动态海洋重力仪的数据处理问题研究报告[1]

自 64 赵文亮

2016011452

摘 要 为了解决动态海洋重力仪的数据处理问题，分析了解决问题的一种可能途径和局限性，并在此基础上提出极大极小准则下的滤波器的设计。通过对极大极小准则定义下的滤波的分析，经过严格的数学推导，在极大极小准则的意义下通过构造得出在给定误差允许范围内的最优解。最后将该滤波方法在海洋重力勘探的实际问题中加以应用并与其它类型的滤波方法相比较，从而得出极大极小准则下的最优滤波器在实际处理时效果优于另外两种常用方法的结论。

关键词 滤波；动态；极大极小；切比雪夫多项式

正 文

引言 在地质勘探问题中，常常采用重力法，即通过测量重力加速度的变化以勘探地质结构。传统的静态重力仪可以在同一个位置多次采集数据取平均值从而得到较为准确的重力加速度值。但是这种方式耗时长，效率低。所以我们希望能够在勘探船行驶的过程中动态测量各点的重力值。然而动态重力仪在工作过程中会受到勘探船本身行进时的加速度的干扰，尤其是上下颠簸带来的垂直加速度。事实上，这种干扰的强度大小是信号强度大小的上万倍。如果能够提出有效的滤波方法在强大的噪声中将信号提取出来，可以大大提高勘探的效率，提高经济效益。

1 一种可能的途径

1.1 基本思路

设信号序列为 $x_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 通过线性系统 $\mathscr{L}$,IRF 为 $h_k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 则 x_t 通过 $\mathscr{L}$ 的输出为

$$y_t = \sum\nolimits_k h_k x_{t-k}$$

取 x_t 和 h_k 的傅里叶变换，得到两者在频域上的表达式

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_k x_k e^{-ik\omega}, -\pi \le \omega \le \pi$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_l h_l e^{-il\omega}, -\pi \le \omega \le \pi$$

由正反傅里叶变换的关系，有

$$x_t=\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$h_k=\int_{-\pi}^{\pi}H(\omega)e^{i\omega k}d\omega$$

进一步可以推导出

$$y_t=2\pi\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)H(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

从这个表达式可以看出，如果信号和干扰在频域上互不重叠，则可以通过设计 $\mathscr{L}$ 的 FRF 来去除噪声。例如，设信号对应的频率区间为I，则令

$$H(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & \omega\in I\\ 0, & \omega\notin I\end{cases}$$

则 $y_t=2\pi\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)H(\omega)e^{i\omega t}d\omega=2\pi\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)(\dfrac{1}{2\pi})e^{i\omega t}d\omega=\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega=x_t$

即可以达到完全去除噪声的效果。

1.2 局限性

上述讨论中得到了理想的 FRF，但是在实际应用中，滤波的过程通常在时域上进行，而对应的 IRF 只能是有限多项，故实际情况下的 FRF 只能是

$$H_n(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}h_k e^{-ik\omega}$$

所以，实际情况下的滤波性能依赖于n的选取，n越大滤波性能越好。但是如果h_k的收敛速度较慢，则一味增加n的取值并没有实质性的效果。

事实上，这种滤波方法在实际应用中由于截尾造成的泄漏引起的干扰不能忽视，特别是在噪声强度比信号强度大上万倍的情况下，要想取得较好的滤波效果，必须将这种干扰降到最低。但是通过计算n取不同值时尾部泄漏的比例可知，增加n的取值虽然可以减少尾部泄漏，但是效果并不明显。所以针对这个问题，我们需要提出另一种行之有效的滤波方法。

2 极大极小准则下的滤波

2.1 极大极小准则

针对上文所述滤波方法中存在的问题，我们提出极大极小准则下的滤波。

首先仍然假设信号与噪声在频域上分离，并设截止频率为α，即噪声集中

在$[\alpha,\pi]$上

（1） 取滤波系数 IRF 为$\{h_k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm N\}$，其中$h_k$均为实数且

$$h_k = h_{-k}$$

（2） 在此规定下的 IRF 对应的 FRF 为（此处省略因子$\frac{1}{2\pi}$）

$$H(\omega)=\sum_{k=-N}^{N}h_k e^{ik\omega}=\sum_{k=-N}^{N}h_k(\cos k\omega+i\sin k\omega)=\sum_{k=-N}^{N}h_k\cos k\omega$$

$$\text{且 } H(0)=1$$

（3） 对于误差$\delta>0$和截止频率$\alpha>0$，我们要寻求的最优的$H^*(\omega)$,记为 OFRF，满足

$$\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|H^*(\omega)\right|\le\inf_{\{h_k\}}[\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|H(\omega)\right|]\le\delta$$

需要指出的是，若单纯考虑条件（3），则将 IRF 系数缩小一定的倍数后总可以满足条件，但这种情况将噪声滤掉的同时也将信号滤掉。故需要限制信号频域的 FRF，即增加$H(0)=1$的条件来保证信号得到保留。

另外，我们不能要求$\delta=0$，否则会有

$$0=\delta\ge\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|H^*(\omega)\right|\ge\left|H^*(\omega)\right|\ge0$$

进而得出$h_k^*\equiv0$，即滤掉噪声的同时也滤掉了信号。

2.2 极大极小准则滤波 OFRF 的解

解决问题的关键在确定$H(0)=1$的条件下考虑$\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|H(\omega)\right|$的最小值，直接考虑这个问题并不容易，所以我们采用一个等价的方法，即先假定$\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|H(\omega)\right|$固定，不妨设$\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|H(\omega)\right|=1$, 考虑$H(0)$的最大值。为此，令

$$\mathscr{H}=\{H(\omega)\,\big|\,H(\omega)=\sum_{k=-N}^{N}h_k\cos k\omega, h_k=h_{-k}, h_k\in R, \left|H(\omega)\right|\le1, \alpha\le\omega\le\pi\}$$

下面证明一个定理。

定理 1：若$\hat{H}(\omega)\in\mathscr{H}$满足$\left|\hat{H}(0)\right|=C\ge\left|H(0)\right|$，$\forall H\in\mathscr{H}$

则只需做如下调整：令 $\tilde{h}_k = \frac{1}{C}\hat{h}_k, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \pm N$, 则 $\{\tilde{h}_k\}$ 是在 $\delta = \frac{1}{C}$ 下的最优 IRF。

证明 1：令

$$\tilde{H}(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} \tilde{h}_k \cos k\omega, 0 \le \omega \le \pi$$

则

$$\left|\tilde{H}(0)\right| = \left|\sum_{k=-N}^{N} \frac{\hat{h}_k}{C}\right| = \frac{1}{C}\left|\hat{H}(0)\right| = 1$$

且

$$\left|\tilde{H}(\omega)\right| = \left|\sum_{k=-N}^{N} \tilde{h}_k \cos k\omega\right| = \frac{1}{C}\left|\sum_{k=-N}^{N} \hat{h}_k \cos k\omega\right| \le \frac{1}{C}$$

设 $D = \max_{\alpha \le \omega \le \pi}\left|\tilde{H}(\omega)\right|$，则有 $D \le \frac{1}{C}$，

并满足

$$\{\inf_{\{h_k\}}[\max_{\alpha \le \omega \le \pi}\left|H(\omega)\right|]\} = \delta \le D \le \frac{1}{C}$$

另一方面，假设满足（1）-（3）的最优 IRF 是 $\{h_k^*\}$，令 $\bar{h}_k = \frac{1}{\delta} h_k^*, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \pm N,$

则 $\left|\bar{H}(\omega)\right| = \left|\sum_{k=-N}^{N} \bar{h} \cos k\omega\right| = \frac{1}{\delta}\left|\sum_{k=-N}^{N} h_k^* \cos k\omega\right| \le \frac{1}{\delta} \cdot \delta = 1$

故 $\bar{H} \in \mathscr{H}$，又因为 $\left|\hat{H}(0)\right| = C \ge \left|H(0)\right|$，$\forall H \in \mathscr{H}$

则 $\left|\bar{H}(0)\right| \le \left|\hat{H}(0)\right| = C$，且 $\left|\bar{H}(0)\right| = \frac{1}{\delta}\left|H^*(0)\right| = \frac{1}{\delta}$

所以 $\frac{1}{\delta} \le C$，即 $\delta \ge \frac{1}{C}$。又从前述证明知 $\delta \le \frac{1}{C}$，故 $\delta = \frac{1}{C}$

即 $\{\tilde{h}_k\}$ 是在 $\delta = \frac{1}{C}$ 下的最优 IRF。□

证明 2：令

$$\tilde{H}(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} \tilde{h}_k \cos k\omega, 0 \le \omega \le \pi$$

则

$$\left|\tilde{H}(0)\right| = \left|\sum_{k=-N}^{N} \frac{\hat{h}_k}{C}\right| = \frac{1}{C}\left|\hat{H}(0)\right| = 1$$

且

$$\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|\tilde{H}(\omega)\right| = \frac{1}{C}\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|\hat{H}(\omega)\right| \le \frac{1}{C}$$

$\forall H_1$ 满足条件（1）（2），不妨设

$$\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|H_1(\omega)\right| = t$$

令 $H_2(\omega) = \frac{1}{t}H_1(\omega)$，则有 $\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|H_2(\omega)\right| = 1$，即 $H_2 \in \mathscr{H}$

于是 $1 = \left|H_1(0)\right| = t\left|H_2(0)\right| \le tC$，即 $\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|H_1(\omega)\right| = t \ge \frac{1}{C}$

而 $\tilde{H}$ 也满足（1）（2），故 $\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|\tilde{H}(\omega)\right| \ge \frac{1}{C}$

另一方面，$\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|\tilde{H}(\omega)\right| \le \frac{1}{C}$，则 $\max_{\alpha\le\omega\le\pi}\left|\tilde{H}(\omega)\right| = \frac{1}{C}$

故 $\tilde{H}$ 为 $\delta = \frac{1}{C}$ 下的 OFRF，即 $\{\tilde{h}_k\}$ 是在 $\delta = \frac{1}{C}$ 下的最优 IRF。□

有了定理 1，求解 OFRF 的问题转化成了求一个 $\hat{H} \in \mathscr{H}$ 使得 $\left|\hat{H}(0)\right|$ 最大。

由 $\mathscr{H}$ 的定义可知 $\forall H \in \mathscr{H}$，$H$ 是关于 $\cos k\omega, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \pm N$ 的函数。由于 $\cos k\omega$ 可以展开成 $\cos\omega$ 的 $|k|$ 阶多项式，H 也是 $\cos\omega$ 的多项式。

在此基础上，可以建立 H 与 N 阶多项式 P 的一一对应。定义

$$\mathscr{P} = \{P_N(\cos\omega) | \text{关于}\cos\omega\text{的}N\text{阶实系数多项式}, \text{且}\left|P_N(\cos\omega)\right| \le 1, 0 < \alpha \le \omega \le \pi\}$$

$$= \{P_N(x) | \text{关于}x\text{的}N\text{阶实系数多项式}, \text{且}\left|P_N(x)\right| \le 1, -1 \le x \le a = \cos\alpha\}$$

至此，问题转化为寻求 $\hat{P}_N(x) \in \mathscr{P}$ 使得 $\left|\hat{P}_N(1)\right| \ge \left|P_N(1)\right|, \forall P_N(x) \in \mathscr{P}$

下面的定理构造出了满足条件的最优解。

定理 2：对 $0 < \alpha < \pi$，正偶数 N，令 $\hat{P}_N(x) = \cos(N\cos^{-1}\frac{2x - a + 1}{a + 1})$

则 $\hat{P}_N(x)$ 满足 $\left|\hat{P}_N(x)\right| \le 1, -1 \le x \le a = \cos\alpha$ 和 $\left|\hat{P}_N(1)\right| \ge \left|P_N(1)\right|, \forall P_N(x) \in \mathscr{P}$。

证明：由切比雪夫多项式 $T_N(y) = \cos(N\cos^{-1}y)$ 可知，$\hat{P}_N(x)$ 是关于 x 的多项式，且显然有 $\left|\hat{P}_N(x)\right| \le 1, -1 \le x \le a = \cos\alpha$。

下证$\left|\hat{P}_N(1)\right| \ge \left|P_N(1)\right|, \forall P_N(x) \in \mathscr{P}$。

令

$$x_m = \frac{1}{2}[(a+1)\cos\frac{m\pi}{N} + (a-1)], m = 0,1,2,\cdots N,$$

或

$$\cos\frac{m\pi}{N} = \frac{2x_m - a + 1}{a+1}$$

则$-1 \le x_m \le a, m = 0,1,2,\cdots N$

且$m < n$时，$x_m > x_n$。

由 Lagrange 插值多项式可知

$$P_N(x) = \sum_{m=0}^{N} P_N(x_m) \frac{\prod_{n\ne m}(x - x_n)}{\prod_{n\ne m}(x_m - x_n)}$$

故

$$\left|P_N(1)\right| = \left|\sum_{m=0}^{N} P_N(x_m) \frac{\prod_{n\ne m}(1 - x_n)}{\prod_{n\ne m}(x_m - x_n)}\right| \le \sum_{m=0}^{N} \left|P_N(x_m)\right| \left|\frac{\prod_{n\ne m}(1 - x_n)}{\prod_{n\ne m}(x_m - x_n)}\right|$$

易知$\prod_{n\ne m}(1 - x_n) \ge 0$，而

$$\prod_{n\ne m}(x_m - x_n) = \prod_{n<m}(x_m - x_n)\prod_{n>m}(x_m - x_n)$$

由x_m的单调性可知，第二项非负，第一项为负。

$$\left|\prod_{n\ne m}(x_m - x_n)\right| = (-1)^m \prod_{n\ne m}(x_m - x_n)$$

则

$$\left|P_N(1)\right| \le \sum_{m=0}^{N} \left|P_N(x_m)\right| \left|\frac{\prod_{n\ne m}(1 - x_n)}{\prod_{n\ne m}(x_m - x_n)}\right| = \sum_{m=0}^{N} \left|P_N(x_m)\right| \cdot (-1)^m \frac{\prod_{n\ne m}(1 - x_n)}{\prod_{n\ne m}(x_m - x_n)}$$

又因为$\left|P_N(x)\right| \le 1, -1 \le x \le a = \cos\alpha$，$-1 \le x_m \le a, m = 0,1,2,\cdots N$

$$\left|P_N(1)\right| \le \sum_{m=0}^{N} \left|P_N(x_m)\right| \cdot (-1)^m \frac{\prod_{n\ne m}(1 - x_n)}{\prod_{n\ne m}(x_m - x_n)} \le \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{\prod_{n\ne m}(1 - x_n)}{\prod_{n\ne m}(x_m - x_n)}$$

注意到$\hat{P}_N(x_m) = \cos(N\cos^{-1}(\cos\frac{m\pi}{N})) = (-1)^m$

和$\hat{P}_N(1) = \sum_{m=0}^{N} \hat{P}_N(x_m) \frac{\prod_{n\ne m}(1 - x_n)}{\prod_{n\ne m}(x_m - x_n)}$可得

$$\left|P_N(1)\right| \le \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{\prod_{n\neq m}(1-x_n)}{\prod_{n\neq m}(x_m-x_n)} = \sum_{m=0}^{N} \hat{P}_N(x_m) \frac{\prod_{n\neq m}(1-x_n)}{\prod_{n\neq m}(x_m-x_n)} = \hat{P}_N(1)$$

注：定理证明过程中考虑到$-1\le x\le a$的区间宽度为$a+1$，故为了代入切比雪夫多项式需进行变换$y=\dfrac{2x-a+1}{a+1}$，这样就有$-1\le y\le 1$。沿着这个思路，考虑在区间$[-1,1]$上的$\cos\dfrac{m\pi}{N}, m=0,1,2,\cdots N$进行取值，进而得以证明。

根据以上的结论有

$$\hat{H}(\omega)=\cos(N\cos^{-1}\frac{2\cos\omega-\cos\alpha+1}{\cos\alpha+1}), \alpha\le\omega\le\pi,$$

且$\left|\hat{H}(\omega)\right|\le 1$，$\left|\hat{H}(0)\right|$具有最大值。

则 OFRF 为

$$\begin{cases} H^*(\omega)=\delta\cos(N\cos^{-1}\dfrac{2\cos\omega-\cos\alpha+1}{\cos\alpha+1}), \alpha\le\omega\le\pi \\ \delta=\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{\hat{P}_N(1)} \end{cases}$$

然而上述表达式只在$\alpha\le\omega\le\pi$上有定义，对于$0\le\omega<\alpha$，由欧拉公式，

$$\cos(N\cos^{-1}y)=\frac{1}{2}\{[\cos(N\cos^{-1}y)+i\sin(N\cos^{-1}y)]+[\cos(N\cos^{-1}y)-i\sin(N\cos^{-1}y)]\}$$
$$=\frac{1}{2}(e^{iN\cos^{-1}y}+e^{-iN\cos^{-1}y})=\frac{1}{2}[(e^{i\cos^{-1}y})^N+(e^{-i\cos^{-1}y})^N]=\frac{1}{2}[(y+\sqrt{y^2-1})^N+(y-\sqrt{y^2-1})^N]$$

故

$$\hat{P}_N(x)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2x-a+1}{a+1}+\sqrt{\left(\frac{2x-a+1}{a+1}\right)^2-1}\right)^N+\left(\frac{2x-a+1}{a+1}-\sqrt{\left(\frac{2x-a+1}{a+1}\right)^2-1}\right)^N\right\}$$

且

$$\hat{P}_N(1)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3-a}{a+1}+\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right)^N+\left(\frac{3-a}{a+1}-\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right)^N\right\}$$

设$\delta=\dfrac{1}{\hat{P}_N(1)}$，$C_\omega=\cos\omega$，则 OFRF 为

$$H^*(\omega)=\begin{cases}\delta\cos(N\cos^{-1}\Phi(\omega)),\alpha\le\omega\le\pi\\ \dfrac{\delta}{2}\left\{\left(\Phi(\omega)+\sqrt{\Phi^2(\omega)}-1\right)^N+\left(\Phi(\omega)-\sqrt{\Phi^2(\omega)}-1\right)^N\right\},0\le\omega<\alpha\end{cases}$$

其中 $\Phi(\omega)=\dfrac{2C_\omega-a+1}{a+1}$， $a=\cos\alpha$。

3 极大极小准则滤波在海洋重力勘探的应用

3.1 应用方法

前文已经得到了在极大极小准则下的最优 FRF 解，在应用过程中的一个很重要的问题是如何选取滤波项数 N。

由

$$\hat{P}_N(1)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3-a}{a+1}+\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right)^N+\left(\frac{3-a}{a+1}-\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right)^N\right\}$$

注意到 $\left(\dfrac{3-a}{a+1}+\sqrt{\left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right)\left(\dfrac{3-a}{a+1}-\sqrt{\left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right)=1$，且第一项大于1，故第二项小于1。所以，当 N 较大时 $\hat{P}_N(1)\approx\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3-a}{a+1}+\sqrt{\left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right)^N$

对于给定的 $\delta>0$，只需 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3-a}{a+1}+\sqrt{\left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right)^N\ge\dfrac{1}{\delta}$ 即可解出 N 的估计值。

3.2 与其它滤波方法的比较

通过实际应用的数据可知，极大极小准则下的最优滤波器优于 Gauss 型滤波和三次平均滤波。

结语 本文通过对动态海洋重力仪的数据处理的问题的研究，得到了极大极小准则下的最优 FRF 解。在实际应用中采用这种滤波器可以大大减少时间和工作量。分析过程中假定信号与噪声在频域分离，但是实际情况中二者重叠的情况也有很多，如何在重叠的信号和噪声中有效提取出信号，仍然是一个亟待解决的难题。

参 考 文 献

[1]谢衷洁.滤波及其应用.湖南教育出版社.1995