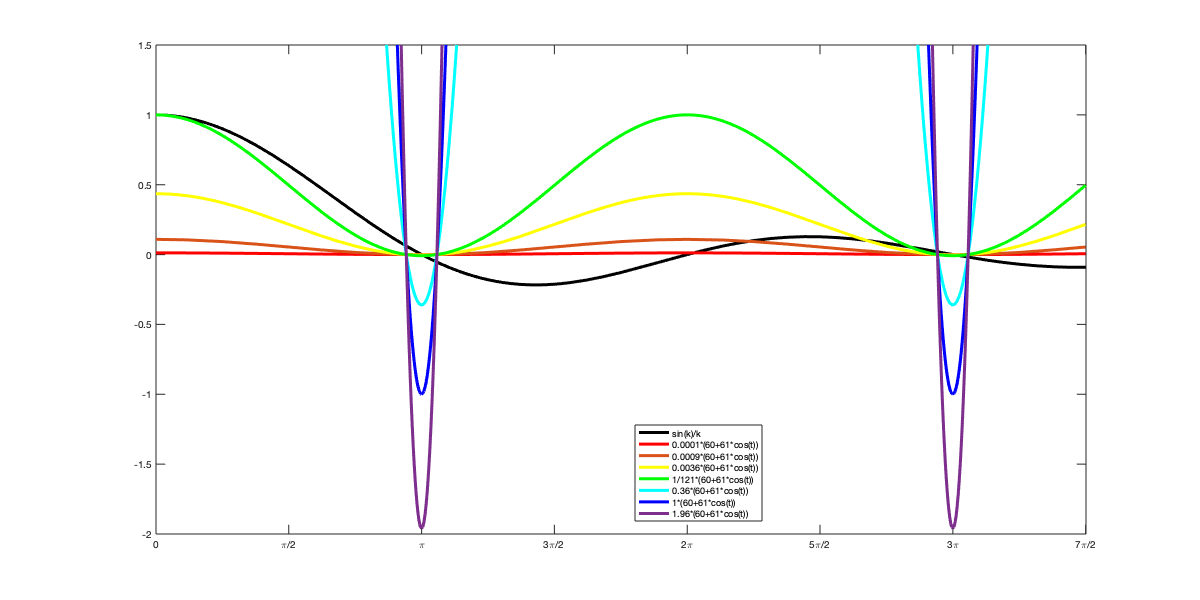
(45)

(46)

Найдем первые 3 собственных значения для различных параметров r.

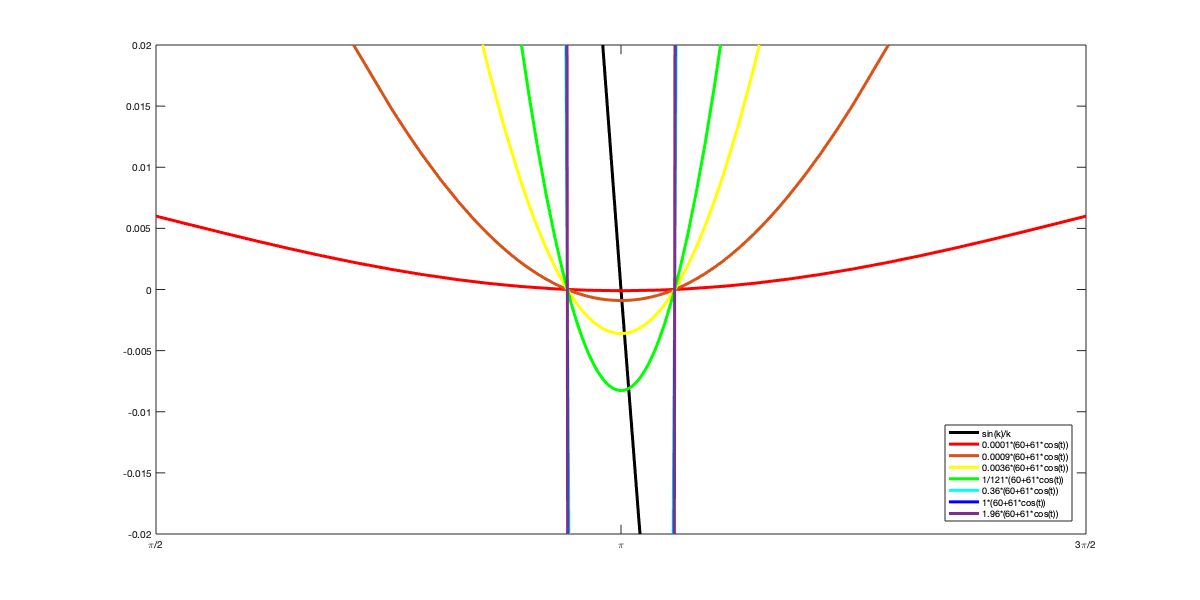
Таблица 4 **–** Собственные значения для задачи D(-) для значений (-5,6)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| r |  |  |  |  |
| 0,0100 | -26863,0000 | 9,8695 | 40,4496 | 88,8442 |
| 0,0300 | -331,7497 | 9,8847 | 49,1541 | 88,9863 |
| 0,0600 | -21,5296 | 9,9351 | 70,5768 | 89,4481 |
| 0,0900 = | 0,0000 | 10,0298 | 79,6020 | 90,0853 |
| 0,6000 | 8,6671 | 10,9449 | 85,3406 | 92,1874 |
| 1,0000 | 8,7261 | 11,0091 | 85,3960 | 92,2443 |
| 1,4000 | 8,7438 | 11,0224 | 85,4145 | 92,2610 |
| 1000,0000 | 8,7632 | 11,0417 | 85,4415 | 92,2771 |
| 1000000,0000 | 8,7630 | 11,0419 | 85,4420 | 92,2772 |



t

Рисунок 28 – Графическое решение уравнения задачи D(-) c параметрами (-5,6)

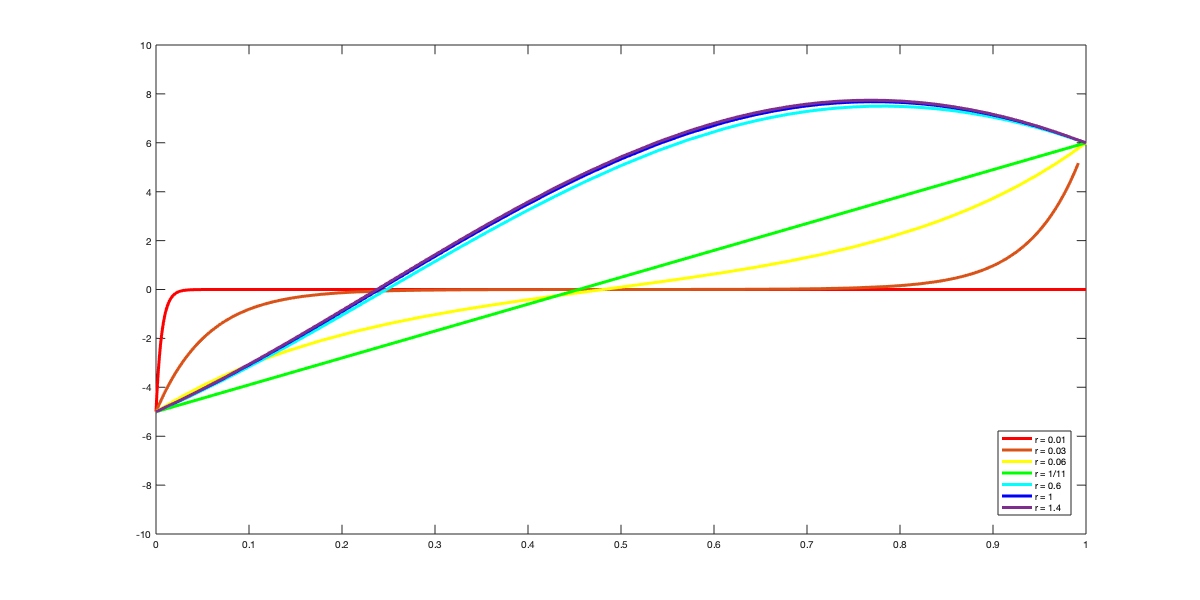


y

t

Рисунок 28.1 – “Микроскоп” для графического решение уравнения

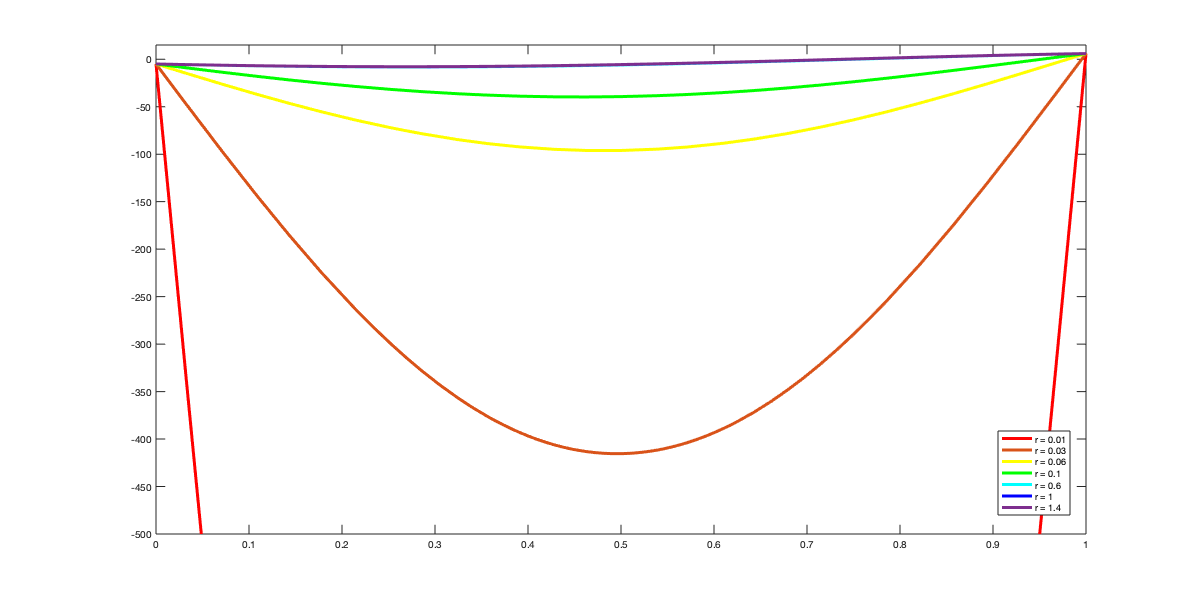
задачи D(-) с параметрами (-5,6)



y

x

Рисунок 29 – Графики собственной функции, соответствующей для задачи D(-) c параметрами (-5,6):

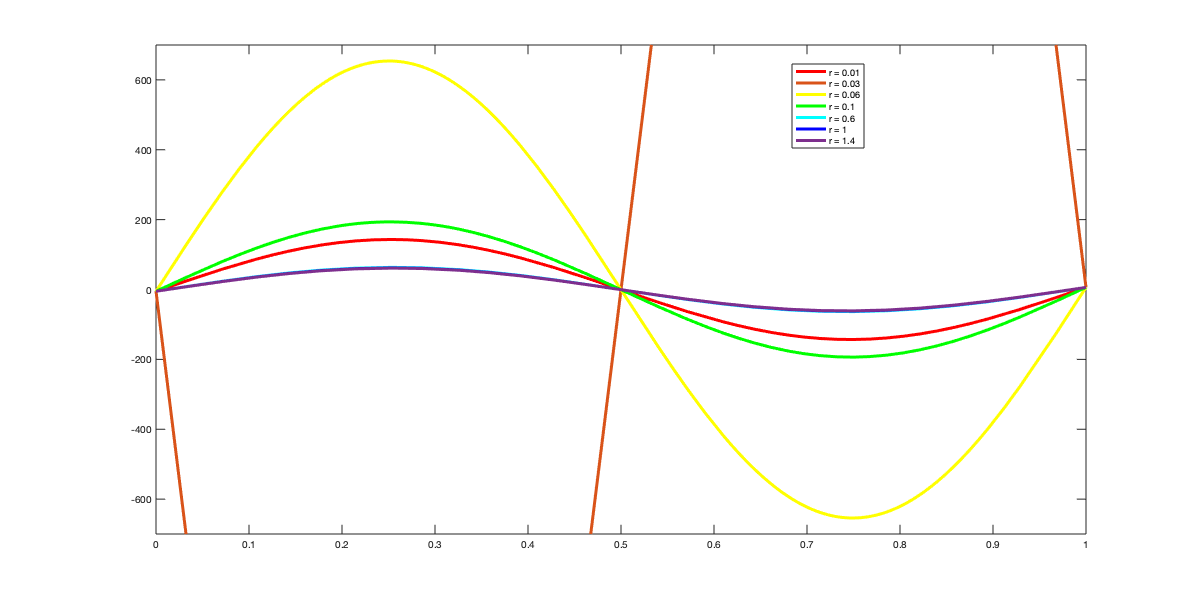


x

y

Рисунок 30 – Графики собственной функции

для задачи D(-) c параметрами (-5,6)



y

x

Рисунок 31 – Графики собственной функции для задачи D(-) c параметрами (-5,6)



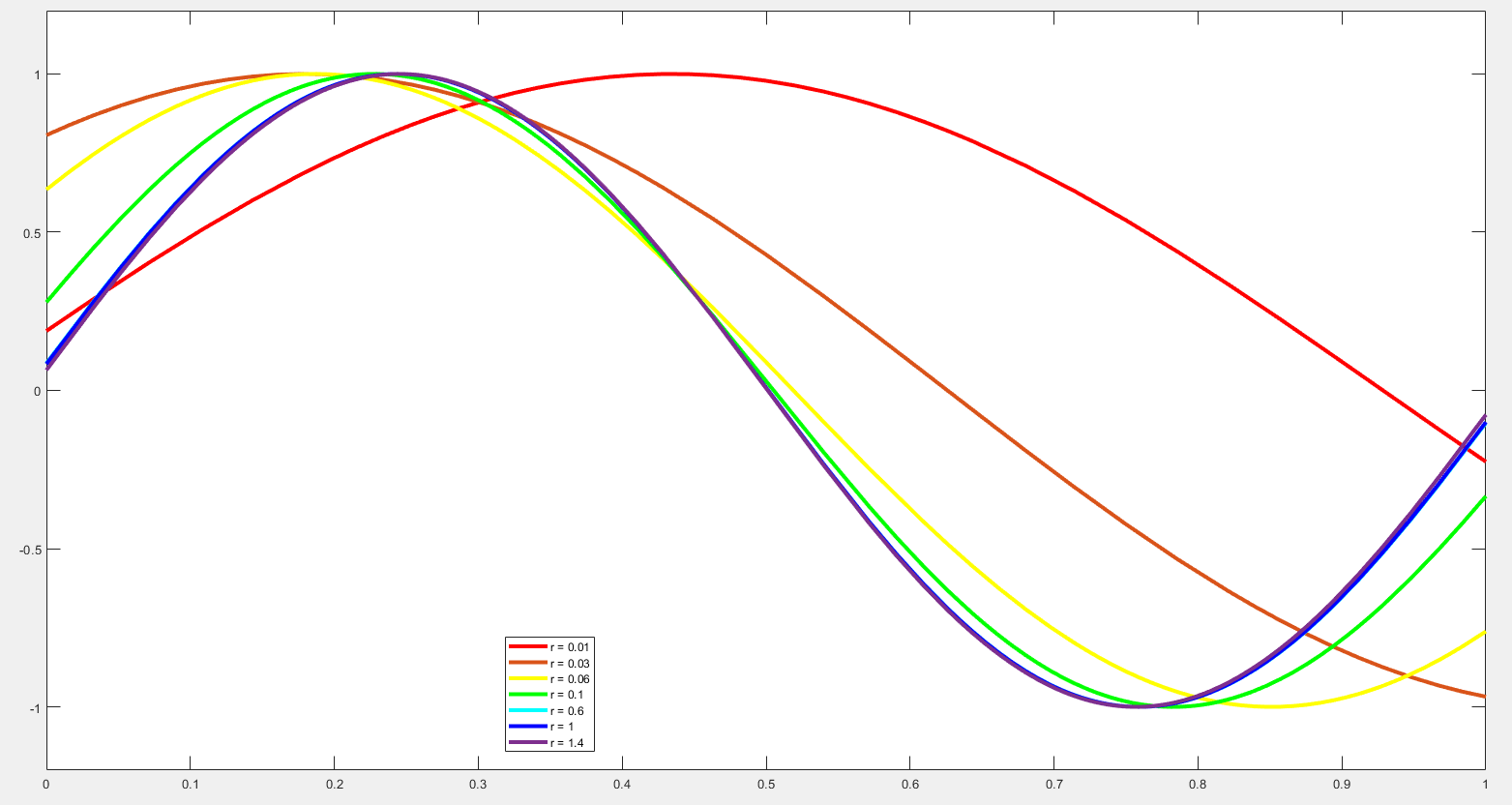
x

y

Рисунок 32 – Графики собственной функции для задачи D(-) c параметрами (-5,6)

Теперь найдём для соответствующей собственной функции (3) коэффициенты A и B из условий нормировки.

Окончательно получим:

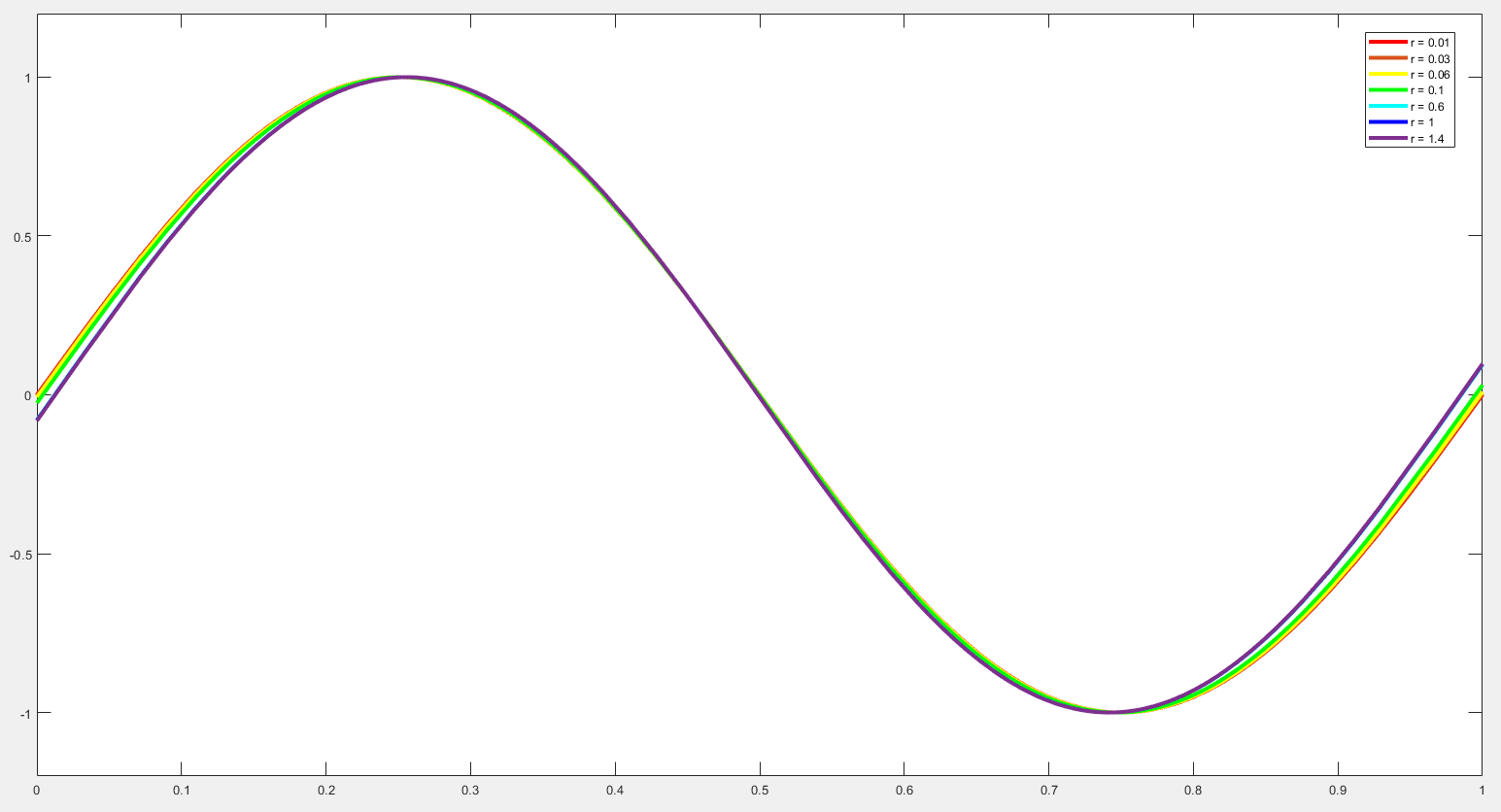


x

y

Рисунок 33 – Графики собственной функции

для задачи D(-) c параметрами (-5,6)

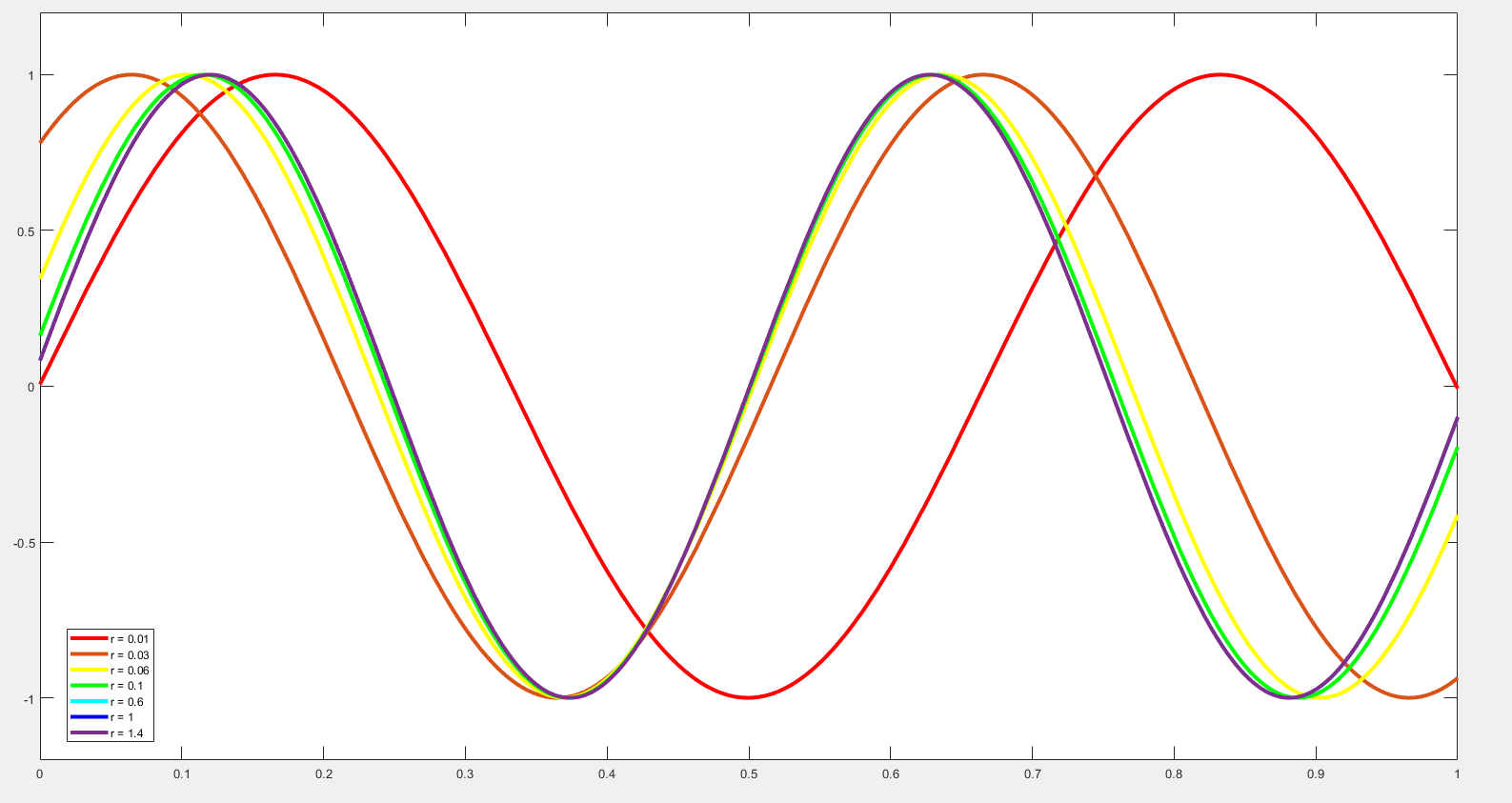


x

y

Рисунок 34 – Графики собственной функции

для задачи D(-) c параметрами (-5,6)



x

y

Рисунок 35 – Графики собственной функции

для задачи D(-) c параметрами (-5,6)

**3.4 Обсуждение результатов**

На основании Таблицы 3 и Таблицы 4 можно сделать вывод о том, что и при наборе (5,6), и при наборе (-5,6) спектральных параметров, во-первых, собственные значения существенно зависят от параметра Во-вторых, при первое собственное значение является отрицательным, а все последующие положительными, при получаем первое собственное значение , а при все собственные значения больше нуля.

В задаче D(-) для спектральных параметров скорость изменения собственных значений и выше, чем и . Для спектральных параметров мы можем видеть, что скорость изменения собственных значений и выше, чем и

**4 Третья задача N(+)**

**4.1 Постановка задачи**

Одномерная краевая задача N(+) на собственные значения и на собственные функции с параметром выглядит следующим образом:

(47)

где y(x) – неизвестная функция;

– спектральный параметр;

r > 0 – вещественный параметр;

– известные вещественные постоянные.

Требуется:

**–** для нескольких значений параметра r численно найти первые три собственных значения;

**–** изобразить графически соответствующие собственные функции;

**–** определить характер эволюции собственных значений и вида собственных функций в зависимости от изменения параметра r.

**4.2 Решение задачи N(+) в общем виде**

Решение уравнения задачи (47) при >0 и его производная имеют вид [4]:

(48)

(49)

После замены и подстановки (48), (49) в граничные условия (47) получим линейную однородную систему:

(50)

Необходимым и достаточным условием наличия нетривиальных решений данной линейной однородной системы является равенство нулю определителя матрицы этой системы:

, (51)

. (52)

После замены *P = и Q = 2,* получим:

(53)

Уравнение (53) при любом положительном r имеет счетное множество решений, локализованных между корнями уравнения .

Докажем, что все собственные значения задачи (1) будут положительными.

Умножим обе части уравнения на и проинтегрируем по Полученный интеграл на решениях должен равняться нулю:

(54)

Значения в точках из равны:

(55)

С учетом преобразуем первое слагаемое из правой части к виду:

(56)

Покажем, что Предположим, а значит Но тогда в силу граничных условий окажется, что что невозможно при .

Предположим, Тогда выполняется , что с учётом оценки делает невозможным . Значит, наше предположение неверно, и отсюда следует положительность собственных значений [5].

**4.3 Решение с заданными значениями**

**4.3.1 Решение для спектрального набора (**

Подставим спектральные значения в (47):

(57)

тогда соотношение (53) примет вид:

(58)

Таблица 5 **–** Собственные значения для задачи N(+) для значений (5,6)

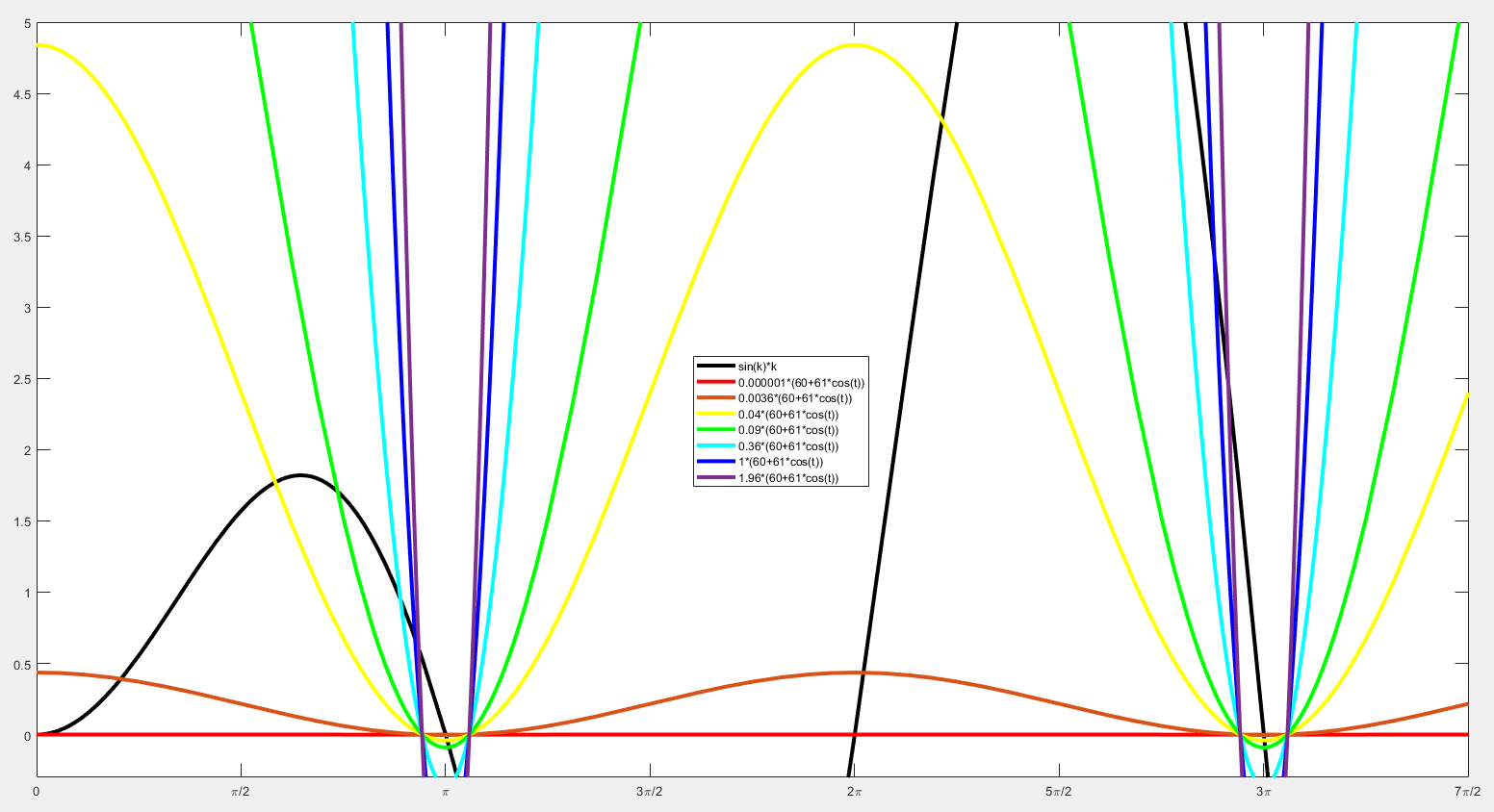
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| r |  |  |  |  |
| 0,0010 | 0,000121 | 9,8696 | 39,4787 | 88,8261 |
| 0,0600 | 0,4199 | 9,8768 | 40,3446 | 88,8343 |
| 0,2000 | 3,3563 | 9,9491 | 48,3371 | 88,9064 |
| 0,3000 | 5,328 | 10,0446 | 56,7176 | 89,0062 |
| 0,6000 | 7,8081 | 10,4194 | 74,5761 | 89,5161 |
| 1,0000 | 8,4482 | 10,7383 | 81,8038 | 90,4001 |
| 1,4000 | 8,6091 | 10,8729 | 83,7552 | 91,0690 |
| 1000,0000 | 8,7632 | 11,0417 | 85,4415 | 92,2771 |
| 1000000,0000 | 8,7633 | 11,0421 | 85,4419 | 92,2031 |

Найдем для соответствующей собственной функции (48) коэффициенты A и B. Для этого воспользуемся условиями нормировки .

Окончательно получим:

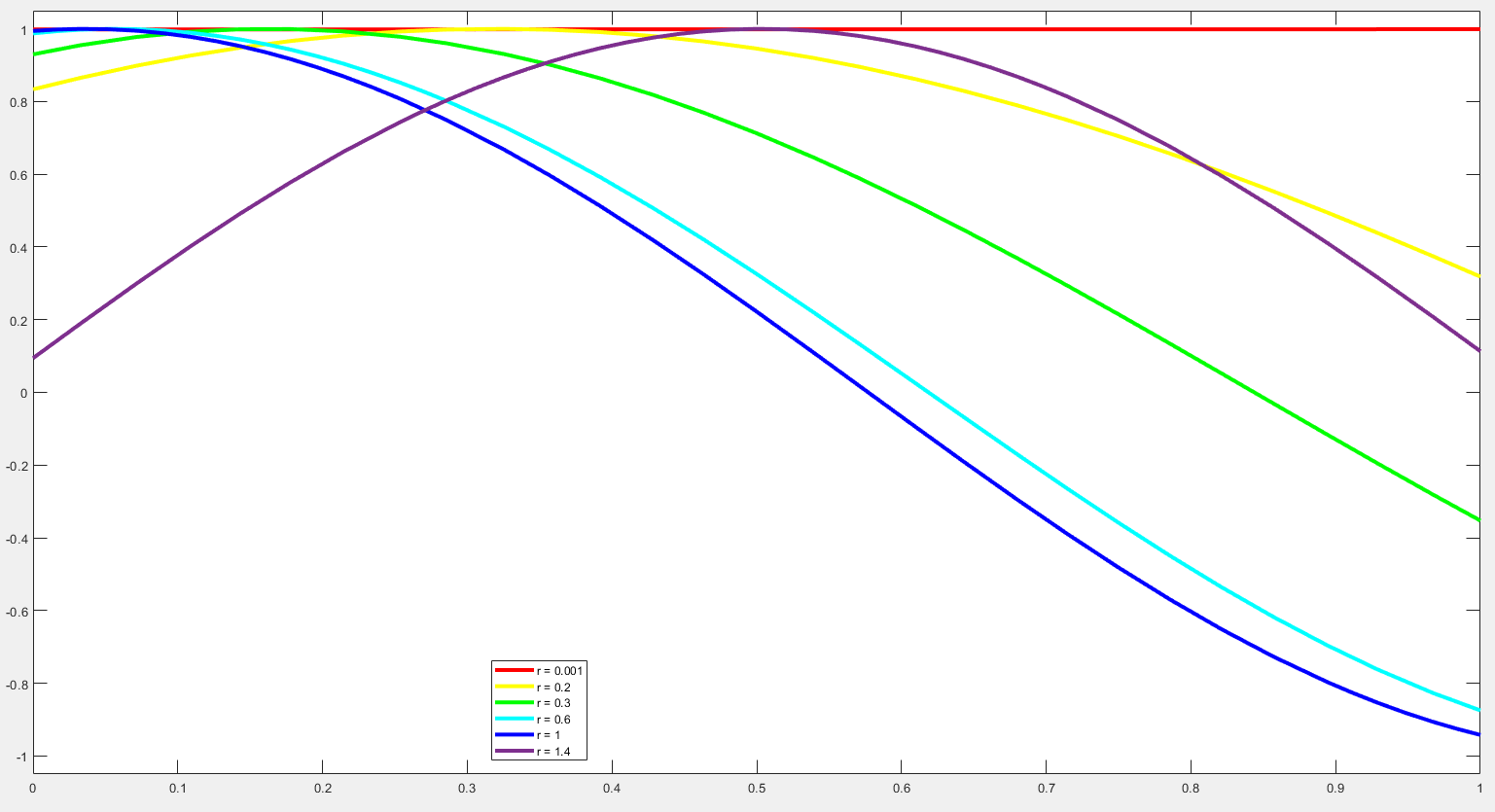
(59)

y



t

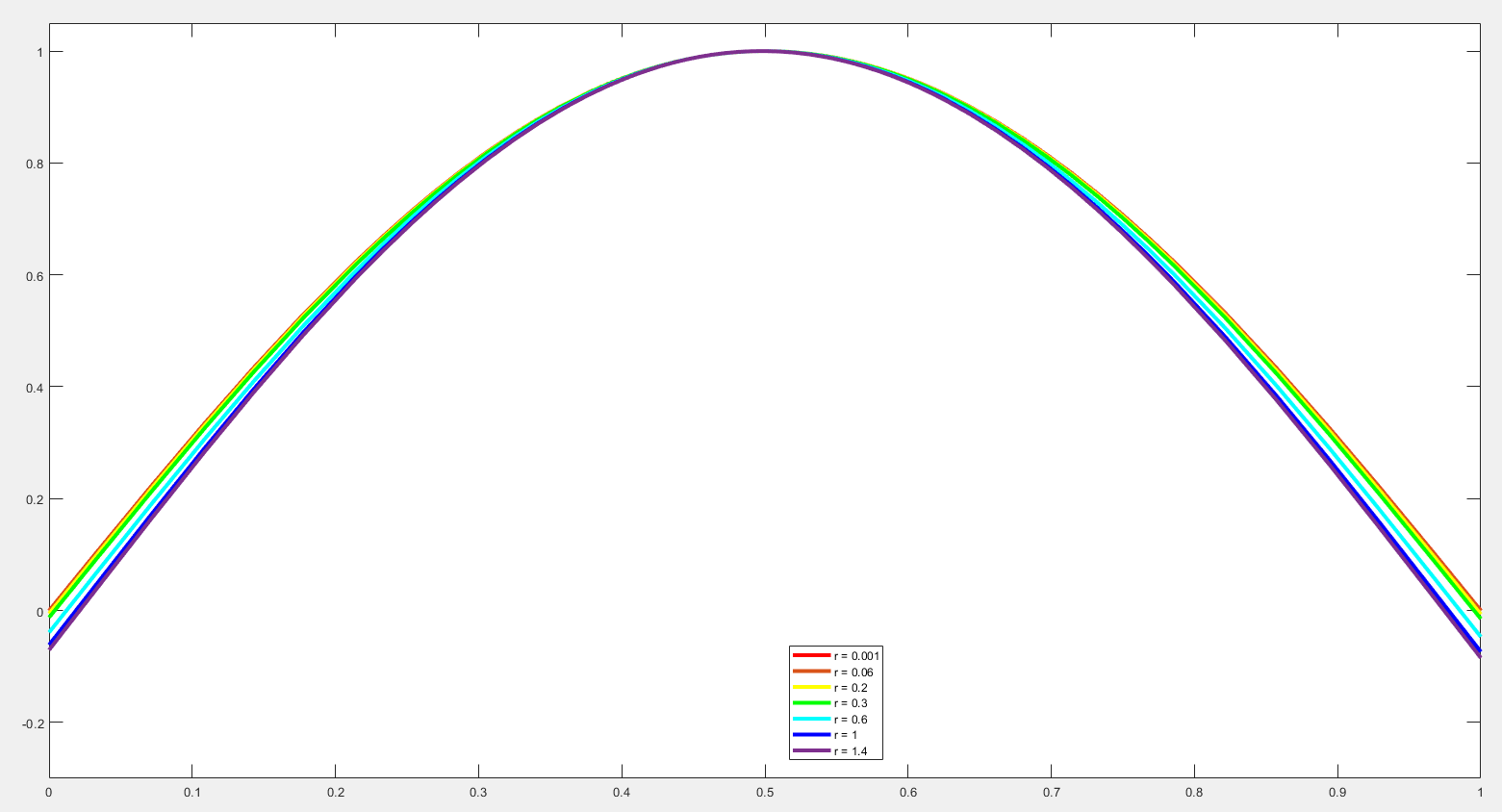
Рисунок 36 – Графическое решение уравнения задачи N(+) с параметрами (5,6)



y

x

Рисунок 37 – Графики собственной функции для задачи N(+) с параметрами (5,6)

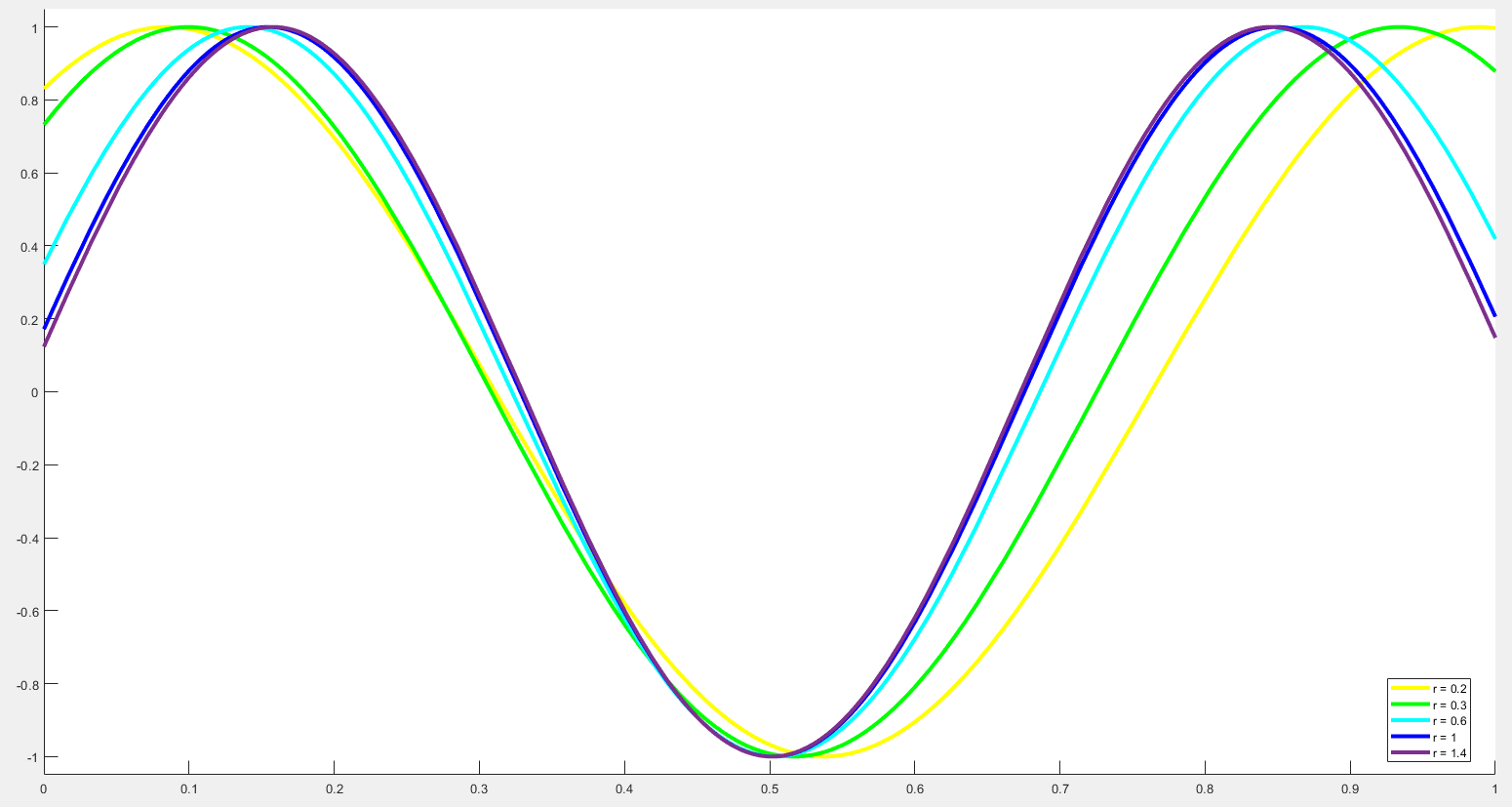


y

x

Рисунок 38 – Графики собственной функции

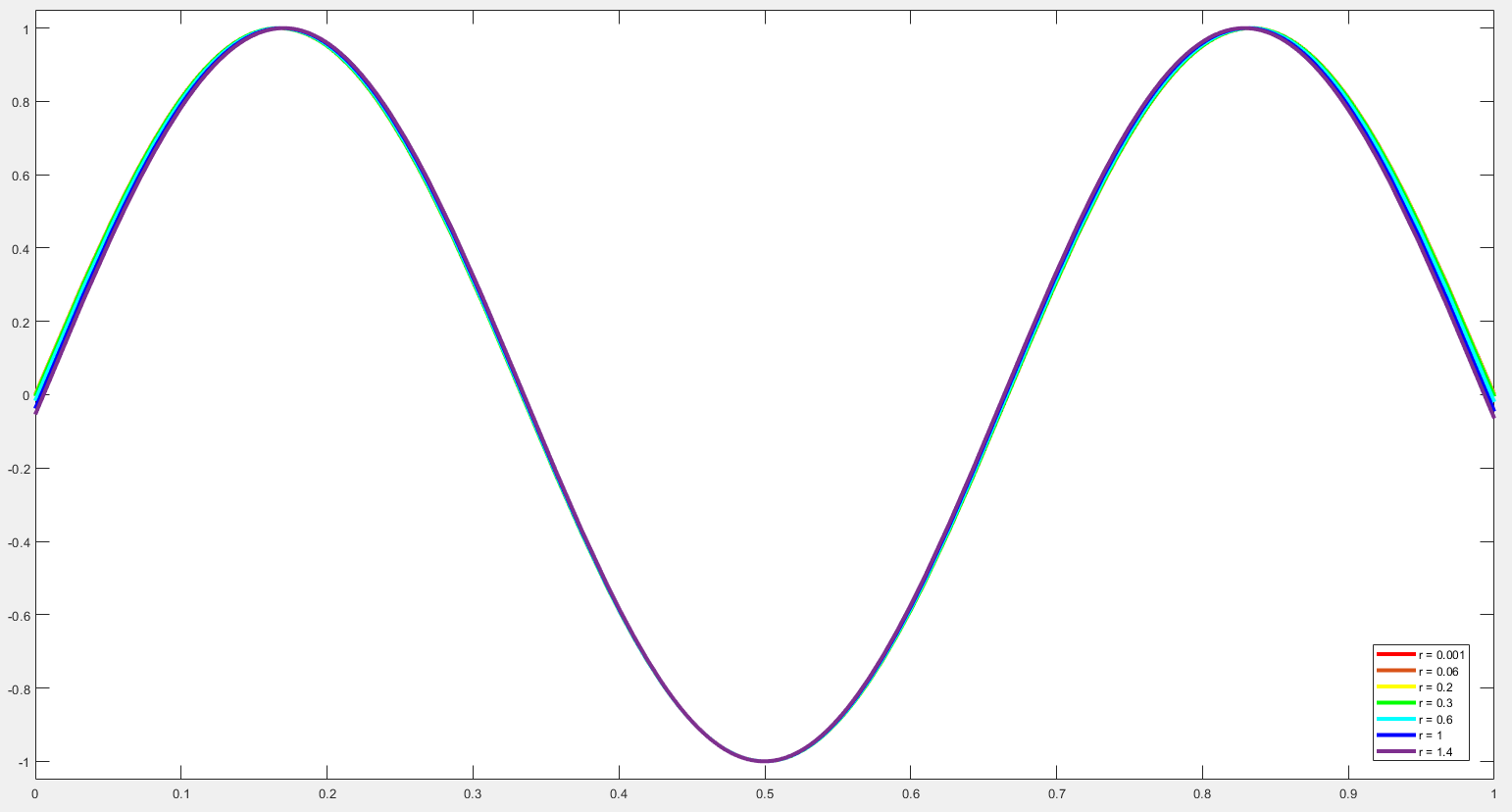
для задачи N(+) с параметрами (5,6)

 Рисунок 39 – Графики собственной функции

y

x

для задачи N(+) с параметрами (5,6)

 Рисунок 40 – Графики собственной функции

y

x

для задачи N(+) с параметрами (5,6)

**2.3.2 Решение для спектрального набора (**

Подставим спектральные значения в (47):

(60)

тогда соотношение (53) примет вид:

(61)

Таблица 6 **–** Собственные значения для задачи N(+) для значений (-5,6)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| r |  |  |  |  |
| 0,0010 | 0,000001 | 9,8698 | 39,4784 | 88,8273 |
| 0,0600 | 0,003245 | 10,7218 | 39,4856 | 89,6954 |
| 0,2000 | 0,01806 | 17,5334 | 39,5583 | 98,0862 |
| 0,3000 | 0,02409 | 23,2621 | 39,6571 | 107,9212 |
| 0,6000 | 0,03013 | 32,6842 | 40,1363 | 133,7854 |
| 1,0000 | 0,03183 | 35,7574 | 40,8035 | 146,5154 |
| 1,4000 | 0,03234 | 36,5362 | 41,1978 | 150,2193 |
| 1000,0000 | 0,03288 | 37,2328 | 41,7898 | 153,3893 |
| 1000000,0000 | 0,03288 | 37,2333 | 41,7904 | 153,3894 |

Найдем для соответствующей собственной функции (3) коэффициенты A и B. Для этого воспользуемся условиями нормировки .

Окончательно получим:

y



t

Рисунок 41 – Графическое решение уравнения задачи N(+) с параметрами (-5,6)

t

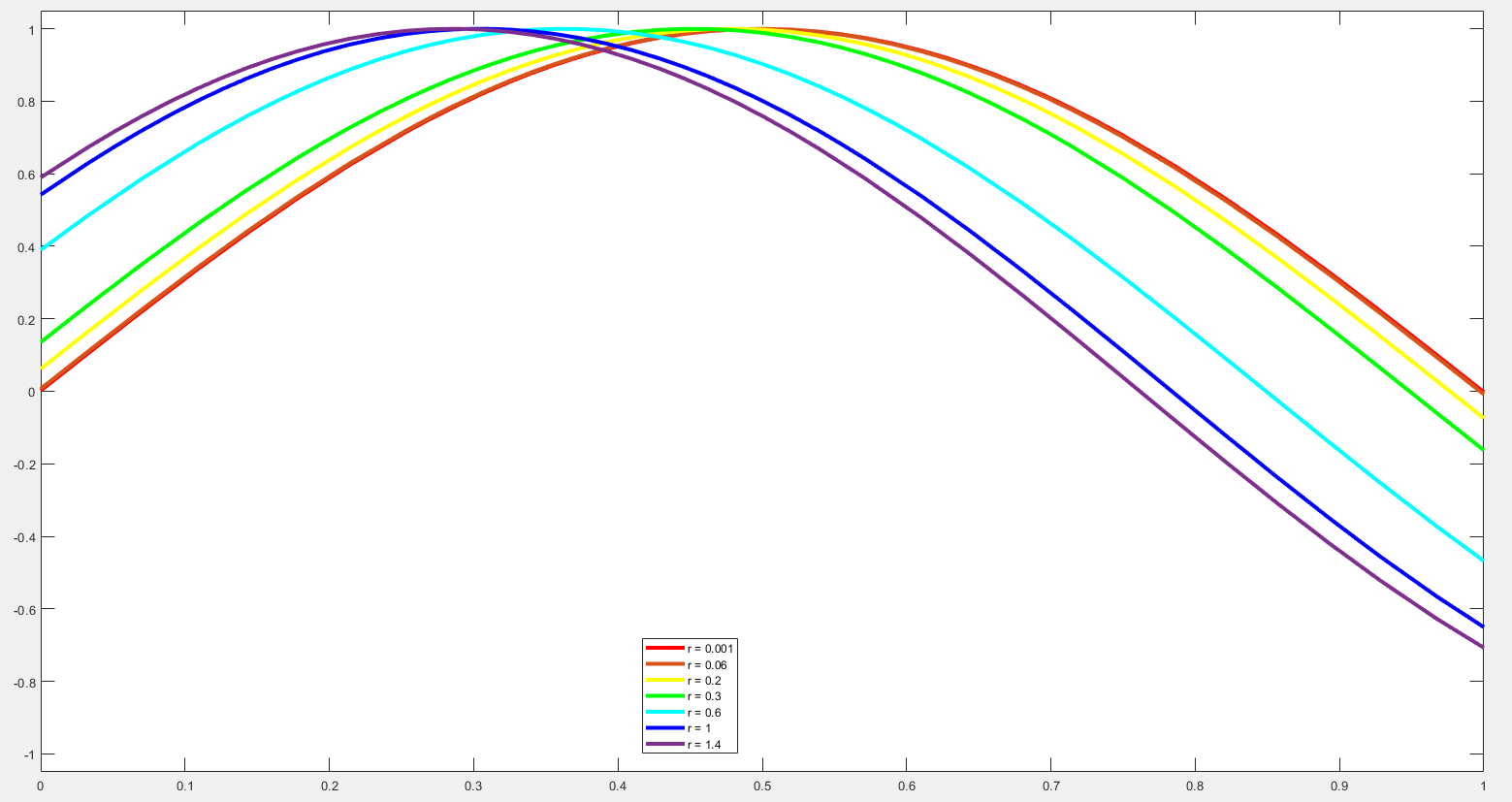


y

x

Рисунок 42 – Графики собственной функции

для задачи N(+) с параметрами (-5,6)

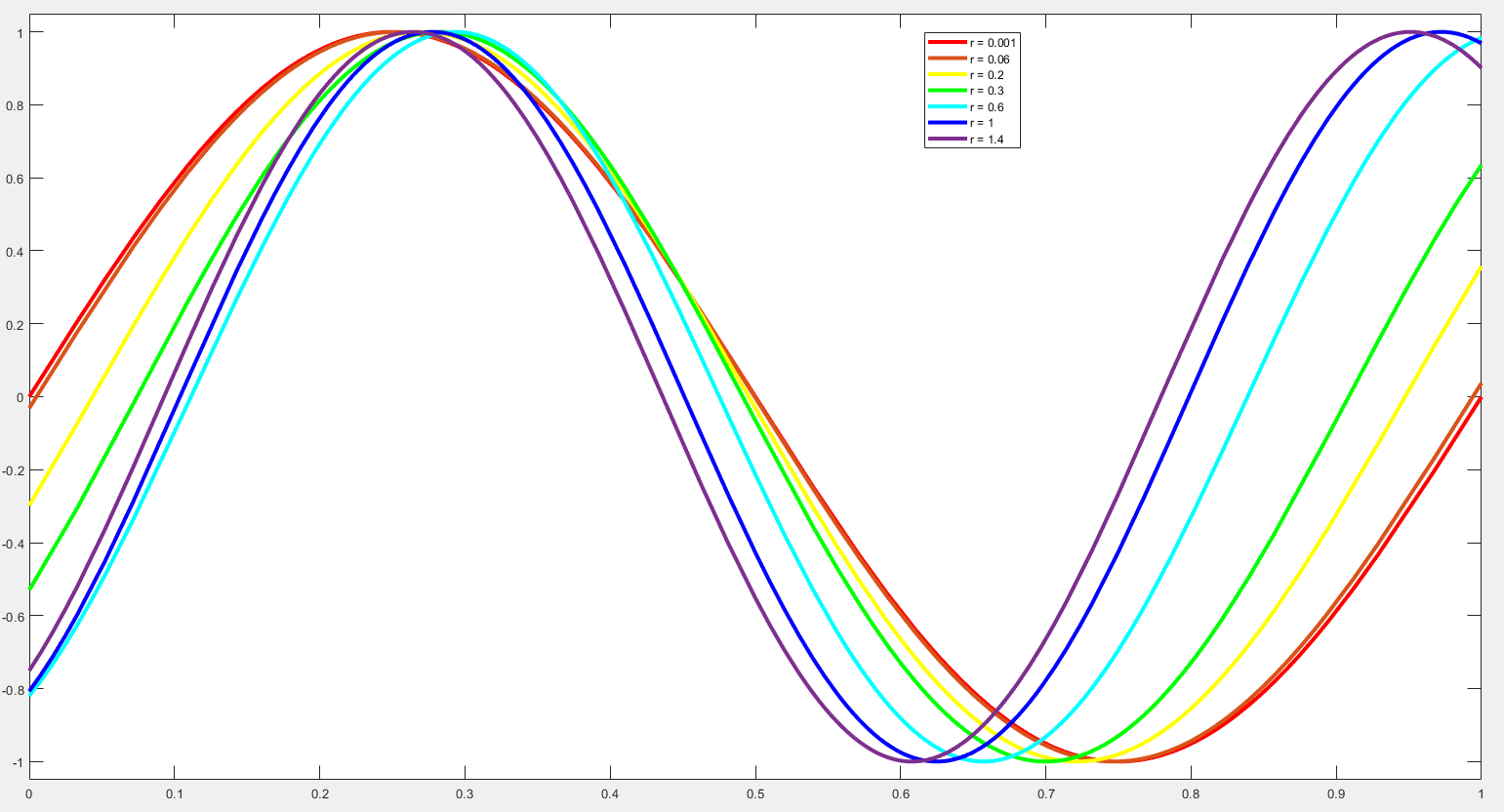


x

y

Рисунок 43 – Графики собственной функции

для задачи N(+) с параметрами (-5,6)

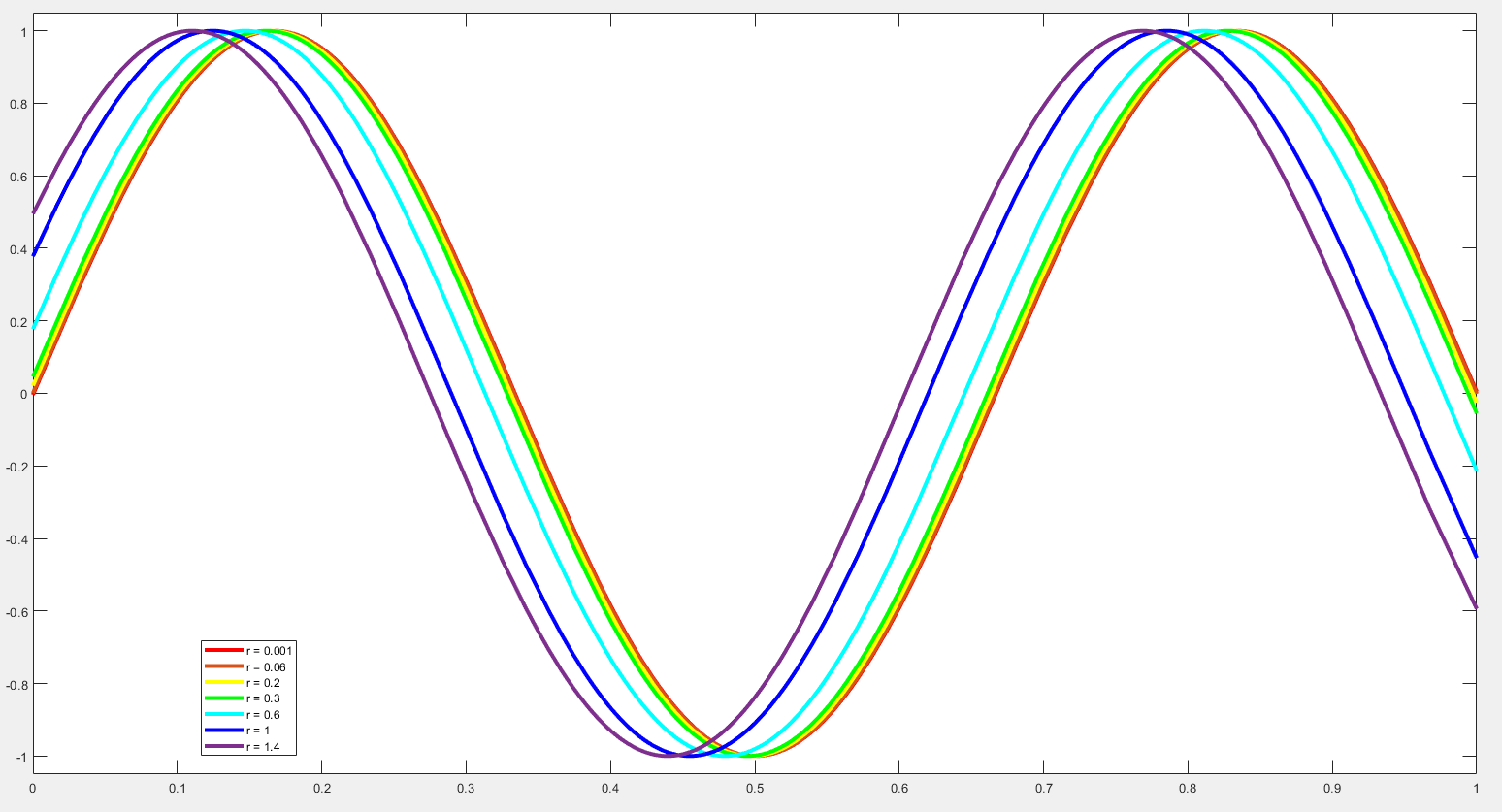


y

x

Рисунок 44 – Графики собственной функции

для задачи N(+) с параметрами (-5,6)



y

x

Рисунок 45 – Графики собственной функции

для задачи N(+) с параметрами (-5,6)

**4.4 Обсуждение результатов**

На основании Таблицы 5 делаем вывод о том, что собственные значения при наборе параметров (5,6) существенно зависят от параметра С его увеличением скорость изменения собственных значений увеличивается, при , следовательно при , а при ,

На основании Таблиц 6 можно сделать вывод о том, что собственные значения и зависят от параметра менее существенно (а более существенно), чем в задаче N(+) со спектральными параметрами но с его увеличением скорость изменения собственных значений всё также увеличивается, при , а при .

В задаче N(+) для спектральных параметров скорость изменения собственных значений и выше, чем , а для спектральных параметров

скорость изменения собственных значений и существенно выше, чем .

**5 Четвёртая задача N(-)**

**5.1 Постановка задачи**

Одномерная краевая задача N(-) на собственные значения и на собственные функции с параметром выглядит следующим образом:

(62)

где y(x) – неизвестная функция;

– спектральный параметр;

r > 0 – вещественный параметр;

– известные вещественные постоянные.

Требуется:

**–** для нескольких значений параметра r найти численно первые три собственные значения;

**–** изобразить графически соответствующие собственные функции;

**–** определить характер эволюции собственных значений и вида собственных функций в зависимости от изменения параметра r.

**5.2 Решение задачи N(-) в общем виде**

Решение уравнения задачи (63) при >0 и его производная имеют вид:

(63)

(64)

Применим замену и подставим (63), (64) в граничные условия (62) получим линейную однородную систему:

(65)

Необходимым и достаточным условием наличия нетривиальных решений линейной однородной системы (63) является равенство нулю определителя матрицы этой системы:

, (66)

. (67)

Применим замену на *P = и Q = 2* и упростив, получим:

(68)

Подставляя в (69) значения параметра , а также заданных коэффициентов , мы найдем положительные собственные значение задачи (63). Затем, подставив их в первое уравнение (63), получим собственные функции, соответствующие каждому .

Найдем соответствующие собственной функции (64) коэффициенты. Для этого подставим (64) в граничные условия задачи (63)воспользуемся условием нормировки .

Подставим в первое уравнение (63) и найдем соответствующую собственную функцию. Получим:

(69)

Подставим (72) в граничные условия (636):

(70.1)

Сложим первое и второе уравнения (72.1) и получим:

(70.2)

(70.3)

В конечном итоге получаем, что при краевая задача (62) имеет нулевое собственное значение.

Решение первого уравнения (62) для и его производная имеют вид:

. (71)

(72)

Применим замену и подставим выражения (71), (72) в краевые условия (63) примут вид линейной однородной системы:

(73)

Необходимым и достаточным условием наличия нетривиальных решений линейной однородной системы (75) является равенство нулю определителя матрицы этой системы:

(74)

Упростив, получим:

(75)

Применим замену

(76)

Подставляя в (78) значения параметра , а также заданных коэффициентов , мы найдем отрицательные собственные значение задачи (63). Затем, подставив их в первое уравнение (63), получим собственные функции, соответствующие каждому .

**5.3 Решение с заданными значениями**

**5.3.1 Решение для спектрального набора (**

Подставим спектральные значения в (62):

(77)

тогда соотношения (68) и (76) примут вид:

(78)

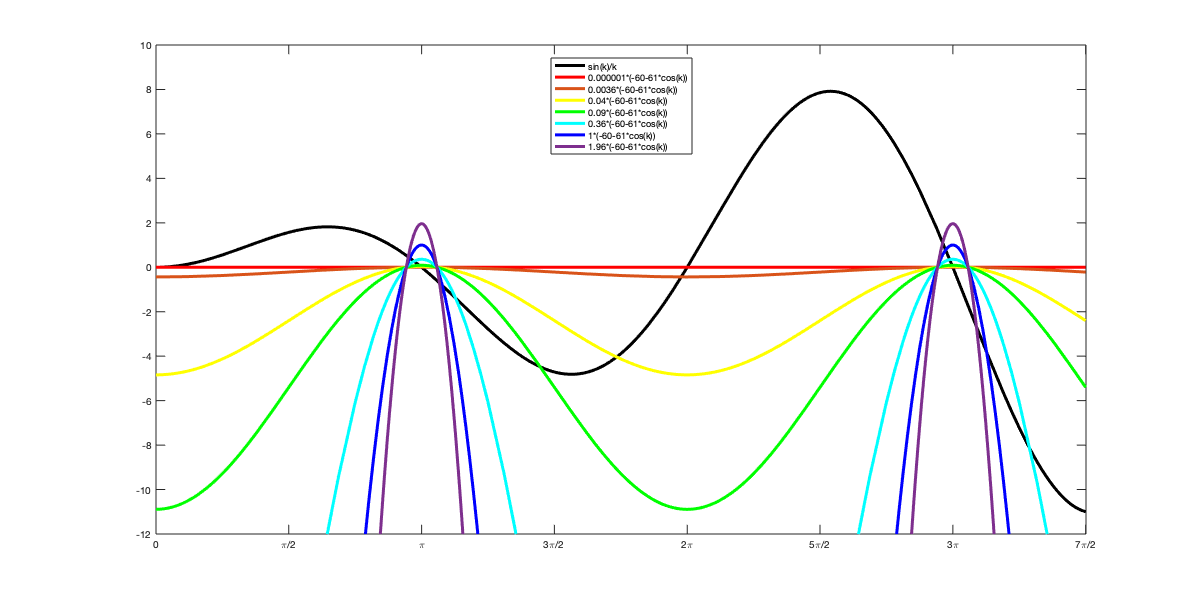
(79)

Найдем первые 3 собственных значения для различных параметров r.

Таблица 7 **–** Собственные значения для задачи N(-) для значений (5,6)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| r |  |  |  |  |
| 0,001000 | -0,000121 | 9,869022 | 39,477345 | 88,826213 |
| 0,060000 | -0,451584 | 9,862112 | 38,592671 | 88,819342 |
| 0,200000 | -7,634169 | 9,789389 | 29,685062 | 88,746102 |
| 0,300000 | -30,603020 | 9,692636 | 20,647027 | 88,647331 |
| 0,60000 | -482,241600 | 9,315924 | 12,550723 | 88,135314 |
| 1,000000 | -3721,000000 | 9,017408 | 11,468338 | 87,249224 |
| 1,400000 | -14280,000000 | 8,901272 | 11,242609 | 86,594332 |

Найдем соответствующие собственной функции (64) коэффициенты. Для этого подставим (73) в граничные условия задачи (63) ивоспользуемся условием нормировки . Получим:

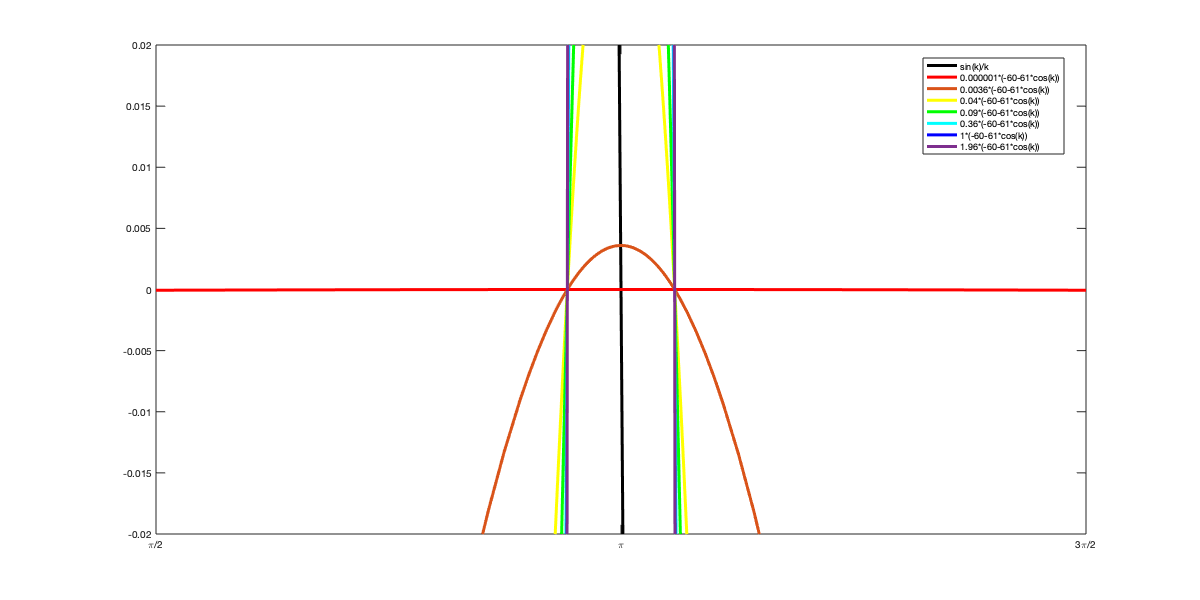


y

t

Рисунок 46 – Графическое решение уравнения

задачи N(-) c параметрами (5,6)

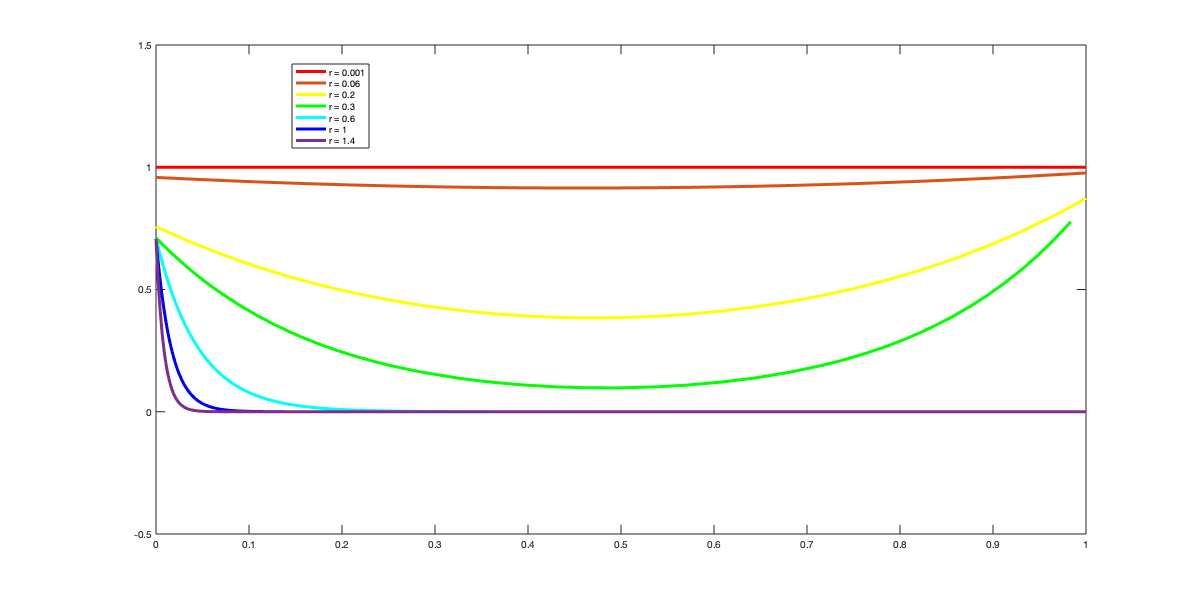


y

x

Рисунок 46.1 – “Микроскоп” графического решение уравнения

задачи N(-) c параметрами (5,6)

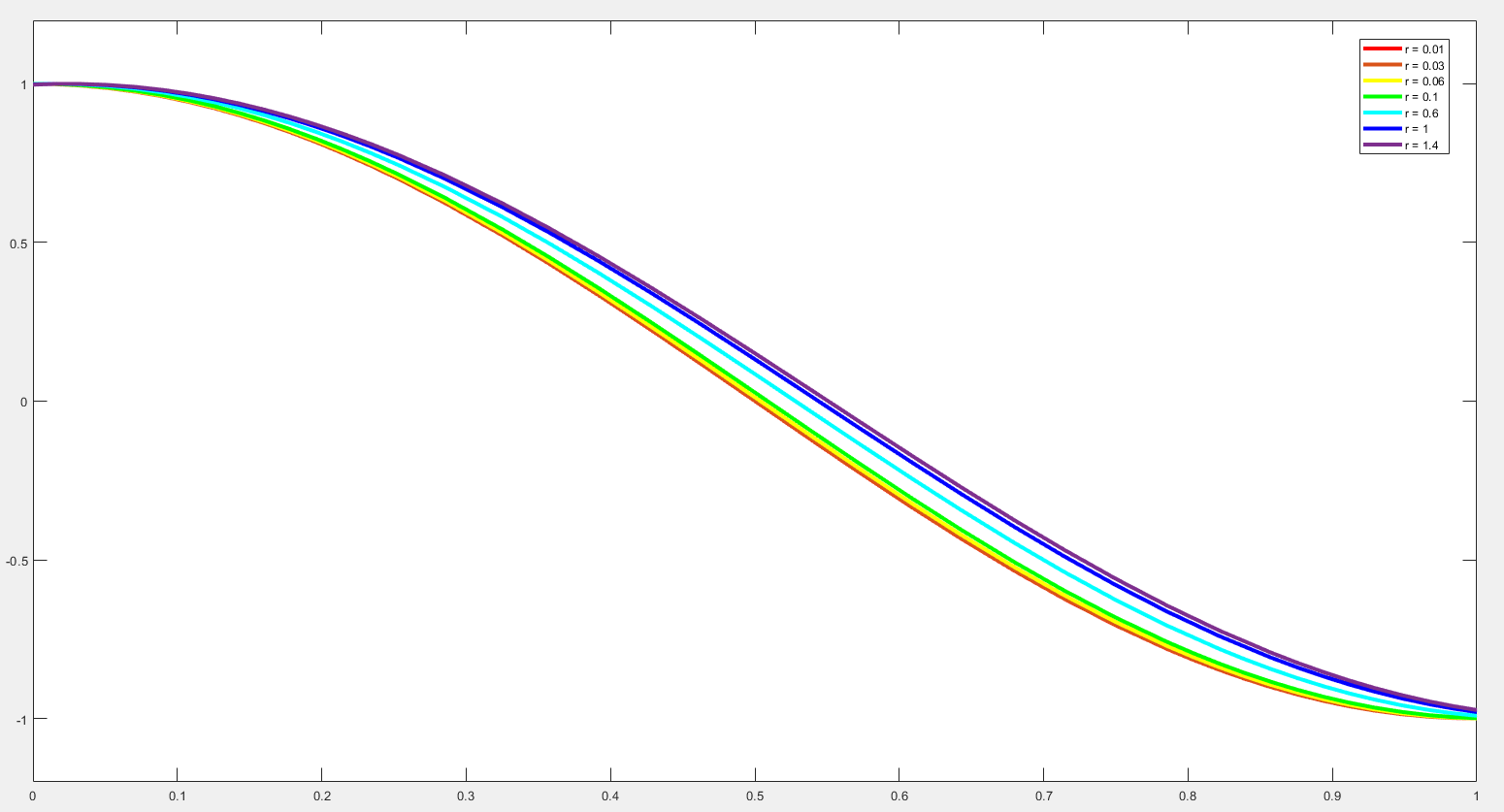


y

x

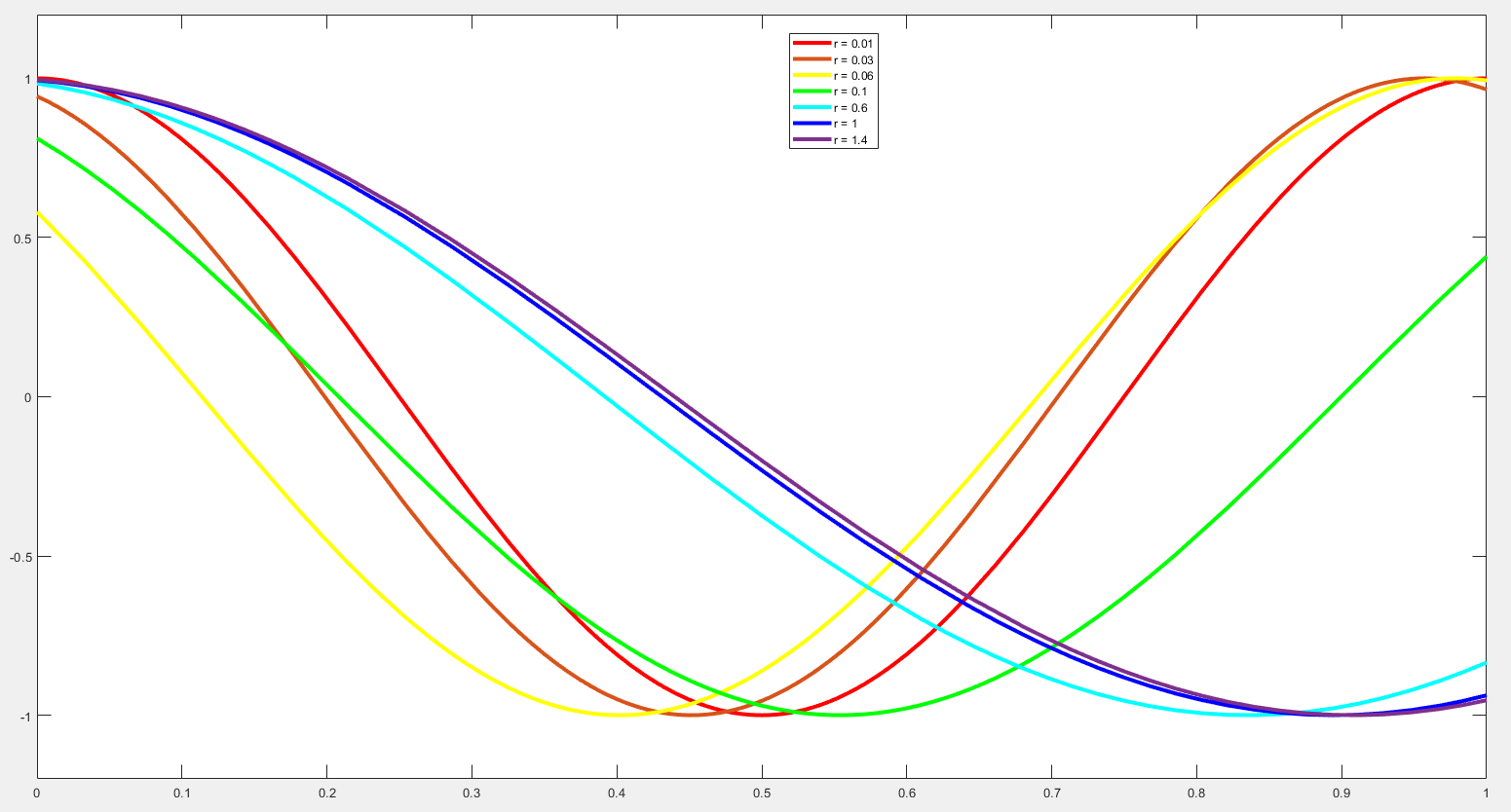
Рисунок 47 – Графики собственной функции для задачи N(-) c параметрами (5,6)

y



x

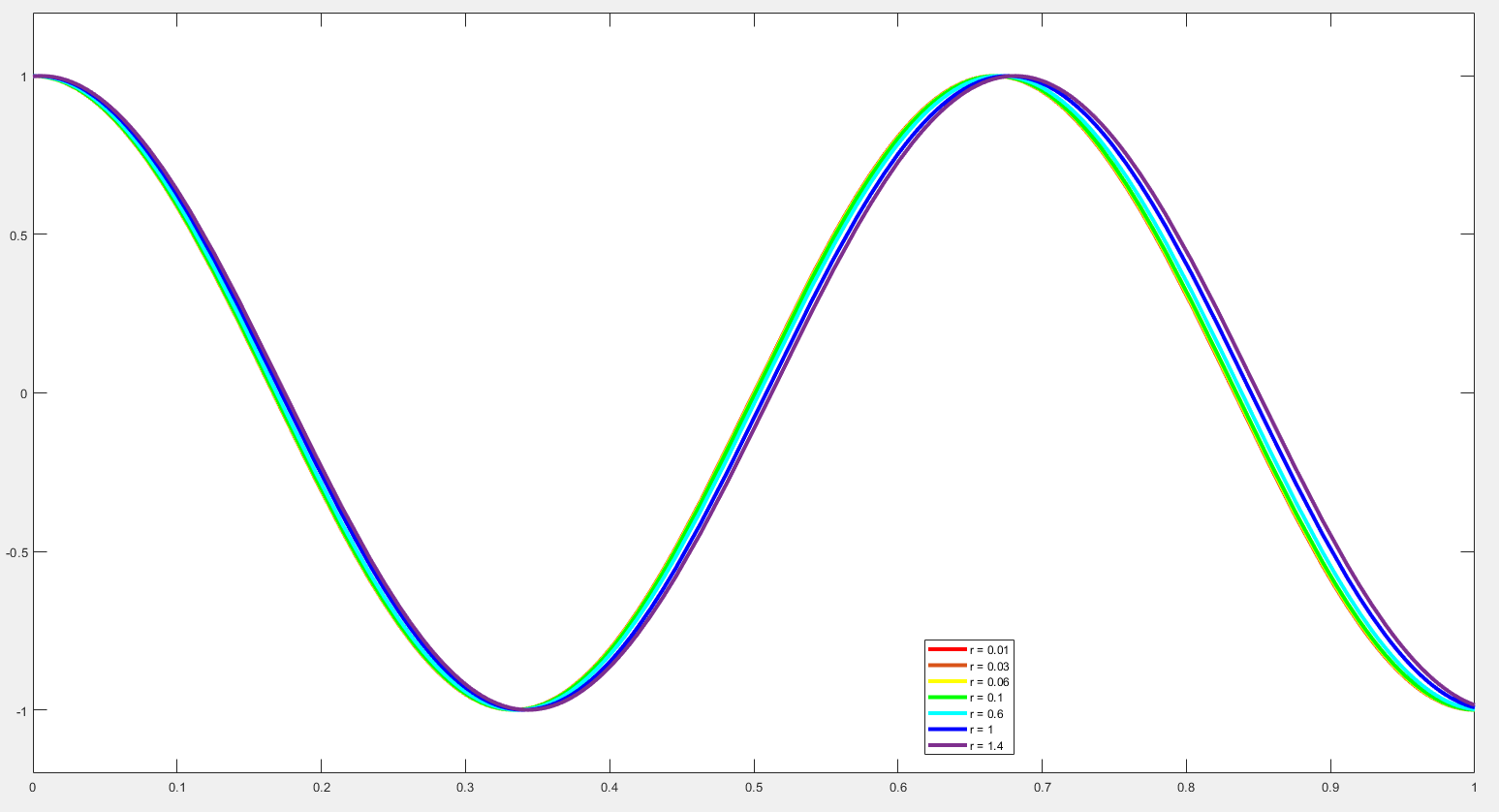
Рисунок 48 – Графики собственной функции для задачи N(-) c параметрами (5,6)



x

y

Рисунок 49 – Графики собственной функции для задачи N(-) c параметрами (5,6)



x

y

Рисунок 50 – Графики собственной функции для задачи N(-) c параметрами (5,6)

**5.3.2 Решение для спектрального набора (**

Подставим спектральные значения в (62):

(80)

тогда соотношения (68) и (76) примут вид:

(81)

(82)

Найдем первые 3 собственных значения для различных параметров r.

Таблица 8 **–** Собственные значения для задачи N(-) для значений (-5,6)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| r |  |  |  |  |
| 0,001000 | -0,000001 | 9,869022 | 39,477345 | 88,826133 |
| 0,060000 | -0,004041 | 8,978412 | 39,471062 | 87,953223 |
| 0,200000 | -2,901912 | 0,173056 | 39,398218 | 79,099211 |
| 0,300000 | -29,631690 | 0,051665 | 39,299197 | 68,273104 |
| 0,600000 | -482,241600 | 0,036100 | 38,812900 | 48,218341 |
| 1,000000 | -3721,000000 | 0,033856 | 38,152858 | 43,582402 |
| 1,400000 | -14294,000000 | 0,033415 | 37,774545 | 42,601101 |

t

y

Найдем соответствующие собственной функции (64) коэффициенты. Для этого подставим (73) в граничные условия задачи (63) ивоспользуемся условием нормировки . Получим:

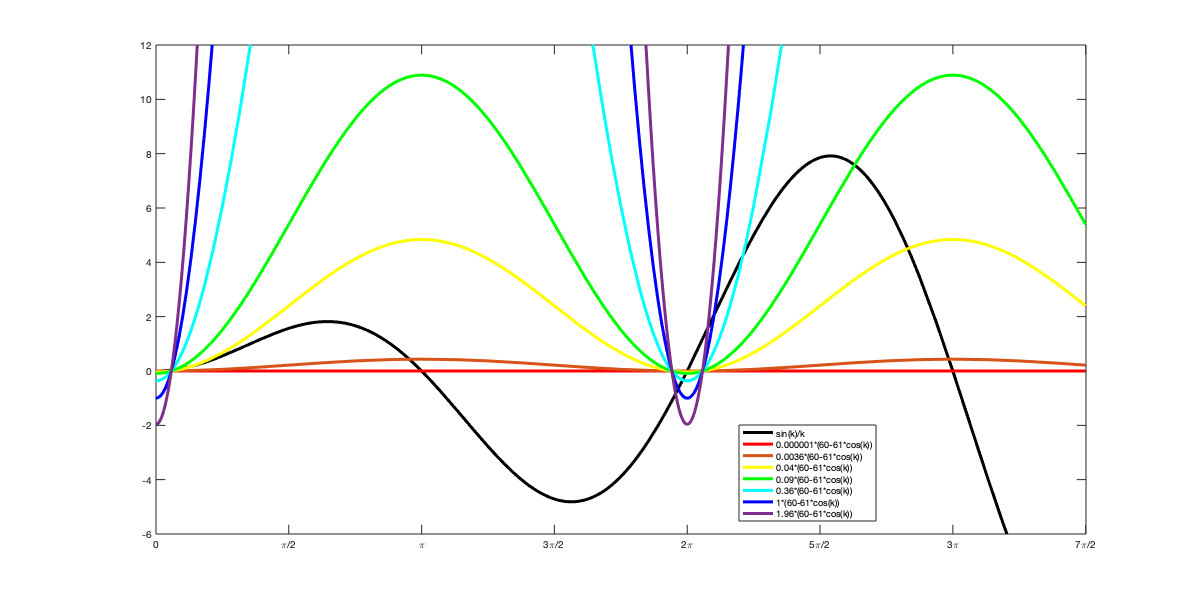
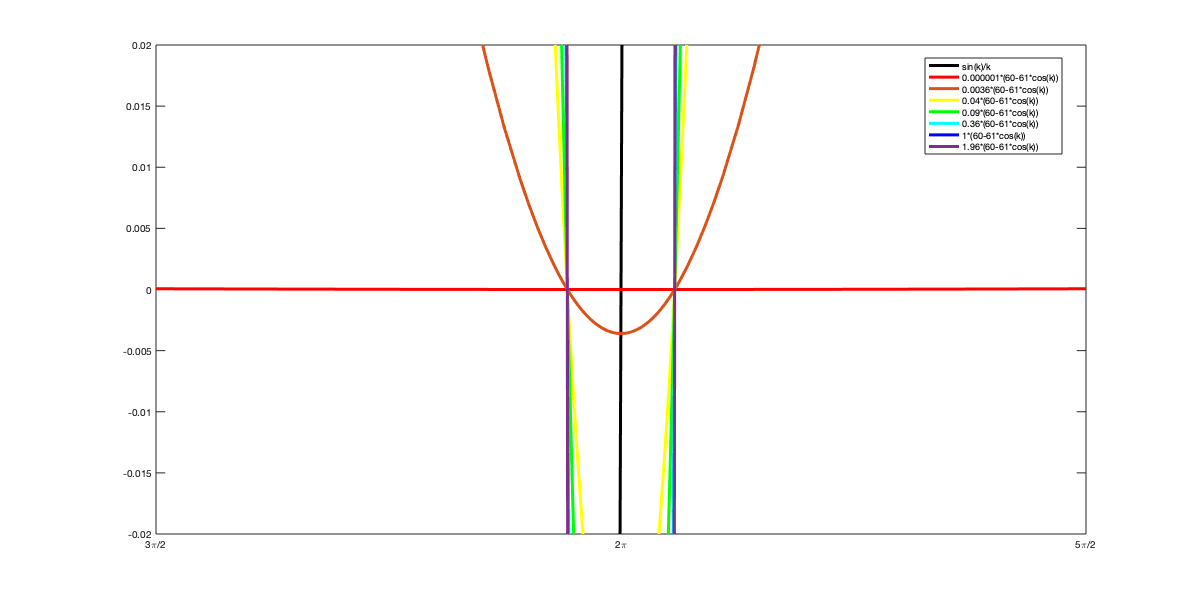


Рисунок 51 – Графическое решение уравнения

задачи N(-) c параметрами (-5,6)



y

t

Рисунок 51.1 – “Микроскоп” графического решение уравнения

задачи N(-) c параметрами (5,6)

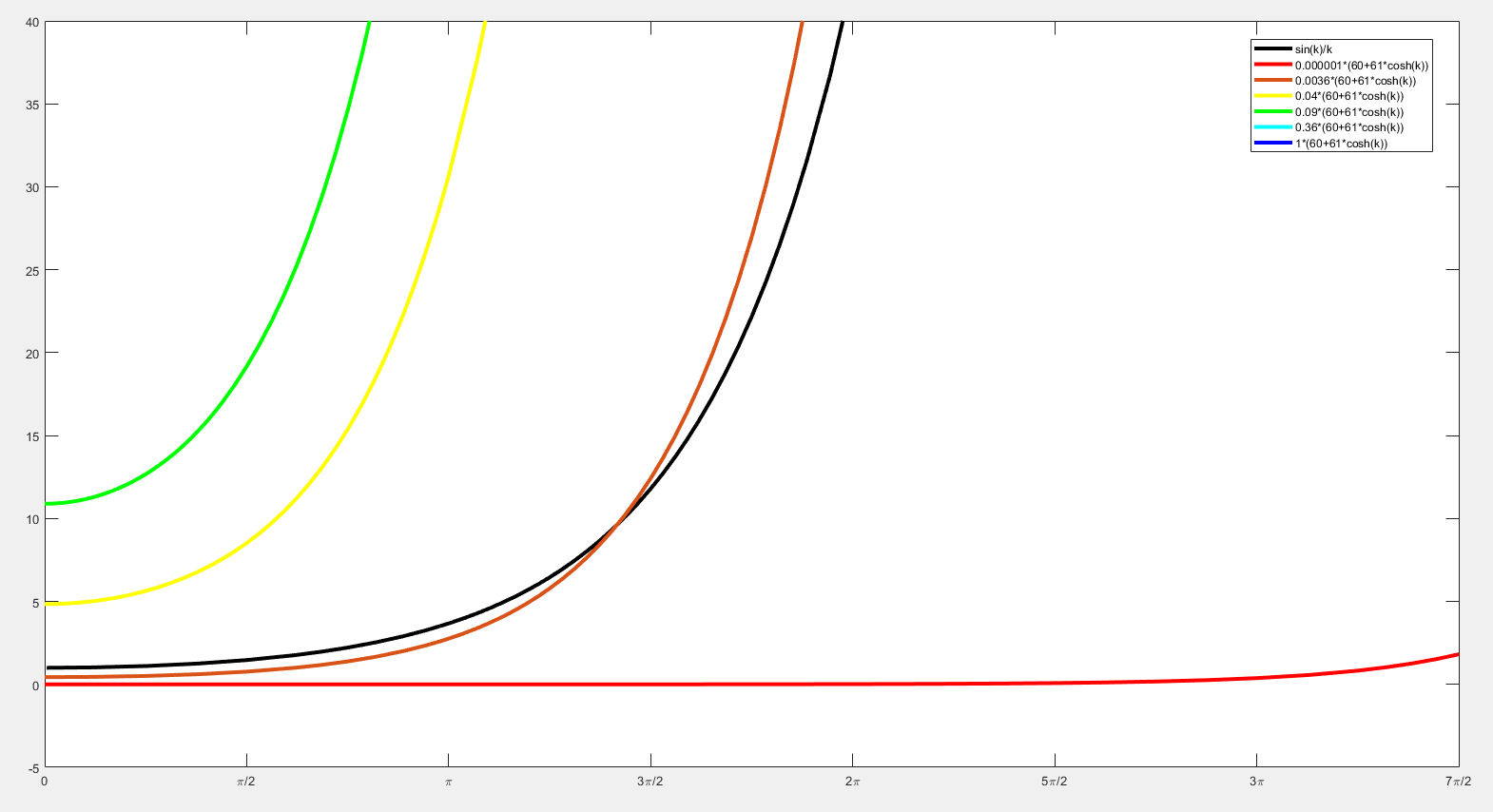
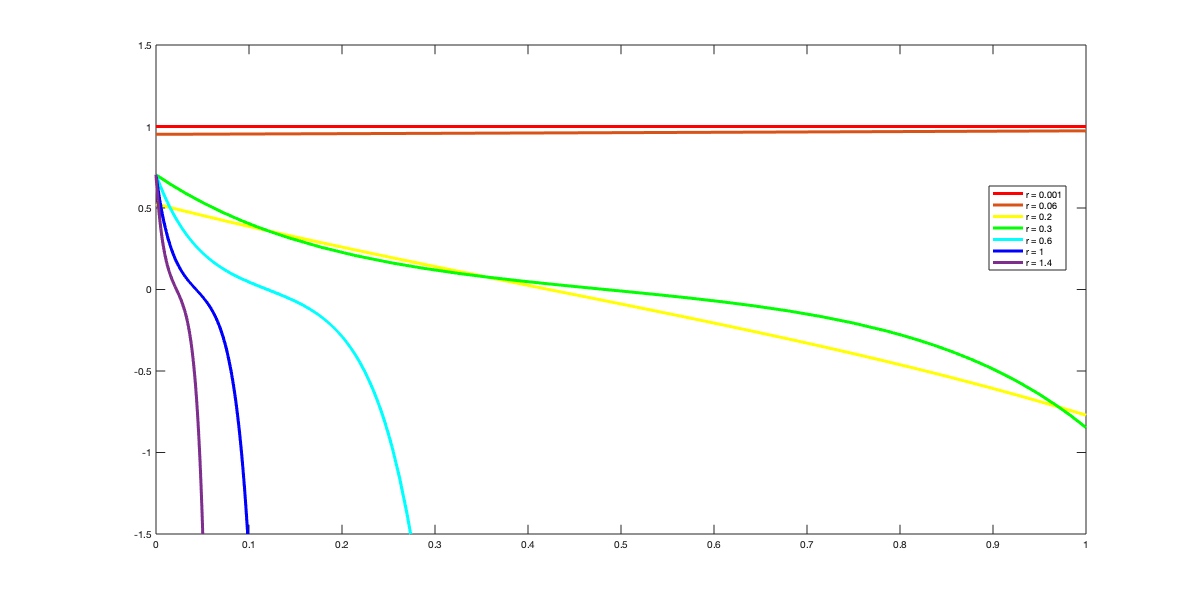


Рисунок 52 – Графическое решение уравнения

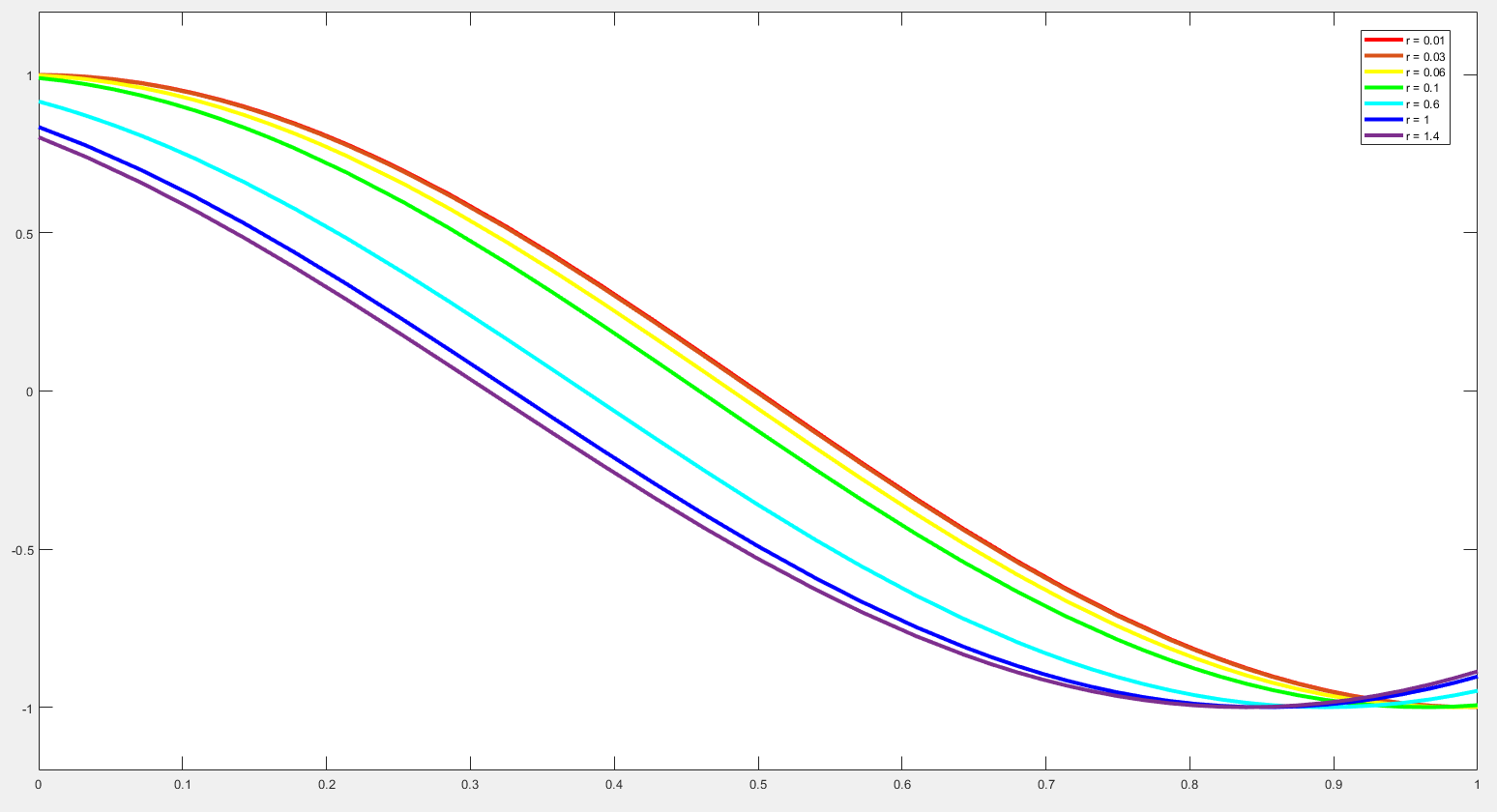
задачи N(-) c параметрами (-5,6)



y

x

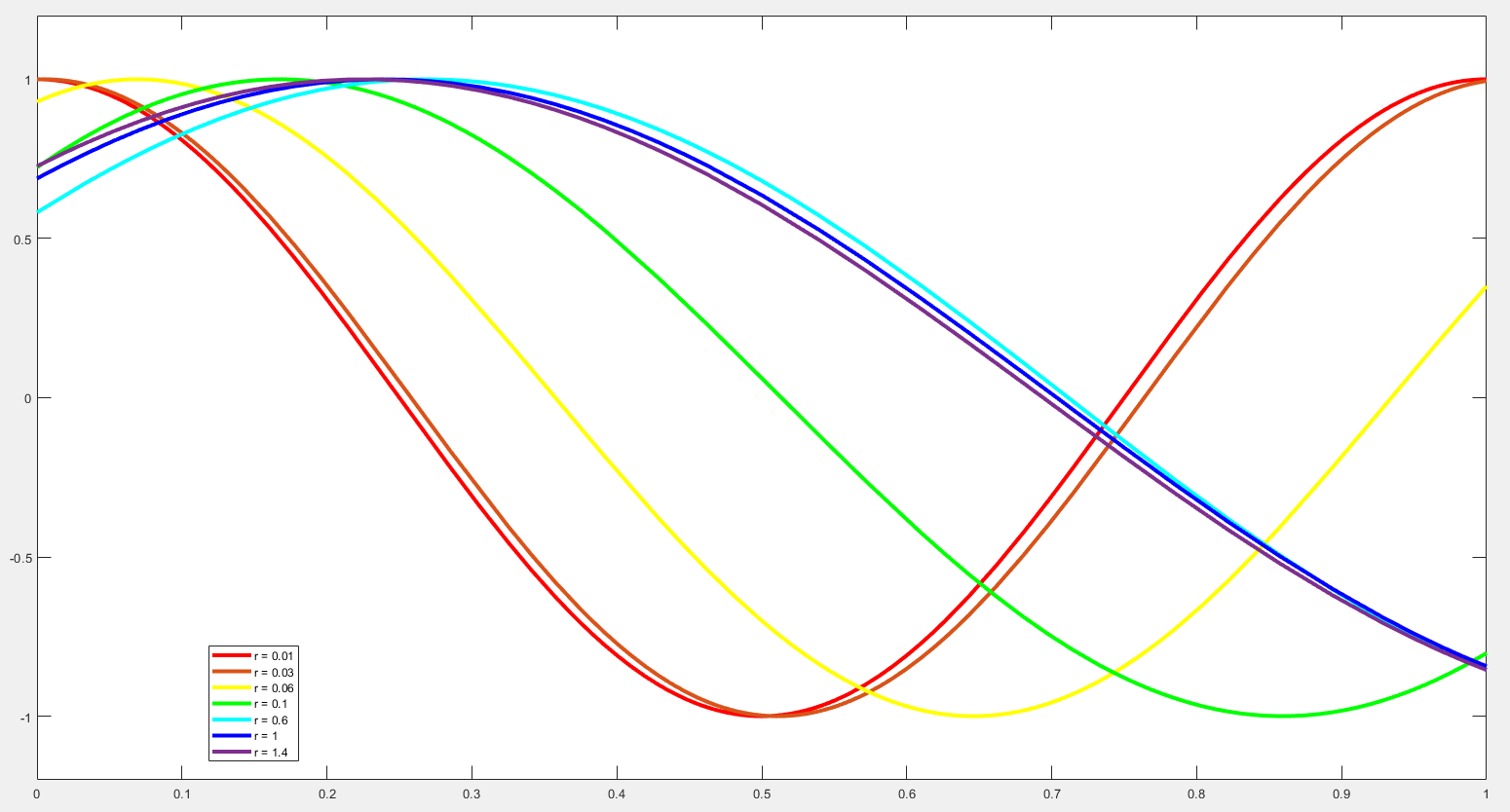
Рисунок 53 – Графики собственной функции для задачи N(-) c параметрами (-5,6)



y

x

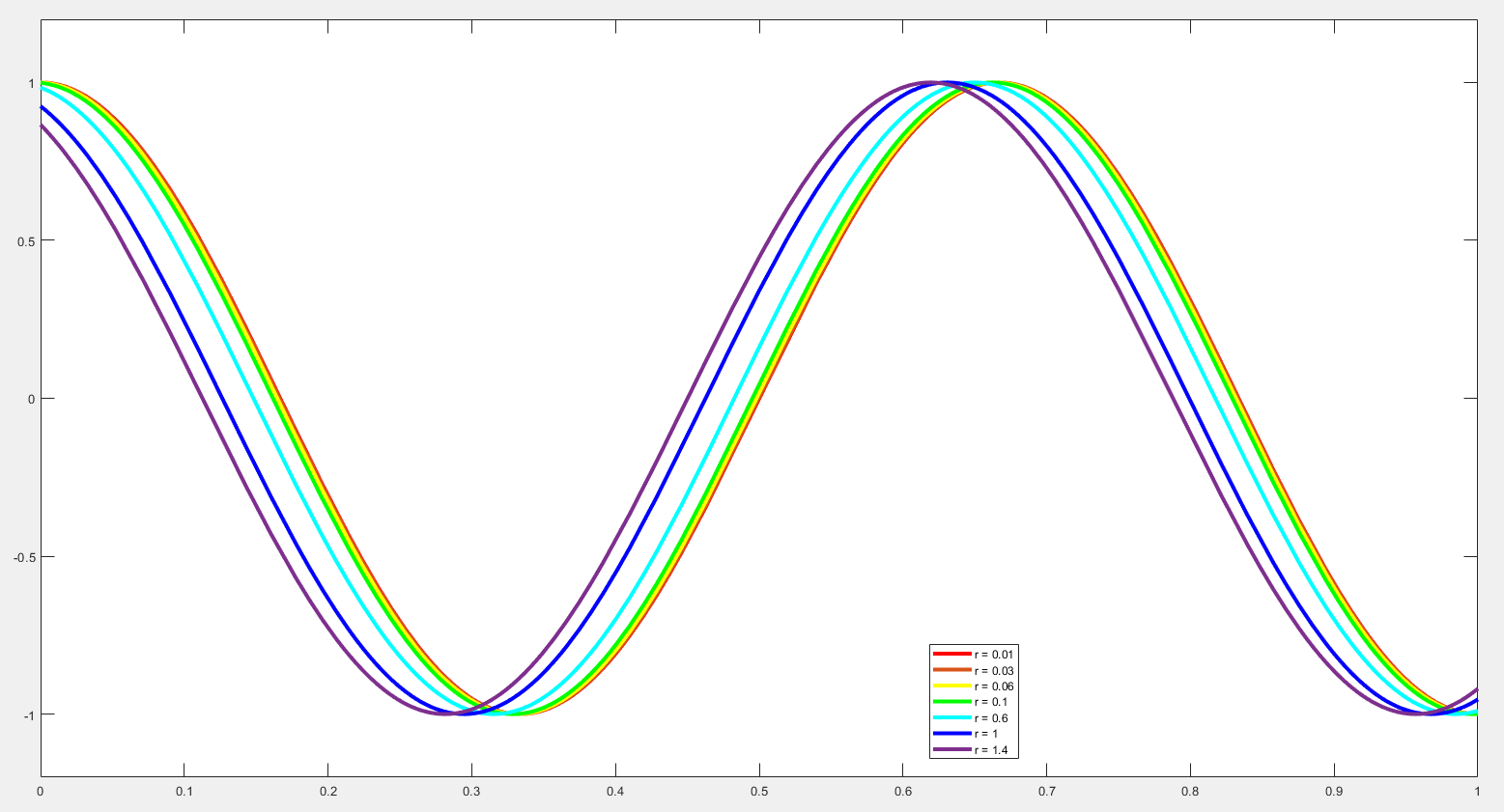
Рисунок 54 – Графики собственной функции для задачи N(-) c параметрами (-5,6)



x

y

Рисунок 55 – Графики собственной функции для задачи N(-) c параметрами (-5,6)



x

y

Рисунок 56 – Графики собственной функции для задачи N(-) c параметрами (-5,6)

**5.4 Обсуждение результатов**

В задаче N(-) для спектральных параметров скорость изменения довольно высокая, а скорость изменения низкая. При рассмотрении собственных значений задачи N(-) для спектральных параметров можно увидеть, что скорость изменения довольно высокая, а скорость низкая.

На основании Таблицы 5 и Таблицы 6 можно сделать вывод о зависимости собственных значений от параметра С увеличением параметра для отрицательных собственных значений зависимость увеличивается, а для положительных собственных значений зависимость уменьшается.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В ходе данной работы были выполнены следующие задачи:

- выведены уравнения для нахождения собственных значений,

- найдены первые четыре собственных значения для каждой задачи с соответствующими спектральными параметрами,

- исследованы свойства собственных значений оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями указанного типа, относящиеся к локализации собственных значений, асимптотическим свойствам собственных значений,

- исследованы свойства собственных значений оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями указанного типа, относящиеся к локализации собственных значений, асимптотическим свойствам собственных значений,

- определён характер эволюции собственных значений и вида собственных функций в зависимости от изменения параметра 𝑟.

Для задачи Дирихле со знаком (+) выведено и графически проиллюстрировано для различных значений параметра 𝑟 уравнение собственных значений поставленной задачи. Вычислены первые четыре собственных значения при различных значениях параметра 𝑟 как для спектральных параметров (5;6), так и для (-5;6). Благодаря полученным результатам возможна оценка характера эволюции собственных функций (так же при различных значениях параметра 𝑟).

Для задачи Дирихле со знаком (-) выведены и графически проиллюстрированы для различных значений параметра 𝑟 два уравнения собственных значений всех знаков поставленной задачи. Вычислены первые четыре собственных значения при различных значениях параметра 𝑟 как для спектральных параметров (5;6), так и для (-5;6). Благодаря полученным результатам возможна оценка характера эволюции собственных функций (так же при различных значениях параметра 𝑟).

Для задачи Неймана выведено и графически проиллюстрировано для различных значений параметра 𝑟 два уравнения собственных значений поставленной задачи. Вычислены первые четыре собственных значения при различных значениях параметра 𝑟 как для спектральных параметров (5;6), так и для (-5;6). Благодаря полученным результатам возможна оценка характера эволюции собственных функций (так же при различных значениях параметра 𝑟).

# **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Покровский И.Л., О задаче на собственные значения для оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями, Дифференциальные уравнения, т.54, 2018, №10, с.1391-1398.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Левитан Б.М., Саргасян И.С., Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака, 1988, с. 10.
4. Буфетов А.И., Гончарук Н.Б., Ильяшенко Ю.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, https://math.hse.ru/data/2019/09/23/1540178888/ODE.pdf – (Дата обращения: 27.04.2022).
5. Люстерник Л.А., Соболев С.Л., Элементы функционального анализа, Наука, 1965.

