人工智能导论小作业 2

自 64　赵文亮　2016011452

1. 判断下面命题是否正确，并说明为什么。

   (1) 正确。原命题等价于证明 $(P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg S \vee T) \Rightarrow (P \vee Q)$ 是重言式。设 $A = (P \vee Q), B = (\neg R \vee \neg S \vee T)$，由

$$
\begin{aligned}
(P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg S \vee T) \Rightarrow (P \vee Q) &\equiv A \wedge B \Rightarrow A \\
&\equiv \neg(A \wedge B) \vee A \\
&\equiv \neg A \vee \neg B \vee A \\
&\equiv TRUE \vee \neg B \\
&\equiv TRUE
\end{aligned}
$$

   可知原命题成立。

   (2) 正确。等价于证明 $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R))$ 是重言式。

$$
\begin{aligned}
((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)) &\equiv (\neg(P \wedge Q) \vee R) \Rightarrow ((\neg P \vee R) \vee (\neg Q \vee R)) \\
&\equiv (\neg P \vee \neg Q \vee R) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
&\equiv \neg(\neg P \vee \neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
&\equiv TRUE
\end{aligned}
$$

   可知原命题成立。

   (3) 错误

$$
\begin{aligned}
(P \Leftrightarrow Q) \wedge \neg(\neg P \vee Q) &\equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \wedge \neg(\neg P \vee Q) \\
&\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (P \wedge \neg Q) \\
&\equiv Q \wedge (\neg Q \vee P) \wedge P \wedge \neg Q \\
&\equiv FALSE \wedge (\neg Q \vee P) \wedge P \\
&\equiv FALSE
\end{aligned}
$$

   所以不存在存在使原表达式为真的模型，原式可不可满足。

2. 分别求下列各式的合取范式（CNF）

   (1)

$$
\begin{aligned}
(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R &\equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee R \\
&\equiv (P \wedge \neg Q) \vee R \\
&\equiv (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)
\end{aligned}
$$

(2)

$$\begin{aligned}(\neg P\vee\neg Q)\Rightarrow(P\Leftrightarrow\neg Q)&\equiv\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee((P\Rightarrow\neg Q)\wedge(\neg Q\Rightarrow P))\\&\equiv(P\wedge Q)\vee((\neg P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee P))\\&\equiv(P\vee((\neg P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee P)))\wedge(Q\vee((\neg P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee P)))\\&\equiv(P\vee\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q\vee P)\wedge(Q\vee\neg P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee Q\vee P)\\&\equiv TRUE\wedge(P\vee Q)\wedge True\wedge(Q\vee P)\\&\equiv P\vee Q\end{aligned}$$

(3) 首先证明一个引理：若 $\alpha\Rightarrow\beta$，则有 $\alpha\wedge\beta\equiv\alpha$。证明：

- 若 $\alpha=TRUE$，则由 $\alpha\Rightarrow\beta$ 可知 $\beta=TRUE$，则 $\alpha\wedge\beta=TRUE$，成立；
- 若 $\alpha=FALSE$，则 $\alpha\wedge\beta=FALSE$，成立。

综上，$\alpha\wedge\beta\equiv\alpha$。这个引理可以用在化简本问题的结果中。下面对本问题进行求解：

$$\begin{aligned}&(P\wedge\neg Q\wedge S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\\&\equiv(P\vee((\neg P\wedge Q\wedge R)))\wedge(\neg Q\vee(\neg P\wedge Q\wedge R))\wedge(S\vee(\neg P\wedge Q\wedge R))\\&\equiv(P\vee\neg P)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(S\vee\neg P)\wedge(S\vee Q)\wedge(S\vee R)\\&\equiv(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(S\vee\neg P)\wedge(S\vee Q)\wedge(S\vee R)\\&\equiv(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(S\vee Q)\\&\equiv(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg P)\wedge(S\vee Q)\end{aligned}$$

3. 证明以下公式。

(1) 析取三段论：

$$\begin{aligned}((A\vee B)\wedge\neg A)\Rightarrow B&\equiv\neg((A\vee B)\wedge\neg A)\vee B\\&\equiv(\neg(A\vee B)\vee A)\vee B\\&\equiv\neg(A\vee B)\vee A\vee B\\&\equiv\neg(A\vee B)\vee(A\vee B)\\&\equiv TRUE\end{aligned}$$

(2) 假言三段论：

- 方法一：

$$\begin{aligned}((A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow C))\Rightarrow(A\Rightarrow C)&\equiv\neg((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee C))\vee(\neg A\vee C)\\&\equiv(\neg(\neg A\vee B)\vee\neg(\neg B\vee C))\vee(\neg A\vee C)\qquad(1)\\&\equiv((A\wedge\neg B)\vee(B\wedge\neg C))\vee(\neg A\vee C)\end{aligned}$$

对式 (1) 中的 B 分类讨论。$B=TRUE$ 时，式 1 化为：

$$\begin{aligned}(A\wedge FALSE)\vee(TRUE\wedge\neg C)\vee(\neg A\vee C)&\equiv\neg C\vee\neg A\vee C\\&\equiv TRUE\vee\neg A\qquad(2)\\&\equiv TRUE\end{aligned}$$

$B = FALSE$ 时，式 1 化为：

$$\begin{aligned}(A \wedge TRUE) \vee (FALSE \wedge \neg C) \vee (\neg A \vee C) &\equiv A \vee \neg A \vee C \\ &\equiv TRUE \vee C \\ &\equiv TRUE\end{aligned} \tag{3}$$

综上，原式成立。

- 方法二：

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \tag{4}$$

由归结原理，有

$$((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow (\neg A \vee C) \equiv TRUE \tag{5}$$

则

$$\begin{aligned}((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) &\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \Rightarrow (\neg A \vee C) \\ &\equiv TRUE\end{aligned} \tag{6}$$

证毕。

4. 设论域是整数集合 $\mathbb{Z}$，试把下式译成自然语言并判断真假。

(1) $(\forall x)(\exists y)(x^2 = y)$
任何整数的平方都是整数（正确）

(2) $(\forall x)(\exists y)(x = y^2)$
任何整数都是平方数（错误）

5. 将下面的公式化成子句集。

(1) $G = ((P \vee \neg Q) \Rightarrow R) \Rightarrow (P \wedge R)$
解：

$$\begin{aligned}((P \vee \neg Q) \Rightarrow R) \Rightarrow (P \wedge R) &\equiv \neg(\neg(P \vee \neg Q) \vee R) \vee (P \wedge R) \\ &\equiv ((P \vee \neg Q) \wedge \neg R) \vee (P \wedge R) \\ &\equiv ((P \vee \neg Q) \vee P) \wedge ((P \vee \neg Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee P) \wedge (\neg R \vee R) \\ &\equiv (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg R)\end{aligned}$$

则子句集为

$$\{(P \vee \neg Q), (P \vee \neg Q \vee R), (P \vee \neg R)\}$$

(2) $G = (\forall x)\{P(x) \Rightarrow (\forall y)[P(y) \Rightarrow P(f(x, y))] \wedge \neg(\forall y)[Q(x, y) \Rightarrow P(y)]\}$
解：

$$\begin{aligned}&(\forall x)\{P(x) \Rightarrow (\forall y)[P(y) \Rightarrow P(f(x, y))] \wedge \neg(\forall y)[Q(x, y) \Rightarrow P(y)]\} \\ &\equiv (\forall x)\{\neg P(x) \vee ((\forall y)[\neg P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge \neg(\forall z)[\neg Q(x, z) \vee P(z)])\} \\ &\equiv (\forall x)\{\neg P(x) \vee ([\neg P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge (\exists z([Q(x, z) \wedge \neg P(z)])\} \\ &= \neg P(x) \vee ((\neg P(y) \vee P(f(x, y))) \wedge Q(x, F(x)) \wedge \neg P(F(x))) \\ &= (\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x, y))) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x, F(x))) \wedge (\neg P(x) \vee \neg P(F(x)))\end{aligned}$$

则子句集为：

$$\{(\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))), (\neg P(x) \vee Q(x, F(x))), (\neg P(x) \vee \neg P(F(x)))\}$$

6. 将规则翻译为一阶逻辑：

(1) $(\forall x, y, z)(Father(x, y) \wedge Father(y, z)) \Rightarrow Grandfather(x, z)$

(2) $(\forall x, y, z)(Grandfather(x, y) \wedge Wife(z, x)) \Rightarrow Grandmother(z, y)$

知识库中已知信息为：

(1) $Father(John, Kevin)$

(2) $Father(Kevin, Peter)$

(3) $Wife(Mary, John)$

则与或图如图 1 所示，从中可知，Mary 是 Peter 的祖母。

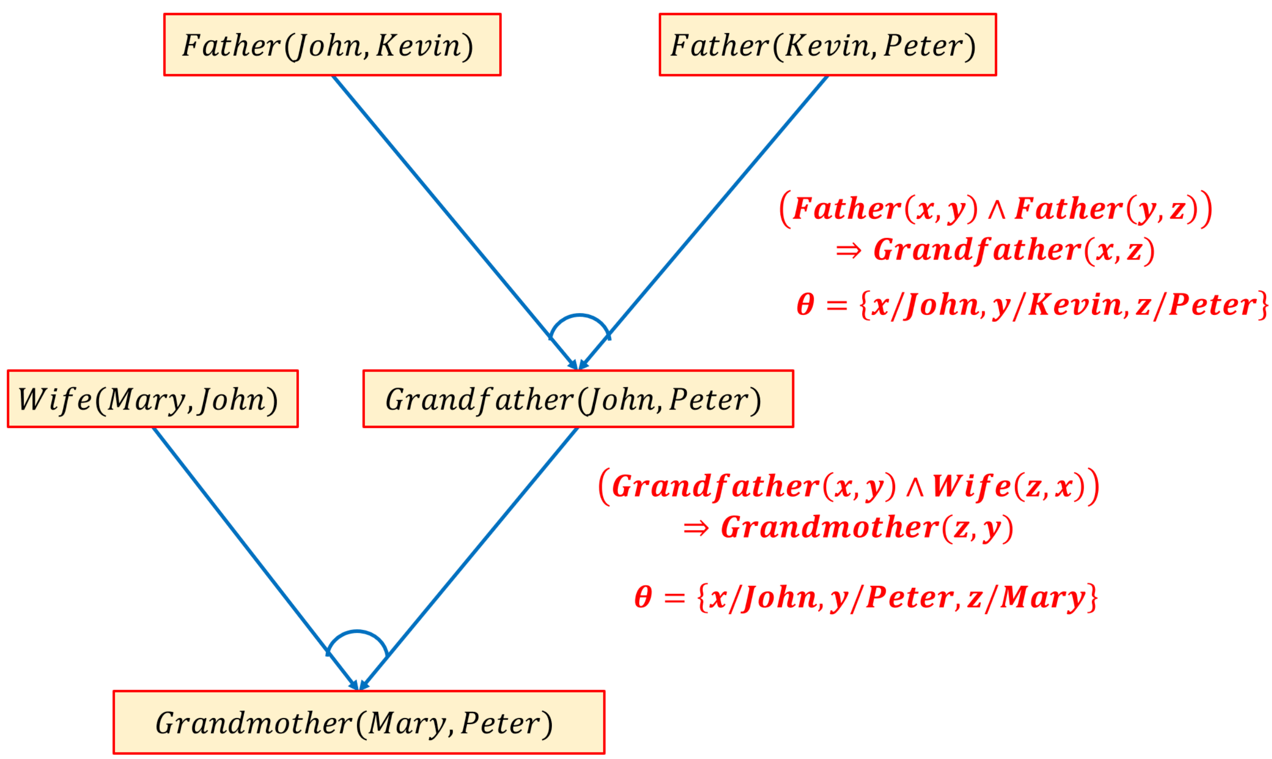

图 1: 前向链接与或图

7. 解：

(1) 转换为一阶谓词公式如下：

- $(\forall x)(Pass(x, Computer) \wedge ((\exists z)Win(x, z))) \Rightarrow Happy(x)$
- $(\forall x)((Study(x) \vee Lucky(x)) \Rightarrow \forall y(Pass(x, y)))$
- $(\forall x)((Lucky(x)) \Rightarrow (\exists z)Win(x, z))$

8. 已知信息：

   - $\neg Study(Bob)$
   - $Lucky(Bob)$

   求证：$Happy(Bob)$。

   证明：

$$\begin{cases} Lucky(Bob) \\ (\forall x)((Study(x) \vee Lucky(x)) \Rightarrow \forall y(Pass(x,y))) \\ \theta = \{x/Bob, y/Computer\} \end{cases} \Rightarrow Pass(Bob, Computer)$$

$$\begin{cases} Lucky(Bob) \\ (\forall x)((Lucky(x)) \Rightarrow (\exists z)Win(x,z)) \\ \theta = \{x/Bob, z/P(x)\} \end{cases} \Rightarrow Win(Bob, P(x))$$

$$\begin{cases} (\forall x)(Pass(x, Computer) \wedge ((\exists z)Win(x,z))) \Rightarrow Happy(x) \\ Pass(Bob, Computer) \\ Win(Bob, P(x)) \\ \theta = \{x/Bob, z/P(x)\} \end{cases} \Rightarrow Happy(Bob)$$