信号与系统 CheatSheet

姓名：赵文亮　学号：*2016011452*　班级：自 *64*

卷积性质：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)\,\mathrm{d}t=-f'(0), f^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)$

两函数奇偶性相同则卷积为奇函数，否则偶函数

求解响应：

零状态包括自由和强迫，强迫包括暂态和稳态

完全	零输入	零状态	强迫	自由
$\mathscr{L}$			待定系数	完全 − 强迫

解卷积：$y=x*h$, 则有

$x[0]=y[0]/h[0], x[1]=y[1]-x[0]h[1]/h[0]$

$x[n]=y[n]-\sum\limits_{m=0}^{n-1}x[m]h[n-m]/h[0]$

傅里叶级数：能量条件：能量有限；波形条件：信号绝对可积、极值点个数有限、间断点有限

$FT\to FS:\omega\to n\omega_1$, 除以 T

$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\,\mathrm{d}t, a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$

$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t, |F_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

$F_n=\frac{a-\mathrm{j}b_n}{2}$ $a_n=F_n+F_{-n}, b_n=\mathrm{j}(F_n-F_{-n})$

$c_n=|F_n|+|F_{-n}|, a_0=c_0=F_0$

$\mathscr{F}$ 奇偶虚实：奇 $\to$ 变虚实

方波	$a_n=\frac{E\tau\omega_1}{\pi}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2}), b_n=0$
半波余弦	$a_n=\frac{2E}{(1-n^2)\pi}\cos(\frac{n\pi}{2})$
锯齿	$a_n=0, b_n=(-1)^{n+1}\frac{E}{n\pi}$
全波整流余弦	$a_n=(-1)^n\frac{4E}{(4n^2-1)\pi}, b_n=0$
三角脉冲	$a_n=\frac{4E}{(n\pi)^2}\sin^2(\frac{n\pi}{2}), b_n=0$
脉冲序列	$F_n=\frac{1}{T_1}=a_n$

傅里叶变换：

$f(t)$	$F(\omega)$
$E[G(t,\tau)]$	$E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$
$E(1-\frac{2\lvert t\rvert}{\tau})$	$\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$
$\frac{1}{2}(1+\cos\frac{\omega t}{2})$	$\frac{E\tau}{2}\frac{\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})}{1-(\frac{\omega\tau}{2\pi})^2}$
$Ee^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2aE}{a^2+\omega^2}$
奇对称指数函数	$\frac{-2\mathrm{j}\omega}{a^2+\omega^2}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$
$u(t)$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$
$\sin(\omega_0 t)$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

傅里叶变换性质：

性质	时域$f(t)$	频域$F(\omega)$
尺度	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{\omega}{a})$
时移	$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
频移	$f(t)e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$
	$f(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}(F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0))$
	$f(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\mathrm{j}}{2}(F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0))$
积分	$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$
频域微分	$-\mathrm{j}tf(t)$	$F'(\omega)$
时域抽样	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-nT_s)$	$\frac{1}{T_s}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$
频域抽样	$\frac{1}{\omega_s}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT_s)$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega)\delta(\omega-n\omega_s)$
相关	$R_{12}(\tau)$	$F_1(\omega)F_2^*(\omega)$
$\mathscr{F}(f(-t))=F(-\omega), \mathscr{F}(f^*(t))=F^*(-\omega), \mathscr{F}(f^*(-t))=F^*(\omega)$		

拉普拉斯变换：

$f(t)(t>0)$	$F(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

拉氏变换性质：

时域微分	$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$
	$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{(r)}(0)$
时域积分	$\mathscr{L}[\int_{-\infty}^{\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)(0)}}{s}$
相乘	$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F_1(p)F_2(s-p)\,\mathrm{d}p=\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)]$
频域积分	$\mathscr{L}[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s$
初/终值定理	$f(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s), f(\infty)=\lim\limits_{s\to0}sF(s)$
周期延拓除以 $1-e^{-sT}$	

逆变换：

k 重极点：$F_1(s)=(s-p_1)^kF(s)$，$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\cdot\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}F_1(s)|_{s=p_1}$

含有共轭虚根：利用留数求出单根的项，再待定系数拆解，利用 sin 和 cos。

---

z 变换：

$x(n)$	$X(z)$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
n^2a^n	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
$(n+1)a^n$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
$\frac{(n+1)\cdots(n+m)}{m!}a^n$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$
$\sin(n\omega_0)$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$
$\cos(n\omega_0)$	$\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$
$a^nu[n], -a^nu[-n-1]$ 的 z 变换表达式相同而收敛域不同	
$x(3n)\to\frac{1}{3}(X(z^{1/3})+X(\omega z^{1/3})+X(\omega^2z^{1/3}))$ 此处 ω 为三次单位根	

DTFT: 定义在单位圆上的 ZT

$X(e^{j\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-\mathrm{j}n\omega}, x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{\mathrm{j}\omega})\,\mathrm{d}\omega$

$x[n]\cdot h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{\mathrm{j}\theta})H(e^{\mathrm{j}(\omega-\theta)})\,\mathrm{d}\theta=X(e^{\mathrm{j}\omega})\bigotimes H(e^{\mathrm{j}\omega})$

DFT：$X(k)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}x(n)W^{nk}$, $x(n)=\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-nk}, W=e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$

实数序列 $X(k)=X^*(N-k)$, 虚数序列 $X(k)=-X^*(N-k)$

$x(2n)\to\sum\limits_{n=0}^{N-1}x[n]\frac{1+(-1)^n}{2}W^{nk}=\frac{1}{2}\{X[k]+X[k+\frac{N}{2}]\}$

$(-1)^nx(n)\to X[k\pm\frac{N}{2}]$

$x(n)+x(n+\frac{N}{2})\to X[2k]$

$\mathscr{L}\to\mathscr{F}$：

$F(s)=F_a(s)+\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{K_n}{s-\mathrm{j}\omega_n}$

$\mathscr{F}(f(t))=F(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}+\sum\limits_{n=1}^{N}K_n\pi\delta(\omega-\omega_n)$

$F(s)=F_a(s)+\frac{K_0}{(s-\mathrm{j}\omega_0)^k}$

$\mathscr{F}[f(t)]=F(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}+\frac{K_0\pi\mathrm{j}^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(\omega-\omega_0)$

总结　我在这门课中学会了许多分析信号与系统的思想和方法，尤其是时域与变换域的联合分析，往往可以将复杂的问题研究得更为透彻。卓老师用自己开发的软件授课，丰富的功能极大地提高了我们上课的积极性。我在另一门课《数学模型》中充分利用 FFT 进行信号的处理与建模，得到了很好的效果。

建议　可以在课上通过 MATLAB 进行简单的演示。例如通过 FFT 函数来演示栅栏现象等。此外，相信很多同学和我一样对 Teasoft 的原理和使用十分感兴趣，希望卓老师能够有机会简单介绍一下其功能的实现方法。

z 变换性质

位移	$x[n-m]$	$z^{-m}[X(z)+\sum\limits_{k=-m}^{-1}x[k]z^{-k}]$
指数加权	$a^n x[n]$	$X(z/a)$
反褶	$x[-n]$	$X(1/z)$
线性加权	$nx[n]$	$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$
共轭	$x^*[n]$	$X^*(z)$
初值定理	$x[0]$	$\lim_{z\to\infty}(z-1)X(z)$
终值定理	$\lim_{n\to\infty}x[n]$	$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$
变换域卷积定理	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_C X(v)Y(\frac{z}{v})v^{-1}\,\mathrm{d}v$

傅里叶变换补充：

$tu(t)$	$\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$
$\mathrm{Sa}(Wt)$	$\frac{\pi}{W}[u(\omega+W)-u(\omega-W)]$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\mathrm{j}\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]-\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0}$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]-\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$

z 变换补充：

$$x[n]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z$$

$\beta^n\sin(n\omega_0)$	$\frac{\beta z\sin(\omega_0)}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2}$
$\beta^n\cos(n\omega_0)$	$\frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2}$
$\sin(n\omega_0+\theta)$	$\frac{z[z\cos\theta-\cos(\omega_0-\theta)]}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$
$\cos(n\omega_0+\theta)$	$\frac{z[z\sin\theta+\sin(\omega_0-\theta)]}{z^2-2z\cos\cos\omega_0+1}$
$na^n\sin(n\omega_0)$	$\frac{z(z-a)(z+a)a\sin(\omega)}{(z^2-2az\cos\omega_0+a^2)^2}$
$na^n\cos(n\omega_0)$	$\frac{az[z^2\cos\omega_0-2az+a^2\cos\omega_0]}{(z^2-2az\cos\omega_0+a^2)^2}$
$\sinh(n\omega_0)$	$\frac{z\sinh\omega_0}{z^2-2z\cosh\omega_0+1}$
$\cosh(n\omega_0)$	$\frac{z(z-\cosh\omega_0)}{z^2-2z\cosh\omega_0+1}$
$\frac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$
$\frac{1}{(2n)!}$	$\cosh z^{-\frac{1}{2}}$
$\frac{(\ln a)^n}{n!}$	$a^{1/z}$
$\frac{1}{n}(n=1,2,,\dots)$	$\ln(\frac{z}{z-1})$
$\frac{n(n-1)}{2!}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$
$\frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{m!}$	$\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$

公式法： $X(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}\frac{X(s)\,\mathrm{d}s}{1-z^{-1}e^{sT_s}}$

冲击响应不变法

$x(t)=\sum\limits_{i=1}^{N}A_i e^{p_i t}$	$X(s)=\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-p_i}$
$x[nT]=\sum\limits_{i=1}^{N}A_i e^{p_i nT}u[nT]$	$X(z)=\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{p_i T}z^{-1}}$

对于因果信号，需要在 $t=0$ 补足 $\frac{A_i}{2}$。

双线性变换法

$z=\frac{1+sT_s/2}{1-sT_s/2},s=\frac{2}{T_s}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$

LT、ZT 初值定理条件：真分式

LT 终值定理条件：极点在左半平面或在虚轴上仅在 $s=0$ 处有一级极点。

ZT 终值定理条件：序列收敛（$X(z)$ 极点位于单位圆内或者在 $z=1$ 处有且只有一级极点）

$ZT\xrightarrow{z=e^{\mathrm{j}\omega}}DTFT\xrightarrow{\text{频率离散}}DTFS\xrightarrow{\text{借用公式}}DFT\xrightarrow{\text{快速算法}}FFT$

稳定性的 Routh 判据

对于一阶、二阶、三阶特征方程：$a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$，稳定性结论：对于一阶二阶，所有系数均为正；三阶补充 $a_1a_2>a_0a_3$ 条件。

调制与解调

正弦调制 $\xrightarrow{\text{频率混叠}}$ 复指数载波调制 $\xrightarrow{\text{节省能量}}$ 单边带调制

单边带-滤波法/移相法：经余弦调制的原信号与经正弦调制的希尔伯特变换后的信号相加减。希尔伯特变换使得信号相位滞后 $\pi/2$

采样与重建 $f(t)$ 被周期矩形脉冲 $p(t)$ 采样得到 $f_s(t)$，分两种情况：

平顶采样：$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)P(\omega)$

自然采样：$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)P(n\omega_s)$

频域采样定理：时间受限，$T_s\geq 2T_m$ 或 $\omega_s<\omega_m/2$

带通抽样定理：频带限制在 $\omega_1\sim\omega_2$，则 $\omega_s=\frac{2\omega_2}{m}$，其中 $m=\lfloor\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\rfloor$

欠采样产生频率混叠，虚假的低频分量，采样前抗混叠滤波器滤波。

信号恢复：零阶保持/一阶保持级联补偿滤波器。

计算次数

	复数乘法	复数加法	实数乘法	实数加法
DFT	N^2	$N(N-1)$	$4N^2$	$4N^2-2N$
FFT	$\frac{N}{2}\log_2 N$	$N\log_2 N$	$2N\log_2 N$	$3N\log_2 N$
普通卷积	复数乘法：N_1N_2			
快速卷积	复数乘法：$\frac{3N'}{2}\log(N')+N',N'=N_1+N_2-1$			

序列相差很多时：重叠相加法—1. 长序列分成若干小段，每段长度接近于短段长度；2. 进行快速卷积后将结果累加起来。

全通系统： 零极点关于虚轴对称分布。

非最小相位系统可以表示成最小相位系统与全通系统的级联。

无失真传输： 幅频特性为常量，相频为线性函数

匹配滤波器： 已知波形，$h(t)=s(T-t)$。自相关越窄越好。

IIR：递归，非线性相位，直接结构 II 型。级联、并联。

FIR：非递归，线性相位（$h(n)$ 奇对称或偶对称）。窗函数：截止频率、理想低通、阻带衰减选窗、过渡带宽求长、与理想低通的平移相乘。

系统综合与可实现：

佩利—维纳准则：$\int_{-\infty}^{\infty}|H(\mathrm{j}\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega<\infty,\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln|H(\mathrm{j}\omega)||}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega<\infty$

因果信号实部虚部为 Hilbert 变换对：

$R(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\lambda)}{\omega-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$，$X(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\lambda)}{\omega-\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$

一些概念：

Most rewarding, exciting, and useful。

反馈系统输入输出表达式：$y(t)=\frac{A}{1\mp AF}x(t)$。

认为积分系统可逆，微分只有给定 $f(-\infty)=0$ 才可逆。

齐次性与叠加性相互独立。

微分是因果；平滑、滤波、预测（只有滤波是因果的）。

$\mathrm{Sa}(x)$ 周期延拓变成升余弦（从频谱考虑）。

1807 年傅里叶提出论文，1822 年才发表了研究成果。

k 阶导不连续，则随 $\frac{1}{\omega^{k+1}}$ 衰减

脉冲波形传输问题：全占空脉冲传输（减少频谱宽度）、四电平传输（增加码率）、时域信号设计（减少高频能量）、单边带调制（减少信道低频限制的影响）

低通滤波器：通带容差、阻带衰减、过渡带宽、截止频率

DFT 误差及解决：

误差	原因	解决方法
频率泄漏	截取信号	增加截断信号长度 采用平滑窗口截取
栅栏现象	周期信号频谱离散	补零增加频谱计算数量
频率混叠	时间离散	增加采样频率 采用抗混叠滤波器
数值变化	时域采样	修正，乘以 T_s

码位倒读： 04261573。输入倒读顺序，输出自然顺序。即位运算。