ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени И.С. Тургенева

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙУНИВЕРСИТЕТ
ИМ. И.С.ТУРГЕНЕВА»
ИНСТИТУТ ПРИБОРОСТРОЕНИЯ, АВТОМАТИЗАЦИИ И
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра информационных систем

О.А. Савина, С.В. Терентьев

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ»

Направление подготовки:
09.03.03 Прикладная информатика

Орел, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Экономико-математическое моделирование в настоящее время – один из основных инструментов экономического анализа. Под инструментом здесь понимается не только использование экономико-математических методов и моделей, соответствующих программных и технических средств для их реализации, но и сам методологический подход к исследованию экономических процессов и явлений, их внутренней структуры, свойств, закономерностей развития. Применение экономико-математических методов и моделей позволяет получить и исследовать качественные зависимости и взаимосвязи, присущие экономическим процессам и явлениям.

В связи с возросшей в рыночных условиях сложностью экономических систем их анализ, а также разработка концепции развития и подготовка различных вариантов этого развития становятся объективно невозможны без использования экономико-математических методов и моделей. Их применение позволяет в значительной степени пересмотреть существующие методы учета и экономического анализа, использовать значительно большее количество информации, проводить альтернативные, многовариантные расчеты, получать более устойчивые оценки.

Целью проведения данных лабораторных работ является овладение студентами принципами экономико-математического моделирования и практическое изучение наиболее часто употребляемых в экономическом анализе и прогнозировании математических моделей.

Лабораторная работа № 1. Формирование программы производства на основе модели межотраслевого баланса

1.1 Цель работы

1. Изучить методику построения модели межотраслевого баланса.
2. Рассчитать конкретный пример, заданный преподавателем.

1.2 Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с методологией построения матричных (балансовых) экономико-математических моделей.
2. Получить исходные данные у преподавателя.
3. Выполнить расчет на ЭВМ (расчеты рекомендуется проводить при помощи ППП Microsoft Excel или MathCAD).
4. Оформить отчет, включающий выводы по проделанной работе.

1.3 Содержание отчета

1. Краткие сведения о принципах построения балансовых моделей, типах задач, решаемых с их помощью.
2. Исходные данные.
3. Результаты расчета с анализом полученных данных.
4. Выводы.

1.4 Методические указания

В настоящее время матричные модели находят широкое применение в технико-экономическом планировании. С их помощью решается целый ряд задач: прогнозирование и регулирование экономического развития, расчеты по составлению долгосрочных планов, расчеты по оптимизации внешней торговли, анализ межрегиональных экономических связей, расчеты по ценообразованию.

Наиболее типичным примером балансовых моделей считается экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель В.В. Леонтьева).

Межотраслевой баланс представляет собой таблицу, характеризующую связи между отраслями экономики страны (см. таблицу 1.1). Баланс состоит из четырех квадрантов. В первом, представляющем собой матрицу $(n+1)\times(n+1)$, содержится информация о межотраслевых связях. При этом n – количество отраслей, выделяемых в экономике страны. Величина x_{ij} показывает, сколько продукции i-й отрасли было использовано в процессе материального производства j-й отрасли.

Таблица 1.1 – Общий вид межотраслевого баланса в стоимостном выражении

Отрасли	1 2 … j … n	Итого	Конечная продукция	Валовая продукция
1	x_{11} x_{12} … x_{1j} … x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_1	X_1
2	x_{21} x_{22} … x_{2j} … x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	y_2	X_2
…			…	…
i	x_{i1} x_{i2} … x_{ij} … x_{in}	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	y_i	X_i
…			…	…
n	x_{n1} x_{n2} … x_{nj} … x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_n	X_n
Итого	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$ $\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$ … $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ … $\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$
Условно чистая продукция	V_1 V_2 … V_j … V_n	$\sum_{j=1}^{n} V_j$		
Валовая продукция	X_1 X_2 … X_j … X_n	$\sum_{j=1}^{n} X_j$		

Второй раздел посвящен конечному продукту. Столбец конечного продукта – (n+2)-й столбец. Величина y_i – потребление, не идущее на текущие производственные нужды. Ко второму разделу относится также столбец валовых выпусков (X_i). В пределах первого и второго разделов справедливо соотношение:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

Третий квадрант отражает стоимостную структуру валового продукта отраслей. В (n+2)-й строке таблицы отражена условно чистая продукция (V_j), представляющая собой разницу между величиной валовой продукции отрасли и суммарными затратами отрасли:

$$V_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

Четвертый раздел характеризует перераспределительные отношения в экономике, осуществляемые через финансово-кредитную систему. В плановых расчетах он, как правило, не используется, и поэтому в пределах данной лабораторной работы не рассматривается.

Необходимо отметить, что мы рассматриваем межотраслевой баланс в стоимостном выражении, где потоки продукции измеряются на основе стоимости произведенной продукции в некоторых фиксированных ценах. Это дает возможность суммировать различные величины x_{ij}.

Статическая межотраслевая модель разработана для формирования планов выпуска и потребления продукции и основана на соотношениях (1.1) и (1.2) межотраслевого баланса.

Если предположить, что в каждой отрасли выпускается единственный продукт, имеется единственная технология производства, нормы затрат не зависят от объемов выпуска и не допускается замещение одного сырья другим, то можно записать:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{1.3}$$

где a_{ij} – коэффициент прямых материальных затрат.

Величина a_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли идет на производство единицы валовой продукции j-й отрасли.

Подставляя формулу (1.3) в соотношение (1.1), получим:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + y_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.4}$$

Это равенство удобнее записать в матричном виде:

$$X = AX + Y, \tag{1.5}$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор валовых выпусков;

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – вектор конечного продукта;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица прямых материальных затрат.

Выражение (1.5) принято называть балансом распределения продукции. Его можно использовать для анализа и планирования структуры экономики. Если известны коэффициенты прямых материальных затрат, то, задав конечный продукт по каждой отрасли, можно определить необходимые валовые выпуски отраслей.

Преобразовав формулу (1.5), получим:

$$X = (E - A)^{-1} * Y, \tag{1.6}$$

где E – единичная матрица.

Можно показать, что матрица $B = (E - A)^{-1}$ существует, и если ее элементы неотрицательны, то матрицу прямых затрат A принято называть продуктивной.

Выражение (1.6) можно переписать в виде:

$$X = BY, \tag{1.7}$$

где B – матрица полных материальных затрат.

Коэффициенты полных затрат b_{ij} показывают, каков должен быть валовой выпуск i-й отрасли для того, чтобы обеспечить выпуск единицы конечной продукции j-й отрасли.

Модель межотраслевого баланса можно использовать и для анализа затрат труда.

В этом случае предполагается, что труд выражается в единицах труда одинаковой степени сложности. Тогда имеет место соотношение:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}, \qquad j = \overline{1, n}\ , \tag{1.8}$$

где t_j – коэффициент прямых затрат труда для j-го продукта;
L_j – затраты живого труда в производстве j-го продукта;
X_j – объем выпущенной продукции.

Таким образом, зная коэффициенты прямых затрат труда, можем рассчитать потребность в трудовых ресурсах для выполнения программы по валовой продукции.

Полные затраты труда определяются как сумма прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенного на продукт через израсходованные средства производства:

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_i + t_j, \qquad j = \overline{1, n}\ , \tag{1.9}$$

где T_j – полные затраты труда на единицу j-го продукта;
$a_{ij}T_i$ – затраты овеществленного труда, перенесенного на j-й продукт через i-е средство производства.

Иначе, если известны коэффициенты полных материальных затрат b_{ij}, можно записать:

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} t_i, \quad \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}}, \tag{1.10}$$

или в матричном виде:

$$T = tB, \tag{1.11}$$

где $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ – вектор-строка полных затрат труда;
$t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – вектор-строка прямых затрат труда.

Выдающийся экономист В.В. Леонтьев, получивший в 1973 г. Нобелевскую премию за разработку и применение при решении важных экономических задач метода «затраты – выпуск» (так матричные модели чаще всего именуются в западной литературе), писал, характеризуя значение балансовых моделей: «Чтобы прогнозировать развитие экономики, нужен системный подход. Экономика каждой страны – это большая система, в которой много различных отраслей, и каждая из них что-то производит – промышленную продукцию, услуги и т.д., которые предлагаются другим отраслям. Каждое звено, компонент системы может существовать только потому, что получает что-то от других. Для производства каждого вида продукции нужно напрямую использовать большое количество других товаров, а еще больше – опосредованно» [7].

1.5 Контрольные вопросы

1. Области применения матричных моделей.
2. Структура межотраслевого баланса.
3. Связь между конечной и условно-чистой продукцией.
4. Экономический смысл, свойства и способы расчета коэффициентов прямых материальных затрат.
5. Коэффициенты полных материальных затрат.
6. Экономический смысл коэффициентов прямых затрат труда.

1.6 Варианты заданий для расчетов

Вариант 1. Даны коэффициенты прямых поставок a_{ij} и конечный продукт y_i (таблица1.2).

Таблица 1.2

Отрасли	пром–сть	с/х	стр–во	транспорт	проч. отр.	Конеч. прод.
пром–сть	0.04	0.141	0.136	0.017	0.021	15640
с/х	0.036	0.236	0.094	0.027	0.148	24480
стр–во	0.123	0.024	0.327	0.034	0.056	31560
транспорт	0.326	0.036	0.117	0.128	0.032	12330
проч. отр.	0.243	0.148	0.201	0.167	0.127	14671

Определите межотраслевые поставки продукции, валовые выпуски отраслей, условно чистую продукцию каждой отрасли.

Вариант 2. Даны коэффициенты прямых поставок aij и конечный продукт yi (таблица 1.3).

Таблица 1.3

Отрасли	тяжелая пром-сть	легкая пром-сть	с/х	строительство	транспорт	прочие	Конеч. прод.
тяж. пром-сть	0.122	0.143	0.176	0.1	0.195	0.042	86000
легк. пром-сть	0.093	0.102	0.089	0.086	0.058	0.153	43800
с/х	0.108	0.078	0.249	0.140	0.118	0.116	59120
строительство	0.220	0.219	0.122	0.170	0.140	0.224	73210
транспорт	0.150	0.117	0.158	0.184	0.068	0.081	73100
прочие	0.138	0.165	0.073	0.155	0.162	0.127	49830

Определите межотраслевые поставки продукции, валовые выпуски отраслей, условно чистую продукцию каждой отрасли.

Вариант 3. В трехотраслевой экономической системе заданы: матрица коэффициентов прямых материальных затрат A, вектор объемов конечной продукции Y и вектор коэффициентов прямых затрат труда t (таблица 1.4).

Найти коэффициенты полных затрат труда и потребность в трудовых ресурсах для выполнения программы по валовой продукции.

Таблица 1.4

Отрасли	A	B	C	Конеч. прод.
A	0.18	0.22	0.02	390
B	0.28	0.08	0.25	220
C	0.15	0.16	0.12	470
коэф. прямых затрат труда, *t*	1.2	1.4	0.9	

Вариант 4. Даны коэффициенты прямых поставок a_{ij} и конечный продукт y_i (таблица 1.5).

Таблица 1.5

Отрасли	маш – ние	приб – ние	рад – ка	прочие	Конеч. прод.
машиностроение	0.24	0.13	0.09	0.21	32900
приборостроение	0.19	0.18	0.11	0.12	28990
радиоэлектроника	0.14	0.26	0.19	0.18	20000
прочие отрасли	0.18	0.15	0.21	0.19	48000

Определить межотраслевые поставки продукции, валовые выпуски отраслей, условно чистую продукцию каждой отрасли.

Вариант 5. Даны коэффициенты прямых поставок a_{ij} и конечный продукт y_i (таблица 1.6).

Таблица 1.6

Отрасли	А	Б	В	Г	Д	Конеч. прод.
А	0.004	0.129	0.101	0.015	0.021	1290
Б	0.360	0.222	0.094	0.125	0.190	2300
В	0.123	0.024	0.352	0.034	0.044	4120
Г	0.072	0.120	0.102	0.176	0.230	5550
Д	0.212	0.090	0.170	0.189	0.115	1100

Определить межотраслевые поставки продукции, валовые выпуски отраслей, условно чистую продукцию каждой отрасли.

Вариант 6. В экономической системе, состоящей из четырех отраслей, заданы: матрица коэффициентов прямых материальных затрат A, вектор объемов конечной продукции Y и вектор коэффициентов прямых затрат труда t (таблица 1.7).

Таблица 1.7

Отрасли	A	B	C	D	Конеч. прод.
A	0.13	0.29	0.07	0.04	12900
B	0.10	0.08	0.28	0.26	10345
C	0.09	0.06	0.15	0.32	910
D	0.15	0.16	0.11	0.02	8115
коэф. прямых затрат труда, *t*	1.11	1.45	0.88	0.95	

Найти коэффициенты полных затрат труда и потребность в трудовых ресурсах для выполнения программы по валовой продукции.

Вариант 7. В некоторой стране выделены пять экономических регионов, между которыми налажены производственные связи. Известны коэффициенты прямых поставок и конечный продукт каждого региона (таблица 1.8).

Таблица 1.8

Регионы	Восток	Запад	Центр	Юг	Север	Конеч. прод.
Восток	0.22	0.22	0.16	0.30	0.33	580000
Запад	0.02	0.18	0.08	0.11	0.04	170000
Центр	0.18	0.34	0.35	0.25	0.30	510000
Юг	0.09	0.05	0.05	0.18	0.02	140000
Север	0.01	0.03	0.04	0.005	0.14	95000

Определите межрегиональные поставки продукции, валовые выпуски и условно-чистую продукцию каждого региона.

Вариант 8. Задана матрица коэффициентов прямых материальных затрат A и вектор-столбец конечного продукта Y (таблица 1.9).

Таблица 1.9

Отрасли	пром–сть	с/х	стро–во	транспорт	проч. отр.	Конеч. прод.
пром–сть	0.128	0.156	0.222	0.289	0.158	1652.3
с/х	0.018	0.178	0.021	0.016	0.083	520.5
стр–во	0.184	0.082	0.136	0.095	0.184	1015.0
транспорт	0.202	0.100	0.280	0.090	0.104	1208.1
проч. отр.	0.248	0.196	0.172	0.236	0.200	1980.0

Определите межотраслевые поставки продукции, валовые выпуски, условно чистую продукцию отраслей.

Вариант 9. Заданы: матрица коэффициентов прямых материальных затрат A, вектор объемов конечной продукции Y и вектор коэффициентов прямых затрат труда t (таблица 1.10).

Таблица 1.10

Отрасли	маш-ние	приб-ние	рад-ка	прочие	Конеч. прод.
машиностроение	0.24	0.13	0.16	0.21	333200
приборостроение	0.20	0.22	0.28	0.12	416320
радиоэлектроника	0.13	0.26	0.20	0.18	286000
прочие отрасли	0.20	0.18	0.18	0.25	759000
коэф. прямых затрат труда, t	1.12	1.84	1.20	1.02	

Найдите коэффициенты полных затрат труда и потребность в трудовых ресурсах для выполнения программы по валовой продукции.

Вариант 10. Заданы коэффициенты прямых поставок a_{ij} и конечный продукт y_i (таблица 1.11).

Проверить продуктивность матрицы A. Определить межотраслевые поставки и условно чистую продукцию каждой отрасли.

Таблица 1.11

Отрасли	тяжелая пром-сть	легкая пром-сть	с/х	стр–во	транс-порт	про-чие	Конеч. прод.
тяж. пром–сть	0.124	0.145	0.172	0.134	0.195	0.042	96000
легк. пром–сть	0.104	0.104	0.089	0.032	0.058	0.153	43200
с/х	0.008	0.088	0.226	0.022	0.038	0.116	39120
стр–во	0.260	0.215	0.130	0.264	0.152	0.224	73000
транспорт	0.164	0.121	0.155	0.180	0.084	0.080	115000
прочие	0.132	0.160	0.082	0.155	0.202	0.126	66200

Вариант 11. В экономической системе, состоящей из четырех отраслей, заданы: коэффициенты прямых поставок a_{ij} и конечный продукт y_i (таблица 1.12).

Таблица 1.12

Отрасли	I	II	III	IV	Конеч. прод.
I	0.28	0.32	0.30	0.21	16200
II	0.16	0.02	0.04	0.11	10000
III	0.08	0.24	0.20	0.24	31150
IV	0.29	0.20	0.28	0.22	26800

Проверить продуктивность матрицы A и составить для данной системы межотраслевой баланс.

Вариант 12. В трехотраслевой экономической системе заданы: матрица коэффициентов прямых материальных затрат A, вектор объемов конечной продукции Y и вектор коэффициентов прямых затрат труда t (таблица 1.13).

Таблица 1.13

Отрасли	А	Б	В	Конеч. прод.
А	0.23	0.15	0.44	11000
Б	0.28	0.35	0.16	6200
В	0.32	0.26	0.20	8300
коэф. прямых затрат труда, t	2.1	1.4	1.25	

Найдите коэффициенты полных затрат труда и потребность в трудовых ресурсах для выполнения программы по валовой продукции.

Лабораторная работа № 2-3. Изучение экономических явлений методами корреляционно-регрессионного анализа

1.Цель работы

1. Изучить методику построения регрессионных моделей, способы оценки их адекватности и точности.
2. Рассчитать конкретный пример, заданный преподавателем.

2.Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с методологией построения моделей регрессии и правилами оценки их точности и адекватности.
2. Получить исходные данные у преподавателя.
3. Выполнить расчет на ЭВМ (расчеты рекомендуется проводить при помощи ППП Microsoft Excel).
4. Оформить отчет, включающий выводы по проделанной работе.

3.Содержание отчета

1. Краткие сведения об этапах построения регрессионных моделей и методах анализа их свойств.
2. Исходные данные.
3. Результаты расчета с анализом полученных данных.
4. Выводы.

4.Методические указания

При изучении экономических проблем нередко возникает необходимость в построении количественно определенных экономико-математических моделей, разработке методов определения их параметров по статистическим данным и анализе их свойств. Наиболее часто используемым математическим аппаратом решения задач данного класса служат методы корреляционно-регрессионного анализа.

Между величинами, характеризующими экономические явления, в большинстве случаев существуют зависимости, отличные от функциональных.

Связь между переменной Y и m независимыми факторами можно охарактеризовать функцией регрессии $\hat{y} = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, которая показывает, каково будет среднее значение результирующего признака Y при определенном значении факторных признаков. Это позволяет использовать модель регрессии не только для анализа, но и для прогнозирования экономических явлений.

Процесс построения уравнения регрессии включает два этапа:

1) определение вида зависимости (этап спецификации);
2) определение коэффициентов регрессии.

В практике экономического анализа наибольшее распространение получили простые однофакторные линейные регрессионные модели. Это обусловлено не столько простотой вычислительного процесса, сколько ясностью их экономической интерпретации.

Уравнение парной линейной регрессии с оценочными параметрами имеет вид:

$$\hat{y}_i = a + bx_i; \quad i = \overline{1,n} \ , \qquad (2.1)$$

где n – величина выборки.

Теснота линейной связи между фактором и исследуемым показателем оценивается при помощи коэффициента парной корреляции:

$$r_{y,x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \ , \qquad (2.2)$$

где $\bar{x}, \bar{y}$ - средние значения фактора и отклика соответственно.

Значение коэффициента r изменяется в диапазоне от –1 до +1. Положительное значение свидетельствует о прямой линии связи, отрицательное – об обратной. Чем ближе абсолютное значение коэффициента к единице, тем теснее связь.

Параметры a и b уравнения регрессии (2.1) оцениваются с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Его суть в том, чтобы, зная положение экспериментальных точек на плоскости XY, провести линию регрессии так, чтобы сумма квадратов отклонений $\left(e_i^2\right)$ этих точек от проведенной прямой вдоль оси OY была минимальной.

Математически критерий записывается так:

$$Q = \sum e_i^2 = \sum\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = \sum\left(y_i - a - bx_i\right)^2 \to \min . \qquad (2.3)$$

Приравнивая к нулю частные производные целевой функции (2.3), получим систему нормальных уравнений, решив которую, можно найти соотношения для коэффициентов уравнения регрессии:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \ , \qquad (2.4)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} .$$

Если значение независимой переменной определяется несколькими факторами, с помощью МНК можно построить модель множественной регрессии. В этом случае коэффициенты уравнения удобно находить из соотношения, записываемого в матричном виде:

$$A = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y , \qquad (2.5)$$

где $A = \left(a_0, a_1, a_2, ..., a_m\right)$ – вектор оценок параметров регрессии;
$Y = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ – вектор значений зависимой переменной;

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12}\ldots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22}\ldots & x_{2m} \\ & & \ldots & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2}\ldots & x_{nm} \end{pmatrix}$$ – матрица значений независимых переменных.

В случае, если на этапе спецификации выявлено, что зависимость носит нелинейный характер, выполняют линеаризующие преобразования переменных, после чего используют МНК.

Из-за различия единиц измерения коэффициенты регрессии невозможно использовать для непосредственной оценки влияния факторов на зависимость переменных. Для этой цели рассчитывают коэффициент эластичности (Э) и бета-коэффициент (β):

$$Э = a_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}} , \tag{2.6}$$

$$\beta_j = a_j \frac{S_{x_j}}{S_y} , \tag{2.7}$$

где $S_{x_j} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ji} - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$ – среднеквадратическое отклонение фактора x_j;

$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}}$ – среднеквадратическое отклонение зависимой переменной.

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменяется зависимая переменная при изменении фактора на один процент.

Бета-коэффициент показывает, на какую часть величины среднеквадратического отклонения меняется среднее значение зависимой переменной с изменением независимой переменной на одно среднеквадратическое отклонение при фиксированном на постоянном уровне значении остальных независимых переменных.

Построенная модель регрессии считается хорошей со статистической точки зрения, если она адекватна и достаточно точна. Оценить адекватность модели позволяет анализ случайной (или остаточной) компоненты (e_i). Модель является адекватной процессу, если математическое ожидание значений остаточного ряда близко или равно нулю, значения остаточного ряда случайны, независимы и подчинены нормальному закону распределения. Таким образом, анализ адекватности модели разбивается на несколько этапов.

1. Равенство нулю математического ожидания ряда остатков означает выполнение следующего соотношения:

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i}{n} \approx 0 .$$

Однако в нашем случае такая проверка является излишней, т.к. при использовании МНК выполняется равенство $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$, откуда безусловным образом следует равенство нулю математического ожидания значений остаточного ряда.

2. Проверка случайности последовательности e_i проводится с помощью критерия пиков (поворотных точек). Каждый уровень ряда (e_i) сравнивается с двумя, рядом стоящими. Точка считается поворотной, если она либо больше и предыдущего и последующего значения, либо меньше и предыдущего и последующего значения.

В случайном ряду должно выполняться строгое неравенство:

$$p > \left[2(n-2)/3 - 2\sqrt{(16n-29)/90} \right] \quad , \tag{2.8}$$

где p – количество поворотных точек;

[ ] - целая часть результата вычислений.

3. Независимость значений остаточного ряда (отсутствие автокорреляции) проверяется с помощью d-критерия Дарбина–Уотсона:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n} (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \ . \tag{2.9}$$

Эта величина сравнивается с двумя табличными уровнями: нижним – d_1 и верхним – d_2 (см. приложение А).

Если полученное d больше двух, то перед сопоставлением его нужно преобразовать:

$$d' = 4 - d.$$

Если d (или d') находится в интервале от нуля до d_1 , то уровни ряда остатков сильно автокоррелированы.

Если значение d-критерия попадает в интервал от d_2 до 2, то автокорреляция отсутствует.

Если $d_1<d<d_2$ – однозначного вывода об отсутствии или наличии автокорреляции сделать нельзя и необходимо использовать другой критерий, например, коэффициент автокорреляции первого порядка:

$$r(1) = \frac{\sum_{i=2}^{n} e_i \cdot e_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \ . \tag{2.10}$$

Если $|r(1)|$ окажется меньше табличного (при n<15 $r_{табл}$=0,36), то гипотеза о присутствии автокорреляции отвергается.

4. Соответствие остаточного ряда нормальному распределению проще всего проверять при помощи RS-критерия:

$$RS = \frac{e_{\max} - e_{\min}}{S} \ , \tag{2.11}$$

где e_{max} – максимальный уровень ряда остатков;

e_{min} – минимальный уровень ряда остатков;

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n-1}}$$ - среднеквадратическое отклонение.

Если рассчитанное значение попадает между табулированными границами с заданным уровнем вероятности (см. приложение Б), то гипотеза о нормальном распределении принимается.

Для характеристики точности модели вычисляют среднюю относительную ошибку:

$$\overline{E}_{отн}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|e_i|}{y_i}\cdot 100\% . \quad (2.12)$$

С помощью построенной регрессионной модели можно экстраполировать выявленные тенденции.

При построении точечного прогноза значение x можно получить на основе среднего прироста:

$$\overline{r}=\frac{x_n-x_1}{n-1} . \quad (2.13)$$

Для определения конкретного значения x используется формула:

$$x_{n+k}=x_n+\overline{r}\cdot k , \quad (2.14)$$

где k – количество шагов.

Подставив данное значение в уравнение регрессии, получим точечный прогноз величины y.

Интерес представляет также вычисление перспективных оценок в виде доверительных интервалов.

Доверительные границы прогноза определяются по формуле:

$$граница \quad прогноза=\widehat{y}_{n+k}\pm U_k . \quad (2.15)$$

Величина U_k для линейной модели имеет вид:

$$U_k=S\cdot k_p\sqrt{1+1/n+\frac{\left(x_{n+k}-\overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}} , \quad (2.16)$$

где S – среднеквадратическое отклонение из формулы (2.11),

k_p – табличное значение t-статистики Стьюдента (см. приложение В) для заданной вероятности попадания прогнозируемой величины внутри доверительного интервала.

1.1 Контрольные вопросы

1. Этапы построения модели регрессии.
2. Коэффициент парной линейной корреляции.
3. Сущность метода наименьших квадратов.
4. Мультиколлинеарность. Способы ее выявления и устранения.
5. Понятие автокорреляции.

2.6 Варианты заданий для расчетов

Вариант 1. В таблице 2.1 даны: значения показателя *Y* и соответствующие им значения факторов X_1 и X_2.

Таблица 2.1

Переменные	Наблюдаемые значения											
Y	10	14	21	24	33	41	44	47	49	56	64	70
X_1	43	47	57	48	54	57	61	59	69	60	56	75
X_2	3	7	10	11	15	17	21	25	23	24	28	30

Вычислите коэффициенты парной корреляции X_1 с *Y* и X_2 с *Y* и выберите фактор, наиболее тесно связанный с зависимой переменной *Y*.

Постройте линейную однопараметрическую модель регрессии для выбранного *X*.

Оцените качество построенной модели, исследовав ее адекватность и точность, рассчитайте коэффициент эластичности.

Постройте точечные и интервальные прогнозы на два шага вперед (вероятность попадания в интервал – 90 %). Прогнозные оценки фактора *X* на два шага вперед получите на основе использования величины среднего прироста.

Отобразите на графиках фактические данные, результаты расчетов и прогнозирования.

Вариант 2. В результате исследования, проведенного на нескольких машиностроительных предприятиях, были получены данные, характеризующие зависимость производительности труда при выработке однотипных заготовок (шт./ч.) от:

1) фондовооруженности (тыс.р.);
2) относительного количества материалов низкого качества в общей массе используемого в технологическом процессе сырья (%).

Соответствующие данные представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Показатели	Зафиксированные значения											
Производительность	30	34	36	40	41	46	49	52	53	55	58	60
Фондовооруженность	45	54	55	56	60	62	58	66	75	65	71	74
Доля некачественного сырья	75	69	65	66	62	60	61	56	53	50	46	45

Вычислите коэффициенты парной корреляции обоих факторов с откликом и выбрать фактор, наиболее тесно связанный с зависимой переменной.

Для выбранного фактора постройте линейную однопараметрическую модель регрессии.

Оцените качество построенной модели, исследовав ее адекватность и точность, рассчитайте коэффициент эластичности.

Постройте точечные и интервальные прогнозы на два шага вперед (вероятность попадания в интервал – 95 %). Прогнозные оценки независимой переменной на два шага вперед получите на основе использования величины среднего прироста.

Отобразите на графиках фактические данные, результаты расчетов и прогнозирования.

Вариант 3. Общественность некоего промышленного центра была не на шутку встревожена, после того как местная станция экологического контроля обнародовала данные своих наблюдений за последние 50 лет. В результате влияния антропогенных факторов – индустриального роста, урбанизации, загрязнения природной среды – в реке из года в год уменьшается уровень воды. В таблице 2.3 отражается зависимость среднегодового уровня воды в реке (замеры проводились в одной и той же точке) от годового потребления городом водных ресурсов.

Таблица 2.3

Показатели	Наблюдаемые значения									
годы	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
Потребление воды (тыс. $м^3$ / год)	1200	1900	2500	4500	7800	12400	24000	32000	39000	50000
Уровень воды (см)	315	302	290	284	271	258	237	211	202	174

Ввиду того, что берега водоема – любимое место отдыха горожан, местным ученым было дано задание: исследовать, к чему приведет сохранение сложившихся опасных тенденций.

Постройте модель регрессии, описывающей зависимость глубины реки от среднегодового потребления воды, оцените адекватность и точность построенной модели, рассчитайте коэффициент эластичности.

Продлите сложившиеся тенденции на будущее и ответьте на вопрос: в каком году река, как таковая, прекратит свое существование?

Вариант 4. Руководство большой шоколадной фабрики заинтересовано в построении модели для того, чтобы прогнозировать реализацию одной из своих уже долго существующих торговых марок. С этой целью были собраны статистические данные (таблица 2.4).

На основе представленной информации попытайтесь построить модель множественной регрессии (зависимость объема реализации от расходов на рекламу и цены продукции). Оцените ее адекватность и точность, вычислите бета-коэффициент и коэффициент эластичности.

Вариант 5. Исследователь-естествоиспытатель в результате наблюдения за неким явлением получил статистические данные о зависимости величины Y от величины X (таблица 2.5).

Таблица 2.4

Годы	Реализация (млн. р./год)	Расходы на рекламу (млн.р./год)	Цена (руб. за единицу)
1	126	4	15
2	137	4,8	14,8
3	148	3,8	15,2
4	191	8,7	15,5
5	274	8,2	15,5

6	370	9,7	16
7	432	14,7	18,1
8	445	18,7	13
9	367	19,8	15,8
10	367	10,6	16,9
11	321	8,6	16,3
12	307	6,5	16,1
13	331	12,6	15,4
14	345	6,5	15,7
15	364	5,8	16
16	384	5,7	15,1

Таблица 2.5

Переменные	Статистические данные														
X	110	120	140	180	190	200	220	240	260	280	300	320	340	360	400
Y	1870	1900	2011	2100	2210	2182	2310	2534	2600	2756	3187	3482	4170	4888	6403

Оцените степень связи между двумя величинами. Выявите вид зависимости и постройте уравнение регрессии на основе представленной информации. Проверьте адекватность и точность модели, рассчитайте коэффициент эластичности.

Постройте точечные и интервальные прогнозы на два шага вперед (вероятность попадания в интервал – 95 %). Прогнозные оценки независимой переменной на два шага вперед получите на основе использования величины среднего прироста.

Отобразите на графиках фактические данные, результаты расчетов и прогнозирования.

Вариант 6. Сотрудники туристической фирмы собрали данные о зависимости годовой прибыли от расходов на рекламу (данные представлены в таблице 2.6).

Оцените тесноту связи между показателями и попытайтесь построить модель линейной регрессии.

Затем исследуйте адекватность и точность модели, рассчитайте коэффициент эластичности.

Постройте точечные и интервальные прогнозы на два шага вперед (вероятность попадания в интервал – 90 %). Прогнозные оценки независимой переменной на два шага вперед получите на основе использования величины среднего прироста. Отобразите на графиках фактические данные, результаты расчетов и прогнозирования.

Таблица 2.6

Расходы на рекламу (млн. р / год)	Прибыль (млн. $ / год)	Расходы на рекламу (млн. р / год)	Прибыль (млн. $ / год)
112	420,3	202	804,8
114	523,8	210	748
116	534,9	196	752,2
135	598	175	763,8
136	598,8	120	638

132	552,9	168	666,6
163	603,7	150	542,2
170	628,1	192	543
190	741,4	200	562,7

Вариант 7. Сотрудники фирмы, занимающейся перевозками грузов на территории города, выбрали данные о зависимости времени доставки от расстояния между складом и местом назначения (таблица 2.7).

Таблица 2.7

Показатели	Статистические данные									
Расстояние, км	5,6	3,8	7,8	6,7	4,8	2,0	1,6	4,8	2,4	6,5
Время, мин	16	13	19	18	12	11	8	14	9	16

На основе имеющейся информации постройте модель регрессии, оцените ее адекватность и точность, рассчитайте коэффициент эластичности.

Спрогнозируйте значения отклика для расстояния x_1 км; x_2 км. Вероятность попадания зависимой переменной внутри доверительного интервала выберите самостоятельно.

Отобразите на графиках фактические данные, результаты расчетов и прогнозирования.

Вариант 8. Компания владеет двенадцатью магазинами. Необходимо установить связь между прибылью и товарооборотом. Данные для каждого магазина в отдельности за последний финансовый год приведены в таблице 2.8.

Таблица 2.8

Показатели	Статистические данные											
Магазины	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Оборот, тыс. $	50	60	85	85	100	120	140	155	180	210	250	300
Прибыль, тыс. $	2	4	11	17	18	28	34	36	48	55	71	85

Постройте модель для описания связи между прибылью и оборотом, оцените ее точность и адекватность, рассчитайте коэффициент эластичности.

Предположив, что в случае слияния двух магазинов их оборот останется прежним, оцените экономическую целесообразность слияния магазинов № 7 и № 9.

Отобразите на графике фактические данные и данные, полученные с помощью модели.

Вариант 9. На основе приведенных в таблице 2.9 данных постройте модель множественной линейной регрессии.

Оцените качество построенной модели, исследовав ее точность и адекватность, рассчитайте коэффициент эластичности и бета-коэффициент.

Таблица 2.9

Y	X_1	X_2	Y	X_1	X_2
125	4,0	100,0	367	19,6	108,3
136	4,8	98,4	367	10,5	109,5
148	3,8	101,2	321	8,8	110,1

190	8,7	103,4	307	6,5	110,7
275	8,2	104,1	331	12,6	110,3
370	9,7	107,0	345	6,5	111,8
432	14,7	107,4	364	5,8	112,3
445	18,5	108,5	385	5,7	112,9

Вариант 10. Компания владеет предприятиями, добывающими железную руду. Руководство решило исследовать зависимость средних издержек от размера месячной выработки. Собранная с этой целью статистическая информация представлена в таблице 2.10.

Таблица 2.10

Показатели	Статистические данные									
Завод	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Выработка, т в мес.	900	500	1750	2000	1400	1500	3000	1100	2600	1900
Средние издержки, $ на 1 тонну	51,95	57,18	46,80	45,37	46,03	48,15	44,22	48,80	45,40	44,69

Постройте модель регрессии, оцените ее качество, рассчитайте коэффициент эластичности.

Используя выявленную тенденцию дайте ответ на вопрос: при каком объеме месячной выработки средние издержки упадут до 40$ на тонну. Фактические и расчетные данные отразите на графиках.

Вариант 11. На группе предприятий обрабатывающей промышленности анализу подверглась зависимость производительности труда (выработка валовой продукции на одного работающего) от фондовооруженности. Были собраны соответствующие статистические данные (таблица 2.11).

Постройте однопараметрическую модель регрессии. Оцените ее адекватность и точность, рассчитайте коэффициент эластичности.

Таблица 2.11

Показатели	Статистические данные										
Производительность, тыс.р.	45	47	50	48	54	57	61	59	65	66	70
Фондовооруженность, тыс.р.	2500	3400	4200	5100	5500	6700	7300	7600	8100	7900	8500

Спрогнозируйте значение отклика на два шага вперед (вероятность попадания в доверительный интервал – 90%). Прогнозные оценки фактора *x* на два шага вперед получите на основе использования величины среднего прироста.

Дайте графическую интерпретацию решения задачи.

Вариант 12. В таблице 2.12 даны: значения показателя *Y* и соответствующие им значения факторов X_1 и X_2.

Таблица 2.12

Переменные	Зафиксированные значения											
Y	25	27	30	31	35	41	42	45	47	52	55	56
X_1	75	77	73	70	66	63	67	63	61	60	55	57
X_2	28	34	32	36	39	42	45	41	46	47	50	51

Вычислите коэффициенты парной корреляции X_1 с Y и X_2 с Y и выберите фактор, наиболее тесно связанный с зависимой переменной Y.

Постройте линейную однопараметрическую модель регрессии для выбранного X.

Оцените качество построенной модели, исследовав ее адекватность и точность, рассчитайте коэффициент эластичности.

Постройте точечные и интервальные прогнозы на два шага вперед (вероятность попадания в интервал – 95 %). Прогнозные оценки фактора X на два шага вперед получите на основе использования величины среднего прироста.

Отобразите на графиках фактические данные, результаты расчетов и прогнозирования.

Лабораторная работа № 4. Формирование и анализ оптимальной производственной программы предприятия

1.2 Цель работы

1. Изучить методику применения математического аппарата линейного программирования для задач формирования и анализа оптимальной производственной программы.
2. Рассчитать конкретный пример, заданный преподавателем.

1.3 Порядок выполнения работы

1. Изучить методы решения задач линейного программирования, правила построения двойственной задачи, свойства объективно обусловленных оценок.
2. Получить исходные данные у преподавателя.
3. Выполнить расчет на ЭВМ (расчеты рекомендуется проводить при помощи ППП Microsoft Excel).
4. Оформить отчет, включающий выводы по проделанной работе.

1.4 Содержание отчета

1. Краткие сведения о свойствах двойственных оценок.
2. Исходные данные.
3. Результаты расчета с анализом полученных данных.
4. Выводы.

1.5 Методические указания

Линейное программирование – направление математики, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием оптимальности.

К математическим задачам линейного программирования относят исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов.

Экономико-математическая модель любой задачи линейного программирования включает: целевую функцию (линейную форму), максимум или минимум (оптимум) которой требуется отыскать; ограничения в виде системы линейных уравнений (неравенств); требование неотрицательности переменных.

В общем виде модель записывается следующим образом:

– целевая функция:

$$f(\bar{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max(\min); \qquad (4.1)$$

– ограничения:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, =, \ge\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, =, \ge\} b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \{\le, =, \ge\} b_n, \end{array} \tag{4.2}$$

$$x \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

где a_{ij}, b_i, c_i $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ – заданные постоянные величины.

Систему ограничений (4.2) называют функциональными ограничениями задачи, а ограничения (4.3) – прямыми.

Вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (4.2) и (4.3), называется допустимым решением или планом задачи линейного программирования (ЗЛП). План, который доставляет максимум (минимум) целевой функции, оптимальным планом (оптимальным решением) ЗЛП.

Универсальным методом решения задач линейного программирования является симплексный метод, разработанный в конце 40-х годов американским математиком Дж. Б. Данцигом.

В настоящее время для решения задач линейного программирования, как правило, используют один из пакетов прикладных программ, которые общедоступны и широко применяются для этих целей.

Теория математического линейного программирования позволяет не только получать с помощью эффективных вычислительных процедур оптимальный план, но и сделать ряд экономически содержательных выводов, основанных на свойствах задачи, двойственной исходной ЗЛП.

Пусть в качестве исходной дана задача:

$$\begin{array}{c} f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{array} \tag{4.4}$$

ЗЛП, двойственная задаче (4.4), будет иметь вид:

$$\begin{array}{c} g(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n}, \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}. \end{array} \tag{4.5}$$

Таким образом, если в исходной задаче ищется максимум целевой функции, то в двойственной ей – минимум. Коэффициенты при переменных в линейной форме одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи. В исходной ЗЛП все функциональные ограничения – неравенства вида “≤”, а в задаче, двойственной ей, – неравенства вида “≥”. Коэффициенты при переменных в системах ограничений описываются матрицами, транспонированными относительно друг друга. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой. Условие неотрицательности переменных сохраняется в обеих задачах.

Связь между оптимальными планами взаимно двойственных задач устанавливают теоремы двойственности.

Теорема 1. Если одна из двойственных задач имеет конечный оптимум, то другая также имеет конечный оптимум, причем экстремальные значения целевых функций совпадают:

$$\max f(\overline{x}) = f(\overline{x}^*) = \min g(\overline{y}) = g(\overline{y}^*). \tag{4.6}$$

Если одна из двойственных задач неразрешима, то неразрешима и другая.

Теорема 2 (о дополняющей нежесткости). Пусть $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ – допустимое решение прямой задачи (4.4), а $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ – допустимое решение двойственной задачи (4.5). Для того чтобы они были оптимальными решениями соответственно задач (4.4) и (4.5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) &= 0, \\ y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) &= 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Переменные двойственной задачи принято называть двойственными оценками. Часто употребляется также термин «объективно обусловленные оценки».

На свойствах двойственных оценок базируется экономико-математический анализ распределения ресурсов. В пределах устойчивости двойственных оценок имеют место следующие свойства.

1. Значения переменных y_i^* в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов b_i в системе функциональных ограничений прямой задачи на величину целевой функции, т.е.:

$$y_i^* = \frac{\partial f(\overline{x}^*)}{\partial b_i}. \tag{4.8}$$

Величина двойственной оценки какого-либо ресурса показывает, насколько возросло бы максимальное значение целевой функции, если бы объем данного ресурса увеличился на единицу. В связи с этим значение объективно обусловленной оценки иногда называют теневой ценой ресурса. Теневая цена – это стоимость единицы ресурса в оптимальном решении.

Однако, двойственные оценки позволяют измерить эффективность лишь незначительного изменения объема ресурсов. При значительных изменениях может быть получен новый оптимальный план и новые двойственные оценки.

2. Объективно обусловленные оценки отражают сравнительную дефицитность факторов производства. Чем выше величина оценки y_i, тем выше де-

фицитность i-го ресурса. Факторы, получившие нулевые оценки, не являются дефицитными и не ограничивают производство.

3. Двойственные оценки позволяют определить относительную заменяемость ресурсов с точки зрения конечного эффекта. Например, отношение y_k / y_p показывает, сколько единиц p-го ресурса может быть высвобождено при увеличении объема k-го ресурса на единицу, для того чтобы максимум целевой функции остался на прежнем уровне; или наоборот, сколько единиц p-го ресурса необходимо дополнительно ввести при уменьшении на единицу объема k-го ресурса, если мы хотим, чтобы значение целевой функции не изменилось.

4. Двойственные оценки служат инструментом определения эффективности отдельных хозяйственных решений. С их помощью можно определить выгодность новых изделий, эффективность новых технологических способов производства. При этом эффективным может считаться тот вариант производства, для которого сумма недополученной прибыли из-за отвлечения дефицитных ресурсов будет меньше получаемой прибыли. Разница между этими величинами (Δj) вычисляется как:

$$\Delta j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^{*} - c_j \,, \qquad j = \overline{1, n} \,. \tag{4.9}$$

В том случае, если $\Delta j \le 0$, вариант производства является выгодным, если $\Delta j > 0$ – вариант невыгоден.

Таким образом, объективно обусловленные оценки позволяют провести многовариантный анализ полученного оптимального решения двойственной задачи.

4.5 Контрольные вопросы

1. Классы задач, решаемых при помощи математического аппарата линейного программирования.
2. Общий вид ЗЛП.
3. Правила получения ЗЛП, двойственной по отношению к исходной.
4. Основные теоремы двойственности.
5. Свойства объективно обусловленных оценок.

4.6 Варианты заданий для расчета

Вариант 1. Для изготовления четырех видов продукции используется три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице 4.1.

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости, составьте оптимальную производственную программу.

Сформулируйте двойственную задачу и найдите ее оптимальное решение.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Таблица 4.1

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

Определите, как изменится общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I и II вида на 4 и 3 единицы соответственно и уменьшении на 3 единицы количества сырья III.

Определите целесообразность включения в план изделия «Д» ценой 10 единиц, на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Вариант 2. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	120
II	0	1	3	2	240
III	4	2	0	4	800
Цена изделия	9	6	4	7	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости, укажите оптимальную производственную программу.

Сформулируйте двойственную задачу. Найдите объективно обусловленные оценки.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Определите, как изменятся общая стоимость продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья II и III на 120 и 160 единиц соответственно и одновременном уменьшении на 60 единиц запасов сырья I вида.

Определите целесообразность включения в план изделия «Д» ценой 12 единиц, на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Вариант 3. Для производства трех видов продукции используется три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого из продуктов приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Тип сырья	Нормы расхода сырья			Запасы сырья
	А	Б	В	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Цена изделия	10	14	12	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости. Укажите оптимальную производственную программу.

Сформулируйте двойственную задачу и найдите двойственные оценки.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Определите, как изменится общая стоимость и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I и III видов на 4 единицы каждого.

Определите целесообразность включения в план изделия «Г» ценой 13 единиц, на изготовление которого расходуется 1,3 и 2 единицы каждого вида сырья, и изделия «Д» ценой 12 единиц, на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Вариант 4. Фабрика «Турпищепром» выпускает два вида консервированных продуктов питания: «Завтрак туриста» и «Обед туриста». Используемые для производства ингредиенты не являются дефицитными. Основным ограничением, накладываемым на объем выпуска, является наличие фонда рабочего времени в каждом из трех цехов. Соответствующая информация приведена в таблице 4.4.

Таблица 4.4

Цех	Необходимый фонд рабочего времени, чел.-ч на тонну		Общий фонд рабочего времени, чел.-ч в месяц
	«Завтрак»	«Обед»	
№1 Производство	4	10	1000
№2 Добавка приправ	2	3	360
№3 Упаковка	5	2	600
Доход от производства одной тонны	75	150	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум прибыли и составьте оптимальную производственную программу на месяц.

Сформулируйте двойственную задачу и найдите двойственные оценки.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Определите, как изменится месячный доход и план выпуска продукции при увеличении фонда рабочего времени на 120 ч в производственном цехе и на 40 ч в цехе добавки приправ.

Определите целесообразность включения в программу производства нового вида консервов – «Ужин туриста», если доход от производства одной тонны равен 60 единицам, а необходимый фонд рабочего времени каждого цеха – 3, 3 и 2 чел.-ч/т соответственно.

Вариант 5. Для изготовления четырех видов продукции используется три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице 4.5.

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости, укажите оптимальный план производства.

Сформулируйте двойственную задачу и найдите ее оптимальный план.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Таблица 4.5

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	2	1	3	2	200
II	1	2	4	8	160
III	2	4	1	1	170
Цена изделия	5	7	3	6	

Определите, как изменится общая стоимость продукции и план производства при увеличении запасов сырья I и II на 8 и 10 единиц соответственно и одновременном уменьшении на 5 единиц запасов сырья III.

Определите целесообразность включения в план изделия «Д», на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья; ожидаемая прибыль – 10 единиц на одно изделие.

Вариант 6. Мини-завод производит два популярных безалкогольных напитка: «Живая вода» и «Доброе утро». Объем выпуска ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью технологического оборудования. Для производства 1 л «Живой воды» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Доброго утра» – 0,04 ч. Расход специального ингредиента составляет 10 г и 40 г на 1 л «Живой воды» и «Доброго утра» соответственно. Ежедневно в распоряжении предприятия имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Доход составляет 0,1 ед. стоимости на 1 л «Живой воды» и 0,3 ед. стоимости на 1 л «Доброго утра».

Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель – максимизация прибыли?

Сформулируйте двойственную задачу и найдите объективно обусловленные оценки.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Определите, как изменится ежедневный доход и план производства, если количество потребляемого ингредиента увеличится до 17 кг, а фонд рабочего времени оборудования сократится до 22 ч.

Определите целесообразность включения в производственную программу напитка «Капля росы», если для изготовления одного литра требуется 0,02 ч работы оборудования и 30 г ингредиента. Предполагаемый доход от реализации нового напитка – 0,2 ед. стоимости на 1 л.

Вариант 7. На основании информации, приведенной в таблице 4.6, составьте оптимальную производственную программу по критерию максимума общей стоимости.

Таблица 4.6

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на единицу продукта			Запасы
	I вид	II вид	III вид	
Труд	1	4	3	200
Сырье	1	1	2	80
Оборудование	1	1	2	140
Цена	40	60	80	

Сформулируйте двойственную задачу и найдите теневые цены ресурсов.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Определите, как изменится общая стоимость продукции и план выпуска при увеличении запасов сырья на 18 единиц.

Определите целесообразность включения в план изделия четвертого вида ценой 70 ед., на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида ресурсов.

Вариант 8. Фабрика выпускает три вида тканей. Суточные ресурсы фабрики, их расход на единицу ткани и цена 1 метра выпускаемой продукции представлены в таблице 4.7.

Таблица 4.7

Ресурсы	Нормы затрат на производство 1 м ткани			Суточный лимит
	I	II	III	
Оборудование	2	3	4	700
Сырье	1	4	5	800
Электроэнергия	3	4	2	600
Цена	8	7	6	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости, укажите оптимальный план производства.

Сформулируйте двойственную задачу и найдите теневые цены ресурсов.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план производства, если суточный лимит использования электроэнергии увеличится на 50 единиц?

Определите целесообразность включения в производственную программу ткани нового вида ценой 9 единиц, для производства 1 м которой требуется по 3 единицы оборудования и электроэнергии и 4 единицы сырья.

Вариант 9. Предприятие выпускает три вида изделий, используя при этом три вида сырья (данные представлены в таблице 4.8).

Таблица 4.8

Тип сырья	Нормы затрат на единицу продукции			Запасы сырья, кг
	А	Б	В	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена изделия	9	10	16	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости, составьте оптимальную производственную программу.

Сформулируйте двойственную задачу и найдите ее оптимальный план.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 45 кг, а II – уменьшить на 9 кг?

Целесообразно ли включение в производственную программу изделия «Г» ценой 11 единиц, если нормы затрат сырья 9, 4 и 6 кг соответственно?

Вариант 10. Предприятие выпускает 4 вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты на изготовление единицы продукции приведены в таблице 4.9; там же указан общий фонд рабочего времени и цена изделия каждого вида.

Таблица 4.9

Тип оборудо-вания	Нормы затрат времени на одно изделие				Общий фонд рабочего времени, ч
	А	Б	В	Г	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	0	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	0	340
Цена изделия	8	3	2	1	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости, укажите оптимальный план.

Сформулируйте двойственную задачу и найдите объективно обусловленные оценки.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план выпуска, если фонд времени шлифовального оборудования увеличится на 24 часа?

Целесообразно ли выпускать изделие «Д» ценой 11 единиц, если нормы затрат времени – 8, 2 и 2 ч соответственно?

Вариант 11. Для изготовления четырех видов продукции используется три вида сырья. Запасы, нормы расхода сырья и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице 4.10.

Таблица 4.10

Тип сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие				Запасы сырья, кг
	А	Б	В	Г	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Цена изделия	7,5	3	6	12	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости, укажите оптимальный план.

Сформулируйте двойственную задачу и найдите теневую цену каждого ресурса.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Определите, как изменится общая стоимость продукции и план ее выпуска, если запас сырья первого вида увеличить на 100 кг, а второго – уменьшить на 150 кг.

Определите целесообразность включения в производственную программу модифицированного варианта изделия «А», если цена такого изделия 10 ед., а нормы расхода сырья – 2, 4 и 3 кг.

Вариант 12. На предприятии выпускается три вида изделий. При этом используется три вида сырья (данные представлены в таблице 4.11).

Таблица 4.11

Тип сырья	Нормы затрат сырья на единицу продукции			Запасы сырья, кг
	I вид	II вид	III вид	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
Цена изделия	3	2	5	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости, укажите оптимальную производственную программу.

Сформулируйте двойственную задачу и найдите двойственные оценки.

Проанализируйте использование ресурсов в оптимальном плане.

Как изменится общая стоимость выпускаемой продукции и план выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 80 кг, а II – уменьшить на 10 кг?

Целесообразно ли выпускать изделие IV вида ценой 7 единиц, если нормы затрат сырья – 2, 4 и 3 кг?

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Карасев А.И. и др. Математические методы и модели в планировании: Учебное пособие для экономических вузов / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И. Савельева; Под ред. А.И. Карасева. – М.: Экономика, 1987. – 240 с.

2. Ларионов А.И. и др. Экономико-математические методы в планировании: Учеб. для средних специальных учебных заведений / А.И. Ларионов, Т.И. Юрченко, А.Л. Новоселов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1991. – 240 с.

3. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М.: Наука, 1984. – 392 с.

4. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. Изд-е 2-е, перераб. и доп. – М.: Статистика, 1977. – 200 с.

5. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений / Пер. с англ. под ред. чл.-корр. РАН И.И. Елисеевой. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.

Дополнительная:

6. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1979. – 304 с.

7. Леонтьев В.В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика: Пер. с англ. – М.: Политиздат, 1990. – 415 с.

8. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: [Учебное пособие для втузов]. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988. – 238 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А Значения критерия Дарбина-Уотсона

Таблица А.1* Значения критерия Дарбина-Уотсона (уровень значимости – 5 %)

Число наблюде-ний (n)	m=1		m=2		m=3		m=4		m=5	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,47
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

* Таблица заимствована из [4]

ПРИЛОЖЕНИЕ Б Критические границы отношения R/S

Таблица Б.1* Критические границы отношения R/S

Объем выборки (n)	Нижние границы						Верхние границы					
	Вероятность ошибки											
	0,000	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,000
3	1,732	1,735	1,737	1,745	1,758	1,782	1,997	1,999	2,000	2,000	2,000	2,000
4	1,732	1,83	1,87	1,93	1,98	2,04	2,409	2,429	2,439	2,445	2,447	2,449
5	1,826	1,98	2,02	2,09	2,15	2,22	2,712	2,753	2,782	2,803	2,813	2,828
6	1,826	2,11	2,15	2,22	2,28	2,37	2,949	3,012	3,056	3,095	3,115	3,162
7	1,821	2,22	2,26	2,33	2,40	2,49	3,143	3,222	3,282	3,338	3,369	4,465
8	1,821	2,31	2,35	2,43	2,50	2,59	3,308	3,399	3,471	3,543	3,585	3,742
9	1,897	2,39	2,44	2,51	2,59	2,68	3,449	3,552	3,634	3,720	3,772	4,000
10	1,897	2,46	2,51	2,59	2,67	2,76	3,57	3,685	3,777	3,875	3,935	2,243
11	1,915	2,53	2,58	2,66	2,74	2,84	3,68	3,80	3,903	4,012	4,079	4,472
12	1,915	2,59	2,64	2,72	2,80	2,90	3,78	3,91	4,02	4,134	4,208	4,690
13	1,927	2,64	2,70	2,78	2,86	2,96	3,87	4,00	4,12	4,244	4,325	4.899
14	1,927	2,70	2,75	2,83	2,92	3,02	3,95	4,09	4,21	4,34	4,431	5,099
15	1,936	2,74	2,80	2,88	2,97	3,07	4,02	4,17	4,29	4,44	4,53	5,292
16	1,936	2,79	2,84	2,93	3,01	3,12	4,09	4,24	4,37	4,52	4,62	5,477
17	1,944	2,83	2,88	2,97	3,06	3,17	4,15	4,31	4,44	4,60	4,70	5,657
18	1,944	2,87	2,92	3,01	3,10	3,21	4,21	4,37	4,51	4,67	4,78	5,831
19	1,949	2,90	2,96	3,05	3,14	3,25	4,27	4,43	4,57	4,74	4,85	6,000
20	1,949	2,94	2,99	3,09	3,18	3,29	4,32	4,49	4,63	4,80	4,91	6,164

* Таблица заимствована из [8]

ПРИЛОЖЕНИЕ В Процентные точки распределения Стьюдента

Таблица В.1* Процентные точки распределения Стьюдента

Степень свободы	Вероятность									
	40 %	25 %	10 %	5 %	2,5 %	1 %	0,5 %	0,25 %	0,1 %	0,05 %
1	0,3249	1,0000	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	127,3213	318,3088	636,6192
2	2887	0,8561	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	14,0890	22,3271	31,5991
3	2767	7649	6377	3534	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,2145	12,9240
4	2707	7407	5332	1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5976	7,1732	8,6103
5	2672	7267	4759	2,0150	5706	3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,8688
6	0,2648	0,7176	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168	5,2076	5,9588
7	2632	7111	4149	8946	3646	2,9980	4995	4,0293	4,7854	4079
8	2619	7064	3968	8595	3060	8965	3554	3,8325	5008	5,0413
9	2610	7027	3830	8331	2622	8214	2498	6897	2968	4,7809
10	2602	6998	3722	8125	2281	7638	1693	5814	1437	5869
11	0,2696	0,6974	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966	4,0247	4,4370
12	2590	6955	3562	7823	1788	6810	0554	4284	3,9296	3178
13	2586	6934	3502	7709	1604	6503	3,0123	3725	8520	2208
14	2582	6924	3450	7613	1448	6245	2,9768	3257	7874	1405
15	2579	6912	3406	7530	1314	6025	9467	2860	7328	0728
16	0,2576	0,6901	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520	3,6862	4,0150
17	2573	6892	3334	7396	1098	5696	8982	2224	6458	3,9651
18	2571	6884	3304	7341	1009	5524	8784	1966	6105	9216
19	2569	6874	3277	7291	0930	5395	8609	1737	5794	8834
20	2567	6870	3253	7247	0860	5280	8453	1534	5518	8495

* Таблица заимствована из [8]