电磁学总结[1]

绪论

矢量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)$的两个性质

- 通量 $\oint_S \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
  对应向量场有源、无源。
- 环量 $\oint_L \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{l}$
  对应向量场有旋、无旋。

极矢量和轴矢量

- 极矢量
  镜像下垂直分量反向，平行分量不变
- 轴矢量
  镜像下垂直分量不变，平行分量反向

电学

静电场

- 库仑定律 $\boldsymbol{F}=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}$
- 偶极子
  - 中垂线上一点的电场强度
    $\boldsymbol{E}=\dfrac{-\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$
  - 沿连线方向一点的电场强度
    $\boldsymbol{E}=\dfrac{2\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$
  - 一般情况下电场强度
    $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}}{r^2}-\boldsymbol{p}\right]$

  > 其中$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$

- 均匀带电细圆环在轴线上一点的场强 $\boldsymbol{E}=\dfrac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$
- 均匀带电圆面在轴线上一点的场强 $\boldsymbol{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\dfrac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$
- 电偶极子在均匀电场中

- 所受的力矩
  $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$
- 势能
  $W=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$

- 高斯定律 $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{in}$ 或 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- 典型静电场
  - 均匀带电球面
    $\boldsymbol{E}=\begin{cases}0 & (r<R)\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & (r>R)\end{cases}$
  - 均匀带电球体
    $\boldsymbol{E}=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{r}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r} & (r<R)\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & (r\geq R)\end{cases}$
  - 均匀带电无限长直线
    $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$
  - 均匀带电无限大平面
    $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

电势

- 静电场环路定理 $\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$
- 电势差 $\varphi_1-\varphi_2=\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 电势 $\varphi_P=\int_{P_1}^{P_0}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$
- 点电荷电势 $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
- 场强与电势的关系 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$
- 典型场的电势
  - 均匀带电球面
    $\varphi=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r\leq R)\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r\geq R)\end{cases}$
  - 均匀带电球体
    $\varphi=\begin{cases}\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2) & (r\leq R)\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r\geq R)\end{cases}$
  - 无限长均匀带电直导线
    $\varphi=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$

- 电偶极子
  $\varphi=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$
- 均匀带电细圆环
  $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}$

- 电偶极子在均匀外电场中的电势能 $W=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$
- 电荷系的静电能 $W=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\varphi_i$ 或 $W=\dfrac{1}{2}\int_q\varphi\mathrm{d}q$
- 均匀带电球面的静电能 $W=\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$
- 均匀带电球体的静电能 $W=\dfrac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$
- 静电场能量 $W=\int_V w_e\mathrm{d}V$

> 其中$w_e=\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$为电场能量密度

静电场中的导体

- 表面电荷与场强的关系
  $\sigma=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$

电介质的极化

- 电极化强度 $\boldsymbol{P}=\dfrac{\sum\boldsymbol{p_i}}{\Delta V}=n\boldsymbol{p}$

  > n为分子数密度

  对各向同性的电介质 $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$

- 束缚电荷

$$q'_{\mathrm{in}}=-\oint_S\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

- $\boldsymbol{D}$的高斯定律
  $\oint\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum q_{0\mathrm{in}}$

> 其中电位移矢量$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon\boldsymbol{E}\ \varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$

- 静电场的边界条件 $E_{1\mathrm{t}}=E_{2\mathrm{t}},D_{1\mathrm{n}}=D_{2\mathrm{n}}$

> n 表示法向，t表示切向

- 电容 $C=\dfrac{Q}{U}$
- 常见电容
  - 平行板电容器
    $C=\dfrac{\varepsilon S}{d}$
  - 圆柱形电容器
    $C=\dfrac{2\pi\varepsilon L}{\ln(R_2/R_1)}$
  - 球形电容器
    $C=\dfrac{4\pi\varepsilon R_1R_2}{R_2-R_1}$
  - 孤立导体球
    $C=4\pi\varepsilon_0R$
- 电介质中电场的能量密度

$$w_e=\frac{\varepsilon E^2}{2}=\frac{DE}{2}$$

恒定电流

- 电流密度 $\boldsymbol{J}=nqv$
- 电流 $I=\displaystyle\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
- 电流的连续性方程

  $$\oint_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}q_{\text{in}}}{\mathrm{d}t}$$

> 恒定电流时上式为零

- 欧姆定律微分形式
  $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$

> $\boldsymbol{\sigma}$为电导率

- 金属中电流的经典微观图像
  $\sigma=\dfrac{ne^2}{m}\tau$
- 焦耳定律
  $p=\sigma E^2,P=I^2R$

磁学

磁场

- 毕---萨定律 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$

- 安培定律 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}=I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\right)$ $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{21}=I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}\right)$

- $\boldsymbol{B}$的 高 斯 定 理 $\oint_S\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$ 或 $\nabla\boldsymbol{B}=0$

- 安培环路定理 $\oint_l\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum I_{\text{in}}$

- 典型磁场
  - 直线电流的磁场
    $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$
    无限长直导线$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
  - 圆电流磁场
    $B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$
    中心点处
    $B=\frac{\mu_0 I}{2R}$
  - 磁矩的磁场
    $\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}-\boldsymbol{m}\right]$
  - 载流直螺线管
    $B=\frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$
    无限长直螺线管
    $B=\mu_0 n I$
  - 无限长圆柱面
    $B=\begin{cases}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r>R)\\ 0 & (r<R)\end{cases}$
  - 通电螺绕环
    $B=\mu_0 n I$
  - 无限大平面
    $B=\frac{\mu_0 i}{2}$

> 其中$\boldsymbol{i}$为面电流密度。

磁力

- 洛伦兹力$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$
- 安培力$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$

- 载流线圈在均匀外磁场下所受力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$

> 其中$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{S}$与电流流向成右手螺旋。

- 霍尔效应 $U_{\mathrm{H}}=\dfrac{IB}{nbq}=K_{\mathrm{H}}\dfrac{IB}{b}$

> $K_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{nq}$是霍尔系数。

霍尔电阻$R_{\mathrm{H}}=\dfrac{U_{\mathrm{H}}}{I}=\dfrac{B}{nqb}$

磁介质

- $\boldsymbol{B}=\mu_r\boldsymbol{B_0}$
- 磁化体电流密度 $\boldsymbol{j}'=\nabla\times\boldsymbol{M}$

> $\boldsymbol{M}$是磁化强度。

面电流密度 $\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e_n}$

- 磁化强度、磁感应强度、磁场强度的关系
  $\boldsymbol{M}=\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\chi_m}{1+\chi_m}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_r-1}{\mu_0\mu_r}\boldsymbol{B}$
  $\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$
  $\boldsymbol{M}=(\mu_r-1)\boldsymbol{H}$
  $\boldsymbol{B}=\mu_0\mu_r\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H}$
- $\boldsymbol{H}$的环路定理
  $\oint_L\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I_{0\text{内}}$
  或
  $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_0$
- 磁场界面关系
  $B_{1\mathrm{n}}=B_{2\mathrm{n}},H_{1\mathrm{t}}=H_{2\mathrm{t}}$

电磁感应

- 法拉第电磁感应定律 $\varepsilon=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
- 动生电动势 $\varepsilon_{\text{动}}=\oint_L(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$
- 感生电动势 $\varepsilon_{\text{感}}=-\oint_S\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
- 互感

- 互感系数

  $M = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}$
- 互感电动势

  $\varepsilon_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$

- 自感
  - 自感系数

    $L = \frac{\Psi}{i}$
  - 自感电动势

    $\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
  - 自感磁能

    $W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}LI^2$
- 磁场能量密度

  $w_\mathrm{m} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$

麦克斯韦方程组

- 位移电流 $\boldsymbol{I}_\mathrm{d} = \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 位移电流密度 $\boldsymbol{j}_\mathrm{d} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$
- 麦克斯韦方程组
  - 积分形式

$$\begin{cases} \oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial B}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ \oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \rho_0\mathrm{d}V \\ \oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \\ \oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \left(\boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{cases}$$

  - 微分形式

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_0 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{cases}$$

---

1. *By John Williams*↩