

ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ЙОРИЯ ФЕДЬКОВИЧА  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ПМ&ІТ  
2022

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА  
ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Матеріали міжнародної наукової конференції,  
присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики  
та інформаційних технологій

22-24 вересня 2022 року

Чернівці – 2022

УДК 51-7(08)

Б 597

Затверджено до друку вченою радою  
факультету математики та інформатики  
Чернівецького національного університету  
імені Юрія Федъковича  
(протокол №1 від 31 серпня 2022 року)

Матеріали міжнародної наукової конференції «Прикладна математика та інформаційні технології», присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22-24 вересня 2022 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2022. – 287 с.

Збірник матеріалів міжнародної наукової конференції «Прикладна математика та інформаційні технології» включає наукові роботи вчених України, Азії, Америки, Європи які проводять дослідження з теорії диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, диференціальних рівнянь з частинними похідними, математичного та комп'ютерного моделювання, теорії функцій, інформаційних технологій у прикладних задачах та освіті.

Для наукових працівників, аспірантів

© Кафедра прикладної математики та інформаційних  
технологій Чернівецького національного університету  
імені Юрія Федъковича, 2022

ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ЙОРІЯ ФЕДЬКОВИЧА  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

# AM&IT 2022

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА  
ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Матеріали міжнародної наукової конференції  
присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики  
та інформаційних технологій

22 – 24 вересня 2022 року  
Чернівці – 2022

YURIY FEDKOVYCH CHERNIVTSI NATIONAL UNIVERSITY  
DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATION  
TECHNOLOGY

# AM&IT 2022

**APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY**

Materials of International Scientific Conference,  
dedicated to the 60th anniversary  
of the Department of Applied Mathematics and Information Technology

September 22<sup>nd</sup> – 24<sup>th</sup>, 2022  
Chernivtsi– 2022

## **Науковий комітет**

**Голова:**

**Роман Петришин** - ректор Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

**Заступники голови:**

**Ярослав Бігун** – професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

**Ольга Мартинюк** - професор, деканка факультету математики та інформатики

**Ігор Черевко** - професор, завідувач кафедри математичного моделювання

**Члени наукового комітету:**

Академік **Роман Кушнір** (Україна)

Академік **Микола Перестюк** (Україна)

Академік **Аркадій Чикрій** (Україна)

Член-кор. **Олександр Бойчук** (Україна)

Член-кор. **Василь Слюсарчук** (Україна)

Професор **Андрій Бомба** (Україна)

Професор **Олександр Бурилко** (Україна)

Професор **Василь Григорків** (Україна)

Професор **Ростислав Григорчук** (США)

Професор **Наталія Гук** (Україна)

Професор **Іван Дияк** (Україна)

Професор **Йозеф Діблік** (Чехія)

Професор **Мар'ян Дмитришин** (Україна)

Професор **Олександр Домошніцький** (Ізраїль)

Професор **Олена Карлова** (Україна)

Професор **Ольга Кічмаренко** (Україна)

Професор **Думітра Козьма** (Молдова)

Професор **Ігор Король** (Україна)

Професор **Петро Костробій** (Україна)

Професор **Владислав Літовченко** (Україна)

Професор **Родіка Лука** (Румунія)

Професор **Василь Мойсишин** (Україна)

Професор **Михайло Петрик** (Україна)

Професор **Микола Працьовитий** (Україна)

Професор **Сергій Самохвалов** (Україна)

Професор **Олександр Станжицький** (Україна)

Професор **Андрій Тевяшев** (Україна)

Професор **Володимир Федорчук** (Україна)

Професор **Уршула Фориш** (Польща)

Професор **Денис Хусайнов** (Україна)

Професор **Олег Чертов** (Україна)

Професор **Сергій Янчук** (Німеччина)

## **Комітет з інформаційних технологій**

**Євген Девятков**

**Ярослав Петришин**

**Дмитро Різник**

**Іван Рожко**

**Юлія Старікова**

**Олександр**

**Ткаченко**

**Олександр Ткачик**

**Дмитро Шкільнюк**

**Михайло Шкурей**

**Edwin Zuidendorp**

віце-президент з розробки, компанія «SoftServe»

співзасновник компанії «PSV Game Studio»

директор з маркетингу та бізнес-розвитку компанії «Agiliway»

Team Lead / Senior Python Developer, «Uvik Python Agency»

регіональний менеджер компанії «AMC Bridge»

керівник освітніх програм компанії «ЕРАМ» у Західному та Південному регіонах

Software Architect, «SharpMinds», Netherlands

голова правління «IT CHERNIVTSI Community»

директор ТОВ «Юкон-Софтвер» та ТОВ «Дісайд ЛТД»

CEO «Global Staffing Support», Netherlands

## **Організаційний комітет**

**Голова:**

**Ярослав Бігун** - професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

**Заступники голови:**

**Василь Маценко** - доцент кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

**Галина Мельник** - доцент кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

**Микола Філіпчук** - доцент кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

**Члени оргкомітету:**

**Андрій Бардан, Олена Гусак, Іван Данилюк, Наталя Правіцка, Наталя Романенко, Тетяна Сопронюк, Богдан Шепетюк, Анастасія Юрійчук**

## Scientific committee

### Chairman:

Roman Petryshyn rector of Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, professor

### Deputy Chairmen:

Yaroslav Bigun head of the Department of Applied Mathematics and Informational Technologies, professor

Olha Martyniuk dean of the Faculty of Mathematics and Informatics, professor

Igor Cherevko head of the Department of Mathematical Modeling, professor

Roman Kushnir	academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, J. S. Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Mykola Perestyuk	academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Taras Shevchenko Kyiv National University
Arkady Chikriy	academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences
Oleksandr Boychuk	cor. member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
Vasyl Slyusarchuk	cor. member of the National Academy of Sciences of Ukraine, National University of Water Management and Environmental Sciences
Andriy Bomba	National University of Water Management and Environmental Sciences
Oleg Chertov	National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"
Oleksandr Burylko	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
Vasyl Hryhorkiv	Yuri Fedkovych Chernivtsi National University
Rostislav Grigorchuk	University of Texas A&M, USA
Natalia Huk	Oles Honchar Dnipro National University
Josef Diblik	Central European Institute of Technology, Czech Republic
Ivan Dyak	Ivan Franko Lviv National University
Maryan Dmytryshyn	Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
Alexander Domoshnitsky - Ariel University, Israel	
Olena Karlova	Yuri Fedkovych Chernivtsi National University
Olga Kichmarenko	Odessa I. I. Mechnikov National University
Dumitru Kozma	Tiraspol State University, Republic of Moldova
Igor Korol	Uzhhorod National University
Petro Kostrobiy	Lviv Polytechnic National University
Vladislav Litovchenko	Yuri Fedkovych National University of Chernivtsi
Rodika Luka	Iasi Technical University. Gheorghe Asaki, Romania
Vasyl Moysyshyn	Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
Mykhailo Petryk	Ivan Pulyuy Ternopil National Technical University
Mykola Pratovskyty	M. R. Drahomanov National Pedagogical University
Serhiy Samokhvalov	Dnipro State Technical University
Oleksandr Stanzhytsky - Taras Shevchenko National University of Kyiv	
Andriy Tevyashev	Kharkiv National University of Radio Electronics
Volodymyr Fedorchuk - Ivan Ogiенко Kamyanets-Podilsky National University	
Urszula Forisz	University of Warsaw, Republic of Poland
Denis Khusainov	Taras Shevchenko National University of Kyiv
Serhiy Yanchuk	Humboldt University of Berlin, Federal Republic of Germany

## **Information Technology Committee**

Eugene Devyatkov  
Yaroslav Petryshyn  
Dmytro Riznyk  
Ivan Rozhko  
Yulia Starikova  
Dmytro Shkilnyuk  
Mykhailo Shkurei  
Yulia Starikova  
Alexander Tkachik  
Edwin Zuidendorp

Vice President of Development, SoftServe  
co-founder of PSV Game Studio  
Marketing and Business Development Director, Agiliway  
Team Lead / Senior Python Developer, Uvik Python Agency  
the regional manager of AMC Bridge  
Chairman of the Board of IT CHERNIVTSI Community  
Director of Yukon-Software LLC and Diside LTD LLC  
the regional manager of AMC Bridge  
Software Architect, SharpMinds, Netherlands  
CEO Global Staffing Support, Netherlands

## **Organizational committee**

### **Chairman:**

Yaroslav Bigun Head of the Department of Applied Mathematics and Information Technology

### **Deputy Chairmen:**

Vasyly Matsenko, Halyna Melnyk, Mykola Filipchuk

### **Members of the organizing committee:**

Andriy Bardan, Ivan Danyliuk, Inessa Krasnokutska, Natalia Romanenko, Mykhailo Pastula,  
Natalia Pravitska, Ihor Skutar, Tetyana Sopronyuk,  
Bohdan Shepetuk, Anastasia Yurivchuk

## Зміст

### Пленарні доповіді

<i>Бігун Ярослав</i> Кафедрі прикладної математики та інформаційних технологій - 60	15
<i>Бурилко Олександр</i> Химерні стани у модульних мережах зв'язаних осциляторів	19
<i>Vorobets Yaroslav, Rostislav Grigorchuk</i> Maximal subgroups of ample groups	20
<i>Grigorchuk Rostislav, Christophe Pittet</i> Laplace and Schrödinger operators without eigenvalues on homogeneous amenable graphs	22
<i>Cozma Dumitru</i> Center conditions for a cubic system with an invariant straight line and an invariant cubic	26
<i>Мойсишин Василь</i> Окремі задачі механіки нафтогазового комплексу України	30
<i>Петрик Михайло</i> Mathematical model of filtration in the media of multi-dimensional nanoporous particles	33
<i>Працьовитий Микола, Гончаренко Яніна, Маслова Юлія</i> Функції зі структурними і метричними фрактальними властивостями пов'язані з двосимвольними системами кодування чисел	37
<i>Слюсарчук Василь</i> Застосування рівнянь із запізненнями до розв'язання задач небесної механіки з урахуванням швидкості гравітації	41
<i>Станюсіцький Олександр, Шестак Ірина, Халецька Зоя, Денисенко Наталя</i> Стохастичне бідоменне рівняння. Модель серцевого дефібрилятора	42
<i>Cherevko Igor</i> , Approximation schemes for differential functional equations and their applications	44
<b>Диференціальні та диференціально-функціональні рівняння</b>	48
<i>Assanova Anar T.</i> Nonlocal problem for integro-differential equations of mixed type	48
<i>Бігун Ярослав, Петришин Роман, Скутар Ігор</i> Багаточастотні системи із лінійно перетвореними аргументами і нелінійними багатоточковими і локально-інтегральними умовами	51
<i>Дворник Анатолій, Ткаченко Віктор</i> Частотна синхронізація періодичних розв'язків диференціальних рівнянь при імпульсних збуреннях	53
<i>Дорош Андрій, Гаюк Іван, Перцов Андрій</i> Лінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу	56
<i>Zhumatov Saitaubay</i> Absolute stability of control systems with tachometric feedback taking into account external load	60
<i>Іліка Світлана, Матвій Олександр, Піддубна Лариса, Тузик Ірина</i> Застосування схем апроксимації для дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціально різницевих рівнянь	63

<i>Kadirbayeva Zhazira</i> A Problem for essentially loaded differential equations with integral condition	66
<i>Кусік Людмила</i> Умови існування та асимптотка одного класу розв'язків деякого диференціального рівняння другого класу	68
<i>Локазюк Олександр</i> Пониження порядку та інтегрування нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку	70
<i>Mashliuk Hanna</i> On the multipoint linear boundary-value problems in Hölder spaces	72
<i>Neagu Vasile</i> Extension of linear operators with applications	74
<i>Salimov Ruslan, Stefanchuk Mariia</i> On the global finite mean oscillation and the Beltrami equation	76
<i>Станюшицький Олександр, Кичмаренко Ольга, Могильова Вікторія, Ковалъчук Тетяна</i> Оптимальне керування системами функціонально-диференціальних рівнянь з нескінченною пам'яттю	78
<i>Теплінський Юрій</i> Про майже-періодичні розв'язки нелінійних зліченних систем диференціальних рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах,	80
<i>Хусайнов Денис, Шакотько Тетяна, Шатирко Андрій</i> Збіжність процесів у моделях нейродинаміки з післядією	82
<i>Цань Вікторія, Ковалъчук Тетяна</i> Коливність розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та відповідних рівнянь на часових шкалах	85
<i>Чуйко Сергій, Чуйко Олексій, Кузьміна Влада</i> Умови розв'язності задачі, оберненої до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма з виродженим ядром	88
<i>Subă Alexandru</i> Centers of cubic differential systems with the multiple line at infinity	92
<i>Щетініна Олена, Денисенко, Ю. Діденко</i> Новий розв'язок диференціальних рівнянь руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом	96
<i>Yeromina Tetiana, Olena Povarova (Sivak)</i> Continuous solutions of the systems of nonlinear functional equations for $t \in \mathbb{R}$	100
<b>Диференціальні рівняння з частинними похідними</b>	
<i>Бойчук Олександр, Покутний Олександр, Ферук Віктор, Іскра Олег</i> Слабконелінійні гіперболічні диференціальні рівняння другого порядку у гільбертовому просторі	103
<i>Бугрій Олег, Хома Мар'яна</i> Формули інтегрування частинами для функцій з узагальнених просторів Соболєва	107
<i>Городецький Василь, Мартинюк Ольга, Колісник Руслана</i> Про розв'язність нелокальної за часом задачі для еволюційних рівнянь із псевдо диференціальними операторами у просторах типу $S$	111
<i>Городецький Василь, Мартинюк Ольга, Петришин Роман</i> Про нелокальну за часом задачу для сингулярного параболічного рівняння	112

<i>Danyliuk Ivan</i> About the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for a parabolic system of IDEs with an operator of Volterra-Fredholm type	113
<i>Журавльов Валерій, Гонгало Наталія</i> Критерій керованості інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром у банахових просторах	116
<i>Журавльов Валерій, Слюсаренко Ірина</i> Умови розв'язності рівнянь з $(2 \times 2)$ – вимірними операторними матрицями у гільбертових просторах	120
<i>Івасюк Галина, Фратавчан Тоня</i> Про задачу Коші для параболічних за Ейдельманом систем	124
<i>Kindybalik Arkadii, Prytula Mykola</i> Numerical scheme for backward heat equation via direct method of Lie-algebraic discrete approximations	128
<i>Klevchuk Ivan, Hrytchuk Mykola</i> Bifurcation of cycles in parabolic systems with weak diffusion	131
<i>Літовченко Владислав</i> Функція Гріна задачі Коші для параболічних рівнянь з від'ємним родом і змінними коефіцієнтами	135
<i>Лопушанська Галина, Лопушанський Андрій</i> Функція Гріна в обернених задачах з інтегральними умовами для рівняння дифузії з дробовою похідною за часом	138
<i>Пасічник Галина</i> Про фундаментальний розв'язок ультрапараболічного рівняння, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження і можуть зростати	140
<i>Пукальський Іван, Яшан Богдан</i> Оптимальне керування в крайовій задачі для еліптичних рівнянь з виродженням	142
<i>Туртуріка Віктор</i> Динамічне рівняння випадкових амплітуд на поверхні рідкого півпростору	144
<b>Математичне та комп'ютерне моделювання</b>	
<i>Бомба Андрій, Барановський Сергій</i> Логістичне узагальнення математичної моделі динаміки інфекційного захворювання з урахуванням дифузійних збурень та зосереджених впливів	148
<i>Борачок Ігор, Хапко Роман</i> Застосування методів Лагерра і фундаментальних розв'язків для наближеного розв'язування одновимірної оберненої нестационарної задачі	151
<i>Виклок Ярослав</i> Безперервно-дискретна модель GeoSEIR для моделювання та аналізу географічного поширення COVID-19	155
<i>Vlasiuk Mariia</i> On the numerical approximation of the nonlinear inverse elastostatics problem	158
<i>Грушка Ярослав</i> Про часонезворотність узагальнених кінематик Хассані	162
<i>Диханов Станіслав, Гук Наталія</i> Кластеризація сторінок веб-ресурсу із застосуванням об'єктної моделі	163
<i>Dmytryshyn Marian, Dmytryshyn Lesia</i> A model of diffusion in the income distribution of the population	165

<i>Дрозденко Віталій, Працьовитий Микола Premium Calculator</i> — пілотне програмне забезпечення для аналізу вартості індивідуальних страхових контрактів	167
<i>Yehoshkin Danylo, Huk Natalia</i> The advantages of using MISO and MIMO models in fuzzy expert systems	170
<i>Каратаєва Тетяна, Кошманенко Володимир</i> Equilibrium states of the dynamical conflict system for three players with an parameter of external environment influence	172
<i>Карвацький Дмитро</i> Моделювання канторвалів за допомогою узагальнених послідовностей Фібоначчі	173
<i>Косович Ігор</i> Імітація поширення COVID-19 методом клітинних автоматів	176
<i>Kravchuk Oleg, Kriukova Galyna</i> Diffusion model in Image Transforms Inversion tasks	179
<i>Літвінчук Юлія</i> Порівняльний аналіз оптимізації гіперпараметрів нейронних мереж	181
<i>Lukashiv Taras, Malyk Igor, Nazarov Petr</i> Exponential stability in l.i.m. of one type of stochastic systems	184
<i>Лунік Тетяна, Черевко Ігор</i> Числовий аналіз епідеміологічних моделей із запізненням	186
<i>Мазуренко Віктор</i> Математичне моделювання поперечних коливань балки з дискретно–неперервним розподілом параметрів	190
<i>Мащенко Василь</i> Аналіз неперервних моделей динаміки вікової структури біологічних популяцій	192
<i>Мельник Галина</i> Застосування алгоритму NSA в системі захисту комп’ютерної мережі	196
<i>Нестерук Ігор, Шепетюк Богдан</i> Моделювання форм вентильованих тонких осесиметричних порожнин у вагомій рідині	198
<i>Rachko Denis, Huk Natalia</i> Neural network approach overview for stock market forecasting	201
<i>Pineцький Євгеній, Pineцький Роман, Коробков О.</i> Математична модель розкриття статичної невизначеності прольотних конструкцій на основі зворотних зв’язків	203
<i>Sarana Maksym</i> Text similarity detection by means of n-gram hashing	206
<i>Сатур Оксана</i> Залежність граничних станів динамічних систем конфлікту від вибору вектора взаємодії	210
<i>Сливка-Тилищак Ганна, Тегза Антоніна</i> Використання теорії $L_2(\Omega)$ процесів при моделюванні гауссового стаціонарного випадкового процесу з необмеженим спектром	214
<b>Теорія функцій та її застосування</b>	
<i>Барановський Олександр, Працьовитий Микола</i> Про один клас функцій, які зберігають хвости Е-зображення чисел	217

<i>Біловицька Надія, Продан Ірина</i> Функції з локально складними диференціальними властивостями, пов'язані з нескінченносимвольними зображеннями чисел	219
<i>Когут Марія, Тимошкевич Лариса</i> Класифікація зліченних графів Кокстера відносно індекса у проміжку $(\sqrt{\sqrt{5}} + 2; \frac{3}{\sqrt{2}}]$	221
<i>Козловський Козловський Микола</i> The special inverse problem on the Cech-Stone compactification	225
<i>Кривошиль Ростислав</i> Про одне узагальнення критерію Пятецького-Шапіро	226
<i>Макарчук Олег</i> Про спектр функції розподілу однієї випадкової величини типу Джессена-Вінтнера	228
<i>Мельник Василь</i> Використання поліномів Бернштейна для моделювання апроксимації функцій	230
<i>Ратушняк Софія, Працьовитий Микола, Лисенко Ірина</i> Зображення чисел скінченими ланцюговими $A_2$ -дробами	231
<i>Савчук Віктор, Савчук Марина</i> Точні оцінки знизу найкращих наближень обмежених голоморфних функцій	235
<i>Сердюк Анатолій, Степанюк Тетяна</i> Рівномірні наближення сумами Фур'є на множинах згорток періодичних функцій високої гладкості	236
<i>Сердюк Анатолій, Соколенко Ігор</i> Наближення сумами Фур'є на класах диференційовних у сенсі Вейля–Надя функцій з високим показником гладкості в інтегральних метриках	238
<i>Скаакун Дмитро</i> Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величини з незалежними двійковими цифрами	240
<i>Тимошкевич Лариса, Пилипова Олександра</i> Верхня оцінка відновлюючого спектрального числа для зважених графів	242
<i>Халецький Богдан</i> Про міру Лебега множини неповних сум одного степеневого ряду	245
<i>Шпитюк Дарина, Ратушняк Софія</i> Згортка двох сингулярних розподілів: класичного канторівського і випадкової величини з незалежними дев'ятірковими цифрами	247
<b>Інформаційні технології у прикладних задачах та освіті</b>	
<i>Бардан Андрій</i> Старікова Юлія, IFC-формат файлів для BIM моделей. Структура та його призначення	249
<i>Бузиновська Анастасія, Колісник Руслана</i> Технології доповненої реальності на уроках математики	251
<i>Готинчан Тетяна</i> Роль сучасних інформаційних технологій в освіті	253
<i>Гульпак Марина</i> Розробка програмного забезпечення для обліку ультразвукових досліджень	256
<i>Диренко Віктор</i> Побудова та дослідження стійкості різницевих схем Гіпа	258

<i>Дробот Андрій</i> Створення мовного процесора для платформи .NET за- собами Antlr	260
<i>Івасюк Роман</i> Розробка бізнес-логіки для проекту «Реабілітаційний центр «Особлива дитина»»	263
<i>Іфтода Богдан, Юрійчук Анастасія</i> Інформаційна карта функціонуван- ня державної мови	265
<i>Нікорак Олена</i> Проектор цифр ланцюгового зображення чисел засобами двосимвольного алфавіту	267
<i>Петрусяк Марія</i> Тестування програмного забезпечення у проекті «Ре- абілітаційний центр «Особлива дитина»»	269
<i>Слободян Ганна, Перун Галина</i> Мобільні застосунки для вивчення про- грамування в шкільному освітньому процесі	271
<i>Сопронюк Тетяна, Дробот Андрій</i> Інструменти розробки мов програ- мування для платформи .NET	273
<i>Філіпчук Микола, Філіпчук Ольга</i> Емулятор машини Тюрінга	277
<i>Шанін Антон</i> Розробка низькорівневого програмного забезпечення для маршрутізаторів на платформі ARM	280
<i>Чуйко Сергій, Чуйко Олена, Д'яченко Дар'я</i> Автономні нелінійні кра- йові задачі для невироджених диференціально-алгебраїчних систем	282
<i>Petryna Grygoriy</i> Conditions for asymptotic equivalence of Functional Stochastic Differential Equations	286

## Пленарні доповіді

**Кафедрі прикладної математики  
та інформаційних технологій – 60**

Ярослав Бігун

y.bihun@chnu.edu.ua

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

Створена у 1962 р. кафедра прикладної математики і механіки (ПММ) у Чернівецькому державному університеті стала другою кафедрою у Західній Україні такого напряму після кафедри обчислювальної математики у Львівському університеті, заснованої у 1960 р. Із 10 червня 2004 р. кафедра отримала назву прикладної математики, а з 1 вересня 2014 р. – прикладної математики та інформаційних технологій (ПМІТ).

За 60 років діяльності кафедрою підготовлено 1450 фахівців, з них єдиний тепер член-кореспондент НАН України В.Ю. Слюсарчук, 14 докторів і понад 60 кандидатів наук, 236 магістрів прикладної математики. На кафедрі навчається студентів 1-4 курсів, – у магістратурі, 3 аспіранти. Видано за 60 років 18 монографій і збірників наукових праць, 133 навчально-методичні праці. Детальніше історія кафедри та її нинішня діяльність наведена в [1-4], фото випускників кафедри можна переглянути за адресою <https://cutt.ly/SVaASwh> або QR-кодом



Об'єктивною причиною створення кафедри ПММ була потреба у підготовці фахівців для розробки та супровождження математичного і програмного забезпечення роботи ЕОМ. Цій події передувало відкриття на кафедрі математичного аналізу у 1958 р. спеціалізації з обчислювальної математики за ініціативою професора М.К. Фаге. Фундатор кафедри та її перший завідувач у 1962-1972 рр. – професор В.П. Рубаник, учень академіка Ю.О. Митропольського. Колектив кафедри сформований в основному із викладачів кафедр диференціальних рівнянь і математичного аналізу.

Професор В.П. Рубаник започаткував наукову тематику, яка отримала розвиток як на кафедрі ПММ, так і на математичному факультеті, і стала одним із напрямків подальшого розвитку відомої у науковому світі Українська школи з нелінійної механіки. Зі своїми учнями він досліджував квазілінійні коливні системи із запізненням під дією детермінованих і випадкових збурень. Спільно з Є.Ф. Царковим започаткував дослідження стохастичних диференціально-функціональних рівнянь. Під їх керівництвом захищено 16 кандидатських дисертацій.

Надалі колектив кафедри формувався в основному з її випускників, серед яких М.Л. Свердан, В.К. Ясинський, П.Ф. Ярема, А.М. Садовяк, Д.О. Мігуца, Н.В. Котенко та інші. Плідною на кафедрі була праця доцентів П.П. Вчерашнюка, М.І. Букатаря, М.М. Ігнатенко, Ю.І. Марченко, З.Л. Кравченко.

Вагомий внесок у розвиток кафедри, заснування нового напряму наукових досліджень регулярно і сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь належить випускнику кафедри диференціальних рівнянь ЧДУ, учню аcadеміка Ю.О. Митропольського – В.І. Фодчуку, який завідував кафедрою у 1972-1992 рр. Під його науковим керівництвом виконано вісім кандидатських дисертацій. Василь Іванович залучив до роботи на кафедрі М.С. Бортєя, М.М. Дрінь, В.Г. Маценка, І.В. Якімова – майбутніх доцентів кафедри; його аспіранти і викладачі кафедри Я.Й. Бігун, І.М. Черевко та І.І. Клевчук, які виконали і захистили кандидатські дисертації під його керівництвом, надалі стали докторами наук. У 70-80-х роках на кафедрі виконувалися бюджетні НДР, а також сім гospодговірних тем, п'ять з яких під керівництвом професора В. Фодчука. Надавав значної уваги запровадженню курсів, орієнтованих на програмне забезпечення персональних комп'ютерів.

Із грудня 1996 р. і дл 2002 р. кафедрою ПММ завідував учень А.М. Самойленка професор Р.І. Петришин, тепер ректор університету. Він започаткував на кафедрі ПММ новий напрям із дослідження багаточастотних систем, зокрема з імпульсною дією. Під його керівництвом виконали і захистили кандидатські дисертації викладачі кафедри Т.М. Сопронюк, П.М. Дудницький та І.М. Данилюк. Протягом тривалого часу він керував виконанням бюджетних НДР, до роботи на яких були залучені викладачі кафедри.

У 90-х роках на кафедрі у навчальному процесі запроваджувалася тематика мережних технологій, відкритий перший у ЧНУ інтернет-центр. Укладені угоди про співробітництво з німецько-українським підприємством "Інфоком".

На кафедрі за сумісництвом працювали добре знані в Україні і за ру- бежем науковці. У 1999–2002 і 2010–2011 рр. професором кафедри працював академік НАН України А.М. Самойленко, засновник наукової школи з теорії багаточастотних коливань і теорії імпульсних систем. У 2010–2022 рр. професором кафедри працював академік НАН України А.О. Чикрій, відомий учений у галузі конфліктно-керованих ігор. Магістрантам кафедри читав спецкурс "Конфліктно-керовані процеси і нелінійні моделі". Професорами за сумісництвом трудилися В.А. Стоян, В.О. Плотников та інші.

У 1992–1996 рр. і з січня 2002 р. кафедрою завідує професор Я.Й. Бігун. Сфера його наукових інтересів – багаточастотні системи із запі-

зненням аргументом і точковими та інтегральними умовами, конфліктно керовані процеси із запізненням. Він науковий керівник чотирьох кандидатських дисертацій, троє із кандидатів наук, – М.П. Філіпчук, І.В. Краснокутська та І.Д. Скутар – викладачі кафедри.

У 90-х і 2000-х роках на викладацьку роботу на кафедру запрошені випускники кафедри Л.А. Піддубна, Я.Р. Петришин, О.В. Матвій, А.О. Юрійчук, Є.А. Любарщук, аспіранти Р.І. Петришина і Я.Й. Бігуна, а також Б.Д. Шепетюк і Г.В. Мельник, О.М. Гусак та інші.

При кафедрі працює комп’ютерний клас і лабораторія "WEB-технології та комп’ютерне моделювання", завідувач лабораторії – асистент кафедри і Mentor Softserve Academy Н.В. Романенко.

Випускники кафедри останніх десятиліть працюють у провідних ІТ-компаніях України та за кордоном, зокрема у SoftServe, AMC Bridge, YukonSoftware, Desyde LTD, EPAM, SharpMinds та ін., провідними працівниками в організаціях, наукових установах, закладах вищої освіти.

Кафедра виступила організатором або співорганізатором наукових конференцій і семінарів у ЧНУ, зокрема трьох всесоюзних конференцій "Диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється" у 1965, 1967 і 1972 рр.; у 2003 р. – міжнародної конференції "Шості Боголюбовські читання", у 2012 р. Всеукраїнської конференцію "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці", у 2016 р. міжнародної конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвяченої 80-річчю з дня народження професора В.І. Фодчука. На наукових семінарах кафедри виступали відомі вчені, зокрема лекцію з динамічних систем прочитав почесний професор Техаського університету Р.І. Григорчук, виступила професор Варшавського університету Уршула Фориш, старший дослідник із Інституту математики НАН України О.А. Бурилко.

Кафедра співпрацює із кафедрами Тираспольського державного університету (м. Кишинів); викладачі кафедри проходили стажування на кафедрі біоматематики і теорії ігор в Інституті прикладної математики і механіки Варшавського університету, Ясському технічному університеті ім. Георге Асакі та Сучавському університеті Штефана чел Марі (Румунія), Єнського університету імені Фрідріха Шиллера (Німеччина).

У 2018 р. спеціальність "Прикладна математика" пройшла міжнародну акредитацію німецькою агенцією ASIIN у рамках проекту ERAZMUS+. У першому семестрі 2021-2022 н.р. на кафедрі успішно акредитовано освітньо-професійну програму "Технології програмування та комп’ютерне моделювання", спеціальність – 113 Прикладна математика, для здобувачів другого (магістерського) і першого (бакалаврського) рівнів вищої освіти. ОП магістерської підготовки (гарант проф. Я.Й. Бігун) і бакалаврської підготовки (гарант доц. В.Г. Маценко) акредитовані на рівні В на 5 років

підготовки бакалаврів і магістрів.

Кафедра забезпечує такі сучасні навчальні дисципліни: об'єктно-орієнтоване програмування, алгоритми і структури даних, архітектура комп'ютерів, операційні системи, розробка мобільних додатків для ОС Android, проектування програмних систем, обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка, дискретна математика, числові методи, основи інтернет-технологій, розробка UI/UX дизайну, серверна мова PHP, Frontend-розробка Web-додатків, технології програмування мовою Python, комп'ютерне моделювання еколого-економічних систем, платформи корпоративних інформаційних систем, штучний інтелект.

Як і більшість кафедр України, які ведуть підготовку зі спеціальності прикладна математика та ІТ, кафедра потребує викладачів, особливо з комп'ютерних дисциплін. Один з розв'язків кадрової проблеми – залучення працівників комп'ютерних компаній та з інших ЗВО і установ. Тепер на кафедрі працює п'ять викладачів – працівників ІТ-компаній, зокрема, Г.В. Мельник – Senior IT Academy, mentor SoftServe Academy, Н.В. Романенко – mentor SoftServe Academy, Л.М. Сергєєва – Java developer, project manager, mentor for trainees у компанії YukonSoftware. Державні видатки на наукові проекти досить обмежені, особливо в умовах воєнного стану, тому актуальне завдання пошуку зарубіжних грантів із прикладних проблем.

Кафедра наполегливо працює над удосконаленням навчальних планів. Для бакалаврів навчальний план зверстано так, що, закінчивши третій курс, студент отримує достатньо повноцінний базис для працевлаштування за спеціальністю. Надалі вдосконалюють знання та практичні навики студенти на четвертому курсі і підвищують освітній рівень у магістратурі. Маючи у 2022 р. набір 42 студентів на перший курс, що є рекордом із 1966 р., 8 – на скорочену форму навчання, магістрів іще одного аспіранта, кафедра ПМІТ докладає зусиль для успішного виконання навчальних і наукових програм та організаційних заходів.

1. Бігун Я.Й., Черевко І.М. Кафедрі прикладної математики Чернівецького національного університету – 50 років // Науковий вісник ЧНУ. 2012. 2, № 2–3. – С. 13-14.
2. Бігун Я.Й. Кафедрі прикладної математики Чернівецького національного університету – 50 років // Всеукраїнська наук. конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування у прикладній математиці", 11-13 червня 2012 р. – Чернівці: ЧНУ, 2012. – С. 10-42.
3. Бігун Я.Й. Кафедрі прикладної математики Чернівецького національного університету – 55 років // Міжвузівський наук. семінар "Прикладні задачі та ІТ-технології", 9-10 червня 2012 р. – Чернівці: ЧНУ, 2017. – С. 6-33.
4. Ярослав Бігун Історія та сьогодення кафедри прикладної математики та інформаційних технологій. – Чернівці: Чернівец. нац. ун-т, 2022. – 196 с.

# **Химерні стани у модульних мережах зв'язаних осциляторів**

*Олександр Бурілко*

*burylko@yahoo.co.uk*

*Інститут математики НАН України, Потсдамський інститут  
дослідження впливу клімату, Німеччина*

Неважаючи на простоту, мережі зв'язаних фазових осциляторів можуть показувати інтригуючі колективні динамічні явища. Однак симетрії глобально зв'язаних елементів не дозволяють існування частотно-незамкнүтих осциляторних розв'язків, що є необхідною умовою для появи химерних станів. Отже, примусове руйнування симетрії є необхідним для виникнення розв'язків типу химер. Тут ми розглядаємо біфуркації, що виникають при порушенні повної симетрії перестановок і коли мережа складається з кількох зв'язаних популяцій. Ми розглядаємо найменшу можливу мережу, що складається з чотирьох фазових осциляторів, для якої ми досліджуємо структуру фазового простору, описуємо її (часткову) інтегровність при певних параметрических значеннях, а також досліджуємо біфуркації руйнування повної симетрії, що призводять до виникнення слабких химерних розв'язків. Оскільки такі розв'язки обертаються навколо тора, вони виникають за глобальними біфуркаційними сценаріями. Крім того, каскади біфуркацій подвоєння періоду, що відбуваються з періодичними слабкими химерними розв'язками, призводять виникнення хаотичних химер. У роботі наводиться "міні-химеропедія", яка містить періодичні, плоскі, нейтральні, серпентинні, гетероклінічні, хаотичні та інші типи химер, а також їх багато параметричні сім'ї, що виникають для мінімальної блочної осциляторної мережі.

## Maximal subgroups of ample groups

Yaroslav Vorobets (joint with Rostislav Grigorchuk)

yvorobet@math.tamu.edu

Texas A&M University

During the last two decades there was a growing interest in dynamically defined groups. A rich source of such groups are *ample groups* (also known as *topological full groups*). The idea of ampleness in Dynamics and Group Theory is quite simple. Given a topological space  $X$  and a subgroup  $G$  of the group  $\text{Homeo}(X)$  of homeomorphisms of  $X$ , one can enlarge it by adding those homeomorphisms that locally act as elements of  $G$ , thus producing an ample group  $\mathcal{G}$ . This idea works best in the situation when  $X$  is a Cantor set or, more generally, a metrizable compact totally disconnected space. This is because such a space has many *clopen* (i.e., both closed and open) sets, which allows to construct many homeomorphisms that are piecewise elements of  $G$ . Still, if  $G$  is countable then the ample group  $\mathcal{G}$  is also countable.

Maximal subgroups play an extremely important role in group theory. The most remarkable result here is a complete classification of maximal subgroups of finite symmetric groups (see, e.g., Section 8.5 of the book [1]). Much less is known about maximal subgroups in infinite groups.

Important subgroups of any transformation group  $G$  acting on a set  $X$  are *stabilizers* of subsets and partitions. The stabilizer  $\text{St}_G(Y)$  of a subset  $Y \subset X$  consists of all  $g \in G$  such that  $g(Y) = Y$ . The stabilizer  $\text{St}_G(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$  of a partition  $X = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \dots \sqcup Y_k$  consists of those elements of  $G$  that map elements of the partition onto one another.

All subgroups of the symmetric group  $S_n$  are divided into three classes: *intransitive* subgroups (those that leave invariant a nontrivial subset), *imprimitive* subgroups (transitive subgroups that leave invariant a nontrivial partition), and *primitive* subgroups (the remaining ones). It turns out that the maximal intransitive subgroups are stabilizers of certain subsets while the maximal imprimitive subgroups are stabilizers of certain partitions.

We present a number of results on maximal subgroups of ample groups  $\mathcal{G} \subset \text{Homeo}(X)$ , where  $X$  is a Cantor set. The results are mostly parallel to the above classification. Instead of arbitrary subsets and partitions, one needs to consider closed subsets and partitions into closed subsets. Transitivity is replaced by *minimality*, which means absence of nontrivial closed invariant subsets.

**Teorema 1.** *Let  $\mathcal{G} \subset \text{Homeo}(X)$  be an ample group that acts minimally on  $X$ . Suppose  $H$  is a maximal subgroup of  $\mathcal{G}$  that does not act minimally on  $X$ . Then  $H = \text{St}_{\mathcal{G}}(Y)$  for some closed set  $Y \subset X$  different from the empty set and  $X$ . Moreover, the induced action of  $\text{St}_{\mathcal{G}}(Y)$  on  $Y$  is minimal.*

The condition that the stabilizer  $\text{St}_{\mathcal{G}}(Y)$  of a closed set  $Y$  acts minimally when restricted to  $Y$  implies that  $Y$  belongs to one of three classes: (1) finite sets contained in a single orbit of  $\mathcal{G}$ , (2) infinite sets nowhere dense in  $X$ , and (3) clopen sets. Conversely, the condition is satisfied for all sets of types (1) and (3). For closed sets of type (2) it is not always so, but there are uncountably many sets that do satisfy the condition.

**Teopema 2.** *Let  $\mathcal{G} \subset \text{Homeo}(X)$  be an ample group that has no finite orbits. Suppose  $Y$  is a finite nonempty subset of  $X$ . Then the stabilizer  $\text{St}_{\mathcal{G}}(Y)$  is a maximal subgroup of  $\mathcal{G}$  if and only if  $Y$  is contained in a single orbit of  $\mathcal{G}$ .*

Theorem 2 imposes very modest conditions on the ample group  $\mathcal{G}$ . To treat the stabilizers of infinite closed sets, we need stronger assumptions. Namely,  $\mathcal{G}$  has to act minimally on  $X$  and to possess another property that we call *Property NC* (no contraction): if  $g(U) \subset U$  for some  $g \in \mathcal{G}$  and open set  $U \subset X$  then, in fact,  $g(U) = U$ .

**Teopema 3.** *Let  $\mathcal{G} \subset \text{Homeo}(X)$  be an ample group that acts minimally on  $X$  and has Property NC. Suppose  $Y \subset X$  is an infinite closed set that is nowhere dense in  $X$ . Then the stabilizer  $\text{St}_{\mathcal{G}}(Y)$  is a maximal subgroup of  $\mathcal{G}$  if and only if it acts minimally when restricted to  $Y$ .*

**Teopema 4.** *Let  $\mathcal{G} \subset \text{Homeo}(X)$  be an ample group that acts minimally on  $X$  and has Property NC. Suppose  $U$  is a clopen set different from the empty set and  $X$ . Then  $\text{St}_{\mathcal{G}}(U, X \setminus U)$  is a maximal subgroup of  $\mathcal{G}$ . If  $U$  cannot be mapped onto  $X \setminus U$  by an element of  $\mathcal{G}$  then  $\text{St}_{\mathcal{G}}(U) = \text{St}_{\mathcal{G}}(U, X \setminus U)$ ; otherwise  $\text{St}_{\mathcal{G}}(U)$  is a subgroup of index 2 in  $\text{St}_{\mathcal{G}}(U, X \setminus U)$ .*

In addition to handling the stabilizers of clopen sets, Theorem 4 also treats the stabilizers of partitions into two clopen sets. Our last result covers the stabilizers of partitions into three or more clopen sets.

**Teopema 5.** *Let  $\mathcal{G} \subset \text{Homeo}(X)$  be an ample group that acts minimally on  $X$  and has Property NC. Suppose  $X = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \cdots \sqcup U_k$  is a partition of  $X$  into at least three nonempty clopen sets. Then  $\text{St}_{\mathcal{G}}(U_1, U_2, \dots, U_k)$ , the stabilizer of the partition, is a maximal subgroup of  $\mathcal{G}$  if and only if its induced action on the set  $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$  is transitive.*

1. J. D. Dixon, B. Mortimer. Permutation groups (Graduate Texts in Mathematics, 163). – New York: Springer, 1996. – 360 p.

# A geometric condition excluding eigenvalues of Laplace and Schrödinger operators on homogeneous amenable graphs

*R. Grigorchuk, Ch. Pittet*

*grigorch@math.tamu.edu, pittet@math.cnrs.fr*

*Texas A&M University, Aix-Marseille University CNRS I2M and University of Geneva*

**1. Laplace and Schrödinger operators on graphs, integrated density of states** Let  $\Gamma$  be a connected graph with bounded degree. We consider the Markov operator  $K$  on functions on the vertex set  $X$  of  $\Gamma$

$$(K\varphi)(x) = \frac{1}{\text{degree}(x)} \sum_{y \sim x} \varphi(y),$$

where the sum is taken over the neighbors of the vertex  $x$ . The combinatorial Laplacian  $\Delta$  acts as  $(\Delta\varphi)(x) = \varphi(x) - (K\varphi)(x)$ . If  $q$  is a bounded potential defined on  $X$ , the corresponding Schrödinger operator  $H$  acts as  $(H\varphi)(x) = (\Delta\varphi)(x) + q(x)\varphi(x)$ . Using the Borel functional calculus for bounded self-adjoint operators, we define, for each  $\lambda \in \mathbb{R}$ , the corresponding spectral projectors associated to  $\Delta$  as  $E_\lambda = \mathbf{1}_{]-\infty, \lambda]}(\Delta)$  and  $E_{\{\lambda\}} = \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(\Delta)$ . If the automorphism group  $G$  of the graph  $\Gamma$  is cocompact, it is possible to analyze the  $l^2$ -spectrum of  $\Delta$  with the help of a von Neumann trace (a similar approach works also for  $H$  if the potential  $q$  is real and  $G$ -invariant). We choose a fundamental domain  $D$  for the action of  $G$  and consider the integrated density of states

$$\lambda \mapsto \tau(E_\lambda) = \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \langle E_\lambda \delta_x, \delta_x, \rangle,$$

where  $\delta_x$  is the characteristic function of the vertex  $x$  of  $\Gamma$  and the hermitian product is chosen so that the characteristic functions of the vertices of  $\Gamma$  form a complete orthonormal Hilbert family. It is well-known that the integrated density of states is continuous at  $\lambda$  if and only if its “jump”  $\tau(E_{\{\lambda\}})$  at  $\lambda$  vanishes, if and only if  $\Delta$  has no  $\lambda$ -eigenfunction in  $l^2(X)$ . For example the combinatorial Laplace operator on the  $d$ -dimensional grid (that is the Cayley graph of the free abelian group  $\mathbb{Z}^d$  relative to its canonical generating set) has no  $l^2$ -eigenfunction: the Fourier transform conjugates  $\Delta$  to a multiplication operator on the  $d$ -dimensional torus  $T^d$  (and the multiplier is nowhere locally constant)

**2. The idea of Delyon and Souillard and Følner sequences** The physicists Delyon and Souillard have found an alternative proof of the fact that the combinatorial Laplace operator on the  $d$ -dimensional grid has no  $l^2$ -eigenfunction. Their proof applies to other graphs, for which Fourier theory

and its generalizations are difficult or not available. We equip the vertex set  $X$  of the connected graph  $\Gamma$  with its path-metric: the distance  $d(x, y)$  between the vertices  $x$  and  $y$  is the minimum number of edges one has to cross when starting at  $x$  and ending at  $y$ . If  $\Omega \subset X$ , we define its “thick” boundary as

$$\partial_2 \Omega = \{x \in \Omega : d(x, X \setminus \Omega) \leq 2\}.$$

Delyon and Souillard show that, inside the  $d$ -dimensional grid, any discrete cube  $\Omega_n = [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$  of side  $2n$ , satisfies, for any  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\tau(E_{\{\lambda\}}) \leq \frac{|\partial_2 \Omega_n|}{|\Omega_n|}.$$

Because the the length  $2n$  of the side can be chosen arbitrary large, the above inequality implies that  $\tau(E_\lambda) = 0$ , hence there is no square-summable  $\lambda$ -eigenfunction. (The point in Delyon and Souillard [1] is that the above arguments work not only for  $\Delta$  but for a family of Schrödinger operators with random potentials.) Recall that a Cayley graph  $\Gamma$  of a finitely generating amenable group  $G$  admits a Følner sequence: namely, there exist finite subsets  $\Omega_n$  of vertices of  $\Gamma$ , such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial_2 \Omega_n|}{|\Omega_n|} = 0.$$

Should we conclude that the combinatorial Laplacian on a Cayley graph of an amenable finitely generated group never admits eigenfunctions? Not at all: for example, it was shown, in [3], that the Cayley graph of a two-generator metabelian group (the so-called lamplighter group), defined by a generating set containing two elements, admits a Hilbert orthonormal complete set of square summable eigenfunctions of its combinatorial Laplacian  $\Delta$ , and that the  $l^2$ -spectrum of  $\Delta$  is the closure of its eigenvalues. But if another generating set is chosen, the corresponding combinatorial Laplacian on the new Cayley graph has no square summable eigenfunction [2]. The point is that the  $d$ -dimensional grid has a special geometric property: any of its subset admits a *one-by-one exhaustion*. Without this property, the inequality of Delyon and Souillard may fail to be true. This is the subject of the next sections.

### 3. One-by-one exhaustions, $\lambda$ -uniqueness

**Definition 1.** (*One-by-one exhaustion.*) Let  $\Gamma$  be a connected graph with vertex set  $X$  and path-metric  $d$ . Let  $\Omega \subset X$ . A one-by-one exhaustion  $(X_n)_{n \geq 0}$  of  $\Omega$  is a countable non decreasing sequence of subsets of  $X$ ,

$$X_0 \subset \cdots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \cdots$$

satisfying the following conditions:

1.  $X_0 = X \setminus \Omega$ ,
2. for each  $n$ , there exists  $x_n \in X_n$ , such that

$$X_{n+1} = X_n \cup \{y \in X : d(x_n, y) \leq 1\},$$

3. either  $|X_{n+1} \setminus X_n| = 1$  or  $X_n = X$ ,
4.  $\bigcup_n X_n = X$ .

An easy way to obtain one-by-one exhaustions is to define a *height-function* on  $\Gamma$  (see [2]). For example, any finitely generated indicable group (that is a group admitting an epimorphism onto  $\mathbb{Z}$ ) has Cayley graphs with height-functions. The existence of a one-by-one exhaustion implies the following uniqueness property of eigenfunctions.

**Definition 2.** ( $\lambda$ -uniqueness for  $\Delta$  on  $\Omega$ ) Let  $\Gamma$  be a graph with bounded degree. Let  $\Omega \subset X$  be a subset of vertices of  $\Gamma$ . Let  $\Delta$  be the combinatorial Laplacian on  $\Gamma$  and  $\lambda$  be a real number. The operator  $\Delta$  satisfies  $\lambda$ -uniqueness on  $\Omega$  if there is no  $\lambda$ -eigenfunction of  $\Delta$  which vanishes outside of  $\Omega$ . Formally: if  $\varphi \in l^2(X)$  is such that  $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ , and if  $\varphi(x) = 0$  for all  $x \in X \setminus \Omega$ , then  $\varphi(x) = 0$  for all  $x \in X$ .

#### 4. The Delyon-Souillard inequality for homogeneous graphs and localization

**Theorem 3.** Suppose  $\Gamma$  is a homogeneous graph, that is  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  acts transitively on the vertex set  $X$  of  $\Gamma$ . Let  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Assume  $\Delta$  satisfies  $\lambda$ -uniqueness on a finite set  $\Omega \subset X$ . Then

$$\tau(E_{\{\lambda\}}) \leq \frac{|\partial_2 \Omega|}{|\Omega|}.$$

An analogous statement is true for quasi-homogeneous graphs (i.e. with  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  having a finite number of orbits of vertices) and Schrödinger operators of the form  $H = \Delta + q$  were the potential  $q$  is real and  $G$ -invariant.

**Corollary 4.** (Localization in the presence of a Følner sequence.) Let  $\Gamma$  be a homogeneous graph with vertex set  $X$ . Assume it admits a Følner sequence. If the combinatorial Laplacian  $\Delta$  has a square-summable  $\lambda$ -eigenfunction, then it has a  $\lambda$ -eigenfunction with finite support.

*Proof.* In order to prove the corollary, notice first that the existence of a square summable  $\lambda$ -eigenfunction implies that  $\tau(E_{\{\lambda\}}) > 0$ . Consider any finite set  $\Omega \subset X$  such that  $\tau(E_{\{\lambda\}}) > \frac{|\partial_2 \Omega|}{|\Omega|}$ . (Such a set exists because  $\Gamma$  admits a Følner sequence.) The theorem implies that  $\lambda$ -uniqueness fails on  $\Omega$ . In other words there is an eigenfunction whose support is included in  $\Omega$ .  $\square$

We conclude this note with an application of one-by-one exhaustions to a well-known finitely generated amenable indicable group.

**Proposition 5.** (*No eigenfunction on the (1,2) Baumslag-Solitar group.*) Consider the two-generator one relator group  $G = \langle aba^{-1} = b^2 \rangle$  and its Cayley graph  $\Gamma = \mathcal{C}(G, \{a; b\})$ . The combinatorial Laplacian on  $\Gamma$  has no  $l^2$ -eigenfunction.

*Proof.* The epimorphism  $h : G \rightarrow \mathbb{Z}$  such that  $h(a) = 1$  and  $h(b) = 0$  defines a height function on  $\Gamma$ . Hence any finite subset  $\Omega$  of the vertex set of  $\Gamma$  admits a one-by-one exhaustion, hence satisfies  $\lambda$ -unicity for any  $\lambda \in \mathbb{R}$ . According to the Delyon-Souillard inequality and the existence of a Følner sequence in  $\Gamma$  ( $G$  is metabelian hence amenable), it follows that  $\tau(E_{\{\lambda\}}) = 0$ . In other words,  $\Delta$  has no  $l^2$ -eigenfunction.  $\square$

1. Delyon, François, Souillard, Bernard, Remark on the continuity of the density of states of ergodic difference operators // Comm. Math. Phys.– 1984. – 94, 2. – P. 289–291,
2. Grigorchuk, Rostislav I., Pittet, Christophe, Laplace and Schrödinger operators without eigenvalues on homogeneous amenable graphs, arXiv:2102.13542v3, 2022,
3. Grigorchuk, Rostislav I., Żuk, Andrzej, The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton, and its spectrum // Geom. Dedicata. – 2001. – 87, 1-3. – P. 209–244, 0046-5755.

**Center conditions for a cubic system with an invariant straight line and an invariant cubic**

Dumitru Cozma

dcozma@gmail.com

*Tiraspol State University*

We consider the cubic system of differential equations

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + p_2(x, y) + p_3(x, y) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -x + q_2(x, y) + q_3(x, y) \equiv Q(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

where  $p_j(x, y)$ ,  $q_j(x, y)$ ,  $j \in \{2, 3\}$  are real homogeneous polynomials of degree  $j$  and  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  are coprime polynomials. The origin  $O(0, 0)$  is a singular point for (1) with purely imaginary eigenvalues, i.e. a focus or a center.

The problem of distinguishing between a center and a focus (the problem of the center) is open for general cubic systems. It is completely solved for quadratic systems  $\dot{x} = y + p_2(x, y)$ ,  $\dot{y} = -x + q_2(x, y)$ ; cubic symmetric systems  $\dot{x} = y + p_3(x, y)$ ,  $\dot{y} = -x + q_3(x, y)$ ; the Kukles system  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x + q_2(x, y) + q_3(x, y)$  and a few particular cases in families of polynomial systems of higher degree.

It is known [1] that a singular point  $O(0, 0)$  is a center for (1) if and only if the system has a nonconstant analytic first integral  $F(x, y) = C$  in the neighborhood of  $O(0, 0)$  or an analytic integrating factor of the form

$$\mu(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x, y),$$

where  $\mu_k$  are homogeneous polynomials of degree  $k$ .

An integrating factor for system (1) on some open set  $U$  of  $\mathbb{R}^2$  is a  $C^1$  function  $\mu$  defined on  $U$ , not identically zero on  $U$  such that

$$P(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \equiv 0.\tag{2}$$

Conditions for the existence of an integrating factor of the form  $\mu = \Phi^\beta$  for system (1), where  $\Phi(x, y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0$  is an irreducible invariant cubic and  $\beta \in \mathbb{R}$ , were obtained in [2].

The problem of the center was solved for cubic differential system (1) with: four invariant straight lines; three invariant straight lines; two invariant straight lines and one irreducible invariant conic [3]; two invariant straight lines and one irreducible invariant cubic  $\Phi(x, y) = 0$ . Conditions for a singular point  $O(0, 0)$  to be a center in a system (1) with two distinct invariant straight lines were obtained in [4] and with two parallel invariant straight lines were determined in [5], [6].

The presence of a center in these papers was proved by using the method of Darboux integrability and the rational reversibility.

We are interested in the algebraic integrability of cubic differential systems (1), called *the Darboux integrability* [1], [3]. It consists in constructing of a first integral or an integrating factor of the form

$$\Phi_1^{\alpha_1} \Phi_2^{\alpha_2} \cdots \Phi_q^{\alpha_q},$$

where  $\Phi_j = 0, j = \overline{1, q}$  are invariant algebraic curves of (1) and  $\Phi_j \in \mathbb{C}[x, y], \alpha_j \in \mathbb{C}$ .

In this paper we determine the center conditions for cubic system (1) by constructing integrating factors of the Darboux form

$$\mu = \frac{1}{(1-x)^{\alpha_1} \Phi^{\alpha_2}}, \quad (3)$$

where  $1-x=0$  is an invariant straight line and  $\Phi(x, y) \equiv x^2 + y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 = 0$  is an irreducible invariant cubic for (1), and  $\alpha_1, \alpha_2$  are real exponents,  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ .

The identity (2) will be used in finding integrating factors of the form (3) for cubic system (1). Identifying the coefficients in (2) and solving the obtained algebraic system, we prove the following theorem

**Теорема 1.** *The cubic system (1) has an integrating factor of the form (3) if and only if one of the following ten sets of conditions holds:*

- (i)  $d = 2a, k = -a, l = [f(2b - c - 1)]/3, m = -(c + 1), n = (2bc + 2b - c^2 - 3c - 2)/2, p = -f, q = a(2b - c - 3), r = 0, s = [(2b - c - 2g - 3)(c - 2b + 4)]/6;$
- (ii)  $a = [(2b + 3c + 3)^2 + 24fu - 3u^2]/(8u), d = [(2b + 3c + 3)^2 - 8fu + u^2]/(4u), g = [(2b + 3c + 3)^3 + (2b + 3c + 3)(8fu - u^2) - 8u^2]/(8u^2), k = -a, l = r = 0, m = -c - 1, n = [(2b + 3c + 3)(u - 12f)]/(4u), p = -f, q = -d, s = [(2b + 3c + 3)(u^2 - 8fu - (2b + 3c + 3)^2)]/(8u^2), 4f(2b + 3c + 3) - u(2b + c + 1) = 0;$
- (iii)  $a = 3f, c = (-2b - 5)/3, d = [2f(2b + 5)]/(1 - 2b), g = (b - 5)/3, k = -a, l = r = 0, m = (2(b + 1))/3, n = -b, p = -f, q = -d, s = (2 - b)/3, (2b - 1)^2 - 108f^2 = 0;$
- (iv)  $b = 1/2, c = (-3)/2, d = (11a + 21f)/3, g = -1, k = -a, l = f/2, m = 1/2, n = (27 - 84af - 140a^2)/2, p = -f, q = (-2a - 21f)/18, r = 0, s = (20a^2 + 12af + 9)/36, (10a + 6f)^2 - 27 = 0;$
- (v)  $c = -1, d = -2a, f = -a, g = (2b - 5)/2, k = -a, l = (-3a)/2, m = n = r = 0, p = a, q = (5a)/2, s = (3 - 2b)/2;$

- (vi)  $c = 1 - 2b$ ,  $d = 2(a + 2f)$ ,  $g = [(3a + 4f)(1 - b)]/(f)$ ,  $k = -a$ ,  $l = 2f$ ,  
 $m = 2(b - 1)$ ,  $n = 4af - 3b + 4f^2 + 3$ ,  $p = -f$ ,  $q = 8(1 - b)(a + f)$ ,  
 $r = 0$ ,  $s = [(4ab - 3a + 4bf - 4f)(b - 1)]/(f)$ ;
- (vii)  $b = 1/4$ ,  $c = -2$ ,  $d = -2a$ ,  $f = -a$ ,  $g = (-1)/4$ ,  $k = -a$ ,  $l = a/2$ ,  
 $m = 1$ ,  $n = (-1)/4$ ,  $p = a$ ,  $q = a/2$ ,  $r = s = 0$ ;
- (viii)  $b = (2u^4 + 9uv - 9v^2 - 6au^3)/(18uv)$ ,  $c = -(u^4 + 9uv + 9v^2 - 3au^3)/(9uv)$ ,  
 $f = p = r = 0$ ,  $g = (6au^2 - 9a^2u - u^3 - 3v)/(6v)$ ,  $k = -a$ ,  $m = -c - 1$ ,  
 $n = [(3a - u)(u - v)u]/(6v)$ ,  $q = (9a^2u^2 - 6au^3 - 18av + u^4 + 9uv)/(18v)$ ,  
 $s = [(9a^2u^2 - 6au^3 - 54av + u^4 + 9uv)(u - 3a)u]/(162v^2)$ ,  $u = 2a - d$ ,  
 $v = 2a - d + 6l$ ;
- (ix)  $a = [-2(h^4l + h^3 + 8h^2l + 16l)]/[h^2(h^2 + 4)]$ ,  $b = (-2h^4l + h^3 - 16h^2l - 32l)/[2h(h^2 + 4)]$ ,  $c = (h^4l - h^3 + 8h^2l - 8h + 16l)/[h(h^2 + 4)]$ ,  $d = [2(h^4l - 2h^3 + 8h^2l + 16l)]/[h^2(h^2 + 4)]$ ,  $f = p = r = 0$ ,  $g = [-2(h^2 + 1)]/(h^2 + 4)$ ,  
 $k = -a$ ,  $m = -c - 1$ ,  $n = (3hl)/2$ ,  $q = [-2(2h^4l - h^3 + 10h^2l + 8l)]/[(h^2 + 4)h^2]$ ,  $s = (h^3 + 2h^2l + 8l)/[(h^2 + 4)h]$ ;
- (x)  $c = 2(b - 1)$ ,  $d = -a$ ,  $f = n = p = r = s = 0$ ,  $g = (-1)/2$ ,  $k = -a$ ,  
 $l = -ab$ ,  $m = 1 - 2b$ ,  $q = a/2$ .

Suppose at least one set of the conditions (i)–(x) from Theorem 1 is realized. Then the cubic system (1) has the invariant algebraic curves  $1 - x = 0$ ,  $\Phi = 0$  and an integrating factor of the form (3).

In Case (i) the integrating factor is

$$\mu = \frac{(1 - x)^{2b - c - 1}}{3(x^2 + y^2) + (c - 2b + 2g + 3)x^3 + 6ax^2y + 3(c + 1)xy^2 + 2fy^3}.$$

In Case (ii) the integrating factor looks

$$\mu = \frac{1}{(1 - x)(12u^2(x^2 + y^2) + ((2b + 3c + 3)x + uy)^3)^{4/3}}.$$

In Case (iii) the integrating factor has the form

$$\mu = \frac{1}{(1 - x)((2b - 1)(x^2 + y^2)(x - 2) + 2(9x^2 + y^2)fy)^{4/3}}.$$

In Case (iv) the integrating factor is

$$\mu = \frac{1 - x}{(2(5a + 3f)(x^2 + y^2)(x - 2) - (9x^2 + y^2)y)^{7/3}}.$$

In Case (v) the integrating factor looks

$$\mu = \frac{(1 - x)^{1/2}}{(x^2 + y^2 - x^3)^2}.$$

In Case (vi) the integrating factor has the form

$$\mu = \frac{1-x}{(f(x^2+y^2)+2(a+f)((1-b)x+fy)x^2)^2}.$$

In Case (vii) the integrating factor is

$$\mu = \frac{(1-x)^{1/2}}{(x^2+y^2-xy^2)^2}.$$

In Case (viii) the integrating factor looks

$$\mu = \frac{1}{(1-x)^{1/2}(9uv(x^2+y^2)-x(3aux-u^2x-3vy)^2)^{3/2}}.$$

In Case (ix) the integrating factor has the form

$$\mu = \frac{1}{(1-x)^{1/2}((h^2+4)(x^2+y^2)-x(hx+2y)^2)^{3/2}}.$$

In Case (x) the integrating factor is

$$\mu = \frac{1}{(1-x)^{1/2}(x^2+y^2+(2b-1)xy^2)^{3/2}}.$$

**Teorema 2.** *The origin is a center for cubic differential system (1) with the invariant straight line  $1-x=0$  and the irreducible invariant cubic  $x^2+y^2+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3=0$  if one of the conditions (i)–(x) holds.*

1. Romanovski V.G., Shafer D.S. The center and cyclicity problems: a computational algebra approach. – Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser. – 2009. – 330 p.
2. Cozma D., Matei A. Center conditions for a cubic differential system having an integrating factor // Bukovinian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 8, No. 2. – Pp. 6–13.
3. Cozma D. Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics. – Chișinău: Știință. – 2013. – 240 p.
4. Cozma D. Darboux integrability and rational reversibility in cubic systems with two invariant straight lines // Electronic Journal of Differential Equations. – 2013. – Vol. 2013, No. 23. –Pp. 1–19.
5. Sadovskii A.P., Shcheglova T.V. Solution of the center-focus problem for a nine-parameter cubic system // Differential Equations. – 2011. – Vol. 47, No. 2. – Pp. 208–223.
6. Cozma D. Darboux integrability of a cubic differential system with two parallel invariant straight lines // Carpathian J. Math. – 2022. – Vol. 38, No. 1. –Pp. 129–137.

## **Окремі задачі механіки нафтогазового комплексу України**

*Мойсішин В.М.*

*math@nung.edu.ua*

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Україна*

### *1. Підвищення ефективності роботи шарошкових доліт на основі експериментальних досліджень процесу буріння.*

На основі статистичної обробки результатів стендових досліджень одержано емпіричні залежності механічної швидкості буріння та енергоємності процесу руйнування гірської породи від жорсткості та демпфування бурильного інструменту за різних значень режимних параметрів буріння свердловин шарошковими долотами.

Запропоновано багатофакторні емпіричні моделі механічної швидкості та енергоємності буріння свердловин на основі результатів планованого експерименту. Розроблено методики адаптації результатів експериментальних досліджень до промислових умов поглиблення свердловин шарошковими долотами.

### *2. Оцінка роботоздатності колон бурильних та гнучких труб*

Розвинуто наукові основи комплексного оцінювання роботоздатності тривало експлуатованих колон бурильних та гнучких труб шляхом удосконалення інженерних методів розрахунку динамічного режиму їх роботи та визначення залишкової довговічності труб з наявними експлуатаційними дефектами (разом з О.Ю. Витязем, В.В. Тирличем).

Розроблено математичні моделі роботи бурильних колон, що містять експлуатаційні дефекти, під дією поздовжніх та поздовжньо-крутильних коливань. На основі розроблених моделей досліджено напружено-деформований стан бурильної колони та вплив на нього харктеристик віброзахисних пристройів. Встановлено, що внесок динамічної складової в загальний коефіцієнт інтенсивності напружень коливається в межах від 10 до 25% і залежить від умов роботи бурильної колони.

Проведено експериментально-розрахункову оцінку критичних розмірів тріщин певної геометрії (кільцевої наскрізної, зовнішньої та внутрішньої поперечних кільцевих) для бурильних труб груп міцності Л, Г-105, S-135 за умови впливу динамічних навантажень під час проведення спуско-підйимальних операцій.

### *3. Моделювання динамічних процесів ліквідації прихоплень бурильного інструменту*

Удосконалено техніку і технології механічних способів ліквідації прихоплень бурильного інструмента, що базуються на використанні енер-

гії, яка накопичується в бурильній колоні внаслідок дії удару або вібрації. Створено математичні моделі динаміки ліквідації прихоплень бурильного інструмента механічними способами у вертикальних та похилоскерованих свердловин. Запропоновано (разом з К.Г.Левчук) новий спосіб фрикційних автоколивань для ліквідації прихоплень бурильного інструмента при бурінні свердловин.

Розроблено програмний комплекс для проведення досліджень динамічних процесів вивільнення прихопленого бурильного інструмента способом фрикційних автоколивань, ударним та вібраційним способами.

#### *4. Проведення спрямованих свердловин великого діаметра*

Запропоновано (разом з І.В. Воєвідком та В.В. Токаруком) нову методику проектування траєкторії свердловини великого діаметра, для проведення якої використовуються два породоруйнівні інструменти (долото і розширювач).

Для вимірювання величини ексцентриситету на розширювачі розроблено пристрій у вигляді перехідника, який дозволяє визначати величину і напрям ексцентричного зміщення розширювача відносно пілотного стовбура і зенітний кут свердловини в площині формування ексцентриситету.

#### *5. Динаміка бурильного інструмента при поглибленні свердловин на морі з плавучих засобів*

Вивчено динаміку роботи бурової системи, що проводить поглиблення свердловини в умовах глибокого моря за нерегулярного хвилювання моря і дії морських течій.

Побудовано (разом з О.О. Слабим) імітаційну модель в мові моделювання Modelica системи, що включає нерегулярне хвилювання моря і морської течії, бурове судно, натяжну систему водовіддільної колони, водо-віддільну колону, компенсатор вертикальних переміщень бурильної колони, бурильну колону, наддолотний амортизатор, породоруйнівний інструмент та породу на вибої. Для цього здійснено декомпозицію дослідженії системи, розроблено її структурну схему, підібрано математичні моделі її структурних елементів, розроблено уточнену модель поздовжньо-поперечних коливань водовіддільної колони і математичну модель поздовжніх коливань бурильної колони, що дає змогу в першому наближенні враховувати вплив деформації водовіддільної колони на поздовжні коливання бурильної колони.

1. Стійкість і коливання бурильної колони: монографія / В.М. Мойсишин, Б.Д. Борисевич, Ю.Л. Гавrilів, С.А. Зінченко. – Івано-Франківськ: Лілея-НВ, 2013. – 590 с.

2. Construction of mathematical models of integral indexes of the boring drilling on the basis of analysis of dimensions / V. M. Moisyshyn, B. D. Borysevych, O. Ju. Vytyaz, Yu. L. Gavryliv // 25th scientific and technical conference "Drilling-Oil-Gas AFH 2014": abstract book. (Krakow, 11-13 June, 2014). – Krakow, 2014. – P. 43.
3. Predicting remaining lifetime of drill pipes basing upon the fatigue crack kinetics within a precritical period / V. Tyrlych, V. Moisyshyn // Mining of Mineral Deposits. Vol. 13 (2019). Iss. 3. p.p. 127-133.
4. Investigation on Releasing of a stuck Drill string by Means of a Mechanical Jar / V. Moisyshyn, K. Levchuk // Oil & Gas Science and Technology. 2017. Vol. 72. Iss. 5. Article Number 27(8p.).
5. The impact of vibration mechanism' installation place on the process of retrieving stuck drill pipe / V. Moisyshyn, K. Levchuk. – Mining of Mineral Deposits. 2016. Vol. 10. Iss. 3. p.p. 65-76.
6. Дослідження процесу звільнення прихоплення бурильної колони ударним способом / В.М. Мойсишин, К.Г. Левчук // Вібрації у техніці та технологіях. – Вінниця, 2015. – № 4. – С. 84-93.
7. Design of bottom hole assemblies with two rock cutting tools for drilling wells of large diameter / Moisyshyn, V., Voyevidko, I., Tokaruk, V. // Mining of Mineral Deposits, 2020. Vol. 14. Iss. 3. pp. 128-133.
8. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір №88606. Комп'ютерна програма «Бібліотека моделювання «Offshore Drill»» / О.О. Слабий, В.М. Мойсишин. Дата реєстрації 15.05.2019.
9. Створення віброзахисного пристрою для регулювання динаміки колони сталевих бурильних труб і долота / В.М. Мойсишин, О.О. Слабий // Металофізика і новітні технології. – 2018. – Т. 40, №4. – С. 541-550.

# Mathematical model of filtration in the media of multidimensional nanoporous particles

M. Petryk, I. Boyko, O. Petryk, V. Kovbashyn

mykhaylo\_petryk@tntu.edu.ua

Ternopil Ivan Pulyu National Technical University, 46001 Ternopil, Ruska,  
56, Ukraine

Mathematical models of two-level transport "filtration-consolidation" in the system "interparticle space - nanoporous particles" are considered, which take into account, along with the flow of liquid in the skeleton, the internal flow of liquid from particles) [1, 2].

We consider the nanoporous particles containing liquid as a porous layer subjected to unidimensional pressing (Fig. 1). The liquid flowing occurs inside the particles, outside the nanoporous particles and between these two spaces. The nanoporous particles are separated by the porous network. The layer of particles is considered as a double-porosity media. Fig. 1 illustrates two levels of the considered elementary volume: level 1(a)) for the system of macropores in interparticle spaces and level 2 (b and c)) for the system of nanopores in intraparticle spaces, which includes two subspaces of particles of different sizes: intraparticle spaces1 - subspace of nanoporous particles with a radius of at least  $R_1$  and intraparticle spaces2 - a subspace of nanoporous particles with a radius of at least  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ).

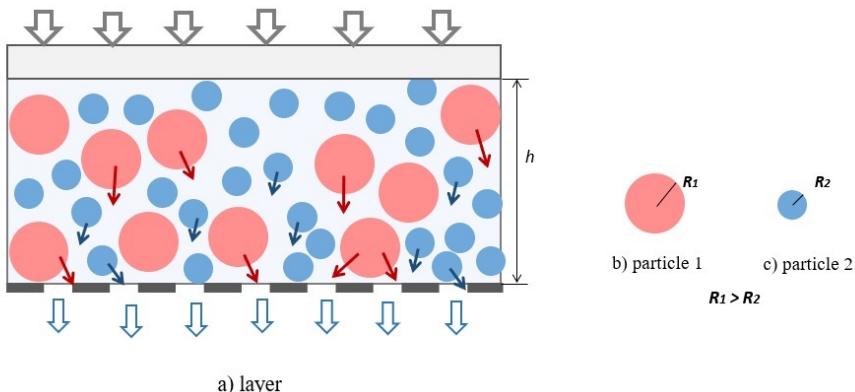


Fig. 1. Schematization of mass transfer in a two-level system of pores

The mathematical model of the considered transfer, taking into account the specified physical factors, can be described in the form of the following system of boundary value problems for partial differential equations:

**Problem A:** to find a limited solution of the consolidation equation for a layer of nanoporous particles media in the domain  $D_1 = \{(t, z) : t > 0, 0 <$

$z < h\}$ :

$$\frac{\partial P_1(t, z)}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} - \beta_1 \frac{\varepsilon}{R_1} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_1} P_2(t, x, z) dx - \beta_2 \frac{1-\varepsilon}{R_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_2} P_3(t, x, z) dx \quad (1)$$

with the initial condition:

$$P_1(t, z)|_{t=0} = P_E, \quad (2)$$

the boundary conditions (for variable  $z$ )

$$P_1(t, z)|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial P_1}{\partial z}|_{z=h} = 0 \quad (\text{impermeability condition}); \quad (3)$$

**Problems B<sub>1,2</sub>:** to find the limited solutions of the consolidation equations for the nanoporous partiles (radius  $R_i$ ) in the domains:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = b_i \frac{\partial^2 P_i}{\partial x_i^2}, \quad i = \overline{1, 2} \quad (4)$$

with the initial conditions:

$$P_i|_{t=0} = P_E(z), \quad i = \overline{1, 2} \quad (5)$$

the boundary conditions (for radial variable  $x$ ):

$$\frac{\partial P_i}{\partial x}|_{x=0} = 0; \quad P_i(t, x, z)|_{x=R_i} = P_1(t, z). \quad (6)$$

### Nomenclature:

$P_1$  - liquid pressure in interparticle space,  $P_2, P_3$  - liquid pressure in intraparticle space1 and intraparticle space2 (interier of spherical particles 1 and 2) in accordance,  $b_1$  - is a consolidation coefficient in interparticle space,  $b_2, b_3$  - consolidation coefficients in intraparticle space1 and intraparticle space2,  $\beta_1, \beta_2$  - is the elasticity factor of the particles 1 and 2 in accordance,  $h$  - is layer thickness,  $R_1, R_2$  - radius of particles 1 and 2.

**The analytical solution of the model:** pressure profiles in interparticle spaces and *intraparticle spaces1* and *intraparticle spaces2*. The analytical solution of the problem is found using the operational Heaviside's method, Laplace integral and Fourier integral transformations. Applying the finite integral Fourier transform (cos) [3, 4]: we obtain the solutions of the problems  $B_1, B_2$ :

$$P_2(t, x, z) = P_E(z) \frac{2}{R_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1}}{\eta_{m_1}} e^{-b_2 \eta_{m_1}^2 t} \cos \eta_{m_1} x +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{R_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} (-1)^{m_1} b_2 \eta_{m_1} \int_0^t e^{-b_2 \eta_{m_1}^2 (t-\tau)} P_1(\tau, z) dz \cos \eta_{m_1} x \\
P_3(t, x, z) & = P_E(z) \frac{2}{R_2} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_2}}{\eta_{m_2}} e^{-b_3 \eta_{m_2}^2 t} \cos \eta_{m_2} x + \\
& + \frac{2}{R_2} \sum_{m_2=0}^{\infty} (-1)^{m_2} b_3 \eta_{m_2} \int_0^t e^{-b_3 \eta_{m_2}^2 (t-\tau)} P_1(\tau, z) dz \cos \eta_{m_2} x
\end{aligned} \quad (7)$$

Substituting the expressions (7) into the consolidation equation (1), after a series of transformations and successive application to the problem (1)-(3) of the integral Laplace transform [3] and the finite integral Fourier transform [4, 5], we obtain

$$\begin{aligned}
P_{1n}^*(s) & = \left( b_1 \lambda^n + s + \beta_1 \varepsilon \frac{\sqrt{b_2}}{R_1} \sqrt{s} \cdot th \left( \sqrt{\frac{s}{b_2}} R_1 \right) + \beta_2 (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{b_3}}{R_2} \sqrt{s} \cdot th \left( \sqrt{\frac{s}{b_3}} R_2 \right) \right)^{-1} \cdot \\
& \cdot \left( 2 + \frac{\beta_1 \varepsilon}{R_1} \sqrt{\frac{b_2}{s}} th \left( \sqrt{\frac{s}{b_2}} R_1 \right) + \frac{\beta_2 (1 - \varepsilon)}{R_2} \sqrt{\frac{b_3}{s}} th \left( \sqrt{\frac{s}{b_3}} R_2 \right) \right) P_E \frac{1}{\lambda_n}
\end{aligned} \quad (8)$$

Applying the integral operator of the inverse integral Laplace transformation to expression (8) and using the Heaviside theorem on the root expansion of the denominator of Laplace-images expressions of and performing the inverse Fourier integral transition on the variables  $z$ , we finally obtain an analytical expression for pressure distributions in the *interparticle space* [3, 5]:

$$\begin{aligned}
P_1(t, z) & = P_E \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu_{jn}^2 t}}{\Phi(\nu_{jn})} \left[ 1 - \beta_1 \varepsilon \frac{2}{R_1^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-b_2 \left( \eta_k^2 - \frac{\nu_{jn}^2}{b_2} \right) t}}{\left( \eta_k^2 - \frac{\nu_{jn}^2}{b_2} \right)} - \right. \\
& \left. - \beta_2 (1 - \varepsilon) \frac{2}{R_2^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-b_3 \left( \mu_k^2 - \frac{\nu_{jn}^2}{b_3} \right) t}}{\left( \mu_k^2 - \frac{\nu_{jn}^2}{b_3} \right)} \right] \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n},
\end{aligned} \quad (9)$$

where  $\nu_{jn}$ ,  $j = \overline{1, \infty}$ ;  $n = \overline{0, \infty}$  - the roots of transcendental equation (10).

$$\nu^2 - b_1 \lambda_n^2 - \beta_1 \varepsilon \nu \frac{\sqrt{b_2}}{R_1} tg \left( \frac{\nu R_1}{\sqrt{b_2}} \right) - \beta_2 (1 - \varepsilon) \nu \frac{\sqrt{b_3}}{R_2} tg \left( \frac{\nu R_2}{\sqrt{b_3}} \right) = 0, \quad (10)$$

here

$$\Phi(\nu_{jn}) = 1 + \beta_1 \varepsilon \frac{\sqrt{b_2}}{2R_1} \left( \frac{1}{\nu_{jn}} tg \left( \nu_{jn} \frac{R_1}{\sqrt{b_2}} \right) + \frac{R_1}{\sqrt{b_2}} \frac{1}{\cos^2 \left( \nu_{jn} \frac{R_1}{\sqrt{b_2}} \right)} \right) +$$

$$+\beta_2(1-\varepsilon)\frac{\sqrt{b_3}}{2R_2}\left(\frac{1}{\nu_{jn}}tg\left(\nu_{jn}\frac{R_2}{\sqrt{b_3}}\right)+\frac{R_2}{\sqrt{b_3}}\frac{1}{\cos^2\left(\nu_{jn}\frac{R_2}{\sqrt{b_3}}\right)}\right),$$

$\eta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2R_1}$ ,  $k = \overline{0, \infty}$  - are the roots of equation  $ch\left(\sqrt{\frac{s}{b_2}}R_1\right) = 0$ , ( $s = i\eta$ ,  $i$  - imaginary unit),

$\mu_k = \frac{(2k+1)\pi}{2R_2}$ ,  $k = \overline{0, \infty}$  - are the roots of equation  $ch\left(\sqrt{\frac{s}{b_3}}R_2\right) = 0$ , ( $s = i\mu$ )

$\lambda_n = \frac{2n+1}{2h}\pi$  - are the spectral numbers of integral Fourier transformation (Sin-Fourier).

Substituting into formulas (7) the analytical expression of pressure distributions in the *interparticle space*  $P_1(t, z)$ , calculated according to (9), we obtain the final expressions for determining the time-space distributions of pressures  $P_2(t, x, z)$  and  $P_3(t, x, z)$  in the spaces of nanoporous particles: *intraparticle spase2* and *intraparticle spase3* in accordance.

1. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V. Theory of fluid flows through natural rocks. Dordrecht: Kluwer. 1990.
2. Petryk M., Vorobiev E. Numerical and Analytical Modelling of Solid-Liquid Expression from Soft Plant Materials. AIChE J. Wiley USA. – Vol. 59, Issue 12. – P. 4762-4771.
3. Doetsch G. Handbuch der Laplace-Transformation: Band I: Theorie der Laplace-Transformation. Springer Basel AG. – 2013.
4. Lenyuk M.P., Petryk M.R. Integral Fourier, Bessel transforms with spectral parameters in problems of mathematical modeling of mass transfer in heterogeneous media. Kyiv: Naukova dumka. – 2000. – P. 372.
5. Petryk M., Gancarczyk T., Khimich O. Methods of Mathematical Modeling and Identification of Complex Processes and Systems on the basis of High-performance Calculations (neuro- and nanoporous feedback cyber systems, models with sparse structure data, parallel computations). Scientific Publishing University of Bielsko-Biala. Bielsko-Biala, Poland). – 2021. – P. 194.

**Функції зі структурними і метричними фрактальними  
властивостями, пов'язані з двосимвольними системами  
кодування чисел**

Микола Працьовитий<sup>1</sup>, Яніна Гончаренко<sup>2</sup>, Юлія Маслова<sup>3</sup>

prats4444@gmail.com, goncharenko.ya.v@gmail.com,  
julia0609mas@gmail.com

*НПУ імені М.П. Драгоманова<sup>1,2,3</sup>, Інститут математики НАН  
України<sup>1</sup>,*

Існують різні моделі дійсного числа (дедекіндів переріз у множині раціональних чисел, фундаментальна послідовність у множині раціональних чисел,  $s$ -ковий ряд та ін.), тобто дійсне число має різні форми існування та ефективного використання в математиці та її застосуваннях. Форму дійсному числу надає система числення (зображення, кодування).

Під системою кодування чисел ми розуміємо сукупність засобів для

- 1) представлення (подання числа математичним виразом),
- 2) зображення (кодування, скороченого, формального запису),
- 3) найменування чисел, їх ідентифікації та порівняння,
- 4) побудови основ арифметики (правил виконання арифметичних дій).

Засобів для кодування чисел існує багато. Деякі з них ми називаємо аналітичними. Це ті, які отримуються за допомогою розкладів чисел у математичні вирази (ряди, ланцюгові дроби, нескінченні добутки тощо).

Двосимвольні системи кодування чисел традиційно використовують двосимвольний алфавіт (набір цифр)  $A = \{0, 1\}$  і  $L = A \times A \times \dots$  — простір послідовностей елементів алфавіту (нулев та одиниць).

*Кодуванням (зображенням)* чисел множини  $D$  засобами алфавіту  $A$  називається відповідність  $\varphi$  між  $D$  і  $L$ , при якій кожному числу  $x \in D$  відповідає принаймі один елемент множини  $L$ . Іншими словами, кодуванням чисел множини  $D$  засобами алфавіту  $A$  називається сюр'єктивне відображення  $\varphi : L \rightarrow D$ , а саме  $L \ni (\alpha_n) \xrightarrow{\varphi} x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\varphi} \in D$ . При цьому множина  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_i = c_i, i = m\}$  називається *циліндром рангу  $m$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$*  у просторі  $L$ .

*Образ*  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{\varphi} = \varphi(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L)$  циліндра  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L$  при відображення  $\varphi$  називається *циліндром рангу  $m$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$*  у множині  $D$ .

Сама послідовність  $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in L$ , яка відповідає числу  $x$ , називається його  $\varphi$ -зображенням (або  $\varphi$ -кодом), а  $\alpha_n$  —  $n$ -ою *цифрою* цього зображення і символічно записується  $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{\varphi}$ .

Якщо кожен циліндр є проміжком, то кодування називається *неперевним*. Кажуть, що зображення має *нульову надлишковість*, якщо кожне число має не більше, ніж два зображення, причому множина чисел, що мають два зображення є не більш, ніж зліченна, та *екстронульову надлишковість*, якщо кожне число має єдине зображення.

Найпоширенішими прикладами двосимвольних кодувань є:

- 1) класичне двійкове:  $[0; 1] \ni x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2, \alpha_n \in \{0, 1\}$ ;
- 2) нега-двійкове зображення:  $[0; 1] \ni x = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{(-2)^n} = \Delta_{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \dots}^{-2}$
- 3)  $Q_2$ -зображення:  $[0; 1] \ni x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}, \alpha_n \in \{0, 1\}, 0 < q_0 < 1, q_1 = 1 - q_0, \beta_{i-1} = iq_{1-i}$ .

4) **зображення чисел ланцюзовими  $A_2$ -дробами.** Нехай  $A_2 = \{e_0, e_1\}$  — алфавіт, де  $e_0, e_1$  — додатні дійсні числа, причому  $e_0 < e_1, e_0 \cdot e_1 = \frac{1}{2}$ ,  $L_{A_2}$  — множина всіх дійсних чисел, які представляються нескінченим ланцюзовим дробом

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}} \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] \equiv \Delta_{l_1 l_2 \dots l_k \dots}^A, a_n \in A_2,$$

$l_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_k = e_0, \\ 1, & \text{якщо } a_k = e_1, \end{cases}$  (вони називаються *ланцюзовими  $A_2$ -дробами*.)

5)  **$G_2$ -зображення чисел.** Нехай  $g_0 = q_0, g_1 = g_0 - 1, \delta_0 = 0, \delta_1 = g_0$ .

**Теорема 1.** Для будь-якого  $x \in [0; g_0]$  існує  $(\alpha_n) \in L$  така, що:

$$x = \delta_{\alpha_1} + \prod_{k=2}^{\infty} \left( \delta_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i} \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{G_2}. \quad (1)$$

Зображення числа рядом (1) називається його  $G_2$ -представленням, а символічний запис  $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{G_2}$  — його  $G_2$ -зображення.  $G_2$ -зображення є неперервним кодуванням чисел відрізка  $[0; g_0]$ , яке має нульову надлишковість і неперервний оператор лівостороннього зсуву цифр.

Нехай  $\varphi \in \{Q_2, G_2, A_2\}$ . Для кожного  $\varphi$ -кодування чисел існує зліченна, всюди щільна множина чисел, які мають два зображення ( $\varphi$ -бінарні числа):  $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1(0)}^{Q_2} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0(1)}^{Q_2}, \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 01(0)}^{G_2} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 11(0)}^{G_2}, \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 0(01)}^{A_2} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} 1(10)}^{A_2}$ , решта чисел мають єдине  $\varphi$ -зображення ( $\varphi$ -унарні числа).

**Інверсором  $\varphi$ -зображення чисел** називається функція  $I$ , означена рівністю

$$I(x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{\varphi}) = \Delta_{[1-\alpha_1] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{\varphi}. \quad (2)$$

Не для всіх  $\varphi$ -кодувань рівність (2) є коректним означенням функції. Для класичного двійкового зображення  $I(x) = 1 - x$ .

**Теорема 2.** Інверсори  $Q_2$ -зображення ( $q_0 \neq \frac{1}{2}$ ) та  $A_2$ -зображення чисел є коректно означеними неперервними, строго спадними, сингулярними функціями, які мають автомодельні графіки.

Доведення цього факту ґрунтуються на нормальних властивостях чисел в термінах їх зображень.

**Інверсор  $G_2$ -зображення чисел.** Це функція  $I$ , яка після домовленостей використовувати лише одне з зображень  $G$ -бінарного числа є коректно означеню на  $[0; g_0]$  рівністю:  $I(x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{G_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{G_2}$

Далі  $g_0 = \frac{1}{2}$ . У цьому випадку зображення називається  $G$ -зображення, його зв'язок з класичним двійковим зображенням розкриває наступне твердження.

**Теорема 3.** Для довільної послідовності  $(\alpha_n) \in L$  виконується рівність:

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^G = \Delta_{0 a_1 a_2 \dots a_n \dots}^2,$$

$$a_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha_1 = 0, \\ 1 & \text{при } \alpha_1 = 1, \end{cases} \quad a_{n+1} = \begin{cases} \alpha_{n+1} & \text{при } \alpha_1 + \dots + \alpha_n - \text{парне}, \\ 1 - \alpha_{n+1} & \text{при } \alpha_1 + \dots + \alpha_n - \text{непарне}. \end{cases}$$

Найпростіші властивості функції  $y = I(x)$ :

$$1) \min I(x) = I(\Delta_{(1)}^G) = 0; \quad \max I(x) = I(\Delta_{0(1)}^G) = \Delta_{1(0)}^G = \frac{1}{2};$$

$$2) I\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I(x), \quad I\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}I(x);$$

$$3) I\left(\Delta_{c_1 \dots c_m 10(1)}^G\right) = I\left(\Delta_{c_1 \dots c_m 00(1)}^G\right).$$

4) Рівняння  $I(x) = x$  розв'язків немає.

Функція  $I$  кожне своє  $G$ -унарне значення набуває лише один раз, а кожне  $G$ -унарне значення у двох різних точках:

$$\Delta_{1-c_1, \dots, 1-c_m 01(0)}^G = f\left(\Delta_{c_1 \dots c_m 10(1)}^G\right) = f(\Delta_{c_1 \dots c_m 00(1)}^G).$$

$G$ -унарні рівні функції  $I$  одноточкові,  $G$ -бінарні рівні — двоточкові.

**Лема 1.** Множина  $E_I$  значень функції  $I$  є відрізком  $[0; 0,5]$  без чисел виду  $\Delta_{a_1 \dots a_m 00(1)}^G$ .

**Теорема 4.** Інверсор  $G$ -зображення чисел є неперервною функцією в кожній  $G$ -унарній точці, а в  $G$ -бінарній точці  $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_m 01(0)}^G$  — неперервною зліва, якщо число  $\tau = t - (c_1 + \dots + c_m)$  є числом парним, і неперервною справа, якщо  $\tau$  — число непарне. Стрибок функції у кожній  $G$ -бінарній точці  $t$ -ого рангу обчислюється за формулою:  $\rho = 3^{-1} \cdot 2^{-m}$ . Сума стрибків у всіх  $G$ -бінарних точках  $t$ -ого рангу дорівнює  $3^{-1}$ .

**Теорема 5.** Інверсор  $I$  є ніде не монотонною, неперервною функцією на множині  $G$ -унарних точок, яка має необмежену варіацію.

**Зауваження.** Теорема виражає специфічну властивість  $G$ -зображення чисел, оскільки для двійкового зображення,  $Q_2$ -зображення,  $Q_2^*$ -зображення, ланцюгового  $A_2$ -зображення інверсор є функцією неперевною і строго спадною на всій області визначення [2, 5].

**Теорема 6.** Якщо  $g_0 = \frac{1}{2}$ , то графік  $\Gamma$  функції  $I$  є самоподібною множиною простору  $R^2$  з розмірністю 1 і структурою самоподібності:

$$\Gamma = \gamma_0(\Gamma) \cup \gamma_1(\Gamma), \quad \text{де } \gamma_0 : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y; \end{cases} \quad \gamma_1 : \begin{cases} x' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

$$\text{При цьому } \int_0^{\frac{1}{2}} I(x)dx = \frac{1}{8}.$$

У доповіді будуть висвітлені структурні, варіаційні, тополого-метричні, інтегро-диференціальні та фрактальні властивості довільного інверсора  $G_2$ -зображення чисел і здійснено порівняльний аналіз з іншими інверсарами.

У доповіді будуть фігурувати також спеціальні функції, пов'язані з операторами лівостороннього та правостороннього зсувів цифр  $G_2$ -зображення чисел.

Зауважимо, що  $G$ -зображення чисел легко поширити на всі числа відрізка  $[0; 1]$  шляхом

$$\frac{\alpha_0}{2} + \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^G = \Delta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^G, \text{ де } \alpha \in \{0, 1\}.$$

1. Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Prats'ovytyi M. V.  $A_2$ -continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541–555.
2. Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Dyvliah N.V., Ratushniak S.P. Inversor of digits of  $Q_2^*$ -representative // Mat. Stud. 55 (2021), P.37–43.
3. Pratsiovytyi M. V., Lysenko I. M., Maslova Yu. P. Group of continuous transformations of real interval preserving tails of  $G_2$ -representation of numbers// Algebra and Discrete Mathematics, Volume 29(2020). Number 1. pp. 99 – 108.
4. Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Двоосновна система числення з різновзнаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані. Зб. праць. Ін-ту математики НАН України. 2019. Т. 16, № 2. С. 50–62.
5. Працьовитий М. В., Скрипник С. В.  $Q_2$ -зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. — 15. — С. 134–143.

# **Застосування рівнянь із запізненнями до розв'язання задач небесної механіки з урахуванням швидкості гравітації**

*Василь Слюсарчук*

v.e.slyusarchuk@gmail.com

*Національний університет водного господарства та природокористування*

Досліджено системи диференціальних рівнянь із запізненнями й обмеженнями на запізнення та похідні розв'язків, що описують динаміку небесних тіл зі скінченною швидкістю гравітації [1-3]. Показано некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спричинені скінченністю швидкості гравітації [2]. Досліджено рівняння в гільбертовому просторі, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи, ізоморфної однопараметричній групі унітарних операторів [4]. Наведено застосування отриманих результатів до нелінійної механіки з урахуванням скінченності швидкості гравітації, досліджено динаміку трьох тіл, розміщених на прямій, у випадку, коли маси зовнішніх тіл і їх відстані до центрального тіла є одинаковими [5], та динаміку двох тіл із траєкторіями на нерухомій прямій [6]. Показано, що рух цих тіл є нестійким і друга космічна швидкість більша відповідної швидкості класичної небесної механіки [5,6]. З'ясовано вплив скінченності швидкості гравітації на коливання поверхні Землі [7].

1. Слюсарчук В. Ю. Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації // Нелін. коливання. – 2018. – **21**, № 2. – С. 238-261.
2. Слюсарчук В. Ю. Некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спричинені скінченністю швидкості гравітації // Нелін. коливання. – 2018. – **21**, № 3. – С. 397-419.
3. Слюсарчук В. Ю. Дослідження систем диференціальних рівнянь із запізненнями й обмеженнями на запізнення та похідні розв'язків // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 5. – С. 677-691.
4. Слюсарчук В. Ю. Рівняння в гільбертовому просторі, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи, ізоморфної однопараметричній групі унітарних операторів // Укр. мат. журн. – 2020. – **72**, № 1. – С. 86-99.
5. Слюсарчук В. Ю. Динаміка трьох тіл, розміщених на прямій, з урахуванням скінченності швидкості гравітації // Нелін. коливання. – 2020. – **23**, № 4. – С. 529-552.
6. Слюсарчук В. Ю. Динаміка двох тіл із траєкторіями на нерухомій прямій з урахуванням скінченності швидкості гравітації // Нелін. коливання. – 2021. – **24**, № 2. – С. 249-277.
7. Слюсарчук В. Ю. Коливання поверхні Землі, спричинені її обертанням, рухом навколо Сонця та скінченною швидкістю гравітації // Нелін. коливання. – 2021. – **24**, № 4. – С. 535-559.

## Стохастичне бідоменне рівняння. Модель серцевого дефібрилятора

*Олександр Станюсіцький, Ірина Шестак, Зоя Халецька, Наталія Денисенко*

*ostanzh@gmail.com, irinasesstak27.12@gmail.com,  
khaletskazoya@gmail.com, nldenisenko@gmail.com*

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київська міська клінічна лікарня № 7, Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Україна*

Вивчається стохастична математична модель роботи серцевого дефібрилятора

$$du = (-Au - f(u, w) + s)dt + dW(t, x), \frac{\partial w}{\partial t} + g(u, w) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$u(0) = u_0, w(0) = w_0$ , де  $u := u_i - u_e$ .

Тут  $u_i$  та  $u_e$  відповідні електричні потенціали серцевого м'яза і дефібрилятора. Із ними пов'язані два еліптичні оператори:

$A_i u := -\operatorname{div}(\sigma_i \nabla u)$ ,  $A_e u := -\operatorname{div}(\sigma_e \nabla u)$ , а  $\sigma_i(x)$  і  $\sigma_e(x)$  - матриці пропорційності у внутрішніх та зовнішніх областях. Вважається, що вони задовільняють умову рівномірної еліптичності в обмеженій області  $G \subset \mathbb{R}^3$ . Нелокальний оператор  $A := A_i(A_i + A_e)^{-1}A_e$  називається бідоменным оператором. Функції  $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не лінійності, що представляють трансмембральні іонні струми. Функція  $s = s(x)$  - зовнішня сила.  $W(t, x)$ - нескінченновимірний  $Q$ -вінерові процес

$$W(t, x) := \sum_{i=1}^{\infty} j_i \psi_i(x) w_i(t), \sum_{i=1}^{\infty} j_i^2 < \infty$$

де  $W_i(t)$  - незалежні стандартні вінеровські процеси,  $\psi_i(x)$  - власні функції оператора  $A$ . Гільбертів простір  $H = L^2(G)$ ,  $D(A) = \{u \in H^2(G), \int_G (udx) = 0, \nabla \cdot v = 0 \text{ на } \partial G\}$ . Відомо, що даний оператор є генератором аналітичної напівгрупи в  $L^p(G)$  і  $L^\infty(G)$ ,  $p \geq 1$ . Ми розглядаємо чотири види не лінійностей:

1. Фітц-Хью-Нагумо модель:

$$f(u, w) = \frac{1}{\varepsilon} [u(u-a)(u-1)+w], g(u, w) = bw-cu, a \in (0, 1), b > 0, c > 0, \varepsilon > 0;$$

2. Алієва Панфілова модель:

$$f(u, w) = \frac{1}{\varepsilon} [ku(u-a)(u-1) + wu], g(u, w) = ku(u-1-a) + w;$$

3. Рогерса-Маккулона модель:

$$f(u, w) = \frac{1}{\varepsilon} [\sigma u(u-a)(u-1) + uw], g(u, w) = -cu + dw;$$

4. Алена-Кана модель:  $f(u) = u - u^3, g(u, w) \equiv 0$ .

Вивчається існування слабких та сильних розв'язків даного рівняння у сенсі наступних означень.

**Означення 1.** Випадковий процес  $(u, w) \in H^1(G) \times L^2(G)$  називається слабким розв'язком рівняння (1), якщо для  $t \geq 0$  виконується наступне співвідношення:

$$(u(t), v) = (u_0, v) - \int_0^t [ < Au, v > + \int_G (fv dx) - (s, v) ] d\tau + (v, W(t))$$

для довільної функції  $v \in H^1(G)$  і

$$(w(t), v) = (w_0, v) - \int_0^t (g(u, w), v) d\tau.$$

для довільної функції  $v \in L^2(G)$ . Встановлено існування, а у випадку нелінійностей 1), 4) і єдиність слабкого розв'язку.

**Означення 2.** Випадковий процес  $(u, w) \in D(A) \times L^2$  називається сильним розв'язком рівняння (1), якщо при  $t \geq 0$  виконується співвідношення:

$$u(t) = u(0) - \int_0^t [Au(\tau) + f(u(\tau), w(\tau)) - s(\tau)] d\tau + W(t),$$

і

$$w(t) = w(0) - \int_0^t (g(u(\tau), w(\tau))) d\tau.$$

Доведено існування локального сильного розв'язку. Досліджена поведінка розв'язків рівняння (1) при  $t \rightarrow \infty$ . Зокрема, встановлено існування та єдиність інваріантної міри.

# Approximation schemes for differential functional equations and their applications

*Igor Cherevko*

*i.cherevko@chnu.edu.ua*

*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University*

In mathematical modeling of physical and technical processes, the evolution of which depends on prehistory, we arrive at differential equations with a delay. With the help of such equations it was possible to identify and describe new effects and phenomena in physics, biology, technology [1]. An important task for differential-functional equations is to construct and substantiate finding approximate solutions, since there are currently no universal methods for finding their precise solutions. Of particular interest are studies that allow the use of methods of the theory of ordinary differential equations for the analysis of delay differential equations.

Schemes for approximating differential-difference equations by special schemes of ordinary differential equations are proposed in the works [2,3]. Further research was found in I. M. Cherevko, L. A. Pidubna, O. V. Matwiy's works [4,5] in various functional spaces. Consider the Cauchy problem for a delayed differential equation

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (2)$$

where  $x \in R^n$ ,  $\tau > 0$ ,  $t_0 \in R$ ,  $F(t, u, v)$  is a continuous function.

Equation (1) corresponds to an approximating system of ordinary differential equations

$$\frac{dt_0}{dt} = F(t, z_o, z_m), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_j}{dt} &= \frac{m}{\tau}(t_{j-1}(t) - z_j(t)), j = \overline{1, m}, \\ z_j(t_0) &= \varphi(t_0 - \frac{j\tau}{m}), j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (4)$$

**Teorema 1.** [2,4] If the solution of problem (1)–(2) satisfies the Lipschitz condition on  $[t_0 - \tau, T]$ , then  $|x(t - \frac{j\tau}{m}) - z_j(t)| \leq \frac{K\tau}{\sqrt{m}}$ ,  $t_0 \in [t_0, T]$ ,  $K > 0$ .

If the solution of the problem (1)-(2)  $x(t) \in C[t_0, T]$ , then  $|x(t - \frac{j\tau}{m}) - z_j(t)| \leq \beta(\omega(x, \frac{\tau}{m}))$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $t \in [t_0, T]$ , where  $\beta(\delta) \rightarrow 0$  at  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\omega(x, \frac{\tau}{m})$  – the continuity modulus of the function  $x(t)$  on  $[t_0 - \tau, T]$ .

Note that according to Cantor's theorem on uniform continuity  $\omega(x, \frac{\tau}{m}) \rightarrow 0$  when  $m \rightarrow 0$ . Therefore, for large  $m$  the solution of the Cauchy problem

for the system of ordinary differential equations (3) - (4) approximates the solution of the initial problem for the delay equation (1) - (2).

The study of approximation of linear stationary systems with a delay allowed us to construct algorithms for approximate detection of nonasymptotic roots of quasi-polynomials. Using these algorithms, a method for modelling the stability of solutions of linear systems with a delay is developed, as well as constructive computational algorithms for constructing coefficient regions of stability of linear systems with many delays [5-6].

Consider the initial problem for a linear system of differential-difference equations

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^k B_i x(t - \tau_i), \quad (5)$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0], \quad (6)$$

where  $A, B_i, j = \overline{1, k}$  fixed  $n \times n$  matrix  $x \in R^n, 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = \tau, \varphi \in C[-\tau, 0]$ .

Let us correspond to the initial problem (5) - (6) the system of ordinary differential equations

$$\begin{aligned} \frac{dz_0}{dt} &= A(t)z_0(t) + \sum_{i=1}^k B_i z_{l_i}(t), l_i = \frac{\tau_i m}{\tau}, \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \mu(z_j - 1(t) - z_j(t)), j = \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau}, m \in N, \end{aligned} \quad (7)$$

with initial conditions

$$z_j(0) = \varphi(-\frac{\tau j}{m}), j = \overline{0, m}. \quad (8)$$

**Teorema 2.** [5] *If the zero solution of the system with delay (5) is exponentially stable (not stable), then there is  $m_0 > 0$  such that for all  $m > m_0$ , the zero solution of the approximating system (7) is also exponentially stable (not stable).*

*If for all  $m > m_0$  the zero solution of the approximation system (7) is exponentially stable (not stable) then the zero solution of the system with a delay (5) is exponentially stable (not stable).*

It follows from Theorem 2 that the asymptotic stability or instability of the solutions of the delayed linear equations and the corresponding approximating system of ordinary differential equations for sufficiently large values of  $m$  are equivalent.

The obtained algorithms for finding non-asymptotic quasipolynomial roots and constructing regions of stability of linear delay differential equations can

be used to study applied problems of optimal control, modeling of dynamic processes in economics, ecology and others [7].

1. Schiesser W.E. Time Delay ODE/PDE Models. Applications in Biomedical Science and Engineering. – Boca Rona, 2019. – Pp. 250
2. RepinY.M. About approximation replacement system with delay by ordinary differential equations // APM. – 1965.- 29, № 2.– Pp. 226–245
3. Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. – New York : Academic Press, 1981. – Pp. 155-197
4. Cherevko I., Piddubna L. Approximations of differential difference equations and calculation of nonasymptotic roots of quasipolynomials // Revue D'Analyse numerique et de theorie de l'approximations.– 1999. – 28, №1 .– Pp. 15–21.
5. Matviy O.V., Cherevko I.M. About approximation of system with delay and them stability// Nonlinear oscilations.–2004.-7, №2.–Pp. 208–216.
6. Ilika S.A., Piddubna L.A., Tuzyk I. I., Cherevko I.M. Approximation of linear differential-difference equations and their application// Bukovinian Mathematical Journal. –2018.– 6, № 3–4. – Pp. 80–83.
7. Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability. 2021 11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021, Deggendorf, Germany, 15–17 September 2021. Pp. 49–52

# Диференціальні та диференціально-функціональні рівняння

# Nonlocal problem for integro-differential equations of mixed type

Anar T. Assanova

anartasan@gmail.com

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Consider the nonlocal problem for integro-differential equations of mixed type in the following form

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t, x)v + \int_0^T K_1(s, t, x)v(s, x)ds + \int_0^t K_2(s, t, x)v(s, x)ds + f(t, x), \quad (1)$$

$$B(x)v(0, x) + C(x)v(T, x) = d(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

where  $v(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x), \dots, v_n(t, x))$  is unknown function,  $n \times n$  matrix  $A(t, x)$  and  $n$  vector function  $f(t, x)$  are continuous on  $\Omega$ ,  $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ ,  $n \times n$  matrix  $K_1(s, t, x)$  is continuous on  $[0, T] \times \Omega$ ,  $n \times n$  matrix  $K_2(s, t, x)$  is continuously differentiable by  $t$  on  $[0, T] \times \Omega$ ,  $n \times n$  matrices  $B(x)$ ,  $C(x)$  and  $n$  vector function  $d(x)$  are continuous on  $[0, \omega]$ .

Continuous function  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  that has a continuous derivative with respect to  $t$  on  $\Omega$  is called a solution to the family boundary value problems for the system of integro-differential equations of mixed type (1), (2) if it satisfies system (1) and condition (2) for all  $(t, x) \in \Omega$  and  $x \in [0, \omega]$ , respectively.

For fixed  $x \in [0, \omega]$  problem (1), (2) is a linear two-point boundary value problem for the system of integro-differential equations of mixed type. Suppose a variable  $x$  is changed on  $[0, \omega]$ , then we obtain a family of nonlocal problems for integro-differential equations of mixed type.

The integro-differential equations of mixed type often arise in applications, being a mathematical model of various processes in mechanics, physics, chemistry, biology, medicine, ecology, economics, etc. [1], [8], [10]–[11], [18]–[20].

In [17], D.S. Dzhumabaev proposed a parametrization method for solving of boundary value problems for systems of ordinary differential equations. Dzhumabaev's parametrization method turned out to be a constructive method for studying various boundary value problems for differential, loaded differential and integro-differential equations. Along with establishing of criteria for the unique and well-posed solvability of the considered problems, algorithms for finding approximate solutions and conditions for their convergence to exact solutions of these problems were constructed [2]–[6], [8]–[9], [12]–[16].

In present communication, we investigate questions for the solvability of the nonlocal problem for the system of integro-differential equations of mixed type. The original problem is reduced to a nonlocal problem for the system

Fredholm integro-differential equations with unknown function. The unknown function determined from an Volterra integral equation with respect to desired function. This problem can also be interpreted as an inverse problem for the system of Fredholm integro-differential equations. Introducing a functional parameter as the value of the solution on the  $t = 0$ , the problem is reduced to an equivalent problem containing a family of Cauchy problems for a system of Fredholm integro-differential equations with unknown function, an integral relations for unknown function and a system of functional equations for parameter. Conditions for the unique solvability of the considered problem are obtained in terms of the solvability of families of Cauchy problems and the functional system.

**Acknowledgments.** This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09258829).

1. Arqub O.A., Al-Smadi M. Numerical algorithm for solving two-point, second-order periodic boundary value problems for mixed integro-differential equations // Appl. Math. and Comp. – 2014. – Vol. 243, Is. 4. – Pp. 911–922.
2. Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirkayeva Z.M. Numerical solution to a control problem for integro-differential equations // Comp. Math. Math. Phys. – 2020. – Vol. 60, Is. 2. – Pp. 203–221.
3. Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirkayeva Z.M., Uteshova R.E. A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations // Comp. Appl. Math. – 2020. – Vol. 39, Is. 3. – Art. No. 248.
4. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirkayeva Zh.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // Comp. Math. Math. Phys. – 2018. – Vol. 58, Is. 4. – Pp. 508–516.
5. Assanova A.T., Bakirova E.A. and Vassilina G.K. Well-posedness of problem with parameter for an integro-differential equation // Analysis (Germany). – 2020. – Vol. 40, Is. 4. – Pp. 175–191.
6. Assanova A.T., Kadirkayeva Z.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Comp. Appl. Math. – 2018. – Vol. 37, Is. 4. – Pp. 4966–4976.
7. Assanova A.T., Sabalakhova A.P., Toleukhanova Z.M. On the Unique Solvability of a Family of Boundary Value Problems for Integro-Differential Equations of Mixed Type // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, Is. 6. - Pp. 1228–1238.
8. Bakirova E.A., Assanova A.T. and Kadirkayeva Z.M. A problem with parameter for the integro-differential equations // Mathematical Modelling and Analysis. – 2021. – Vol. 26, Is. 1. – Pp. 34–54.

9. Bakirova E.A., Iskakova N.B., Assanova A.T. Numerical method for the solution of linear boundary-value problems for integrodifferential equations based on spline approximations // Ukrainian Math. J. – 2020. – Vol. 71, Is. 9. – Pp. 1341–1358.
10. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Boston: VSP, Utrecht. – 2004. – 317 p.
11. Brunner H. Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2004. – 597 p.
12. Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integrodifferential equations // Math. Methods Appl. Sci. – 2018. – Vol. 41, Is. 7. – Pp. 1439–1462.
13. Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // J. Comp. Appl. Math. – 2018. – Vol. 327, Is. 1. – Pp. 79–108.
14. Dzhumabaev D.S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary - value problems // Ukrainian Math. J. – 2019. – Vol. 71, Is. 7. – Pp. 1006–1031.
15. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Math. Methods Appl. Sci. – 2020. – Vol. 43, Is. 8. – Pp. 1788–1802.
16. Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation // Eurasian Mathematical J. – 2019. – Vol. 10, Is. 4. – Pp. 24–33.
17. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys. – 1989. – Vol. 29, Is. 1. – Pp. 34–46.
18. Pruss J. Evolutionary Integral equations and Applications. – Basel: Birkhauser Verlag. – 1993. – 366 p.
19. Reutskiy S.Yu. The backward substitution method for multipoint problems with linear Volterra-Fredholm integro-differential equations of the neutral type // J. Comp. Appl. Math. – 2016. – Vol. 296, Is. 3. – Pp. 724–738.
20. Wazwaz A.M. Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. – Berlin Heidelberg: Higher Equation Press, Beijing and Springer-Verlag. – 2011. – 639 p.

**Багаточастотні системи із лінійно перетвореними аргументами  
і нелінійними багатоточковими і локально-інтегральними  
умовами**

Ярослав Бігун, Роман Петришин, Ігор Скутар

y.bihun@chnu.edu.ua, r.petryshyn@chnu.edu.ua,  
i.skutar@chnu.edu.ua

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича*

Для багаточастотних систем диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad (1)$$

для яких задано багатоточкові й інтегральні умови, досліджено існування і єдиність розв'язку, обґрунтовано метод усереднення за швидкими змінними й отримано оцінку похибки методу, яка явно залежить від малого параметра. Тут  $\tau \in [0, L]$ , малий параметр  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ,  $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq 1$ ,  $0 < \theta_1 < \dots < \theta_q \leq 1$ ,  $a_\Lambda = (a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_p})$ ,  $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$ ,  $\varphi_\Theta = (\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_q})$ ,  $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$ .

Умови для системи рівнянь (1) мають вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu a(\tau_\nu) &= \sum_{\nu=1}^s \int_{\xi_\nu}^{\eta_\nu} f_\nu(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) d\tau, \\ \sum_{\nu=1}^r \beta_\nu \varphi(\tau_\nu) &= \sum_{\nu=1}^s \int_{\xi_\nu}^{\eta_\nu} g_\nu(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $[\xi_\nu, \eta_\nu] \subset [0, L]$ ,  $\bigcap_{\nu} [\xi_\nu, \eta_\nu] = \emptyset$  і

$$\begin{aligned} F(a(\tau_1), \dots, a(\tau_r)) &= \int_{\xi_1}^{\eta_1} f(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau)) d\tau, \\ G(\varphi(\tau_1), \dots, \varphi(\tau_r)) &= \int_{\xi_2}^{\eta_2} g(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

Усереднення за швидкими змінними  $\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_q}$  здійснюється як у правих частинах системи (1), так і в умовах (2) і (3). Якщо  $H := (X, Y, f, g)$ , то усереднена функція

$$H_0(\tau, a_\Lambda) = (2\pi)^{-mq} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} H(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) d\varphi_\Theta.$$

Обґрунтування методу усереднення здійснено на підставі оцінки відповідного системі рівнянь (1) осциляційного інтеграла, як запропоновано в [1].

Умовою виходу системи із малого околу резонансу [2]

$$\sum_{\nu=1}^q \theta_\nu(k_\nu, \omega_\nu(\theta_\nu(\tau))) = 0, k_\nu \in Z^m, \|k_1\| + \dots + \|k_m\| \neq 0.$$

є відсутність нулів на  $[0, L]$  визначника Вронського за системою функцій  $\{\omega(\theta_1\tau), \dots, \omega(\theta_q\tau)\}$ .

Якщо вектор-функції  $X, Y, f$  і  $g$  достатньо гладкі за всіма змінними, матриці систем лінійних рівнянь для уточнення початкових значень для розв'язків задач (1), (2) і (1), (3), невироджені, і виконується умова виходу із резонансу, то доведено існування і єдиність розв'язку вказаних задач і встановлена оцінка похибки методу усереднення вигляду

$$\|a(\tau; \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{a}(\tau; \bar{y})\| + \|\varphi(\tau; \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^\alpha,$$

де  $\alpha = (mq)^{-1}$ ,  $\bar{a}(0; \bar{y}) = \bar{y}$ ,  $\bar{\varphi}(0; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) = \bar{\psi}(\varepsilon)$ ,  $a(0; y, \psi, \varepsilon) = y(\varepsilon)$ ,  $\varphi(0; y, \psi, \varepsilon) = \psi(\varepsilon)$ ,  $c > 0$  і не залежить від  $\varepsilon$ . Для  $\mu \in \mathbb{R}^m$  і  $\xi \in \mathbb{R}^m$  одержано оцінки, які мають порядок  $\varepsilon^\alpha$ .

Отримані результати проілюстровані на модельних прикладах.

1. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наукова думка, 2004. – 475 с.
2. Бігун Я.Й. Існування розв'язку та усереднення багаточаткових крайових задач для багаточатотних систем із лінійно перетвореним аргументом. // Нелінійні коливання. – 2008. – 11, № 4. – С. 462-471.
3. Бігун Я. Й., Скутар І. Д. Усереднення в багаточастотних системах із запізненням та локально-інтегральними умовами. // Буковинський математичний журнал. – 2020. – 8, № 2. – С. 14–23.
4. Yaroslav Bihun, Roman Petryshyn, Ihor Skutar, and Halyna Melnyk. Multi-frequency system with multipoint and integral conditions. // Acta et Coomentationes, Exact and Natural Sciences. – Nr. 2(12), 2021. – P. 11–24.

# Частотна синхронізація періодичних розв'язків диференціальних рівнянь при імпульсних збуреннях

*Анатолій Дворник, Віктор Ткаченко*

*a.dvornyk@gmail.com, vitk@imath.kiev.ua*

*Інститут математики НАН України*

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \varepsilon g(x, \omega t), \quad (1)$$

$$x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) = \varepsilon g_k(x(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

де  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  і  $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  —  $C^2$ -гладкі функції,  $\omega > 0$  і  $\varepsilon \geq 0$  — параметри. Вважаємо всі розв'язки системи (1), (2) неперервними зліва.

Припускаємо, що незбурена система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (3)$$

має експоненціально орбітально стійкий періодичний розв'язок  $x_*(\omega_0 t)$ , тобто

$$\frac{dx_*(\omega_0 t)}{dt} = f(x_*(\omega_0 t)), \quad x_*(\varphi + 1) = x_*(\varphi), \quad \frac{dx_*(\varphi)}{d\varphi} \neq 0,$$

функція  $g(x, \varphi)$  періодична з періодом 1 по  $\varphi$  та існує таке  $m \in \mathbb{Z}$ , що  $g_{k+m}(x) = g_k(x)$  і  $\omega(\tau_{k+m} - \tau_k) = 1$  для всіх  $k \in \mathbb{Z}$ . Позначимо через  $\mathcal{T}_1$  цикл  $\{x_*(\varphi), \varphi \in \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ .

Отримано умови частотної синхронізації частоти  $\omega_0$  незбуреного періодичного розв'язку  $x_*(\omega_0 t)$  і частоти  $\omega \approx \omega_0$  малого імпульсного збурення. Це означає, що для малих  $\varepsilon$  існують такі дві гладкі функції  $\omega_-(\varepsilon)$  і  $\omega_+(\varepsilon)$  з  $\omega_+(0) = \omega_-(0) = \omega_0$  і  $\omega_+(\varepsilon) - \omega_-(\varepsilon) > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , що для  $\omega \in (\omega_-(\varepsilon), \omega_+(\varepsilon))$  існує принаймні один асимптотично стійкий кусково-неперервний періодичний розв'язок збуреної системи (1), (2) з частотою  $\omega$ .

Для цього введено локальні координати в околі стійкого інваріантного циклу  $\mathcal{T}_1$  і доведено існування кусково-гладкого інтегрального многовиду у збуреної імпульсної системи. Далі застосовано метод усереднення імпульсних систем для дослідження поведінки імпульсної системи на збуреному кусково-неперервному циклі й отримано умови частотної синхронізації.

Система у варіаціях у околі періодичного розв'язку  $x_*(\varphi)$  системи рівнянь (3)

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial f(x_*(\varphi))}{\partial x} y$$

має періодичний з періодом 1 розв'язок  $\dot{x}_*(\varphi) = dx_*(\varphi)/d\varphi$ . Оскільки пе-  
ріодичний розв'язок  $x_*(\varphi)$  експоненціально орбітально стійкий, спряжена  
лінійна однорідна система

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{1}{\omega_0} \left( \frac{\partial f(x_*(\varphi))}{\partial x} \right)^T y \quad (4)$$

має одновимірну сім'ю нетривіальних 1-періодичних розв'язків.

Позначимо через  $y_*(\varphi)$  такий періодичний розв'язок системи (4), що  
 $y_*^T(\varphi)\dot{x}_*(\varphi) = 1$ ,  $\varphi \in \mathbb{T}^1$ . Означимо періодичну функцію

$$G(\varphi) = \int_0^1 y_*^T(\xi + \varphi)g(x_*(\xi + \varphi), \xi)d\xi + \sum_{k=1}^m y_*^T(\varphi + \omega\tau_k)g_k(x_*(\varphi + \omega\tau_k))$$

і числа

$$G_+ := \max_{\varphi \in [0, 1]} G(\varphi), \quad G_- := \min_{\varphi \in [0, 1]} G(\varphi).$$

Вважатимемо, що всі критичні точки функції  $G$  невироджені:  $G''(\varphi) \neq 0$   
для всіх таких  $\varphi$ , що  $G'(\varphi) = 0$ . Тому множина критичних точок функції  
 $G$  складається з парного числа  $2N$  різних точок:

$$\{\varphi \in [0, 1] : G'(\varphi) = 0\} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{2N}\}.$$

Множину критичних значень функції  $G$  позначимо через

$$S := \{G(\varphi_1), \dots, G(\varphi_{2N})\}.$$

**Теорема 1.** *Нехай  $\varphi_0 \in \mathbb{T}^1$  і  $G'(\varphi_0) \neq 0$ . Тоді існує таке  $\varepsilon_0 > 0$ , що для  
всіх  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (1), (2) має єдиний кусково-неперервний періоди-  
чний розв'язок*

$$\tilde{x}_0(\omega t, \varepsilon) = x_*(\omega t + \varphi_0) + \varepsilon \tilde{X}(\omega t, \varepsilon)$$

з частотою  $\omega = \omega_0 + \varepsilon G(\varphi_0)$ , а функція  $\tilde{X}$  періодична з періодом 1 відно-  
сно  $\omega t$  і неперервно диференційовна при  $t \neq \tau_k$ . Цей розв'язок асимпто-  
тично стійкий, якщо  $G'(\varphi_0) < 0$ .

**Теорема 2.** *Для довільного  $\nu > 0$  існує таке  $\varepsilon_0 > 0$ , що для всіх  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$   
і*

$$G_- < \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} < G_+, \quad \text{dist} \left( \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}, S \right) \geq \nu$$

виконуються наступні твердження:

i) система рівнянь (1), (2) має парне число кусково-неперервних періодичних розв'язків  $\tilde{x}_j(\omega t, \varepsilon)$ ,  $j = 1, \dots, 2\tilde{N}(\omega, \varepsilon)$ ,  $0 < \tilde{N}(\omega, \varepsilon) \leq N$  вигляду

$$\tilde{x}_j(\omega t, \varepsilon) = x_*(\omega t + \vartheta_j) + \varepsilon X_j(\omega t, \varepsilon),$$

де стали  $\vartheta_j = \vartheta_j(\varepsilon)$  визначаються як розв'язки рівняння  $\omega - \omega_0 = \varepsilon G(\vartheta_j)$ , а функції  $X_j$  періодичні з періодом 1 відносно  $\omega t$  і неперервно диференційовні при  $t \neq \tau_k$ ;

ii) існує таке  $\delta > 0$ , що розв'язки  $x(t)$  системи рівнянь (1), (2) з  $\text{dist}(x(t_0), T_1) < \delta$  для деякого  $t_0 \in \mathbb{R}$  прямують до одного з розв'язків  $\tilde{x}_j(\omega t, \varepsilon)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

1. Дворник А. В., Ткаченко В. І. Частотна синхронізація періодичних розв'язків диференціальних рівнянь при імпульсних збуреннях // Український математичний журнал. – 2022. – Т. 74, № 7. – С. 939–960.

# Лінійні країові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу

Андрій Дорош, Іван Гаюк, Андрій Перцюв

a.dorosh@chnu.edu.ua, haiuk.ivan@chnu.edu.ua,  
a.pertsov@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича

## 1. Постановка задачі, існування розв'язку

Умови існування розв'язків країових задач для різних класів диференціально-різницевих рівнянь досліджувались у працях [1, 2].

У даній роботі для лінійних країових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу досліджується застосування кубічних сплайнів дефекту два для знаходження наближених розв'язків [3, 4].

Розглянемо країову задачу

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{i=0}^n \left( a_i(x) y(x - \tau_i(x)) + b_i(x) y'(x - \tau_i(x)) + \right. \\ &\quad \left. + c_i(x) y''(x - \tau_i(x)) + \sum_{p=0}^2 \int_a^b K_{ip}(x, s) y^{(p)}(s - \tau_i(s)) ds \right) + f(x), \\ y^{(p)}(x) &= \varphi^{(p)}(x), \quad p = 0, 1, 2, \quad x \in [a^*; a], \quad y(b) = \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

де запізнення  $\tau_0(x) = 0$ , а  $\tau_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – неперервні невід'ємні функції, визначені на  $[a, b]$ ,  $\varphi(x)$  – задана двічі неперервно-диференційовна функція на  $[a^*; a]$ ,  $\gamma \in R$ ,  $a^* = \min_{0 < i \leq n} \left\{ \inf_{x \in [a; b]} (x - \tau_i(x)) \right\}$ .

Нехай функції  $a_i(x)$ ,  $b_i(x)$ ,  $c_i(x)$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $f(x)$  – неперервні на  $[a; b]$ , а функції  $K_{ip}(x, s)$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $p = \overline{0, 1}$  – неперервні за обома аргументами у квадраті  $[a, b] \times [a, b]$ .

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями  $\tau_1(x), \dots, \tau_n(x)$ :

$$\begin{aligned} E_{i1} &= \{x_j \in [a, b] : x_j - \tau_i(x_j) = a, j = 1, 2, \dots\}, \\ E_{i2} &= \{x_j \in [a, b] : x_0 = a, x_{j+1} - \tau_i(x_{j+1}) = x_j, j = 0, 1, 2, \dots\}, \\ E_2 &= \bigcup_{i=1}^n (E_{i1} \cup E_{i2}). \end{aligned}$$

Припустимо, що запізнення  $\tau_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – такі функції, що множини  $E_{i1}, E_{i2}$ ,  $i = \overline{1, n}$  є скінченими. Занумеруємо точки множини  $E_2$  в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$J = [a^*; a], \quad I = [a, b], \\ I_1 = [a, x_1], \quad I_2 = [x_1, x_2], \quad \dots, \quad I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad I_{k+1} = [x_k, b], \\ B_2(J \cup I) = \left\{ y(x) : y(x) \in \left( C(J \cup I) \cap \left( C^1(J) \cup C^1(I) \right) \cap \right. \right. \\ \left. \left. \cap \left( \bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j) \right) \right), |y(x)| \leq P_1, |y'(x)| \leq P_2, |y''(x)| \leq P_3 \right\},$$

де  $P_1, P_2, P_3$  – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (1)-(2) вважатимемо функцію  $y = y(x)$ , якщо вона задовольняє рівняння (1) на  $[a; b]$  (за можливим винятком точок множини  $E_2$ ) і крайові умови (2). Будемо шукати розв'язок задачі (1)-(2), який належить простору  $B_2(J \cup I)$ .

## 2. Обчислювальна схема

Виберемо нерівномірну сітку  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$  на відрізку  $[a; b]$ , таку що  $E_2 \subset \Delta$ . Позначимо через  $S(x, y)$  інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на  $\Delta$  для функції  $y(x)$ . Ввівши позначення  $M_j^+ = S''(x_j + 0, y)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m - 1$ ,  $M_j^- = S''(x_j - 0, y)$ ,  $h_j = x_j - x_{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , для  $S(x, y)$  нескладно одержати зображення

$$S(x, y) = M_{j-1}^+ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j^- \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \\ + \left( y_{j-1} - \frac{M_{j-1}^+ h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left( y_j - \frac{M_j^- h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \\ x \in [x_{j-1}; x_j], \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Величини  $M_j^+$  та  $M_j^-$  задовольняють систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} h_{j+1}y_{j-1} - (h_j + h_{j+1})y_j + h_jy_{j+1} = \frac{h_j h_{j+1}}{6} \times \\ \times (h_j M_{j-1}^+ + 2h_j M_j^- + 2h_{j+1} M_j^+ + h_{j+1} M_{j+1}^-), \\ j = \overline{1, m-1}. \end{cases} \quad (4)$$

Розглядаємо таку ітераційну схему.

A) Виберемо кубічний сплайн  $S(x, y^{(0)}) = \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a} (x - a) + \varphi(a)$ , який задовольняє крайові умови (2) при  $x = a$  та  $x = b$ .

Б) Використовуючи вихідне рівняння (1) та сплайн  $S(x, y^{(k)})$ , знаходимо для  $k = 0, 1, \dots$ :

$$M_j^{+(k+1)} = \sum_{i=0}^n \left( a_i(x_j) S(x_j - \tau_i(x_j) + 0, y^{(k)}) + b_i(x_j) S'(x_j - \tau_i(x_j) + 0, y^{(k)}) + c_i(x_j) S''(x_j - \tau_i(x_j) + 0, y^{(k)}) + \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^2 \int_a^b K_{ip}(x_j, s) S^{(p)}(s - \tau_i(s) + 0, y^{(k)}) ds \right) + f(x_j), \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (5)$$

$$M_j^{-(k+1)} = \sum_{i=0}^n \left( a_i(x_j) S(x_j - \tau_i(x_j) - 0, y^{(k)}) + b_i(x_j) S'(x_j - \tau_i(x_j) - 0, y^{(k)}) + c_i(x_j) S''(x_j - \tau_i(x_j) - 0, y^{(k)}) + \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^2 \int_a^b K_{ip}(x_j, s) S^{(p)}(s - \tau_i(s) - 0, y^{(k)}) ds \right) + f(x_j), \quad j = \overline{1, m}. \quad (6)$$

У співвідношеннях (5), (6) підставляємо  $S^{(p)}(x, y^{(k)}) = \varphi^{(p)}(x)$ ,  $p = 0, 1, 2$  при  $x < a$ .

В) Обчислюємо  $y_j^{(k+1)}$ ,  $j = \overline{0, m}$ , розв'язуючи систему рівнянь (4).

Г) Одержано кубічний сплайн  $S(x, y^{(k+1)})$  у формі (3), використовуючи знайдені значення  $y_j^{(k+1)}$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $M_j^{+(k+1)}$ ,  $j = \overline{0, m-1}$ ,  $M_j^{-(k+1)}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Він виступає в якості наступного наближення.

Встановлено достатні умови збіжності послідовності сплайнів  $S(x, y^{(k)})$  до розв'язку крайової задачі (1)-(2). Числові експерименти для модельних тестових прикладів підтверджують ефективність запропонованої схеми наближення розв'язку задачі (1)-(2).

1. Grim L. J., Schmitt K. Boundary value problems for delay-differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 74, Is. 5. – Pp. 997–1000.
2. Cherevko I., Dorosh A. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations // J. Numer. Anal. Approx. Theory. – 2016. – Vol. 44, Is. 2. – Pp. 154–165.
3. Cherevko I., Dorosh A. Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Differential Equations With Many Delays // Карпатські матем. публ. – 2018. – Vol. 10, Is. 1. – Pp. 65–70.
4. Черевко І.М., Дорош А.Б., Перцов А.С., Гаюк І.М. Моделювання крайових задач для лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

// Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наукових праць. – Кам'янець-Подільський, 2020. – Вип. 21. – С. 164–173.

# Absolute stability of control systems with tachometric feedback taking into account external load

Sailaubay S. Zhumatov

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

Consider the problem of construction of the control systems with tachometric feedback, taking into account external load by given  $(n - s)$ -dimensional program manifold  $\Omega$  [1]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x) - b_1 \xi, \quad t \in I = [0, \infty), \\ \dot{\xi} &= \varphi(\sigma) \psi(\nu), \quad \sigma = p^T \omega - q \xi - N \dot{\xi},\end{aligned}\tag{1}$$

where  $x \in R^n$  is a state vector of the object,  $f \in R^n$  is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution  $x(t) = 0$ , and  $b_1 \in R^n$ ,  $p \in R^s$  are constant vectors,  $q, N$  are constant coefficients of rigid and tachometric feedbacks,  $\sigma$  is the total control pulse-signal, and  $\xi$  is function differentiable with respect to  $\sigma$ , satisfies the following conditions

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0 \wedge \varphi(\sigma)\sigma > 0 \quad \forall \sigma \neq 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} &< \chi > 0,\end{aligned},\tag{2}$$

and the function  $\psi(\nu)$  takes into account the actions of the external load, and determined as follows:

$$\psi(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{at } \nu \geq 1, \\ \sqrt{\nu} & \text{at } 0 < \nu < 1, \\ 0 & \text{at } \nu \leq 0,\end{cases}\tag{3}$$

where in the general case  $\nu$  has the following form [1]:

$$\nu = 1 - (a \ddot{\xi} + b \dot{\xi} + c \xi) \operatorname{sign} \sigma.$$

Here  $a, b, c$  are real numbers.

For the manifold  $\Omega(t)$  to be integral and for the system (1) - (2) on the manifold  $\omega = 0$  it is necessary a condition  $\xi = 0$ . This condition is satisfied for  $q \neq 0$ .

This problem reduce to investigation of quality properties of the following system with respect to vector-function  $\omega$  [2, 3]:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -A\omega - b\xi, \quad t \in I = [0, \infty), \\ \dot{\xi} &= \varphi(\sigma) \psi(\nu), \quad \sigma = p^T \omega - q \xi - N \dot{\xi},\end{aligned}\tag{4}$$

Here nonlinearity satisfies also to generalized conditions (2), and  $F(t, x, \omega) = -A\omega$ ,  $A \in R^{s \times s}$ ,  $H = \frac{\partial \omega}{\partial x}$ ,  $b = Hb_1$ .

The reviews of the works devoted to the construction of autonomous and non-autonomous automatic control systems on the given program manifold possessing of quality properties and to solving of various inverse problems of dynamics were shown (see [3]-[11]).

**Statement of the Problem.** To get the condition of absolute stability of a program manifold  $\Omega(t)$  of the control systems with tachometric feedback taking into account external load in relation to the given vector-function  $\omega$ .

System (4) is reduced to the canonical form [1]:

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= -\rho\eta + \sigma, \\ \dot{\sigma} &= \beta^T\eta - M\xi - N\phi(\sigma, \eta)\operatorname{sign}\sigma,\end{aligned}\quad (5)$$

where  $\rho = \operatorname{diag}(\rho_1, \dots, \rho_s)$ ,  $\beta, M, N$  are constants.

For system (5), we construct the Lyapunov function of the form

$$V = \sum_{i=1}^{s+1} \sum_{k=1}^{s+1} \frac{l_i l_k}{\rho_1 + \rho_k} \eta_1 \eta_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k \eta_K^2 + \sum_{i=1}^{s-m} C_i \eta_{m+i} \eta_{m+i+1} + \frac{1}{2} l_{s+2} \sigma^2. \quad (6)$$

**Theorem.** If the Erugin function is linear with respect to  $\omega$  and there are  $L_k, C_i$  positive real numbers,  $l_{s+2} > 0$ , in addition, the non-linearity  $\varphi(\sigma)$  satisfies conditions (2) and the function  $\psi(\nu)$  is determined by (3).

Then in order that, the program manifold  $\Omega(t)$  was absolute stability with respect to the vector function  $\omega$  it is sufficient performing of the following equalities

$$L_k + l_{s+2} \beta_k + 2l_k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{l_i}{\rho_i + \rho_k} = 0 \quad \forall k = \overline{1, \dots, m},$$

$$C_j + l_{s+2} \beta_{m+j} + 2l_{m+j} \sum_{i=1}^{s+1} \frac{l_i}{\rho_i + \rho_k} = 0 \quad \forall m = \overline{1, \dots, s-m+1},$$

where  $l_1, \dots, l_m$  are real and  $l_{m+1}, \dots, l_{m+s+1}$  are complex pairwise conjugate numbers.

**Acknowledgments.** This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09258966).

1. Maygarin B.G. Stability and quality of process of nonlinear automatic control system. – Nauka.Alma-Ata:Nauka. – 1981.
2. Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral manifold, //Prikladnaya Matematika i Mekanika.– 1952. – Vol. 10, Is. 6.- Pp. 659–670.

3. Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion.- Almaty: Gylym. - 1999.
4. Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. Review of researches on the analytical construction of the systems programmatic motions// Vestnik RUDN. - 1994.-Is.1.- Pp. 5–21.
5. Samoilenko A.M., Stanzhytsskj O.M. The reduction principle in stability theory of invariant sets for stochastic Ito type systems // Differentialnye uravneniya. - 2001. – Vol.53, Is.2. – Pp. 282- 285.
6. Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. – Switzerland: Springer International Publishing. – 2016.
7. Zhumatov S.S. Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold // Nelineinyye kolebania. 2016.– Vol. 28, Is. 3. , Pp. 367–375..
8. Zhumatov S.S. Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems // News NAS RK. Series physico-mathematical. – 2018. – Vol. 322, Is. 6. – Pp. 37-43.
9. Zhumatov S.S. On the stability of a program manifold of control systems with variable coefficients // Ukrainian Mathematical Journal.– 2020. Vol.71, Is. 8. – Pp. 1202-1213.
10. Zhumatov S.S. On the absolute stability of a program manifold of non-autonomous control systems with non-stationary nonlinearities // Kazakh Mathematical Journal.– 2020. Vol. 19, Is. 4. – Pp. 35-46.
11. Zhumatov S.S. Stability of the program manifold of different automatic indirect control systems // News Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University. Mathematics, physics, computer science series.–2021. –Vol. 16, Is. 1. – Pp. 69-82.

## Застосування схем апроксимації для дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь

Світлана Іліка, Олександр Матвій, Лариса Піддубна, Ірина Тузик

s.ilika@chnu.edu.ua , o.matviy@chnu.edu.ua ,

l.piddubna@chnu.edu.ua , i.tuzyk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича

При дослідженні задач стійкості, осциляції, біфуркації, керування та стабілізації розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь важливу роль відіграє розміщення коренів відповідних характеристичних рівнянь, які у випадку таких рівнянь називають квазіполіномами.

Ефективних алгоритмів знаходження коренів квазіполіномів на даний час немає. При дослідженні апроксимації системи лінійних диференціально-різницевих рівнянь виявилось, що наближення неасимптотичних коренів їх квазіполіномів можна знаходити за допомогою характеристичних множчленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь.

У даній роботі досліджуються застосування схем апроксимації диференціально -різницевих рівнянь [1-6] до наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів та аналізу стійкості розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь із запізненням. Розглянемо лінійну систему із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^k A_i x(t - \tau_i), \quad (1)$$

де  $x \in R^n$ ,  $A_i, i = \overline{1, k}$  -сталі матриці,  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = \tau$ . Квазіполіном для системи (1) має вигляд:

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda E - \sum_{i=0}^k A_i e^{-\lambda \tau_i}). \quad (2)$$

Поставимо у відповідність системі (1) таку систему звичайних диференціальних рівнянь [2-3]

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = \sum_{i=0}^k A_i z_{l_i}(t), l_i = \left[ \frac{\tau_i m}{\tau} \right],$$

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \mu[z_{i-1}(t) - z_i(t)], i = \overline{1, m}, \mu = \frac{m}{\tau}. \quad (3)$$

Для характеристичного рівняння апроксимуючої системи (3) має місце

співвідношення [3-4]

$$\Psi_m(\lambda) = \det(\lambda E - \sum_{i=0}^k A_i (\frac{\mu}{\mu + \lambda})^{l_i})(\mu + \lambda)^{mn} \quad (4)$$

і послідовність функцій

$$H_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu + \lambda)^{mn}} \quad (5)$$

збігається при  $t \rightarrow \infty$  до квазіполінома (2) [3-5].

**Теорема 1.** Якщо нульовий розв'язок рівняння (1) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує  $t_0 > 0$  таке, що при  $t > t_0$  нульовий розв'язок аproxимуючої системи (3) також експоненціально стійкий (нестійкий).

Якщо для всіх  $t > t_0$  нульовий розв'язок системи (3) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді й нульовий розв'язок диференціально-різницевого рівняння із запізненням (1) експоненціально стійкий (нестійкий).

Із наведеної теореми дістаємо, що при достатньо великому  $t$  асимптотична стійкість (нестійкість) нульового розв'язку лінійного рівняння еквівалентна асимптотичній стійкості (нестійкості) нульового розв'язку системи аproxимуючих звичайних диференціальних рівнянь.

Для лінійних диференціальних рівнянь із запізненням аproxимаційні схеми дозволяють побудувати алгоритми наближеного знаходження неасимптотичних коренів відповідних квазіполіномів. Отримано зручні для комп'ютерного застосування розрахункові формули для скалярних диференціальних рівнянь з одним, двома і трьома запізненнями, а також для систем другого порядку [4-5]. Обчислення наблизених значень коренів квазіполіномів за допомогою відповідних аproxимуючих поліномів можна здійснити за допомогою вбудованих функцій Matlab, Maple, Mathematica або за допомогою бібліотеки Numpy на платформі Python.

За допомогою наблизених алгоритмів знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів запропоновано спосіб побудови коефіцієнтних областей стійкості для лінійних диференціальних рівнянь із запізненням та знаходження множини значень запізнення, для яких рівняння є асимпточно стійким [6].

Проведені чисельні експерименти на модельних тестових прикладах підтверджують ефективність запропонованих схем моделювання лінійних диференціальних рівнянь із запізненням.

1. Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. – New York : Academic Press // Dynamic Games and Applications. – 1981. – Pp. 155–197.
2. Cherevko I., Piddubna L. Approximations of differential difference equations and calculation of nonasymptotic roots of quasipolynomials// Revue D'Analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999.–28, №1 .–Pp. 15–21.
3. Матвій О.В.,Черевко І.М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість// Нелінійні коливання.– 2004.–7, №2.– С.208–216.
4. Матвій О.В., Пернай С.А., Черевко І.М. Про стійкість лінійних систем із запізненням // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту: Зб. Наук. пр.. Вип. 421. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 66–70.
5. Іліка С.А., Піддубна Л.А., Тузик І.І., Черевко І.М. Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь та її застосування// Буковинський математичний журнал. – 6, № 3–4. –2018. – С. 80 –83.
6. Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability. 2021 11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021, Deggendorf, Germany, 15–17 September 2021. Pp. 49–52.

## A Problem for essentially loaded differential equations with integral condition

Zhazira Kadirbayeva

zhkadirkadirbayeva@gmail.com

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,  
International Information Technology University,  
Almaty, Kazakhstan,*

We consider the following linear boundary value problem for systems of essentially loaded differential equations with integral condition:

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^m A_i(t)\dot{x}(\theta_i) + f(t), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_{m+1}} B(t)x(t)dt = d, \quad d \in R^n, \quad x \in R^n. \quad (2)$$

Here  $(n \times n)$ -matrices  $A_i(t)$ ,  $(i = \overline{0, m})$ ,  $B(t)$  and n-vector-function  $f(t)$  are continuous on  $[0, T]$ ,  $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$ ;  $\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|$ .

Let  $C([0, T], R^n)$  denote the space of continuous functions  $x : [0, T] \rightarrow R^n$  with the norm  $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$ .

A solution to problem (1), (2) is a continuously differentiable on  $(0, T)$  function  $x(t) \in C([0, T], R^n)$  satisfying the system of essentially loaded differential equations (1) and the integral condition (2).

In recent years the theory of loaded differential equations has been advanced. Numerous important problems of mathematical physics and mathematical biology lead to boundary value problems for loaded equations [1]. Various problems for loaded differential equations with integral conditions and methods for finding their solutions are considered in [2], [3].

We use the approach offered in [4]-[6] to solve the boundary value problem for systems of essentially loaded differential equations with integral condition (1), (2). This approach based on the algorithms of the Dzhumabaev parameterization method [7] and numerical methods for solving Cauchy problems.

1. Nakhshhev A.M. Loaded equations and their applications // Differential equations. – 1983. – Vol. 19, Is. 1. – Pp. 86–94.
2. Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. On the numerical solution to loaded systems of ordinary differential equations with non-separated multipoint and integral condition // Numer. Anal. Appl. – 2014. – Vol. 7, Is. 1. – Pp. 1–14.

3. Parasidis I.N., Providas E., Dafopoulos V. Loaded differential and Fredholm integro-differential equations with nonlocal integral boundary conditions // Appl. Math. Control Sci. J. – 2018. – Vol. 3. – Pp. 50–68.
4. Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – Vol. 294. – Pp. 342–357.
5. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // Comput. Math. Math. Phys. – 2018. – Vol. 58, Is. 3. – Pp. 508–516.
6. Kadirbayeva Zh.M. A numerical method for solving boundary value problem for essentially loaded differential equations // Lobachevskii J. Math. – 2021. – Vol. 42, Is. 3. – Pp. 551–559.
7. Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Comput. Math. Math. Phys. – 1989. – Vol. 29. – Pp. 34–46.

**Умови існування та асимптотика одного класу розв'язків  
деякого диференціального рівняння другого порядку**

*Людмила Кусік*

1k09032017@gmail.com

*Одеський національний морський університет*

Розглядаємо диференціальне рівняння

$$y'' = f(t, y, y'), \quad (1)$$

де  $f : [a, \omega[ \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow R$  є неперервною функцією,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $\Delta_{Y_i}$  ( $i \in \{0, 1\}$ ) - односторонній окіл  $Y_i$  і  $Y_i$  ( $i \in \{0, 1\}$ ) є або 0 або  $\pm\infty$ . Будемо вважати, що числа, задані формулouю

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_i = +\infty \text{ або } Y_i = 0 \text{ і } \Delta_{Y_i} - \text{ правий окіл } 0, \\ -1, & \text{якщо } Y_i = -\infty \text{ або } Y_i = 0 \text{ і } \Delta_{Y_i} - \text{ лівий окіл } 0, \end{cases}$$

задовільняють нерівностям

$$\mu_0\mu_1 > 0 \quad \text{при } Y_0 = \pm\infty \quad \text{i} \quad \mu_0\mu_1 < 0 \quad \text{при } Y_0 = 0, \quad (2)$$

$$\alpha_0\mu_1 > 0 \quad \text{при } Y_1 = \pm\infty \quad \text{i} \quad \alpha_0\mu_1 < 0 \quad \text{при } Y_1 = 0, \quad (3)$$

де  $\alpha_0 = \operatorname{sign} f$  при  $t \uparrow \omega$ ,  $y^{(i)} \rightarrow Y_i$  ( $i = 0, 1$ ).

Рівняння (1) будемо досліджувати на одному класі розв'язків (див. [1]).

**Означення 1.** Розв'язок у рівняння (1), що визначений на проміжку  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[,$  називаємо  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, де  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , якщо виконані наступні умови

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[ , \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

**Означення 2.** Ми говоримо, що функція  $f$  задовільняє умову  $(FN)_1$  для  $\lambda_0 = 1$ , якщо існує число  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ , неперервна функція  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  і двічі неперервно диференційована функція  $\varphi_0 : \Delta_{Y_0} \rightarrow ]0, +\infty[$ , що задовільняє умови

$$\varphi'_0(y) \neq 0, \quad \lim_{y \rightarrow Y_o} \varphi_0(y) = \varphi_0 \in \{0, +\infty\}, \quad \lim_{y \rightarrow Y_o} \frac{\varphi_0(y)\varphi''_0(y)}{(\varphi'_0(y))^2} = 1,$$

такі, що для довільних неперервно диференційованих функцій  $z_i : [a, \omega] \rightarrow \Delta_{Y_i}$  ( $i = 0, 1$ ), для яких

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_i(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z'_0(t)}{z_0(t)} = \pm\infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{z_0(t) z'_1(t)}{z'_0(t) z_1(t)} = 1,$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases}$$

має місце зображення

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(z_0(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Тут за допомогою класу  $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$  (див. [2]) досліджуємо існування  $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ -розв'язків диференціального рівняння (1) у випадку, коли виконано нерівності (2), (3) та функція  $f$  задовільняє умову  $(FN)_1$ .

1. Евтухов В.М. Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена - Фаулера.: дис. ... канд. физ. -мат. наук: 01.01.02. Одесса, 1980, 154 с.
2. Черникова А.Г. Асимптотична поведінка розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з швидко змінними нелінійностями.: дис. ... канд. физ. -мат. наук: 01.01.02. Одеса, 2019, 156 с.

**Пониження порядку та інтегрування нормальних  
лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь  
другого порядку**

Олександра Локазюк

sasha.lokazuik@gmail.com

*Інститут математики НАН України, Київ, Україна*

Розглянемо клас  $\bar{\mathcal{L}}$  нормальних лінійних систем із  $n$  звичайних диференціальних рівнянь другого порядку вигляду

$$\mathbf{x}_{tt} = A(t)\mathbf{x}_t + B(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

з  $n$  невідомими функціями  $x^1, \dots, x^n$ ,  $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))^T$ , де  $n \geq 2$ . Набір  $\theta = (A, B, \mathbf{f})$  довільних елементів класу  $\bar{\mathcal{L}}$  утворюють довільні гладкі  $n \times n$  матричнозначні функції  $A$  та  $B$  змінної  $t$  і довільна гладка векторнозначна функція  $\mathbf{f}$  змінної  $t$ .

У роботі [1] у деталях досліджено трансформаційні властивості та ліївські симетрії систем  $L_\theta$  із класу  $\bar{\mathcal{L}}$  та його підкласів  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}'$  та  $\mathcal{L}''$ , що виокремлюються відповідно умовами  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  у випадку класу  $\mathcal{L}$ ,  $A = 0$  і  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  у випадку класу  $\mathcal{L}'$ , та  $A = 0$ ,  $\text{tr } B = 0$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  у випадку класу  $\mathcal{L}''$ , а також для відповідних сингулярних та регулярних підкласів вказаних класів. Також продемонстровано як ліївські симетрії та перетворення еквівалентності можна ефективно використовувати для пониження порядку та інтегрування систем із цих класів.

Наведемо твердження, що ілюструє використання ліївських симетрій для пониження порядку систем із регулярного підкласу  $\mathcal{L}_1$  класу  $\mathcal{L}$ , тобто для систем, що нееквівалентні елементарній системі  $\mathbf{x}_{tt} = \mathbf{0}$ .

**Твердження.** Якщо система  $L_\theta$  із класу  $\mathcal{L}_1$  допускає відоме векторне поле ліївської симетрії з ненульовою  $t$ -компонентою, тоді її інтегрування зводиться за допомогою однієї квадратури та алгебраїчних операцій до побудови фундаментальної матриці лінійної системи  $n$  звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, тобто загальний порядок системи, що інтегрується, можна ефективно понизити на  $n$ .

Це твердження дає можливість записати покрокову процедуру інтегрування системи  $L_\theta$  із класу  $\mathcal{L}_1$ , що використовує відоме векторне поле ліївської симетрії  $Q = \tau\partial_t + (\eta^{ab}x^b + \chi^a)\partial_{x^a}$  цієї системи з  $\tau(t) \neq 0$ :

1. Замінимо векторне поле  $Q$  його відповідником  $Q' = \tau\partial_t + \eta^{ab}x^b\partial_{x^a}$  з нульовими значеннями компонент  $\chi^a$ .
2. Знаходимо матрицю  $H$  у результаті транспонування фундаментальної матриці розв'язків системи  $n$  звичайних диференціальних рівнянь першого порядку  $\tau\mathbf{y}_t + \eta\mathbf{y} = \mathbf{0}$ .

3. Знаходимо матриці  $\tilde{A}$  та  $\tilde{B}$  трансформованої системи, які обов'язково є сталими.
4. Розв'язуємо систему  $L_{\tilde{\vartheta}}$  зі сталими матричними коефіцієнтами  $\tilde{\vartheta} = (\tilde{A}, \tilde{B})$ .
5. Знаходимо функцію  $T$ , проінтегрувавши рівняння  $T_t = 1/\tau$ .
6. Відображаємо знайдений загальний розв'язок системи  $L_{\tilde{\vartheta}}$  у загальний розв'язок системи  $L_{\vartheta}$  за допомогою перетворення  $\Phi^{-1}$ , а саме  $\mathbf{x}(t) = H^{-1}(t)\tilde{\mathbf{x}}(T(t))$ .

Авторка висловлює щиру подяку Вячеславу Миколайовичу Бойку та Роману Омеляновичу Поповичу за постановку задач, підтримку та допомогу. Дослідження виконувалися у рамках проекту “Алгебраїчні та аналітичні методи у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними”, № держреєстрації 0121U110543.

1. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O. Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, arXiv:2105.05139.

# On the multipoint linear boundary-value problems in Hölder spaces

*Hanna Masliuk*

*masliuk.hanna@111.kpi.ua*

*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"*

We arbitrarily choose a compact interval  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  and numbers  $m \geq 1$ ,  $n \geq 0$ ,  $r \geq 2$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ . Consider the system  $m$  of linear differential equations of order  $r$ , depending on the numerical parameter  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ :

$$L(\varepsilon)y(t, \varepsilon) \equiv y^{(r)}(t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t, \varepsilon)y^{(r-j)}(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \quad (1)$$

for every fixed  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$  that  $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+r, \alpha})^m$  is an unknown vector-valued function, and all matrix-valued functions  $A_{r-j}(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n, \alpha})^{m \times m}$ , vector-valued function  $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n, \alpha})^m$  are arbitrarily given.

Lets arbitrarily choose natural numbers  $p$  i  $q_1, \dots, q_p$ . For each  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  consider the following multipoint boundary condition:

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^p \sum_{k=1}^{q_j} \sum_{l=0}^{n+r} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon), \varepsilon) = c(\varepsilon). \quad (2)$$

All matrices  $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm \times m}$ , points  $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a, b]$  and vector  $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$  are arbitrarily given. We use repeated sum of indices  $j$  and  $k$  considering to the next assumptions for behavior of points  $t_{j,k}(\varepsilon)$  when  $\varepsilon \rightarrow 0+$  depending on the parameter  $j$ .

We suppose that for each number  $j \in \{1, \dots, p\}$  all points  $t_{j,k}(\varepsilon)$ , where  $k \in \{1, \dots, q_j\}$ , have common limit when  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . This supposition is not made for points  $t_{0,k}(\varepsilon)$ , where  $k \in \{1, \dots, q_0\}$ .

We consider the following in the limit case  $\varepsilon = 0$  boundary condition:

$$B(0)y(\cdot, 0) \equiv \sum_{j=1}^p \sum_{l=0}^{n+r} \beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j, 0) = c(0), \quad (3)$$

where all matrices  $\beta_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{rm \times m}$ , points  $t_j \in [a, b]$  and vector  $c(0) \in \mathbb{C}^{rm}$  are given.

The boundary-value problems (1), (2) and (1) for  $\varepsilon = 0$ , (3) belong to the class of the most general with respect to the space  $C^{n+r, \alpha}$ .

Let us give the main results of this paper [1, p. 197].

**Theorem.** Let the boundary-value problem  $L(0)y(\cdot, 0) = 0$ ,  $B(0)y(\cdot, 0) = 0$  has only a trivial solution and for  $\varepsilon \rightarrow 0+$  and  $j \in \overline{1, p}$  are fulfilled the following conditions:

$$(a) \ A_k(\cdot, \varepsilon) \rightarrow A_k(\cdot, 0) \text{ is } (C^{n,\alpha})^{m \times m} \text{ for each } k \in \overline{0, r-1};$$

$$(b1) \ t_{j,k}(\varepsilon) \rightarrow t_j \text{ for each } k \in \overline{1, q_j};$$

$$(b2) \ \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \rightarrow \beta_j^{(l)}(0) \text{ for all } l \in \overline{0, n+r};$$

$$(b3) \ \|\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^\alpha \rightarrow 0 \text{ for all } k \in \overline{1, q_j};$$

$$(b4) \ \|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \rightarrow 0 \text{ for all } k \in \overline{1, q_j}, l \in \overline{0, n+r-1};$$

$$(b5) \ \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ for all } k \in \overline{1, q_0}, l \in \overline{0, n+r}.$$

Then the solution of the boundary-value problem (1), (2) continuously depends on the parameter  $\varepsilon$ .

The proof of this result is given in [1, p. 198-201].

1. Маслюк Г. О. Багатоточкові країові задачі з параметром для диференціальних рівнянь високого порядку на просторах Гельдера / Г. О. Маслюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 193 – 203.

## Extension of linear operators with applications

Vasile Neagu

vasileneagu45@gmail.com

Moldova State University, Republic of Moldova

We propose a method for solving singular integral equations perturbed by compact operators. The method is based on the concept of extension of a linear bounded operators in Banach spaces.

Let  $\mathbf{V}$  be some linear Banach algebra of bounded operators acting in a Banach space  $\mathbf{B}$ , and  $\mathbf{V}^{(m)}$  be a Banach algebra of elements of the form  $\|A_{jk}\|_{j,k=1}^m$ , where  $A_{jk} \in \mathbf{V}$ . If  $\mathbf{B}^{(m)}$  is a Banach space of vectors  $X = [x_1, \dots, x_m]$  with elements  $x_j \in \mathbf{B}$  and with the norm  $\|X\| = \max_k \|x_k\|$ , then  $\mathbf{V}^{(m)}$  is Banach algebra of linear bounded operators in the space  $\mathbf{B}^{(m)}$ . The unit operators acting in the spaces  $\mathbf{V}$  and  $\mathbf{V}^{(m)}$  will be denoted by  $I$  and  $I_m$ , respectively. Suppose also that  $I \in \mathbf{V}$  and  $I_m \in \mathbf{V}^{(m)}$ .

Let

$$A = \sum_{j=1}^r A_{j1} A_{j2} \cdots A_{js},$$

where  $A_{jk} \in \mathbf{V}$ . An operator  $\tilde{A} \in \mathbf{V}^{(m)}$  is called a *linear extension* (of order  $m$ ) of an operator  $A$  if:

- 1) the elements of the matrix  $\tilde{A}$  are linear combinations of the elements  $A_{jk}$  and the unit  $I$ ;
- 2) there exist invertible operators  $Y$  and  $Z$  from the algebra  $\mathbf{V}^{(m)}$ , such that

$$\tilde{A} = Y \cdot \begin{pmatrix} I_{m-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot Z.$$

It is easy to see that the operator  $A = \sum_{j=1}^r A_{j1} A_{j2} \cdots A_{js}$  and its linear extension  $\tilde{A}$  (if it exists) are or are not simultaneously Noetherian in the spaces  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{B}^{(m)}$ , respectively, and

$$\dim \ker A = \dim \ker \tilde{A}, \quad \dim \operatorname{coker} A = \dim \operatorname{coker} \tilde{A}.$$

The following statement hold

**Теорема 1.** *Each element  $A$  from the algebra  $\mathbf{V}$  of the form  $A = \sum_{j=1}^r A_{j1} A_{j2} \cdots A_{js}$  ( $A_{jk} \in \mathbf{V}$ ) admits linear extension (order  $m \leq r(s+1)+1$ ).*

**Наслідок 1.** *The operator  $A$  is invertible in space  $\mathbf{B}$  if and only if the operator*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} M & F \\ G & 0 \end{pmatrix}$$

reversible in space  $\mathbf{B}^{(r(s+1)+1)}$ .

**Наслідок 2.** Let  $A_0, C_k, D_k \in L(\mathbf{B})$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) and  $\hat{A}$  be the operator defined by the equality

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} I & 0 & \dots & 0 & D_1 \\ 0 & I & \dots & 0 & D_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I & D_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n & A_0 \end{vmatrix}.$$

In this case, the following statements is true:

$$\tilde{A} \in GL(\mathbf{B}^{n+1}) \Leftrightarrow A = A_0 - \sum_{k=1}^n C_k D_k \in GL(\mathbf{B}).$$

**Наслідок 3.** If a vector  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1})$  ( $\in \mathbf{B}^{(n+1)}$ ) is a solution to an equation  $\tilde{A}\varphi = \tilde{\psi}$  with a right-hand side  $\tilde{\psi} = (0, 0, \dots, \psi)$ , then equality  $A\varphi_{n+1} = \psi$  holds. That is, the coordinate at the place  $n+1$  of the solution to the equation  $\tilde{A}\varphi = \tilde{\psi}$  with the right-hand  $\tilde{\psi} = (0, 0, \dots, \psi)$  side is the solution to the equation  $Af = \psi$ . Solutions of this type exhaust all solutions of the equation  $Af = \psi$ .

Theorem 1 and Corollaries 1–3 are used to solve some singular integral equations perturbed by compact operators.

# On the global finite mean oscillation and the Beltrami equation

Ruslan Salimov, Mariia Stefanchuk

ruslan.salimovi@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine

Let  $D$  be a domain in the complex plane  $\mathbb{C}$  and let  $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$  be a measurable function with  $|\mu(z)| < 1$  a.e. (almost everywhere) in  $D$ . The *Beltrami equation* is the equation of the form

$$f_{\bar{z}} = \mu(z)f_z, \quad (1)$$

where  $f_{\bar{z}} = (f_x + if_y)/2$ ,  $f_z = (f_x - if_y)/2$ ,  $z = x + iy$ , and  $f_x$  and  $f_y$  are partial derivatives of  $f$  in  $x$  and  $y$ , correspondingly. The function  $\mu$  is called the *complex coefficient* and

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

the *dilatation quotient* for the equation (1). The Beltrami equation (1) is said to be *degenerate* if  $\text{ess sup } K_\mu(z) = \infty$ . The existence theorem for homeomorphic  $W_{\text{loc}}^{1,1}$  solutions was established to many degenerate Beltrami equations, see, e.g., related references in the recent monographs [1], [3], [5]; cf. also [2], [6] – [10].

Similarly to [4] (cf. also [6], [8]), we say that a function  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  has *global finite mean oscillation at a point*  $z_0 \in \mathbb{C}$ , abbr.  $\varphi \in GFMO(z_0)$ , if

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi R^2} \int_{B(z_0, R)} |\varphi(z) - \bar{\varphi}_R| dx dy < \infty, \quad (2)$$

where

$$\bar{\varphi}_R = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B(z_0, R)} \varphi(z) dx dy$$

is the mean value of the function  $\varphi(z)$  over  $B(z_0, R)$ ,  $R > 0$ . Here  $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ , and condition (2) includes the assumption that  $\varphi$  is integrable in  $B(z_0, R)$  for  $R > 0$ .

For a mapping  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , we set

$$l_f(z_0, e) = \min_{|z - z_0| = e} |f(z) - f(z_0)|$$

and

$$\delta_\infty = \sup_{R \in (e^e, +\infty)} \frac{1}{\pi R^2} \int_{B(z_0, R)} |K_\mu(z) - K_{\mu, z_0}(R)| dx dy,$$

$$K_{\mu,z_0}(R) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B(z_0,R)} K_\mu(z) dx dy, \quad k_0 = K_{\mu,z_0}(e).$$

**Theorem 1.** Let  $\mu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  be a measurable function with  $|\mu(z)| < 1$  a.e. and  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  be a homeomorphic  $W_{\text{loc}}^{1,1}$  solution of the Beltrami equation (1). If  $K_\mu \in GFM O(z_0)$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ , then

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|}{(\log R)^{\frac{2\pi}{C}}} \geq l_f(z_0, e),$$

where  $C$  is a positive constant depending only on  $\delta_\infty$  and  $k_0$ .

1. K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane, Princeton University Press (2009).
2. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, On recent advances in the Beltrami equations, Ukr. Mat. Visn. (4), **7**, 467 – 515 (2010) (translated into English by Springer starting from 2010).
3. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics, Vol. 26, Springer, New York etc. (2012).
4. A. Ignat'ev, V. Ryazanov, Finite mean oscillation in the mapping theory, Ukr. Mat. Visn. (3), **2**, 403 – 424 (2005) (translated by AMS till 2009 as Ukrainian Math. Bull.).
5. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York (2009).
6. V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, Beltrami equation and FMO functions. Contemp. Math., **382**, 357–364 (2005).
7. V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, On ring solutions of Beltrami equation, J. d'Analyse Math., **96**, 117 – 150 (2005).
8. V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, Finite mean oscillation and the Beltrami equation. Israel J. Math., **153**, 247–266 (2006).
9. V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, The Beltrami equation and ring homeomorphisms. Ukrain. Math. Bull. (1), **4**, 79–115 (2007) (in Russian).
10. V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, On integral conditions in the mapping theory, Ukr. Mat. Visn., **7**, 73 – 87 (2010) (translated into English by Springer starting from 2010).

# ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕСКІЧЧЕНОЮ ПАМ'ЯТЮ

*Станжиський О.М.\*, Кичмаренко О.Д.\*\*, Могильова В.В.\*\*\*,  
Ковалчук Т.В.\*\*\*\**

\* [ostanzh@gmail.com](mailto:ostanzh@gmail.com), \*\* [olga.kichmarenko@gmail.com](mailto:olga.kichmarenko@gmail.com)

\*\*\* [mogylova.viktoria@gmail.com](mailto:mogylova.viktoria@gmail.com), \*\*\*\* [8172@ukr.net](mailto:8172@ukr.net)

*\* Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

*\*\* Одесський національний університет імені І. І. Мечникова*

*\*\*\* Національний технічний університет України «Київський  
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

*\*\*\*\* Державний торговельно-економічний університет*

Функціонально-диференціальні рівняння широко використовуються в якості моделей різноманітних еволюційних процесів. Дослідження таких систем вимагає розробки та застосування спеціальних методів. В роботах [1]-[3] досліджуються системи функціонально-диференціальних рівнянь. В роботі [4] отримано достатні умови існування оптимальних керувань для систем функціонально-диференціальних рівнянь із скінченим запиненням.

Розглянемо  $BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$  - банахів простір неперервних вектор-функцій визначених на  $(-\infty, 0]$ , які діють в простір  $\mathbb{R}^n$  та рівномірну метрику

$$\|\varphi\| = \max_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|,$$

де  $|\cdot|$  - норма в  $\mathbb{R}^n$ , а норму матриці, узгоджену з нормою вектора будемо позначати  $\|\cdot\|$ . Позначимо  $L_p = L_p((\infty, 0], \mathbb{R}^m)$ ,  $p > 1$  - банахів простір  $p$ -інтегровних  $m$ -вимірних вектор-функцій із стандартною нормою. Нехай  $x \in BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$  і початкова функція  $\varphi \in BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ . Якщо  $x(0) = \varphi(0)$ , то функція :

$$x(t, \varphi) = \begin{cases} \varphi(t), t \in [-\infty, 0] \\ x(t), t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

є неперевною на  $(-\infty, T]$ . Позначимо  $x_t(\varphi) \in BC((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$  для кожного  $t > 0$  при  $\theta \in (-\infty, 0]$  як  $x_t(\varphi) = x(t + \theta; \varphi)$ .

Функція  $x(t)$  є розв'язком початкової задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t), x(s) = \varphi(s), s \in (-\infty, 0], \varphi \in BC$$

на  $[0, \infty)$ , якщо  $\forall t \geq 0$  функція  $x(t, \varphi)$  з (1) задовільняє співвідношення:

$$x(t, \varphi) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x_s(\varphi)) ds$$

Нехай  $t \in [0, T]$  і  $D$  - деяка область в  $[0, T] \times BC$ ,  $\partial D$  - границя цієї області і  $\bar{D} = D \cup \partial D$ .

Розглянемо задачу оптимального керування функціонально-диференціальною системою :

$$\dot{x} = f_1(t, x_t) + \int_{-\infty}^0 f_2(t, x_t, y) u(t, y) dy, t \in [0, T] \quad (2)$$

$$x(t) = \varphi_0(t), t \in (-\infty, 0] \quad (3)$$

із критерієм якості

$$J[u] = \int_0^\tau L(t, x_t, u(t, \cdot)) dt \rightarrow \inf \quad (4)$$

на  $[0, T]$ , де  $\varphi_0 \in BC$  - фіксований елемент, такий що  $(0, \varphi_0) \in D$ ,  $x(t)$  - фазовий вектор в  $\mathbb{R}^d$ ,  $x_t$  - фазовий вектор  $BC$ ,  $\tau$  - момент часу, коли розв'язок  $(t, x_t)$  виходить на границю  $\partial D$ ,  $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $f_2 : D \times (-\infty, 0] \rightarrow M^{d \times m}$ , де  $M^{d \times m}$  -  $d \times m$  вимірні матриці.

Дляожної пари  $(t, \varphi) \in D$   $f_2(t, \varphi, \cdot) \in L_q((-\infty, 0], M^{d \times m})$  з нормою

$$\|f_2(t, \varphi, \cdot)\|_{L_q} = (\int_{-\infty}^0 |f_2(t, \varphi, y)|^q dy)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1, p > 1, L : D \times L_p \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Керування  $u \in L_p([0, T] \times (-\infty, 0])$  таке, що  $u(t, y) \in U$ ,  $U$  - замкнена та опукла множина в  $\mathbb{R}^m$  майже для всіх  $t, y$ .

Для задачі (2),(3) доведена теорема про існування, єдиність та продовжуваність розв'язків системи функціонально-диференціальних рівнянь, в яких інтервал запізнення є нескінченим. Достатні умови існування оптимальних керувань задачі оптимального керування системами із нескінченою пам'яттю (2)-(4) отримано в термінах правих частин рівнянь руху та функції критерію якості .

1. Hale J.K., *Theory of functional differential equations*, - New-York : Springer-Verlag, 1977 - 365 p.
2. Сергеєва Л.М., Бігун Я.Й., *Про глобальні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання*. - 2011.
3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф., *Введение в теорию функціонально-диференціальних уравнений*. - М.:Наука, 1991- 280с.
4. Kichmarenko O. and Stanzhytskyi O. Sufficient Conditions for the Existence of Optimal Controls for Some Classes of Functional-Differential Equations // Nonlinear dynamics and systems theory. 2018. – V.18, No 2. – P.196 211.

**Про майже-періодичні розв'язки нелінійних зліченних систем диференціальних рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах**

*Юрій Теплінський*

[teplinsky.yuriy@gmail.com](mailto:teplinsky.yuriy@gmail.com)

*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка*

Зліченними системами диференціальних рівнянь називають рівняння, визначені в банаховому просторі обмежених числових послідовностей. Тут ми розглянемо неїлінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi, x)x + \varepsilon f(\varphi), \quad (1)$$

де  $\varepsilon$  – додатний параметр, вектор частот  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \in \mathbf{m}$ ,  $\omega_i > 0$  при всіх натуральних  $i$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$ ,  $A(\varphi, x) = (a_{ij}(\varphi, x))_{i,j=1}^{\infty}$  – нескінчна матриця з дійсними елементами,  $\mathbf{m}$  – простір обмежених послідовностей дійсних чисел,

$$\|\omega\| = \sup_i \{\omega_i\} = \omega_0 < \infty, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathbf{m}, \quad \|x\| = \sup_i \{|x_i|\},$$

$f(\varphi) = (f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots, f_n(\varphi), \dots)$  – векторна функція з дійсними координатами, причому матриця  $A(\varphi, x)$  та функція  $f(\varphi)$   $2\pi$ -періодичні відносно  $\varphi_i$  ( $i=1,2,3,\dots$ ), що дає можливість визначити їх на декартовому добутку  $\mathcal{T}_{\infty} \times D$ ,  $D = \{x \in \mathbf{m} \mid \|x\| \leq d = \text{const} < \infty\}$  та нескінченновимірному торі  $\mathcal{T}_{\infty}$  відповідно і вважати неперервними на своїх областях визначення. Вважатимемо також, що

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(\varphi, x) \in \mathcal{T}_{\infty} \times D} |a_{ij}(\varphi, x)| = A = \text{const} < \infty$$

і при всіх  $\varphi \in \mathcal{T}_{\infty}$  виконується нерівність  $\|f(\varphi)\| \leq F$ , де  $F$  – додатна стала, а частоти  $\omega_i$  є несумірними, тобто з рівності  $\sum_{i=1}^{\infty} k_i \omega_i = 0$ , де  $k_i$  – цілі числа, випливає, що  $k_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots$ .

Підставивши розв'язок першого рівняння системи (1)  $\varphi = \omega t + \psi$  з початковою умовою  $\varphi(0) = \psi \in \mathcal{T}_{\infty}$  у друге її рівняння, одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t + \psi, x)x + \varepsilon f(\omega t + \psi), \quad (2)$$

залежну від  $\psi \in \mathcal{T}_{\infty}$  як від параметру,  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots)$ .

Основна задача полягає у відшукуванні достатніх умов, при яких системи рівнянь (1) або, що те саме, система рівнянь (2) мають інваріантний тор, і наблизити породжуючу його функцію  $u(\psi)$  з потрібною точністю

аналогічною функцією, побудованою для системи рівнянь, одержаної з даної в процесі її лінеаризації. Після цього застосовується процес укорочення останньої системи відносно кутової змінної і функція, яка породжує її інваріантний тор, апроксимується аналогічною функцією для лінійної укороченої системи, визначеної на декартовому добутку  $\mathcal{T}_n \times \mathbf{m}$ , де  $\mathcal{T}_n$  – скінченновимірний тор. Він вкритий траекторіями квазіперіодичних розв'язків вказаної укороченої системи, якими і можна наблизити майже-періодичні розв'язки системи (1). При цьому майже-періодичні функції розуміються в сенсі Бора, а для побудови процесу лінеаризації системи застосовується відомий метод функції Гріна-Самойленка без використання поняття "грубості" цієї функції.

Нагадаємо, що інваріантним тором системи рівнянь (1) називають поверхню  $\mathbf{T}$  в просторі  $\mathbf{m}$ , визначену відображенням  $u(\psi) : \mathcal{T}_\infty \rightarrow \mathbf{m}$ , а саме

$$x = u(\psi) = \{u_1(\psi), u_2(\psi), \dots, u_n(\psi), \dots\}, \quad \psi \in \mathcal{T}_\infty,$$

при умові, що функція  $u(\psi) \in C^0(\mathcal{T}_\infty)$ , обмежена на  $\mathcal{T}_\infty$ , функції  $u_i(\omega t + \psi)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) неперервно диференційовні відносно  $t \in R^1$  і

$$\frac{du(\omega t + \psi)}{dt} = A(\omega t + \psi, u(\omega t + \psi))u(\omega t + \psi) + \varepsilon f(\omega t + \psi)$$

для всіх  $t \in R^1$ ,  $\psi \in \mathcal{T}_\infty$ , де векторна функція  $u(\omega t + \psi)$  диференціюється у покоординатному сенсі. При цьому відображення  $u(\psi)$  називають функцією, породжуючою інваріантний тор  $\mathbf{T}$ .

Точні формулювання згаданих вище умов і основних результатів наведено автором у статті [1].

І зауважимо нарешті, що аналоги задачі, яка розглядається в цьому повідомленні, для випадків лінійної та квазілінійної зліченних систем розв'язано в роботах [2], [3].

1. Теплінський Ю. В. Про наближення майже-періодичних розв'язків не-лінійної зліченної системи диференціальних рівнянь квазіперіодичними розв'язками деякої лінійної системи // Буковинський Математичний Журнал. – 2021. Т. 9, № 2, с. 111-123.
2. Теплінський Ю. В. Наближений метод побудови майже-періодичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь, визначених на не-скінченновимірних торах // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. Кам’янець-Подільський. – 2020. Вип. 21, С. 137–144.
3. Теплінський Ю. В. Про інваріантні тори квазілінійних зліченних систем диференціальних рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Не-лінійні коливання. – 2020. Т. 23, № 4, с. 253–264.

## Збіжність процесів у моделях нейродинаміки з післядією

Денис Хусайнов, Тетяна Шакотько, Андрій Шатирко

d.y.khusainov@gmail.com, trachuk85@ukr.net,  
shatyrko.a@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Під терміном нейродинаміка зазвичай розуміють область знань, у якій нейронні мережі розглядаються як нелінійні динамічні системи й основна увага приділяється проблемам стійкості та збіжності [1].

Системи рівнянь, що описують динамічні процеси нейродинаміки, мають дуже велику розмірність. Класичні способи дослідження їх стійкості наштовхуються на важкі проблеми великої розмірності. Ще однією особливістю, яка виникає при дослідженні динамічних процесів у нейродинаміці, є врахування часу післядії, бо реальні процеси неспроможні відбуватися миттєво.

У роботі [1] в якості моделей неперервних нейронних сіток Хопфілда (НСХ) було запропоновано системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$C_i \frac{dy_i}{dt} = -\frac{1}{R_i} y_i(t) + \sum_{j=1}^n v_{ij} \varphi_j(y_j(t)) + I_i, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Авторами в [2] було показано, що (1) при певних умовах, зокрема з урахуванням фактору післядії, можна звести до розгляду системи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -a_{11}x_1(t) + b_{11}F_{11}(x_1(t-\tau)) + \\ &+ b_{12}F_{12}(x_2(t-\tau)) + \dots + b_{1n}F_{1n}(x_n(t-\tau)), \\ \dot{x}_2(t) &= -a_{22}x_2(t) + b_{21}F_{21}(x_1(t-\tau)) + \\ &+ b_{22}F_{22}(x_2(t-\tau)) + \dots + b_{2n}F_{2n}(x_n(t-\tau)), \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= -a_{nn}x_n(t) + b_{n1}F_{n1}(x_1(t-\tau)) + \\ &+ b_{n2}F_{n2}(x_2(t-\tau)) + \dots + b_{nn}F_{nn}(x_n(t-\tau)), \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$F_{ij}(x_j(t-\tau)) = f_{ij}(x_j(t-\tau) + y_j^0).$$

Ї, оскільки

$$F_{ij} = 0, \quad i, j = \overline{1, n},$$

тому дослідження стійкості положення рівноваги й збіжності розв'язків до нього зводиться до дослідження стійкості нульового положення рівноваги  $O(0, 0, \dots, 0)$  системи "рівнянь збурень" (2).

Нехай функції  $F_{ij}(x_j(t-\tau))$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  задовольняють так званим "умовам лінійних обмежень".

У цьому випадку асимптотичну стійкість нульового положення рівніваги системи (2) й оцінку збіжності можна отримати з використанням "класичних" квадратичних функцій Ляпунова [3,4]

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n h_{ii} x_i^2, \quad h_{ii} > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Оскільки в диференціальних рівняннях (2) присутні члени з запізнюванням аргументу, то при оцінці повної похідної в силу системи будемо використовувати "умову типу Б.С.Разуміхіна" [5]. Має місце наступне твердження.

**Теорема 1.** Нехай параметри  $a_{ii} > 0$ ,  $h_{ii} > 0$ ,  $b_{ij}, K_{ij} > 0$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  системи (2) такі, що матриця  $2C_1(h, a) - C_2(h, L)$ , де

$$C_1(h, a) = \begin{bmatrix} h_{11}a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{22}a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn}a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C_2(h, L) = \begin{bmatrix} 2h_{11}L_1 & h_{11}L_1 + h_{22}L_2 & \dots & h_{11}L_1 + h_{nn}L_n \\ h_{11}L_1 + h_{22}L_2 & 2h_{22}L_2 & \dots & h_{22}L_2 + h_{33}L_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{11}L_1 + h_{nn}L_n & h_{22}L_2 + h_{33}L_3 & \dots & 2h_{nn}a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$L_i = \sqrt{\varphi(h)} \times \sum_{j=1}^n |b_{ij}| K_{ij},$$

$$\varphi(h) = h_{\max}/h_{\min}, \quad h_{\min} = \min_{i=1, n} \{h_{ii}\}, \quad h_{\max} = \max_{i=1, n} \{h_{ii}\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

є додатно визначеною.

Тоді положення рівноваги стійке за Ляпуновим.

Нульовий розв'язок не тільки стійкий, а й має асимптотичні властивості стійкості, тобто процес навчання нейромережі відбувається за експоненційним законом. З метою доведення цього факту використовується неавтономна функція Ляпунова

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = e^{\gamma t} \sum_{i=1}^n h_{ii} e^{\gamma t} x_i^2, \quad h_{ii} > 0, \quad \gamma > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

**Теорема 2.** *Нехай параметри  $a_{ii} > 0$ ,  $h_{ii} > 0$ ,  $b_{ij}, K_{ij} > 0$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  системи (2) такі, що матриця*

$$C_0(h, a, L, 0) = 2C_1(h, a) - \sqrt{\varphi(h)}C_2(h, L)$$

*додатно визначена.*

*Тоді нульове положення рівноваги системи (2) буде асимптотично стійким й має місце наступна оцінка збіжності його норми*

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\varphi(h)}\|x(0)\| \exp\left\{-\frac{\gamma_0 t}{2}\right\}, \quad \|x(0)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(0)}.$$

*Тут  $\gamma_0 > 0$  – величина, за якої матриця*

$$C_0(h, a, L, \gamma_0) = 2C_1(h, a) - \gamma_0 H - e^{\gamma_0 \tau/2} \varphi(h) C_2(h, L)$$

*також додатно визначена.*

Дана робота є свого роду продовженням робіт авторів [6, 7], але під іншим кутом зору. У подальшому для дослідження якісних процесів в подібних системах можна використовувати функціонали Ляпунова-Красовського, оскільки запропонований підхід у скінченно-вимірних просторах з умовою типу Б.С.Разуміхіна [5] все ж дає достатньо жорсткі результати. Але його перевага полягає у певній конструктивності з точки зору проведення можливих чисельних експериментів й обчислень.

1. Haykin, S. Neural Network: A Comprehensive Foundation. 2nd Edition, Prentice Hall. – New York. – 1998.
2. Хусайнов Д.Я., Шатирко А.В., Бичков О.С., Шакотько Т.І. Стійкість та збіжність в моделях керуючих нейродинамічних систем // Актуальні проблеми теорії керуючих систем у комп’ютерних науках (АПТКС’2021). Праці конференції, 21-24 грудня 2021 р. – Слов’янськ. – С. 121-126.
3. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л., Гос. издат. тех.-теор. дит. – 1950. - 471 с.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М., Наука, 1966. – 532 с.
5. Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. – М., Наука, 1988. – 108 с.
6. Шатирко А.В., Диблик Й., Хусайнов Д.Я., Баштинец Я. Сходимость процессов нейродинамики в модели Хопфілда // Штучний інтелект. – №3-4. – 2017.
7. Khusainov D.Ya., Diblik Y., Bastinec Ja., Shatyrko A.V. Investigating Dynamics of One Weakly Nonlinear System with Delay Argument // Journal of Automation and Information Sciences. – 50(1). – 2018. – Pp. 20-38.

# Коливність розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та відповідних рівнянь на часових шкалах

*Вікторія Цань<sup>1</sup>, Тетяна Ковалъчук<sup>2</sup>*

*fizmatovka@gmail.com, 8172@ukr.net*

<sup>1</sup> *Київський національний університет імені Тараса Шевченка,*

<sup>2</sup> *Державний торгово-економічний університет*

Часовою шкалою  $\mathbb{T}$  називають довільну непорожню замкнуту підмножину дійсної осі. Для довільної множини  $A \subset \mathbb{R}$  визначаються  $A_{\mathbb{T}} := A \cap \mathbb{T}[1]$ . Для кожної точки  $t \in \mathbb{T}$  визначається три функції, що характеризують шкалу:

- *Оператор стрибка вперед*  $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  визначають як

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} | s > t\}.$$

- *Оператор стрибка назад*  $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  визначається як

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} | s < t\}.$$

- *Функція зернистості*  $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$  це

$$\mu(t) := \sigma(t) - t.$$

Точки  $t \in \mathbb{T}$  називаються ліво-щільними (LD), (ліво-розсіяними (LS), право-щільними (RD) або право-розсіяними (RS)) якщо  $\rho(t) = t$  ( $\rho(t) < t$ ,  $\sigma(t) = t$  або  $\sigma(t) > t$  відповідно). Якщо  $\mathbb{T}$  має право-розсіяний максимум  $M$ , тоді визначається  $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus \{M\}$ ; інакше покладемо  $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ .

Функцію  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^d$  називають  $\Delta$ -диференційованою при  $t \in \mathbb{T}^k$ , якщо границя

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma - t}$$

існує в  $\mathbb{R}^d$ .

Розглядається лінійне диференціальне рівняння другого порядку на відрізку  $[0, a]$

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \tag{1}$$

де  $p \in C([0, a])$ , та відповідне йому рівняння на множині часових шкал  $\mathbb{T}_\lambda$ , що має вигляд

$$x_\lambda^{\Delta\Delta} + p(t)x_\lambda = 0, \tag{2}$$

де  $t \in \mathbb{T}_\lambda$ ,  $x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^d$ , і  $x_\lambda^\Delta(t)$  – дельта-похідна функції  $x_\lambda(t)$  на  $\mathbb{T}_\lambda$ . Припустимо, що  $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ , і  $\lambda = 0$  гранична точка множини  $\Lambda$ .

Визначимо, що  $\mu_\lambda := \sup_{t \in \mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$ , де  $\mu_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \rightarrow [0, \infty)$  - функція зернистості. Причому, якщо  $\mu_\lambda(t) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , то  $\mathbb{T}_\lambda$  збігається з неперервною шкалою часу  $T_0 = \mathbb{R}$ .

**Означення 1.1** Розв'язок  $x_\lambda(t)$  рівняння (2) має узагальнений нуль в  $t \in \mathbb{T}_\lambda$ , якщо  $x_\lambda(t) = 0$  або якщо  $t$  є розсіяною справа і  $x_\lambda(t) \cdot x_\lambda(\sigma(t)) < 0$ .

**Означення 1.2** Якщо на деякому інтервалі розв'язок  $x_\lambda(t)$  матиме не менше двох узагальнених нулів, то будемо називати його коливним.

**Означення 1.3** Розв'язки  $x(t)$  і  $x_\lambda$  рівнянь (1) і (2) назовемо відповідними, якщо  $x(t_0) = x_\lambda(t_0) = x_0$ .

Досліджено взаємозв'язок коливності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку та коливності розв'язків відповідного динамічного рівняння на півосі.

**Теорема 1.** Якщо розв'язок  $x(t)$  диференціального рівняння (1) коливний на  $[0, a]$ , то для достатньо малих  $\mu_\lambda$  розв'язок  $x_\lambda(t)$  динамічного рівняння (2) також коливний на  $[0, a]_{\mathbb{T}_\lambda}$ .

**Теорема 2.** Якщо розв'язок  $x_\lambda(t)$  динамічного рівняння (2) коливний на відрізку  $[0, a]_{\mathbb{T}_\lambda}$  для достатньо малих  $\mu_\lambda$ , то розв'язок  $x(t)$  диференціального рівняння (1) також коливний на  $[0, a]$ .

У ході дослідження також було доведено ряд допоміжних тверджень.

Розглядалися розв'язки динамічного рівняння (2) при  $t \in [0, a]_{\mathbb{T}_\lambda}$ ,  $a > 0$  і  $p \in C([0, a])$  з початковими даними  $t_0 = 0$ ,  $x_\lambda(0) = x_0$ ,  $x_\lambda^\Delta(0) = x_1$ , де

$$x_0^2 + x_1^2 = 1. \quad (3)$$

Тоді справедливі такі твердження.

**Лема 1.** Існують такі  $\mu_0$  і  $B_0$ , що при всіх  $0 < \mu_\lambda \leq \mu_0$  і для будь-якого узагальненого нуля  $t_k$  довільного розв'язку  $x_\lambda(t)$  рівняння (2) із початковими даними (3) виконується нерівність

$$|x_\lambda^\Delta(t_k)| \geq \nu(\mu_\lambda). \quad (4)$$

**Лема 2.** Існують  $\varepsilon > 0$  і  $\mu_0 > 0$ , що при всіх  $0 < \mu_\lambda \leq \mu_0$  для всіх розв'язків  $x_\lambda(t)$  рівняння (2) із початковими даними (3) і в  $\varepsilon$ -околі всіх узагальнених нулів  $t_k$   $x_\lambda^\Delta(t)$  зберігає знак, тобто або

$$\forall t \in [t_k - \varepsilon; t_k + \varepsilon] : x_\lambda^\Delta(t) > 0, \quad (5)$$

або

$$\forall t \in [t_k - \varepsilon; t_k + \varepsilon] : x_\lambda^\Delta(t) < 0, \quad (6)$$

**Лема 3.** Для довільного  $\delta \leq \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  з леми 2, існують  $\mu_0$  та  $\gamma > 0$  такі, що для довільного  $\mu_\lambda \leq \mu_0$  і довільного узагальненого нуля  $t_0$  розв'язку  $x_\lambda(t)$  рівняння (2) виконується:

$$|x_\lambda(t_l)| \geq \gamma \text{ та } |x_\lambda(t_r)| \geq \gamma, \quad (7)$$

$$\text{де } t_l = \inf\{t \in \mathbb{T}_\lambda | t > t_0 - \delta\}, \quad t_r = \sup\{t \in \mathbb{T}_\lambda | t < t_0 + \delta\}.$$

1. Liubarshchuk Ie., Bihun Ya., Cherevko I. Non-Stationary Differential-Difference Games of Neutral Type // Dynamic Games and Applications. – 2019. – Vol. 9, Is. 3. – Pp. 771–779.
2. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.
3. Samoilenko A., Petryshyn R. Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems. – Dordrecht: Boston/London: Kluwer Academic Publishers. – 2004. – 317 p.

**Умови розв'язності задачі, оберненої до  
інтегро-диференціального рівняння Фредгольма  
з виродженним ядром**

*Сергей Чуйко, Олексій Чуйко, Влада Кузьміна*

chujko-slav@ukr.net

*Донбаський держ. пед. ун-т, 84 112, Україна, Донецька обл., Слов'янськ*

Актуальність вивчення теорії інтегрально-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром пов'язана з численними застосуваннями в задачах механіки, аеродинаміки, відновлення параметрів, а також теорії коливань. У роботі суттєво використовується апарат псевдообернення (за Муром-Пенроузом) матриць. Запропоновані умови існування, а також конструкція розв'язку задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку інтегрально-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром. Запропонована схема дослідження задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку інтегрально-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром може бути перенесена на задачі, обернені до задачі про знаходження розв'язку інтегрально-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром, яке містить диференціально-алгебраїчний оператор. З іншого боку, у разі нерозв'язності задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку інтегрально-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром таку задачу можна регуляризувати.

Нетерова крайова задача для лінійного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром вперше була розв'язана у статті [1]. Обернені задачі для інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма мало дослідженні. Досліджуємо задачу, обернену до лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром

$$y'(t) = A y(t) + \Phi \int_a^b \left[ B y(s) + C y'(s) \right] ds \quad (1)$$

за відомим розв'язком цієї задачі [1, 2]

$$y(t) := \varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'(t) := \varphi'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b].$$

Тут  $A, B, C, \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — невідомі сталі матриці. У наслідок автономності рівняння (1) можна припустити, що  $\Phi := I_n$ . Дотримуючись схеми методу найменших квадратів [3], вимагатимемо мінімізації величини нев'язки

$$\Delta_0 := \left\| \varphi'(t) - A \varphi(t) - \Phi \int_a^b \left[ B \varphi(s) + C \varphi'(s) \right] ds \right\|_{\mathbb{L}^2[a, b]}^2 \rightarrow \min.$$

Позначимо

$$\left\{ \Xi_j \right\}_{j=1}^{n^2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

природний базис простору  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Позначимо також оператор

$$\mathcal{M}[A] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n},$$

як оператор, який ставить у відповідність матриці  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  вектор  $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A]$ , утворений з  $n$  стовпців матриці  $A$ , а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

який ставить у відповідність вектору  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$  матрицю  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Матриці  $A, B$  та  $C$  шукатимемо у вигляді сум

$$A = \sum_{j=1}^p \Xi_j \alpha_j, \quad B = \sum_{j=1}^q \Xi_j \beta_j, \quad C = \sum_{j=1}^r \Xi_j \gamma_j, \quad \alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}^1;$$

тут

$$p \leq n^2, \quad q \leq n^2, \quad r \leq n^2.$$

Позначимо матрицю Грама

$$\Gamma_0 := \int_a^b \Omega_0^*(t) \Omega_0(t) dt \in \mathbb{R}^{(p+q+r) \times (p+q+r)};$$

тут

$$\Omega_0(t) := \begin{pmatrix} \Xi_1 \varphi(t) & \dots & \Xi_p \varphi(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \int_a^b \Xi_1 \varphi(t) dt & \dots & \int_a^b \Xi_q \varphi(t) dt & \int_a^b \Xi_1 \varphi'(t) dt & \dots & \int_a^b \Xi_r \varphi'(t) dt \end{pmatrix}.$$

Невідомий вектор  $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{(p+q+r)}$  визначає рівняння

$$\Gamma_0 \gamma_0 = \int_a^b \Omega_0^*(t) \varphi'(t) dt, \tag{2}$$

розв'язне за умови

$$\det \Gamma_0 \neq 0. \tag{3}$$

За умови (3) рівняння (2) має єдиний розв'язок

$$\gamma_0 = \Gamma_0^{-1} \int_a^b \Omega_0^*(t) \varphi'(t) dt,$$

який визначає матриці

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0 \gamma_0), \quad \mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} I_p & O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times (p+q+r)},$$

$$B = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_1 \gamma_0), \quad \mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} O & I_q & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times (p+q+r)}$$

та

$$C = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_2 \gamma_0), \quad \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} O & O & I_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times (p+q+r)}.$$

Умова (3) являє собою необхідну умову мінімізації величини нев'язки  $\Delta_0$ ; достатню умову мінімізації величини нев'язки  $\Delta_0$  забезпечує додатну визначеність матриці Грама  $\Gamma_0$ . В свою чергу, додатну визначеність матриці Грама  $\Gamma_0$  забезпечує виконання критерію Сильвестра [4], а саме, додатність визначників всіх квадратних діагональних мінорів матриці Грама  $\Gamma_0$ . Таким чином, доведено наступну лему.

**Лема 1.** За умови (3), у разі додатної визначеності матриці Грама  $\Gamma_0$ , задача про відновлення автономного лінійного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром (1) за відомим розв'язком цієї задачі  $y(t) := \varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a; b]$ ,  $y'(t) := \varphi'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$  має єдиний розв'язок, який мінімізує величину нев'язки  $\Delta_0$  у сенсі найменших квадратів.

**Приклад.** Умови доведеної леми 1 справджаються у задачі про відновлення двоточкової крайової задачі для лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром

$$y'(t) = A y(t) + \Phi \int_0^1 \left[ B y(s) + C y'(s) \right] ds, \quad M z(a) + N z(b) = \alpha \quad (4)$$

за відомим розв'язком

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix}^*$$

та відомим вектором

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^*.$$

Природний базис простору  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  складають матриці

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покладемо  $p := q = 2$ ,  $r := 0$ . Таким чином, отримуємо невироджену додатно визначену матрицю

$$\Gamma_0 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

тому задача про відновлення автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма (4) за відомим розв'язком  $z(t) := \varphi(t)$  однозначно розв'язна:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запропонована схема дослідження задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром може бути перенесена на задачі, обернені до задачі про знаходження розв'язку нелінійного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром, яке містить диференціально-алгебраїчний оператор [5]. З іншого боку, у разі нерозв'язності задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром таку задачу можна регуляризувати [6].

1. Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром // Укр. мат. журн. – 1996. – Vol. 48., Is. 11. – Pp. 1576–1579.
2. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
3. Чуйко С.М., Чуйко О.В., Кузьміна В.О. Про розв'язки крайової задачі для матричного інтегрально-диференціального рівняння з виродженим ядром // Нелінійні коливання. – 2020. – Vol. 23., Is. 4. – Pp. 565–573.
4. Gilbert G.T. Positive definite matrices and Sylvester's criterion // The American Mathematical Monthly. — 1991. – Vol. 98., Is. 1. – Pp. 44–46.
5. Бойчук О.А., Чуйко С.М., Кузьміна В.О. Нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної з відхиленням аргументу // Укр. мат. журн. – 2022 (прийнято до друку).
6. Chuiko S.M. On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol 220, Is. 5. – Pp. 591–602.

# Centers of cubic differential systems with the multiple line at infinity

Alexandru Subă

alexandru.suba@math.md

Institute of Mathematics and Computer Science "Vladimir Andrunachievici",  
Tiraspol State University, Chișinău, Republic of Moldova

We consider the real polynomial differential systems

$$\frac{dx}{dt} = p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = q(x, y), \quad \gcd(p, q) = 1 \quad (1)$$

and the vector fields  $\mathbb{X} = p(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$  associated to systems (1).

Denote  $\mathbf{n} = \max \{\deg(p), \deg(q)\}$ . If  $\mathbf{n} = 2$  (respectively,  $\mathbf{n} = 3, \mathbf{n} = 4$ ) then the system (1) is called quadratic (respectively, cubic, quartic).

An algebraic curve  $f(x, y) = 0$ ,  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  is said to be an *invariant algebraic curve* of (1) if there exists a polynomial  $K_f \in \mathbb{C}[x, y]$ ,  $\deg(K_f) \leq n - 1$  such that the identity  $\mathbb{X}(f) \equiv f(x, y)K_f(x, y)$  holds. In particular, a *straight line*  $\mathcal{L} \equiv \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  is called *invariant* for the system (1) if there exists a polynomial  $K_{\mathcal{L}} \in \mathbb{C}[x, y]$  such that the identity

$$\alpha p(x, y) + \beta q(x, y) \equiv (\alpha x + \beta y + \gamma)K_{\mathcal{L}}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

i.e.  $\mathbb{X}(\mathcal{L}) \equiv \mathcal{L}(x, y)K_{\mathcal{L}}(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , holds.

In the work [1] there are introduced the following definitions of the multiplicity of an invariant algebraic curve: algebraic multiplicity, infinitesimal multiplicity, integrable multiplicity, geometric multiplicity and the relations between these definitions are established.

In this paper we consider only the algebraic multiplicity.

An invariant algebraic curve  $f$  of degree  $d$  for the vector field  $\mathbb{X}$  has *algebraic multiplicity*  $k$  when  $k$  is the greatest positive integer such that the  $k$ -th power of  $f$  divides  $E_d(\mathbb{X})$ , where

$$E_d(\mathbb{X}) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ \mathbb{X}(v_1) & \mathbb{X}(v_2) & \dots & \mathbb{X}(v_l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{X}^{l-1}(v_1) & \mathbb{X}^{l-1}(v_2) & \dots & \mathbb{X}^{l-1}(v_l) \end{pmatrix},$$

and  $v_1, v_2, \dots, v_l$  is a basis of  $\mathbb{C}_d[x, y]$ . If  $d = 1$  then  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = x$ ,  $v_3 = y$  and  $E_1(\mathbb{X}) = p \cdot \mathbb{X}(q) - q \cdot \mathbb{X}(p)$ .

Denote by  $M(\mathbf{n})$  the maximal multiplicity of affine invariant straight lines in the class of polynomial differential systems of degree  $\mathbf{n}$ .

We have  $M(2) = 4$ ,  $M(3) = 7$ ,  $M(4) = 10$  and the evaluation

$$3\mathbf{n} - 2 \leq M(\mathbf{n}) \leq 3\mathbf{n} - 1, \quad \mathbf{n} \geq 2.$$

Let  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  the homogenized polynomials of  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$ , respectively, and denote  $\mathbb{X}_\infty = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y}$ .

We say that the line at infinity  $z = 0$  has *algebraic multiplicity*  $\nu + 1$  if  $m$  is the greatest positive integer such that  $z^\nu$  divides  $E_\infty(\mathbb{X}_\infty)$ , where  $E_\infty(\mathbb{X}_\infty) = P \cdot \mathbb{X}_\infty(Q) - Q \cdot \mathbb{X}_\infty(P)$ .

Denote by  $\mathcal{L}_\infty$  the line at infinity  $z = 0$ , by  $m(\mathcal{L}_\infty)$  the multiplicity of  $\mathcal{L}_\infty$  and by  $M_\infty(\mathbf{n})$  the maximal multiplicity of the line at infinity in the class of polynomial differential systems of degree  $\mathbf{n}$ . We have  $M_\infty(2) = 5$  and  $M_\infty(3) = 7$  [4].

### Classification of cubic systems with a linear center and the line at infinity of multiplicity four and five.

Consider the real cubic system of differential equations

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv p(x, y), \\ \dot{y} = -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv q(x, y), \\ \gcd(p, q) = 1, (k, l, m, n, p, q, r, s) \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

The critical point  $(0, 0)$  of the system (2) is either a focus or a center. The problem of distinguishing between a center and a focus is called *the center problem*. It is well known that  $(0, 0)$  is a center if and only if the Lyapunov quantities  $L_1, L_2, \dots, L_j, \dots$  vanish (see, for example, [2]).

We suppose that the infinity is nondegenerate for (2), i.e.

$$sx^4 + (k + q)x^3y + (m + n)x^2y^2 + (l + p)xy^3 + ry^4 \not\equiv 0. \quad (3)$$

The homogeneous system associated to the system (2) has the form

$$\begin{cases} \dot{x} = yz^2 + (ax^2 + cxy + fy^2)z + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P, \\ \dot{y} = -(xz^2 + (gx^2 + dxy + by^2)z + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q. \end{cases} \quad (4)$$

For (4) the polynomial  $E_\infty = P \cdot \mathbb{X}_\infty(Q) - Q \cdot \mathbb{X}_\infty(P)$  has the form

$$E_\infty = C_2(x, y) + C_3(x, y)z + C_4(x, y)z^2 + \dots + C_8(x, y)z^6,$$

where  $C_j(x, y)$ ,  $j = 2, \dots, 8$ , are polynomial in  $x$  and  $y$ .

The line at infinity  $z = 0$  has *multiplicity*  $\nu$  if  $C_2(x, y) \equiv 0, \dots, C_\nu(x, y) \equiv 0$ ,  $C_{\nu+1}(x, y) \not\equiv 0$ , i.e.  $\nu - 1$  is the greatest positive integer such that  $z^{\nu-1}$  divides  $E_\infty$ . In particular,  $z = 0$  has multiplicity five if the following relations

$$C_2(x, y) + C_3(x, y)z + C_4(x, y)z^2 + C_5(x, y)z^3 \equiv 0, \quad C_6(x, y) \not\equiv 0, \quad (5)$$

hold in  $z$ , i.e.  $C_2(x, y) \equiv 0$ ,  $C_3(x, y) \equiv 0$ ,  $C_4(x, y) \equiv 0$ ,  $C_5(x, y) \equiv 0$  and  $C_6(x, y) \not\equiv 0$ . If  $C_2(x, y) \not\equiv 0$ , then we say that  $z = 0$  has the multiplicity one.

Let  $\mathcal{X} = (x, y)$ ,  $\mathcal{A}_2 = (a, b, c, d, f, g)$ ,  $\mathcal{A}_3 = (k, l, m, n, p, q, r, s)$ ,  $\mathcal{B}_2 = (A, B, C, D, F, G)$ ,  $\mathcal{U} = (u, v)$ ,  $\mathcal{B}_3 = (K, L, M, N, P, Q, R, S)$  and  $\mathcal{X} = 2^{-1}M_1\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{A}_2 = 2^{-3}\mathcal{M}_2\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{A}_3 = 2^{-4}\mathcal{M}_3\mathcal{B}_3$ , where

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} -i & i & -i & i & -i & i \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2i & 2i & 0 & 0 & 2i & -2i \\ i & -i & -i & i & i & -i \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} -i & i & -i & i & -i & i & -i & i \\ i & -i & -i & i & i & -i & -i & i \\ -3 & -3 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 3i & -3i & -i & i & -i & i & 3i & -3i \\ -3i & 3i & -i & i & i & -i & 3i & -3i \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathcal{M}_1 = -2i, \det \mathcal{M}_2 = -2^9i, \det \mathcal{M}_3 = 2^{16}, i^2 = -1.$$

We remark that, in general, the elements of  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_3$  are complex and  $v = \bar{u}$ ,  $B = \bar{A}$ ,  $D = \bar{C}$ ,  $G = \bar{F}$ ,  $L = \bar{K}$ ,  $N = \bar{M}$ ,  $Q = \bar{P}$ ,  $S = \bar{R}$ .

In  $u, v, A, B, \dots, R, S$  the identity (5), up to a non zero factor, look as  $M_2(u, v) + M_3(u, v)z + M_4(u, v)z^2 + M_5(u, v)z^3 \equiv 0$ , where  $M_j(u, v) = 2^{j-12}(N_j(u, v) + \bar{N}_j(u, v))$ ,  $j=2, 3, 4, 5$ .

Solving in  $u$  and  $v$  the identities  $\{M_2(u, v) \equiv 0, M_3(u, v) \equiv 0, M_4(u, v) \equiv 0\}$  and  $\{M_2(u, v) \equiv 0, M_3(u, v) \equiv 0, M_4(u, v) \equiv 0, M_5(u, v) \equiv 0\}$  we obtain the following two theorem, respectively,

**Теорема 1.** [3] *The line at infinity has the multiplicity at least four for cubic system  $\{(2), (3)\}$  if and only if the coefficients of  $\{(2), (3)\}$  verify one of the following two set of conditions:*

- 1)  $D = CS/K, F = BK/S, G = AS/K, L = -S^4/K^3$ ,  
 $M = S, N = R = -S^3/K^2, Q = -P = S^2/K$ ;
- 2)  $A = 2(K^3L + S^4)/(S^2(BK - FS)) - S(BK - 2FS)/(KL)$ ,  
 $R = KL/S, C = 2(K^3L + S^4)/(KS(BK - FS))$   
 $-(BK^4L - 2FK^3LS - FS^5)/(K^2LS^2)$ ,  
 $D = (FK^2L + BS^3)/(K^2L) + 2(K^3L + S^4)/(K^2(BK - FS))$ ,  
 $G = FS^3/(K^2L) + 2(K^3L + S^4)/(KS(BK - FS))$ ,  
 $M = (K^3L + 2S^4)/S^3, N = (2K^3L + S^4)/(K^2S)$ ,  
 $P = (2K^3L + S^4)/(KS^2), Q = (K^3L + 2S^4)/(KS^2)$ .

**Teorema 2.** *The system  $\{(2),(3)\}$  has the line at infinity of multiplicity five if and only if its coefficients verify one of the following three set of conditions:*

- 1)  $C = D = 0, B = -AS^3/K^3, F = -AS^2/K^2, G = AS/K, M = S, L = -S^4/K^3, N = R = -S^3/K^2, Q = -P = S^2/K;$
- 2)  $A = 5F^3/B^2, C = -6F^2/B, D = 2F, G = -3F^2/B, K = F^5/B^3, L = BF, M = -3F^4/B^2, N = -3F^2, P = Q = 3F^3/B, R = -F^2, S = -F^4/B^2, S \neq 0;$
- 3)  $A = -K^2(2BK - 3FS)/S^3, C = -2K(BK - 2FS)/S^2, D = 2F, G = K(2FS - BK)/S^2, L = S^4/K^3, M = 3S, N = 3S^3/K^2, P = 3S^2/K, Q = 3S^2/K, R = S^3/K^2, K^2(BK - FS)^2 + 4S^5 = 0.$

In each of the sets of conditions of Theorem 2 the polynomial  $M_6(u, v)$  is not identical zero. This imply the following Theorem:

**Teorema 3.** *In the class of systems  $\{(2),(3)\}$  the maximal multiplicity of the line at infinity is five.*

### Centers of cubic differential systems with the line at infinity of multiplicities four and five.

**Teorema 4.** *The cubic system  $\{(2),(3)\}$  with the line at infinity of multiplicity four (five) has at the origin a center if and only if the first three Lyapunov quantities (the first Lyapunov quantity) vanish  $L_1 = L_2 = L_3 = 0$  (the first Lyapunov quantity vanishes  $L_1 = 0$ ).*

**Teorema 5.** *If for cubic system  $\{(2),(3)\}$  the line at infinity ( $\mathcal{L}_\infty$ ) has multiplicity five ( $m(\mathcal{L}_\infty) = 5$ ) then the origin  $(0, 0)$  is a center if and only if the divergence of associate vector field vanish, i.e. if  $\{(2),(3)\}$  has a polynomial first integral.*

**Problem.** *Proof the following statement: If for system*

$$\dot{x} = y + p_2(x, y) + \dots + p_n(x, y), \quad \dot{y} = -x + q_2(x, y) + \dots + q_n(x, y), \quad n \geq 4,$$

*where  $p_j$  and  $q_j$  are homogeneous polynomials of degree  $j$ , the line at infinity ( $\mathcal{L}_\infty$ ) has maximal multiplicity then the origin  $(0, 0)$  is a center if and only if the divergence of associate vector field vanish.*

1. Christopher C., Llibre J., Pereira J.V. Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. // Pacific J. of Math. – 2007. – Vol. 229, Is. 1. – Pp. 63–117.
2. Cozma D. Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics. – Chișinău: Știință, 2013, 240 p.
3. Șubă A. Center problem for cubic differential systems with the line at infinity of multiplicity four. // Carpathian. J. Math. – 2022. – Vol. 38, Is. 1. Pp. 217–222.
4. Șubă A., Vacară O. Cubic differential systems with an invariant straight line of maximal multiplicity. // Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series. – 2015. – Vol. 42, Is. 2. Pp. 427–449.

# Новий розв'язок диференціальних рівнянь руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом

O.K. Щетініна, В.І. Денисенко, Ю.Ф. Діденко

eleno-0607@ukr.net

Державний торговельно-економічний університет

Сучасні технологічні конструкції (роботи, маніпулятори, гіроскопічні пристрої) являють собою систему зв'язаних твердих тіл, яка в аналітичній механіці моделюється гіростатом. Під гіростатом розуміють систему зв'язаних твердих тіл, у яких розподіл мас не змінюється із пливом часу.

В науковій літературі по динаміці гіростата формулюється задача про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. В.А. Стєклов розглядав аналогію між цією задачею і задачею про рух тіла в ідеальній, нестисливій рідині. В статті [1] Х.М. Яхъя за допомогою даних задач загальним методом, який застосовується в задачах аналізу програмних рухів гіростата, є метод інваріантних співвідношень, що розробили Т. Леві-Чівіта [2] та П.В. Харламов [3], особливості якого вказані Г.В. Горром в [4]. В даній роботі одержано новий розв'язок задачі та отримано умови існування трьох інваріантних співвідношень для рівнянь руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Розглянемо систему, яка складається із намагніченого тіла-носія, що несе позитивні і негативні електричні заряди, та симетричного ротора. Вважаємо, що ротор не намагнічений, не має зарядів та обертається навколо осі. Гіростат рухається в магнітному полі і на нього діють ньютонівські, кулонівські сили та сили Лоренца. Введемо позначення  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  — тензор інерції гіростата;  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$  — матриця, яка характеризує гіроскопічні сили;  $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$  — матриця, що характеризує потенціальні сили;  $s = (s_1, s_2, s_3)$  — вектор узагальненого центру мас гіростата;  $\lambda = (0; 0; \lambda_3)$  — гіростатичний момент;  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  — кутова швидкість гіростата;  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  — одиничний вектор осі симетрії силового поля, що є суперпозицією ньютонівського, кулонівського та магнітного полів; струми Фуко в процесі руху гіростата не виникають. Рівняння руху гіростата представимо у вигляді:

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - \omega_2\lambda_3(t) + \omega_2B_3\nu_3 - \omega_3B_2\nu_2 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \quad (1)$$

$$A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \omega_1\lambda_3(t) + \omega_3B_1\nu_1 - \omega_1B_3\nu_3 + s_3\nu_1 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1, \quad (2)$$

$$A_3\dot{\omega}_3 + \dot{\lambda}_3(t) = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \omega_1B_2\nu_2 - \omega_2B_1\nu_1 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2, \quad (3)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2, \quad (4)$$

де крапкою позначено похідну за часом  $t$ .

Система диференціальних рівнянь (1)-(4) є неавтономною системою і допускає два перших інтеграла

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1,$$

$$A_1\omega_1\nu_1 + A_2\omega_2\nu_2 + (A_3\omega_3\nu_3 + \lambda_3(t))\nu_3 - \frac{1}{2}(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2) = k, \quad (5)$$

де  $k$  — довільна стала. Вважаємо, що

$$\dot{\lambda}_3(t) = L(t). \quad (6)$$

де  $L(t)$  — проекція сил і моментів, які діють на ротор з боку тіла-носія. Функція  $\lambda_3(t)$  має вигляд

$$\dot{\lambda}_3(t) = D_3(\omega_3 + \dot{x}(t)), \quad (7)$$

де  $D_3$  — момент інерції ротора відносно його осі обертання,  $x(t)$  — його кутова швидкість.

Використовуючи [5], задамо для рівнянь (1)-(4) три інваріантних співвідношення

$$\omega_1 = \nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1g(\nu_3), \quad \omega_2 = \nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2g(\nu_3), \quad \omega_3 = \nu_3\varepsilon(\nu_3) + \beta_3g(\nu_3), \quad (8)$$

де  $\beta_i (i = \overline{1,3})$  — сталі параметри;  $\varepsilon(\nu_3), g(\nu_3)$  — функції змінної  $\nu_3$ , які можна диференціювати. У векторному вигляді із (8) слідує

$$\boldsymbol{\omega} = \varepsilon(\nu_3)\boldsymbol{\nu} + g(\nu_3)\boldsymbol{\beta}. \quad (9)$$

Тут вектор  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  не має нульових компонентів. З рівняння Пуассона (4) одержимо  $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu} = C_0$ , тобто протягом всього часу руху гіростата кут між векторами  $\boldsymbol{\beta}$  і  $\boldsymbol{\nu}$  сталий. Рухи гіростата, для яких виконується ця властивість, називають прецесією відносно вертикалі. Прецесійні рухи гіростата [6], [7] є найбільш важливими режимами для технічних конструкцій.

При цьому функції  $\nu_1(\nu_3), \nu_2(\nu_3)$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} \nu_1(\nu_3) &= \frac{1}{x_0^2} [\beta_2(C_0 - \beta_3\nu_3) - \beta_1\sqrt{F(\nu_3)}], \\ \nu_2(\nu_3) &= \frac{1}{x_0^2} [\beta_1(C_0 - \beta_3\nu_3) - \beta_2\sqrt{F(\nu_3)}], \end{aligned} \quad (10)$$

де  $x_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$ ,  $F(\nu_3) = -\beta_0^2\nu_3^2 + 2C_0\beta_3\nu_3 + (x_0^2 - C_0^2)$ , ( $\beta_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$ ).

Залежність змінної  $\nu_3$  від часу  $t$  одержуємо з інтегрального співвідношення

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{g(\nu_3)\sqrt{F(\nu_3)}} = t - t_0. \quad (11)$$

Розглянемо інваріантні співвідношення (8) у випадку  $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0$ ,  $g(\nu_3) = g_0$

$$\omega_1 = \varepsilon_0 \nu_1 + \beta_1 g_0, \quad \omega_2 = \varepsilon_0 \nu_2 + \beta_2 g_0, \quad \omega_3 = \varepsilon_0 \nu_3 + \beta_3 g_0, \quad (12)$$

Використовуючи функцію  $F(\nu_3)$ , одержимо

$$\nu_1(\psi) = h_0 + h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi, \quad \nu_2(\psi) = r_0 + r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi, \quad (13)$$

$$\nu_3(\psi) = a_0 + a_2 \sin \psi,$$

де  $\psi = \beta_0 g_0 t$ . Тут введені позначення

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{C_0 \beta_1 (x_0 \beta_0 \mu_0 - \beta_3^2)}{x_0^2 \gamma_0 \beta_0^2}, \quad h_1 = -\frac{\gamma_0 \beta_2}{x_0^2}, \quad h_2 = -\frac{\gamma_0 \beta_1 \beta_3}{x_0^2 \beta_0}, \\ r_0 &= \frac{C_0 \beta_2 (x_0 \beta_0 \mu_0 - \beta_3^2)}{x_0^2 \gamma_0 \beta_0^2}, \quad r_1 = -\frac{\gamma_0 \beta_1}{x_0^2}, \quad r_2 = -\frac{\gamma_0 \beta_2 \beta_3}{x_0^2 \beta_0}, \\ a_0 &= \frac{C_0 \beta_3}{\gamma_0 \beta_0^2}, \quad a_2 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad \mu_0 = \sqrt{\beta_0^2 - C_0^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким чином, рівняння (4) на інваріантних співвідношеннях (12) пропінтегровані в елементарних функціях часу, які подані формулами (13) з позначеннями (14).

Для визначення умов існування одержаного розв'язку диференціальних рівнянь руху гіростата проведена редукція вихідних рівнянь до системи трьох диференціальних рівнянь щодо функцій  $\varepsilon(\nu_3)$ ,  $g(\nu_3)$ ,  $\lambda_3(\nu_3)$ . Після підстановки в них (12), (13), вимагаємо, щоб одержане рівняння було тотожним по змінній  $\psi$ . Тоді виконуються рівності

$$A_2 = A_1, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 = C_1, \quad (15)$$

$$s_1 \beta_2 - s_2 \beta_1 = 0, \quad (16)$$

$$s_3 = -g_0 \beta_3 (A_1 \varepsilon_0 + B_1), \quad \varepsilon_0 = \frac{2(C_3 - C_1)}{B_3 - B_1}, \quad (17)$$

$$\lambda_3(\psi) = -\frac{g_0}{2\beta_0} [B_1 - B_3 + 2\varepsilon_0 (A_3 - A_1)] \sin \psi + \lambda_0, \quad (18)$$

$$\lambda_0 = -\frac{C_0 \beta_3}{2\gamma_0 \beta_0^2} [2\varepsilon_0 (A_3 - A_1) + B_1 - B_3]. \quad (19)$$

Дослідження умов (15)–(19) існування трьох лінійних інваріантних співвідношень приводить до висновків:

- 1)  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ ,  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ ,  $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ , тому еліпсоїдом інерції є еліпсоїд обертання  $A_1(x^2 + y^2) + A_3z^2 = \sigma_1^2$ , еліпсоїди  $B_1(x^2 + y^2) + A_3z^2 = \sigma_2^2$ ,  $C_1(x^2 + y^2) + C_3z^2 = \sigma_3^2$  також є еліпсоїдами обертання ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — сталі параметри);
- 2)  $s_1 = d_0\beta_1$ ,  $s_2 = d_0\beta_2$ , де  $d_0 = -g_0(2\varepsilon_0 A_1 + B_1 + B_3)/2$  — сталій параметр, тому вектори  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  і  $s = (s_1, s_2, s_3)$  ( $s = (d_0\beta_1, d_0\beta_2, d_0\beta_3)$ ) є колінеарними і знаходяться в одній площині, але не лежать в екваторіальної площині еліпсоїда інерції;
- 3) параметр  $g_0$  можна вважати довільним.

Проекція сил і моментів, які діють на ротор з боку тіла-носія, має вигляд

$$L(t) = \frac{g_0^2}{a} [B_3 - B_1 - 2\varepsilon_0(A_3 - A_1)] \cos(g_0\beta_0 t), \quad (20)$$

а швидкість  $\dot{x}(t)$  ротора, який несе гіростат, знаходять з рівняння

$$\frac{g_0}{2\beta_0} [B_1 - B_3 - 2\varepsilon_0(A_3 - A_1)] \sin(g_0\beta_0 t) = D_3(\omega_3(t) + \dot{x}(t)), \quad (21)$$

де  $\omega_3(t) = \varepsilon_0 a_2 \sin(g_0\beta_0 t) + \beta_3 g_0$ .

Таким чином, в роботі розглянуто умови існування трьох інваріантних співвідношень рівнянь руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил у випадку змінного гіростатичного моменту. Дані інваріантні співвідношення характеризують процесії загального виду гіростата відносно вертикаль. У випадку  $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0$ ,  $g(\nu_3) = g_0$ , де  $\varepsilon_0$  і  $g_0$  — сталі параметри, побудовано новий розв’язок рівнянь класу Кірхгофа-Пуассона, який характеризується елементарними функціями часу.

1. Yehia H. M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces // J. Mec. Theor. Appl. – 1986. – Vol. 5, № 5. – Pp. 755–762.
2. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т.2, ч.2. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 555 с.
3. Харламов П. В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
4. Горр Г. В. Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2017. – 421с.
5. Gorr G. V. On Three Invariant of the Equations of Motion of a Body in a Potential Field of Force // Mechanics of Solid, 2019. – Vol. 54, Suppl 2. – Pp. 104–114.
6. Shchetinina E.K. The motion of a symmetric gyrostat with two rotors // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2016. – 80(2). – Pp. 121–126.
7. Gorr G. V. A complex approach to the interpretation of the motion of a solid with a fixed point // Mechanics of Solids, 2021. – Vol. 56(6). – Pp. 932–946.

# CONTINUOUS SOLUTIONS OF THE SYSTEMS OF NONLINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS FOR $t \in \mathbb{R}$

*Tetiana Yeromina*

*Olena Povarova (Sivak)*

*ierominat@ukr.net*

*olen-a-sivak@ukr.net*

*Department of Mathematical Physics and Differential Equations*

*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic  
Institute"*

*Kiev, Prosp. Peremohy 37,  
Ukraine*

There are investigated the issues of existence and uniqueness of continuous (for  $t \in \mathbb{R}$ ) solutions of the systems of nonlinear functional equations of the form

$$x(t) = F(t, x(q_1 t + f_1(t, x(t))), \dots, x(q_k t + f_k(t, x(t)))) , \quad (1)$$

where  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $q_i = \text{const} \neq 0$ ,  $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . For certain classes of the systems of equations of the form (1) these issues were studied by many mathematicians and currently researched well enough. However, it cannot be said about the existence of continuous solutions of the systems (1) in general. Therefore it is of interest a theorem proved here on sufficiently wide assumptions regarding the functions  $F$ ,  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

**Teorema 1.** *Let the conditions be fulfilled:*

1.  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , - positive integers;
2. the vector-function  $F(t, x^1, \dots, x^k)$  and the functions  $f_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , are continuous for every  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x^i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  and there is the relation

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, x^i \in \mathbb{R}, i=\overline{1,k}} |F(t, x^1, \dots, x^k)| = M < \infty;$$

3. the vector-function  $F(t, x^1, \dots, x^k)$  and the functions  $f_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , satisfy the conditions

$$|F(\bar{t}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k) - F(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^1, \dots, \bar{\bar{x}}^k)| \leq L_0 |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + \sum_{i=1}^k L_i |\bar{x}^i - \bar{\bar{x}}^i|,$$

$$|f_i(\bar{t}, \bar{x}) - f_i(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}})| \leq l'_i |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + l''_i |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

where  $L_i$ ,  $i = \overline{0, k}$ ,  $l'_i, l''_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  - some sufficiently small positive constant,  $(\bar{t}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k), (\bar{t}, \bar{\bar{x}}^1, \dots, \bar{\bar{x}}^k) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^{kn}$ .

Then the system of equations (1) has a unique continuous solution which satisfies the condition

$$|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})| \leq l |\bar{t} - \bar{\bar{t}}|,$$

where  $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in \mathfrak{R}$ .

1. Agarwal R.P. Difference Equations and Inequalities, Theory, Methods and Applications. - Second Edition. - Revised and Expanded. - 2000. - 972 p.
2. Pelyuch G.P., Sivak O.A. *On the structure of the set of continuous solutions functional-difference equations with a linearly transformed argument.* - Nonlinear oscillations.- 2010. - 13. - 1.- pp. 75-95.
3. Yeromina T. O., *Investigation of the structure of the set of continuous solutions of systems of linear difference-functional equations.* - Nonlinear oscillations. - 2014.-17, 3. pp. 341 - 350.

Диференціальні рівняння з частинними похідними

**Слабконелінійні гіперболічні диференціальні рівняння другого порядку у гільбертовому просторі**

Олександр Бойчук, Олександр Покутний, Віктор Ферук, Олег Іскра

boichuk.aa@gmail.com, lenasas@gmail.com,  
feruk.viktor@gmail.com, oleg.iskra@gmail.com

*Інститут математики НАН України*

Розглядається крайова задача для абстрактного гіперболічного рівняння у сепарабельному просторі Гільберта  $\mathcal{H}$

$$y''(t, \varepsilon) + A(t)y(t, \varepsilon) = \varepsilon Z(t, y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon)) + f(t), \quad (1)$$

$$l(y(\cdot, \varepsilon), y'(\cdot, \varepsilon)) = \alpha, \quad (2)$$

де вектор-функція  $y \in C^2(J, \mathcal{H})$ ,  $J = [0, w] \subset \mathbb{R}$ , замкнена сильно неперевна оператор-функція  $A(t)$  діє із  $J$  у щільну область  $D = D(A(t)) \subset \mathcal{H}$ , що не залежить від  $t$ , нелінійність  $Z(t, y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon))$  задовільняє умови:

$$Z(\cdot, y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon)) \in C(J, \mathcal{H}),$$

$$Z(t, \cdot, y'(t, \varepsilon)) \in C^1[\|y - y_0\| \leq q], \quad Z(t, y(t, \varepsilon), \cdot) \in C^1[\|y - y_0\| \leq q],$$

де  $q$  — достатньо мала константа,  $\varepsilon \ll 1$  — малий параметр, вектор-функція  $f \in C(J, \mathcal{H})$ ,  $l : C^2[J, \mathcal{H}] \rightarrow \mathcal{H}_1$  — лінійний обмежений оператор,  $\alpha \in \mathcal{H}_1$ .

Спираючись на методику дослідження крайових задач детально обґрунтовану в [1], вивчається питання існування розв'язку  $y(t, \varepsilon)$  задачі (1), (2), який перетворюється при  $\varepsilon = 0$  в один із розв'язків  $y_0(t)$  породжуючої задачі

$$y_0''(t) + A(t)y_0(t) = f(t), \quad l(y_0(\cdot), y_0'(\cdot)) = \alpha. \quad (3)$$

Розв'язок  $y_0(t)$  будемо називати породжуючим розв'язком задачі (1), (2).

Сформулюємо критерій існування розв'язків задачі (3). Для цього перепишемо її у вигляді крайової задачі для операторної системи

$$x_0'(t) = B(t)x_0(t) + g(t), \quad (4)$$

$$lx_0(\cdot) = \alpha, \quad (5)$$

$$x_1^0(t) = y_0(t), \quad x_2^0(t) = y_0'(t), \quad x_0(t) = \text{col}(x_1^0(t), x_2^0(t)),$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \text{col}(0, f(t)),$$

$I$  — одиничний оператор у просторі  $\mathcal{H}$ .

Множина розв'язків рівняння (4) має вигляд

$$x_0(t, c) = U(t)c + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau, \quad (6)$$

де  $U(t)$  — еволюційний оператор однорідної системи

$$U'(t) = B(t)U(t), \quad U(0) = I.$$

Підставляючи (6) в крайову умову (5), отримаємо операторне рівняння

$$Qc = g_1,$$

$$Q = lU(\cdot) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1, \quad g_1 = \alpha - l \int_0^{\cdot} U(\cdot)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau.$$

Справедливий наступний результат [2].

**Теорема 1.** Крайова задача (4), (5) має сильні узагальнені розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{\overline{\mathcal{H}}_{\overline{Q}}}g_1 = 0. \quad (7)$$

За умови (7), множина розв'язків крайової задачі (4), (5) має вигляд

$$x_0(t, c) = U(t)P_{N(\overline{Q})}c + \overline{(G[g, \alpha])(t)}, \quad \forall c \in \overline{\mathcal{H}}, \quad (8)$$

де

$$\overline{(G[g, \alpha])(t)} = U(t)\overline{Q}^+g_1 + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (4), (5), розширений на  $\overline{\mathcal{H}}$ , що є поповненням  $\mathcal{H}$  згідно відповідної норми,  $P_{\overline{\mathcal{H}}_{\overline{Q}}}$  — ортопроектор на підпростір  $\overline{\mathcal{H}}_{\overline{Q}}$ ,  $P_{N(\overline{Q})}$  — ортопроектор на ядро оператора  $\overline{Q}$ ,  $\overline{Q}^+$  — псевдообернений за Муром-Пенроузом до оператора  $\overline{Q}$ ,  $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}_{\overline{Q}} \oplus R(\overline{Q})$ .

Перепишемо крайову задачу (1), (2) у вигляді операторної системи

$$x'(t, \varepsilon) = B(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon H(t, x(t, \varepsilon)) + g(t), \quad lx(\cdot, \varepsilon) = \alpha, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \text{col}(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon)), \quad x_1(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon), \quad x_2(t, \varepsilon) = y'(t, \varepsilon), \\ H(t, x(t, \varepsilon)) &= \text{col}(0, Z(t, x(t, \varepsilon))). \end{aligned}$$

Будемо шукати розв'язок  $x(t, \varepsilon)$  крайової задачі (9), який при  $\varepsilon = 0$  перетворюється на один із розв'язків  $x_0(t, c)$  породжуючої крайової задачі (4), (5). Необхідна умова розв'язності крайової задачі (9) буде мати такий вигляд.

**Теорема 2.** *Нехай країкова задача (9) має сильний узагальнений розв'язок  $x(t, \varepsilon)$ , який при  $\varepsilon = 0$  перетворюється на один з розв'язків  $x_0(t, c^0)$  породженою країовою задачі (4), (5) з елементом  $c = c^0$ . Тоді  $c^0$  повинен задовільнити операторне рівняння для породжуючих елементів*

$$F(c) = P_{\overline{\mathcal{H}}(\overline{Q})} l \int_0^t U(\cdot) U^{-1}(\tau) H(\tau, x_0(\tau, c)) d\tau = 0. \quad (10)$$

Для отримання достатньої умови існування розв'язків країової задачі (9) зробимо заміну змінних

$$x(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon) + x_0(t, c^0), \quad (11)$$

де елемент  $c^0$  задовільняє операторне рівняння для породжуючих елементів (10). Після заміни (11) та розкладу нелінійності  $H$  у околі породжуючого розв'язку, країкова задача (9) буде мати вигляд

$$y'(t, \varepsilon) = B(t)y(t, \varepsilon) + \varepsilon(H(t, x_0(t, c^0) + H'_x(t, x_0(t, c^0)))y(t, \varepsilon) + R(t, y(t, \varepsilon))),$$

$$ly(\cdot, \varepsilon) = 0.$$

Необхідна та достатня умова розв'язності цієї задачі, врахувавши (10), є наступною:

$$P_{\overline{\mathcal{H}}(\overline{Q})} l \int_0^t U(\cdot) U^{-1}(\tau) (H'_x(\tau, x_0(\tau, c^0))y(\tau, \varepsilon) + R(\tau, y(\tau, \varepsilon))) d\tau = 0, \quad (12)$$

а множина її розв'язків має вигляд

$$y(t, \varepsilon) = U(t)P_{N(\overline{Q})}c + \varepsilon \overline{G[H(\cdot, y + x_0), 0]}(t). \quad (13)$$

Підставляючи розв'язок (13) в умову (12), приходимо до операторного рівняння відносно елемента  $c$ :

$$B_0 c = b, \quad (14)$$

$$B_0 = P_{\overline{\mathcal{H}}(\overline{Q})} l \int_0^t U(\cdot) U^{-1}(\tau) H'_x(\tau, x_0(\tau, c^0)) U(\tau) P_{N(\overline{Q})} d\tau,$$

$$\begin{aligned} b = & - P_{\overline{\mathcal{H}}(\overline{Q})} l \int_0^t U(\cdot) U^{-1}(\tau) (R(\tau, y(\tau, \varepsilon)) \\ & + \varepsilon H'_x(\tau, x_0(\tau, c^0)) \overline{G[H(\cdot, y + x_0), 0]}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

За виконання достатньої умови розв'язності

$$P_{\overline{\mathcal{H}}_{\overline{B}_0}} P_{\overline{\mathcal{H}}_{\overline{Q}}} = 0, \quad (15)$$

рівняння (14) буде мати сильний узагальнений розв'язок  $c = \overline{B}_0^+ b$ , де  $P_{\overline{\mathcal{H}}_{\overline{B}_0}}$  — ортопроєктор на підпростір  $\overline{\mathcal{H}}_{\overline{B}_0}$  ( $\overline{\mathcal{H}}_{\overline{B}_0} = \widetilde{\mathcal{H}}_{\overline{Q}} \ominus R(\overline{B}_0)$ ,  $\widetilde{\mathcal{H}}_{\overline{Q}}$  — повнення  $\overline{\mathcal{H}}_{\overline{Q}}$  згідно відповідної норми),  $\overline{B}_0^+$  — псевдообернений за Муром-Пенроузом до оператора  $\overline{B}_0$ .

Справедливий наступний результат.

**Теорема 3.** *Нехай породжуюча для задачі (1), (2) задача (4), (5), за виконання умови (7), має множину розв'язків  $x_0(t, c)$  (8). Тоді, для кожного дійсного значення вектора  $c = c^0$ , що задовільняє операторне рівняння для породжуючих елементів (10) та при (15), крайова задача (1), (2) має сильний узагальнений розв'язок  $x(t, \varepsilon)$ , який перетворюється при  $\varepsilon = 0$  в породжуючий розв'язок  $x_0(t, c)$ . Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу:*

$$y_{k+1}(t, \varepsilon) = U(t)P_{N(\overline{Q})}c_k + \overline{y}_{k+1}(t, \varepsilon), \quad \overline{y}_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon \overline{G[H(\cdot, y_k + x_0), 0]}(t),$$

$$c_k = -\overline{B}_0^+ P_{\overline{\mathcal{H}}_{\overline{Q}}} l \int_0^t U(\tau)U^{-1}(\tau) \left( H'_x(\tau, x_0(\tau, c^0)) \overline{y}_k(\tau, \varepsilon) + R(\tau, y_k(\tau, \varepsilon)) \right) d\tau,$$

$$x_k(t, \varepsilon) = y_k(t, \varepsilon) + x_0(t, c^0), \quad x(t, \varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t, \varepsilon), \quad y_0(t, \varepsilon) = \overline{y}_0(t, \varepsilon) = 0,$$

$$\begin{aligned} R(t, y_k(t, \varepsilon)) &= H(t, y_k(t, \varepsilon) + x_0(t, c^0)) \\ &\quad - H(t, x_0(t, c^0)) - H'_x(t, x_0(t, c^0)) y_k(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. – Berlin: De Gruyter, second ed. – 2016. – 314 p.
2. Boichuk A.A., Pokutnyi O.O. Bifurcation of Solutions of the Second Order Boundary-Value Problems in Hilbert Spaces // Miskolc Mathematical Notes. – 2019. – Vol. 20, Is. 1. – Pp. 139–152.

Робота виконана за підтримки проєкту «Крайові задачі та імпульсні збурення нелінійних еволюційних рівнянь у нескінченновимірних просторах» (ЗМ-2022).

# Формули інтегрування частинами для функцій з узагальнених просторів Соболєва

*Олег Бугрій, Мар'яна Хома*

*mariana.khoma@lnu.edu.ua, oleh.buhrii@lnu.edu.ua*  
*Львівський національний університет імені Івана Франка*

Нехай  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – обмежена область з ліпшицеовою межею  $\partial\Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T > 0$ ,  $Q_{s,\tau} := \Omega \times (s, \tau)$ ,  $0 \leq s < \tau \leq T$ . Дослідження багатьох задач для рівнянь з частинними похідними спирається на формулу інтегрування частинами, наприклад, такого вигляду:

$$\int_{Q_{s,\tau}} w_t z \, dx dt = \int_{\Omega} w(x, t) z(x, t) \, dx \Big|_{t=s}^{t=\tau} - \int_{Q_{s,\tau}} w z_t \, dx dt, \quad (1)$$

в якій функції  $w, z$  належать певним функційним просторам, що продуктовані виглядом рівняння. Рівняння зі змінними показниками нелінійності вимагають використання аналогів цієї формул для функцій з узагальнених просторів Лебега та Соболєва. Варіанти формул типу (1) доведено, наприклад в [1], [2]. Якщо показник  $q$  нелінійності рівняння (а, отже, і інтегровності функцій) залежить від просторової та часової змінних  $(x, t) \in Q_{0,T}$ , то (1) доведено за умови обмеженості і гельдеровості функції  $q$  одночасно за всіма змінними  $(x, t)$  (див. [3], [4]). В нашій праці ми доведемо (1) для соленоїдальних функцій, що належать узагальненим просторам Соболєва з обмеженим показником  $q$ , який задовольняє умову Ліпшиця лише за часовою змінною  $t$ .

Введемо позначення. Нехай  $\mathcal{B}_+(\mathcal{O}) := \{\mathbf{q} \in L^\infty(\mathcal{O}) \mid \operatorname{ess inf}_{y \in \mathcal{O}} \mathbf{q}(y) > 0\}$ , де  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ . Для кожної функції  $\mathbf{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$  введемо такі позначення:

$$\mathbf{q}_0 := \operatorname{ess inf}_{y \in \mathcal{O}} \mathbf{q}(y), \quad \mathbf{q}^0 := \operatorname{ess sup}_{y \in \mathcal{O}} \mathbf{q}(y),$$

$$\rho_{\mathbf{q}}(v; \mathcal{O}) := \int_{\mathcal{O}} |v(y)|^{\mathbf{q}(y)} \, dy, \quad v : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Нехай  $\mathbf{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ ,  $\mathbf{q}_0 > 1$ ,  $L^{\mathbf{q}(y)}(\mathcal{O}) := \{v : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} \mid \rho_{\mathbf{q}}(v; \mathcal{O}) < +\infty\}$  – узагальнений простір Лебега, який, як відомо, є банаховим простором стосовно норми Люксембурга  $\|v; L^{\mathbf{q}(y)}(\mathcal{O})\| := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{\mathbf{q}}(v/\lambda; \mathcal{O}) \leq 1\}$ .

Нехай  $\Lambda_t(Q_{0,T})$  – множина функцій  $q : Q_{0,T} \rightarrow \mathbb{R}$  для яких існує продовження (позначимо його знову  $q$ ) зовні  $Q_{0,T}$ , що задовольняє умови: (i)  $q \in C(\mathbb{R}_t; L^\infty(\mathbb{R}_x^n)) \cap \mathcal{B}_+(\mathbb{R}_{x,t}^{n+1})$ ; (ii)  $q_0 > 1$ ; (iii) існує  $L > 0$  таке, що

$$|q(x, t) - q(x, s)| \leq L|t - s|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Множину функцій  $p : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ , які задовольняють відповідні умови (i)-(iii) без змінної  $x$ , ми позначимо через  $\Lambda_t(0, T)$ .

Нехай  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\operatorname{div} u := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$ . Розглянемо множину гладких соленоїдальних функцій

$$C_{\operatorname{div}} := \{u \in [D(\Omega)]^n \mid \operatorname{div} u = 0\}.$$

Для всіх  $s \in \mathbb{N}$  нехай  $Z_s$  є замиканням  $C_{\operatorname{div}}$  в просторі  $[H_0^s(\Omega)]^n$ .

Для функції  $q \in \Lambda_t(Q_{0,T})$  визначимо узагальнені простори Соболєва соленоїдальних функцій

$$V^t := Z_1 \cap [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n \quad \text{для всіх } t \in [0, T],$$

$$U(Q_{0,T}) := L^2(0, T; Z_1) \cap [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n,$$

зі стандартними нормами для перетину нормованих просторів. Нехай

$$W(Q_{0,T}) := \{u \in U(Q_{0,T}) \mid u_t \in [U(Q_{0,T})]^*\},$$

причому,  $\|u; W(Q_{0,T})\| := \|u; U(Q_{0,T})\| + \|u_t; [U(Q_{0,T})]^*\|$ .

Основним результатом цієї праці є наступна теорема.

**Теорема 1.** Якщо  $q \in \Lambda_t(Q_{0,T})$ , то кожна функція  $u \in W(Q_{0,T})$  належить до простору  $u \in C([0, T]; H)$  та задоволяє рівність

$$\langle u_t, \chi_{t_1, t_2} u \rangle_{U(Q_{0,T})} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t_2)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t_1)|^2 dx \quad (2)$$

$$\text{для } 0 \leq t_1 < t_2 \leq T, \text{ де } \chi_{t_1, t_2}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_1, t_2]; \\ 0, & t \notin [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Твердження цієї теореми у стандартному випадку сталого показника інтегровності  $q(x, t) \equiv 2$  можна знайти, наприклад, в [5, р. 84]. На жаль нам не вдалося знайти його (i, основне, його доведення) для просторів соленоїдальних функцій навіть якщо змінний показник інтегровності  $q(x, t)$  задоволяє умову Ліпшица чи Гельдера за всіма своїми змінними. Деякі варіанти такого твердження неявно використано, наприклад, в [6] для таких  $q$ . Випадок ліпшиць- (чи гельдер-) неперервності лише за однією часовою змінною вивчено в нашій праці вперше навіть коли  $u$  не є соленоїдальною функцією.

Ключовим фактом для доведення Теореми 1 є встановлення можливості наближення функції з простору  $W(Q_{0,T})$  послідовністю гладких функцій спеціального вигляду. Щоб довести цей факт, традиційно, використовується поняття усереднення функції. Припустимо, спершу, що виконується умова

(Z):  $\zeta_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , де

$$\zeta(t) := \begin{cases} \zeta^0 e^{\frac{t^2}{t^2 - R^2}}, & 0 \leq |t| < R, \\ 0, & |t| \geq R, \end{cases} \quad (3)$$

а сталі  $\zeta^0, R > 0$  задовольняють умову нормалізації

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta(t) dt = \int_{|t| \leq R} \zeta(t) dt = 1.$$

Зрозуміло, що є такий зв'язок між  $\zeta^0$  та  $R$ :  $\zeta^0 = \zeta^0(R) \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{} +0$ . Для продовженого нулем зовні  $[0, T]$  функції  $z = z(t)$  розглянемо її усереднення

$$z_\varepsilon(t) := \int_{\mathbb{R}} \zeta_\varepsilon(t-s) z(s) ds = \int_{t-\varepsilon R}^{t+\varepsilon R} \zeta_\varepsilon(t-s) z(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Лема 1.** Якщо  $p \in \Lambda_t(0, T)$ , виконується умова (Z), стала  $\zeta^0$  задоволяє (3), функція  $z \in L^{p(t)}([0, T])$  задоволяє умову

$$\int_0^T |z(t)| dt \leq \frac{1}{\zeta^0}, \quad (4)$$

то для всіх  $\varepsilon \in (0, 1)$  виконується оцінка

$$\int_{\mathbb{R}} |z_\varepsilon(t)|^{p(t)} dt \leq (e^{LR} + 1) \left\{ \int_{\mathbb{R}} |z(t)|^{p(t)} dt + \int_{\mathbb{R}} |z(t)| dt \right\}, \quad (5)$$

де  $L > 0$  – стала Ліпшиця для функції  $p$ , число  $R > 0$  взято з (3).

У зв'язку з доволі складним виглядом норми в узагальненому просторі Лебега  $L^{p(t)}(0, T)$ , перехід від (5) до відповідної оцінки для норми усереднення функції  $\epsilon$  не зовсім тривіальним. Має місце така лема.

**Лема 2.** Якщо виконуються умови Леми 1, то для всіх  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{R})$  маємо, що

$$\|z_\varepsilon; L^{p(t)}(0, T)\| \leq (2e^L + 3) \left\{ \|z; L^{p(t)}(0, T)\| + \|z; L^1(0, T)\| \right\}.$$

Крім того,  $z_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow +0]{} z$  сильно в просторі  $L^{p(t)}(0, T)$ .

Повернемося тепер до функцій багатьох змінних. Нехай  $q \in \Lambda_t(Q_{0,T})$ ,  $z \in L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$ ,  $z$  продовжено нулем при  $t \notin [0, T]$ . Тоді

$$\int_{\Omega} \left( \int_0^T |z(x, t)|^{q(x, t)} dt \right) dx = \int_{Q_{0,T}} |z(x, t)|^{q(x, t)} dx dt \leq C_1.$$

Зрозуміло, що з цієї оцінки зовсім не випливає, що для всіх  $x \in \Omega$  виконується  $\int_0^T |z(x, t)|^{q(x, t)} dt \leq C_2$ . Тому ми не можемо гарантувати існування спільної для всіх  $x \in \Omega$  сталої  $\zeta^0$ , для якої виконується оцінка типу (4). А, отже, довести збіжність послідовності усереднених (лише за змінною  $t$ ) функцій до функції з простору  $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$  поки не вдається. Проте, якщо спершу побудувати послідовність зрізуючих функцій для  $z \in L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$ , а вже кожну зрізку (тобто, обмежену функцію) наблизити усередненням з відповідним ядром, то можна довести таку лему.

**Лема 3.** Якщо  $q \in \Lambda_t(Q_{0,T})$ , то для кожного  $u \in W(Q_{0,T})$  існує така послідовність  $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^1([0, T]; C_{div})$ , що

$$u^m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} u \text{ сильно в } U(Q_{0,T}), \quad u_t^m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} u_t \text{ слабко в } [U(Q_{0,T})]^*.$$

Після цього доведення Теореми 1 проводиться стандартним шляхом. З (2) легко отримуємо аналог формулі інтегрування частинами (1).

1. Buhrii O., Domans'ka G., Protsakh N. Initial boundary value problem for nonlinear differential equation of the third order in generalized Sobolev spaces // Visnyk (Herald) of Lviv Univ. Series Mech.-Math. – 2005. Vol. 64. – Pp. 44-61.
2. Buhrii O., Buhrii N. Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. 473. – Pp. 695-711.
3. Antontsev S., Shmarev S. Evolution PDEs with nonstandard growth conditions. Existence, uniqueness, localization, blow-up. Atlantis Studies in Diff. Eq., Vol. 4. – Paris: Atlantis Press. – 2015.
4. Růžička M. Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. – Berlin: Springer-Verl. – 2000.
5. Seregin G. Lecture notes on regularity theory for the Navier-Stokes equations. – Oxford: Oxford Univ., March 2. – 2014.
6. Zhikov V.V., Pastukhova S.E. On the Navier-Stokes equations: Existence theorems and energy equalities // Proc. Steklov Inst. Math. – 2012. Vol. 278. – Pp. 67-87.

**Про розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі  
для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними  
операторами у просторах типу  $S$**

*Василь Городецький, Руслана Колісник, Ольга Мартинюк*

*o.martynyuk@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича*

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\partial u(t, x) / \partial t + \hat{B}u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1)$$

$\hat{B} = B_{p, \omega} / S_2^{1/\omega}$  ( $\omega \in (0, 1]$ ,  $p \in \mathbb{N}$  – фіксовані), при цьому  $\hat{B} = F^{-1}[\varphi_{p, \omega} \cdot F]$ .

Під розв'язком рівняння (1) розуміємо функцію  $u(t, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega$ , яка володіє властивостями: 1)  $u(t, \cdot) \in C^1(0, +\infty)$  при кожному  $x \in \mathbb{R}$ ; 2)  $u(\cdot, x) \in S_2^{1/\omega}$  при кожному  $t \in (0, +\infty)$ ; 3)  $u(t, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega$ , задовільняє рівняння (1).

Для рівняння (1) задамо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти функцію  $u(t, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega$ , яка задовільняє рівняння (1) та умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k u(t_k, \cdot) = f, \quad f \in (S_{2,*}^{1/\omega})', \quad (2)$$

де граничне співвідношення (2) розглядається у просторі  $(S_2^{1/\omega})'$ ,  $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$ ,  $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, \infty)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  – фіксовані числа,

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < +\infty$ ,  $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$ ,  $B_1, \dots, B_m$  – псевдодиференціальні оператори, побудовані за функціями (символами)  $g_k: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  відповідно:  $B_k = F^{-1}[g_k(\sigma)F]$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Функції  $g_k$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ , задовільняють умови:  $g_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ ;  $\forall \varepsilon > 0 \forall \sigma \in \mathbb{R}: g_k(\sigma) \leq \exp\{\varepsilon|\sigma|\}$ ,  $\exists M_k > 0 \forall s \in \mathbb{N}: |D_\sigma^s g_k(\sigma)| \leq M_k^s s!$ .

**Теорема 1.** Задача (1), (2) є розв'язною, розв'язок дається формулою

$$u(t, x) = f * G(t, x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

де  $G(t, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega$ , – фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння (1),  $u(t, \cdot) \in S_2^{1/\omega}$  при кожному  $t > 0$ .

**Зауваження** Якщо в умові (2)  $B_1 = \dots = B_m = I$  ( $I$  – одиничний оператор), то можна довести, що тоді задача (1), (2) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою  $u(t, x) = f * G(t, x)$ ,  $f \in (S_{1,*}^{1/\omega})'$ ,  $(t, x) \in \Omega$ ,

$G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \cdot)]$ ,  $Q(t, \sigma) = e^{-ta(\sigma)} \left( \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k a(\sigma)} \right)^{-1}$ ,  $G(t, \cdot) \in S_1^{1/\omega}$

при кожному  $t > 0$ .

# Про нелокальну за часом задачу для сингулярного параболічного рівняння

Василь Городецький, Ольга Мартинюк, Роман Петришин

o.martynyuk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федъковича

Нехай  $\alpha$  – фіксоване число з множини  $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$ . Символом  $\Phi_\alpha$  позначимо сукупність функцій  $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , які задовільняють умову

$$\exists a = a(\varphi) > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ \exists c_k = c_k(\varphi) > 0 \forall \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |\sigma^k \varphi^{(k)}(\sigma)| \leq c_k e^{-a|\sigma|^\alpha}$$

(якщо  $k = 0$ , то  $\sigma \in \mathbb{R}$ ).

Символом  $\Psi_\alpha$  позначимо Фур'є-образ простору  $\Phi_\alpha$  при перетворенні Бесселя  $\Psi_\alpha = F_{B_\nu}[\Phi_\alpha]$ ,  $F(B_\nu)[\varphi]$  – парна і обмежена на  $\mathbb{R}$  функція.

Символом  $\Psi'_\alpha$  позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів, визначених на просторі основних функцій  $\Psi_\alpha$  зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + Au(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1)$$

де  $A$  – псевдобесселевий оператор у просторі  $\Psi_\alpha$ , розглянутий у п. 1 ( $A = F_{B_\nu}^{-1}[|\sigma|^\alpha F_{B_\nu}]$ ).

Під розв’язком рівняння (1) розуміємо функцію  $u(t, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega$ , яка: 1) неперервно диференційовна за змінною  $t$ ; 2)  $u(t, \cdot) \in \mathcal{D}(A) \equiv \Psi_\alpha$  при кожному  $t > 0$ ; 3)  $u(t, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega$ , задовільняє рівняння (1).

Нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (1) можна ставити так: знайти функцію  $u(t, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega$ , яка задовільняє рівняння (1) і умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k u(t_k, \cdot) = f, \quad f \in \Psi'_{\alpha,*}, \quad (2)$$

де  $\Psi'_{\alpha,*}$  – клас згортувачів у просторі  $\Psi_\alpha$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$ ,  $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, +\infty)$  – фіксовані числа,  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < +\infty$ ,  $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$ .

**Теорема 1.** Нелокальна багатоточкова за часом задача (1), (2) коректно розв’язана, розв’язок даеться формулою

$$u(t, x) = f * G(t, x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

$u(t, \cdot) \in \Psi_\alpha$  при кожному  $t > 0$ .

**About the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem  
for a parabolic system of IDEs with an operator of  
Volterra-Fredholm type**

*Ivan Danyliuk*

i.danyluk@chnu.edu.ua

*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University*

The theory of the correct solvability of the Cauchy problem and the boundary value problems is almost completely developed for general Petrovsky parabolic systems [1]–[5]. The considerable theoretical interest is the further study of problems for parabolic systems, including those that contain integro-differential operators (IDOs) [6]–[8]. Such operators arise in mathematical modeling of processes in control theory, problems of financial theory, thermomechanics, acoustics, viscoelasticity, mathematical biology, where it is assumed that there is a global mechanism that affects the process itself. Parabolic IDOs also arise in problems associated with stochastic Markov-Feller processes with jumps.

Here the fundamental matrix of solutions (FMS) of the Cauchy problem for a parabolic system of IDEs with an operator of Volterra-Fredholm type is investigated. Using the method of reduction to a system of integral equations with the kernel that is expressed through the kernel of the IDO of the system and the FMS of the corresponding parabolic system, the FMS of the Cauchy problem in classical Hölder spaces  $C^{m+\alpha}(\Pi)$  is constructed. This is the class of functions  $u(t, x)$ , that have in  $\Pi = (0, T) \times \mathbb{R}^n$  continuous derivatives  $D_x^k u$ ,  $D_x^k u \equiv D_{x_1}^{k_1} \dots D_{x_n}^{k_n} u$ ,  $k = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $|k| = k_1 + \dots + k_n$ , up to and including  $m$ , elder derivatives are Hölder with exponent  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , and the norm

$$|u|_{m+\alpha} = \sum_{|k| \leq m} \sup_{(t,x) \in \Pi} |D_x^k u(t, x)| + \sum_{|k|=m} \sup_{(t,x), (t,x+\Delta x) \in \Pi} \frac{|\Delta_x D_x^k u(t, x)|}{|\Delta x|^\alpha},$$

$$|\Delta x| = (\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2)^{1/2}$$

is finite.

In the domain  $\Pi = (0, T) \times \mathbb{R}^n$  we consider the Cauchy problem for the uniformly parabolic system of  $N$  IDEs

$$\begin{aligned} L(t, x, D, B)u &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k| \leq 2b} A_k(t, x) D_x^k u - \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|s| \leq p} B_s(t, \tau, x, \xi) D_\xi^s u(\tau, \xi) d\xi d\tau = f(t, x), \end{aligned} \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq p \leq 2b - 1. \tag{2}$$

The definition of uniform parabolicity of the system (1), only without Volterra-Fredholm-type IDOs, is given in [1].

**Theorem.** Suppose that the system (1) is uniformly parabolic, the coefficients of the system  $A_k(t, x)$  are defined in the domain  $\Pi$ , continuous in  $t$  and uniformly in  $x$  for  $|k| = 2b$ ,  $A_k \in C_x^\alpha(\Pi)$ . The kernels of the IDOs of the system  $B_s = (B_{ij}^s)_{i,j=1}^N$ ,  $|s| \leq p$ , are continuous for  $t > \tau$ ,  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$  and satisfy the inequalities

$$|D_x^m B_s(t, \tau, x, \xi)| \leq C_{ms} (t - \tau)^{-\frac{n+2b+|m|-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t, \tau, x, \xi)},$$

$$t > \tau, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |m| = 0, 1, \quad |s| \leq p.$$

Then there is the FMS of the system (1)

$$\Gamma(t, \tau, x, \xi) = Z(t, \tau, x, \xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, \beta, x, z) R(\beta, \tau, z, \xi) dz \equiv Z + W,$$

which for  $t > \tau$  satisfies a homogeneous system. Here  $R$  is the resolvent of the corresponding system of Volterra-Fredholm integral equations of the second kind, the repeated kernels of which are expressed through the kernels  $B_s$  of the IDOs of the system (1) and the FMS  $Z$  of the corresponding parabolic system

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k| \leq 2b} A_k(t, x) D_x^k u = y(t, x),$$

where  $y(t, x)$  – is an unknown  $N$ -vector-function, which is obtained during the FMS construction. For the derivatives of the volume potential  $W$ , the estimates

$$|D_x^k W(t, \tau, x, \xi)| \leq C(t - \tau)^{-\frac{n+|k|+p-2b-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t, \tau, x, \xi)}, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

are correct.

Thus, in this work, for the parabolic system of IDEs with Volterra-Fredholm type IDO, the estimates of the FMS  $\Gamma$  for the Cauchy problem are constructed and obtained. The construction of the FMS  $\Gamma$  is preserved similar to the construction the FMS  $Z$  of a uniformly parabolic system. The main term is the FMS  $Z$  of the uniformly parabolic system. The additional term is an integral with the kernel  $Z$  and density, which is the resolvent of the system of Volterra-Fredholm integral equations of the second kind, the repeated kernels of which are expressed through the kernels of the IDOs  $B_s$  of the parabolic system of IDEs and FMS  $Z$  of the corresponding parabolic system.

At the same time, the smoothness of the solution of the Cauchy problem depends not only on the smoothness of the initial function, but also on the

differential properties of the kernels of the IDOs of the parabolic system of IDEs [9].

1. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
2. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. В. А. Степанова АН СССР. 1965. Т. 83. С.3–162.
3. Ладыженская О. А., Солонников В. А, Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
4. Иvasишен С. Д. Матрица Грина параболических задач. К.: Вища школа, 1990.
5. Матійчук М. І. Параболічні сингулярні краєві задачі. К.: Ін-т математики НАН України, 1999.
6. Данилюк А. О. Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. 2007. Вип. 349. С.18–24.
7. Danylyuk A. O. Boundary-value problem for a parabolic system of integro-differential equations with integral conditions // Ukr. Math. Journal. 2008. Vol. 60. № 12. P.1889–1900.
8. Данилюк А. О., Матійчук М. І. Задача Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь з оператором типу Фредгольма // Наук. вісник Чернів. нац. ун-ту: Зб. наук. пр. Матем. 2012. Т. 2. № 1. С.16–23.
9. Danyliuk I. M., Danyliuk A. O. The cauchy problem for a parabolic system of integro-differential equations with an operator of Volterra-Fredholm type //Acta et Coomentationes, Exact and Natural Sciences. nr.2(8), 2019. P.29–42.

**Критерій керованості інтегро-диференціальних рівнянь  
Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах**

Валерій Журавльов, Наталія Гонгало

vfz2008@ukr.net, nataliiahonhalo@gmail.com

Поліський національний університет

Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння Фредгольма з виродженим ядром з керуванням

$$\dot{z}(t) - \int_a^b [P(t)W(s)z(s) + Q(t)V(s)\dot{z}(s)]ds = f(t) + \int_a^b K(t,s)u(s)ds, \quad (1)$$

де  $P(t)$  та  $Q(t) - (n \times m)$ -вимірні матриці, а  $W(t)$  та  $V(t) - (m \times n)$ -вимірні матриці,  $K(t,s) - (n \times q)$ -вимірна матриця, визначена у квадраті  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ ,  $f(t) - (n \times 1)$ -вимірний вектор-стовпчик,  $u(t) - (q \times 1)$ -вимірний вектор-стовпчик, елементи яких належать простору  $L_2[a, b]$ .

Розв'язком  $z(t)$  інтегро-диференціального рівняння з керуванням (1) будемо називати пару вектор-функцій  $z(t)$  та  $u(s)$ , які задовільняють рівняння (1). При цьому  $z(t) \in D_2([a, b], \mathbf{R}^n)$ ,  $\dot{z}(t) \in L_2([a, b], \mathbf{R}^n)$ ,  $u(s) \in L_2([a, b], \mathbf{R}^q)$ .

Застосовуючи теорію псевдообернених операторів [1, 2] отримаємо умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків рівняння (1) без керування ( $u(s) = 0$ ).

Після традиційної заміни  $\dot{z}(t) = y(t)$  та позначень

$$M(t) = [P(t), \quad Q(t)], \quad N(s) = \text{col} [\widetilde{W}(s), \quad V(s)], \quad (2)$$

$$g(t) = f(t) + P(t)Wc, \quad \widetilde{W}(s) = \int_s^b W(\tau)d\tau, \quad W = \widetilde{W}(a) \quad (3)$$

інтегро-диференціальне рівняння (1) без керування ( $u(s) = 0$ ) зводимо до інтегрального рівняння

$$(L_1y)(t) := y(t) - M(t) \int_s^b N(s)y(s)ds = g(t), \quad (4)$$

де  $M(t)$  та  $N(s)$  відповідно  $(n \times 2m)$ - та  $(2m \times n)$ -вимірні матриці.

Тоді  $D = I_{2m} - A$ ,  $A = \int_a^b N(s)M(s)ds$  та ортопроектори  $P_{N(D)}$ ,  $P_{N(D^*)}$  [2, с. 61] будуть  $(2m \times 2m)$ -вимірними матрицями.

Нехай  $\text{rank}D = n_1$ . Позначимо через  $P_{N_r(D)}$  —  $(2m \times r)$ -вимірну матрицю, яка складена з  $r = 2m - n_1$  лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора  $P_{N(D)}$ , а через  $P_{N_r(D^*)}$  —  $(r \times 2m)$ -вимірну матрицю, яка складена з  $r$  лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора  $P_{N(D^*)}$ ,  $D^+$  — псевдообернену матрицю до матриці  $D$ .

Відомо [2], що при виконанні  $r$  лінійно незалежних умов

$$P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s)g(s)ds = P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s)[f(s) + P(s)Wc]ds = 0 \quad (5)$$

і лише при них інтегральне рівняння (4) має сім'ю  $r$  лінійно незалежних розв'язків

$$y(t) = M(t)P_{N_r(D)}\hat{c}_r + (L_1^+ g)(t), \quad (6)$$

де  $\hat{c}_r$  — довільний елемент евклідового простору  $\mathbf{R}^r$ ,  $L_1^+$  — псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор до інтегрального оператора  $L$ .

З рівняння (5) отримаємо алгебраїчне рівняння

$$Sc = f_0, \quad (7)$$

де

$$S = P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s)P(s)Wds, \quad f_0 = -P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s)f(s)ds = 0.$$

Нехай  $\text{rank}S = n_2$ . Позначимо через  $P_{N_\mu(S)}$  —  $(n \times \mu)$ -вимірну матрицю, яка складена з  $\mu = n - n_2$  лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора  $P_{N(S)}$ , а через  $P_{N_\nu(S^*)}$  —  $(\nu \times r)$ -вимірну матрицю, яка складена з  $\nu = r - n_2$  лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора  $P_{N(S^*)}$  та  $S^+ : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^n$  — псевдообернену матрицю до матриці  $S$ .

Відомо [2], що при виконанні  $\nu$  лінійно незалежних умов

$$P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s)f(s)ds = 0,$$

рівняння без керування (1) має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \begin{bmatrix} X_1(t), & X_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_r \\ \hat{c}_\mu \end{bmatrix} + (\tilde{L}_1^+ f)(t) + (\tilde{L}_1^+ P)(t)WS^+f_0 + S^+f_0,$$

де

$$X_1(t) = \int_a^t M(s)P_{N_r(D)}ds, \quad X_2(t) = (\tilde{L}_1^+ P)(t)WP_{N_\mu(S)} + P_{N_\mu(S)},$$

$$(\tilde{L}_1^+ f)(t) = \int_a^t (L_1^+ f)(s) ds, \quad (\tilde{L}_1^+ P)(t) = \int_a^t (L_1^+ P)(s) ds. \quad (8)$$

Припустимо, що  $P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s)f(s)ds \neq 0$ , тобто рівняння (1) без керування не має розв'язків.

Тоді рівняння (1) з керуванням має розв'язки для тих і лише тих правильних частин, які задовольняють  $\nu$  лінійно незалежні умови [2]

$$P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s) \left[ f(s) + \int_a^b K(s, \tau)u(\tau)d\tau \right] ds = 0. \quad (9)$$

З (9) отримаємо рівняння відносно керування  $u(s)$

$$\int_a^b \Psi(s)u(s)ds = P_{N_\nu(S^*)}f_0, \quad (10)$$

де  $\Psi(s) = P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(\tau)K(\tau, s)d\tau$  —  $(\nu \times q)$ -вимірна матриця.

Розв'язок рівняння (10) будемо шукати у вигляді

$$u(s) = \Psi^*(s)c_1, \quad (11)$$

де  $\Psi^*(s)$  —  $(q \times \nu)$ -вимірна матриця транспонована до матриці  $\Psi(s)$ ,  $c_1 \in \mathbf{R}^\nu$  — невідомий вектор, який треба знайти.

Півставивши (11) у (10) отримаємо алгебраїчне рівняння

$$Hc_1 = P_{N_\nu(S^*)}f_0, \quad (12)$$

де  $H = \int_a^b \Psi(s)\Psi^*(s)ds$  —  $(\nu \times \nu)$ -вимірна матриця.

Нехай  $\text{rank } H = n_3$ . Позначимо через  $P_{N_p(H)}$  —  $(\nu \times p)$ -вимірну матрицю, яка складена з  $p = \nu - n_3$  лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора  $P_{N(H)}$ , а через  $P_{N_p(H^*)}$  —  $(p \times \nu)$ -вимірну матрицю, яка складена з  $p$  лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора  $P_{N(H^*)}$ ,  $H^+$  — псевдообернена за Муром-Пенроузом матриця до матриці  $H$  [1, 2].

Алгебраїчна система (12) має розв'язок відносно вектора  $c_1 \in \mathbf{R}^\nu$  тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$P_{N_p(H^*)}P_{N_\nu(S^*)}f_0 = -P_{N_p(H^*)}P_{N_\nu(S^*)}P_{N_r(D^*)} \int_a^b N(s)f(s)ds = 0, \quad (13)$$

при виконанні якої вона має  $p$ -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$c_1 = P_{N_p(H)} \hat{c}_p + H^+ P_{N_\nu(S^*)} f_0, \quad \hat{c}_p \in \mathbf{R}^p. \quad (14)$$

Після підстановки (14) у (11) отримаємо  $p$ -параметричну сім'ю лінійно незалежних керувань

$$u(s) = \Psi^*(s) P_{N_p(H)} \hat{c}_p + \Psi^*(s) H^+ P_{N_\nu(S^*)} f_0, \quad (15)$$

при яких інтегро-диференціальне рівняння (1) буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = \begin{bmatrix} X_1(t), & X_2(t), & X_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_r \\ \hat{c}_\mu \\ \hat{c}_p \end{bmatrix} + (\tilde{L}_1^+ f)(t) +$$

$$+ (\tilde{L}_1^+ [K\Psi^*])(t) H^+ P_{N_\nu(S^*)} f_0 + (\tilde{L}_1^+ P)(t) W S^+ f_0 + S^+ f_0,$$

де  $[K\Psi^*](t) = \int_a^b K(t,s) \Psi^*(s) ds$ ,  $X_3(t) = (\tilde{L}_1^+ [K\Psi^*])(t) P_{N_p(H)}$ ,  $\hat{c}_r \in R^r$ ,  $\hat{c}_\mu \in R^\mu$ ,  $\hat{c}_p \in R^p$  — довільні сталі,  $(\tilde{L}_1^+ [K\Psi^*])(t) = \int_a^t (L_1^+ [K\Psi^*])(s) ds$ .

**Теорема.** Нехай  $\text{rank } D = n_1$ ,  $\text{rank } S = n_2$ ,  $\text{rank } H = n_3$ .

Тоді при виконанні  $p$  лінійно незалежних умов (13) і лише при них інтегро-диференціальне рівняння з керуванням (1) має сім'ю  $r + \mu + p$  ( $r = 2m - n_1$ ,  $\nu = n - n_2$ ,  $p = \nu - n_3$ ) розв'язків

$$z(t) = \begin{bmatrix} X_1(t), & X_2(t), & X_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_r \\ \hat{c}_\mu \\ \hat{c}_p \end{bmatrix} + (\tilde{L}_1^+ f)(t) +$$

$$+ (\tilde{L}_1^+ [K\Psi^*])(t) H^+ P_{N_\nu(S^*)} f_0 + (\tilde{L}_1^+ P)(t) W S^+ f_0 + S^+ f_0,$$

де  $\hat{c}_r \in R^r$ ,  $\hat{c}_\mu \in R^\mu$  та  $\hat{c}_p \in R^p$  — довільні сталі.

При цьому воно має  $p$ -параметричну сім'ю лінійно незалежних допустимих керувань

$$u(s) = \Psi^*(s) P_{N_p(H)} \hat{c}_p + \Psi^*(s) H^+ P_{N_r(D^*)} f_0.$$

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. 2nd edition*, Berlin, De Gruyter (2016).
2. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разреши-мые краевые задачи*, Нукова думка, Київ (2019).

# Умови розв'язності рівнянь з $(2 \times 2)$ -вимірними операторними матрицями у гільбертових просторах

*Валерій Журавльов, Ірина Слюсаренко*

*vfz2008@ukr.net, islusarenko62@gmail.com*

*Поліський національний університет*

В роботі отримано умови розв'язності та формули загальних розв'язків операторних рівнянь з  $(2 \times 2)$ -вимірними операторними матрицями у гільбертових просторах.

Розглянемо рівняння з операторною матрицею

$$L_0 \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де  $L_{11} : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_3$ ,  $L_{12} : \mathbf{H}_2 \rightarrow \mathbf{H}_3$ ,  $L_{21} : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_4$ ,  $L_{22} : \mathbf{H}_2 \rightarrow \mathbf{H}_4$  — лінійні обмежені оператори.

Мета роботи: знайти формули для побудови проекторів та узагальнено оберненої матриці  $L_0^-$  до операторної матриці  $L_0$ , а також встановити умови існування та вигляд розв'язку рівняння (1).

Запишемо рівняння (1) у вигляді системи операторних рівнянь

$$\begin{cases} L_{11}c + L_{12}d = y_1, \\ L_{21}c + L_{22}d = y_2. \end{cases} \quad (2)$$

Нехай оператор  $L_{11}$  — нормальню розв'язний. Тоді існують ортопректори:  $P_{N(L_{11})}$  — на нуль-простір  $N(L_{11})$  оператора  $L_{11}$ ,  $P_{N(L_{11}^*)}$  — на нуль-простір  $N(L_{11}^*)$  спряженого до  $L_{11}$  оператора  $L_{11}^*$  та псевдообернений оператор  $L_{11}^+$  до оператора  $L_{11}$ .

Тоді перше рівняння системи (2) має розв'язок відносно  $c \in \mathbf{H}_1$  тоді і лише тоді, коли виконується умова [1, 2]

$$P_{N(L_{11}^*)}[y_1 - L_{12}d] = 0, \quad (3)$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$c = P_{N(L_{11})}\bar{c} + L_{11}^+[y_1 - L_{12}d], \quad (4)$$

де  $\bar{c}$  — довільний елемент банахового простору  $\mathbf{H}_1$ .

Підставимо знайдене  $c$  з (4) у друге рівняння системи (2)

$$L_{21}\left\{P_{N(L_{11})}\bar{c} + L_{11}^+[y_1 - L_{12}d]\right\} + L_{22}d = y_2,$$

або

$$\tilde{L}_{22}d = y_2 - L_{21}L_{11}^+y_1 - L_{21}P_{N(L_{11})}\bar{c}, \quad (5)$$

де  $\tilde{L}_{22} = L_{22} - L_{21}L_{11}^+L_{12}$  — лінійний обмежений оператор.

Нехай оператор  $\tilde{L}_{22}$  — нормальню розв'язний. Тоді рівняння (5) має розв'язок відносно  $d \in \mathbf{H}_2$  тоді і лише тоді, коли виконується умова [1, 2]

$$P_{N(\tilde{L}_{22}^*)}\left[y_2 - L_{21}L_{11}^+y_1 - L_{21}P_{N(L_{11})}\bar{c}\right] = 0, \quad (6)$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$d = P_{N(\tilde{L}_{22})}\bar{d} + \tilde{L}_{22}^+\left[y_2 - L_{21}L_{11}^+y_1 - L_{21}P_{N(L_{11})}\bar{c}\right], \quad (7)$$

де  $P_{N(\tilde{L}_{22}^*)}$  — ортопроєктор на нуль-простір  $N(\tilde{L}_{22}^*)$  спряженого до  $\tilde{L}_{22}$  оператора  $\tilde{L}_{22}^*$ ,  $P_{N(\tilde{L}_{22})}$  — ортопроєктор на нуль-простір  $N(\tilde{L}_{22})$  оператора  $\tilde{L}_{22}$ ,  $\tilde{L}_{22}^+$  — псевдообернений оператор до оператора  $\tilde{L}_{22}$ .

Для отримання умови розв'язку першого рівняння системи (2), підставимо (7) у (3)

$$\begin{aligned} & P_{N(L_{11}^*)}L_{12}\tilde{L}_{22}^+L_{21}P_{N(L_{11})}\bar{c} - P_{N(L_{11}^*)}L_{12}P_{N(\tilde{L}_{22})}\bar{d} + \\ & + \left(P_{N(L_{11}^*)} + P_{N(L_{11}^*)}L_{12}\tilde{L}_{22}^+L_{21}L_{11}^+\right)y_1 - P_{N(L_{11}^*)}L_{12}\tilde{L}_{22}^+y_2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Позначимо  $\hat{B}_{22}^+ = L_{12}\tilde{L}_{22}^+L_{21}$ .

Підставивши (7) у (4), отримаємо

$$\begin{aligned} c = & \left[P_{N(L_{11})} + L_{11}^+\hat{B}_{22}^+P_{N(L_{11})}\right]\bar{c} - L_{11}^+L_{12}P_{N(\tilde{L}_{22})}\bar{d} + \\ & + \left[L_{11}^+ + L_{11}^+\hat{B}_{22}^+L_{11}^+\right]y_1 - L_{11}^+L_{12}\tilde{L}_{22}^+y_2. \end{aligned} \quad (9)$$

З умов (8) та (6) отримаємо умови розв'язності матричного операторного рівняння (2)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_{N(L_{11}^*)}\hat{B}_{22}^+P_{N(L_{11})} & -P_{N(L_{11}^*)}L_{12}P_{N(\tilde{L}_{22})} \\ -P_{N(\tilde{L}_{22}^*)}L_{21}P_{N(L_{11})} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} P_{N(L_{11}^*)} + P_{N(L_{11}^*)}\hat{B}_{22}^+L_{11}^+ & -P_{N(L_{11}^*)}L_{12}\tilde{L}_{22}^+ \\ -P_{N(\tilde{L}_{22}^*)}L_{21}L_{11}^+ & P_{N(\tilde{L}_{22}^*)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

а з (7) та (9), отримаємо загальний розв'язок операторної системи (1)

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{N(L_{11})} + L_{11}^+ \widehat{B}_{22}^+ P_{N(L_{11})} & -L_{11}^+ L_{12} P_{N(\tilde{L}_{22})} \\ -\tilde{L}_{22}^+ L_{21} P_{N(L_{11})} & P_{N(\tilde{L}_{22})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} L_{11}^+ + L_{11}^+ \widehat{B}_{22}^+ L_{11}^+ & -L_{11}^+ L_{12} \tilde{L}_{22}^+ \\ -\tilde{L}_{22}^+ L_{21} L_{11}^+ & \tilde{L}_{22}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де  $\bar{c} \in \mathbf{H}_1$ ,  $\bar{d} \in \mathbf{H}_2$  — елементи, які задовольняють умову (10).

Позначимо оператори

$$K = \begin{bmatrix} -P_{N(L_{11}^*)} \widehat{B}_{22}^+ P_{N(L_{11})} & P_{N(L_{11}^*)} L_{12} P_{N(\tilde{L}_{22})} \\ P_{N(\tilde{L}_{22}^*)} L_{21} P_{N(L_{11})} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{L}_0 = L_0 - K,$$

$$\mathcal{P}_{N(\tilde{L}_0)} = \begin{bmatrix} P_{N(L_{11})} + L_{11}^+ \widehat{B}_{22}^+ P_{N(L_{11})} & -L_{11}^+ L_{12} P_{N(\tilde{L}_{22})} \\ -\tilde{L}_{22}^+ L_{21} P_{N(L_{11})} & P_{N(\tilde{L}_{22})} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\tilde{L}_0}} = \begin{bmatrix} P_{N(L_{11}^*)} + P_{N(L_{11}^*)} \widehat{B}_{22}^+ L_{11}^+ & -P_{N(L_{11}^*)} L_{12} \tilde{L}_{22}^+ \\ -P_{N(\tilde{L}_{22}^*)} L_{21} L_{11}^+ & P_{N(\tilde{L}_{22}^*)} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\tilde{L}_0^- = \begin{bmatrix} L_{11}^+ + L_{11}^+ \widehat{B}_{22}^+ L_{11}^+ & -L_{11}^+ L_{12} \tilde{L}_{22}^+ \\ -\tilde{L}_{22}^+ L_{21} L_{11}^+ & \tilde{L}_{22}^+ \end{bmatrix}.$$

Тоді умову (10) запишемо у вигляді

$$\mathcal{P}_{Y_{\tilde{L}_0}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} = 0,$$

а загальний розв'язок (11) — у вигляді

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = P_{N(\tilde{L}_0)} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} + \tilde{L}_0^- \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

В роботі показано, що оператори (12), (13) є обмеженими проекторами відповідно на нуль-простір  $N(\tilde{L}_0) \subset \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$  та підпростір  $Y_{\tilde{L}_0} = \mathbf{H}_3 \times \mathbf{H}_4 \ominus R(\tilde{L}_0)$ .

Обмежений проєктор  $\mathcal{P}_{N(\tilde{L}_0)}$  розбиває гільбертовий простір  $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$  на доповнювальні підпростори  $N(\tilde{L}_0)$  та  $X_{\tilde{L}_0}$  [3]

$$\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 = N(\tilde{H}_0) \oplus X_{\tilde{H}_0}.$$

Оскільки  $L_0 \mathcal{P}_{N(\tilde{L}_0)} = K$ , то  $X_{\tilde{L}_0} \subseteq X_{L_0}$ , де  $X_{L_0} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 \ominus N(L_0)$ .

Далі показано, що оператор  $\tilde{L}_0$  є звуженням оператора  $L_0$  на підпростір  $X_{\tilde{L}_0}$ , тобто  $L_0 x = \tilde{L}_0 x$  для всіх  $x \in X_{\tilde{L}_0}$ , а операторна матриця

$$\tilde{L}_0^- = \begin{bmatrix} L_{11}^+ + L_{11}^+ \tilde{B}_{22}^+ L_{11}^+ & -L_{11}^+ L_{12} \tilde{L}_{22}^+ \\ -\tilde{L}_{22}^+ L_{21} L_{11}^+ & \tilde{L}_{22}^+ \end{bmatrix} \quad (14)$$

задовольняє властивості, які визначають узагальнено обернену операторну матрицю

$$1. L_0 \tilde{L}_0^- L_0 = L_0.$$

$$2. \tilde{L}_0^- L_0 \tilde{L}_0^- = \tilde{L}_0^-,$$

тобто є обмеженою узагальнено оберненою до операторної матриці  $L_0$ .

**Теорема 1.** *Нехай оператори  $L_{11}$  та  $\tilde{L}_{22}$  — нормальню розв'язні.*

*Тоді при виконанні умови*

$$\mathcal{P}_{Y_{\tilde{L}_0}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

*операторне рівняння (1) має принаймні один розв'язок*

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \tilde{L}_0^- \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

де  $\tilde{L}_0^-$  — узагальнено обернена матриця до операторної матриці  $L_0$ .

1. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. — Berlin: De Gruyter, 2-nd Edition, 2016. — 296 p.
2. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Нормально разрешимые краевые задачи. — Киев: Нук. думка, 2019. — 628 с.
3. Попов М. М. Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. — 2007. — Вип. 13. — С. 78 – 116.

# Про задачу Коші для параболічних за Ейдельманом систем

*Івасюк Г.П., Фратавчан Т.М.*

*h.ivasjuk@chnu.edu.ua, t.fratavchan@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича*

Розглядається задача Коші для параболічної за Ейдельманом системи  $N$  диференціальних рівнянь із частинними похідними вигляду

$$A(t, x, \partial_{t,x}^{\bar{\alpha}})u(t, x) := \left( I_N \partial_t - \sum_{\|\alpha\| \leq 2b} A_\alpha(t, x) \partial_x^\alpha \right) u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

де  $n, N, b_1, \dots, b_n$  – задані натуральні числа,  $I_N$  – одинична матриця порядку  $N$ ,  $b$  – найменше спільне кратне чисел  $b_1, \dots, b_n$ ;  $m := (m_1, \dots, m_n)$ ,

$m_0 := 2b$ ,  $m_j := 2b/(2b_j)$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ;  $\|\bar{\alpha}\| := \sum_{j=0}^n m_j \alpha_j$ , якщо  $\bar{\alpha} :=$

$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$ ;  $\|\alpha\| := \sum_{j=1}^n m_j \alpha_j$ , якщо  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ ;

$M := \sum_{j=0}^n m_j$ ;  $\partial_x^\alpha := (\partial_{x_1}^{\alpha_1}, \dots, \partial_{x_n}^{\alpha_n})$ ,  $\partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} := (\partial_t^{\alpha_0}, \partial_x^{\bar{\alpha}})$ ;  $u := \text{col}(u_1, \dots, u_N)$

– невідома,  $f := \text{col}(f_1, \dots, f_N)$ ,  $\varphi := \text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  – задані вектор-функції;  $\Pi_T := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in (0, T], x \in \mathbb{R}^n\}$ , де  $T$  – задане додатне число.

Задача (1) у позитивних просторах Гельдера обмежених та спеціальним чином швидкозростаючих функцій на даний час досить добре вивчена. У теорії таких задач важливу роль відіграє фундаментальна матриця розв'язків (ФМР) та її властивості. Фундаментальною в теорії таких задач є праця С.Д. Івасищена та С.Д. Ейдельмана [1]. В ній одержано досить точні властивості ФМР задачі Коші та породжених нею потенціалів, знайдено класи коректності задачі Коші для лінійних систем при різних припущеннях щодо неоднорідностей системи і початкових функцій. Зокрема, за умов

**A:** система диференціальних рівнянь задачі (1) є рівномірно параболічна за Ейдельманом [1] в шарі  $\Pi_T$ ;

**B:** коефіцієнти системи задачі (1) обмежені, задовольняють рівномірну умову Гельдера за  $x$ , неперервні за  $t$ , при цьому неперервність за  $t$  коефіцієнтів  $A_\alpha(t, x)$ ,  $\|\alpha\| = 2b$ , рівномірна відносно  $x \in \mathbb{R}^n$ ; існує фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші (1)  $\Gamma(t, x; \tau, \xi) = (\Gamma_{kj}(t, x; \tau, \xi))_{k,j=1}^N$  та відомі її оцінки

$$|\partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} \Gamma_{kj}(t, x; \tau, \xi)| \leq C_{\bar{\alpha}}(t - \tau)^{1 - (M - \|\bar{\alpha}\|)/(2b)} E_c(t - \tau, x - \xi), \quad (2)$$

$0 \leq \tau < t \leq T$ ,  $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\|\bar{\alpha}\| \leq 2b$ ,  $\{k, j\} \subset \{1, \dots, n\}$ ,

де  $E_c(t, x) := \exp\{-c \sum_{j=0}^n t^{1-q_j} |x_j|^{q_j}\}$ ,  $C_{\bar{\alpha}} > 0$ ,  $c > 0$ . У монографії [2]

підсумовуються всі основні результати, одержані до 2004 року в теорії параболічних (параболічних за Ейдельманом) систем, зокрема, коректна розв'язність задачі Коші у різних функціональних просторах.

Основним результатом доповіді є доведення теореми про коректну розв'язність задачі (1) у введених негативних просторах Гельдера. Для цього спочатку побудовано спряжені оператори Гріна, досліджено їх властивості у позитивних просторах Гельдера спеціально підібраних спадних функцій, потім за допомогою норм спряжених операторів у позитивних просторах Гельдера введено негативні простори Гельдера. Відповідні результати для параболічних краївих задач для систем параболічних за Петровським були одержані С.Д. Іvasишеним у праці [3].

Щоб сформулювати основний результат, наведемо означення позитивних та відповідних негативних просторів Гельдера. При цьому за позитивні простори візьмемо простори, в яких діють спряжені оператори. Нехай  $T_1 > T$ ,  $c_1 = c/2$ , де  $c$  – стала з оцінок (2);  $l$  і  $\lambda$  – задані числа відповідно з множин  $\mathbb{Z}_+^1$  і  $(0, 1)$ ;  $\Delta_t^\tau f(t, \cdot) := f(t, \cdot) - f(\tau, \cdot)$ ;  $\Delta_{x_j}^{y_j} f(\cdot, x) := f(\cdot, x) - f(\cdot, x(y_j))$ ,  $x(y_j) := (x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Через  $H_{c_1}^{l+\lambda}$  позначимо простір функцій  $u : \Pi_T \rightarrow \mathbb{C}_{N1}$ , які мають неперервні похідні  $\partial_{t,x}^{\bar{\alpha}}$ ,  $\|\bar{\alpha}\| \leq l$ , і мають скінченну норму

$$\begin{aligned} \|u\|_{c_1}^{l+\lambda} := & \sum_{0 \leq l - \|\bar{\alpha}\| \leq 2b} \sup_{\substack{\{t, \beta\} \subset [0, T], \\ t \neq \beta, x \in \mathbb{R}^n}} \left( |\Delta_t^\beta \partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} u(t, x)| \times \right. \\ & \times |t - \beta|^{-(l - \|\bar{\alpha}\| + \lambda)/(2b)} (E_{c_1}(T_1 - t, x) + E_{c_1}(T_1 - \beta, x))^{-1} \Big) + \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{0 \leq l - \|\bar{\alpha}\| \leq m_j} \sup_{\substack{(t, x) \in \Pi_T, \\ y_j \in \mathbb{R}, x_j \neq y_j}} \left( |\Delta_{x_j}^{y_j} \partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} u(t, x)| \times \right. \\ & \times |x_j - y_j|^{-(l - \|\bar{\alpha}\| + \lambda)/m_j} (E_{c_1}(T_1 - t, x) + E_{c_1}(T_1 - t, x(y_j)))^{-1} \Big) + \\ & + \sum_{j=0}^l \sum_{\|\bar{\alpha}\|=j} \sup_{(t, x) \in \Pi_T} (|\partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} u(t, x)| (E_{c_1}(T_1 - t, x))^{-1}); \end{aligned}$$

$C_{c_1}^{l+\lambda}$  – простір функцій  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}_{N1}$ , для яких існують неперервні

похідні  $\partial_x^\alpha$ ,  $\|\alpha\| \leq l$ , і є скінченною норма

$$\begin{aligned} |v|_{c_1}^{l+\lambda} &:= \sum_{j=1}^n \sum_{0 \leq l - \|\alpha\| \leq m_j} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ y_j \in \mathbb{R}, x_j \neq y_j}} \left( |\Delta_{x_j}^{y_j} \partial_x^\alpha v(x)| \times \right. \\ &\quad \left. \times |x_j - y_j|^{-(l - \|\alpha\| + \lambda)/m_j} (E_{c_1}(T_1, x) + E_{c_1}(T_1, x(y_j)))^{-1} \right) + \\ &\quad + \sum_{j=0}^l \sum_{\|\alpha\|=j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|\partial_x^\alpha v(x)| (E_{c_1}(T_1, x))^{-1}); \end{aligned}$$

$\dot{H}_{c_1}^{l+\lambda}$  – сукупність функцій з простору  $H_{c_1}^{l+\lambda}$ , які задовольняють умову  $\partial_t^{\alpha_0} u|_{t=T} = 0$ ,  $\alpha_0 \in \{0, \dots, [(l+\lambda)/(2b)]\}$ ;  $H^{l+\lambda}$  – простори Гельдера обмежених функцій, які означені в [2].

Для неперервних і обмежених функцій  $u : \Pi_T \rightarrow \mathbb{C}_{N1}$  визначимо такі негативні норми

$$\begin{aligned} \|u\|^{-(l+\lambda)} &:= \sup_{g \in \dot{H}_{c_1}^{l+\lambda}} \frac{|(u, g)_{L_2(\Pi_T)}|}{\|g\|_{c_1}^{l+\lambda}}, \\ |u|_{t=0}|^{-(l+\lambda)} &:= \sup_{g \in C_{c_1}^{l+\lambda}} \frac{|[u|_{t=0}, g]_{L_2(\mathbb{R}^n)}|}{|g|_{c_1}^{l+\lambda}}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} (u, g)_{L_2(\Pi_T)} &:= \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} u'(t, x) \overline{g(t, x)} dx, \\ [u|_{t=0}, g]_{L_2(\mathbb{R}^n)} &:= \int_{\mathbb{R}^n} u'(0, x) \overline{g(x)} dx, \end{aligned}$$

тут штрих означає транспонування, а риска – комплексну спряженість.

Через  $H^{-(l+\lambda)}$  позначимо замикання простору  $H^{2b+\lambda}$  функцій  $u := \text{col}(u_1, \dots, u_N)$  за нормою

$$\|u\|^{-(l+\lambda)} := \sum_{j=1}^N (\|u_j\|^{-(l+\lambda)} + |u_j|_{t=0}|^{-(l+2b+\lambda)}).$$

Для  $-\infty < -(l+\lambda) < -2b$  через  $\mathcal{H}^{-(l+\lambda)}$  позначимо замикання множини  $H^\lambda \times C^{2b+\lambda}$  функцій  $F := \text{col}(f_1, \dots, f_N, \varphi_1, \dots, \varphi_N)$ , де  $f_j \in H^\lambda$ ,  $\varphi_j \in C^{2b+\lambda}$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ , за нормою

$$\|F\|_A^{-(l+\lambda)} := \sum_{j=1}^N \left( \|f_j\|^{-(l+\lambda)} + |\varphi_j|^{-(l+\lambda)} \right).$$

**Теорема.** Нехай  $A_\alpha$ ,  $\|\alpha\| \leq 2b$ , – обмежені та нескінченно диференційовні функції в  $\Pi_T$ . Тоді для кожного нецілого  $s$ ,  $|s| > 2b$  замикання за неперервністю оператора  $A$  здійснює взаємно однозначне та неперервне відображення між просторами  $H^s$  та  $\mathcal{H}^{s-2b}$ .

1. Иvasишен С.Д., Эйдельман С.Д.  $\overrightarrow{2b}$ -параболические системы // Тр. семинара по функциональному анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.
2. S. D. Eidelman, S. D. Ivashchenko, A. N. Kochubei Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – 152. – 390 p.
3. Иvasишен С.Д. Матрицы Грина граничных задач для параболических систем общего вида, Мат. сб. **114** (1, 4), (1981), С. 110–166, 523–565.

# Numerical scheme for backward heat equation via direct method of Lie-algebraic discrete approximations

*Arkadii Kindybaliuk, Mykola Prytula*

*kindybaliuk.arkadii@outlook.com, mykola.prytula@gmail.com*

*Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Str., 1, Lviv, 79000*

Backward heat equation has various applications in the different fields: image processing, signal processing, eliminating of diffusion. Thus, effective numerical solution is an important problem besides the variety of different approaches.

Some of the methods [1] can provide factorial convergence and relatively high accuracy of approximated solution [2, 3]. For instance, the Generalized method of Lie-algebraic discrete approximations (GMLADA) provides factorial convergence rate for all variables: for space and for the time variable as well [4].

According to [5], computational properties of [4] can be enhanced via Direct method of Lie-algebraic discrete approximations (DMLADA), so we can construct the numerical scheme for solving heat equation having the same accuracy with significantly less arithmetic operations [6].

Considering a bounded domain  $\Omega := (a, b) \in R$ , time limit  $T < +\infty$ , cylinder  $Q_T = \Omega \times (0, T]$  we take the Banach space  $V = W^{\infty, \infty}(\overline{Q_T})$  and formulate the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} \text{find function } u = u(x, t) \in V \text{ such, that:} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \forall (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi, \varphi \in W^{\infty, \infty}(\overline{Q_T}), \end{cases} \quad (1)$$

where the constant  $a \in R, a > 0$  denotes the heat conduction coefficient and  $\varphi = \varphi(x)$  denotes the initial condition, and space  $W^{\infty, \infty}(\overline{Q_T})$  denotes the functional space in which all functions and its derivatives up to arbitrary order are bounded in the domain  $\overline{Q_T}$ , i.e.:

$$W^{\infty, \infty}(\overline{Q_T}) = \{u : Q_T \rightarrow \mathbb{R} : D^\alpha u \in L^\infty(Q_T), \forall \alpha \in \mathbb{N}\}.$$

In general, current problem is ill posed.

The main prerequisite of the Lie-algebraic method is that differential operator of the equation should be the element of universe enveloping Heisenberg-Weyl's algebra with basis elements from the Lie algebra  $\{1, x, d/dx\}$ , i.e. differential operator for the problem must be superposition and/or linear combination of these base elements of Lie algebra.

As a next step we introduce the finite dimensional discrete quasi representations of  $G = \{1, x, d/dx\}$  as matrices  $G_h = \{I, X, Z\}$  acting in the finite dimensional space. Matrix  $Z$  approximates the differential operator  $d/dx$ .

The idea of DMLADA consists in the use of analytical approaches [5], in particular the method of a small parameter, to construct an approximate analytic solution of a problem (1) in the form of a power series in a time variable:

$$u_{n/2}(x, t) = \sum_{k=0}^{n/2} \left( \tilde{u}_k \frac{t^k}{k!} \right) = \varphi - a\varphi''t + a^2\varphi^{(4)} \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^{n/2} a^{n/2} \varphi^{(n)} \frac{t^{n/2}}{(n/2)!}. \quad (2)$$

The corresponding discrete series was constructed for (2) using the finite dimensional quasi-representations  $G_h = \{1, Z, X\}$  of elements of the Lie algebra  $G = \{1, \partial/\partial x, x\}$ :

$$\begin{aligned} u_{n/2,h}(t) &= \sum_{k=0}^{n/2} \left( \tilde{u}_{k,h} \frac{t^k}{k!} \right) = \\ &= \varphi_h - aZ^2\varphi_h t + a^2Z^4\varphi_h \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^{n/2} a^{n/2} Z^n \varphi_h \frac{t^{n/2}}{(n/2)!}. \end{aligned} \quad (3)$$

The series (3) is finite, since the matrix  $Z$  is nilpotent [2].

Let us consider the cylinder norm for the function  $v = v(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  as a following functional:

$$\|v\|_{V_h}^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v^2(x_i),$$

being a norm in the finite dimensional space  $V_h$ . One can verify that the following inequality holds [5]:

$$\|v\|_{V_h} \leq \|v\|_\infty.$$

**Teorema 1.** (*Convergence of the direct Lie-algebraic numerical scheme*). Let  $u = u(x, t)$  be the solution of the problem (1),

$$u_n = \sum_{k=0}^{n/2} \left( (-1)^k a^k \varphi^{(2k)} \frac{t^k}{k!} \right)$$

be the Taylor expansion of the solution and

$$u_h = \sum_{j=0}^n \left[ \left( \sum_{k=0}^{n/2} \left( (-1)^k a^k Z^{2k} \varphi_h \frac{t^k}{k!} \right) \right) l_j(x) \right]$$

be the finite dimensional solution. Then built numerical scheme (3) is convergent having the factorial rate of convergence:

$$\|u - u_h\|_{V_h} \leq \frac{T^{n/2+1}}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)!} \left\| \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n+1}} \right\|_\infty + \frac{(2 \max \{a, \text{diam}\Omega, T\})^{n+1}}{4(n/2 - 1)!} \left\| \varphi^{(n+1)} \right\|_\infty.$$

Computational experiments have shown that with the same accuracy and convergence indicators that are characteristic for the generalized method of Lie-algebraic discrete approximations, we succeeded in significantly reducing the number of arithmetic operations using our approach.

1. Бігун О., Притула М. Метод Лі-алгебричних апроксимацій у теорії динамічних систем // Математичний вісник НТШ. – Т.1. – 2004. – С. 24–31.
2. Bihun O., Prytula M. The rank of projection-algebraic representations of some differential operators // Matematychni Studii. – 2011. – Vol. 35, Is. 1 – P. 9–21.
3. Calogero F. Interpolation, differentiation and solution of eigen value problems in more than one dimension // Lett. Nuovo Cimento. – 1983. – Vol. 38, Is. 13. – P. 453–459.
4. Kindybaliuk Adriana, Kindybaliuk Arkadii, Prytula Mykola Backward heat equation solution via Lie-algebraic discrete approximations // Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science. – 2017. – Vol. 25 – P. 68–81.
5. Kindybaliuk Arkadii, Prytula Mykola Direct method of Lie-algebraic discrete approximations for advection equation. // Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science. – 2018. – Vol. 26 – P. 70–89.
6. Kindybaliuk Arkadii, Prytula Mykola Direct method of Lie-algebraic discrete approximations for solving backward heat equation // Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science. – 2021. – Vol. 29 – P. 56–66.

# Bifurcation of cycles in parabolic systems with weak diffusion

*Ivan Klevchuk, Mykola Hrytchuk*

*i.klevchuk@chnu.edu.ua*

*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University*

The existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument were considered in [6]. The existence and stability of an arbitrarily large finite number of cycles for the equation of spin combustion with delay were considered in [7]. We study the existence and stability of an arbitrarily large finite number of cycles for a parabolic system with delay and weak diffusion. Similar problems for partial differential equations were studied in numerous works (see, e.g., [1]–[7]).

## 1. Traveling waves for parabolic equations with weak diffusion.

Consider a system

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \omega_0 u_2 + \varepsilon(\alpha u_1 - \beta u_2) + (d_0 u_1 - c_0 u_2)(u_1^2 + u_2^2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \omega_0 u_1 + \varepsilon(\alpha u_2 + \beta u_1) + (d_0 u_2 + c_0 u_1)(u_1^2 + u_2^2)\end{aligned}\quad (1)$$

with periodic condition

$$u_1(t, x + 2\pi) = u_1(t, x), \quad u_2(t, x + 2\pi) = u_2(t, x), \quad (2)$$

where  $\varepsilon$  is a small positive parameter,  $\omega_0 > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $d_0 < 0$ .

Passing to the complex variables  $u = u_1 + iu_2$  and  $\bar{u} = u_1 - iu_2$ , we arrive at the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon \left[ (\gamma + i\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u \right] + (d_0 + ic_0)u^2\bar{u}. \quad (3)$$

In the present paper, we investigate the existence and stability of the wave solutions of problem (1), (2). The solution of equation (3) is sought in the form of traveling wave  $u = \theta(y)$ ,  $y = \sigma t + x$ , where the function  $\theta(y)$  is periodic with period  $2\pi$ . We arrive at the equation

$$\sigma \frac{d\theta}{dy} = i\omega_0 \theta + \varepsilon \left[ (\gamma + i\delta) \frac{d^2 \theta}{dy^2} + (\alpha + i\beta)\theta \right] + (d_0 + ic_0)\theta^2\bar{\theta}.$$

By the change of variables  $\frac{d\theta}{dy} = \theta_1$ , this equation is reduced to the following system:

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \sigma\theta_1 = i\omega_0 \theta + \varepsilon \left[ (\gamma + i\delta) \frac{d\theta_1}{dy} + (\alpha + i\beta)\theta \right] + (d_0 + ic_0)\theta^2\bar{\theta}. \quad (4)$$

The integral manifold of system (4) can be represented in the form

$$\theta_1 = \frac{i\omega_0}{\sigma} \theta + \varepsilon \left[ \frac{\alpha + i\beta}{\sigma} \theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3} (\gamma + i\delta) \theta \right] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma} \theta^2 \bar{\theta} + \dots$$

Here, we keep the terms of order  $O(\varepsilon)$  in the linear terms and the terms of order  $O(1)$  in the nonlinear terms. The equation on this manifold takes the form

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{i\omega_0}{\sigma} \theta + \varepsilon \left[ \frac{\alpha + i\beta}{\sigma} \theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3} (\gamma + i\delta) \theta \right] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma} \theta^2 \bar{\theta} + \dots \quad (5)$$

Passing to the polar coordinates  $\theta = r \exp(i\varphi)$  in Eq. (5), we get

$$\frac{dr}{dy} = \varepsilon \left( \frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\gamma}{\sigma^3} \omega_0^2 \right) r + \frac{d_0}{\sigma} r^3. \quad (6)$$

Let  $d_0 < 0$  and let the inequality  $\alpha > \frac{\gamma}{\sigma^2} \omega_0^2$  be true. Then Eq. (6) possesses the stationary solution

$$r = \sqrt{\varepsilon} R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left( \alpha - \frac{\gamma}{\sigma^2} \omega_0^2 \right) |d_0|^{-1}},$$

hence, the periodic solution of Eq. (5) takes the form  $\theta = \sqrt{\varepsilon} R_0 \exp \left( \frac{i\omega_0}{\sigma} y \right) + O(\varepsilon)$ . Since the function  $\theta$  is periodic with period  $2\pi$ , we get  $\sigma = \frac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Thus, the periodic solution of Eq. (3) takes the form

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon), \quad (7)$$

where  $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma) |d_0|^{-1}}$ ,  $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Thus, the periodic solution of problem (1), (2) takes the form

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon} r_n \cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad u_2 = \sqrt{\varepsilon} r_n \sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

The following statement is true:

**Theorem 1.** *Let  $\omega_0 > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $d_0 < 0$  and let the inequality  $\alpha > \gamma n^2$  be true for some integer  $n$ . Then there exists  $\varepsilon_0 > 0$  such that, for  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , problem (1), (2) has solutions (8) periodic in  $t$ .*

**2. Stability of periodic solutions.** The equation in variations in the vicinity of the solution (7) of equation (3) takes the form

$$\frac{\partial v}{\partial t} = i\omega_0 v + \varepsilon \left[ (\gamma + i\delta) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)v \right] + \varepsilon(d_0 + ic_0)(2r_n^2 v + w_n^2 \bar{v}), \quad (9)$$

where  $w_n = r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$ ,  $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$ . By the change of variables  $v = w \exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$  in Eq. (9), we find

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon \left[ (\gamma + i\delta) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_n w + (d_0 + ic_0)r_n^2(w + \bar{w} \exp(2inx)) \right], \quad (10)$$

where  $\eta_n = \alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2$ .

We seek the solution of Eq. (10) in the form of Fourier series in the complex form

$$w(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t) \exp(ikx), \quad \bar{w}(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t) \exp(ikx). \quad (11)$$

Substituting (11) in (10) and equating the coefficients of  $\exp(ikx)$ , we obtain the equations for the coefficients of the Fourier series

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[\eta_n y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k+n)^2 y_{k+n} + (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \quad (12)$$

Similarly, substituting (11) in the equation adjoint to (10), we get

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[\bar{\eta}_n v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k-n)^2 v_{k-n} + (d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \quad (13)$$

The stability of the wave solutions of problem (1), (2) is determined by the stability of system (12), (13) with a parameter  $k \in \mathbb{Z}$ . By the change of variables  $y_{k+n} = z_{k+n} \exp(-2i\varepsilon\delta kn)$ ,  $v_{k-n} = w_{k-n} \exp(-2i\varepsilon\delta kn)$  in system (12), (13), we get a linear system with the matrix

$$\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}.$$

The matrix  $A$  has an eigenvalue equal to zero for  $k = 0$ . Since the sum of diagonal elements of the matrix  $A$  is negative,  $a = a_{11} + a_{22} < 0$ , for the orbital exponential stability of the periodic solution  $u_n(t, x)$ , it is necessary and sufficient that the condition  $a^2 c > f^2$ , where  $c = \text{Re}(\det(A))$ ,  $f = \text{Im}(\det(A))$ ,  $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$ , be satisfied for  $k \neq 0$ , i.e.

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2 (\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2, \quad (14)$$

where  $r_n^2 = (\gamma n^2 - \alpha)/d_0$ .

**Theorem 2.** *The traveling waves  $u_n(t, x)$  of problem (1), (2) are exponentially orbitally stable if and only if condition (14) is satisfied for all  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .*

As an example, we consider a system (1), where  $\delta = 0$ ,  $c_0 = 0$ . Hence, Theorem 1 implies that the periodic solution

$$u_n = \sqrt{\varepsilon(\alpha - \gamma n^2)|d_0|^{-1}} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + nx) \\ \sin(\omega_0 t + nx) \end{pmatrix}$$

exists for  $d_0 < 0$  and  $\gamma n^2 < \alpha$ . By Theorem 2, the traveling waves  $u_n(t, x)$  are exponentially orbitally stable if and only if  $n^2 < \frac{1}{6\gamma}(\gamma + 2\alpha)$ .

1. Fodchuk V.I., Klevchuk I.I. Integral sets and the reduction principle for differential-functional equations // Ukrainian Math. J. – 1982. – Vol. 34, Is. 3. – Pp. 272–277.
2. Klevchuk I.I., Fodchuk V.I. Bifurcation of singular points of differential-functional equations // Ukrainian Math. J. – 1986. – Vol. 38, Is. 3. – Pp. 281–286.
3. Klevchuk I.I. On the reduction principle for functional-differential equations of the neutral type // Differ. Equ. – 1999. – Vol. 35, Is. 4. – Pp. 464–473.
4. Klevchuk I.I. Bifurcation of the state of equilibrium in the system of nonlinear parabolic equations with transformed argument // Ukrainian Math. J. – 1999. – Vol. 51, Is. 10. – Pp. 1521–1524.
5. Klevchuk I.I. Homoclinic points for a singularly perturbed system of differential equations with delay // Ukrainian Math. J. – 2002. – Vol. 54, Is. 4. – Pp. 693–699.
6. Klevchuk I.I. Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument // J. Math. Sci. – 2016. – Vol. 215, Is. 3. – Pp. 341–349.
7. Klevchuk I.I. Bifurcation of self-excited vibrations for parabolic systems with retarded argument and weak diffusion // J. Math. Sci. – 2017. – Vol. 226, Is. 3. – Pp. 285–295.

**Функція Гріна задачі Коші для параболічних рівнянь з  
від'ємним родом і змінними коефіцієнтами**

Владислав Літовченко

v.litovchenko@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\partial_t u(t; x) = \{A_0(t; i\partial_x) + A_1(t, x; i\partial_x)\}u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0; T]}, \quad (1)$$

в якому  $u$  – невідома функція,  $\Pi_Q = \{(t; x) : t \in Q, x \in \mathbb{R}^n\}$ , а

$$A_0(t; i\partial_x) = \sum_{|k| \leq p} a_{0,k}(t)i^{|k|}\partial_x^k, \quad A_1(t, x; i\partial_x) = \sum_{|k| \leq p_1} a_{1,k}(t; x)i^{|k|}\partial_x^k$$

– диференціальні вирази порядків відповідно  $p$  і  $p_1$ . При цьому вважатимемо, що рівняння

$$\partial_t u(t; x) = A_0(t; i\partial_x)u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0; T]}, \quad (2)$$

– параболічне за Шиловим на множині  $\Pi_{[0; T]}$  з показником параболічності  $h$ ,  $0 < h \leq p$ , і родом  $\mu < 0$ , а порядок  $p_1$  групи молодших членів рівняння (1) менший за  $h$ :  $0 \leq p_1 < h$ .

Крім цього, припускаємо, що коефіцієнти  $a_{0,k}(t)$  і  $a_{1,k}(t; x)$  рівняння (1) на множині  $\Pi_{[0; T]}$  неперервні за змінною  $t$ , нескінченно диференційовні за змінною  $x$  і обмежені разом зі своїми похідними комплекснозначні функції.

Нагадаємо, що рівняння (2) на множині  $\Pi_{[0; T]}$  називається параболічним за Шиловим, або  $\{p, h\}$ -параболічним, якщо [1]

$$\exists \delta_0 > 0 \exists \delta \geq 0 \forall (t; \xi) \in \Pi_{[0; T]} : \operatorname{Re} A_0(t; \xi) \leq -\delta_0 \|\xi\|^h + \delta.$$

Для  $\{p, h\}$ -параболічного рівняння (2) згідно з теоремами типу Фрагмена-Лінделььофа [2] існує область

$$\mathbb{K}_\nu = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n : \|\eta\| \leq K(1 + \|\xi\|)^\nu\}$$

із  $\nu$  з  $[1 - (p - h); 1]$  і додатною сталою  $K$ , в якій

$$\operatorname{Re} A_0(t; \zeta) \leq -\delta_0 \|\xi\|^h + \delta, \quad t \in (0; T]. \quad (3)$$

Родом  $\mu$   $\{p, h\}$ -параболічного рівняння (2) називається точна верхня межа індексів  $\nu$ , з якими в області  $\mathbb{K}_\nu$  виконується оцінка (3).

Функцією Гріна задачі Коші (ФГЗК) для  $\{p, h\}$ -параболічного рівняння (2) позначимо через  $G$ :

$$G(t, \tau; x) = F^{-1}[\theta_\tau^t(\xi)](t, \tau; x),$$

де  $\theta_\tau^t(\xi) = \exp\{\int_\tau^t A_0(\beta; \xi) d\beta\}$ .

Правильне наступне твердження [3].

**Теорема 1.** Для  $\{p, h\}$ -параболічного рівняння (2) з родом  $\mu < 0$  існують додатні сталі  $c, B$  і  $\delta$  такі, що для всіх  $k \in \mathbb{Z}_+^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau \in [0; T)$  і  $t \in (\tau; T]$  виконується оцінка

$$|\partial_x^k G(t, \tau; x)| \leq cB^{|k|} k^{\frac{k}{h}} (t - \tau)^{-\frac{n+|k|}{h}} e^{-\delta \frac{|\widetilde{x}|^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}} \quad (4)$$

$$(тут |\widetilde{x}|^\lambda := |x_1|^\lambda + \dots + |x_n|^\lambda, \lambda := \frac{1}{1-\mu/h}, i \gamma := \frac{1}{h-\mu}) .$$

**Означення.** ФГЗК для рівняння (1) називемо функцію  $Z(t, x; \tau, \xi)$ , визначену на  $\Pi_T^2 := \{(t, x; \tau, \xi) | 0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n\}$  таку, що:

1)  $Z$  як функція  $(t; x)$  задовільняє рівняння (1) на множині  $\Pi_{(\tau; T)}$ ,  $\tau \in [0; T)$ ;

2) виконується граничне співвідношення

$$Z(t, x; \tau, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow \tau+0]{} \delta(\cdot - x)$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі  $\mathbb{S}'$  розподілів Шварца (тут  $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака).

ФГЗК для рівняння (1) доцільно будувати у вигляді

$$Z(t, x; \tau, \xi) = G(t, \tau; x - \xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t, \beta; x - y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy, \quad (5)$$

де  $G$  – ФГЗК для рівняння (2), а  $\Phi$  – розв'язок інтегрального рівняння

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = K(t, x; \tau, \xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \beta, y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy, \quad (6)$$

в якому

$$K(t, x; \tau, \xi) = A_1(t, x; i\partial_x) G(t, \tau; x - \xi).$$

Розв'язуючи рівняння (6) методом послідовних наближень, одержимо таке зображення для  $\Phi$ :

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = \sum_{l=1}^{\infty} K_l(t, x; \tau, \xi), \quad (7)$$

де  $K_1 = K$ , а

$$K_l(t, x; \tau, \xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \beta, y) K_{l-1}(\beta, y; \tau, \xi) dy, \quad l > 1.$$

Оцінки (4) функції  $G$  дозволяють обґрунтувати правильність наступного твердження.

**Лема.** *Функційний ряд (7) абсолютно збігається на множині  $\Pi_T^2$ . Його сума  $\Phi(t, x; \tau, \xi)$  на  $\Pi_T^2$  є нескінченно диференційованою функцією за кожною просторовою змінною  $x$  і  $\xi$ , для похідних якої правильні наступні оцінки:*

$$|\partial_x^r \partial_x^q \Phi(t, x; \tau, \xi)| \leq c_1 (t - \tau)^{-\frac{n+p_1+|r+q|}{h}} e^{-\delta_* \frac{\widehat{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}},$$

$$|\partial_\xi^r \Phi(t, \eta + \xi; \tau, \xi)| \leq c_2 (t - \tau)^{-\frac{n+p_1}{h}} e^{-\delta_* \frac{\widehat{|\eta|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n$$

(тут  $\{r, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ , а оціночні величини  $c_1, c_2$  і  $\delta_*$  не залежать від  $t, \tau, x, \xi$  та  $\eta$  при цьому,  $\delta_*$  – ще й від  $r$  і  $q$ ).

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

**Теорема 2.** *Функція  $Z$ , яка визначається рівністю (5), є ФГЗК для рівняння (1). Ця функція на множині  $\Pi_T^2$  диференційовна за  $t$  та нескінченно диференційовна за кожною просторовою змінною  $x$  і  $\xi$ , причому*

$$\exists \delta > 0 \forall \{r, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \exists c > 0 \forall (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2 :$$

$$|\partial_\xi^r \partial_x^q Z(t, x; \tau, \xi)| \leq c (t - \tau)^{-\frac{n+|r+q|}{h}} e^{-\delta \frac{\widehat{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}.$$

Зазначимо, що наявність ФГЗК відкриває широкі можливості для розвитку теорії задачі Коші для параболічних рівнянь з від'ємним родом і змінними коефіцієнтами за аналогією до випадку рівнянь з невід'ємним родом [4], яка природно розширити й узагальнить класичну теорію задачі Коші для параболічних за Петровським рівнянь.

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
3. Litovchenko V.A. Peculiarities of the Fundamental Solution of Parabolic Systems with a Negative Genus: Chapter of the monograph // Advances in the Solution of Nonlinear Differential Equations: IntelOpen-London, 2021. DOI: 10.5772/intechopen.92489; ISBN: 978-1-83968-657-3
4. Літовченко В.А. Системи Шилова у просторах типи S і S<sup>+</sup>: Монографія. – Чернівці: ЧНУ, 2019. – 280 с. ISBN: 978-966-423-520-1

**Функція Гріна в обернених задачах з інтегральними умовами  
для рівняння дифузії з дробовою похідною за часом**

Галина Лопушанська, Андрій Лопушанський

1hp@ukr.net, alopushanskyj@gmail.com

Львівський національний університет імені Івана Франка, Жешувський  
університет

Для рівняння дифузії

$$u_t^{(\beta)} - \Delta u = F_0(x)g(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T] := Q$$

з дробовою похідною Джрбашяна-Нерсесяна-Капуто порядку  $\beta \in (0, 1)$  розглядаємо дві обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення у просторах регулярних і узагальнених функцій.

Задача 1 полягає у знаходженні пари функцій  $(u, g)$ , що задовольняє рівняння та умови

$$u(x, 0) = F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \varphi_0(x) dx = F(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

де  $F_0, F_1, F, \varphi_0$  – задані функції.

Задача 2 полягає у знаходженні пари функцій  $(u, F_0)$ , що задовольняє рівняння та умови

$$u(x, 0) = F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int_0^T u(x, t) \eta_0(t) dt = F(x), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

де  $g, F_1, F, \eta_0$  – задані функції.

Нехай  $C_{2,\beta}(\bar{Q}) = \{v \in C(\bar{Q}) : Av, D_t^\beta v \in C(Q)\}$ .

Знайдено достатні умови існування єдиності класичного (із  $C_{2,\beta}(\bar{Q})$ ) розв'язку кожної з задач.

За допомогою вектор-функції Гріна  $(G_0(x, t), G_1(x, t))$  задача 1 зводиться до розв'язання інтегрального рівняння Вольтерри другого роду з інтегровним ядром, а задача 2 – до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду щодо невідомої  $u(x, t)$ . Невідома  $F_0$  визначається через  $u(x, t)$  [1].

Існування та цінки компонент вектор-функції Гріна одержані, зокрема, в [2, 3].

Запропоновано метод побудови чисельних розв'язків з використанням одержаних теоретичних результатів і перетворення Фур'є за просторовими змінними. Враховуємо, що в одержаних інтегральних рівняннях є згортики з компонентами вектор-функції Гріна, а їх перетворення Фур'є значно

простіші для обчислень (виражаються через функції Міттаг-Лефлера, в той час як самі компоненти вектор-функції Гріна подані за допомогою  $H$ -функції Фокса):

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[G_0](\xi, t) = t^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-|\xi|^2 t^\beta),$$

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[G_1](\xi, t) = E_{\beta, 1}(-|\xi|^2 t^\beta).$$

Одержані також [4, 5, 6] достатні умови існування її єдності узагальненого розв'язку кожної з таких задач у випадку даних із просторів узагальнених функцій із компактними носіями чи розподілів типу Шварца. При цьому додаткова умова (1) у випадку задачі 1 набуває вигляду

$$\int_0^T (u(\cdot, t), \varphi(\cdot)) \eta_0(t) dt = F(x)$$

дляожної основної функції  $\varphi$ , а умову (2) задачі 2 розуміємо як

$$(u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot)) = F(t), \quad t \in [0, T].$$

Через  $(f, \varphi)$  позначено значення узагальненої функції  $f$  на основній  $\varphi$ .

Відзначимо, що у випадку задачі 1 теореми єдності є глобальними, а для задачі 2 одержано локальну за часом єдиність розв'язку.

1. Лопушанська Г.П., Лопушанський А.О. Регулярний розв'язок оберненої задачі з інтегральною умовою для рівняння з дробовою похідною за часом // Буковинський математичний журнал. – 2020. – Т. 8, № 2. – С. 103-113.
2. Eidelman S.D., Ivashchenko S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.
3. Матійчук М.І. Про зв'язок між фундаментальними розв'язками параболічних рівнянь і рівнянь з дробовими похідними // Буковинський математичний журнал. – 2016. – Вип. 4, 3-4. – С. 101-114.
4. Lopushansky A., Lopushanska H. Inverse source Cauchy problem to a time fractional diffusion-wave equation with distributions // Electronic J. Diff. Equ. – 2017. – Vol. 2017, № 182. – Pp. 1-14.
5. Lopushanska H., Lopushansky A. Inverse problem with a time-integral condition for a fractional diffusion equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2019. – Vol. 42, № 6. – Pp. 3327-3340.
6. Lopushanska H., Lopushansky A. Inverse problems for a time fractional diffusion equation in the Schwartz-type distributions // Math. Meth. Appl. Sci. – 2021. – Vol. 44, № 3. – Pp. 2381-2392.

**Про фундаментальний розв'язок ультрапараболічного  
рівняння, коефіцієнти якого не залежать від змінних  
виродження і можуть зростати**

Галина Пасічник

pasichnyk.g@gmail.com

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федъквича*

Нехай  $m, n$  – задані натуральні числа такі, що  $m \leq n$ ;  $N := m + n$ ;  $X := (x, y)$ , якщо  $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  і  $y := (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $T > 0$ . Розглядаються рівняння вигляду

$$\left( \partial_t - \sum_{j=1}^m x_j \partial_{y_j} - \sum_{j,l=1}^n a_{jl}(t, x) \partial_{x_j} \partial_{x_l} - \sum_{j=1}^n a_j(t, x) \partial_{x_j} - a_0(t, x) \right) u(t, X) = 0,$$

$$t \in (0, T], \quad X \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

Рівняння (1) є виродженим рівнянням Колмогорова другого порядку, його коефіцієнти  $a_{jl}$ ,  $\{j, l\} \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $a_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , і  $a_0$  не залежать від змінних виродження  $y_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

У праці [1] для нього побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші у випадку, коли коефіцієнти є обмеженими функціями. При цьому умови на коефіцієнти рівняння є такими, як у випадку невироджених рівнянь.

У праці [2] розглянуто рівняння (1), у якому  $a_{jl}(t, x) = a_{jl}$ ,  $\{j, l\} \subset \{1, \dots, n\}$ , і  $a_j = \beta x_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_0(t, x) = 0$ , причому  $a_{jl} = a_{lj}$  і  $\beta$  – дійсні сталі. У цьому випадку знайдено явну формулу для фундаментального розв'язку задачі Коші.

Тут розглядається рівняння, коефіцієнти якого можуть зростати відповідним чином.

Припускається, що виконуються наступні умови на коефіцієнти рівняння (1).

*A<sub>1</sub>. Рівняння без виродження*

$$\left( \partial_t - \sum_{j,l=1}^n a_{jl}(t, x) \partial_{x_j} \partial_{x_l} - \sum_{j=1}^n a_j(t, x) \partial_{x_j} - a_0(t, x) \right) u(t, x) = 0,$$

$$t \in (0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

є [3, 4] дисипативним параболічним з характеристикою дисипації  $D$ .

Зазначимо, що  $D : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$  необмежено зростає при  $|x| \rightarrow \infty$ .

*A<sub>2</sub>. Існують неперервні похідні  $\partial_x^k a_{jl}$ ,  $\{j, l\} \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $\partial_x^l a_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,*  
 $\partial_x^k a_0$ ,  $|k| \leq 2$ , для яких справдіжуються оцінки  
 $|\partial_x^k a_{jl}(t, x)| \leq C(D(x))^{|k|(1-\varepsilon)},$

$|\partial_x^k a_j(t, x)| \leq C(D(x))^{1+|k|(1-\varepsilon)},$   
 $|\partial_x^k a_0(t, x)| \leq C(D(x))^{2+|k|(1-\varepsilon)}, t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n,$   
 де  $C > 0, \varepsilon \in (0, 1)$ ; функції  $a_{jl}(t, x), \{j, l\} \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $b_j(t, x) \equiv a_j(t, x) \times D(x)^{-1}, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $b_0(t, x) \equiv a_0(t, x)D(x)^{-2}, x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ , неперервні за  $t$  рівномірно щодо  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$A_3$ . Похідні  $\partial_x^k a_{jl}, \{j, l\} \subset \{1, \dots, n\}, \partial_x^k a_j, j \in \{1, \dots, n\}, \partial_x^k a_0, |k| \leq 2$ , задовольняють локальну умову Гельдера за  $x$  з показником  $\lambda \in (0, 1)$  рівномірно щодо  $t \in [0, T]$ .

За цих умов знайдено оцінку фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (1) та його похідних. Одержані оцінки можна використовувати до дослідження розв'язності задачі Коші.

- Івасишен С.Д., Мединський І.П. Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буковинський мат. журн. – 2014. – 2, № 2–3. – С. 94–106.
- Бабич О.О., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Наук. вісник Чернівець. нац. ун-ту ім. Ю. Федъковича. Сер.: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівець. нац. ун-т, 2011. – 1, № 1–2. – С.13–24.
- Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних  $2\tilde{b}$ -параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – N 6. – С. 18–22.
- Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – 152. – 390 p.

**Оптимальне керування в крайовій задачі для еліптичних  
рівнянь з виродженням**

*Іван Пукальський*

i.pukalsky@chnu.edu.ua

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича*

*Богдан Яшан*

b.yashan@chnu.edu.ua

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича*

Нехай  $D$  обмежена область в  $R^n$  з межею  $\partial D$ ,  $\dim D = n$ ,  $\Omega$  – деяка обмежена область,  $\bar{\Omega} \subset \bar{D}$ ,  $\dim \Omega \leq n - 1$ . Розглянемо в області  $D$  задачу знаходження функцій  $(u(x, q_1(x), q_2(x)), q_1(x), q_2(x))$  на яких функціонал

$$\begin{aligned} I(q_1, q_2) = & \int_D F_1(x; u(x, q_1(x), q_2(x)), q_1(x)) dx + \\ & + \int_{\partial D} F_2(x, u(x, q_1(x), q_2(x)), q_2(x)) d_x S \end{aligned} \quad (1)$$

досягає мінімуму в класі функцій  $q \in V = \{q | q_1 \in C^\alpha(D), q_2 \in C^{1+\alpha}(D), \nu_{11}(x) \leq q_1(x) \leq \nu_{12}(x), \nu_{21}(x) \leq q_2(x) \leq \nu_{22}(x)\}$  із яких  $u(x, q_1(x), q_2(x))$  задовольняє при  $x \in D \setminus \bar{\Omega}$  рівняння з параметром  $\mu$

$$\left[ \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n A_i(x) \partial_{x_i} + A_0(x) + \mu \right] u(x, q_1, q_2) = f(x, q_1(x)), \quad (2)$$

а на межі області  $\partial D$  крайову умову

$$\lim_{x \rightarrow z \in \partial D} \left[ \sum_{k=1}^n B_k(x) \partial_{x_k} u + B_0(x) u - \varphi(x, q_2(x)) \right] = 0. \quad (3)$$

Порядок особливостей коефіцієнтів рівняння (2) і крайової умови (3) у точці  $P(x) \in D$  характеризуватимуть функції  $s(\beta_i, x)$ :  $s(\beta_i, x) = \rho^{\beta_i}(x)$  при  $\rho(x) \leq 1$ ,  $s(\beta_i, x) = 1$  при  $\rho(x) \geq 1$ ,  $\beta_i \in (-\infty, \infty)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $\rho(x) = \inf_{z \in \bar{\Omega}} |x - z|$ .

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3).  $C^l(\gamma; \beta; a; D)$  – множина функцій  $u$ :  $x \in \bar{D}$ , які мають неперервні частинні похідні в області  $D \setminus \bar{\Omega}$  вигляду  $\partial_x^k$ ,  $|k| \leq [l]$ , для яких скінчена норма

$$\|u; \gamma; \beta; a; D\|_l = \sum_{|k| \leq [l]} \|u; \gamma; \beta; a; D\|_k + \langle u; \gamma; \beta; a; D \rangle_l,$$

де

$$\|u; \gamma; \beta; a; D\|_k = \sup_{P \in \overline{D}} s((a + |k|)\gamma; x) |\partial_x^k u(P)| \prod_{i=1}^n s(-k_i \beta_i, x),$$

$$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1}, \dots, \partial_{x_n}^{k_n}, |k| = k_1 + \dots + k_n.$$

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:

- а) коефіцієнти рівняння (1)  $A_{ij}(x)s(\beta_i, x)s(\beta_j, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  
 $A_i(x)s(\mu_i, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $\mu_i \geq 0$ ,  $A_0(x)s(\mu_0, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $\mu_0 \geq 0$ ,  
 $A_0(x) \leq 0$  і виконується умова рівномірної еліптичності

$$C_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)s(\beta_i, x)s(\beta_j, x)\xi_i\xi_j \leq C_2|\xi|^2,$$

б)  $B_k(x)s(\beta_k, x) \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $B_0(x)s(\delta_0, x) \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $\delta_0 \geq 0$ ,  $B_0(x)|_{\partial D} > 0$ , вектор  $b^{(s)} = \{s(\beta_1, x)b_1(x), \dots, s(\beta_n, x)b_n(x)\}$  утворює з напрямком зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  до  $\partial D$  в точці  $P(x) \in \partial D$  кут менший за  $\frac{\pi}{2}$ ;

в) функції  $f(x, q_1) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 2; D)$ ,  $\varphi(x, q_2) \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 1; D)$ ,  $\gamma = \max\{\max_i \beta_i, \max_i (\mu_i - \beta_i), \delta_0, \frac{\mu_0}{2}\}$ .

Правильна така теорема.

**Теорема 1.** Нехай для задачі (2) – (3) виконані умови а)–б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2) – (3) із простору  $C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$  і справдіжується нерівність

$$\|u; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq c \|f; \gamma; \beta; 2; D\|_\alpha + \|\varphi; \gamma; \beta; 1; D\|_{1+\alpha}. \quad (4)$$

Якщо  $f \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $\varphi \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$  і для задачі виконуються умови а)–б), то єдиний розв'язок задачі (2), (3) в області  $D$  визначається інтегралом Стілтьєса з борелівською мірою

$$u(x) = \int_D Z_1(x, d\xi), f(\xi, q_1(\xi)) + \int_{\partial D} Z_2(x, d_\xi S), \varphi(\xi, q_2(\xi)).$$

Необхідні і достатні умови існування розв'язку задачі (1) – (3) встановлюються за допомогою методики праці [1].

- Пукальський І., Яшан Б. Багатоточкова крайова задача оптимального керування для параболічних рівнянь з виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – Том. 63, № 4. – С. 17–33.

# Динамічне рівняння випадкових амплітуд на поверхні рідкого півпростору

*Віктор Туртуріка*

v.turturika@gmail.com

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

В даній роботі описано дослідження поширення випадкових поверхневих гравітаційних хвиль ідеальної нестисної рідини у тривимірному півпросторі.

Досліжується задача про поширення випадкових внутрішніх хвиль у тривимірному півпросторі. Нехай  $\Omega$  – шар рідини з густинou  $\rho$ , тоді  $z = \eta(\vec{x}, t)$  – поле відхилення вільної поверхні  $\vec{x} = (x, y)$ . Сила тяжіння направлена перпендикулярно поверхні у від'ємному  $z$ -напрямку, рідина вважається нестисливою.

Швидкість поширення пакетів рідини задається як повний потенціал  $\varphi(\vec{x}, z, t)$  поля течії  $u(\vec{x}, z, t)$  та має задоволити рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

динамічна умова

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \alpha \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = -\eta - P, z = \alpha \eta \quad (2)$$

кінематична умова

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, z = \alpha \eta \quad (3)$$

гранична умова

$$\varphi(\vec{x}, t) = 0, z \rightarrow -\infty \quad (4)$$

тут  $\alpha$  – малий параметр.

Для розв’язку застосовується розвинення усіх випадкових полів у ряди Фур’є-Стільтьеса в наступному вигляді

$$\eta(\vec{x}, t) = \int e^{i\chi} B_q dq \quad (5)$$

$$\varphi(\vec{x}, z, t) = \int e^{i\chi + |\vec{k}|z} A_q dq \quad (6)$$

$$P(\vec{x}, t) = \int e^{i\chi} C_q dq \quad (7)$$

тут  $\chi = \vec{k}\vec{x} - \omega t$  – фазова зміна,  $\vec{k} = (k_x, k_y)$  – горизонтальний хвильовий вектор,  $k = |\vec{k}|$  – модуль хвильового вектора (хвильове число),  $q = (\vec{k}, \omega)$  – узагальнена фазова змінна Фур'є розвинення, для диференціалу якого прийнято позначення  $dq = d\vec{k}\omega$ . Величини  $A_q \equiv A(q)$ ,  $B_q \equiv B(q)$  та  $C_q \equiv C(q)$  – стохастичні амплітуди відповідних полів.

В результаті розв'язання задачі (1) - (4) з урахуванням (5) - (7) отримуємо наступне динамічне рівняння

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\omega^2}{|\vec{k}|}\right) B_q + C_q &= \alpha \int f_2(\vec{q}, \vec{q}_1) B_q B_{q-q_1} d\vec{q}_1 + \\ &+ \alpha^2 \iint f_3(\vec{q}, \vec{q}_1, \vec{q}_2) B_{q_1} B_{q_2} B_{q-q_1-q_2} d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \end{aligned}$$

де у позначеннях, запропонованих у статті [1], підінтегральні функції мають вигляд

$$\begin{aligned} f_2(\vec{q}, \vec{q}_1) &= \frac{1}{2} [\omega(\omega - \omega_1) \langle \vec{k}, \vec{k} - \vec{k}_1 \rangle - \omega\omega_1 \langle \vec{k}, \vec{k}_1 \rangle - \\ &- \omega_1^2 - \omega^2 + \omega\omega_1 + \langle \vec{k}_1, \vec{k} - \vec{k}_1 \rangle \omega_1(\omega - \omega_1)] \\ f_3(\vec{q}, \vec{q}_1, \vec{q}_2) &= \frac{1}{4} \left( \omega_1^2 \vec{k}_1 + \omega_2^2 \vec{k}_2 \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{|\vec{k}_1|^2}{|\vec{k}|} \omega\omega_1 + \frac{|\vec{k}_2|^2}{|\vec{k}|} \omega\omega_2 \right) - \\ &- \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) |\vec{k}_1 + \vec{k}_2| \left\{ \langle \vec{k}_1, \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \rangle \omega_1 + \langle \vec{k}_2, \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \rangle \omega_2 \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \omega \frac{|\vec{k}_1 \vec{k}_2|}{|\vec{k}|} \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle (\omega_1 + \omega_2) + \\ &+ \frac{1}{2} |\vec{k}_1 + \vec{k}_2| \langle \vec{k}, \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \rangle \omega \left\{ \langle \vec{k}_1, \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \rangle \omega_1 + \langle \vec{k}_2, \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \rangle \omega_2 \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \left( \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle - 1 \right) \omega_1 \omega_2 (|\vec{k}_1| + |\vec{k}_2|) + \\ &\omega_1 \omega_2 \left\{ |\vec{k} - \vec{k}_1| \left( \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle - \langle \vec{k}_2, \vec{k} - \vec{k}_1 \rangle \right) + |\vec{k} - \vec{k}_2| \left( \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle - \langle \vec{k}_1, \vec{k} - \vec{k}_2 \rangle \right) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

У отриманому виразі (8) містяться два нових доданки

$$-\frac{1}{2} \left( \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle - 1 \right) \omega_1 \omega_2 (|\vec{k}_1| + |\vec{k}_2|)$$

$$\omega_1 \omega_2 \left\{ |\vec{k} - \vec{k}_1| \left( \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle - \langle \vec{k}_2, \vec{k} - \vec{k}_1 \rangle \right) + |\vec{k} - \vec{k}_2| \left( \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle - \langle \vec{k}_1, \vec{k} - \vec{k}_2 \rangle \right) \right\}$$

а також доданок  $-\frac{1}{4} \left( \frac{|\vec{k}_1|^2}{|\vec{k}|} \omega\omega_1 + \frac{|\vec{k}_2|^2}{|\vec{k}|} \omega\omega_2 \right)$ , який відрізняється від наведеного у статті [1].

Отже, у результаті аналізу проблеми про поширення випадкових поверхневих хвиль у півпросторі у слабко лінійній постановці у тривимірному випадку методом випадкових полів із розвиненням у ряди Фур'є-Стільєса було отримано динамічне рівняння відносно випадкових амплітуд відхилення поверхні з доданками, які уточнюють результати попередніх дослідників.

1. Masuda A., Kuo Y., Mitsuyasu H. On the dispersion relation of random gravity waves. Pt 1. // J. Fluid Mech.- 1979.- 92, N 4.- P. 717-730

Математичне та комп'ютерне моделювання

**ЛОГІСТИЧНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ  
МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ІНФЕКЦІЙНОГО ЗАХВОРЮВАННЯ  
З УРАХУВАННЯМ ДИФУЗІЙНИХ ЗБУРЕНЬ ТА  
ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ВПЛИВІВ**

Андрій Бомба, Сергій Барановський

abomba@ukr.net, svbaranovsky@gmail.com

Національний університет водного господарства та  
природокористування, м. Рівне

Математичні моделі, які широко використовуються для дослідження процесів імунного захисту організму та описують базові механізми реагування імунної системи на хвороботворні мікроорганізми, як правило, побудовані на основі загальних принципів відомої клонально-селекційної теорії Ф.Бернета [1]. Такі моделі представляються системою нелінійних диференціальних рівнянь, що можуть визначати динаміку значної кількості діючих факторів. Зокрема, у найпростішій моделі Марчука Г.І. розвиток процесу інфекційного захворювання визначається чотирма диференціальними рівняннями із запізненням, які описують динаміку концентрацій антigenів, плазматичних клітин, антитіл та міри ураження органу-мішені. В рамках цієї моделі стан здорового організму описано певним асимпто-тично стійким стаціонарним розв'язком, який зберігає таку стійкість при невеликих дозах зараження антigenом, що не перевищує відповідного рівня імунологічного бар'єру  $V^*$ . Використані у найпростішій моделі інфекційного захворювання базові підходи розвинені та розширені в моделях протибірусої та протибактеріальної імунної відповіді, в яких поряд з механізмом гуморальної імунної відповіді враховано ще й механізм імунного захисту клітинного типу [1].

Як і в найпростішій моделі інфекційного захворювання, так і в моделях протибірусої і протибактеріальної імунної відповіді, низці їх подальших модифікацій і узагальнень не враховується вплив на розвиток захворювання, зокрема, ефектів просторово-дифузійних перерозподілів. В роботах [2]–[3] представлено підхід для урахування малих дифузійних перерозподілів на динаміку інфекційного захворювання, а в [4]–[5] відповідну модель модифіковано для урахуванням дифузійних збурень в умовах фармако- та імунотерапії. У найпростішій моделі інфекційного захворювання зростання популяції антigenів визначається пропорційним наявній кількості їх розмноженням. Єдиним модельним механізмом, що стримує необмежене зростання популяції антigenів є їх нейтралізація антитілами. Природно вважати, що навіть за відсутності антитіл зростання популяції антigenів не може бути необмеженим, оскільки за будь-яких умов наявні в організмі ресурси для розмноження вірусних антigenів є обмеженими. Для забезпечення вимоги обмеженого зростання по-

пуляції антигенів замінено у базовій моделі інфекційного захворювання доданок, що описує пропорційне наявні кількості розмноження антигенів відповідно логістичною залежністю і опишемо просторово-часову динаміку процесу з урахуванням дифузійних збурень та імунотерапії в області  $G_Z = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, 0 < t < +\infty\}$  такою сингулярно-збуреною системою нелінійних диференціальних рівнянь (із запізненням):

$$\begin{aligned} V'_t &= \omega_V + \beta V \left(1 - \frac{V}{V^*}\right) - \gamma FV + \varepsilon D_V V''_{xx}, \\ C'_t &= \xi(m)\alpha F(t-\tau) \cdot V(t-\tau) - \mu(C - C^*) + \varepsilon^2 D_C C''_{xx}, \\ F'_t &= \omega_F + \rho C - (\mu_f + \eta\gamma V) \cdot F + \varepsilon D_F F''_{xx}, \\ m'_t &= \sigma \cdot V - \mu_m m + \varepsilon^2 D_m m''_{xx}, \end{aligned} \quad (1)$$

за умов

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= C^0(x), \quad m(x, 0) = m^0(x), \quad V(x, \tilde{t}) = V^0(x, \tilde{t}), \\ F(x, \tilde{t}) &= F^0(x, \tilde{t}), \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $V(x, t)$ ,  $C(x, t)$ ,  $F(x, t)$ ,  $m(x, t)$  – відповідно концентрації антигенів, плазматичних клітин, антитіл та значення відносної характеристики ураження органу мішенні в точці  $x$  в момент часу  $t$ ,  $\beta$  – темп розмноження антигенів;  $V^*$  – максимальне значення концентрації антигенів;  $\gamma$  – коефіцієнт, що враховують результат взаємодії антигенів з антитілами;  $\tau$  – запізнення в часі;  $\mu_C$  – величина, обернена тривалості життя плазматичних клітин;  $\alpha$  – коефіцієнт стимулування імунної системи;  $C^*$  – рівень концентрації плазматичних клітин у здоровому організмі;  $\rho$  – швидкість виробництва власних антитіл однією плазматичною клітиною;  $\mu_f$  – величина, обернена тривалості існування антитіл;  $\eta$  – витрати антитіл на нейтралізацію одного антигену;  $\sigma$  – темп ураження клітин органу-мішенні;  $\mu_m$  – швидкість відновлення органу-мішенні;  $\varepsilon D_V$ ,  $\varepsilon D_F$ ,  $\varepsilon^2 D_C$ ,  $\varepsilon^2 D_m$  – коефіцієнти просторово дифузійного перерозподілу відповідно антигенів, антитіл, плазматичних та уражених клітин,  $\varepsilon$  – малий параметр, який характеризує малий вплив відповідних компонент у порівнянні з іншими (домінуючими) складовими процесу;  $C^0(x)$ ,  $m^0(x)$ ,  $V^0(x, \tilde{t})$ ,  $F^0(x, \tilde{t})$  – обмежені достатньо гладкі функції. Функція

$$\xi(m) = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq m^*, \\ (1-m)/(1-m^*), & m^* < m < 1, \end{cases}$$

призначена для урахування ефекту зниження ефективності функціонування імунологічного органу при значному ураженні, де  $m^*$  – максимальне значення міри ураження органу-мішенні, при якому ще можливе нормальна робота імунної системи ( $\xi(m)=1$ ). При  $m^* \leq m < 1$  продуктивність виробництва антитіл імунологічним органом знижується ( $\xi(m) < 1$ ). Функції джерела  $\omega_V(x, t)$ ,  $\omega_F(x, t)$ , що описують, зокрема, зосередженні змі-

ни концентрацій антигенів та антитіл, представимо у вигляді точково-імпульсних функцій джерела [5].

Скориставшись методом кроків, розв'язок модельної задачі (1)-(2) із за-пізненням зведемо до послідовності розв'язків сингулярно збурених задач без запізнення, для знаходження яких застосуємо асимптотичний метод [2]-[5]. Причому перехід від «незбурених» задач до «збурених» здійснимо так, щоб базові форми закономірностей, які описують процес інфекційного захворювання, лишились початково прийнятними, і, не починаючи «спочатку», отримані базові «незбурені» розв'язки доповнювати різними поправками [6].

За результатами комп'ютерного моделювання продемонстровано, що ефект дифузійного «перерозподілу» протягом відносно невеликого проміжку часу призводить до зменшення максимальних надкритичних значень концентрації антигенів в епіцентрі зараження, а, отже, їх подальша нейтралізація в зоні зараження може бути забезпечена нижчим рівнем імунного захисту, або за необхідності застосування імунотерапії потребуватиме використання меншої кількості донорських антитіл. Таким чином, у рамках представленої моделі внаслідок ефекту дифузійного «перерозподілу» протікання інфекційного захворювання матиме менш «гострий» характер.

1. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. – М.: Наука, 1991. – 304 с.
2. Bomba A.Ya., Baranovsky S.V., Pasichnyk M.S., Pryshchepa O.V. Modeling small-scale spatial distributed influences on the development of infectious disease process. Mathematical modeling and computing. 2020. Vol. 7, No. 2. pp. 310–321.
3. Барановський С.В., Бомба А.Я. Узагальнення математичної моделі проти-вірусної імунної відповіді Марчука-Петрова з урахуванням впливу малих просторово розподілених дифузійних збурень. Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки – Вип. 21. – Кам’янець-Подільський: КПНУ. – 2020. – С. 5–24.
4. Bomba A., Baranovskii S., Pasichnyk M., Malash K. Modeling of infectious disease dynamics under the conditions of spatial perturbations and taking into account impulse effects. Proc. of the 3rd International Conference on Informatics and Data-Driven Medicine. CEUR Workshop Proceedings. Vol-2753.– 2020. – pp. 119–128.
5. Бомба А.Я., Барановський С.В. Моделювання малих просторово розподіле-них впливів на динаміку інфекційного захворювання в умовах типу фарма-котерапії. Журнал обчислювальної та прикладної математики. № 1 (133). 2020. – С. 5-17.
6. Бомба А.Я., Барановський С.В., Присяжнюк І.М. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія». Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с.

**Застосування методів Лагерра і фундаментальних розв'язків  
для наближеного розв'язування одновимірної оберненої  
нестаціонарної задачі**

*Ігор Борачок, Роман Чапко*

*ihor.borachok@lnu.edu.ua, roman.chapko@lnu.edu.ua*

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

*Розглянемо наближене розв'язування одновимірної нестаціонарної задачі Коші. За допомогою перетворення Лагерра вихідну задачу редуковано до послідовності стаціонарних задач Коші, які дискретизовано за допомогою методу фундаментальних розв'язків (МФР).*

**Постановка задачі та дискретизація по часовій змінній**

Розглянемо алгоритм для чисельного розв'язування одновимірної нестаціонарної задачі Коші:

$$\begin{cases} au''_{tt} + bu'_t - u''_{xx} = 0 & \text{в } (0, 1) \times (0, \infty), \\ u(1, \cdot) = \varphi_1, \quad u'(1, \cdot) = \tilde{\varphi}_1 & \text{на } (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = 0, \quad au'_t(\cdot, 0) = 0 & \text{на } (0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

де  $a, b \geq 0$ ,  $a + b > 0$  – задані постійні,  $\varphi_1, \tilde{\varphi}_1$  – відомі достатньо гладкі функції. Задача полягає у знаходженні значень невідомої функції  $u$  на  $(0, 1) \times (0, \infty)$  і реконструкції невідомих даних Коші на  $\{0\} \times (0, \infty)$ .

За допомогою формулования (1) розглядаємо клас параболічних і гіперболічних задач Коші, які широко досліджуються і мають практичне застосування. Відомо, що задача Коші (1) є некоректно поставленою, а некоректність проявляється у відсутності стійкості. Про характеристики поставленої задачі або існуючі чисельні методи див. у [2, 3].

Для часткової дискретизації по часовій змінній використаємо перетворення Лагерра. В результаті отримаємо послідовність задач Коші для неоднорідного рівняння Клейна-Гордона, для якої є відома послідовність фундаментальних розв'язків. Розв'язок послідовності еліптичних задач Коші знаходимо за МФР. В результаті одержуємо послідовність рекурентних некоректних систем алгебраїчних рівнянь з однаковою матрицею, але із змінною правою частиною. До останньої застосовуємо метод регуляризації Тіхонова. Даний підхід гарантує одержання стійкого розв'язку у випадку точних і збурених даних, що підтверджується чисельними експериментами, а також є швидким і простим в реалізації.

Перетворення Лагерра для функції  $u(x, t)$  має вигляд

$$u(x, t) = \kappa \sum_{p=0}^{\infty} u_p(x) L_p(\kappa t), \quad (2)$$

де  $u_p$  – коефіцієнти Фур'є-Лагерра,  $L_p$  – поліноми Лагерра порядку  $p$ , задані як у [1],  $\kappa > 0$  – вибраний масштабуючий множник.

Використовуючи властивості поліномів Лагерра не складає труднощів довести таке твердження.

**Теорема 1.** *Функція  $u$ , задана у (2), є розв'язком задачі Коши (1), якщо коефіцієнти Фур'є-Лагерра  $u_p$  є розв'язком послідовності задач Коши:*

$$\begin{cases} u''_p - \gamma^2 u_p = \sum_{m=0}^{p-1} \beta_{p-m} u_m & \text{на } (0, 1), \\ u_p(1) = \varphi_{1,p}, \quad u'_p(1) = \tilde{\varphi}_{1,p} & p = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (3)$$

де  $\beta_p = a\kappa^2(p+1) + b\kappa$ ,  $p = 0, 1, \dots$  і  $\gamma^2 = \beta_0$ ,  $\varphi_{1,p}, \tilde{\varphi}_{1,p}$  – обчислені коефіцієнти Фур'є-Лагерра для функцій  $\varphi_1, \tilde{\varphi}_1$  відповідно.

Більше інформації про (3), але для двовимірного випадку, див. у [3]. Наблизений розв'язок отримуємо із часткової суми в (2) для параметру  $N > 0$ .

### МФР для послідовності (3)

Для послідовності неоднорідних рівнянь Клейна-Гордона з (3) побудуємо послідовність фундаментальних розв'язків (див. [3]).

**Теорема 2.** *Послідовність функцій  $\{\Phi_p\}_{p=0}^N$ , яка для  $p = 0, 1, \dots$  має вигляд*

$$\Phi_p(x, y) = e^{-\gamma|x-y|} v_p(|x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y,$$

*де поліноми  $v_p$  задані:*

$$v_p(r) = \sum_{m=0}^p a_{p,m} r^m,$$

*а коефіцієнти  $a_{p,m}$  визначаються з таких рекурентних спiввiдношень:*

$$a_{p,p} = -\frac{1}{2\gamma p} \beta_1 a_{p-1,p-1},$$

$$a_{p,k} = \frac{1}{2\gamma k} \left\{ k(k+1)a_{p,k+1} - \sum_{m=k-1}^{p-1} \beta_{p-m} a_{m,k-1} \right\}, \quad k = p-1, \dots, 1$$

*називаються фундаментальною послідовністю для (3).*

Похідна від функцій  $\{\Phi_p\}_{p=0}^N$  для  $p = 0, 1, \dots$  має вигляд:

$$\Phi'_{p,x}(x, y) = \frac{x-y}{|x-y|} e^{-\gamma|x-y|} (-\gamma v_p(|x-y|) + \tilde{v}_p(|x-y|)), \quad x \neq y,$$

де

$$\tilde{v}_p(r) = \sum_{m=1}^p m a_{p,m} r^{m-1}.$$

Наблизений розв'язок задачі (3) подаємо у вигляді лінійних комбінацій звужень фундаментальної послідовності

$$u_p(x) \approx \tilde{u}_p(x) = \sum_{m=0}^p (\alpha_{1,m} \Phi_{p-m}(x, y_1) + \alpha_{2,m} \Phi_{p-m}(x, y_2)), \quad x \in (0, 1), \quad (4)$$

де  $\alpha_{\ell,m} \in \mathbb{R}$  – невідомі коефіцієнти,  $y_\ell \notin [0, 1]$  – виbrane точки джерела,  $\ell = 1, 2$ .

Невідомі коефіцієнти  $\alpha_{\ell,m}$  знаходимо з краївих умов в (3). Отримаємо послідовність рекурентних лінійних алгебраїчних рівнянь,  $p = 0, 1, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1,p} \Phi_0(1, y_1) + \alpha_{2,p} \Phi_0(1, y_2) = \varphi_{1,p} - \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{\ell=1}^2 \alpha_{\ell,m} \Phi_{p-m}(1, y_\ell), \\ \alpha_{1,p} \Phi'_{0,x}(1, y_1) + \alpha_{2,p} \Phi'_{0,x}(1, y_2) = \tilde{\varphi}_{1,p} - \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{\ell=1}^2 \alpha_{\ell,m} \Phi'_{p-m,x}(1, y_\ell). \end{array} \right. \quad (5)$$

Система (5) є некоректною, тому застосовуємо метод регуляризації Тіхонова, параметр регуляризації вибираємо за методом L-кривих.

Відповідно до (2) та (4) наблизений розв'язок задачі Коші (1) обчислимо за:

$$u(x, t) \approx \kappa \sum_{p=0}^N L_p(\kappa t) \sum_{m=0}^p \sum_{\ell=1}^2 \alpha_{\ell,m} \Phi_{p-m}(x, y_\ell), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty). \quad (6)$$

На основі (6) обчислюємо вигляд невідомих даних Коші на  $\{0\} \times (0, \infty)$ .

### Чисельні експерименти

Розглянемо застосування запропонованого методу для рівняння тепlopровідності. Тому у (1) вибираємо  $a = 0$ ,  $b = 1$ . Також вибираємо  $\kappa = 1$ , фінальний час  $T = 4$  і точки джерела для МФР:  $y_1 = -1$  і  $y_2 = 2$ . В ролі точного розв'язку задачі розглядаємо звуження фундаментального розв'язку для рівняння тепlopровідності:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-4)^2}{4t}}, \quad x \in [0, 1], \quad t \in (0, T].$$

У випадку збурених даних рівень шуму 5%. Параметри регуляризації виbrane рівними  $1.0e - 10$  і  $1.0e - 3$  для точних і збурених даних відповідно. Відносні  $L_2$  похибки в області  $(0, 1) \times (0, T)$ , для випадку  $N = 50$  дорівнюють відповідно  $1.0e - 3$  та  $2.3e - 2$  для точних і збурених даних. На рис. 1 та рис. 2 наведені графіки точних і реконструйованих даних Коші для різних параметрів дискретизації  $N$  для точних і збурених даних.

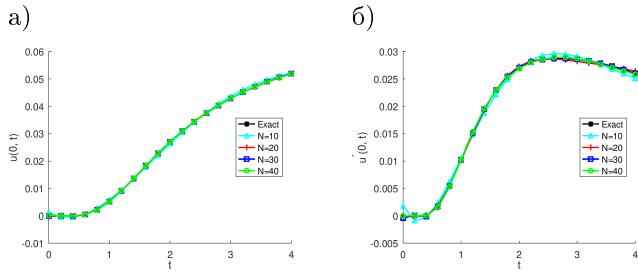


Рис. 1: Значення реконструйованих даних Коші: а)  $u$  і б)  $u'$  на  $(0, \cdot)$  для точних вхідних даних.

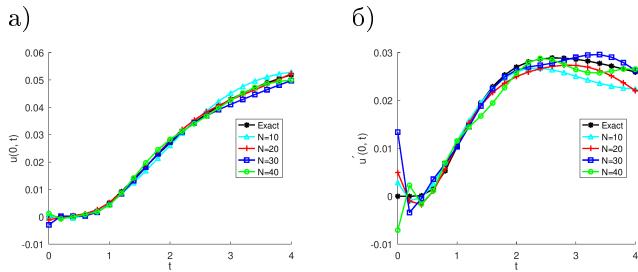


Рис. 2: Значення реконструйованих даних Коші: а)  $u$  і б)  $u'$  на  $(0, \cdot)$  для збурених вхідних даних.

Отже, за допомогою перетворення Лагерра вихідна задача редукована до послідовності задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь, які чисельно розв'язані за МФР. Зазвичай застосування МФР для випадку неоднорідних рівнянь вимагає застосування методу радіальних функцій для пошуку часткового розв'язку, а для запропонованого алгоритму це не потрібно. Алгоритм є швидким (середній час виконання до 1 сек) і простим в реалізації, а результати чисельних експериментів підтверджують застосовність даного підходу.

1. Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables // National Bureau of Standards Applied Mathematics Series. – 1972. – Washington D. C.
2. Alosaimi M., Lesnic D., Johansson B.T. Solution of the Cauchy problem for the wave equation using iterative regularization // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2021. – Vol. 29. – Pp. 2757–2771.
3. Borachok I., Chapko R., Johansson B.T. A method of fundamental solutions for heat and wave propagation from lateral Cauchy data // Numerical Algorithms. – 2022. – Vol. 89. – Pp. 431–449.

# Безперервно-дискретна модель GeoSEIR для моделювання та аналізу географічного поширення COVID-19

Ярослав Виклюк, Денис Невінський

vyklyuk@ukr.net, denys.v.nevinskyi@lpnu.ua

НУ «Львівська політехніка»

Кожного року людство стикається з різними видами вірусної інфекції або з різними штамами інфекцій, такими як, наприклад, COVID-19 [1].

У роботі запропонована безперервно-дискретна модель GeoSEIR на основі вдосконалення мультиагентної системи для моделювання геопросторового поширення вірусної інфекції, такої як COVID-19, на основі мобільних клітинних автоматів[2]. Зокрема, запропоновано метод генерації внутрішньої структури міста та пов'язування динамічних параметрів мультиагентної моделі SEIR(D) з реальним часом і такими показниками, як кількість активних пацієнтів, рівень смертності, ефективна репродуктивне число. Також було запропоновано спосіб нанесення системи на реальну графічну карту. Це дозволило змоделювати та оцінити як геопросторове поширення вірусної інфекції, так і основні статистичні показники пандемії на прикладі міста Львів, Україна. Модель показала достатній рівень адекватності та дозволила відобразити результати прогнозування поширення пандемії на географічній карті (рис.1).

Запропоновано алгоритм ініціалізації агентів та створення розкладу перебування та взаємодії агентів протягом доби. Запропоновано способи зараження збудниками в приміщеннях з постійним сусідством, таких як робочі місця та будинки, а також для місць з різними сусідами, таких як транспорт і громадські місця. Це дозволило максимально реалістично змоделювати робочий день пересічної людини.

Запропоновані правила визначення рівня контагіозності людини на основі нечіткої логіки. Це дозволило реалістично змоделювати процес зараження та перебіг захворювання інфікованого агента. Запропоновано модель визначення ймовірності зараження агента залежно від типу локації, на якій він знаходиться, та кількості оточуючих інфікованих агентів, часу перебування та інших факторів. Це дозволило перейти від моделювання мобільних клітинних автоматів до статистичного прогнозування зараження збудників, які разом перебувають у закритому приміщенні чи транспорті, що дало змогу значно прискорити розрахунок при збереженні адекватності та точності розрахунку.

Запропоновано методи врахування різноманітної поведінки та властивостей агентів, зокрема: врахування вакцинації, ізоляції, карантину вихідного дня, втрати імунітету. Це дозволило змоделювати та оцінити ефективність різних методів запобігання поширенню епідемії.

Все це в комплексі дозволило перейти від дискретних клітинних ав-

томатів моделі SEIR(D) до моделі з неперервно-дискретними станами. Тобто ми отримали систему з дискретними агентами, які переміщуються в дискретні області під час дискретних ітерацій, у визначені робочі дні. Однак стан здоров'я агентів визначається неперервними показниками, такими як рівень інфікування, час від зараження та рівень імунітету агента. Дискретні ж стани агента (SEIR(D)) визначаються на основі зазначених неперервних показників. Представлене подання моделі GeoSEIR у вигляді блок-схеми дозволяє безпосередньо зрозуміти її функціонування.

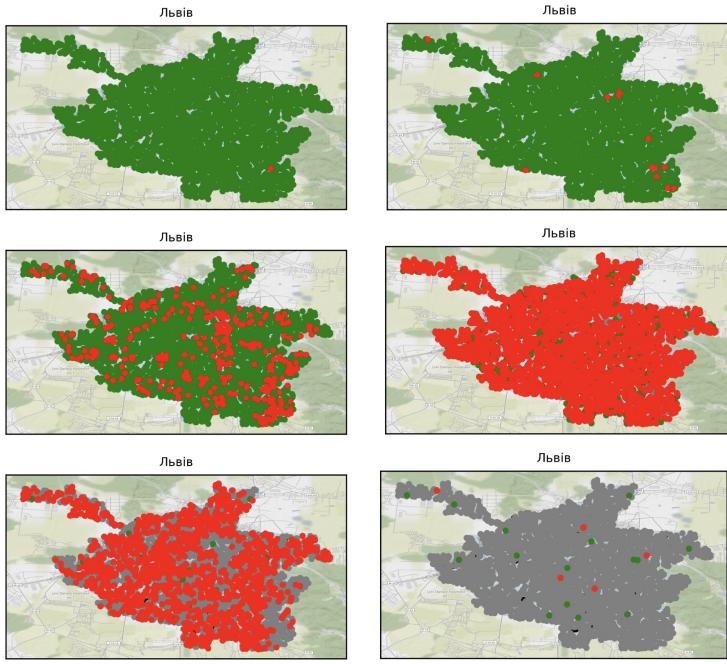


Рис. 1: Прогноз геопросторового поширення COVID-19 на прикладі міста Львів на основі **розробленої безперервно-дискретної моделі GeoSEIR**.

Запропонована модель була протестована для моделювання поширення вірусу COVID-19 у місті Львів, Україна. Перевіряли як динаміку статистичних показників, так і просторовий розподіл збудників інфекцій на реальній карті міста. Методика показала достатній рівень адекватності. Запропоновані методи врахування різної поведінки агентів дозволили провести експерименти з варіантами використання та порівняти ефективність різних заходів для запобігання поширенню епідемій. Зокрема, апробовано такі заходи, як: різна структура підприємств міста, масковий ре-

жим, вплив транспорту та відвідування громадських місць. Досліджувалась поява другої, третьої та інших хвиль епідемії внаслідок втрати імунітету або появи нового вірусу чи нового штампу існуючого вірусу (рис.2). Такі заходи, як вакцинація, карантин вихідного дня, суворий карантин були протестовані та проаналізовані. Наприкінці роботи була запропонована комплексна стратегія запобігання поширенню вірусної інфекції в місті.

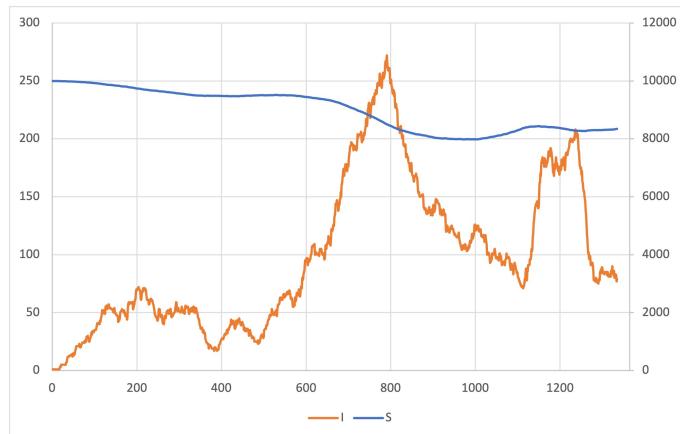


Рис. 2: Динаміка числа інфікованих і здорових агентів для у випадку маскового режиму, 10% використання громадського транспорту та 20% відвідування громадських місць.

Запропоновану модель можна легко розширити та адаптувати до нових параметрів агентів, таких як: вік, різні зони відвідування, різний час відвідування, різний імунітет та інші особисті фактори. Також ця модель може бути легко розширена для моделювання поширення епідемії в регіоні, країні та світі в цілому. Ця модель поєднує в собі швидкість статичних клітинних автоматів, гнучкість рухомих клітинних автоматів із можливістю візуалізації результатів на географічній карті, здатність спостерігати та моделювати динаміку та оцінювати різні заходи профілактики епідемії для різних штампів вірусів.

1. World health statistics 2022: monitoring health for the SDGs, sustainable development goals ISBN 978-92-4-005114-0 (electronic version), ISBN 978-92-4-005115-7 (print version).
2. Fujita, S., Kiguchi, R., Yoshida, Y. et al. Determination of optimal prevention strategy for COVID-19 based on multi-agent simulation. Jpn J Stat Data Sci 5, 339–361 (2022). <https://doi.org/10.1007/s42081-022-00163-1>.

# On the numerical approximation of the nonlinear inverse elastostatics problem

*Mariia Vlasiuk*

*mariia.vlasiuk@lnu.edu.ua*

*Ivan Franko National University of Lviv*

Elastostatics describes the processes of linear elasticity. We assume that  $D$  is a doubly connected bounded domain in  $\mathbb{R}^2$  with the boundary  $\partial D$  consisting of two disjoint closed  $C^2$  curves  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  such that  $\Gamma_1$  is contained in the interior of  $\Gamma_2$ . The ***direct elastostatics problem*** is: Given a vector function  $f$  on  $\Gamma_2$  consider the Dirichlet problem for a vector function  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  satisfying the Navier equation and the boundary conditions

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } D, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (2)$$

$$u = f \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (3)$$

where  $\mu$  and  $\lambda$  ( $\mu > 0, \lambda > -\mu$ ) are given Lamé coefficients.

The ***inverse problem*** is: Given the Dirichlet data  $f$  on  $\Gamma_2$  with  $f \neq 0$  and the Neumann data

$$Tu = g \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (4)$$

determine the shape of the interior boundary  $\Gamma_1$ . Here  $Tu = \lambda \operatorname{div} u \nu + 2\mu(\nu \cdot \operatorname{grad} u) + \mu \operatorname{div}(Qu)Q\nu$ , where  $\nu$  is an outward unit normal vector to the boundary, and  $Q$  is a rotational matrix.

To ensure the existence of the stress operator  $T$  on  $\Gamma_2$ , assume that boundaries and input data are smooth enough. Let  $\Gamma_2 \in C^2$ ,  $g \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$ ,  $f \in H^{1/2}(\Gamma_2)$ , and  $f \neq 0$ .

As opposed to the direct boundary value problem, the inverse problem is ***nonlinear*** and ***ill-posed***. The issue of uniqueness of the unknown curve  $\Gamma_1$  from the Cauchy data on  $\Gamma_2$  is settled by the following theorem.

**Теорема 1.** *Let  $\Gamma_1$  and  $\tilde{\Gamma}_1$  be two closed curves contained in the interior of  $\Gamma_2$  and denote by  $u$  and  $\tilde{u}$  the solutions to the Dirichlet problem (1)–(2) for the interior boundaries  $\Gamma_1$  and  $\tilde{\Gamma}_1$ , respectively. Assume that  $f \neq 0$  and  $Tu = T\tilde{u}$  on an open subset of  $\Gamma_2$ . Then  $\Gamma_1 = \tilde{\Gamma}_1$ .*

The proof of the theorem is similar to that for the Laplace equation which is provided in [7].

In order to reduce problem to the system of nonlinear integral equations, we define functional

$$\mathcal{G}(U) = \int_{\Gamma_2} (TUF - Ug) ds, \quad (5)$$

where  $f$  and  $g$  are given data from (3) and (4) respectively,  $U \in H^1(D)$  is a vector function that satisfies the Navier equation (1). As a consequence of Green's second theorem for the elastostatics equation (given in [1]), we obtain

$$\mathcal{G}(U) = \int_{\Gamma_1} U h ds. \quad (6)$$

Here  $h = Tu$  determines the stress on the inner boundary  $\Gamma_1$ . Using (5) and (6), we introduce their counterparts with a fundamental solution. Matrix  $\Phi(x, y)$  is a fundamental solution of the Navier equation (1) provided in [1].

Assume that the boundary curves  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  can be presented in the parametric form  $\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)), t \in [0, 2\pi]\}$  ( $i = 1, 2$ ). To simplify calculations, consider the case when the inner curve is so-called "star-like" curve and has a parametric representation  $x_1(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$ , where  $r : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  is the radial distance from the origin that to be calculated.

Using provided parameterization, integral operators and potentials can be written via mapping  $L_2[0, 2\pi] \rightarrow L_2[0, 2\pi]$  :

$$\begin{aligned} (S_i \varphi)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{i1}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \\ (\tilde{S}_2 \varphi)(t) &= (S_2 \varphi)(t) + [I - \Phi(x_2(t), 0)] \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau, \\ w_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{N_{i2}(t, \tau) f_2(\tau) - K_{i2}(t, \tau) g_2(\tau)\} d\tau + \frac{1-i}{2} \frac{f_2(t)}{|x'_2(t)|}, \quad i = 1, 2, \\ \tilde{w}_2(t) &= w_2(t) - [I - \Phi(x_2(t), 0)] \int_0^{2\pi} g_2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Here we have used the notations

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(x_1(t)) |x'_1(t)|, \quad f_2(\tau) = f(x_2(\tau)) |x'_2(\tau)|, \quad g_2(\tau) = g(x_2(\tau)) |x'_2(\tau)|, \\ K_{ij}(t, \tau) &= 2\pi \Phi(x_i(t), x_j(\tau)), \quad N_{ij}(t, \tau) = 2\pi [T_{x_j(\tau)} \Phi(x_i(t), x_j(\tau))]^\top. \end{aligned}$$

Formulas for the kernels  $N_{ij}$  are obtained by imposing the operator  $T$  to the matrix  $\Phi$  by the second argument. In addition, these results are shown in [1], [2], [4] and [5]. The kernels  $K_{ii}$ ,  $N_{ii}$  (for  $i = 1, 2$ ) contain singularities, so the corresponding integrals should be treated as improper. These singularities were allocated explicitly in form of special weight functions (see [4]). The given operators and potentials depend on the function  $r$ . We use the notation  $S_j(r, \varphi)$ ,  $\tilde{S}_2(r, \varphi)$ ,  $w_j(r)$  to emphasize this.

It can be shown that inverse boundary value problem (1), (3), (4) is equivalent to the system of nonlinear integral equations

$$\begin{cases} S_1(r, \varphi) = w_1(r), \\ \tilde{S}_2(r, \varphi) = \tilde{w}_2. \end{cases} \quad (7)$$

The proof is analogous to the provided in [7]. A similar approach of reducing the problem to a system of nonlinear equations is also highlighted in [3], [6].

System (7) can be linearized. It is essential to calculate the Fréchet derivatives of the nonlinear operators  $S_1(r, \varphi)$ ,  $\tilde{S}_2(r, \varphi)$  and the potential  $w_1(r)$  with respect to the radial function  $r$ . For the corresponding derivatives we use following notations  $w'_1(r; q)(t)$ ,  $S'_1(r, \varphi; q)(t)$ ,  $\tilde{S}'_2(r, \varphi; q)(t)$ . Linear representation of the system (7) has the form

$$\begin{cases} S_1(r, \varphi) + S_1(r, \psi) + S'_1(r, \varphi; q) = w_1(r) + w'_1(r; q), \\ \tilde{S}_2(r, \varphi) + \tilde{S}_2(r, \psi) + \tilde{S}'_2(r, \varphi; q) = \tilde{w}_2. \end{cases} \quad (8)$$

For solving (8), **iteration scheme** is applied:

- Choose an initial approximation  $r$ . Solve the correct problem  $S_1\varphi = w_1$  respectively  $\varphi$ .
- For given  $r$  and  $\varphi$ , solve the problem (8) with respect to  $q$  and  $\psi$ .
- Recalculate a new approximation of the radial function  $r := r + q$  and the unknown density  $\varphi := \varphi + \psi$ .
- Iterate the last two steps until a certain stopping criteria is met.

Note that the system (8) is linear, but still remains incorrect due to the incorrectness of the initial problem. To obtain a stable numerical solution, the Tikhonov regularization can be applied at each iteration.

Approximation of the correction  $q$  can be represented in a finite-dimensional space. We apply quadrature method to partially discretize system of integral equations. For full discretization, we collocate the obtained relations in nodes of quadrature formulas. As a result, we get an overdetermined system of linear equations. To handle this, least squares approach can be used. For the case of a discrete problem, the method of least squares gives us a regularized system of linear equations.

**Example.** To ensure that input data for the example are consistent, let's first calculate the value of the stress on the exterior boundary by solving the direct Dirichlet problem (1)-(3), where  $f$  is given as  $f(x) = (x_1 + x_2, 5x_1 - x_2)^\top$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_2$ . We choose  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$  as Lamé parameters.

Let the exterior boundary be a circle of radius 6 centered at the origin. The interior boundary has the following parametric representation  $\Gamma_1 = \{x_2(t) = (1.8 \cos t, 1.68 \sin t + 1.4 \cos^2 t) : t \in [0, 2\pi]\}$ . As an initial approximation, we choose a circle of radius 3, with the center at the origin. Figure 1 shows the results for the accurate input data and data with 3% of noise. The regularization parameters were chosen by comparing the discrepancy at each step of the iteration. However, another approach can be used: automatically

recalculate these parameters at each iteration, making a hard link to the iteration number (see [7]). Or, as shown in [6], use the same values at each iteration, having previously determined them at the first iteration.

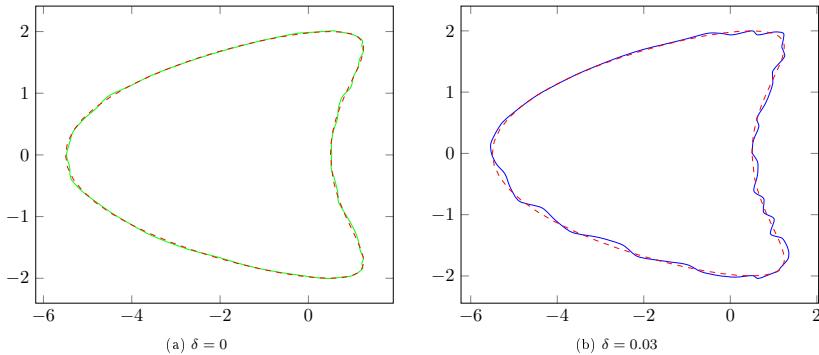


Figure 1: Reconstruction of the boundary (—) and its exact value (---) with accurate input data (a) and with a noise level of  $\delta = 0.03$  (b).

The presented results demonstrate the effectiveness of the method both for accurate and for noisy input data. The main advantage of the proposed approach is that it is enough to measure certain data on the outside, in order to accurately reproduce the internal state of the environment.

1. Kupradze V. D., Potential methods in the theory of elasticity. – Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations. – 1965. – 472 p.
2. Chapko R. On the numerical solution of a boundary value problem in the plane elasticity for a double-connected domain // Mathematics and Computers in Simulation. – 2004. – Vol. 66. – Pp. 425–438.
3. Chapko R., Ivanyshyn O., Kanafotskyy T. On the non-linear integral equation approaches for the boundary reconstruction in double-connected planar domains // Journal of Numerical & Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 122. – Pp. 7–20.
4. Chapko R., Johansson B. T., Shkolyk M. On a boundary integral equation method for elastostatic Cauchy problems in annular planar domains // Journal of Numerical & Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 126. – Pp. 16–32.
5. Chapko R., Sobeyko O. On the numerical solution of a Cauchy problem for an elastostatic equation // Visnyk Lviv Univ. – 2009. – Vol. 1. – Pp. 1–15.
6. Ivanyshyn O., Kress R. Nonlinear integral equations for solving inverse boundary value problems for inclusions and cracks // J. Integral Equations Appl. – 2006. – Vol. 18. – Pp. 13–38.
7. Kress R., Rundell W. Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem // Inverse Problems. – 2005. – Vol. 21. – Pp. 1207–1223.

# Про часонезворотність узагальнених кінематик Хассані

Ярослав Грушка

grushka@imath.kiev.ua

Інститут математики НАН України, Київ

В доповіді, базуючись на ідеях алжирського фізика М.Е. Хассані, будуть введені узагальнені просторово-часові перетворення Хассані в дійсному гільбертовому просторі. Оригінальні перетворення М.Е. Хассані [1] є частинним випадком перетворень, введених в даній доповіді. Можна довести, що в загальному випадку узагальнені перетворення Хассані не утворюють групу операторів [2]. Використовуючи узагальнені перетворення Хассані, а також теорію мінливих множин та універсальних кінематик, можна побудувати надсвітлові узагальнені кінематики Хассані. Використовуючи абстрактну теорему про неповернення для універсальних кінематик [3] можна довести, що часопозитивні узагальнені кінематики Хассані є безумовно часонезворотними (основний результат доповіді). З фізичної точки зору зазначений результат означає, що в будь-якій часопозитивній узагальненій кінематиці Хассані відсутня потенційна можливість змінити власне минуле шляхом “переходів” з однієї системи відліку до іншої.

1. Mohamed Hassani. Foundations of Superluminal Relativistic Mechanics // Communications in Physics. – 2015 – Vol. 24, Is. 4. – Pp. 313–332.
2. Ya. I. Grushka. On some properties of Hassani transforms // Matematychni Studii. – 2022. – Vol. 57, Is. 1. – Pp. 79–91.
3. Ya.I. Grushka. Theorem of Non-Returning and Time Irreversibility of Tachyon Kinematics // Progress in Physics. – 2017. – Vol. 13, Is. 4. – Pp. 218–228.

# **Кластеризація сторінок веб-ресурсу із застосуванням об'єктної моделі**

*Станіслав Диханов, Наталія Гук*

*dykhanovstas@gmail.com, natalygu29@gmail.com*

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

На сьогодні мережа Інтернет широко застосовується для розташування різноманітної інформації, за допомогою мережі розповсюджуються новини, здійснюється продаж та реклама товарів, надаються освітні послуги тощо.

Тому актуальною є розробка нових моделей та методів, які дозволяють швидко надавати релевантну до запитів користувача інформацію. Подібні задачі виникають під час розробки рекомендаційних систем, при аналізі структури веб-сайтів з метою покращення зручності пошуку необхідної інформації.

Кластеризація сторінок веб-сайтів є інструментом для перевірки його структури, оскільки отримане розбиття сторінок на кластери за деякими ознаками дозволяє зрозуміти, чи вірно розташовані сторінки, чи вірно налагоджені зв'язки між ними.

В роботі для здійснення процедури кластеризації пропонується застосування об'єктної моделі веб-ресурсу – DOM (Document Object Model). Зазначена модель будується з HTML-тегів за допомогою спеціальних запитів. DOM модель веб-ресурсу є деревом, його коренем `<html>` є заголовок HTML-документу (посилання на сайт). Ліве піддерево `<head>` зберігає мета-теги для браузерів та пошукових систем, називу документу, скрипти та стилі, а праве піддерево `<body>` зберігає контент веб-сторінки (текст, зображення, медіа-файли), тобто інформацію, яка відображається у вікні браузера.

Зазначена модель підтримує об'єктно-орієнтоване представлення веб-сторінки та дозволяє порівнювати структури веб-ресурсів між собою.

Для порівняння структур двох дерев застосується метод вирівнювання дерев з використанням поняття відстані редагування дерев (Tree Edit Distance) в якості метрики [1].

Відстань між деревами  $T_1$  та  $T_2$  дорівнює кількості операцій, які необхідно виконати, щоб перетворити дерево  $T_1$  на дерево  $T_2$ . Множина операцій, які можна виконувати над деревом, складається з операцій перейменування вузла (Remove), видалення вузла (Remote) та додавання вузла (Update).

Значення «вартості» пов'язане з послідовністю виконаних операцій по зміні дерева, необхідних для перетворення його із початкового стану до «вирівняного». Оскільки кількість редагувань дерева не обмежена, то здійснюється нормалізація «вартості» шляхом встановлення критерію

максимуму, а структурна схожість двох DOM дерев обчислюється у такий спосіб:

$$S_{struct} = 1 - \frac{TED(T1, T2)}{y_{max}(|T1| + |T2|)} \quad (1)$$

де  $y_{max}$  – максимальна кількість операцій Remote, Remove та Update.

Зазначену метрику використано для здійснення кластеризації сторінок веб-ресурсу. Для обчислення відстані між деревами застосовується алгоритм [1].

Для практичної реалізації запропонованого підходу було застосовано мову програмування Python, спеціальні бібліотеки та методи. Бібліотеки Lxml та urllib використовувалась для обробки HTML файлів, звернення до URL-адрес сайтів, парсингу веб-сторінок, бібліотека Pandas для реалізації методів очищення даних, модуль difflib застосовано для пошуку й обробки розбіжностей у послідовностях, бібліотеку sklearn для реалізації методів кластеризації.

Розв'язано задачі кластеризації веб-сторінок сайтів інтернет-магазину та закладу освіти за їх DOM моделями. Сайти мають деревовидну структуру, інтернет-магазин має головну сторінку, сторінки з категоріями товарів, картки товарів. В результаті кластеризації було отримано розбиття за типами сторінок: утворилися кластери з головної сторінки, сторінок категорій товарів, сторінок товарів. Подібність між елементами одного кластеру є надзвичайно високою та становить 95-97%. Це обумовлено тим, що веб-сторінки одного сайту мають майже ідентичну структуру, вони формуються динамічно, а контент яким вони наповнені, зберігається у базі даних та змінюється у різних HTML-тегах при переході на певне посилання з товаром або категорією товарів.

Сайт закладу освіти утворюється з головної сторінки, сторінок категорій, сторінок з інформацією про навчання на різних рівнях освіти, сторінок для абітурієнтів, новин. Розбиття, яке було отримано, відповідає зазначеної структурі сайту, але подібність між елементами одного кластеру виявилась нижчою, ніж у інтернет-магазину, та становила 68-72%. Аналіз сторінок в середині кожного з кластерів показав, що в їх DOM деревах присутні HTML-теги, які відрізняються для веб-сторінок в середині одного кластеру. Такими елементами є додаткові панелі, що з'являються лише на певних веб-сторінках, та додаткові опції, які присутні на деяких сторінках, але відсутні на інших.

Проведений аналіз може бути корисним під час реінжинірингу існуючих сайтів та налаштуванні посилань між сторінками в середині сайту.

1. Kaizhong Zhang, Dennis Shasha Simple Fast Algorithms for the Editing Distance Between Trees and Related Problems December. – SIAM Journal on Computing 18(6). – 1989. – Pp. 1245-1262. DOI:10.1137/021808

## A model of diffusion in the income distribution of the population

*Marian Dmytryshyn, Lesia Dmytryshyn*

*marijan.dmytryshyn@pnu.edu.ua, lesia.dmytryshyn@pnu.edu.ua*

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University*

Diffusion of income means the process of income distribution in a given socio-economic system, as well as from one system to another.

Our research is based on the application of diffusion models adapted to the object of research - the monetary income of the population and their connection with income inequality and social comparison criteria [1].

Modeling allows to determine the possible effects of the external environment on the state of the study object in order to develop a real and effective program of socio-economic development. The results of model calculations taking into account strategic guidelines are the basis for the formation of a system of objectives of integrated development programs.

Phases of the diffusion process can be considered as a process of learning of this socio-economic system, represented by the population groups [2]. The learning process includes innovative perception, evaluation and decision-making, i.e. a range of cognitive factors.

Consideration of aspects of the diffusion process in our study is based on the analysis of the impact of diffusion on forms of consumption, leisure and on lifestyle changes in general.

We consider the function of social comparison, which describes the relationship between reference groups by income level and the possibility of transition from one group to another (income mobility), as well as to characterize the relationship between inequality and income mobility with economic growth.

Let  $u(t)$  be a function of the level of cash income of the population. The model of diffusion of cash income of the population can be represented in the form of a differential equation:

$$\frac{du(t)}{dt} = G(m - u(t)) + \gamma(t, \alpha)u(t)(m - u(t)), \quad (1)$$

where  $G$  is the Gini coefficient,  $m$  is the potential level of cash income by broad group of citizenship and  $\gamma(t, \alpha)$  is an infinitely differentiable function, that depends on the parameter  $\alpha$ .

The essence of  $\gamma(t, \alpha)$  is that the income of the reference groups of the population of different regions is compared with the income of their closest "neighbors" in hierarchical income levels.

We use the analytical theory of continuous fractions to find a solution of the model of diffusion of cash income of the population [3]. More exactly, we find the solution of the differential equation (1) in the form of a formal

functional continuous fraction

$$b_0(z) + \cfrac{a_1(z)}{b_1(z) + \cfrac{a_2(z)}{b_2(z) + \cfrac{a_3(z)}{b_3(z) + \ddots}}},$$

where  $a_n(z)$  and  $b_n(z)$  are the functions of real variable  $z$ .

The values of the approach fractions of a continuous fraction, which describes the dynamics of changes in the level of cash income of the population, give an approximation of real values with almost predetermined, arbitrarily high accuracy. It allows us to qualitatively describe the general dynamics of the process of diffusion of cash income.

1. Dmytryshyn L.I. Conceptual approach to modelling of spatial-structural differentiation of population's money incomes // Actual Problems of Economics. – 2013. – Is. 6(144). – Pp. 114–122.
2. Rogers, Everett M. Diffusion of Innovations. Third Edition. – N.Y.: Free Press. – 1983. – 453 p.
3. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fraction with Applications. – N.Y.: North-Holland. – 1992. – 606 p.

**Premium Calculator — пілотне програмне забезпечення для  
аналізу вартості індивідуальних страхових контрактів**

*Дрозденко В.О.<sup>1</sup> та Працьовитий М.В.<sup>2</sup>*

*drozdenko0408@gmail.com prats4444@gmail.com*

*<sup>1</sup> Білоцерківський національний аграрний університет*

*<sup>2</sup> Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова*

У доповіді представляється розроблене в середовищі MatLab GUI пілотне програмне забезпечення для аналізу вартості індивідуальних страхових контрактів у випадку відомих розподілів розміру страхових збитків.

Нехай величина  $X$  відображає розмір страхової компенсації пов'язаної з певною страховою угодою, тобто  $X$  прийматиме значення 0 у разі ненастання страхової події, та буде рівною розміру страхової компенсації у разі появи страхового випадку. Ту суму, яку при укладанні угоди клієнт платить обраній страховій компанії, називатимемо ціною контракту або ж премією.

Невід'ємну випадкову величину  $X$  часто зручно представляти у вигляді  $p$ -суміші випадкових величин  $X^0$  та  $X^+$ , тобто надалі вважатимемо що  $X = (1 - p)X^0 + pX^+$ , де  $p$  — річна ймовірність настання страхової події (однієї або декількох),  $X^0$  — вироджена й сконцентрована в нулі випадкова величина,  $X^+$  — величина, що відображає сумарний розмір річних збитків при умові появи страхової події (знову ж таки, однієї або декількох).

На даному етапі в програму включено наступні випадки розподілів величини  $X^+$ : вироджений розподіл (фіксована стала виплата у разі настання страхової події), експоненційний та гіперекспоненційний розподіл (з двома ступенями свободи), рівномірний розподіл на (відокремленому від нуля) відрізку та зсунутий нормований пуссонівський розподіл.

В якості індивідуальних принципів / методів підрахунку вартості страхових контрактів, на даному етапі до програми включено: нето принцип, принцип математичного сподівання, дисперсний принцип, принцип середньоквадратичного відхилення, експоненційний принцип, принцип середнього значення, квантільний принцип, принцип максимальних збитків, метод Ешпера, принцип відрегульований ризиком, а також принципи еквівалентної / нульової корисності страховика та клієнта.

В подальшому до програми планується додати швейцарський принцип індивідуального страхового оцінювання та істотно збільшити перелік оцінюваних розподілів величини  $X^+$  (очікуваного розміру страхових виплат за умови настання страхового випадку).

Програма є інтуїтивно зрозумілою та досить простою у використанні. Для отримання вартості індивідуального страхового контракту, в програмі

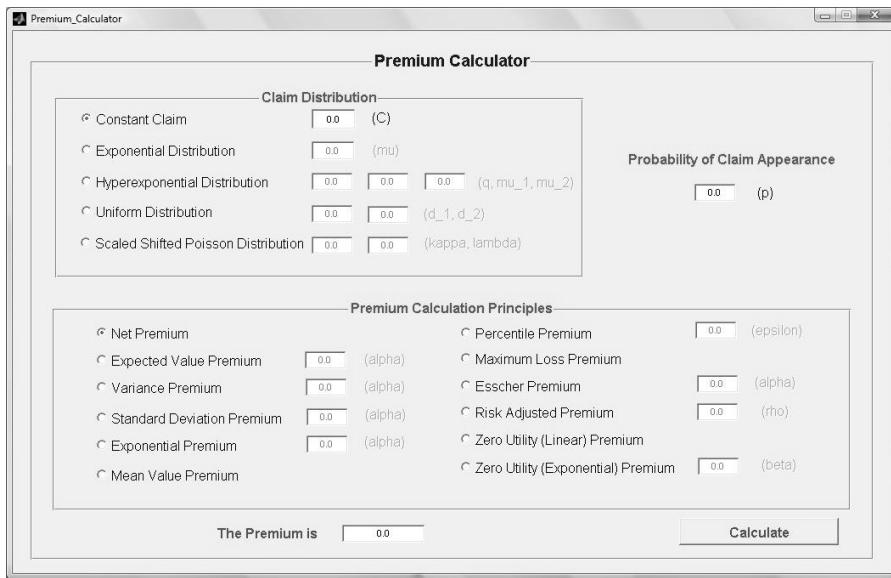


Рис. 1: Інтерфейс програми Premium Calculator.

достатньо обрати розподіл величини  $X^+$  (вказавши при цьому значення параметрів розподілу), вказати ймовірність настання страхової події  $p$ , обрати один з реалізованих в програмі методів обчислень (в разі потреби, вказавши значення параметрів) та натиснути клавішу Calculate. Поточна версія графічного інтерфейсу користувача програми Premium Calculator представлена на рисунку 1.

З математичним описом застосованих в програмі індивідуальних методів страхового оцінювання, а також переліком та описом бажаних властивостей, якими окрім обраний метод може володіти або не володіти, можна ознайомитись, скажімо в навчально–методичному посібнику [1]. Там же здійснено більш детальний опис даної програми та представлено варіаційні таблиці значень отриманих результатів, з використанням даної програми, для реалізованих в програмі методів підрахунку для декількох розподілів розміру збитків.

Імплементовані в програмі індивідуальні принципи страхового оцінювання також досліджувались авторами аналітично. Результати відповідних досліджень були опубліковані зокрема в роботах [2]–[5].

1. Дрозденко В.О., Працьовитий М.В. Методи підрахунку вартості страхових контрактів при відомих розподілах збитків (навчально-методичний поси-

- бник з актуарної математики). – Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2017. – vi+144 с.
2. Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O. Characterization theorems for mean value insurance premium calculation principle // Tbilisi Mathematical Journal. – 2013. – Is. 6. – Pp. 57–71.
  3. Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O. Characterization theorems for scale invariance property of insurance premium calculation principle // European Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 7, Is. 3. – Pp. 267–288.
  4. Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O. Characterization theorems for customer equivalent utility insurance premium calculation principle // European Actuarial Journal. – 2014. – Vol. 4, Is. 2. – Pp. 437–451.
  5. Pratsiovytyi M.V., Drozdenko V.O. Limit behavior of the Esscher premium // Random Operators and Stochastic Equations. – 2016. – Vol. 24, Is. 2. – Pp. 143–146.

# The advantages of using MISO and MIMO models in fuzzy expert systems

*Danylo Yehoshkin, Natalia Huk*

*KnightDanila@i.ua, natalygu29@gmail.com  
Oles Honchar Dnipro National University*

Nowadays, large data sets have been accumulated in various branches of human activity. Analyzing and making decisions based on this data requires experts who can make the right conclusions. To automate the decision-making process, it is customary to use artificial intelligence systems. The following types of AI are used to solve problems of intelligent systems: expert systems, fuzzy logic, neural networks, genetic algorithms, and others. An expert system based on fuzzy rules uses fuzzy linguistic variables to express the level of quality assessment and expert criteria. Such fuzzy rules and fuzzy sets are well suited for processing incomplete and formalized data, and their application in knowledge search processes is really useful in terms of human interpretability.

The article [1] presents the design and verification of two expert systems for level control in vertical two-tank systems. The structure of a proportional integral fuzzy controller with multiple inputs and multiple outputs is considered. The Mamdani inference mechanism and experimental approximation based on the least squares method for non-linear data were used. The paper [2] considers the solution of problems with a large number of input data and a large number of output data. Also, the input data is highly coherent and not separable without specific information. In such a case, two different modeling strategies can be used, with the option of creating either a single MIMO model or a set of MISO models.

Afterwards, the input data can be multivariate data set with different dimensions depending on the task, and the expected output of the expert may have a dimension higher than one. Therefore, the fuzzy expert system can take a data set as multivariate input. Afterwards the return output of the system should consist of one consequent or multivariate consequent (output dimension). Such systems are called MISO and MIMO. The term MISO itself means “Multiple-Input and Single-Output”, and the term MIMO means “Multiple-Input and Multiple-Output” [3][4].

The decomposition of the MIMO system into MISO systems is used to speed up the verification process for MIMO rule systems on completeness and correctness. Also, decomposition allows us to consider the investigated, complex rules system with multiple outputs, as a system consisting of separate, interconnected, simple subsystems. In the general theory of expert systems, it has been proven that most systems can be decomposed using three basic representations of subsystems [5]. Basic representations of subsystems are: cascade, parallel connection of elements, as well as connection by feedback with

th closure. Systems created by combining multiple representations are called hierarchical fuzzy systems. They also allow the rule to be decomposed into sub-levels for sequential application.

The main task of this article is to automatically generate a full knowledge base consisting of production rules. And reduce rules by different levels of quality. According to the fuzzy approximation theorem [6], any arbitrarily complex mathematical dependence can be approximated by a system based on fuzzy logic. The automatically generated knowledge base consists of terms combination. And presented as an Antecedent matrix. Meanwhile, the rule Consequences are presented as a vector. The consequence vector was built by training data set. Evaluating the quality of the model, it is necessary to compare the conclusions obtained using the model with training data or with the results of a real process (object) using the following metrics: accuracy, precision, recall, f1-score [7]. Afterward, the algorithm uses rules with a lower quality. If a satisfactory output is not received, the system switches to rules with higher quality, this allows to speed up the decision-making process, in addition, the rules calculated at the previous stage do not need to be recalculated. The development of hierarchical expert systems for problems is an important task and allows you to automate the decision-making process in problems with multivariate data and processes.

1. Claudia-Adina Bojan-Dragos, Elena-Lorena Hedrea, Radu-Emil Precup, Alexandra-Iulia Szedlak-Stinean and Raul-Cristian Roman «MIMO Fuzzy Control Solutions for the Level Control of Vertical Two Tank Systems» // Department of Automation and Applied Informatics, Politehnica University Timisoara, Bd. V. Parvan 2, Timisoara, Romania. – 2019. – Pp. 810-817.
2. G. Castellano, C. Castiello, A.M. Fanelli, C. Mencar “Knowledge discovery by a neuro-fuzzy modeling framework” / Computer Science Department, University of Bari, Via Orabona, 4, Bari 70126, Italy. – 2005. – Pp. 187-207.
3. S. Askari “A novel and fast MIMO fuzzy inference system based on a class of fuzzy clustering algorithms with interpretability and complexity analysis” / Expert Systems with Applications: An International Journal. Volume 84. Issue C. October – 2017. – Pp 301-322. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.04.045>
4. Amosov O.S., Amosova L.N. Optimal estimation by using fuzzy systems // Proc. of the 17-th World Congress IFAC. – Seoul, Korea. – 2008. – Pp.6094-6099.
5. D. Mesarovic and Yasuhiko Takahara. “General systems theory: mathematical foundations” / Mathematics in science and engineering Volume 113, academic press New York, San Francisco, London. – Pp 316.
6. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators. IEEE Trans. on Computers. – 1994. 43, N 11. – Pp 1329-1333. DOI: 10.1109/12.324566.
7. Eli Stevens, Deep Learning with PyTorch / Eli Stevens, Luca Antiga, Thomas Viehmann / Manning Publications Co. Shelter Island, NY, – 2020. – Pp. 520.

# **Equilibrium states of the dynamical conflict system for three players with an parameter of external environment influence**

*Karataieva T.*

*karat@imath.kiev.ua*

*Institute of Mathematics of NASU, Ukraine, 01601, Kyiv, 3,  
Tereschenkivska st.*

*Koshmanenko V.*

*koshman63@gmail.com*

*Institute of Mathematics of NASU, Ukraine, 01601, Kyiv, 3,  
Tereschenkivska st.*

We study the mathematical model of an abstract society in the form of a complex dynamical system with a conflict interaction between its elements. New existence conditions for equilibrium (compromise) states (fixed points) in the presence of a permanent environment influence were found. The main results concern systems with three elements (players). In this case, a description of all equilibrium states is given and their stability is investigated with depending on the parameter of external influence. Besides basins of attraction for point attractors are partially described. All results are illustrated by the computer examples.

1. V.D. Koshmanenko, *Spectral theory of dynamic conflict systems*, Naukova Dumka, Kyiv (2016)(in ukrainian).
2. T. Karataieva, V. Koshmanenko, M.J. Krawczyk, K. Kulakowski, *Mean field model of a game for power*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **525**, 535-547 (2019); <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.110>

# Моделювання канторвалів за допомогою узагальнених поспідовностей Фібоначчі

Дмитро Карвацький

karvatsky@imath.kiev.ua

Інститут математики НАН України

Нагадаємо, що коли  $M \in 2^N$ , або іншими словами  $M \subseteq N$ , то число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \quad (1)$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{при } n \in M, \\ 0, & \text{при } n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою) ряду*. Множина усіх чисел ви-ду (1) позначається як  $E\{u_n\}$  та називається множиною неповних сум відповідного ряду  $\sum u_n$ .

У 1988 році американські математики Дж. Гатрі та Дж. Німан довели [4], що множина неповних сум ряду

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{4^n} + \cdots \quad (2)$$

містить відрізок  $[3/4, 1]$ , проте не є скінченним об'єднанням відрізка. Така множина поєднувала у собі властивості ніде не щільної множини та нескінченного об'єднання відрізків, була їх сумішшю. Такі множини стали називатися **канторвалами**, вони також зустрічаються при вивченні арифметичних сум двох множин канторівського типу.

Згідно до [6], канторвалом називається досконала підмножина числової прямої  $R$  така, що кожний суміжний інтервал цієї множини накопичує по обидві сторони нескінченну кількість своїх нетривіальних компонентів зв'язності та суміжних інтервалів.

Також канторвал можна означити як

$$X \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n},$$

де  $C$  – класична множина Кантора,  $G_k$  – об'єднання усіх центральних третин, які вилучаються із відрізка  $[0, 1]$  на  $k$ -ому кроці побудови множини Кантора. Більше того, усі канторвали є гомеоморфними між собою.

У роботах [4] та [5] встановлено, що множина неповних сум довільного збіжного додатного ряду є однією з трьох типів:

- скінченним об'єднанням відрізків;
- гомеоморфною до множини Кантора;
- М-канторвалом (симетричним канторвалом).

На сьогоднішній день необхідні і достатні умови того, що множина неповних сум збіжного додатного ряду є канторвалом або є гомеоморфною до множини Кантора (з додатною мірою Лебега або нульової міри Лебега та дробової розмірності Гаусдорфа-Безиковича) залишаються невідомими. Тому науковці розв'язують цю задачу для певних класів рядів (бігеометричних, мультигеометричних [2], члени яких утворюють лінійні рекурентні послідовності, тощо).

Оскільки канторвал містить цілі відрізки, то природнім чином виникають питання про міру Лебега такої множини. Структура канторвалу  $X$ , що є множиною неповних сум ряду (2), визначається співвідношеннями між  $X$ -інтервалами та  $X$ -дірами (детальніше у [3]). Для такого канторвалу добре вивчені топологічні та метричні властивості. Зокрема, встановлено, що частини множини є афінними копіями самої множини  $X$  з коефіцієнтом подібності  $1/4^n$ . На основі цього була обчислена міра Лебега такого канторвала ( $L(X) = 1$ ). окрім канторвалу  $X$ , який має відносно просту топологічну структуру, зарубіжними та вітчизняними математиками активно ведуться дослідження більш складних канторвалів [1], [2].

Підсумовуючи останнє, інтерес до вивчення канторвалів зараз досить високий. Зокрема, для канторвалу  $X$ , що породжений рядом Гатрі-Німана розв'язаний ряд топологічних, метричних та ймовірнісних задач. У цьому контексті будь-які модифікації ряду (2) потенційно можна використати для моделювання канторвалів та подальшого їх дослідження.

Класична послідовність Фібоначчі та деякі її узагальнення широко використовуються у різних розділах математики, зокрема, для представлення дійсних чисел, моделювання та дослідження фрактальних множин, сингулярних функцій та розподілів випадкових величин [7].

Послідовність дійсних чисел  $(u_n) \equiv (u_n)_{n=1}^{\infty}$ , яка має властивість

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n,$$

де  $u_1, u_2, p, s$  — фіксовані дійсні числа, називатимемо *узагальненою послідовністю Фібоначчі*.

Для загального члена узагальненої послідовності Фібоначчі має місце рівність (формула типу Біне)

$$u_n = \begin{cases} \frac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi} & \text{при } \Phi \neq \Psi, \\ \Phi^{n-1} \left( u_1 + (n-1) \left( \frac{u_2}{\Phi} - u_1 \right) \right) & \text{при } \Phi = \Psi, \end{cases}$$

де

$$\Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2} \text{ та } \Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2}.$$

У доповіді будуть вивчатися метричні та топологічні властивості канторвалу, що є множиною неповних сум ряду

$$\left(\frac{3}{4} \pm \frac{3}{q}\right) + \left(\frac{2}{4} \pm \frac{2}{q}\right) + \left(\frac{3}{4^2} \pm \frac{3}{q^2}\right) + \cdots + \left(\frac{3}{4^n} \pm \frac{3}{q^n}\right) + \left(\frac{2}{4^n} \pm \frac{2}{q^n}\right) + \dots,$$

для деяких значень параметру  $q \in N$ . Такий ряд є певним збуренням ряду Гатрі-Німана (2), його члени утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі.

Встановлено, що міра Лебега канторвалу  $X_i^+$ , що є множиною неповних сум збіжного додатного ряду

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4^i}\right) + \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{4^i}\right) + \left(\frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^{2i}}\right) + \cdots + \left(\frac{3}{4^n} + \frac{3}{4^{ni}}\right) + \left(\frac{2}{4^n} + \frac{2}{4^{ni}}\right) + \dots,$$

де  $i \in N$ ,  $i \geq 2$  обчислюється за формулою

$$L(X_i^+) = 1 + \frac{1}{4^i - 3}.$$

Крім того, отримані верхні та нижні оцінки міри Лебега для інших канторалів, що породжуються різними модифікаціями ряду Гатрі-Німана.

1. Banakiewicz M. The Lebesgue measure of some M-Cantorval // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2019. – Vol. 471. – P. 170-179.
2. Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E. Multigeometric sequences and Cantorvals // Central European Journal of Mathematics. – 2014. – Vol. 12, № 7. – P. 1000-1007.
3. Bielas W., Plewik S., Walczyńska M. On the center of distances // European Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 4. P. 687-698.
4. Guthrie J., Nyman J. The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. – 1988. – Vol. 55, № 2. – P. 323-327.
5. Nyman J., Saenz R. On a paper of Guthrie and Nyman on subsums of infinite series // Colloq. Math. – 2000. – Vol. 83, № 1. – P. 1-4.
6. Mendes P., Oliveira F. On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets // Nonlinearity. – 1994. – Vol. 7, № 2, – P. 329-343.
7. Pratsiovytyi M., Makarchuk O., Karvatsky D. Lebesgue structure of asymmetric Bernoulli convolution based on Jacobsthal-Lucas sequence // Random Operators and Stochastic Equations. – 2020. – Vol. 28, № 2. – P. 123-130. <https://doi.org/10.1515/rose-2020-2033>

# Імітація поширення COVID-19 методом клітинних автоматів

Ігор Косович

[kosovych.ihor@chnu.edu.ua](mailto:kosovych.ihor@chnu.edu.ua)

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича

З кінця 2019 року, зі спалахом нового вірусу COVID-19, світ повністю змінився в багатьох аспектах: пандемія вплинула на економіку, освіту та науку, систему охорони здоров'я та глобальне суспільство. Швидка глобалізація, часті подорожі та контакти між людьми в різних державах призводять до того, що інфекційні захворювання можуть поширюватися з неймовірною швидкістю.

Оскільки процес поширення інфекційних хвороб не може бути досліджений експериментально в нашому суспільстві, тому математичні інструменти, безумовно, забезпечують реальну альтернативу дослідження механізму їх поширення для ефективного контролю шляхом теоретичного моделювання та контролю.

Більшість існуючих математичних моделей для моделювання епідемій базуються на використанні апарату диференціальних рівняннях [1]. Ці моделі не враховують індивідуальної поведінки індивідів та їх змінну сприятливість.

У роботі завдяки аналізу епідемічних процесів вдосконалено мультиагентну модель динаміки розповсюдження епідемічних процесів. Модель базується на концепції епідемічного процесу: наявність джерела інфекції, механізму передачі і сприйнятливого організму для захворювання. Використовується узагальнена математична SIR модель і моделювання клітинних автоматів для вивчення динаміки інфекційних захворювань в контексті поширення COVID-19 [2, 3]. Це дозволило максимально наблизити поведінку об'єктів моделі до реальної поведінки агентів в регіоні та більш реалістично моделювати перебіг епідемічних процесів. Завдяки застосуванню даного підходу можна здійснювати різні сценарії моделювання [4].

Результати моделювання динаміки кількості інфікованих агентів при різних сценаріях представлені на рис. 1.

Сценарій (Моделювання 1), де розглянуто тільки масковий режим має найбільший пік захворюваності серед усіх представлених сценаріїв моделювань. При такому сценарію кількість інфікованих агентів різко зростає, критично навантажуючи медичну систему. Це означає, що наявна епідемія з переповненістю. Після одужання частини агентів і набуття ними імунітету відбувається спад кількості інфікованих агентів. У даному випадку результати несприятливі для регіону, запровадження тільки маскового режиму є недостатньою мірою.

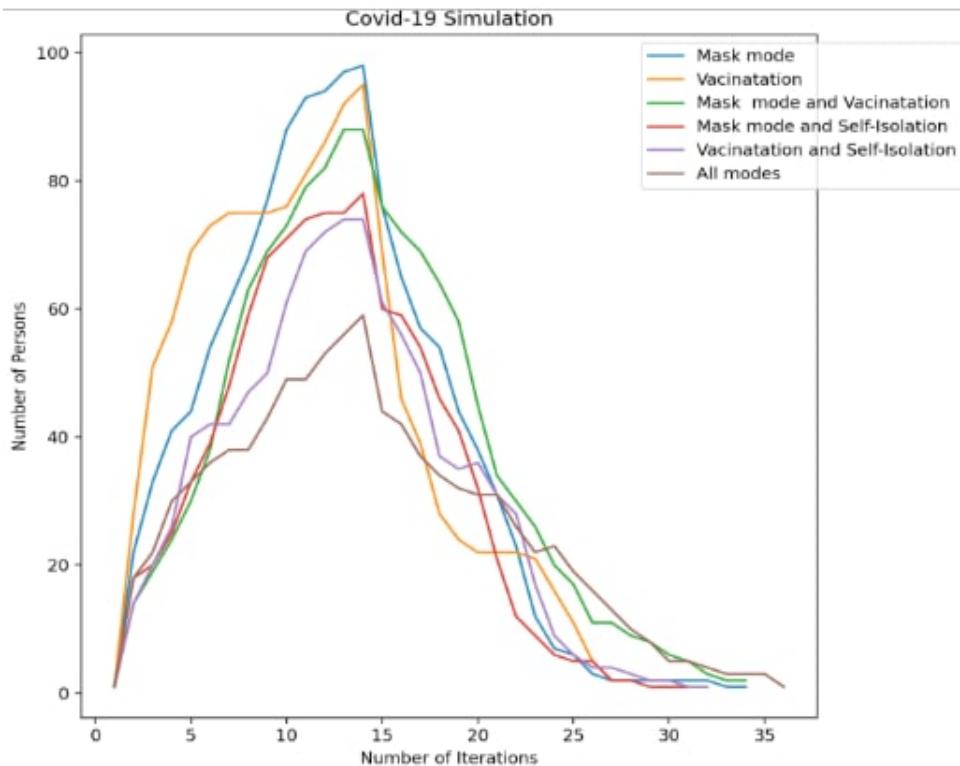


Рис. 1: Динаміка кількості інфікованих агентів при різних сценаріях

При врахуванні тільки режиму вакцинації (Моделювання 2), кількість інфікованих агентів має також один з найбільших піків. Спостерігаємо, що кількість інфікованих агентів різко зростає і є потенційне навантаження на медичну систему.

Потім відбувається спад кількості інфікованих агентів внаслідок одужання частини агентів та набуття ними імунітету в результаті вакцинації. Даний сценарій моделювання є несприятливим для регіону і його потенційні наслідки можуть бути непередбачуваними. Режим вакцинації без запровадження інших обмежень є неефективним.

У наступному випадку (Моделювання 3) розглядається сценарій в якому враховується комбінація маскового режиму і вакцинації. Пік кількості інфікованих агентів при цьому також є одним із найбільших. Однак, спостерігається швидкий спад кількості інфікованих агентів внаслідок одужання частини агентів і набуття ними імунітету в результаті вакци-

нації, що призведе до поступового розвантаження медичної системи.

Розглянемо сценарій врахування самоізоляції у випадку хвороби і масковий режим (Моделювання 4). У цьому випадку одержуємо, що не має великого піку кількості інфікованих агентів, розвиток хвороби проходить плавніше. Даною комбінацією обмежень дозволила зменшити навантаження на медичну систему і уникнути переповнення. Запровадження режиму самоізоляції забезпечує швидкий спад кількості інфікованих агентів.

У випадку (Моделювання 5) розглядаються режими самоізоляції у випадку хвороби та вакцинація. З графіку можна зробити висновок, що не має стрімкого піку кількості інфікованих агентів, як в перших трьох сценаріях моделюваннях і розвиток хвороби проходить плавніше на початку її поширення. Даною комбінацією обмежень дозволила зменшити навантаження на медичну систему і уникнути переповнення та є більш сприятливою для регіону.

Найкращу ситуацію ми можемо спостерігати в основному сценарію (Моделювання 6). Тут нема такого стрімкого піку кількості інфікованих агентів і розвиток хвороби проходить плавніше. Пік епідемії дещо зміщується в часі в порівнянні з найгіршими сценаріями. В основному сценарії моделювання кількість ітерацій, які потрібні для завершення симуляції прикладної програми є більшою, ніж в інших режимах моделювання. Це означає, що епідемічний процес розтягається в часі. Отже є можливість підготуватися та розвантажити медичну систему і не мати критичності з переповненістю. Результати даного моделювання дозволяють зробити висновок, що запровадження вакцинації, самоізоляції та маскового режиму в комплексі є одним із ключових засобів стримування пандемії.

1. P. Riyapan, S. E. Shuaib, A. Intarasit, "A mathematical model of COVID-19 pandemic: A case study of Bangkok, Thailand Computational and Mathematical Methods in Medicine, no. 1, pp. 1-11, 2021.
2. P. K. Jithesh, "A model based on cellular automata for investigating the impact of lockdown, migration and vaccination on COVID-19 dynamics Comput. Methods Programs Biomed, vol. 211, no. 1, pp. 1-10, 2021.
3. Y. Vyklyuk, M. Manylich, M. Škoda, M. M. Radovanović, and M. D. Petrović, "Modeling and analysis of different scenarios for the spread of COVID-19 by using the modified multi-agent systems – evidence from the selected countries", Results Phys. vol.20, pp. 1-12, 2021.
4. Косович І. Т. Моделювання різних сценаріїв поширення COVID-19 методом клітинних автоматів. // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022» (Львів, 25 – 27 травня 2022 р.). Матеріали конференції. – Львів, 2022. <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Kosovych.pdf>

# Diffusion model in Image Transforms Inversion tasks

Oleg Kravchuk, Galyna Kriukova

kriukovagv@ukma.edu.ua

National University of Kyiv-Mohyla Academy

Solving modern machine learning tasks requires development of new methods of solving corresponding inverse problems. Majority of real-world inverse problems are ill-posed and therefore require regularization. For some digital signal processing tasks, such as image de-noising, image restoration, super-resolution, image improvement, the choice of regularization technique is non-trivial, whereas significantly influences the corresponding solution.

In our work we study diffusion model for inversion of image transforms. For inverse problem

$$Ax = y \quad (1)$$

we consider Bayesian approach, or maximum a posteriori probability (MAP) estimate, which finds such an  $x$ , that maximises the conditional probability  $p(x|y)$ . According to Bayes rule

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int p(y|x)p(x)dx} \propto p(y|x)p(x),$$

therefore maximisation of  $p(x|y)$  corresponds to the following problem:

$$\arg \min_x (-\log p(y|x) - \log p(x)).$$

Obviously, real probability distribution functions are unknown. Therefore instead of it we solve the following heuristics

$$\hat{x} = \arg \min_x \{l(x, y) + \alpha \rho(x)\}, \quad (2)$$

where  $l(x, y)$  is a loss function and  $\rho(x)$  is a regularization term.

Let's slightly modify (2):

$$\hat{x} = \arg \min_{x, v} \{l(x, y) + \alpha \rho(v)\}, x = v.$$

It allows us to apply Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) from the paper [2], using Lagrangian:

$$L_\lambda(x, v, u) = l(x, y) + \alpha \rho(v) + \frac{\lambda}{2} \|x - v + u\|^2 - \frac{\lambda}{2} \|u\|^2.$$

It leads to iterative solving following minimization tasks till convergence:

$$\begin{aligned}\hat{x} &\longleftarrow \arg \min_x L(x, \hat{v}, u) \\ \hat{v} &\longleftarrow \arg \min_x L(\hat{x}, v, u) \\ u &\longleftarrow u + (\hat{x} - \hat{v})\end{aligned}$$

or in terms of (2)

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \min_x l(x, y) + \beta \|x - v\|^2, \\ \hat{v} &= \min_v \alpha \rho(v) + \beta \|x - v\|^2.\end{aligned}$$

In such a way, instead of one inverse problem with regularization scheme we've got two interconnected minimization problems, iterative solving of which allows us to find solution for the initial problem. Having some initial  $x_0$  and  $v_0$  we iterate

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= \min_x l(x, y) + \beta \|x - v_i\|^2, \\ v_{i+1} &= \min_v \alpha \rho(v) + \beta \|x_i - v\|^2.\end{aligned}$$

Let's consider some operator  $D : X \mapsto X$ , that preserves  $x$  as a solution, i.e.

$$AD(x, \sigma) = y,$$

for example, for super-resolution task instead of  $D$  a denoising operator may be used.

For diffusion model regularization term  $\rho(x)$  is  $\alpha \rho(x) = \alpha x^T [x - D(x, \sigma)]$ . Under mild conditions (differentiability, local homogeneity, and symmetric Jacobian for  $D$ ) we may apply gradient descent:

$$x_{k+1} = x_k - \mu [A^T (Ax_k - y) - \alpha [x_k - D(x_k, \sigma)]].$$

In our work we study convergence rates of the proposed diffusion model and approximation error, illustrating it with numerical experiments.

1. Regev C., Michael E., Peyman M. Regularization by Denoising via Fixed-Point Projection (RED-PRO) // SIAM Journal on Imaging Sciences. Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2021. – Vol. 14, Is. 3. doi:10.1137/20M1337168
2. Boyd S., Parikh N., Chu E., Peleato B., Eckstein J. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. // Found. Trends Mach. Learn. – 2011. – Vol. 3, Is. 1. – Pp:1–122.
3. Pereverzyev S. Selected Topics of the Regularization Theory. – Springer International Publishing. Cham. – 2014.

# Порівняльний аналіз оптимізації гіперпараметрів нейронних мереж

Юлія Літвінчук

j.litvinchuk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича

Нейронні мережі (НМ) є одним із найпотужніших засобів побудови прогнозів для регресійних моделей та класифікаторів. При цьому, налаштування параметрів [1, 2, 3] НМ є однією із найбільш трудомістких задач побудови оптимальної моделі. Надалі параметри моделі будемо позначати через

$$\theta = \theta(X, M), \quad (1)$$

де  $X$  - набір даних, за якими здійснюється оптимізація моделі;  $M$  - клас (сукупність, сім'я) моделей, в межах яких відбувається оптимізація.

Зазвичай, загальна схема оцінки оптимального значення параметрів  $\hat{\theta}$  відбувається згідно наступних кроків:

1. Вибір класу моделей  $M$ , в якому буде проведено пошук оптимального параметра  $\hat{\theta}$ ;
2. Вибір цільової функції;
3. Вибір методу пошуку (оптимізації) параметру  $\hat{\theta}$ ;
4. Побудова апріорного розподілу параметру  $\theta$ ;
5. Побудова апостеріорного розподілу параметру  $\theta$  та оцінка оптимального параметру  $\hat{\theta}$ .

Зауважимо, що кроки 4 та 5 у попередньому алгоритмі безпосередньо відносяться до методу Байеса [4, 5, 6] оцінки оптимального значення параметру  $\hat{\theta}$ . В цих роботах авторами зроблено припущення, що апріорний розподіл гіперпараметрів є рівноміній, тобто

$$\theta \sim Unif(B),$$

де  $B$  - область значень гіперпараметрів. У роботі [3] розглянуто класичні градієнтно-орієнтовані методи оцінки параметра  $\theta$ , проте для великої кількості параметрів розмірність  $\theta$  може бути дуже великою. Як зазначено в роботі [7] розмірність згоркових НМ може сягати  $\sim 10^3$ , тому використання класичних методів, наприклад методу Ньютона, є занадто часозатратним. Тому більшість алгоритмів для пошуку оптимальних параметрів  $\theta$  ґрунтуються на генетичних алгоритмах [2, 7]. У роботі [7] розглянуто модифікований метод рою частинок пошуку  $\theta$ , причому робиться припущення про рівноміній апріорний розподіл. Дане припущення

є дуже спрощене, оскільки значення цільової функції є неоднорідним в просторі параметрів (Рис. 1.)

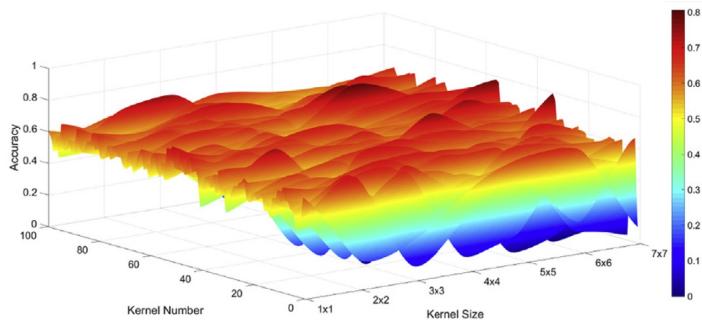


Рис. 1: Значення точності моделі для згорткової НМ у сітковому пошуку

Тому, для мінімізації ітерацій в генетичних алгоритмах запропоновано використання гауссівських сумішей на просторі параметрів  $\theta$ . Даний метод дає змогу локалізації максимумів цільової функції та використання нового розподілу

$$\theta \sim Dist(B),$$

де  $Dist(B)$  є гауссівською сімішшю з параметрами

$$(N, \mu_1, \dots, \mu_N, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N, w)$$

:

$$f(\theta | \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N) = \sum_{i=1}^N w_i n(\theta | \mu_i, \Sigma_i), \quad (2)$$

$n(\theta | \mu, \Sigma)$  - щільність нормального розподілу  $N(\mu, \Sigma)$ .

Було виявлено, що використання розподілу (2) як ап'яріорного розподілу в байесівських та генетичних алгоритмах зменшує кількість ітерацій на 2% – 15%.

1. D. Tian, Z. Shi, Mpso: modified particle swarm optimization and its applications, Swarm Evolut. Comput. - 2018. Pp 49–68.
2. Y. Chen, L. Li, X. Zhao, J. Xiao, Q. Wu, Y. Tan, Simplified hybrid fireworks algorithm, Knowl. Based Syst. - 2019.-173 p.
3. Y. Lecun, L. Bottou, Y. Bengio, P. Haffner, Gradient-based learning applied to document recognition, Proc. IEEE. 1998 - Pp. 2278–2324.
4. Donald R Jones, Matthias Schonlau, and William J Welch. Efficient global optimization of expensive black-box functions. Journal of Global optimization, 13(4).- 1998.- Pp. 455–492.

5. Jasper Snoek, Hugo Larochelle, and Ryan P Adams. Practical Bayesian optimization of machine learning algorithms. In Advances in Neural Information Processing Systems. - 2012. Pp.2951–2959.
6. Katharina Eggensperger, Matthias Feurer, Frank Hutter, James Bergstra, Jasper Snoek, Holger Hoos, and Kevin Leyton-Brown. Towards an empirical foundation for assessing Bayesian optimization of hyperparameters. In NIPS workshop on Bayesian Optimization in Theory and Practice. - 2013.- 5p.
7. Wang, Yulong & Haoxin, Zhang & Zhang, Guangwei. cPSO-CNN: An efficient PSO-based algorithm for fine-tuning hyper-parameters of convolutional neural networks. Swarm and Evolutionary Computation.10.1016/j.swevo.2019.06.002. - Pp. 114-123.

# Exponential stability in l.i.m. of one type of stochastic systems

*Taras Lukashiv, Igor Malyk, Petr Nazarov*

*t.lukashiv@gmail.com, malyk.igor.v@gmail.com,*  
*Petr.Nazarov@lih.lu*

*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University*

*Luxembourg Institute of Health*

On the probabilistic basis  $(\Omega, \mathfrak{F}, F, \mathbf{P})$  [2], consider a stochastic dynamic system of a random structure given by the stochastic Ito differential equation with Poisson perturbations

$$dx(t) = a(t-, \xi(t-), x(t-), u(t-))dt + b(t-, \xi(t-), x(t-), u(t-))dw(t) +$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} (c(t-, \xi(t-), x(t-), u(t-), z))\tilde{\nu}(dz, dt), \quad t \in \mathbb{R}_+ \setminus K, \quad (1)$$

with Markov switches

$$\Delta x(t)\Big|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)), \quad t_k \in K = \{t_n \uparrow\} \quad (2)$$

for which  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$  and initial conditions

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \xi(0) = y \in \mathbf{Y}, \quad \eta_{k_0} = k \in \mathbf{H}. \quad (3)$$

Assume that  $\xi(t), t \geq 0$ , is a homogeneous continuous Markov process with a finite number of states  $\mathbf{Y} := \{y_1, \dots, y_N\}$  and a generator  $Q$ ;  $\{\eta_k, k \geq 0\}$  is a Markov chain with values in the space  $\mathbf{H}$  and the transition probability matrix  $\mathbb{P}_H$ ;  $x : [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $w(t)$  is an  $m$ -dimensional standard Wiener process;  $\tilde{\nu}(dz, dt) = \nu(dz, dt) - \mathbb{E}\nu(dz, dt)$ ; processes  $w, \nu, \xi$  and  $\eta$  are independent [2], [3].

The process  $x(t), t \geq 0$  is a càdlàg - processes; control  $u(t) := u(t, x(t)) : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  is an  $m$ -dimensional function with of the class of admissible controls  $U$  [1].

Maps  $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $c : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  and the function  $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  are measurable functions and satisfy the Lipschitz condition:

$$\begin{aligned} & |a(t, y, x_1, u) - a(t, y, x_2, u)| + |b(t, y, x_1, u) - b(t, y, x_2, u)| + \\ & + \int_{\mathbb{R}^m} |c(t, y, x_1, u, z) - c(t, y, x_2, u, z)|\Pi(dz) + \end{aligned}$$

$$+|g(t, y, h, x_1) - g(t, y, h, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad (4)$$

where  $\Pi(dz)$  is given by relation  $\mathbb{E}\nu(dz, dt) = \Pi(dz)dt$ ,  $L > 0$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$  for  $\forall t \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ , and the condition

$$\begin{aligned} |a(t, y, 0, u)| + |b(t, y, 0, u)| + \int_{\mathbb{R}^m} |c(t, y, 0, u, z)|\Pi(dz) + \\ |g(t, y, h, 0)| \leq C < \infty, \end{aligned}$$

**Definition.** A random structure system (1)-(3) is called exponential mean-square stable (in *l.i.m.*) if exist  $\delta > 0$  that the inequality  $|x| < \delta$  follows inequality

$$\mathbf{E}|x(t, t_0, y, h, x, u)|^2 \leq M e^{-\gamma(t-t_0)} |x|^2$$

for some  $M > 0, \gamma > 0$  for any  $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, t \geq t_0 \geq 0$ .

**Teopema 1.** Let

- sequence  $t_k, k \geq 0$  satisfy inequality

$$0 < |t_{k+1} - t_k| \leq \Delta, k \geq 0$$

for some  $\Delta > 0$ ;

- the Lipshitz condition (4) hold;
- exist the Lyapunov functions  $v_k(y, h, x)$  and  $a_k(y, h, x), k \geq 0$  such that, based on the system, the inequality hold

$$(lv_k)(y, h, x(t)) \leq -a_k(y, h, x(t)), k \geq 0;$$

- the Lyapunov functions  $\{v_k\}, \{a_k\}, k \geq 0$  satisfy next conditions

$$c_1 |x|^2 \leq v_k(y, h, x) \leq c_2 |x|^2,$$

$$c_3 |x|^2 \leq a_k(y, h, x) \leq c_4 |x|^2$$

for some  $c_i > 0, i = \overline{1, 4}$  for all  $k \in \mathbb{N}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, x \in \mathbb{R}^m$ ;

- exists a constant  $\Delta_1 > 0$  such that

$$|t_{k+1} - t_k| \geq \Delta_1$$

for all  $k \in \mathbb{N}$ .

Then the random structure system (1)-(3) is exponentially stable in *l.i.m..*

1. Andreeva E.A., Kolmanovskii V.B., Shaikhet L.E. Control of hereditary systems. Nauka, Moskow, 1992. (in Russian)
2. Dynkin E.B. Markov Processes. Academic Press, New York, 1965.
3. Oksendal B. Stochastic Differential Equation. Springer, New York, 2013.

# Числовий аналіз епідеміологічних моделей із запізненням

Тетяна Луник, Ігор Черевко

tetianka1999@gmail.com, i.cherevko@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

В роботі розроблено прикладний веб-застосунок для автоматизації моделювання початкових задач для диференціально-різницевих рівнянь. Проведено числовий аналіз динамічних SIR моделей із запізненням, що описують пандемію Covid-19.

## 1. Різницеві схеми для початкових задач диференціально-різницевих рівнянь

У багатьох реальних прикладних процесах в біології, екології, медичні та інших технологічних процесах відбуваються часові затримки (запізнення). Вони пов'язані із тривалістю певних прихованих процесів (інкубаційні періоди) в медицині, використання різноманітних датчиків для вимірювання та передачі сигналів в техніці тощо. Введення ефекту запізнення в диференціальні рівняння, що описують такі процеси є необхідним для побудови адекватних математичних моделей у вигляді систем диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь [1]-[3].

Знайти точний розв'язок диференціально-різницевих рівнянь вдається тільки у найпростіших випадках, тому методи побудови наближених розв'язків таких рівнянь мають важливе значення. У даній роботі для числового моделювання початкових задач для диференціальних рівнянь із запізненням використовуються наближені алгоритми, які є узагальненням різницевих схем для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь [4]. Різні підходи до побудови аналогічних різницевих схем розглядалися в працях [5]-[6].

Будемо розглядати початкову задачу для диференціально-різницевого рівняння запізнюючого типу

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in E_{t_0}, \quad (2)$$

де  $t \in R$ ,  $x(t) \in R^n$ ,  $\tau > 0$ ,  $E_{t_0} = [t_0, t_0 - \tau]$  – початкова множина.

Введемо рівномірну сітку

$$\omega = \left\{ t_n = nh, n = -m, -m - 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, k, k = \frac{T}{h}, m = \frac{\tau}{h} \right\}.$$

Будемо позначати через  $y_n$  наближене значення точного розв'язку  $x(t_n)$  в точці  $t = t_n$ .

У роботі [4] одержано сім'ю  $\theta$  різницевих схем для задачі (1)–(2)

$$y_{n+1} = y_n + h [(1 - \theta)f(t_n, y_n, v_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1}, v_{n+1})], \quad (3)$$

де  $v_n = \begin{cases} \varphi(t_n - \tau), & \text{якщо } n < m, \\ y_{n-m}, & \text{якщо } n \geq m. \end{cases}$

Якщо  $\theta = 0$ , тоді одержуємо  $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n, v_n)$  узагальнення явної різницевої схеми Ейлера. У випадку  $\theta = 1$  дістаємо узагальнення неявної різницевої схеми Ейлера  $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}, v_{n+1})$ , а при  $\theta = \frac{1}{2}$  маємо узагальнення різницевої схеми трапеції (неявна різницева схема Адамса другого порядку) для інтегрування диференціальних рівнянь із запізненням.

**Зauważення 1.** Якщо запізнення  $\tau$  та крок  $h$  не є раціонально за- лежними, то апроксимація  $x(t - \tau)$  в точці  $t = t_n$  здійснюється за правилом

$$x(t_n - \tau) \approx v_n = \begin{cases} \varphi(t_n - \tau), & \text{якщо } t_n - \tau < 0, \\ v_n^i, & \text{якщо } t_n - \tau \geq 0. \end{cases}$$

Значення  $v_n^i$  обчислюється за таким алгоритмом:

- 1) знаходимо номер  $i$  такий, що  $t_i \leq t_n - \tau < t_{i+1}$ ;
- 2) значення  $v_n^i$  знаходимо використовуючи лінійну інтерполяцію за точками  $(t_i, x_i)$ ,  $(t_{i+1}, x_{i+1})$ :

$$v_n^i = \frac{t_n - \tau - t_i}{h} y_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t_n + \tau}{h} y_i.$$

**Теорема.** [4] Якщо розв'язок початкової задачі (1)–(2) двічі неперервно диференційована функція, то різницева схема (3) збіжна з першим порядком малості по  $h$ .

## 2. Комп'ютерне моделювання SIR моделей із запізненням

Для автоматизації моделювання систем із запізненням за допомогою наведених в роботі числових алгоритмів розроблено прикладне програмне забезпечення. Для його розробки використано мову програмування Python та фреймворк Python Flask Framework. Розроблений додаток представляє собою набір структурованих сторінок для розв'язання диференціально-різницевих рівнянь та побудови графіків знайдених розв'язків. Для керування додатком розроблено інтерактивне меню, що забезпечує можливість вибору задачі та ввід початкових даних. Особливу властивість має поле "Початкова функція", яке дозволяє ввести не просто числове значення, а формулу з дотриманням синтаксису Python і введене співвідношення буде використовуватись як повноцінна частина коду.

Розглянемо модифіковану епідеміологічну модель Кермака–Макендрі-ка, врахувавши інкубаційний період перебігу захворювання  $\tau_2$ , а також, що через час  $\tau_1$  набутий імунітет втрачається і особини знову можуть заразитись [7]:

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= -y_1(x)y_2(x - \tau_1) + y_2(x - \tau_2), \\ y'_2(x) &= y_1(x)y_2(x - \tau_1) - y_2(x), \\ y'_3(x) &= y_2(x) - y_2(x - \tau_1). \end{aligned}$$

За допомогою розробленого додатку знайдено наближені розв'язки моделі Кермака–Макендріка з різними комбінаціями запізнень  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  та початковими умовами  $y_1(0) = 5$ ,  $y_2(0) = 1$ ,  $y_3(x) = 0$ . Із отриманих розв'язків можемо зробити висновок, що періодичні спалахи інфекції (при фіксованому інкубаційному періоді  $\tau_1 = 1$ ) виникають, якщо імунітет втрачається за час  $\tau_2 \geq 7$ . Епідемія стабілізується, якщо  $\tau_2 \leq 6$ .

Досліджено SIR модель, що описує поширення захворювання Covid-19 в популяції розміру  $N$ , яка містить три "компартменти":  $S(t)$  – кількість сприйнятливих осіб, які ще не інфіковані хворобою,  $I(t)$  – кількість інфектійних осіб,  $R(t)$  – кількість осіб, які одужали та мають імунітет

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta S(t - \tau_1)I(t - \tau_1), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t - \tau_1)I(t - \tau_1) - \gamma I(t - \tau_2) - \alpha I(t), \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t - \tau_2). \end{aligned}$$

Вважаємо, що хвороба має інкубаційний період вірусу  $\tau_1 > 0$  (орієнтовно 3 дні), а період відновлення  $\tau_2 > 0$  (орієнтовно 1-3 тижні). Ефективність моделі перевірялася в роботі [8] шляхом порівняння її прогнозів з реальними даними в Німеччині, Італії, Кувейті та Омані у липні 2020. Параметри  $\beta$ ,  $\gamma$  і  $\alpha$  змінюються для оптимального підгонки даних.

За допомогою розробленого додатку знайдено наближений розв'язок цієї моделі з початковими параметрами  $\beta = 0,17$ ,  $\gamma = 0,03$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\tau_1 = 3$ ,  $\tau_2 = 9$  та початковими функціями  $\varphi(x) = 1$ ,  $\psi(x) = 0,1$ ,  $\xi(x) = 0$  для країни Німеччина.

Одержані числові результати добре узгоджуються із реальними даними 2020 року в Німеччині та одержаними результатами в роботі [8].

1. Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. – Netherlands. Kluwer Academic Pub. Dordrecht, 1992. – 512 p.
2. Arino, J. and van den Driessche. Time delays in epidemic models: modeling and numerical considerations. – Delay Differential Equations and Applications, 2006. – P. 539-578.
3. Schiesser W.E. Time Delay ODE/PDE Models. Applications in Biomedical Science and Engineering. – Boca Rona, 2019. – 250 p.

4. Лунік Т.В., Черевко І.М. Моделювання математичних моделей біології та імунології із запізненням. Буковинський математичний журнал. – 2021. – Том. 8, №2. – С. 92- 98.
5. Bellen A., Zenaro M. Numerical methods for delay differential equations. – New York : Oxford University Press, 2003. – 395 p.
6. Fathalla A. Rihan. Delay Differential Equations and Applications to Biology. – Springer, 2021. – 303 p.
7. Братусь А., Новожилов А., Платонов А. Динамические системы и модели в биологии. – М.: Физматлит, 2010. – 436 с.
8. Ebraheem H., Alkhateeb N., Badran H., Sultan E. Delayed Dynamics of SIR Model for COVID-19 // Open Journal of Modelling and Simulation. – 2021. – V. 9. – P. 146-158.

**Математичне моделювання поперечних коливань балки  
з дискретно–неперервним розподілом параметрів**

*Віктор Мазуренко*

*viktor.mazurenko@pnu.edu.ua*

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,  
Івано-Франківськ, Україна*

У доповіді мова йтиме про нестационарну початково–крайову задачу, що моделює поперечні коливання пружної балки (довжина  $l$  якої значно перевищує два інші поперечні розміри), складеної з  $n$  кусків змінного перерізу, з дискретно–неперервним розподілом маси і зовнішнього навантаження.

Розглянемо диференціальне рівняння поперечних коливань балки без врахування тертя і поздовжньої сили

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x) \sin \omega t. \quad (1)$$

Тут  $w(x, t)$  означає прогин балки в точці  $x \in [0, l]$  у момент часу  $t \geq 0$ ,  $\alpha(x) = EI(x)$  — жорсткість на згин ( $E$  — модуль Юнга,  $I$  — момент інерції поперечного перерізу),  $m(x) = \rho A(x)$  — погонна маса ( $\rho$  — густина матеріалу,  $A$  — площа поперечного перерізу),  $q(x)$  і  $\omega$  — амплітудна функція і частота вимушених гармонічних коливань, причому

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(x) \theta_k(x), \quad m(x) = \sum_{k=0}^{n-1} [m_k(x) \theta_k(x) + \mu_{k+1} \delta_{k+1}(x)], \\ q(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} [q_k(x) \theta_k(x) + P_{k+1} \delta_{k+1}(x) + M_{k+1} \delta'_{k+1}(x)], \end{aligned}$$

де  $\alpha_k, m_k, q_k \in C[x_k, x_{k+1}]$ ,  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = l$ ,  $\theta_k$  — характеристична функція півінтервалу  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $\mu_k, P_k, M_k$  — зосереджені у перерізах  $x = x_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) маси, сили і моменти,  $\delta_k$  — функція Дірака (одиничний імпульс) з носієм  $x_k$ .

Рівняння (1) розглядаємо разом з початковими умовами

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

де функції  $\varphi, \psi \in C[0, l]$  визначають початковий прогин і початковий розподіл швидкостей, та локальними (такий випадок найчастіше зустрічає-

тъся у застосуваннях) крайовими умовами

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \beta_{ij} w_x^{[j-1]}(0, t) &= \beta_i(t), \quad i = 1, 2, \\ \sum_{j=1}^4 \beta_{ij} w_x^{[j-1]}(l, t) &= \beta_i(t), \quad i = 3, 4, \end{aligned} \quad t \geq 0, \quad (3)$$

де  $\beta_{ij}$  — задані дійсні числа,  $\beta_i \in C^2[0, \infty)$ ,  $w_x^{[j-1]}(x, t)$  — квазіпохідні розв'язку  $w(x, t)$  за змінною  $x$ , що мають вигляд

$$w_x^{[0]} = w, \quad w_x^{[1]} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_x^{[2]} = -\alpha(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w_x^{[2]} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

і визначають відповідно прогин балки, кут повороту, згиальний момент і перерізуючу (поперечну) силу в точці  $x$  у момент часу  $t$ .

Математична модель (1)–(3) дозволяє охопити широке коло випадків поперечних коливань: балки зі змінним поперечним перерізом [1, 2], східчасті балки [3], балки із зосередженими масами [4] при різних комбінаціях закріплень кінців (жорстке закріплення, шарнірна опора, вільний кінець, плаваюче закріплення, кінець із зосередженою масою).

Розв'язок моделі (1)–(3) будеться методом Фур'є у вигляді суперпозиції головних коливань із застосуванням теорії квазідиференціальних рівнянь [5] для побудови власних форм коливань. При цьому ефективно використовується ідея введення квазіпохідних, яка дозволяє оминути проблему множення розподілів і, таким чином, послабити вимоги на гладкість коефіцієнтів рівняння (1). В роботі [6] такий підхід застосований для моделювання поздовжніх коливань стрижня з кусково-сталим поперечним перерізом і  $\delta$ -особливостями.

1. Abrate S. Vibration of non-uniform rods and beams, J. Sound Vibr., 185 (1995), 703–716.
2. Ece M.C., Aydogdu M., Taskin V. Vibration of a variable cross-section beam, Mech. Res. Commun., 34 (2007), 78–84.
3. Mao Q. Free vibration analysis of multiple-stepped beams by using Adomian decomposition method, Math. Comput. Modelling, 54 (2011), 756–764.
4. Torabi K., Afshari H., Sadeghi M., Toghian H. Exact closed-form solution for vibration analysis of truncated conical and tapered beams carrying multiple concentrated masses, J. Solid Mech., Vol. 9, No. 4 (2017), 760–782.
5. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В., Власій О.О. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Дрогобич: Коло, 2011. – 301 с.
6. Tatsij R. M., Chmyr O. Yu., Karabyn O. O., The total first boundary value problem for equation of hyperbolic type with piecewise constant coefficients and  $\delta$ -singularities, Res. Math. Mech., Vol. 24, No. 1 (2019), 86–102.

# Аналіз неперервних моделей динаміки вікової структури біологічних популяцій

Василь Масенко

v.matsenko@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Застосування методів математичного моделювання неодноразово доводило достатньо високу ефективність. Останнім часом значних успіхів в біології, екології досягнуто саме за рахунок розробки та дослідження математичних моделей. Розвинулася математична екологія, яка базується на ґрунті вольтеровських моделей, що описують динаміку чисельності популяцій.

Довгий час об'єктом дослідження математичної екології були моделі з зосередженими параметрами, але для більш точного опису динаміки чисельності потрібно враховувати розподіл особин в популяції за тією чи іншою ознакою, і в першу чергу за віком.

У даний роботі розглядаються неперервні моделі динаміки вікової структури, що приводять до вивчення диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку з некласичною крайовою умовою. Після дослідження цих математичних моделей дається змістовна інтерпретація одержаних результатів.

У випадку розподілених систем за віком вікова структура описується функцією  $x(\tau, t)$ , де  $\tau$  – вік особин,  $t$  – момент часу, так що  $\int_0^\infty x(\tau, t)d\tau = N(t)$  дає загальну чисельність особин в момент часу  $t$ .

При цьому рівняння динаміки вікового складу мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} &= -D(\tau, t, x), \quad t, \tau > 0, \\ x(0, t) &= \int_0^\infty B(\tau, t, x)d\tau, \quad t > 0, \\ x(\tau, 0) &= \varphi(\tau), \quad \tau \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де  $x(\tau, t)$  – вікова щільність,  $D(\tau, t, x)$ ,  $B(\tau, t, x)$  – функції, що описують процеси виживання та народжування, відповідно,  $\varphi(\tau)$  – початковий віковий розподіл особин в популяції. Перше рівняння в (1) називають рівнянням виживання, а друге – рівнянням народжуваності.

Модель (1) вивчається при різних гіпотезах про взаємодію особин в популяції, тобто при конкретизаціях функцій  $D(\cdot)$  та  $B(\cdot)$ , які складно залежать від щільності розподілу  $x(\tau, t)$ .

В простішому лінійному випадку модель (1) розглядалася в [1], при

цьому  $D(\cdot) = d(\tau)x(\tau, t)$ ,  $B(\cdot) = b(\tau)x(\tau, t)$ , де  $d(\tau)$ ,  $b(\tau)$  – коефіцієнти смертності та народжування.

Для такої стаціонарної моделі встановлені умови виживання популяції у вигляді

$$H = \int_0^\infty b(\tau) \exp \left( - \int_0^\tau d(\xi) d\xi \right) d\tau > 1. \quad (2)$$

Величину  $H$  називають біологічним потенціалом. Отже, виживання видів визначається числовим значенням величини  $H$ .

Але більш реалістичним є випадок, коли коефіцієнт смертності  $d(\cdot)$  залежить і від щільності  $x(\tau, t)$ . За аналогією з моделлю Ферхольстада-Пірла цю функцію спочатку можна вважати лінійною і тоді рівняння виживання в (1) матиме вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} = -(d(\tau) + p(\tau)x(\tau, t))x(\tau, t), \quad \tau, t > 0, \quad (3)$$

де  $p(\tau)$  – коефіцієнт лімітування всередині групи особин віку  $\tau$ , тобто в цій групі наявна міжвікова конкуренція.

В праці [2] доведена теорема про існування та єдиність невід'ємного розв'язку такої популяційної задачі, а також теорема про існування та стійкість цього стаціонарного розв'язку. Встановлено, що при умові (2) нетривіальний стаціонарний розв'язок популяційної задачі є стійким.

В праці [3] розглядається модель вікової структури з урахуванням внутрішньовидової конкуренції. Рівняння виживання при цьому має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} = - \left( d(\tau) + \int_0^\infty a(\tau, s)x(s, t) ds \right) x, \quad \tau, t > 0,$$

де функція  $a(t, s)$  описує конкурентний вплив особин віку  $s$  на особини віку  $\tau$ .

Для такої моделі при умові (2) також існує єдиний додатній стаціонарний розв'язок, який є стійким [4].

Узагальнена нелінійна модель вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} &= -d(\tau, S_1(t))x, & \tau, t > 0, \\ x(0, t) &= \int_0^\infty b(\tau, S_2(t))x(\tau, t) d\tau, & t > 0, \\ x(\tau, 0) &= \varphi(\tau), & \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $S_1(t) = \int_0^\infty \gamma_1(s)x(s, t)ds$ ,  $S_2(t) = \int_0^\infty \gamma_2(s)x(s, t)ds$  – зважені чисельності, вивчалася в [5].

Для моделі (4) розглянуто деякі частинні випадки, в яких отримані більш конкретні результати.

Важливим класом моделей для динаміки вікової структури є моделі відбору

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau} &= -(d_i(\tau) + D(x_1, x_2, \dots, x_n))x_i(\tau, t), \quad \tau, t > 0, \\ x_i(0, t) &= \int_0^\infty (b_i(\tau) + B(x_1, x_2, \dots, x_n))x_i(\tau, t)d\tau, \quad t > 0, \\ x_i(\tau, 0) &= \varphi_i(\tau), \quad \tau \geq 0, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Ці моделі вивчаються за умови сталості загальної кількості особин в усій екосистемі, тобто

$$\sum_{i=1}^n \int_0^\infty x_i(\tau, t)d\tau = \text{const.} \quad (6)$$

Це означає, що відбувається лише перерозподіл чисельностей між різними видами, які складають екосистему.

Для виконання умови (6) функції  $D(\cdot)$  та  $B(\cdot)$  потрібно сконструювати. Побудова цих функцій та дослідження відповідних моделей проведений в праці [5]. Зокрема одержані умови виживання виду при окремому регулюванні процесів виживання та народжування, а також при одночасному регулюванні цих процесів.

На модельних прикладах показано, що в результаті відбору виживають види, в яких народжуваність є вищою для молодших віків, хоча ця група особин має і вищу смертність. Перевага в народжуваності для особин старших віків не збільшує шансів на виживання.

1. Von Foester H. Some remarks on changing population // Kinetics of Cellular Proliferation. – New York: Grune and Stratton. – 1959. – Р. 382–407.
2. Маценко В.Г. Об одном классе уравнений математической физики, возникающих в динамике биологических макросистем // Журн. вычис. матем. и матем. физ. – 1981. – 21, № 1. – С. 69–79.
3. Маценко В.Г. Існування та єдиність в задачах динаміки вікової структури біологічних популяцій з внутрішньовидовою конкуренцією // Буков. мат. журн. – 2014. – 2, № 2–3. – С. 167–171.

4. Маценко В.Г. Аналіз стійкості стаціонарних розв'язків в моделях динаміки вікової структури популяцій з внутрішньовидовою конкуренцією // Буков. мат. журн. – 2016. – 4, № 1. – С. 117–121.
5. Маценко В.Г. Нелінійна модель динаміки вікової структури популяцій // Нелінійні коливання. – 2003. – 6, № 3. – С. 357–367.
6. Маценко В.Г. Моделювання процесів відбору в системах з віковою структурою // Наук. вісн. Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. – Ужгород: УжНУ. – 2010. – 20. – С. 90–97.

# **Застосування алгоритму NSA в системі захисту комп'ютерної мережі**

*Галина Мельник*

*g.melnik@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

Щороку мільйони людей страждають від збоїв у системі кібербезпеки в різних галузях, а середня річна вартість збитків тільки у США сягає 6,5 мільйонів доларів. Очікується, що складність і масштаби кіберзагроз будуть зростати, але наші засоби захисту залишаютьсяrudimentarnimi. У переважній більшості поточна стратегія полягає у визначені загроз, а потім у побудові систем захисту, які здебільшого зосереджені на запобіганні проникненню несанкціонованих користувачів, вірусів або програм. Проте, коли зловмисники проходять через захисний бар’єр, інформація є відкритою для ушкодження чи викрадення. Без деяких засобів відстеження шкідливих дій, що були б впроваджені в систему, поточні засоби захисту не в змозі подати сигнал тривоги, аж поки не стає явною активність зловмисника.

В представлених дослідженнях автор пропонує звернутися до біології. Завдяки еволюції природа створила з людини надзвичайно складну фортецю, яка блокує зовнішні чужорідні мікроорганізми і жорстоко атакує внутрішні загрози. Ці епічні битви ведуться на кілька фронтів. Подібно до брандмауера, наша шкіра є міцною, адаптивною і постійно оновлюється для посилення своєї міцності. Хоча, всі стіни можливо зруйнувати. У кібербезпеці втрачена стіна, швидше за все, означає програму битву. Біологічна війна має зовсім іншу картину. Як тільки зловмисники прориваються, наш внутрішній захист, — імунна система — починає активізуватися. Вона вивчає та запам’ятує те, що є нормальним. Тому, коли трапляються відхилення, якими б складними чи незнайомими вони не були, імунна система знає як реагувати. Подібність між кібер- та біологічною війною важко ігнорувати: в обох випадках ми маємо справу з супротивниками, що розвиваються, ускладнюються та поступово змінюють засоби атаки.

З початку 1980-х років науковці працювали над ідеєю кіберімунітету. З прогресом у AI та глибокому навчанні побудовані алгоритми починають відтворюватися дві основні характеристики штучної імунної системи (AIS) — навчання та пам’ять [1]. Мета дослідження автора полягає у перевірці доцільності використання моделі AIS в комп’ютерних мережах задля виявлення несанкціонованих дій та аномальної поведінки мережевих даних. У доповіді представлено концепцію моделі AIS для виявлення вторгнень, що використовує набір даних штучного захоплення пакетів та загальні Інтернет-протоколи. Для реалізації системи захисту мережі

пропонується використовувати алгоритм негативного відбору (NSA). Виявлення відхилень за допомогою NSA базується на створенні детекторів, які потім використовуються для пошуку моделей аномалій у мережі.

Концептуально цей підхід можна описати наступним чином. На кроці ініціалізації формується набір даних, що містить усі репрезентативні вибірки. Далі випадковим чином генеруються кандидати-детектори і порівнюються з репрезентативним набором. Зауважимо, що, як і в біологічному негативному відборі Т-клітин, зберігаються лише ті детектори, які не відповідають жодному елементу набору репрезентативних зразків.

Покладемо  $[x_1, x_2, \dots, x_L]$  та  $[w_1, w_2, \dots, w_L]$  – два дійсні вектори, що визначають репрезентативну («власну») вибірку та детектор-кандидат, відповідно, де  $L$  є їхнім спільним порядком. Ступінь відповідності  $d$  між  $[x_1, x_2, \dots, x_L]$  і  $[w_1, w_2, \dots, w_L]$  можна обчислити на основі відстані Евкліда:

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^L (x_i - w_i)^2}. \quad (1)$$

На наступному кроці  $d$  порівнюється з попередньо встановленим порогом  $\lambda$ , і отримується похибка узгодження детектора  $E$ :

$$E = d - \lambda. \quad (2)$$

Якщо  $E > 0$ , тоді детектор  $[w_1, w_2, \dots, w_L]$  не відповідає репрезентативному зразку  $[x_1, x_2, \dots, x_L]$ . Якщо ж  $[w_1, w_2, \dots, w_L]$  не відповідає всім представленим зразкам, його буде включено до набору детектора. З іншого боку, якщо  $E \geq 0$ , вважаємо, що детектор  $[w_1, w_2, \dots, w_L]$  відповідає зразку  $[x_1, x_2, \dots, x_L]$ , і, отже, може бути відхиленім. Після того, як певна кількість кваліфікованих детекторів була згенерована такою процедурою негативного відбору, вони використовуються для виявлення «невласних» (новинок, аномалій) у вхідних зразках. Тобто, коли новий зразок  $[\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_L]$ , співпадає з  $[w_1, w_2, \dots, w_L]$ , тоді й фіксується наявна аномалія.

Представлена модель має здатність виявляти вторгнення в штучний набір мережевих даних. Це доводить, що алгоритм AIS працює, і сприяє розумінню того, що, за умови використання програмної реалізації моделі для даних комп’ютерної мережі реального часу, вона працюватиме успішно та запобігатиме атакам.

1. de Castro L. N., Timmis J. Artificial Immune Systems: A New Computational Intelligence Approach. London: Springer-Verlag. – 2002. – 357 p.

# Моделювання форм вентильованих тонких осесиметричних порожнин у вагомій рідині

Ігор Нестерук, Богдан Шепетюк

inesteruk@yahoo.com

shepetyukb@gmail.com

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

ЧНУ імені Юрія Федъковича, Чернівці, Україна

Опір високошвидкісних підводних транспортних засобів може бути зменшений шляхом зменшення площини, яка змочується водою, тобто за допомогою використання суперкавітації [1, 2, 3]. Для отримання малих значень числа кавітації при малих швидкостях або на великих глибинах руху, використовується піддув каверни газом [4]. Вентиляція також дуже важлива в експериментах, оскільки швидкості в експериментальних установках, як правило, набагато менші, ніж для реальних транспортних засобів. Обмежені швидкості кавітаційних труб суттєво збільшують вплив гравітації на форми і розміри каверни. Теоретичні та чисельні дослідження вентильованих кавернельми обмежені. Навіть в тому випадку, коли вплив потоку газу усередині каверни і гравітації незначні, немає повної теорії для форми каверни в залежності від швидкості подачі газу, числа кавітації і форми тіла, розташованого усередині каверни.

Якщо газ рухається у вузькому каналі між поверхнею каверни і корпусом транспортного засобу, то тиск на поверхні каверни не є постійним і змінює її форму в порівнянні з випадком парової кавітації. Це складне явище досліджувалось чисельно з використанням рівнянь в'язкої рідини [5]. Використання моделі ідеальної рідини і теорії тонкого тіла дозволяє отримати прості рівняння для форми осесиметричних вентильованих суперкаверн, якщо потік газу між поверхнею каверни і тіла обертання є одновимірним, нев'язким і нестисливим.

Деякі цікаві результати були отримані в роботах [6, 7, 8] для стаціонарного потоку рідини без гравітаційних ефектів. В роботі [9] результати цих робіт узагальнені для нестаціонарних вертикальних потоків в полі сил тяжіння. Зокрема, було запропоновано рівняння першого наближення для радіуса  $R(x)$  стаціонарної осесиметричної вентильованої каверни

$$\frac{d^2 R^2}{dx^2} = \frac{\sigma_0}{\ln \epsilon} + \frac{2kx}{Fr^2 \ln \epsilon} + \\ + \Delta \left[ a - \frac{1}{(R^2 - R_b^2)^2} \right], \quad (1)$$

де всі довжини є безрозмірними (віднесені до радіусу каверни в її початку  $R_0$ ),  $k = 1$  відповідає випадку, коли напрямки потоку води на нескінчен-

ності і гравітаційного прискорення збігаються;  $k = -1$  відповідає випадку, коли напрямки цих векторів протилежні. Значення параметрів  $\sigma_0$ ,  $Fr$ ,  $\Delta$  і  $a$  визначаються формулами:

$$\sigma_0 = \frac{2(p_\infty - p_v - p_0)}{\rho U^2}, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gR_0}},$$

$$\Delta = -\frac{\rho_g Q^2}{\pi^2 R_0^4 \rho U^2 \ln \epsilon}, \quad a = \left[ 1 - \frac{R_{b0}^2}{R_0^2} \right]^{-2},$$

де  $\rho$  густина води;  $U$  стала швидкість потоку води на нескінченості;  $p_v$  тиск водяної пари при температурі навколошнього середовища;  $p_\infty$  і  $p_0$  тиски, виміряні в поперечному перерізі каверні далеко в потоці води і газі на початку каверні відповідно;  $\rho_g$  постійна густина газу;;  $Q$  об'ємне витрачання газу;  $R_b$ ,  $R_{b0}$  радіуси корпусу в точках  $x$  і  $x = 0$ ;  $\epsilon$  малий параметр, відношення максимального радіуса системи каверна-кавітатор до його довжини.

В роботі [10] розраховані форми форми тонких стаціонарних осесиметричних вентильованих каверн для вихідного та низхідного потоків води для різних значень числа Фруда і радіусів розташованих в каверні циліндричних корпусів. Показано, що вентиляція збільшує розміри каверн за конічним кавітатором і зменшує довжину донних каверн. Коли напрямок потоку води на нескінченості є протилежним до сили тяжіння, інтенсивність піддуву не може перевищувати деяке критичне значення для конічних кавітаторів і не може бути меншою деякого значення для донних каверн.

В роботі [11] було запропоновано аналітичні формулі для оцінки стійкості тонких осесиметричних вентильованих каверн, які дозволяють розрахувати залежності числа критичної кавітації від числа кавітації пари як для диска, так і для тонких кавітаторів. Ці формули були використані для розрахунку кривих стійкості для різних радіусів циліндричних корпусів, розташованих всередині каверн, числа Фруда та напрямків навколошнього потоку. Було показано, що радіус циліндричного корпусу та сила тяжіння може суттєво вплинути на стійкість вентильованих каверн. Відповідні залежності різні для різних форм кавітатора.

У даному дослідженні розглянуті числові рішення основного рівняння при різних значеннях числа Фруда  $Fr$  і параметра  $k$  для заданого набору основних параметрів для тонких осесиметричних вентильованих каверн. Розраховані форми і розміри вентильованих каверн, проаналізовані критичні значення інтенсивності піддуву та критичні величини числа Фруда  $Fr$  для конічних корпусів, розташованих всередині каверн.

- Логвинович Г.В. Гидромеханика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка, 1969. – 208 с.

2. Savchenko Yu. N. Perspectives of the Supercavitation Flow Applications // Int. Conf. on Superfast Marine Vehicles Moving Above, Under and in Water Surface (SuperFAST2008), 2–4 July 2008.
3. I. Nesteruk. Drag drop on high-speed supercavitating vehicles and supersonic submarines. Applied Hydromechanics. – 2015. – vol. 17, N 4. – P. 52 – 57. <http://hydromech.org.ua/content/pdf/ph/ph-17-4>
4. Vlasenko, Yu. D., Savchenko, G. Yu. Study of the parameters of a ventilated supercavity closed on a cylindrical body, I. Nesteruk (ed.). // Supercavitation. – 2012. – Springer, – Pp. 201-214.
5. Zhuravlev, Yu. F., Varyukhin, A.V. Numerical simulationof interaction gas jets flowing into water cavity with its free surfaces simulation // Int. Conf. SuperFAST2008. –2008.
6. Манова З.І., Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. Оцінки впливу вентиляції на форму тонких осесиметричних каверн // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т. 13(85),N 2. – С. 44-50.
7. Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. Особливості форми донних штучних осесиметричних каверн // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т.13(85), N 3. – С. 64-75.
8. Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. Форма штучних осесиметричних каверн при до - та надкритичних значеннях інтенсивності піддуву // Прикладна гідромеханіка. – 2012. – Т.14, N 2. – С. 53-60.
9. Nesteruk, I. Shape of Slender Axisymmetric Ventilated Supercavities // Journal of Computational Engineering. – 2014. – V.2014, Article ID 501590. – P. 18.doi:10.1155/2014/501590.
10. I.G Nesteruk, B.D. Shepetruk. Stability of slender axisymmetric ventilated cavities closing on in ponderable liquid // Hydrodynamics and acoustisc. – 2018. – 1.(2). – Pp. 233-244.<https://doi.org/10.15407/lha.2018.02.233>.
11. Liu Pingana, Bogdan Shepetruk, Igor Nesteruk. Stability of slender axisymmetric ventilated cavities closing on cylindrical hulls // Chinese Journal of Physics. – 2019. – V.61. – P. 29-37.<https://doi.org/10.1016/j.cjph.2019.08.008>.

# NEURAL NETWORK APPROACH OVERVIEW FOR STOCK MARKET FORECASTING

*Denis Rachko, Natalia Huk*

*Oles Honchar Dnipro National University*

The task of predicting the complex dynamic systems behavior in the economy is difficult to formalize. Predicting the behavior of stock markets should rely on identifying hidden patterns in existing data. Nowadays, the use of neural networks for analyzing market information is difficult to overestimate, since a neural network can serve as a decision support system for an employee in the financial industry.

The classification problem of the stock market behavior based on the data of technical analysis indicators using neural networks will be considered.

The first stage of the current task investigation is database formation. As a neural network input, technical analysis suggests dozens of indicators and lots of them should be used in conjunction with to make a decision about the current state of the observed object and its future behavior. For a start, it is worth considering some widely used indicators, a combination of which can describe current time series state in the most realistic way. Let's consider next indicators:

- RSI (Relative Strength Index)
- SMA (Simple Moving Average)
- SD (Standard Deviation).

RSI is a momentum indicator, that determines the rate by which the market is changing for a specified time period and can be calculated as:

$$RSI = \frac{\text{Average Gain}}{\text{Average Loss}}, \quad RSI = 100 - \frac{100}{1 + RS},$$

SMA is a trend following indicator, which describes average asset price during some period of time:

$$SMA_n = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{n},$$

where  $A_i$  – average in period  $i$ ,  $n$  – number of time periods in certain window of observations.

SD measures the volatility of stocks and can be represented:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^m (P_i - SMA_{m-k})^2}{m - k}}$$

where  $P_i$  – close price for period  $i$ ,  $SMA_{m-k}$  – simple moving average for  $m$ -th time period.

Stock maximal and minimal prices, open and close prices for a period of time should be included in the input dataset as SMA is included. The neural network output is described by three binaries– should trader get into the market to:

- open a selling position
- open a buying position
- just wait for the next period of time.

The second stage is the formation of neural networks with different architectures. At the start point of problem-solving, a multilayer perceptron can be considered. There are several hidden layers is enough, because too many layers can lead to such undesirable consequences as time-consuming training, high sensitivity to any perturbation and etc. The sigmoid function can be considered an activation function. Neural network biases  $b_i$  can be assigned to zero. To avoid the vanishing or exploding gradients problem, weights  $w(i, j)^l$  for each layer with number  $l$ , which contains  $n^l$  neurons, should be initialized as random small numbers around zero, i.e. Xavier initialization:

$$w_{i,j}^l \sim N\left(0, \frac{1}{n^l}\right).$$

The third stage is neural networks training and optimal neural network choosing. Optimal neural network produces outputs with minimal error.

And the last stage – adaptive forecasting and decision making.

Nowadays, there are many time series forecasting instruments invented, but neural network approach trend is growing up. The usage of neural networks for the analysis of financial information is an alternative (or addition) to traditional research methods, such as statistical analysis, analysis of fundamental indicators. The input data may include not only technical indicators of a certain time series, but also information about the behavior of other market instruments. Further investigation will be concentrated on implementation of concept, finding optimal neural network architecture, it's parameters, choosing optimal technical indicators combinations, optimization of data preprocessing.

## REFERENCES

1. Robert W. Colby, The Encyclopedia of Technical Market Indicators. – McGraw-Hill Education; 2nd Edition, 2002.
2. Jack D. Schwager, Technical Analysis. – John Wiley and Sons, Inc., 1996.
3. Tymoshchuk P.V. Artifical Neural Networks, Lviv, 2011.

## **Математична модель розкриття статичної невизначеності**

*Ripeцький Є.Й., Ripeцький Р.Й., Коробков О.Ю.*

*roman20160616@gmail.com*

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу*

Трубопроводи - особливий вид транспортних систем, що проявляється у поєднання в одній конструкції несучої частини та транспортного шляху. Це дозволяє здійснювати транспортування продукту по трубопроводам у вигляді непереривного процесу. Як правило, трубопроводи пролягають під землею, але для подолання природних перешкод їх виводять на поверхню землі. В цьому випадку використовують конструкції різноманітних надземних переходів. Конструктивно це виглядає наступним чином: трубопровід, перебуваючи на опорах, утворює прольотну конструкцію. Спроби збільшити прольотну відстань між опорами призвела до появи оригінальної конструкції у вигляді висячого трубопроводу, в якій трубопровід утримується додатковою системою підвісних канатів.

Об'єктом дослідження є газопровід Угерсько - Івано-Франківськ, на ділянці надземного переходу через р. Свіча. На цій ділянці газопровід підвищений у повітрі до системи канатів. Одинацятъ утримуючих канатів рівномірно розміщені на довжині прольоту 130 м.

Ділянки надземних переходів є потенційно небезпечними, так як до дії природних факторів відкритого середовища додається навантаження від зовнішніх силових факторів. Такі трубопроводи однозначно є статично невизначені. Тому розрахунок НДС трубопроводу потребує у більшості випадків розкриття статичної невизначеності.

Метою роботи є аналіз методичних підходів до розкриття статично-невизначених систем прольотних конструкцій та їх адаптація до розрахунку висячих газопроводів.

Розрахункова схема висячого газопроводу зведена до балки на двох опорах з рівномірно-розділеним навантаженням, до якої прикладені з певним інтервалом зосереджені сили від підвісної канатної системи. В результаті отримано статично-визначену прольотну конструкцію.

Зведення схеми розміщення трубопроводу до прольотної конструкції дозволяє провести аналогію з іншими галузями, зокрема поздовжніми лонжеронами рамних несучих систем в мобільних машинах.

Основна складність розрахунку несучих рамних систем є їх статична невизначеність. Рамні несучі системи мають 6-10 разів ступінь статичної невизначеності. Для їх розкриття дослідники пропонують використовувати принцип мінімуму потенціальної енергії деформації [1].

Традиційним підходом є отримання необхідної кількості додаткових рівнянь з невідомими внутрішніми силовими факторами. Отримані рівняння встановлюють зв'язок між зовнішнім навантаженням, яке пере-

важко відоме за експериментальними даними, та внутрішніми силовими факторами елементів несучої системи.

Іншим підходом використання методу є формування функціоналу потенціальної енергії, у вираз якого входить у тому числі всі невідомі силові фактори. Далі, в межах факторного простору за ітераційним циклом ведеться пошук невідомих силових факторів за критерієм мінімуму потенціальної енергії деформації. Знайдений точці мінімуму функціоналу буде відповідати набір внутрішніх силових факторів.

Можливість використання функціонала потенціальної енергії для розкриття статичної невизначеності було показано на прикладі двох поздовжніх елементів лонжерона рамної конструкції. Пошук точки мінімуму здійснювався градієнтним методом, який засвідчив свою стійкість до наближення з кожним кроком ітерації.

Таким чином, алгоритм розкриття статичної невизначеності поздовжніх лонжеронів рамних конструкцій здійснюється за схемою зворотного зв'язку.

Ідея використання алгоритму зі зворотнім зв'язком для мінімізації функціоналу при розкритті статичної невизначеності може бути корисна для розрахунку напружене-деформованого стану висячих газопроводів. Методологія побудови структурної схеми алгоритму пошуку з наявним зворотнім зв'язком дозволяє створити аналогічні методи знаходження силових факторів для розкриття статично-невизначеної системи газопроводів.

Однак, в даному випадку мінімізація виразу потенціальної енергії не може бути проведена у зв'язку із неможливістю відтворити зворотній зв'язок, так як газопровід складається із одного несучого елемента.

Натомість газопроводи можуть мати досить важливу інформацію. Деформаційні процеси трубопроводів відрізняються від лонжеронів рамних конструкцій мобільних машин. Так, максимальна величина прогину трубопроводу на середині прольоту становить 0,25-0,30 м. Тобто, такі деформації видно візуально, вони можуть бути виміряні з відносно малою похибкою. Для таких вимірювань використовують різноманітні геодезичні методи: тахеометрична зйомка, нівелювання та ін. [2].

Така інформація є корисною для складання системи рівнянь канатної підвіски за умови її рівноваги. Якщо кількість утримуючих канатів становить  $n$ , то тоді рівнянь рівноваги можна скласти  $n - 1$ . Розв'язком системи рівнянь рівноваги канатної підвіски вважатимемо аналітичні вирази зусиль в утримуючих канатах  $P_i$  через одну невідому  $T_1$  силу натягу основного канату в точці її кріплення до опори. Тобто матиме ряд залежностей типу  $P_i = f(T_1)$ . Це в свою чергу означатиме, що замість  $n$  невідомих матиме всього лише одну невідому, а решта зусиль стають її похідними функціями.

Таким чином, висячий газопровід перетворюється з  $n$ -статично невизначеної системи в один раз статично-невизначену. Розкриття статичної невизначеності висячого газопроводу значно спрощується: замість пошуку  $n$  невідомих факторів потрібно шукати всього лише один.

Зворотній зв'язок досягається використанням критерія мінімізації середньо-квадратичних відхилень між експериментальними даними  $\Delta_i$  і теоретичним набором  $f_i$ , які підраховані шляхом варіювання параметра  $T_1$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i - \Delta_i)^2} \rightarrow \min . \quad (1)$$

За процедурою пошуку, згідно з (1), встановлюється значення параметра  $T_1$ , а також всі зусилля в утримуючих канатах. Це означає, що статична невизначеність висячого газопроводу розкрита, що дозволяє перейти до аналізу його напруженено-деформованого стану.

1. Рибак Т.І. Пошукове конструювання на базі оптимізації ресурсу мобільних сільськогосподарських машин. – Тернопіль: Збруч, 2002. – 332 с.
2. Тревого І.С., Ільків Є.Ю., Кухтар Д.В. Геодезичний контроль деформацій споруд магістральних газопроводів: монографія. – Івано-Франківськ: ІФН-ТУНГ, 2022. – 351 с.
3. Ripetskyi E., Ripetskyi R., Pidgurskyi M., Pidgurskyi I., Korobkov O. Adaptation of Energy Methods to Automated Calculation of Mobile Machines Frame Constructions // Physics and Chemistry of Solid State. – 2021. – Vol. 22, № 2. – C. 292-299.

# Text similarity detection by means of $n$ -gram hashing

*Maksym Sarana*

[m.sarana@ukma.edu.ua](mailto:m.sarana@ukma.edu.ua)

*National University of Kyiv-Mohyla Academy*

Recent progress of computing technologies enable development of more sophisticated applications for natural language processing, in turn it requires improvement of algorithms and machine learning methods. One of the most common arising tasks are representation learning and comparison methods. Most of them are based on counting and cataloguing  $n$ -grams in streams of symbols. One of the fastest method of implementing such operations is by means of hash tables [1].

Given a sequence of symbols  $S = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_{N+(n-1)})$ , an  $n$ -gram of the sequence is an  $n$ -long subsequence of consecutive symbols. The  $i$ -th  $n$ -gram of  $S$  is the sequence  $(s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+n-1})$ . Note that there are  $N$  such  $n$ -grams in the sequence  $S$ .

The literature of hash functions and collision resolution schemes is extensive. A detailed analysis and an overview of early activity can be found in the classic work by Knuth [2].

The crucial point of the cross-validation method, that is widely used for machine learning models evaluation, is quality of the validation data set used, that must include previously unseen data only. An accidental data leak between the train and validation data sets may significantly corrupt results of the model evaluation. In this work we are considering application of hashed  $n$ -grams on the data leak search task for the textual data.

The dataset we use includes 4 groups of English text pairs, see Table 1.

Category	Ground truth	AVG #words	Number of pairs
slightly edited texts	same	785	100
random subsets (20-80%)	same	584	100
completely different texts	different	776	100
different parts of the same text	different	1146	100

Table 1: The groups of English text pairs in the dataset

## Approach 1. The RAW 3-grams

First, we checked if it is possible to differentiate similar texts with sets of the unique 3-grams.

$$score = \frac{|G_1 \cap G_2|}{\min(|G_1|, |G_2|)},$$

where  $G_1$  and  $G_2$  — sets of unique 3-grams of the first and second texts respectively.

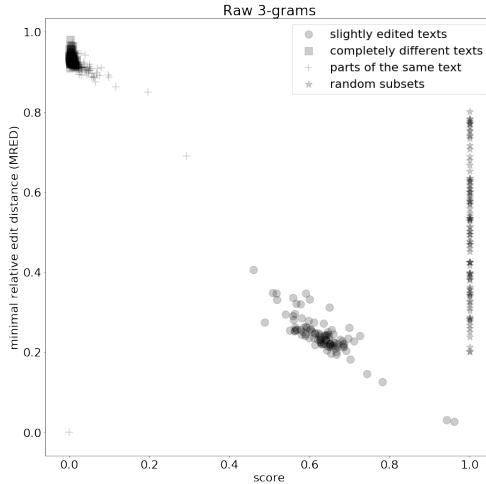


Figure 1: Scatter plot of score vs. MRED for raw trigrams

The scatter plot in Figure 1 compares the score with the minimal relative edit distance ( $MRED$ ) between the texts:

$$MRED = \frac{Levenshtein(W_1, W_2)}{\min(|W_1|, |W_2|)},$$

where  $W_1$  and  $W_2$  are word sequences from the first and second texts respectively.

## Approach 2. Use hashing

The one of widely used methods to compress arbitrary values to a fixed range of values is hashing. So, instead of the set of 3-grams we can operate with a set of their hashes. Since we are going to much narrower range of hashes than the Python hash function (SipHash) returns, we introduce hash size  $M$  as a hyperparameter of the algorithm, so that the 3-gram hash may be easily bounded by remainder of division on  $M$ :

$$h(g) = SipHash(g) \mod M,$$

where  $g$  is a 3-gram.

Consider an integer array of size  $M$ , where each element with index  $i$  includes number of unique hashed 3-grams with the hash  $i$  (i.e. number of

hash collisions), but not more the maximal integer value for the given data type. The hash score in this case is

$$score = \frac{\sum_{i=1}^M \min(H_1^{(i)}, H_2^{(i)})}{\min(\sum_{j=1}^M H_1^{(j)}, \sum_{l=1}^M H_2^{(l)})},$$

where  $H_1$  and  $H_2$  are arrays with the number of collisions for the first and second texts respectively. The experiment has shown that perfect differentiation of the similar texts is possible if we use a *uint8* array of size  $M = 2^{12}$ , which takes 4096 bytes of memory.

### Approach 3. Use boolean arrays

In this approach we just decreased the data type size of the array from *uint8* to *boolean*. So that, the  $i$ -th element of the array is *true* iff at least one 3-gram from the text has the hash value  $i$ . We can easily rewrite the *score* equation with the element wise *and* operation:

$$score = \frac{\sum_{i=1}^M [H_1^{(i)} \wedge H_2^{(i)}]}{\min(\sum_{j=1}^M [H_1^{(j)}], \sum_{l=1}^M [H_2^{(l)}])}.$$

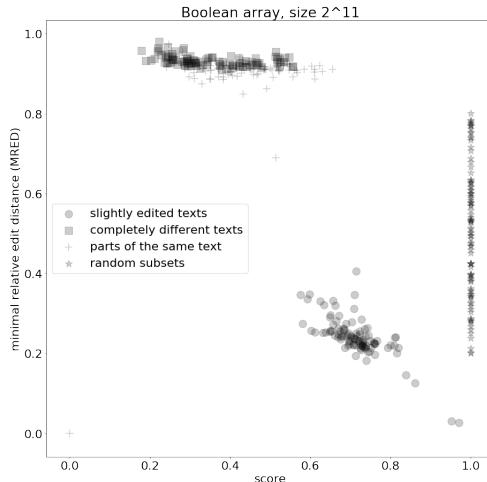


Figure 2: Scatter plot of score vs. MRED for hashed 3-grams and boolean array of size  $2^{12}$ .

## Results and conclusions

The results are present in the Table 2. The best threshold was chosen to maximize the F1-score.

Approach	Array type	Size M	Best threshold	F1-score	Memory
The raw 3-grams	-	-	0.459	1.0	unlimited
Hashing with a collision number	uint8	$2^{11}$	0.538	0.998	2048 bytes
	uint8	$2^{12}$	0.518	1.0	4096 bytes
Use a boolean array	boolean	$2^{11}$	0.575	0.980	256 bytes
	boolean	$2^{12}$	0.531	1.0	512 bytes

Table 2: Comparison of results of the approaches

We have found, that even 256-byte boolean array of size  $2^{11}$  is able to store enough hashed 3-gram information for near-ideal similarity differentiation with F1-score 0.98.

Ground truth	Data category	Predicted	
		different	same
different	completely different texts	100	0
	parts of the same text	92	8
same	random subsets	0	100
	slightly edited texts	0	100

Table 3: Confusion matrix for text similarity differentiation

The confusion matrix is presented in Table 3. The few available errors are false positive, what is acceptable for the data leak detection task.

1. Jonathan D.C. Recursive hashing functions for n-grams // ACM Transactions on Information Systems. – 1997. – Vol. 15, Is. 3, – Pp. 291–320. <https://doi.org/10.1145/256163.256168>
2. Knuth D.E. The Art of Computer Programming. Vol. 3, Sorting and Searching. – Addison-Wesley, Reading, Mass. – 1973.

# Залежність граничних станів динамічних систем конфлікту від вибору вектора взаємодії

Оксана Сатур

oksana@satur.in.ua

Інститут математики НАН України

Розглянуто динамічні системи конфлікту в дискретному часі в термінах двох або більше стохастичних (нормованих на одиницю) векторів  $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$ , залежних від часу. Еволюція в часі задається відображенням, яке позначається символом  $*$  і діє у просторі  $\mathbb{R}_+^n$ . Відображення  $*$  генерує багатокомпонентну динамічну систему в дискретному часі з траекторіями:

$$\{\mathbf{p}_i^t\}_{i=1}^m \xrightarrow{*} \{\mathbf{p}_i^{t+1}\}_{i=1}^m, \quad t = 0, 1, \dots \quad (1)$$

У загальному випадку координати векторів  $\mathbf{p}_i^{t+1}$  визначаються ітеративно за координатами попередніх векторів згідно з системою різницевих рівнянь:

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t} (p_{ij}^t (\theta^t + 1) + \alpha \tau_j^t), \quad (2)$$

$$\alpha \in [-1; 1], \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 0, 1, \dots,$$

$$z^t = \theta^t + 1 + \alpha W^t, \quad W^t = \sum_j \tau_j^t$$

де  $\theta^t = \theta(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t)$  – деяка обмежена додатна функція, яка визначає вільну еволюцію системи. Нормувальний знаменник  $z^t$  забезпечує стохастичність векторів  $\mathbf{p}_i^{t+1}$ . Набір додатних функцій  $\tau_j^t$  (певним чином залежних від координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ) відповідає закону взаємодії. Значення цих функцій при кожному фіксованому  $t$  утворюють деякий нестохастичний вектор з невід'ємними координатами, який позначено символом  $\mathcal{T}^t = (\tau_j^t)_{j=1}^n$  і називаємо вектором взаємодії. Вектор  $\mathbf{w}^t = (w_j^t)_{j=1}^n$ , де  $w_j^t := \frac{\tau_j^t}{W^t}$ , є стохастичним аналогом вектора  $\mathcal{T}^t$ . Досліджено ряд моделей динамічних систем конфлікту, траекторії яких залежать від вигляду вектора  $\mathcal{T}^t$ , а також вивчено залежність поведінки системи від поведінки  $\mathcal{T}^t$  при  $t \rightarrow \infty$ .

В рівняннях (2) стала  $\alpha$  може набувати довільного значення, але при досить великих  $\alpha$  швидкість збіжності (чи розбіжності) системи буде досить великою при малих значення часу  $t$ . Така динаміка не відповідатиме динаміці реальних процесів, тому при побудові моделі було вибрано значення сталої  $\alpha$  з проміжку  $[-1; 1]$ . Згідно з наведеними рівняннями, у випадку  $\alpha \in (0; 1]$  відстань між векторами  $\mathbf{p}_i^t$  в  $l_1$ -нормі збігається до

нуля,

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{j=1}^n |p_{ij}^t - p_{kj}^t| \rightarrow 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, m,$$

тому відображення  $\ast$ , задане цими рівняннями, описує взаємодію притягання. При  $\alpha \in [-1; 0)$  будемо говорити про динамічну систему з взаємодією відштовхування. Зауважимо, що при  $\alpha = 0$  початковий стан  $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$  є нерухомим.

**Теорема 1.** *Нехай всі координати стохастичного вектора  $\mathbf{w}^t$  є монотонними (зростають або спадають незалежно одна від одної). Тоді існує граничний вектор  $\mathbf{w}^\infty$  і кожна траєкторія динамічної системи (1) з початковим станом  $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$  при  $\alpha = (0; 1]$  збігається до нерухомого граничного стану  $\{\mathbf{p}_i^\infty\}_{i=1}^m$*

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому всі граничні вектори  $\mathbf{p}_i^\infty$  мають одинакові координати

$$p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j^\infty}{W^\infty} \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

які співпадають з координатами вектора  $\mathbf{w}^\infty$ .

**Теорема 2.** *Нехай всі координати стохастичного вектора  $\mathbf{w}^t$  спадають. Тоді кожна траєкторія динамічної системи (1) з початковим станом  $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$  при  $\alpha = [-1; 0)$  збігається до нерухомого граничного стану  $\{\mathbf{p}_i^\infty\}_{i=1}^m$*

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому, якщо  $w_j^\infty < 0$  для всіх  $j = 1, \dots, n$ , то

$$p_{ij}^\infty = w_j^\infty \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

**Теорема 3.** *Нехай  $\tau_j^t = \min_i \{p_{ij}^t\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тоді кожна траєкторія динамічної системи (1) з початковим станом  $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$  при  $\alpha = [-1; 0)$  збігається до нерухомого граничного стану  $\{\mathbf{p}_i^\infty\}_{i=1}^m$*

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому, якщо  $\tau_j^{t=0} = p_{ij}^{t=0}$ , то

$$p_{ij}^\infty = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

**Теорема 4.** Нехай  $m = 2$ . Координати граничних векторів  $\mathbf{p}_1^\infty$  та  $\mathbf{p}_2^\infty$  кожної траєкторії динамічної системи (1) при  $\alpha \in [-1; 0)$ ,  $\tau_j = \min_i \{p_{ij}^t\}$  для всіх  $j = 1, \dots, n$  мають наступний явний опис. Якщо початкові вектори однакові,  $\mathbf{p}_1^t = \mathbf{p}_2^t$ , то їх граничні вектори будуть рівними,  $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty$ . Якщо  $\mathbf{p}_1^t \neq \mathbf{p}_2^t$ , то граничні вектори є ортогональними,  $\mathbf{p}_1^\infty \perp \mathbf{p}_2^\infty$ , причому

$$p_{1j}^\infty = \begin{cases} \frac{d_j}{D}, & \text{якщо } p_{1j} > p_{2j}, \\ 0, & \text{якщо } p_{1j} < p_{2j}, \end{cases} \quad p_{2j}^\infty = \begin{cases} \frac{d_j}{D}, & \text{якщо } p_{2j} > p_{1j}, \\ 0, & \text{якщо } p_{2j} < p_{1j}. \end{cases}$$

Нехай координати кожного вектора  $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$  змінюються згідно з рівняннями (2). Припустимо, що координати вектора взаємодії  $\tau_j^t = \tau_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , де  $\tau_j(t)$  – довільні додатні періодичні функції з сумірними періодами. Тоді за властивістю періодичних функцій  $W(t) \equiv W^t$ , координати  $w_j^t = w_j(t) = \frac{\tau_j(t)}{W(t)}$  стохастичного вектора  $\mathbf{w}^t$  будуть також періодичними з головним періодом, який позначимо через  $T$ . В такому випадку справедливо є наступна теорема:

**Теорема 5.** Припустимо, що головний період функції  $w_j(t)$  є додатнім цілим числом  $T > 1$ , а координати вектора  $\mathbf{w}^t$  не є константами. Тоді кожної траєкторії динамічної системи (1), заданої системою різницевих рівнянь (2), збігається до  $\omega$ -граничної множини  $\Gamma^\infty$ , яка є циклічною орбітою. Тобто, множина  $\Gamma^\infty$  є інваріантною відносно перетворення  $*$  та складається з  $T$  спорядкованих векторів  $\Gamma_l$ ,  $l = 1, \dots, T$

$$\Gamma_1 \xrightarrow{*} \Gamma_2 \xrightarrow{*} \Gamma_3 \xrightarrow{*} \cdots \xrightarrow{*} \Gamma_T \xrightarrow{*} \Gamma_1.$$

Границя множина  $\Gamma^\infty$  залежить від початкового вектора  $\mathbf{w}^{t=0}$ .

Нище буде наведено приклади, що демонструють наявність нетривіальної нелінійної динаміки. В кожному конкретному випадку визначення координат вектора  $\mathcal{T}^t$  поведінка системи істотно різна, значення координат та спосіб їхнього задання впливають на стійкість граничного стану системи.

Для довільного початкового стану  $\{\mathbf{p}_1^{t=0}, \mathbf{p}_2^{t=0}, \mathbf{p}_3^{t=0}\}$  задамо зміну координат вектора  $\mathcal{T}^t$  наступним чином: координати  $\tau_1(t)$  та  $\tau_2(t)$  визначаються як мінімальне значення відповідних координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ,  $i = 1, 2, 3$ , що забезпечує монотонність послідовностей координат  $\tau_1(t)$  та  $\tau_2(t)$  при зміні  $t$ ;  $\tau_3(t)$  визначається як деяка додатна періодична функція з головним періодом  $T$ . Завдяки закону динаміки (2) з  $\alpha = 1$  при  $t \rightarrow \infty$  отримуємо рівність  $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty = \mathbf{p}_3^\infty$ . При  $\tau_3(t) = \sin(\frac{\pi t}{16}) + 1$  з головним періодом  $T = 32$  значення всіх координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ,  $i = 1, 2, 3$  повторюються кожні 32 кроки часу, тобто поведінка системи буде циклічною;

якщо  $\tau_3(t) = \sin \pi t + 1$  з періодом  $T = 2$ , то  $\tau_3(t)$  набуває сталого значення, оскільки  $\sin \pi t + 1 = 1$  для довільного  $t = 0, 1, 2, \dots$  і це забезпечує нерухомість граничного стану.

Наступним прикладом розглянемо випадок, в якому  $\tau_1(t)$  визначається як мінімальне значення перших координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ,  $\tau_2(t) = \sin(\frac{\pi t}{16}) + 1$  визначаються як деяка додатна періодична функція з головним періодом  $T = 32$ , а  $\tau_3(t) = r \cdot \tau_3(t)(1 - \tau_3(t))$  змінюється за законом логістичного відображення. В такому випадку  $p_{i1}(t) = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Залежно від значення параметра  $r$  поведінка системи може бути циклічною або хаотичною. Так при  $r = 3.56$  існує цикл періоду  $T = 32$ , тобто значення координат  $p_{i2}(t)$  та  $p_{i3}(t)$  будуть повторюватися кожні 32 кроки часу. Динаміка проілюстрована на комп'ютерних прикладах демонструє, що при  $r = 4$  значення координат  $p_{i2}(t)$  та  $p_{i3}(t)$  змінюються хаотично.

Дослідження виконувалися в рамках проекту 0121U110543.

1. Satur O.R. Dependence of the behavior of the trajectories of dynamic conflict systems on the interaction vector // Nonlinear Oscillations. – 2022. – **25**, No. 1. – P. 72–88.
2. Satur O.R. Limit States of Multicomponent Discrete Dynamical Systems // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – Vol. 256. – P. 648–662.
3. Koshmanenko V., Kharchenko N. Fixed points of complex system with attarachtive interaction // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2017. – Vol. 23, No. 2. – P. 164–176.
4. Karataeva T.V., Koshmanenko V.D., Petrenko S.M. Explicitly Solvable Models of Redistribution of the Conflict Space // Journal of Mathematical Sciences. 2018. – Vol. 229. – P. 439–454.
5. Кошманенко В.Д. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – Київ: Наукова думка, 2016. – 287 с.

# Використання теорії $L_2(\Omega)$ процесів при моделюванні гауссового стаціонарного випадкового процесу з необмеженим спектром

Ганна Сливка-Тилищак, Антоніна Тегза

anna.slyvka@uzhnu.edu.ua, antonina.tegza@uzhnu.edu.ua

ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

Однією з актуальних задач теорії випадкових процесів є побудова математичної моделі, а також дослідження її загальних властивостей. На сьогоднішній день активно розроблюються загальні методи чисельного моделювання випадкових процесів, а також швидко зростає область застосування стохастичних моделей, зокрема в радіотехніці, електроніці, у актуарній математиці і т.д.

Дана робота присвячена подальшому розвитку теорії моделювання гауссовых стаціонарних випадкових процесів за методом, який запропонував і розвивав Ю.В.Козаченко [2]. У даній роботі розглянуто простір Орлича, що породжується функцією  $U(x) = |x|^2$ . Випадковий процес у цьому просторі називають  $L_2(\Omega)$ -процесом [1]. Використовуючи властивості цього процесу, побудовано модель гауссового стаціонарного процесу з заданими точністю і надійністю і для часткового випадку комп'ютерно змодельовано процес.

Розглянемо гауссовий стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес  $X(t)$  з коваріаційною функцією:

$$r(\tau) = EX(t + \tau)X(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t dF(\lambda),$$

де  $F(\lambda)$  – неперервна спектральна функція цього процесу.

Тоді випадковий процес має зображення

$$X(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_0^\infty \sin \lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де  $\eta_1(\lambda)$  та  $\eta_2(\lambda)$  такі незалежні центровані гауссові випадкові процеси, що  $E(\eta_i(\lambda_2) - \eta_i(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$  при  $\lambda_1 < \lambda_2$ ,  $i = 1, 2$ .

За модель процесу візьмемо випадковий процес

$$X_M(t) = \sum_{k=0}^M [\eta_{k1} \cos \zeta_k t + \eta_{k2} \sin \zeta_k t],$$

де де  $\eta_{l1}$ ,  $\eta_{m2}$ ,  $\zeta_k$  – незалежні при всіх  $l, m$  та  $k$  випадкові величини,  $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}\}$  – таке розбиття проміжку  $[0, +\infty)$ , що  $\lambda_0 = 0$ ,

$\lambda_k < \lambda_{k+1}$ ,  $\lambda_{M+1} = +\infty$ ,  $\eta_{k1}, \eta_{k2}$  – гауссові випадкові величини, такі що  $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$ ,  $E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$ ,  $\zeta_k$  – випадкові величини, що приймають значення на відрізках  $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ , та якщо  $b_k^2 > 0$ , то

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Якщо  $b_k^2 = 0$ , то  $\eta_{k1} = 0, \eta_{k2} = 0, \zeta_k = 0$  з ймовірністю одиниця.

**Теорема 1.** Якщо в моделі  $X_M(t)$  розбиття  $\Lambda$  таке, що виконуються нерівності:

$$\int_0^\infty \lambda^2 dF(\lambda) < \infty, \$$$

$$\sqrt{TL\varepsilon_0} + \sqrt{2}\varepsilon_0 \leq \frac{\delta}{3} \sqrt{\frac{2\beta}{3}},$$

$$\partial_e L = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} \left[ \left( \frac{\lambda_M}{M} \right)^2 (1 + \lambda_M T)^2 F(\lambda_M) + \int_{\lambda_M}^\infty (3u - \lambda_M)^2 dF(u) \right]^{\frac{1}{2}}, a$$

$\varepsilon_0 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} T \left[ \left( \frac{\lambda_M}{M} \right)^2 F(\lambda_M) + \int_{\lambda_M}^\infty (u - \lambda_M)^2 dF(u) \right]^{\frac{1}{2}}$ , то існує випадковий гауссів процес  $X(t)$  до якого дана модель  $X_M(t)$  буде наближатись з на- дійністю  $1 - \beta$ ,  $0 < \beta < 1$  та точністю  $\delta > 0$  в рівномірній метриці.

У роботі комп’ютерно змодельовано випадковий процес для одного з часткових випадків, використовуючи мову програмування Python.

1. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. (2000). Metric characterisation of random variables and random processes. – Amer. Math. Soc. Providence RI.– 2000. – 270 p.
2. Kozachenko Y., Pogorilyak O., Rozora I., Tegza A. Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability. – K.: ISTE Press Ltd, and Elsevier Ltd Oxford. – 2016. – 346 з.

## Теорія функцій та її застосування

Про один клас функцій,  
які зберігають хвости  $E$ -зображення чисел

Олександр Барановський<sup>2</sup>, Микола Працьовитий<sup>1,2</sup>

[baranovskyi@imath.kiev.ua](mailto:baranovskyi@imath.kiev.ua)

<sup>1</sup>Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

<sup>2</sup>Інститут математики Національної академії наук України

У доповіді на основі так званого  $E$ -зображення чисел з  $(0, 1]$  вводиться в розгляд нескінченна сім'я функцій, які мають властивість «зберігати хвости  $E$ -зображення чисел».

Як відомо [1], для будь-якого числа  $x \in (0, 1]$  існує єдина послідовність  $(q_n)$  натуральних чисел,  $q_{n+1} \geq q_n$ , що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_n + 1)} \equiv \Delta_{q_1 q_2 \dots q_n \dots}. \quad (1)$$

Ряд (1) називається *рядом Енгеля* і однозначно визначається неспадкоємною послідовністю натуральних чисел  $(q_n)$ . Його можна записати в іншому вигляді:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2 + g_1)(2 + g_1 + g_2) \dots (2 + g_1 + g_2 + \dots + g_n)} \equiv \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^E, \quad (2)$$

де  $q_1 - 1 = g_1$ ,  $q_{n+1} - q_n = g_{n+1} \in \mathbb{Z}_0 \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Ряд (2) називається *E-представленням*, а скорочений символічний запис  $\Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^E$  — *E-зображенням* числа  $x$ , при цьому  $g_n = g_n(x) — n$ -ою цифрою (символом) цього зображення.

**Означення 1.** Казатимемо, що функція  $f$ , яка визначена на  $(0, 1]$  і набуває значень з  $(0, 1]$ , зберігає хвости  $E$ -зображень чисел, якщо для будь-якого  $x \in (0, 1]$  існують натуральні числа  $k = k(x)$  і  $m = m(x)$  такі, що

$$g_{k+n}(x) = g_{m+n}(f(x)) \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

При вивченні розподілів випадкових величин, породжених дискретними розподілами цифр у їхньому зображенні, важливу роль відіграють хвостові множини (множини чисел, елементи яких мають однакові хвости зображень). У випадку дискретності розподілу його точковий спектр (множина атомів) є хвостовою множиною. Це має місце для випадкових величин з незалежними цифрами у їхньому  $s$ -ковому зображенні,  $Q$ -зображенінні [2], зображеннях, що ґрунтуються на розкладах чисел в елементарні ланцюгові дроби, додатні ряди Енгеля, Сильвестера, Люрота [3], а також знакопочережні ряди Остроградського 1-го [4, 5] і 2-го виду, Люрота [6] тощо.

Тому природно виникає інтерес до неперервних функцій, які зберігають хвости зображення чисел.

У подальшому потрібні такі допоміжні функції:

1. функція «склеювання цифр»

$$v_1(x) = \Delta_{[g_1(x)+g_2(x)]g_3(x)\dots g_n(x)}^E\dots$$

$$\text{і } v_n(x) = v_1^n(x),$$

2. функція зсуву цифр

$$\omega(x) = \Delta_{g_2(x)g_3(x)\dots g_n(x)}^E\dots,$$

3. функція «збільшення першої цифри»

$$d_i(x) = \Delta_{[i+g_1(x)]g_2(x)g_3(x)\dots g_n(x)}^E\dots,$$

де  $i$  — фіксоване ціле невід'ємне число.

**Теорема 1.** *Нехай  $i$  — фіксований натуральний параметр. Перетворення  $(0, 1]$ , означене рівністю*

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} d_i(x), & \text{якщо } 0 < x \leq x_1 \equiv \Delta_{0(i)}^E, \\ \omega(x) = v_1(x), & \text{якщо } x_1 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

*зберігає хвости  $E$ -зображення чисел.*

1. Engel F. Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen // Verh. d. 52. Versamml. dtsch. Philologen u. Schulmänner Marburg 1913. — Leipzig: Teubner, 1914. — S. 190–191.
2. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
3. Zhukharyeva Yu. I., Pratsiovytyi M. V. Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra Discrete Math. — 2012. — Vol. 14, Is. 1. — Pp. 145–160.
4. Працьовитий М. В., Бараповський О. М. Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2004. — № 70. — С. 131–143.
5. Бараповський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування. — Київ: Наук. думка, 2013. — 288 с.
6. Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu. Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements // Random Oper. Stoch. Equ. — 2013. — Vol. 21, Is. 4. — Pp. 385–401.

**Функції з локально складними диференціальними  
властивостями, пов'язані з нескінченносимвольними  
зображеннями чисел**

*Надія Біловицька, Ірина Продан*

*n.bilovytska@gmail.com, samsungbrain2016@gmail.com*

*НПУ імені М.П. Драгоманова*

Розглядається система зображення дійсних чисел проміжка  $(0; 1]$  з нескінченим алфавітом (множиною натуральних чисел), що є перекодуванням двосимвольного поліосновного  $Q_2$ -зображення чисел з алфавітом  $A = \{0; 1\}$ , визначеного параметром  $q_0 \in (0; 1)$  [3]. Нагадаємо її зміст [1].

**Теорема 1.** Якщо  $(0; 1) \ni q_0$  — фіксоване дійсне число, то для будь-якого  $x \in (0; 1]$  існує єдина послідовність натуральних чисел  $(a_n)$  така, що

$$x = q_0^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - q_0)^n q_0^{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} - n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^{\infty}}. \quad (1)$$

Розклад числа  $x$  в ряд (1) називається  $q_0^{\infty}$ -представленням, а скоро-ченний (формальний) запис  $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^{\infty}}$  — його  $q_0^{\infty}$ -зображенням.

Зв'язок між  $q_0^{\infty}$ -зображенням і  $Q_2$ -зображенням з параметром  $q_0$  встановлюється відповідністю:

$$\underbrace{\Delta_{0 \dots 0}_{a_1-1}}_{a_2-1} \underbrace{1}_{a_3-1} \dots \underbrace{0}_{a_n-1} \underbrace{1}_{a_1-1} \dots \underbrace{0}_{a_2-1} \dots \underbrace{1}_{a_3-1} \dots \underbrace{0}_{a_n-1} \dots = x = \Delta_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}^{q_0^{\infty}}.$$

1. Для наперед заданої послідовності невід'ємних цілих чисел  $(k_n)$  розглядається клас функцій  $f_{\bar{k}_n}$ , означених на  $(0; 1]$  рівністю

$$f_{\bar{k}_n}(x = \Delta_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}^{q_0^{\infty}}) = \Delta_{[k_1+a_1][k_2+a_2][k_3+a_3]\dots[k_n+a_n]\dots}^{q_0^{\infty}}. \quad (2)$$

Очевидно, що функція  $f_{\bar{k}_n}$  є коректно означеню і неперервною на  $(0; 1]$ .

Зауважимо, що оскільки множина послідовностей  $(k_n)$  є континуальнюю, то клас функцій, означених таким чином є також континуальним.

Для функцій  $f_{\bar{k}_n}$  мають місце такі функціональні співвідношення:

$$f_{\bar{k}_n}(\Delta_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}^{q_0^{\infty}}) = q_0^{k_1} \Delta_{a_1 [k_2+a_2][k_3+a_3]\dots[k_n+a_n]\dots}^{q_0^{\infty}},$$

$$f_{\bar{k}_n}(x = \Delta_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}^{q_0^{\infty}}) = q_0^{k_1} \delta_{a_1(x)}(\Delta_{[k_2+a_2][k_3+a_3]\dots[k_n+a_n]\dots}^{q_0^{\infty}}), \quad (3)$$

де  $\delta_{a_1(x)}(\Delta_{a_2 a_3 \dots a_n \dots}^{q_0^{\infty}}) = \Delta_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}^{q_0^{\infty}}$  — оператор припису цифр. Оскільки для функції  $f_{\bar{k}_n}$  має місце рівність (3), то графік функції має фрактальні властивості, зокрема є автомодельною множиною.

**Лема 1.** Функція  $f_{\bar{k}_n}$  є монотонно зростаючою для на  $(0; 1]$  для довільної послідовності  $(k_n)$ , причому  $f_{\bar{k}_n}(1) = q_0^{k_1}$ .

**Лема 2.** Якщо для членів послідовності  $(k_n)$  для довільного  $n \in N$  мають місце рівності  $k_1 = k$ ,  $k_{n+1} = 0$ , то функція  $f_{\bar{k}_n}$  є лінійною функцією  $f_{\bar{k}_n}(x) = q_0^k x$ .

**Теорема 2.** Якщо послідовність  $(k_n)$  є сталою, тобто  $k_n = k$  для довільного  $n \in N$ , то функція  $f_{\bar{k}_n}$  є сингулярною (функцією, відмінною від константи, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розмінні міри Лебега).

**Теорема 3.** Якщо в послідовності  $(k_n)$  існує нескінченна кількість елементів, відмінних від нуля, то функція  $f_{\bar{k}_n}$  є сингулярною.

2. Розглядається функція, означена на  $(0; 1]$  рівністю

$$f(x = \Delta_{a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}) = \Delta_{b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots}^{q_0^\infty},$$

де

$$b_1 = 1, b_n = \varphi(a_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_n \neq 1, \\ n, & \text{якщо } a_n = 1, n = 2, 3, \dots. \end{cases}$$

**Теорема 4.** Множиною значень функції  $f$  є множина канторівського типу (ніде не щільна множина нульової міри Лебега).

**Теорема 5.** Функція  $f$  є ніде не монотонною. Множина її рівня  $y = \Delta_{b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots}^{q_0^\infty}$ ,  $b_n \in \{1, n\}$  є

- 1) зліченною, якщо в зображені числа  $y$  кількість одиниць скінчена;
- 2) континуальною, якщо кількість одиниць у зображені  $y$  нескінчена.

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, топологометричних і фрактальних, а також диференціальних властивостей функцій  $f_{\bar{k}_n}$  і  $f$ .

1. Гончаренко Я.В., Лисенко І.М. Геометрія нескінченно-символьного  $q_0^\infty$ -зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 15ю — С. 100–118.
2. Працьовитий М. В. Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14. — С. 189–216.
3. Працевитий Н. В. Случайные величины с независимыми  $Q_2$ -символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Київ: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 92–102.

**Класифікація зліченних графів Кокстера відносно індексу у проміжку  $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$**

*Марія Когут, Лариса Тимошкевич*

*kgt.maria@gmail.com, l.tymoshkevych@ukma.edu.ua*

*Національний університет «Києво-Могилянська академія»*

Існує декілька підходів для розширення добре розвиненої спектральної теорії графів зі скінченного випадку на зліченний, у роботі прийнято підхід В. Mohar (див. [1]). Індекси графів мають широке коло застосувань, зокрема, у теорії представлень, де розглядаються умови існування наборів підпросторів гільбертового простору, зв'язаних певними умовами (див. [2]). Обмеження на індекс графа впливають на саму структуру графа, в багатьох випадках можна навіть навести повний перелік можливих графів з такими обмеженнями (див. [3, 4]).

Досліджена класифікація різних типів зліченних графів Кокстера зі значеннями індексу у проміжку  $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ .

Під терміном граф розуміємо впорядковану пару  $G = (V, E)$ , в якій  $V$  – деяка непорожня множина (множина вершин),  $E$  – множина, яка складається з невпорядкованих пар різних елементів  $V$  (множина ребер).

Граф Кокстера  $\mathbf{G}$  – це пара  $(G, f)$ , де  $G$  – граф,  $f$  – відображення множини ребер графа  $G$  у множину, що складається з натуральних чисел, більших за 2, та символу  $\infty$ . Будемо казати, що  $G$  – граф, підпорядкований графу Кокстера  $\mathbf{G} = (G, f)$ .

Для простоти сприймання граф Кокстера представляють схемою, що зображує підпорядкований граф, приписуючи над кожним ребром  $e$  число  $f(e)$ , яке називатимемо „позначкою“ на ребрі. Прийнято опускати приписування на ребрах числа 3. Такі ребра називатимемо непозначеними, а ребра з позначкою, що більша або дорівнює 4, – позначеними.

Злічений граф Кокстера – граф Кокстера зі зліченою множиною вершин. Для зручності будемо позначати множину всіх скінченних підграфів графа  $\mathbf{G}$  через  $Fin(\mathbf{G})$ .

Нагадаємо, що спектр квадратної матриці порядку  $n$  – це множина її власних значень. Оскільки матриця суміжності  $A(\mathbf{G})$  скінченного графа  $\mathbf{G}$  симетрична, то її спектр дійсний. Позначимо точки спектра (власні значення матриці) через  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) та розташуємо їх у незростаючому порядку  $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Індексом графа називають найбільше власне значення  $\lambda_{\mathbf{G}}$ . Спектр матриці суміжності будемо називати спектром графа  $\mathbf{G}$  і позначати  $\sigma(\mathbf{G})$ . Спектр графа не залежить від способу нумерації його вершин та є інваріантом графа. Позначимо характеристичний многочлен матриці суміжності через  $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$ .

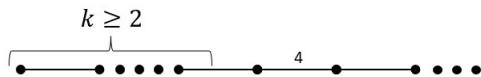
Індексом зліченого графа називаємо додатне число або символ  $\infty$ ,

визначені рівністю

$$ind \mathbf{G} = \sup_{\Gamma \in Fin(\mathbf{G})} ind \Gamma$$

**Теорема 1.** Нехай  $\mathbf{G}$  – зліченний зв’язний граф Кокстера з підпорядкованим графом  $A_\infty$ , то

- Якщо  $ind \mathbf{G} \in \left( \sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$ , то  $\mathbf{G}$  – граф виду:



- Якщо  $ind \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ , то  $\mathbf{G}$  – граф:

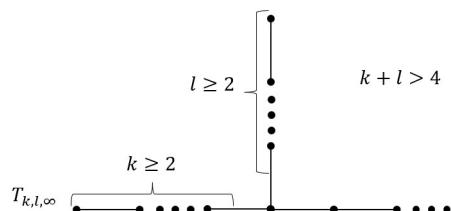


**Теорема 2.** Нехай  $\mathbf{G}$  – зліченний зв’язний граф Кокстера з підпорядкованим графом  $A_\mathbb{Z}$  та його індекс належить проміжку  $\left( \sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right]$ , тоді  $ind \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$  та  $\mathbf{G}$  – це граф:

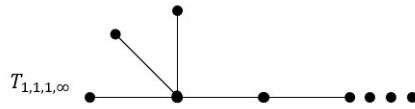
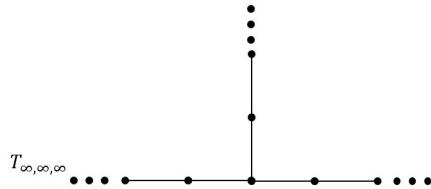


**Теорема 3.** Нехай  $\mathbf{G}$  – зліченний зв’язний граф Кокстера з підпорядкованими незваженими  $T$ -графами, то

- Якщо  $ind \mathbf{G} \in \left( \sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$ , то  $\mathbf{G}$  – граф виду:

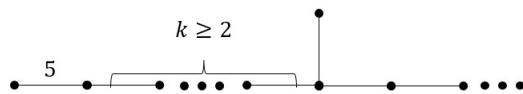
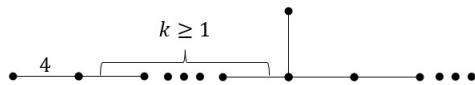


- Якщо  $ind \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ , то  $\mathbf{G}$  – граф виду:



**Теорема 4.** Нехай  $\mathbf{G}$  – зліченний зв’язний граф Кокстера з підпорядкованими графами  $T_{1,k,\infty}$  з позначкою з краю, тоді

1. Якщо  $\text{ind } \mathbf{G} \in \left( \sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$ , то  $\mathbf{G}$  – граф виду:



2. Якщо  $\text{ind } \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ , то  $\mathbf{G}$  – граф:



Також наведемо твердження з властивостями зліченного графа Кокстера, у яких індекс належить проміжку проміжку  $\left( \sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right]$ .

**Твердження 1.** Нехай  $\mathbf{G}$  – зліченний зв’язний граф Кокстера та  $\text{ind } \mathbf{G} \in \left( \sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right]$ , тоді  $\mathbf{G}$  має наступні властивості:

1. Може мати позначки лише строго менші за 7;

2. Може мати позначки 5 або 6 лише на ребрах, інцидентних висячій вершині;
3. Може мати щонайбільше одну позначку (більшу за 3);
4. Може мати лише вершини степеня строго меншого за 5;
5. Серед ребер, інцидентних вершині степеня 4, може бути лише одне, що інцидентне не висячій вершині;
6. На ребрі, яке інцидентне вершині степеня 3, може бути лише позначка 4;
7. Якщо граф має вершину степеня 3, то може мати позначки лише строго менші за 6;
8. Не містить жодного цикла.

Одержані результати є продовженням досліджень у роботах [4, 5].

1. Mohar B., Woess W. A survey on spectra of infinite. Bull. London Math. Soc. – 1989. – vol. 21. – P. 209-234.
2. Кириченко А. А., Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М. Структура систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченними деревами Кокстера, Український математичний журнал. – 2014. – Том. 66, №9. – С.1185-1192.
3. Tymoshkevych L. M. On spectral theory of Coxeter graphs and its applications, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки. – 2014. – випуск №1. – С. 27-33.
4. Коротков А.С., Тимошкевич Л.М. Аналог теореми Сміта для зліченних графів Кокстера, Доповіді Національної академії наук України. – 2013. – №12. – С. 19-24.
5. Тимошкевич Л.М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінчених графів і зліченних графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ, 2015. – 160 с.

# The special inverse problem on the Čech-Stone compactification

kozlovskyi.mykola@chnu.edu.ua

Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine

The inverse problem of separately continuous mappings theory is a problem with the construction of a separately continuous function  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  with a given discontinuity points set of special rectangular type  $A \times B$ , where  $A \subseteq X$  and  $B \subseteq Y$ . This problem was investigated in [1]-[3]. The following question naturally arises with connection to positive solutions of the special inverse problem.

**Question.** Does there exist a separately continuous function  $f : \beta\omega \times \beta\omega \rightarrow [0, 1]$  such that the discontinuity points set of the function  $f$  is equal to  $\omega^* \times \omega^*$ ?

**Proposition 1.** The following conditions are equivalent:

1. there exists a separately continuous function  $f : \beta\omega \times \beta\omega \rightarrow [0, 1]$  with  $D(f) = \omega^* \times \omega^*$ ;
2. there exists a separately continuous function  $g : \beta\omega \times \beta\omega \rightarrow [0, 1]$  such that  $D(f) = \omega^* \times \omega^*$ ,  $g(\omega^* \times \omega^*) \subseteq (0, \frac{1}{4}]$  and  $\omega_g(x, y) \geq \frac{1}{2}$  for every point  $(x, y) \in \omega^* \times \omega^*$ .

**Proposition 2.** Let  $A, B \subseteq \omega$  be infinite sets and  $f : \beta\omega \times \beta\omega \rightarrow [0, 1]$  be a separately continuous function such that

$$f(\omega^* \times \omega^*) \subseteq [0, \frac{1}{4}]$$

. Then there exists  $n \in A$  such that the set

$$B_n = \left\{ m \in B : f(n, m) \leq \frac{1}{3} \right\}$$

is infinite.

**Proposition 3.** Let  $f : \beta\omega \times \beta\omega \rightarrow [0, 1]$  be a separately continuous function with  $f(\omega^* \times \omega^*) \subseteq [0, \frac{1}{4}]$ . Then there exist infinite sets  $A, B \subseteq \omega$  such that  $f(A \times B) \subseteq [0, \frac{1}{3}]$ .

1. Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V., Sobchuk O. *Investigations on separately continuous mapppings*, Proceedings of International conference dedicated to Hans Hahn, Chernitsi (1995), 192-246 (in Ukrainian).
2. Mykhaylyuk V.V. *The set of discontinuity points of separately continuous functions on the products of compact spaces* Methods of Func. Anal. and Top. **13** (3) (2007) 284-295.
3. Kozlovskyi M.R., Mykhaylyuk V.V *The set of discontinuity points of separately continuous functions on the products of compact spaces*, European Journal of Mathematics (2022) 8 (Suppl 1):S330-S345

# Про одне узагальнення критерію Пятецького-Шапіро

Ростислав Кривошия

mostik19@gmail.com

Інститут математики Національної академії наук України

Послідовність  $(x_n)$  називається розподіленою за функцією розподілу  $G(x)$ , якщо для довільних дійсних  $1 \geq b > a \geq 0$ :

$$\frac{N_n([a; b])}{n} \rightarrow G(b) - G(a) \quad (n \rightarrow \infty),$$

де  $N_n([a; b])$  — кількість чисел серед  $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}$ , які належать проміжку  $[a; b]$ .

Нехай  $s > 2, s \in N, (q_{0n}; q_{1n}; \dots; q_{(s-1)n})$  — послідовність стохастичних векторів з строго додатними координатами, причому

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{q_{0n}; q_{1n} \dots; q_{(s-1)n}\} = 0,$$

тоді відомо [2], що для довільного  $x \in [0; 1]$  існує послідовність цифр  $\alpha_n \in \{0; \dots; s-1\}$ , така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \beta_{\alpha_2 2} q_{\alpha_1 1} + \dots + \beta_{\alpha_{n+1}(n+1)} q_{\alpha_1 1} q_{\alpha_2 2} \dots q_{\alpha_n n} + \dots, \quad (1)$$

де  $\beta_{0n} = 0, \beta_{1n} = q_{0n}, \dots, \beta_{(s-1)n} = q_{0n} + \dots + q_{(s-2)n}$ .

Представлення (1) називається  $Q_s^*$ -представленням числа  $x$ , відповідне  $Q_s^*$ -зображення має вигляд

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}$$

Відомо [2], що існує зчисленна множина чисел, які мають два  $Q_s^*$ -представлення, в усіх інших випадках відповідне представлення однозначне.

Розглянемо наступний оператор зсуву:

$$T(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}.$$

Нехай  $P = \|(p_{0k}; p_{1k}; \dots; p_{(s-1)k})\|$  — стохастична матриця з строго додатними елементами, причому

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{p_{0n}; p_{1n} \dots; p_{(s-1)n}\} = 0.$$

Розглянемо множину  $N(P; Q^*)$  чисел

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*},$$

які задовольняють наступну умову: для кожного блоку цифр  $(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_l)$   
 $(\beta_j \in \{0; 1; \dots; s - 1\}$  для кожного  $j \in \{1; 2; \dots; l\}$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(x; (\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_l))}{n} = p_{\beta_1 1} \cdot p_{\beta_2 2} \cdot \dots \cdot p_{\beta_l l},$$

де  $N_n(x; (\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_l))$  – кількість блоків цифр  $(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_l)$ , що зустрі-  
чуються серед блоків цифр  $(\alpha_{j+1}; \alpha_{j+2}; \dots; \alpha_{j+l})$ , де  $j \in \{0; 1; \dots; n - l\}$ .

**Теорема 1.** *Нехай існує стохастичний вектор  $(p_0; p_1; \dots; p_{s-1})$  з строго  
додатними координатами, причому для кожного  $j \in \{0; 1; \dots; s - 1\}$*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |p_{jn} - p_j| < +\infty$$

*та існує стала  $C > 0$  така, що для довільного блоку цифр  $(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_l)$   
виконується умова*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(x; (\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_l))}{n} < C \cdot p_{\beta_1 1} \cdot p_{\beta_2 2} \cdot \dots \cdot p_{\beta_l l},$$

*то  $x \in N(P; Q^*)$ .*

Для випадку, коли  $p_{jn} = \frac{1}{s}$  для кожного  $j \in \{0; 1; \dots; s - 1\}$  та на-  
турального  $n$  теорема 1 була доведена в роботі [3]. Для випадку, коли  
 $(p_{0k}; p_{1k}; \dots; p_{(s-1)k}) = (p_0; p_1; \dots; p_{s-1})$  для кожного натурального  $n$  тео-  
рема 1 була доведена в роботі [1].

**Теорема 2.** *Якщо  $x \in N(P; Q^*)$ , то існує функція розподілу  $F(x)$ , яка  
має абсолютно неперервний або сингулярний розподіл, така, що послі-  
довність  $T^n(x)$  розподілена за функцією розподілу  $F(x)$ .*

1. А. Г. Постников, Арифметическое моделирование случайных процессов, Тр. МИАН СССР, 1960, том 57, 3–84.
2. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних роз-  
поділів. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. – 296с.
3. И.И. Шапиро-Пятиецкий. О законах распределения дробных долей показа-  
тельной функции. Изв. АН СССР, сер. матем., 15 (1951), 47–52.

**Про спектр функції розподілу однієї випадкової величини типу  
Джессена-Вінтнера.**

*Олег Макарчук*

*makolpet@gmail.com*

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені  
Володимира Винниченка*

Нехай  $\eta_n$  — послідовність незалежних випадкових величин, які мають дискретний розподіл. Якщо ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k$  збігається з ймовірністю одиниця, то його сума  $\eta$  за теоремою Джессена-Вінтнера [1] має чистий розподіл — дискретний, абсолютно неперервний або сингулярний.

Точка  $t$  називається точкою росту функції розподілу  $G(x)$ , якщо для кожного додатного  $\varepsilon$ :

$$G(t + \varepsilon) - G(t - \varepsilon) > 0.$$

Під спектром функції розподілу  $G(x)$  розуміють множину її точок росту.

Нехай для довільного натурального  $n$  кожен з наборів цілих чисел  $(a_{0n}; a_{1n}; \dots; a_{(s-1)n})$  утворює повну систему лишків по модулю  $s \in N$ , причому послідовність  $a_{jn}$  є обмеженою для кожного  $j \in \{0; 1; \dots; s - 1\}$ . Розглянемо множину

$$M = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{s^n} \mid b_n \in \{a_{0n}; a_{1n}; \dots; a_{(s-1)n}\} \forall n \in N \right\}.$$

Для випадку, коли  $a_{jn} = a_{j1}$  для кожного  $j \in \{0; 1; \dots; s - 1\}$  та натуральному  $n$  в роботі [2] висловлювалась гіпотеза про те, що  $\lambda(M) > 0$ , де  $\lambda(\cdot)$  — міра Лебега. Обґрутування цієї гіпотези було представлене в роботі [3]. В даній роботі ми поглиблюємо відповідний результат.

Нехай  $\xi_n$  — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень  $a_{0n}, a_{1n}, \dots, a_{(s-1)n}$  з ймовірностями  $p_{0n}, p_{1n}, \dots, p_{(s-1)n}$  відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n}{s^n}.$$

**Теорема 1.** Якщо  $p_{jn} > 0$  для кожного  $j \in \{0; 1; \dots; s - 1\}$  та натурального  $n$ , то спектром функції розподілу  $F_\xi(x)$  є множина  $M$ .

**Теорема 2.** Якщо виконується умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \max\{p_{0n}; p_{1n}; \dots; p_{(s-1)n}\} - \frac{1}{s} \right) < +\infty,$$

то  $F_\xi(x)$  задовільняє умову Ліпшиця:

$$|F_\xi(t) - F_\xi(z)| \leq C \cdot |t - z| \quad \forall t, z \in R,$$

де

$$C = \prod_{n=1}^{+\infty} (s \cdot \max\{p_{0n}; p_{1n}; \dots; p_{(s-1)n}\}).$$

З теорем 1 та 2 випливає, що  $\lambda(M) > 0$ .

1. Jessen B., Wintner A. Distribution function and Riemann Zeta-function //Trans.Amer.Math.Soc.38,1935. – P.48-88.
2. Kenyon, R. Projecting the one-dimensional Sierpinski gasket. Isr. J. Math. 97, 221–238 (1997).
3. Zbigniew Nitecki. Cantorvals and subsum sets of null sequences. The American Mathematical Monthly, 122(9):862–870, 2015.

# Використання поліномів Бернштейна для моделювання апроксимації функцій

Василь Мельник

vasyl.melnyk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

В теорії наближення часто використовується поліном Бернштейна для апроксимації функцій, заданих на просторі дійсних чисел. Поліномом Бернштейна  $n$ -го порядку для неперервної функції  $f(x) \in C([0, 1])$  називається многочлен вигляду [1]:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad (1)$$

Можна показати, що  $B_n(f)$  рівномірно прямує до  $f$  на  $[0, 1]$ , тобто, використовуючи їх, можна довести теорему Вейерштрасса (більше про рівномірне наближення в [2]). Цей апроксимаційний метод цікавий тим, що симулює підкидання  $n$  разів спеціальної монети, що випадає потрібою нам стороною із ймовірністю  $x$ .

Цікавим є використання поліномів Бернштейна для узагальнення деяких динамічних рівнянь, зокрема, логістичного відображення:

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i). \quad (2)$$

Можна отримати різні варіанти стабілізації (так звані точки стабільності  $x_i$ ) для послідовностей  $x_i$  при різних значеннях  $r$ . Проте узагальнення вигляду:

$$x_{i+1}(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x_i^k (1-x_i)^{n-k}. \quad (3)$$

дає нам можливість отримати абсолютно іншу картину вигляду точок стабільності, або орбітального паттерну. Зокрема, відображення (3) перетворюється в звичайне логістичне відображення (2) при  $n = 2$  та  $f(x) = \frac{r}{2} - 2r(x - \frac{1}{2})^2$ . Зокрема, для  $n > 2$  в деяких випадках зникає ефект періодичного подвоєння орбіт.

1. Bernstein S. Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probabilités. Comm. Soc. Math. Kharkov – **13.** – 1-2. – 1912.
2. Маслюченко В. К., Лекції з функціонального аналізу: Ч.1. Метричні і нормовані простори. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. — 184 с.

## Зображення чисел скінченними ланцюговими $A_2$ -дробами

Софія Ратушняк<sup>1</sup>, Микола Працьовитий<sup>2</sup>, Ірина Лисенко<sup>3</sup>

ratush404@gmail.com, prats4444@gmail.com,  
iryuna.pratsiovya@gmail.com

Інститут математики НАН України<sup>1,2</sup>, НПУ імені М.П.  
Драгоманова<sup>2,3</sup>

Нехай  $A \equiv \{0; 1\}$  — алфавіт,  $L \equiv A \times A \times \dots$  — простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць);  $A_2 = \{\frac{1}{2}; 1\}$ ,  $L_2 \equiv A_2 \times A_2 \times \dots$ .

**Нескінченні ланцюгові  $A_2$ -дроби.** Відомо [1], що для будь-якого числа  $x \in [\frac{1}{2}; 1]$  існує послідовність  $(a_k) \in L_2$  така, що

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]. \quad (1)$$

Ланцюговий дріб (1) називається *нескінченним ланцюговим  $A_2$ -дробом* (нескінченим  $A_2$ -дробом), а його символічний запис  $[0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$  —  $A_2$ -зображенням числа  $x$ , при цьому число  $a_k$  називається  $k$ -ою цифрою цього зображення. Кожен нескінчений ланцюговий  $A_2$ -дріб є збіжним, а його значення належить відрізку  $[\frac{1}{2}; 1]$ .

Існують числа, що мають два  $A_2$ -зображення, оскільки

$$[0; a_1, a_2, \dots, a_m, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)] = [0; a_1, a_2, \dots, a_m, 1, (1, \frac{1}{2})].$$

Вони називаються  *$A_2$ -бінарними*. Множина таких чисел є зліченою і всюди щільною у відрізку  $[\frac{1}{2}; 1]$ . Кожне  $A_2$ -бінарне число є раціональним (але не кожне раціональне число з відрізка  $[\frac{1}{2}; 1]$  є  $A_2$ -бінарним.) Решта чисел відрізка  $[\frac{1}{2}; 1]$  мають єдине  $A_2$ -зображення і називається  *$A_2$ -унарними*. Таким чином система  $A_2$ -зображення чисел є двосивольною і має нульову надлишковість. Сьогодні невідомі необхідні і достатні умови раціональності числа в термінах його  $A_2$ -зображення (*проблема 1*).

$A_2$ -зображення числа легко перекодовується засобами алфавіту  $A$ :

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^A,$$

де  $\alpha_k = 2a_k - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Останнє називається  *$A$ -зображенням числа  $x$* .

Важливим для теорії  $A_2$ -дробів і її застосувань є поняття циліндра, яке розкриває геометричний зміст зображення..

*$A$ -циліндром* рангу  $m$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$  називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^A = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \beta_1 \dots \beta_n \dots}^A, (\beta_n) \in L\}$$

всіх чисел  $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ , що мають  $A$ -зображення, перші  $m$  цифр яких співпадають з  $c_1, c_2, \dots, c_m$  відповідно.

Очевидно, що  $\Delta_{c_1 \dots c_m}^A = \Delta_{c_1 \dots c_m 0}^A \cup \Delta_{c_1 \dots c_m 1}^A$ .

- 1)  $A$ -циліндр  $\Delta_{c_1 \dots c_m}^A$  є відрізком з кінцями:  $\Delta_{c_1 \dots c_m(01)}^A$  і  $\Delta_{c_1 \dots c_m(10)}^A$ , причому при непарному  $m$  перше число є лівим кінцем, а при парному — правим.
- 2) довжина циліндра  $\Delta_{c_1 \dots c_m}^A$  обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_1 \dots c_m}^A| = \frac{1}{(q_{m-1} + q_m)(q_{m-1} + 2q_m)} \leq \frac{1}{q_{m-1}^2},$$

де  $q_m$  — знаменник підхідного дробу  $m$ -го порядку, тобто знаменник раціонального числа, що є значенням виразу  $[0; a_1, a_2, \dots, a_m]$ , який обчислюється за формулами  $q_0 = 1$ ,  $q_1 = a_1$ ,  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ , де  $a_n = \frac{c_n+1}{2}$ ;

- 3) основне метричне відношення для  $A$ -зображення чисел має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m c}^A|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^A|} &= \frac{1 + a \frac{q_{m-1}}{q_m}}{2a^2 + 1 + 2a \frac{q_{m-1}}{q_m}}, \quad a = \frac{c+1}{2}, \\ \frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m 0}^A|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^A|} &= \frac{2 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}{3 + 2 \frac{q_{m-1}}{q_m}}, \quad \frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m 1}^A|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}^A|} = \frac{1 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}{3 + 2 \frac{q_{m-1}}{q_m}}, \\ \text{звідки } \frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m 0}^A|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m 1}^A|} &= \frac{2 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}{1 + \frac{q_{m-1}}{q_m}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{q_{m-1}}{q_m}}. \end{aligned}$$

- 4) для  $\forall (c_m) \in L$   $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^A = x \in [\frac{1}{2}; 1]$ .

Кожне число відрізка  $[\frac{1}{2}; 1]$  по суті є  $A$ -циліндром нескінченного рангу.

Сьогодні теорія нескінчених ланцюгових  $A_2$ -дробів має кілька складових: топологічну, метричну, фрактальну та ймовірнісну.  $A_2$ -дроби застосовувались у фрактальному аналізі [6], теорії функцій [2], теорії сингулярних розподілів випадкових величин [4, 5].

**Скінченні ланцюгові  $A_2$ -дроби.** Далі основним об'єктом розгляду є скінчений ланцюговий  $A_2$ -дроб і його значення, тобто вираз

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_n], \quad a_i \in A_2, \quad (2)$$

і йому відповідне значення — раціональне число  $x = \frac{p_n}{q_n}$ , обчислене за формулами:  $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$ ,  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ , де  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = 1$ ,  $q_0 = 1$ ,  $q_1 = a_1$ ,  $a_n \in A_2$ .

Множину усіх значень скінченних ланцюгових  $A_2$ -дробів ми позначаємо через  $F$ . Очевидно, що найбільшим значенням такого дробу є число  $2 = [0; \frac{1}{2}]$ , а найменшим —  $\frac{1}{3} = [0; 1, \frac{1}{2}]$ , тобто  $F \subset [\frac{1}{3}; 2]$ . Отже, кожне число  $x \in F$  розкладається у скінчений або нескінчений  $A_2$ -дріб.

### Структура множини $F$ .

**Лема 1.** Послідовність  $v_n \equiv [0; (1, \frac{1}{2})^n], n \in N$  значень скінченних  $A_2$ -дробів є зростаючою і прямує до  $\frac{1}{2}$ , причому для довільного натурального  $n \in N$

$$v_n = \frac{4^n - 1}{2 \cdot 4^n + 1} < \frac{1}{2}.$$

Якщо  $x$  — значення скінченного ланцюгового  $A_2$ -дробу, яке менше  $\frac{1}{2}$ , то  $x \in M \equiv \{\frac{2}{5}, (v_n)\}, n \in N$ , причому  $\frac{2}{5} = [0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

**Лема 2.** Послідовність  $u_n \equiv [0; \frac{1}{2}, (1, \frac{1}{2})^n], n \in N$  значень скінченних  $A_2$ -дробів є спадною і збігається до 1, причому

$$u_n = [0; \frac{1}{2}, (1, \frac{1}{2})^n] = \frac{4^{n+1} + 2}{4^{n+1} - 1} > 1.$$

Якщо  $x$  — значення скінченного ланцюгового  $A_2$ -дробу, яке більше 1, то  $x \in B \equiv \{2, \frac{10}{9}, (u_n)\}, n \in N$ , причому  $\frac{10}{9} = [0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

**Теорема 1.** Множина  $F$  значень усіх скінченних ланцюгових  $A_2$ -дробів є зліченною і щільною у відрізку  $[\frac{1}{2}; 1]$ . Множина  $D \equiv F \setminus [\frac{1}{2}; 1]$  є зліченною множиною ізольованих точок.

**Лема 3.** Підхідний дріб  $\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, \dots, a_n]$  нескінченного ланцюгового  $A_2$ -дробу  $[0; a_1, \dots, a_n, \dots]$  не належить циліндуру  $\Delta_{a_1 \dots a_n}^{A_2}$ .

Цей факт принципово відрізняє теорію  $A_2$ -дробів від теорії елементарних ланцюгових дробів.

**Кількість  $A_2$ -зображень числа.** Природним є запитання: скільки скінченних  $A_2$ -зображень має число з множини  $F$ ? Числа 1 і  $\frac{1}{2}$  мають злічену кількість різних скінченних зображень, зокрема

$$\frac{1}{2} = [0; 1, 1] = [0; 1, \frac{1}{2}, 1, 1] = [0; 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, 1] = \dots$$

**Лема 4.** Якщо деяке скінченне  $A_2$ -зображення числа  $x$  закінчується цифрою 1, то це число має зліченну множину різних скінченних  $A_2$ -зображень, зокрема кожне  $A_2$ -бінарне число має зліченну множину різних зображень.

Доведення цього факту ґрунтуються на тому, що

$$1 = [0; 1] = [0; \frac{1}{2}, 1, 1] = \dots = [0; \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{1}{2}, 1, 1].$$

**Лема 5.** Число  $a$  має єдине скінченне  $A_2$ -зображення, якщо існує його зображення, яке закінчується цифрою  $\frac{1}{2}$ .

Цей факт легко доводиться методом математичної індукції.

**Наслідок.** Кожне число множини  $D$  має єдине  $A_2$ -зображення.

Досі невідомо чи кожне раціональне число відрізка  $[\frac{1}{2}; 1]$  має розклад у скінчений  $A_2$ -дріб (проблема 2).

У доповіді планується висвітлити різнопланові застосування теорії скінченних і нескінченних  $A_2$ -дробів, зокрема, у фрактальному аналізі, теорії функцій та ймовірності теорії чисел, а також розглянути питання про порядок росту знаменників підхідних дробів.

1. Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Prats'ovytyi M. V.  $A_2$ -continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555.
2. Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P. Continued  $A_2$ -fractions and singular functions // Matematychni Studii. V.58, No.1(2022).
3. Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P., Chuikov A.S. Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed interval  $[0, 5; 1]$  by  $A_2$ -continues fractions// Journal of Numerical and Applied Mathematics. 2019. № 1 (130). Pp.71-83.
4. Pratsiovytyi M., Kyurchev D. Properties of the distribution of the random variable defined by  $A_2$ -continued fraction with independent elements // Random Oper. Stochastic Equations, 2009, Vol. 17., no. 1.— P.91–101.
5. Prats'ovitii M.V., Kyurchev D.V. The Singularity of the distribution of a random variable represented by  $A_2$ -continued fraction with independent elements // Teor. Imovir. Matem. Statyst., 2010. — 16 p.
6. Pratsiovytyi M., Chuikov A. Continuous distributions whose functions preserve tails of an  $A_2$ -continued fraction representation of numbers // Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.

**Точні оцінки знизу найкращих наближень обмежених  
голоморфних функцій**

Віктор Савчук<sup>1</sup>, Марина Савчук<sup>2</sup>

savchuk@imath.kiev.ua, maryna1savchuk@gmail.com

<sup>1</sup>*Інститут математики НАН України,*

<sup>2</sup>*НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

Нехай  $H^\infty$  банахів простір обмежених голоморфних функцій  $f$  в однічному кружі  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  з нормою  $\|f\| := \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$  і  $\widehat{f}_j := f^{(j)}(0)/j!$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , – послідовність коефіцієнтів Тейлора функції  $f$ . Найкращим наближенням функції  $f \in H^\infty$  називається величина

$$E_n(f) := \begin{cases} \|f\|, & n = 0, \\ \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - P\|, & n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

де  $\mathcal{P}_{n-1}$  – множина усіх алгебраїчних многочленів степення  $\leq n-1$ .

Застосовуючи нерівність Карлсона [1] до коефіцієнтів Тейлора функції  $f - P$ , де  $f \in H^\infty$  і  $P \in \mathcal{P}_{n-1}$ , можна показати, що

$$E_n(f) \geq \frac{2}{m+2} \left( \sum_{j=0}^m |\widehat{f}_{n+j}| + \frac{1}{2} |\widehat{f}_N| \right),$$

де  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $N \in \mathbb{N}$  і  $N \geq 2(n+m)+1$ .

У даній доповіді йдеться про точність цієї оцінки. Одним з результатів є така

**Теорема.** *Нехай  $n, N \in \mathbb{N}$ ,  $n < N$  і  $c > 0$ . Тоді для того щоб нерівність*

$$E_n(f) \geq |\widehat{f}_n| + c |\widehat{f}_N|$$

*справджувалась для будь-якої функції  $f \in H^\infty$  необхідно і достатньо щоб  $N \geq 2n+1$  і  $c \leq 1/2$ .*

*До того ж,*

$$\sup_{f \in H^\infty \setminus \mathcal{P}_{n-1}} \frac{|\widehat{f}_n| + \frac{1}{2} |\widehat{f}_N|}{E_n(f)} = 1.$$

- Carlson F. Sur les coefficients d'une fonction bornée dans le cercle unité // Ark. Mat. Astr. Fys. – 1940. – 27 A, no. 1, 8 pp.

**Рівномірні наближення сумами Фур'є на множинах згорток  
періодичних функцій високої гладкості**

Анатолій Сердюк, Тетяна Степанюк

serdyuk@imath.kiev.ua, stepaniuk.tet@gmail.com

Інститут математики НАН України

Нехай  $L_1$  — простір  $2\pi$ -періодичних функцій  $f$  сумовних на  $[0, 2\pi)$ , в якому норма задається формулою  $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(t)|dt$ ;  $L_\infty$  — простір вимірних і суттєво обмежених  $2\pi$ -періодичних функцій  $f$  з нормою  $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_t |f(t)|$ ;  $C$  — простір неперервних  $2\pi$ -періодичних функцій  $f$ , в якому норма означається рівністю  $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$ .

Нехай  $\psi(k)$  — довільна фіксована послідовність дійсних невід'ємних чисел, і  $\beta$  — фіксоване дійсне число. Через  $C_\beta^\psi L_1$  позначимо множину всіх функцій  $f$ , які для всіх  $x \in \mathbb{R}$  зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \Psi_\beta(x-t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L_1, \quad \varphi \perp 1, \quad (1)$$

де  $\Psi_\beta$  — фіксоване ядро вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi(k) \geq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

таке, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty. \quad (3)$$

Функцію  $\varphi$  у рівності (1) називають  $(\psi, \beta)$ -похідною функції  $f$  і позначають через  $f_\beta^\psi$  (див. [1]). Умова (3) забезпечує вкладення  $C_\beta^\psi L_1 \subset C$ .

Множину функцій  $f \in C_\beta^\psi L_1$  таких, що  $f_\beta^\psi \in B_1^0$ , де

$$B_1^0 := \{\varphi : \|\varphi\|_1 \leq 1, \quad \varphi \perp 1\}$$

позначають через  $C_{\beta,1}^\psi$ .

Розглядається питання про знаходження асимптотично непокращуваних оцінок зверху норм  $\|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C$  на множинах  $C_\beta^\psi L_1$ , а також питання про знаходження асимптотичних рівностей при  $n \rightarrow \infty$  для величин

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^\psi)_C = \sup_{f \in C_{\beta,1}^\psi} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C, \quad (4)$$

де  $S_{n-1}(f; \cdot)$  – частинні суми Фур'є порядку  $n - 1$  для функції  $f$ .

Встановлено наступні результати.

**Теорема 1.** *Нехай  $\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$ ,  $\psi(k) \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді для довільної функції  $f \in C_{\beta}^{\psi} L_1$  при всіх натуральних  $n$  має місце нерівність*

$$\|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_C \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) E_n(f_{\beta}^{\psi})_{L_1}. \quad (5)$$

**Теорема 2.** *Нехай  $\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$ ,  $\psi(k) \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$  має місце оцінка*

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_C = \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n), \quad (6)$$

де  $\mathcal{O}(1)$  – величина рівномірно обмежена по всіх параметрах.

В ряді важливих випадків нерівність (5) є асимптотично непокращуваною, а оцінка (6) є асимптотичною рівністю.

Через  $\mathfrak{M}$  позначимо множину всіх опуклих донизу неперервних функцій  $\psi(t)$ ,  $t \geq 1$ , таких, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ .

Нехай послідовність  $\psi(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , яка визначає множини  $C_{\beta}^{\psi} L_1$  та  $C_{\beta,1}^{\psi}$  є звуженням на множину натуральних чисел функцій  $\psi(t)$  з  $\mathfrak{M}$ . Розглянемо наступні характеристики функцій  $\psi \in \mathfrak{M}$ :

$$\alpha(t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$$

i

$$\lambda(t) := \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}.$$

Справедливе наступне твердження.

**Теорема 3.** *Нехай  $\psi \in \mathfrak{M}$ ,  $\alpha(t) \downarrow 0$ ,  $\lambda(t) \rightarrow \infty$ ,  $\lambda'(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  і  $\beta \in \mathbb{R}$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$  має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,1}^{\psi})_C = \psi(n)\lambda(n) \left( \frac{1}{\pi} + \mathcal{O}(1) \left( \frac{1}{\lambda(n)} + \alpha(n) + \varepsilon_n \right) \right), \quad (7)$$

де  $\varepsilon_n := \sup_{t \geq n} |\lambda'(t)|$ , а величина  $\mathcal{O}(1)$  є рівномірно обмеженою по параметрах  $n$  і  $\beta$ .

1. A.I. Stepanets, Methods of Approximation Theory. VSP: Leiden, Boston 2005.

**Наближення сумами Фур'є на класах диференційовних у сенсі  
Вейля–Надя функцій з високим показником гладкості в  
інтегральних метриках**

*Анатолій Сердюк, Ігор Соколенко*

*serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua*

*Інститут математики НАН України, Київ, Україна*

Нехай  $C$  і  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , — простори  $2\pi$ -періодичних функцій зі стандартними нормами  $\|\cdot\|_C$  і  $\|\cdot\|_p$ .

Нехай, далі,  $W_{\beta,p}^r$ ,  $r > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , — класи  $2\pi$ -періодичних функцій  $f$ , що зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) B_{r,\beta}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

з ядрами Вейля–Надя  $B_{r,\beta}(\cdot)$  вигляду

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

функцій  $\varphi$ , що задовільняють умову  $\varphi \in B_p^0$ , де

$$B_p^0 := \left\{ \varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \leq 1, \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0 \right\}.$$

Класи  $W_{\beta,p}^r$  називають класами Вейля–Надя, а функцію  $\varphi$  в зображенні (1) позначають через  $f_{\beta}^r$  і називають  $(r, \beta)$ -похідною в сенсі Вейля–Надя функції  $f$ .

При всіх  $1 < p, s < \infty$ ,  $r > (\frac{1}{p} - \frac{1}{s})_+ := \begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{1}{s}, & p < s, \\ 0, & p \geq s, \end{cases}$  і  $\beta \in \mathbb{R}$

має місце вкладення  $W_{\beta,p}^r \subset L_s$ . Окрім того, при довільних  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $r > 1/p$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  виконуються вкладення  $W_{\beta,p}^r \subset C$ .

Якщо  $r \in \mathbb{N}$  і  $\beta = r$ , то функції  $B_{r,\beta}(t)$  є відомими ядрами Бернуллі, а відповідні класи  $W_{\beta,p}^r$  збігаються з відомими класами  $W_p^r$   $2\pi$ -періодичних функцій  $f$ , які мають абсолютно неперервні похідні до  $(r-1)$ -го порядку включно і такі, що  $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$ . При цьому майже скрізь виконується рівність  $f^{(r)}(\cdot) = f_{\beta}^r(\cdot)$ .

Для довільної множини  $\mathfrak{N} \subset L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , розглянемо величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_{L_p} := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_{L_p},$$

в якій  $S_{n-1}(f; \cdot)$  — частинна сума Фур'є порядку  $n-1$  функції  $f$ .

Мають місце наступні твердження [1].

**Теорема 1.** *Нехай  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $r > 1$  і  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді за виконання умови*

$$\sqrt{n} + 1 \leq r \leq n + 1$$

*при  $1 \leq p < \infty$  має місце формула*

$$\mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r)_{L_p} = n^{-r} \left( \frac{\|\cos t\|_p}{\pi} F^{\frac{1}{p}} \left( \frac{p}{2}, \frac{p}{2}; 1; e^{-2r/n} \right) + O(1)nr^{-2} \right),$$

*а при  $p = \infty$  — формула*

$$\mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r)_{L_\infty} = n^{-r} \left( \frac{1}{\pi(1 - e^{-r/n})} + O(1)nr^{-2} \right),$$

*де*

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (x)_k := x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1),$$

*— гіпергеометрична функція Гаусса, а  $O(1)$  — величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

**Теорема 2.** *Нехай  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $r > 1$  і  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді за виконання умови*

$$n + 1 \leq r \leq n^2$$

*при  $1 \leq p < \infty$  має місце формула*

$$\mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r)_{L_p} = n^{-r} \left( \frac{\|\cos t\|_p}{\pi} F^{\frac{1}{p}} \left( \frac{p}{2}, \frac{p}{2}; 1; e^{-2r/n} \right) + O(1)rn^{-2}e^{-r/n} \right),$$

*а при  $p = \infty$  — формула*

$$\mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r)_{L_\infty} = n^{-r} \left( \frac{1}{\pi(1 - e^{-r/n})} + O(1)rn^{-2}e^{-r/n} \right),$$

*де  $F(a, b; c; z)$  — гіпергеометрична функція Гаусса, а  $O(1)$  — величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Виконано за часткової фінансової підтримки за проектом „Інноваційні методи у теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці та математичному моделюванні” (№ держ. реєстрації 0122U000670) в рамках програми „Підтримка пріоритетних для держави наукових дослідженень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення математики НАН України на 2022–2023 pp.”.

1. Сердюк А.С., Соколенко І.В. Наближення сумами Фур'є на класах диференційовних у сенсі Вейля–Надя функцій із високим показником гладкості // Український математичний журнал. – 2022. – Т. 74, № 5. – С. 685–700.

**Асимптотичні властивості характеристичної функції  
випадкової величини з незалежними двійковими цифрами.**

Дмитро Скакун

skakund2020@gmail.com

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Нехай  $\psi_k$  – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0,1 з ймовірностями  $p_{0k}, p_{1k}$  відповідно. Випадкова величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k s^{-k}$$

називається випадковою величиною з незалежними двійковими цифрами. Лебегівська структура розподілу  $\xi$  є відомою [6]. За теоремою Джессена-Вінтнера [4] випадкова величина  $\xi$  має чистий розподіл, тобто дискретний, абсолютно неперевний, або сингулярний. За теоремою П.Леві [5] розподіл дискретний тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \max\{p_{0k}; p_{1k}\} > 0. \quad (1)$$

Відомо [6], що розподіл  $\psi$  є абсолютно неперевним лише, коли

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left( (p_{0k} - \frac{1}{2})^2 + (p_{1k} - \frac{1}{2})^2 \right) < +\infty. \quad (2)$$

Розподіл  $\xi$  є сингулярним лише тоді, коли умови (1) та (2) одночасно не виконуються.

Для випадкової величини  $\psi$  та її характеристичної функції  $f_\psi(t) = M(e^{it\psi})$  розглянемо величину

$$L_\psi = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_\psi(t)|.$$

Відомо [2], що якщо розподіл  $\psi$  дискретний, то  $L_\psi = 1$ . Якщо розподіл  $\psi$  абсолютно неперевний, то  $L_\psi = 0$ . Якщо розподіл  $\psi$  сингулярний, то  $L_\psi$  може набувати довільного значення з відрізку  $[0; 1]$ .

В роботі [1] було показано, що  $L_\xi = 0$  тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{0n} = \frac{1}{2}.$$

В роботі [7] було показано, що  $L_\xi = 1$  тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{p_{0(n+j)} p_{1(n+j)}}{4^j} = 0.$$

**Теорема 1.** *Hexaū*

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{n+k} 2^{-k}.$$

*Якщо*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \max(p_{0k}, p_{1k}) < 1,$$

*то виконується рівність*

$$L_\xi = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f_{\tau_n}(\pi)|.$$

1. Albeverio S., Goncharenko Ya., Pratsiovyti M., Torbin G. Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // Random Oper. Stochastic Equations, 2007. – .15, №1. – P.89-97.
2. Eseen C.G Fourier analysis of distribution functions. — Acta Mathematica, 1945, 77, 1- 125.
3. Girault M. Les fonctions caractéristiques et leurs transformations.— Publ.Inst.Statist.Univ. Paris, 1954, 4, 223-239.
4. Jessen B., Wintner A. Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans.Amer.Math.Soc.38,1935. – P.48-88.
5. Levy P. Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes // Studia math., 3,1931. – P.119-155.
6. Marsaglia G. Random variables with independent binary digits // Ann.Math.Statist.-1971.– №42.– P.1922-1929.
7. Макарчук О.П. Лебегівські властивості розподілу випадкової величини, представленої сковим дробом з надлишковим набором цифр. Фрактальний аналіз та суміжні поняття // Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2020. – Т.16, №3. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2020. – С. 60-78.
8. Schwartz L. Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités. – C.R.Acad.Sci.Paris.—1941.—P.418-421.

# Верхня оцінка відновлюючого спектрального числа для зважених графів

Лариса Тимошкевич, Олександра Пилипіва

larysatymosh@gmail.com, s.pylypiva@gmail.com

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Різноманітні задачі відновлення для графів посідають значне місце в спектральній теорії графів (див. [1], [2], [3]).

Зваженим графом  $\mathbf{G}$  називатимемо таку пару  $(G, w)$ , де  $G$  — це простий граф, а  $w : E \rightarrow (0, +\infty)$  — вагова функція, тобто відображення множини ребер  $E(G)$  у множину додатних дійсних чисел.

*Постановка задачі.* Розглянемо наступну задачу відновлення для зважених графів: нехай нам відомий граф  $G$ , ми хочемо однозначно відновити вагову функцію  $w$  зваженого графа  $\mathbf{G} = (G, w)$  за спектрами певних його індукованих підграфів. Тобто потрібно аби за значеннями спектрів даних підграфів ваги на ребрах вихідного графа знаходилися однозначно. Спектр підграфа будемо називати *підспектром*. Мінімальну кількість таких підспектрів будемо називати *відновлюючим спектральним числом* графа  $G$ , позначення:  $Srn(G)$ . Для кожного графа  $G$  виникає дві задачі: навести приклад підспектрів, за якими можна здійснити відновлення та знайти відновлююче спектральне число.

**Лема 1.** Відновлення ваги для кожного ребра зваженого графа  $\mathbf{G}$  за спектрами його підграфів і відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів є еквівалентними задачами.

**Твердження 1.** Для будь-якого  $n \geq 3$  можна відновити зважений граф  $\mathbf{A}_n$  (рис. 1) за спектром всього графа  $\sigma(\mathbf{A}_n)$  і спектром  $\sigma(\mathbf{A}_{n-1})$ .



Рис. 1:  $\mathbf{A}_n$

Для зваженого уніцилічного графа та дерев, розглянемо поставлену задачу і наведемо верхню оцінку числа  $Srn$ . Також розглянемо формулювання теореми, на якій базується доведення наступних тверджень. Позначимо через  $cv(G)$  кількість висячих вершин дерева  $G$ . Назовемо одну з висячих вершин коренем. Через  $CV(G)$  позначимо множину висячих вершин відмінних від кореня.

**Теорема 1.** Нехай  $F$  — довільний зважений граф,  $z \in V(F)$  та  $H$  — дерево з коренем у. Граф  $G$  — об'єднання графів  $F$ ,  $H$  та ребра, що з'єднує

вершини  $z$  та  $y$ . Тоді за спектрами  $\mathbf{G}$  та всіх підграфів виду  $\mathbf{G} - v$ , де  $v$  пробігає  $CV(H)$ , можна відновити ваги на ребрах графа  $\mathbf{H}$ , вагу на ребрі  $(z, y)$ , а також  $P_{\mathbf{F}}, P_{\mathbf{F}-\{z\}}$ .

**Теорема 2.** (оцінка  $Srn$  для дерев) Нехай  $\mathbf{G} = (G, w)$  і граф  $G$  — дерево, тоді  $Srn(G) \leq cv(G)$  та для відновлення вагової функції  $w$  достатньо знати спектри таких підграфів:  $\mathbf{G}$  та всіх підграфів виду  $\mathbf{G} - v$ , де  $v$  пробігає множину  $CV(G)$ .

**Теорема 3.** (оцінка  $Srn$  для уніциклических графів) Нехай  $\mathbf{G} = (G, w)$  і  $G$  — уніциклический граф, тоді  $Srn(G) \leq cv(G) + 3$ .

Для довільного зваженого графа кактуса-ланцюжка  $\mathbf{G}$ , зображеного на рисунку 2, розглянемо поставлену задачу.

Нехай елементами ланцюга є графи  $F_1, \dots, F_n$  і для будь-якого  $i \in \{1, \dots, n\}$ :  $F_i$  — цикл  $C_m$ , де  $m \geq 4$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n-1\}$  пронумеруємо вершини, що належать множині вершин  $F_j$  і множині вершин  $F_{j+1}$ , тобто  $V(F_j) \cap V(F_{j+1}) = j$ . Також вершини, у яких степінь дорівнює 4, мають бути не суміжними.

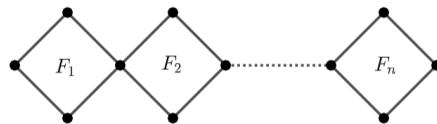


Рис. 2:  $\mathbf{G}$  — граф кактус-ланцюг

**Твердження 2.** Нехай  $\mathbf{G} = (G, w)$  і граф  $G$  — кактус-ланцюг, тоді  $Srn(G) \leq 4$  та для відновлення вагової функції  $w$  достатньо знати такі чотири підспектри:  $\sigma(\mathbf{A}_B)$ ,  $\sigma(\mathbf{A}_B - v)$ ,  $\sigma(\mathbf{A}_T)$ ,  $\sigma(\mathbf{A}_T - v)$ , де  $A_B$  — ланцюг, що знаходитьться в нижній області,  $A_T$  — ланцюг, що знаходитьться у верхній області (див рис. 3).

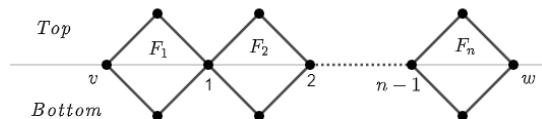


Рис. 3:

1. Cvetkovic D.M. The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. – 1975. – 498–541. – P. 45–48.
2. Hogben L. Spectral Graph Theory and the Inverse Eigenvalue Problem of a Graph. Chamchuri Journal of Mathematics. – 2009. – vol 1, no. 1 – P. 51-72.
3. van Dam E.R., Haemers W.H. Which graphs are determined by their spectrum. Linear Algebra and its Applications. – 2003. – vol. 373. – P. 241-272.
4. Тимошкевич Л.М. Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 14 – С. 165-175.
5. Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінчених графів і зліченних графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ, 2015. – 160 с.

**Про міру Лебега множини неповних сум одного степеневого ряду.**

*Богдан Халецький*

*aumykun@gmail.com*

*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка*

Нехай  $a \in N, a > 2$  та  $\gamma \in (0; 1)$ . Розглянемо множину

$$M(\gamma; a) = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \gamma^n \mid b_n \in \{0; 1; a\} \forall n \in N \right\}.$$

Відомо [4], що якщо  $a \equiv 2 \pmod{3}$ , то  $\lambda(M(\frac{1}{3}; a)) > 0$ , де  $\lambda(\cdot)$  — міра Лебега. Дослідження властивостей множини  $M(\gamma; a)$  для деяких значень  $a$  представлене в роботі [2].

Нехай  $\xi_n$  — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень  $0, 1, a$  з ймовірностями  $\frac{1}{3}$ . Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n}{3^n}.$$

За теоремою Джессена-Вінтнера [1] випадкова величина  $\xi$  має чистий розподіл. За теоремою Леві [3] розподіл  $\xi$  є неперервним.

**Теорема 1.** Якщо  $\gamma \in (0; \frac{1}{3})$ , то  $\lambda(M(\gamma; a)) = 0$ . Для розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини  $M(\gamma; a)$  виконується нерівність:

$$\alpha_0(M(\gamma; a)) \leq -\log_\gamma(3).$$

**Теорема 2.** Якщо  $\lambda(M(\gamma; a)) > 0$ , то розподіл випадкової величини  $\xi$  є абсолютно неперервним.

**Теорема 3.** Якщо для кожного  $j \in \{0; 1; \dots; [\log_3(a \cdot \pi)]\}$  виконується умова:

$$\left| 1 + e^{i \cdot \frac{\pi}{3^j}} + e^{i \cdot \frac{a \cdot \pi}{3^j}} \right| > 0, \quad (1)$$

то розподіл випадкової величини  $\xi$  є сингуллярним.

З теорем 2 та 3 випливає, що  $\lambda(M(\gamma; a)) = 0$ , якщо виконується умова (1).

1. Jessen B., Wintner A. Distribution function and Riemann Zeta-function //Trans.Amer.Math.Soc.38,1935. – P.48-88.

2. Kenyon, R. Projecting the one-dimensional Sierpinski gasket. *Isr. J. Math.* 97, 221–238 (1997).
3. Levy P. Sur les series dont les termes sont des variables independantes // *Studia math.*, 3, 1931. – P.119-155.
4. Zbigniew Nitecki. Cantorvals and subsum sets of null sequences. *The American Mathematical Monthly*, 122(9):862–870, 2015.

**Згортка двох сингулярних розподілів: класичного  
канторівського і випадкової величини з незалежними  
дев'ятірковими цифрами**

*Дарина Шпітюк, Софія Ратушняк*

darina.shpytyuk@gmail.com, ratush404@gmail.com

*НПУ імені М.П. Драгоманова*

Класичний канторівський розподіл має випадкова величина

$$\tau = \frac{\tau_1}{3} + \frac{\tau_2}{3^2} + \dots + \frac{\tau_n}{3^n} \equiv \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \dots}^3, \quad (1)$$

цифри  $\tau_n$  трійкового зображення якого є незалежними і мають розподіли  $P\{\tau_n = 0\} = \frac{1}{2} = P\{\tau_n = 2\}$ ,  $P\{\tau_n = 1\} = 0$   $n \in N$ . Його спектром  $S_\tau$  (мінімальним замкненим носієм рівносильно множиною точок росту функції розподілу) є класична множина Кантора [2]

$$C[3; \{0, 2\}] = \{x \in [0; 1] : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3, \alpha_n \in \{0, 2\}\}.$$

Згорткою двох класичних канторівських розподілів є сингулярний розподіл салемівського типу [3], суттєвим носієм якого є фрактальна множина типу Безиковича-Егглстона [2].

Нехай  $\eta = \Delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n \dots}^9$  — випадкова величина з незалежними цифрами  $(\eta_n)$  свого дев'ятіркового зображення з розподілами  $P\{\eta_n = i\} = q_i \geq 0$ ,  $i = \overline{0, 8}$ ,  $q_0 + q_1 + \dots + q_8 = 1$ .

Розглядається розподіл випадкової величини  $\xi = \tau + \eta$ , де  $\tau$  і  $\eta$  — незалежні (тобто згортка розподілів випадкових величин  $\tau$  і  $\eta$ ).

**Теорема 1.** Якщо  $q_0 q_8 > 0$ ,  $q_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 7}$ , то випадкова величина  $\xi = \eta + \tau$  має чисто сингулярний розподіл канторівського типу, спектром якого є фрактальна множина  $S_\eta \oplus S_\tau = C[9; \{0, 2, 6, 8, 10, 14, 16\}]$ .

**Теорема 2.** Якщо  $q_0 + q_1 + q_7 + q_8 = 1$ , то випадкова величина  $\xi = \eta + \tau$  є неперервною випадковою величиною, розподіл якої зосереджений на множині

$S_\xi = C[9; \{\bar{4}, \bar{5}, \bar{11}, \bar{12}\}] = \{x \in [0; 1] : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^9, \alpha_n \neq \{4, 5, 11, 12\}\}$ , що є об'єднанням відрізків, загальної довжини  $\frac{5}{3}$ .

1. Гончаренко Я.В., Торбін Г.М., Працьовитий М.В. Тополого-метричні та фрактальні властивості згортки двох сингулярних розподілів випадкових величин з незалежними дев'ятірковими цифрами // Теор. ймов. та мат. стат. — 2002. — Вип. 67. — С.9–19.
2. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.
3. Працьовитий М.В. Згортки сингулярних розподілів // Доп. НАН України. — 1997. — № 9. — С.36–42.

# Інформаційні технології у прикладних задачах та освіті

## **IFC-формат файлів для BIM моделей. Структура та його призначення**

*Андрій Бардан, Юлія Старікова*

*bardan.andrii@chnu.edu.ua, ystarikova@amcbbridge.com*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича, AMC Bridge*

Інформаційне моделювання будівель, скорочено ВІМ, - це процес оптимізації проєктування і будівництва. За допомогою ВІМ-технології створюється інформаційна модель, яка забезпечує точне бачення проєкту в цілому.

Технологія інформаційного моделювання будівель полягає в побудові тривимірної віртуальної моделі будівлі в цифровому вигляді, яка несе в собі повну інформацію про майбутній об'єкт. Застосування ВІМ-технології в проєктуванні будинків включає в себе збір та комплексну обробку технологічної, архітектурно-конструкторської, економічної інформації про будівлю, завдяки чому будівельний об'єкт і все, що до нього відноситься, розглядаються як єдине ціле.

Industry Foundation Classes - формат даних ВІМ із відкритою специфікацією, що не контролюється жодною компанією або групою компаній. Формат файлу був розроблений buildingSMART для спрощення взаємодії в будівельній індустрії. Тобто, IFC був розроблений для того, щоб створити велику групу несуперечливих даних, які здатні представляти модель даних будівлі, дозволяючи, у такий спосіб, обмін інформацією між різними виробниками програмного забезпечення у галузі архітектурного та технічного проєктування і будівництва.

IFC проявляється у цьому контексті як модель даних перекладу, у форматі, який "ні кому не належить", доступному для визначення об'єктів у сфері архітектурного та технічного проєктування та будівництва. Але це не стандартизує структури даних у програмних додатках, а обмежується лише стандартизаціями спільно використовуваної інформації.

На сьогодні IFC формат підтримують більшість сучасних CAD систем, серед яких: ArchiCAD, Autodesk Revit, Autodesk Autocad, BIM Viewer, Bentley Viewer, SolidWorks.

Модель IFC складається з сотні об'єктів, які організовані в ієрархічний спосіб. Деякі приклади таких об'єктів:

- елементи конструкції, як-от IfcWall (стіна), IfcWindow (вікно), IfcDoor (двері),
- геометричні елементи, як-от IfcExtrudedAreaSolid (суцільна екструзія з області),
- базові конструкції, як-от IfcCartesianPoint (вершина, точка).

Логіка IFC базується на 3 основних концепціях, які представляють

структурою файлу:

1. IfcObjectDefinition, що визначає самі сутності (об'єкти)
2. IfcRelationship, що визначає зв'язок між сутностями
3. IfcPropertyDefinition, що визначає властивості, пов'язані з сутностями.

Унікальною можливістю IFC формату є те, що більшість геометричних об'єктів можуть бути використані декілька разів різними сутностями. Це значно зменшує розміри IFC-файлу.

У будівництві та проектуванні досить часто використовуються однакові конструкції. Наприклад, стіна може мати декілька однакових вікон, а самі стіни на декількох поверхах є однаковими за розміром. У такому випадку IFC дозволяє за допомогою тільки одного об'єкту геометрії вікна та одного об'єкту геометрії стіни створити повноцінну модель будинку. Відповідні сутності вікна та стіни будуть перевикористовувати визначену геометрію декілька разів, лише задаючи їй унікальне місцезнаходження.

Отже, IFC формат є сучасним форматом задання даних BIM, який продовжує розвиватись. Він використовується у багатьох CAD-системах, є універсальним та стандартизованим. Також він має глибоку структуру та багато переваг перед іншими форматами задання BIM-даних.

## **Технології доповненої реальності на уроках математики**

*Анастасія Бузиновська, Руслана Колісник*

*buzynovska.anastasiia@chnu.edu.ua, r.kolisnyk@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

В умовах стрімкого розвитку науки, техніки й технологій значних петроворень зазнає і вся освітня система. В Концепції нової української школи зазначається, що «школа має бути в авангарді суспільних змін», зокрема, і всі найкращі практики використання цифрових технологій мають застосовуватися і в освітньому процесі.

Використання сучасних технологій в освітньому процесі спрямоване на те, щоб зробити навчання більш інтерактивним та цікавим. Перед вчителем з'являються нові виклики – привернути увагу учнів, які не уявляють свого життя без гаджетів, до матеріалу, що вивчається, та утримувати їх увагу протягом уроку. Зокрема, використання на уроках технології доповненої реальності (англ. *augmented reality* або AR) розшириТЬ можливості вчителів, допоможе мотивувати учнів до навчання, надаючи надзвичайно цікавий цифровий контент та функції.

У роботі розглянуто питання використання AR при вивчені геометричних фігур у просторі у курсі математики ЗЗСО. Одним із завдань курсу математики основної школи є формування уявлення про найпростіші геометричні фігури в просторі та їх властивості, а також первинних умінь застосовувати їх у навчальних і життєвих ситуаціях. Тут у пригоді стають програми динамічної геометрії та додатки доповненої реальності, використовуючи які вчитель активізує пізнавальну, дослідницьку та проектну діяльність учнів, мотивує їх до навчання та до використання отриманих знань.

На етапі знайомства учнів з просторовими геометричними фігурами вчителю варто використовувати програмні засоби навчання та додатки доповненої реальності, як засоби для візуалізації та взаємодії, що безпечно зацікавить учнів, покращить сприйняття нового матеріалу та дасть змогу краще розвинути просторову уяву. Якнайкраще справляються з цим завданням маркерні додатки доповненої реальності. Наприклад додаток CleverBooks, який запускається на планшеті або смартфоні (на базі Android чи iOS), та дозволяє за допомогою колекції флешкарт (рис. 1), які потрібно заздалегідь видрукувати, візуалізувати основні просторові геометричні фігури, роздивитися їх з усіх боків, вивчити їх елементи та розглянути розгортки.

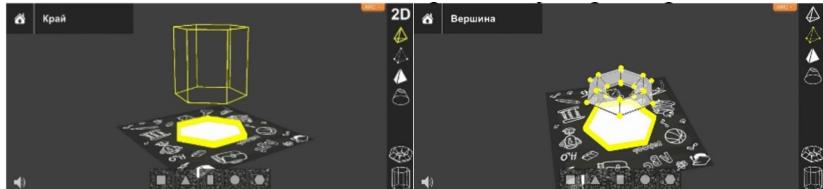


Рис. 1

Згодом, коли учні вже більш детально вивчають геометричні фігури у просторі, вчаться визначати об'єми цих фігур, площу повної поверхні фігури через площину розгортки, варто використовувати додаток AR (на базі iOS) програми GeoGebra. Створивши необхідний об'єкт в мобільному додатку Geogebra 3D Калькулятор, та, перейшовши в режим доповненої реальності, можна розмістити створений віртуальний об'єкт на довільній площині поверхні, яка нас оточує в реальному житті, і вивчати його, змінюючи розташування об'єкта, його розміри, розглядаючи його з усіх сторін, «заходячи» камерою телефону всередину об'єкта тощо.

Технології AR все більше присутні в нашому житті, вони закономірно стають дидактичним засобом, і тому нам варто не відкидати їх використання, а науково обґрунтувати та активно використовувати їх можливості в освітньому процесі.

1. GeoGebra. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://www.geogebra.org>
2. CleverBooks: доповнена реальність для STEM-освіти. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: Освітній міст у майбутнє – CleverBooks

# **Роль сучасних інформаційних технологій в освіті**

*Тетяна Готинчан*

*t.hotynchan@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

Освіта у 21 столітті немислима без застосування інформаційних технологій. Застосування сучасних інформаційних технологій та цифрових ресурсів в освіті сприяє удосконаленню ролі як викладача, так і здобувача освіти. Здобувач стає активнішим учасником освітнього процесу, оскільки відповідно до завдань сучасної освіти має змогу моделювати свою власну освітню траєкторію. Так, визначаючи власні цілі в освіті, здобувач шукає інформацію, оперує великим обсягом інформації, аналізує та критично осмислює її, обирає предмети тощо. Сучасна роль викладача направляти та допомагати здобувачу освіти у його виборі. За допомогою інформаційних технологій він може наочно і доступно подати навчальну інформацію, а також сприяти самостійному пошуку та освоєнню необхідної інформації, здійснювати контроль на певних етапах за допомогою програмних засобів.

Застосування інформаційних технологій в освіті сприяють не лише можливості створення власної освітньої траєкторії, а й мотивації отримання нових знань для здобувача освіти. Також це сприяє є розвитку педагогіки як науки, оскільки сучасні інформаційні технології за своїми дидактичними можливостями активно впливають на всі складові системи навчання та виховання: цілі, зміст, методи та організаційні форми навчання. Вони дозволяють ставити та вирішувати значно складніші та актуальні завдання педагогіки – завдання розвитку людини, її інтелектуального, творчого потенціалу, аналітичного, критичного мислення, самостійності у здобутті знань, роботі з різними джерелами інформації, отриманні нових знань [1].

Інформаційні технології та цифрові ресурси все активніше використовуються для вдосконалення організації освітнього процесу та покращення управління в школах, коледжах, університетах. Для управління створено ряд освітніх реєстрів, функціонують освітні інформаційні системи, за допомогою яких збирається, обробляється, зберігається різноманітна статистична та адміністративна інформація. На сьогодні уявити сучасну освіту без інформаційних технологій неможливо [2].

Завдяки розвитку інформаційних технологій у педагогіці з'явились такі поняття як електронне навчання (e-learning) і дистанційне навчання. Розрізняють синхронне та асинхронне електронне навчання. У процесі синхронного електронного навчання викладач і здобувач освіти беруть участь у навчальному процесі одночасно, але вони можуть бути віддалені територіально. Зв'язок здійснюється за допомогою Інтернету та допоміжних інформаційних технологій для відеоспілкування (Google Meet,

Zoom, Microsoft Teams, Webex Meetings, тощо). Синхронне навчання дає змогу імітувати звичний навчальний процес в аудиторії, під час якого інформація від викладача до здобувача освіти та зворотній зв'язок від здобувача освіти до викладача передається через аудіо- та відеозображення, але спілкування здійснюється у режимі реального часу. Заняття чи консультації, обговорення та візуалізація навчального матеріалу відбуваються у певний час, визначений розкладом або викладачем. Усі здобувачі освіти, які хочуть брати участь у них, мають бути онлайн одночасно. Асинхронне електронне навчання передбачає роботу викладача та здобувача освіти в різний час. При цьому слід застосовувати інтерактивні освітні платформи чи системи керування навчанням (Moodle, Google Classroom та інші), електронну пошту, тощо.

Дистанційне навчання — ширше поняття, ніж електронне. Воно поєднує інтерактивне самостійне навчання та консультаційну підтримку під час навчання. Тому, електронне навчання є одним із інструментів дистанційної освіти. Дистанційне навчання — це сукупність технологій, що надають здобувачу освіти необхідний обсяг навчального матеріалу та інтерактивну взаємодію з викладачами у процесі навчання. Хоча доставка навчального матеріалу може здійснюватися й не через інтернет, надавачі дистанційних освітніх послуг віддають перевагу використанню саме різноманітних спеціалізованих інтерактивних освітніх платформ. Для створення візуалізації навчального матеріалу слід застосовувати допоміжні інструменти: створення презентацій (Power Point, Prezi, Keynote, Google Slides та ін.), підготовки відеоматеріалів демонстрації процесів (LOOM, XSplit Broadcaster, XSplit Broadcaster та ін.).

У реаліях українського сьогодення слід застосовувати різні форми навчання в освіті. Це синхронна та асинхронна взаємодія учасників освітнього процесу через заняття зі зворотним зв'язком, пропоновані завдання на самостійне опрацювання, онлайн консультації, тестуючі програми та звичайно формування електронного портфоліо здобувача освіти з фіксацією його здобутків. У цьому дуже допомагають системи керування навчанням LMS (Learning Management System), які можна ефективно використовувати як при очному, так і віддаленому навчанні, використовуючи для цього різноманітні її інструменти: чати, форуми, семінари тощо.

Форуми та семінари можуть бути використані також як інструменти для навчання на певні теми в асинхронному режимі, а чат — у синхронному режимі навчання. Викладач у цьому випадку створює тематичну наукову проблему, спонукає здобувачів освіти до обговорення її, пошуку вирішення та виступає як мотиватор для полегшення взаємодії здобувача-здобувача, здобувач-викладача. Це сприяє розвитку активності, креативності та самостійності здобувачів освіти.

Використання інформаційних технологій у процесі викладання дозво-

ляє викладачу подолати певні проблеми методичного плану: розробка різних моделей та інструментів навчання для набуття програмних компетентностей, закладених у відповідних освітніх програмах, одночасно зберігаючи індивідуальний підхід до кожного студента; оцінювання із застосуванням різних інструментів; сховище навчальних матеріалів тощо. Проте, необхідно зазначити, що використання нових технологій вимагає певного навчання. Тому для здобувачів освіти корисно вводити навчальні дисципліни, пов'язані з комунікаційними технологіями, зокрема в галузі освіти, та створенням і використанням LMS. Особливо це корисно для здобувачів у галузі середньої освіти. Пропонування командних проектів зі створення простіших LMS під час навчання чи проходження навчальних практик дає змогу здобувачам у галузі інформаційних технологій навчитись створювати сучасні сервіси із врахуванням вимог сьогодення, поєднання технологій та досвіду користувача. А це сприяє тому, що випускники стають більш досвідченішими фахівцями.

Створення та застосування сучасних інформаційних технологій в освітній процес дозволяє побудувати сучасне електронне освітнє середовище, яке відповідає вимогам сьогодення, і отримати такі переваги [3]:

- реалізувати різноманітні форми навчального процесу для здобувачів освіти за сучасними технологіями і освітніми програмами;
- доступ до відкритих навчальних матеріалів і відповідної документації з будь якого місця у зручний час для забезпечення гнучкості навчального процесу;
- перехід від репродуктивної діяльності до творчої, критичної і консультативної;
- забезпечення ефективної комунікації між викладачами, здобувачами освіти та управлінським апаратом;
- формування індивідуальних освітніх траєкторій для здобувачів освіти з різним пізнавальним потенціалом і типами мисленевих процесів, створення умови для ефективної самостійної роботи і самонавчання протягом життя.

1. А.О. Яновський. Пошуково-дослідницька діяльність з використанням інформаційно-комунікаційних технологій в умовах європейської інтеграції. URL: <https://scienceandeducation.pdpu.edu.ua/doc/2008/8.9.2008/50.pdf>
2. Освіта в Україні: виклики та перспектива. Інформаційно-аналітичний збірник. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna20serednya/serpneva-konferencia/2020/metod-zbirka-osvita-ta-covid-2020.pdf>
3. Морзе Н. В. Модель стандарту ІКТ-компетентності викладачів університету в контексті підвищення якості освіти / Н. В. Морзе, А. Б. Кочарян. Інформаційні технології і засоби навчання. 2014. Т.43, вип. 5. С. 27-39.

# **Розробка програмного забезпечення для обліку ультразвукових досліджень**

*Марина Гульпак*

*hulpak.maryna@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

Система обліку ультразвукових досліджень -виступає, як користувальський інтерфейс, який містить функціонал управління інформацією діагностики під час обслідування пацієнтів. Створений додаток надає можливість зберігати в історичному порядку дані про обстеження та про пацієнтів, із посиланням на лікаря, який проводив УЗД. Крім того, як система обліку, надає можливість згруповувати, обробляти та оновлювати збережені дані.

Додаток для обліку ультразвукової діагностики розв'язує всі основні потреби ведення хронології досліджень і можливість швидко, без особливих навичок користування електронними системами, здійснювати пошук збережених даних. Інтерфейс імплементує механізм моніторингу відповідальних осіб за проведення обстеження, однак, дані використовуються лише як хронологічний документ і не можуть використовуватися як кінцевий медичний документ до моменту його затвердження.

Використовуючи даний додаток можна зберігати та оновлювати такі групи даних:

1. Лікарі (дані для авторизації, ПП, адреса, контактна інформація).
2. Пацієнт (ПП, дата народження, номер телефону, інша контактна інформація).
3. Обстеження (пацієнт, для якого проводили, лікар, який проводив, точний час проведення).
4. Наперед задані значення для полів обстеження.

Для зручності використання, атрибути результатів ультразвукової діагностики були згруповані і розміщені на різних формах. Реалізована можливість додавати дані, які зберігаються у базі даних. Користувачі можуть до кожної форми додати нотатки у графі «висновки» у кожній із форм.

Реалізована можливість сортування попередніх записів обстежень за проміжком дат. Отримані результати можна відсортувати за датою, ім'ям лікаря, за спаданням чи зростанням.

Ще одним важливим механізмом є можливість формування звітів у PDF форматі.

За вимогами користувачів у звіті розміщена така інформація:

1. інформація про організацію;
2. дані пацієнта;
3. повний перелік усіх заповнених полів різних типів форм УЗД обслідувань, з чітким вказанням до якого типу обслідувань відносяться атрибути;
4. після кожного розділу, висновки та нотатки до обстеження;
5. дата проведеного обстеження;
6. лікар, який його проводив та місце для підпису, печатки.

Додаток створений навмисно без підключення до Інтернет мережі, з локальною базою даних, щоб уникнути проблем з нестабільним підключенням і унеможливити неправомірний доступ до даних. В той же час, перевстановлення застосунку нічим не обтяжене, потребує тільки файлу з даними.

Системи реалізована з використанням таких технологій:

1. (а) мова програмування C#, на платформі .NET;
- (б) Entity Framework – об'єктно-орієнтовна технологія для взаємодії з даними;
- (в) база даних - SQLite;
- (г) WPF (Windows Presentation Foundation) - система для побудови графічних інтерфейсів;
- (д) PDFFlow - система для побудови файлів з PDF розширенням.

У підсумку, створений застосунок спрощує виписку висновку лікаря, покращує і пришвидшує комунікацію між різними лікарями, зменшує ймовірність виникнення помилок, які можуть загрожувати життю пацієнта під час обміну інформацією.

1. .NET documentation. Developer tools, technical documentation and coding examples | Microsoft Docs. URL: <https://docs.microsoft.com/en-us/dotnet>.
2. Програмне забезпечення для медичних закладів. URL: <https://www.infomed.ck.ua/products/polyclinic-stacionar>.

Чернівецький обласний ендокринологічний центр

Напіс Петро Іванович  
05.02.1980  
+380999999999

УЗД НІФРОК

ПРАВА НІФРОК:  
Розміщені правильно. Додаткові утворення не виявлено. Форма: змінена; Розмір: зменшена, 2 мм, 2 мм; Паренхіма: стонінка, товщина 2 мм; Ехогенітас: середній; Структура: змінена; Чашко-місцевий комплекс: Розвинений за рахунок чашок, розміром 4 мм. Не деформовані, Підносиві

НАДВІДРИНИКИ:  
Визначотися. Правий: 1 мм, Лівий: 2 мм

ВІСНОВКИ:  
УЗ ознаки: кисти ніфрок, гідроендрозу, зточеної паренхіми справа; Вогнищеве ураження паренхіми правої ніфри

Нотатки: тестовий звіт, дані тестові

14.09.2022 16:22      Лікар: Surname User LastName

# Побудова та дослідження стійкості різницевих схем Гіра

Віктор Диренко

dyrenko.viktor@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федъковича

У даній роботі розглядаються методи побудови жорстко стійких різницевих схем Гіра та реалізовано алгоритм побудови областей їх абсолютної стійкості.

Для деяких типів диференціальних задач класичні різницеві схеми є нерівномірно збіжними. Їх називають жорсткими [1], [2]. Для таких задач використовують спеціальні різницеві схеми Гіра [2]

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{r-1} a_k y_{n-k} + h b_0 f(t_{n+1}, y_{n+1}). \quad (1)$$

Коефіцієнти  $a_k$ ,  $k = \overline{0, r-1}$ ,  $b_0$  визначають з умови, що різницева схема (1) є точною для всіх многочленних розв'язків задачі Коші

$$u'(t) = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

до  $r$ -го порядку включно. У цьому випадку нескладно одержати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для їх знаходження

$$\sum_{k=0}^{r-1} (-k)^j a_k + j b_0 = 1, \quad j = 0, 1, \dots, r. \quad (2)$$

Визначник системи (2) відмінний від нуля [3]–[4], тому вона однозначно розв'язна, а це означає, що різницеві схеми Гіра вигляду (1) існують та єдині для будь-якого  $r \geq 1$ .

В роботі розроблена прикладна програма, яка дозволяє знаходити точні числові значення коефіцієнтів різницевих схем Гіра до двадцятого порядку [5].

Дослідження та побудова областей стійкості різницевих схем Гіра високого порядку є достатньо складною аналітичною задачею. В роботі за-пропоновано алгоритм автоматизації їх побудови з використанням ЕОМ. Для реалізації наведеного алгоритму розроблена прикладна програма за-собами мови програмування Python. Одержані за її допомогою на рис. 1 наведено області абсолютної стійкості різницевих схем Гіра 5-6 порядків.

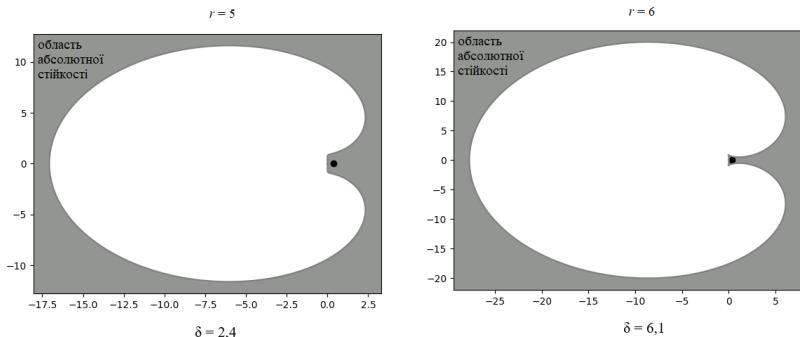


Рис. 1

Одержані області абсолютної стійкості різницевих схем Гіра 5-6 порядків на рисунку 1 дозволяють зробити висновок, що вони є жорстко стійкими, і їх можна використовувати для знаходження наближених розв’язків жорстких задач.

1. Gurtiss C. F., Hirschfelder J. O. Integration of stiff equations. Proc. Nat. Acad. Sci. of U.S. 1952, v.38, p. 235–243.
2. Gear C. W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. – New Jersey : Printice, 1971. – 253 p.
3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи. – М. : Мир, 1999. – 685 с.
4. Чуа Л. О., Пен Мин-Лин. Машинный анализ электронных схем. – М. : Мир, 1980. – 680 с.
5. Диренко В. В. Побудова різницевих схем Гіра та дослідження їх стійкості // Матеріали студентської наукової конференції Чернівецького національного університету (12–14 квітня 2022 року). Факультет математики та інформатики. – Чернівці : Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2022. – С. 31–32.

# Створення мовного процесора для платформи .NET засобами Antlr

Андрій Дробот

drobot.andrii@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федъковича

У роботі розроблений мовний процесор для власної мови високого рівня Vlang. Основною перевагою цієї мови є зручність роботи з векторами. Приклад програми на мові Vlang:

```
scl x;
scl y;
scl i;
vec v1{6};
vec v2{6};
vec v3{6};
x = 2;
v1 = 2*x;                                // v1 should now be [4,4,4,4,4,4]
v2 = [1,1,2,2,3,3]
print v1.v2                      // should print: 48
y = v2:4;                                // y = 3
i = 0;
loop y {
    v1:i = i;
    i = i + 1;
}
print v2:v1                // should print: [1,1,2,3,3,3]
print v2:v1:[5,4,3,2,1,0]      // should print: [3,3,3,2,1,1]
v3 = v1+v2                  // v3 should be [1,2,4,6,7,7]
print v2:([2,1,0,2,2,0].v3/10) // should print: 2
```

За допомогою генератора синтаксичних аналізаторів Antlr виконуються два етапи компіляції: лексичний аналіз і синтаксичний аналіз [1].

Лексичний аналіз - процес аналітичного розбору вхідної послідовності символів на розпізнані групи з метою отримання на вихіді ідентифікованих послідовностей - лексем.

Синтаксичний аналіз (парсинг) - процес аналізу вхідної послідовності символів, з метою розбору граматичної структури згідно із заданою формальною граматикою.

Засобами Antlr для вище описаних етапів компіляції було створено два класи VlangLexer та VlangParser.

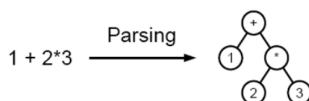


Рис. 1: Приклад синтаксичного аналізу

У середовищі Antlr було створено граматику, яка описує дану мову:

```
program: codeblock EOF;
codeblock: statement*;
statement: declaration | assignment | if_block | loop_block | print_statement;

declaration: scalar_dec SCOL | vector_dec SCOL;
scalar_dec: SCALAR_TYPE ID;
vector_dec: VECTOR_TYPE ID LCBRACKET POSITIVE_DIGIT RCBRACKET;

assignment: (vector_element | ID) ASSIGN expression SCOL;
expression:
    LBRACE expression RBRACE
    | expression (PLUS | MINUS | MULT | DIV) expression
    | vector_element
    | vector_product
    | digit
    | vector
    | ID;

vector: ID | LSBRACKET digit (COMMA digit)* RSBRAKET;

vector_element: vector COL expression;
vector_product: vector DOT expression;

if_block: IF expression LCBRACKET statement* RCBRACKET;
loop_block: LOOP expression LCBRACKET statement* RCBRACKET;
print_statement: PRINT expression (COMMA expression)* SCOL;
digit: MINUS? POSITIVE_DIGIT | ZERO;

SCALAR_TYPE: 'scl';
VECTOR_TYPE: 'vec';
IF: 'if';
LOOP: 'loop';
PRINT: 'print';
POSITIVE_DIGIT: [1-9][0-9]*;
ID: [a-zA-Z]+[0-9]*;
ZERO: '0';
SCOL: ';';
DOT: '.';
COMMA: ',';
COL: ':';
LCBRACKET: '{';
RCBRACKET: '}';
LSBRACKET: '[';
RSBRAKET: ']';
LBRACE: '(';
RBRACE: ')';
MINUS: '-';
PLUS: '+';
MULT: '*';
DIV: '/';
ASSIGN: '=';
SPACE: [ \t\r\n] -> skip;
```

Основне призначення класу VlangLexer - генерація послідовності лексем (токенів) із вхідного набору символів. Лексеми розпізнаються за допомогою вищеписаної граматики. Отриманий набір токенів з класу VlangLexer передається в роботу класу VlangParser. Результатом роботи класу VlangParser є синтаксичне дерево розбору (Рис. 2).

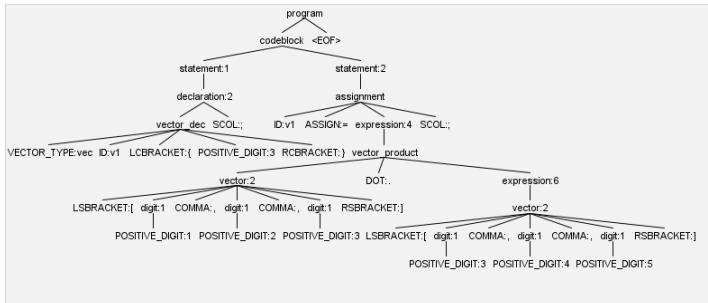


Рис. 2: Результат виконання програмою синтаксичного аналізу

Для обходу отриманого дерева розбору і генерації проміжного коду використовується шаблон проектування "Відвідувач"(Visitor) [2].

Вихідний продукт програми - асемблероподібний код, написаний мовою CIL (Common Intermediate Language), для віртуальної машини .NET.

Мова CIL схожа на мову асемблера за синтаксисом. Її можна розглядати, як асемблер віртуальної машини .NET. У той же час, мова CIL містить деякі досить високорівневі конструкції, що є вищим рівнем, ніж будь-який реальний машинний асемблер, тому відносно легше писати код безпосередньо на CIL, ніж на реальному машинному асемблері. CIL є своєрідним асемблером високого рівня. Приклад коду, написаного мовою CIL:

```
IL_0000: nop
IL_0001: ldc.i4.2
IL_0002: stloc.0
IL_0003: ldc.i4.3
IL_0004: stloc.1
IL_0005: ldloc.0
IL_0006: ldc.i4.2
IL_0007: add
```

Отже, у роботі було описано процес використання генератора синтаксичних аналізаторів Antlr для створення інтерпретатора власної мови високого рівня Vlang в проміжний код мовою CIL.

1. Valentin M. Antimirov. Partial derivatives of regular expressions and finite automaton constructions. Theor. Comput. Sci., 1996. — 291–319 с.
2. Santosh Singh. ANTLR C# Cookbook — 2019. — [Електронний ресурс]. URL: <https://www.amazon.com/Create-Compiler-Using-ANTLR-Crash-Course-ebook/dp/B09BJ4CRTJ>

# Розробка бізнес-логіки для проекту "Реабілітаційний центр "Особлива дитина""

Роман Івасюк

ivasiuk.roman@chnu.edu.ua

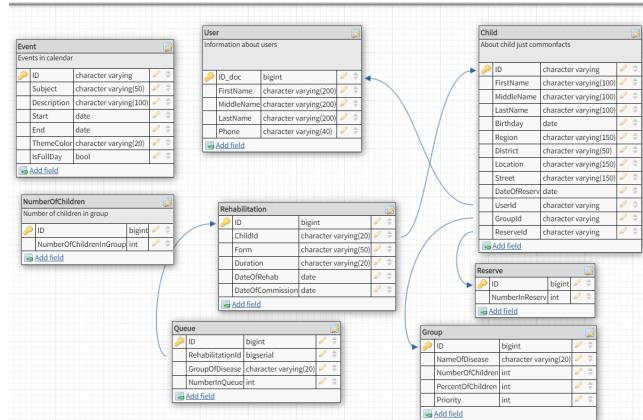
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Розробка програмного забезпечення – це тривалий багатограничний процес, що потребує ретельної роботи, перевірки валідності кожного елементу системи. Розробка спеціалізованого програмного забезпечення – це відповідальний процес, що зобов'язує розробника ретельніше виконувати усі вимоги замовника. Структура сучасного програмного забезпечення комплексна і розробляється, зазвичай, колективом (командою) програмістів. Команда розробників, як правило, складається із програмістів різного напряму та кваліфікації з розрахунку на те, що спільними зусиллями усіх учасників команди буде отримано найкращий результат.

Метою даної роботи є розробка програмного забезпечення для Буковинського центру комплексної реабілітації для дітей з інвалідністю "Особлива дитина", за допомогою якого можна автоматизувати організацію проведення реабілітації. Процес реабілітації у центрі проводиться за наперед визначенім графіком. Для кожного періоду реабілітації створюється група, яка складається із певної кількості пацієнтів різних типів захворювань. Ця задача вже реалізована. Одним із результатів роботи цього програмного засобу є збереження даних про пацієнтів.

Наступним кроком розробки є доповнення інформації, яка зберігається даними лікарів, які проводять реабілітацію, даними про результати проведення реабілітаційних занять.

Вхідними даними для продовження розробки є доповнення існуючої бази даних.



Програмний засіб реалізовано як сайт. Для збереження інформації використовується реляційна об'єкто-зоріентована база даних PostgreSQL. Для забезпечення бізнес-логіки використовується стек наступних технологій. Це інтегроване середовище розробки (IDE) від Microsoft Visual Studio [1]. Воно використовується для розробки веб-сервісів, комп'ютерних програм, веб-сайтів, веб-додатків та мобільних додатків. Visual Studio використовує платформи розробки програмного забезпечення Microsoft, такі як Windows API, Windows Forms, Windows Presentation Foundation, Windows Store і Microsoft Silverlight. Він може генерувати як керований, так і рідний код. Це безумовно універсальна мультипарадигмальна мова програмування C# [3]. Також це безкоштовна веб-платформа з відкритим вихідним кодом ASP.NET CORE [2], розроблена Microsoft. Для керування даними профілю, користувачами, токенами, паролями, ролями, заявами, підтвердженнями електронної пошти використовуємо ASP.NET Core Identity – це API, котрий підтримує вхід в інтерфейс користувача (UI) [4].

На даний момент ведеться розробка бізнес-логіки для можливості складання розкладу занять реабілітації. Формується календар занять для усіх пацієнтів певного терміну реабілітації із можливістю призначити усі заплановані заняття, враховуючи особливості роботи і лікарів і пацієнтів. Уся інформація зберігається у базі даних. Витяги із збереженої бази даних про конкретного пацієнта чи зайнятості лікарів можна отримати за запитом на вказану пошту, якщо користувач її зазначив і має право доступу до такої інформації. Розклад реабілітаційних занять обов'язково доводиться до відома особам, які супроводжують маленьких пацієнтів у зручному для них вигляді.

Ця розробка забезпечить можливість звільнити персонал реабілітаційного центру від рутинної роботи та використовувати цей час ефективніше.

1. Microsoft Visual Studio [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [https://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft\\_Visual\\_Studio](https://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Visual_Studio).
2. ASP.NET Core [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [https://en.wikipedia.org/wiki/ASP.NET\\_Core](https://en.wikipedia.org/wiki/ASP.NET_Core).
3. C Sharp (programming language) [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [https://en.wikipedia.org/wiki/C\\_Sharp\\_\(programming\\_language\)](https://en.wikipedia.org/wiki/C_Sharp_(programming_language)).
4. ASP.NET Core Identity [Archived] ) [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://github.com/aspnet/Identity>.
5. Introduction to Identity on ASP.NET Core [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://docs.microsoft.com/en-us/aspnet/core/security/authentication/identity?view=aspnetcore-6.0&tabs=visual-studio>.

# **Інформаційна карта функціонування державної мови**

*Iftoda Богдан, Юрійчук Анастасія*

*iftoda.bohdan@chnu.edu.ua, a.yuriychuk@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

Основним суспільним ресурсом ХХІ століття є інформація. Вона на-копичується у світі щосекунди і є невід'ємною складовою у повсякденній діяльності людини. Тому дуже важливим аспектом є відображення інформації зручним та наочним способом, адже це полегшує її сприйняття та загальнодоступність, а в деяких випадках відіграє ключову роль в її опрацюванні.

Розроблений вебдодаток представляє відомості про регіональний стан функціонування державної мови за допомогою електронної карти України, що значно спрощує відображення уже наявної інформації на сайті Уповноваженого із захисту державної мови. Раніше дані про прийняті регіональні рішення та програми розміщувались в окремих розділах сайту, у стрічці новин, у звітних документах, і для того, щоб знайти потрібні відомості доводилось витрачати багато зусиль на їх пошуки. Інтерактивна інформаційна mapa ж дозволяє без зайвих зусиль знайти та переглянути необхідну інформацію.

На головній сторінці вебдодатку відображається mapa України із адміністративно-територіальним поділом. Для маркування наявності або відсутності відомостей по певному регіону використовується колір. Якщо про область або обласний центр адміністратором була введена інформація, то на карті це відображається за допомогою блакитного та жовтого кольорів відповідно. В протилежному випадку ділянка на карті буде мати білий колір. Області та обласні центри є клікальними елементами, натиснувши на які відкривається вікно з переліком активних посилань (рис. 1) на файли чи інші інтернет-сторінки з інформацією про обраний регіон, зокрема:

- програма розвитку та функціонування державної мови;
- список відповідальних посадовців;
- інформація про скарги та заходи державного контролю.

При натисканні на будь-яке з гіперпосилань відбудеться перенаправлення на відповідну вебсторінку. Якщо ж вибрати об'єкт, для якого не було додано жодного гіперпосилання, то відобразиться повідомлення про те, що на даний момент інформація про стан функціонування державної мови в області або в обласному центрі відсутня.

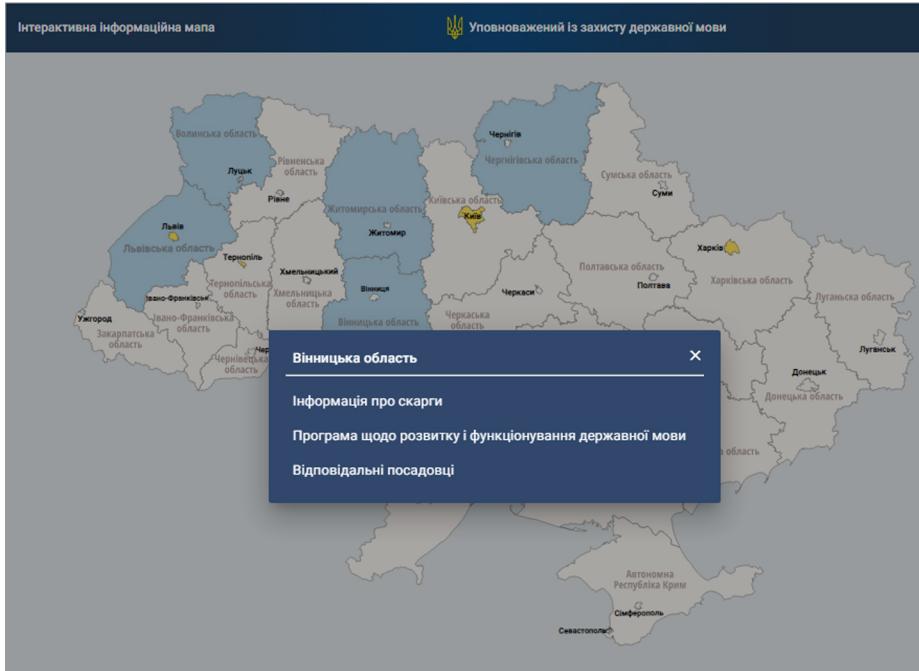


Рис. 1

Вебдодаток також надає адміністратору легкий та зручний спосіб додавання нової інформації та редагування вже наявної. Щоб внести відомості про певний регіон необхідно натиснути на відповідну область на карті, задати назву поля та вставити коректне гіперпосилання.

Реалізація програмного продукту виконана із використанням фреймворків Django, Django REST framework, Angular та, відповідно, мов програмування Python і TypeScript, об'єктно-реляційної системи керування базами даних PostgreSQL.

Вебдодаток має десктопну і мобільну версії, які забезпечують оптимальне відображення та взаємодію сайту з користувачем незалежно від пристрою, з якого він переглядається.

Ми живемо в епоху даних і маємо справу з величезними обсягами інформації, які людство коли-небудь створювало. Аби продуктивно існувати в таких умовах і швидко знаходити потрібні відомості, необхідно оформлювати інформацію стисло, категоризувати і представляти її у візуальній формі. Розроблений вебдодаток є хороший тому приклад.

**Проектор цифр ланцюгового зображення чисел засобами  
двоєимвольного алфавіту**

*Олена Нікорак*

19fmf.o.nikorak@std.pnu.edu.ua

*НПУ імені М.П. Драгоманова*

Розглядається ланцюгове несамоподібне зображення чисел відрізка  $[0; 1]$  дробами Данжуа, тобто ланцюговими дробами, елементами якого є числа 0 та 1.

Нехай  $A = \{0; 1\}$  — двосимвольний алфавіт (набір цифр),  $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i$  — простір скінчених та нескінчених послідовностей елементів алфавіту.

**Теорема 1** ([1]). *Для довільного числа  $x \in [0; 1]$  існує (скінчenna або нескінчenna) послідовність  $(d_n) \in L$  така, що*

$$x = \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{d_n + \ddots}}}} \equiv [0; d_1, d_2, \dots, d_n, \dots]^{D_2}, \quad (1)$$

де  $d_1 = 1$ , а  $d_{n+1} = 1$ , якщо  $d_n = 0$  для  $n \in N$ .

Ланцюговий дріб (1) називають *D<sub>2</sub>-представленням* числа  $x$ , а формальний запис  $[0; d_1, d_2, \dots, d_n, \dots]^{D_2}$  — його *D<sub>2</sub>-зображенням* числа  $x$ .

*D<sub>2</sub>*-зображення числа може мати скінченну кількість цифр, причому, оскільки має місце рівність

$$[0; d_1, d_2, \dots, d_n, 0, d_{n+1}, \dots]^{D_2} = [0; d_1, d_2, \dots, d_n, 0, \dots, 0, d_{n+1}, \dots]^{D_2},$$

то очевидно, що існують числа, які мають нескінченну множину різних зображень. Домовленістю не використовувати двох нулів підряд у D<sub>2</sub>-зображені числа можна домогтись того, що кожне число матиме не більше двох зображень, причому ті, що мають їх два вичерпуються числами виду

$$[0; d_1, d_2, \dots, d_n, 1, 1]^{D_2} = [0; d_1, d_2, \dots, d_n, 1, 0, 1]^{D_2}. \quad (2)$$

Такі числа називаються *D<sub>2</sub>-бінарними*. Решта чисел мають єдине зображення і називаються *D<sub>2</sub>-унарними*. Відомо, що множина D<sub>2</sub>-бінарні числа є підмножиною раціональних чисел, а тому є зліченною множиною нульової міри Лебега.

Геометрію D<sub>2</sub>-зображення чисел розкривають властивості множин (фігур), які на фіксованих місцях мають задані цифри, а саме: довжина циліндра і основне метричне відношення. Циліндр  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{D_2}$  рангу  $m$  з

основою  $c_1c_2\dots c_m$  (множина чисел виду  $[0; c_1, c_2, \dots, c_m, d_1, d_2, \dots]$ ,  $d_n \in A$ ) є відрізком, причому мають місце рівності

$$\min \Delta_{c_1\dots c_{2k-1}10}^{D_2} = \max \Delta_{c_1\dots c_{2k-1}11}^{D_2}, \quad \min \Delta_{c_1\dots c_{2k}11}^{D_2} = \max \Delta_{c_1\dots c_{2k}10}^{D_2}. \quad (3)$$

Розглядається функція  $f$ , означена рівністю

$$f([0; d_1, d_2, \dots, d_n, \dots]^{D_2}) = [0; g_1, g_2, \dots, g_n, \dots]^{D_2}, \quad (4)$$

де  $g_1 = 1$ ,  $g_n = 1 - d_n g_{n-1}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Функція  $f$  є некоректно означененою у  $D_2$ -бінарних точках, оскільки для  $[0; 1, 1]^{D_2} = [0; 1, 0, 1]^{D_2}$  виконується нерівність:  $f([0; 1, 1]^{D_2}) = [0; 1, 0]^{D_2} = 1 \neq f([0; 1, 0, 1]^{D_2}) = [0; 1, 1, 0]^{D_2} = \frac{1}{2}$ . Тому задля коректності означення об'єкта домовимося не використовувати одне з зображень  $D_2$ -бінарних чисел, а саме  $[0; d_1, d_2, \dots, d_n, 1, 0, 1]^{D_2}$ .

**Лема 1.**  $D_2$ -цифра  $g_n$  значення функції  $f$  залежить від  $n$ -перших цифр аргумента  $d_1, d_2, \dots, d_n$  і однозначно визначається рівністю

$$g_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{k+1} \prod_{i=0}^k d_{n-i}, \quad (5)$$

**Лема 2.** Образом  $f(\Delta_{d_1d_2\dots d_m}^{D_2})$  циліндра  $\Delta_{d_1d_2\dots d_m}^{D_2}$  є циліндр  $\Delta_{g_1g_2\dots g_m}^{D_2}$  рангу  $m$ , де  $g_n = 1 - d_n g_{n-1}$ , причому якщо  $(d_{m-1}, d_m) = (1, 0)$ , то  $(g_{m-1}, g_m) \in \{(1, 1), (0, 1)\}$  і якщо  $(d_{m-1}, d_m) = (1, 1)$ , то  $(g_{m-1}, g_m) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$ .

**Теорема 2.** Функція  $f$  є спадною функцією, причому розривною на множині  $D_2$ -бінарних чисел і неперервною в решті точок області визначення.

**Теорема 3.** Множина значень функції  $f$  є ніде не щільною, замкненою множиною нульової міри Лебега у  $D_2$ -зображені чисел якої не використовуються комбінації цифр 00 і 111.

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, фрактальних властивостей функції, властивості множин рівнів.

1. Iosifescu M., Kraaikamp C. On Denjoy's canonical continued fraction expansion // Osaka J. Math. — 40 (2003). — no. 1. — P. 235–244.
2. Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Ya.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P. Continued  $A_2$ -fracsions and singular functions // Matematychni Studii. V.58, No.1(2022).
3. Працьовитий М.В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. — Київ: Наукова думка. — 2022. — 316с.
4. Нікорак О.О. Одна фрактальна функція інверсного типу, визначена у термінах  $D_2$ -зображення чисел однічного відрізка// Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2021. — № 21.— С. 34–41

# **Тестування програмного забезпечення у проекті ”Реабілітаційний центр ”Особлива дитина””**

*Марія Петрусяк*

*petrusiak.maria@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

Тестування або забезпечення контролю якості – це постійний і впорядкований процес, який допомагає інженерам-тестувальникам дізнатися, чи відповідає програмне забезпечення конкретним і точним вимогам.

Для реалізації даної роботи вирішили тестувати проект для взаємодії між фахівцями Буковинського реабілітаційного центру ”Особлива дитина” та батьками, у яких є діти з інвалідністю віком до 18 років.

У роботі розглядається процес автоматизації тестування програмного забезпечення. Першим етапом був аналіз предметної області, розбір вимог до програмного продукту та написання тестової документації.

Оскільки дану програму потрібно було тестувати з нуля, то для більшої кількості протестованого функціоналу було вирішено написати чек-листи.

У тестуванні чек-лист – це перелік перевірок для тестування продукту. Чек-листи влаштовані дуже просто. Будь-який містить перелік блоків, секцій, сторінок, інших елементів, які слід протестувати.

Переваги використання чек-листів:

- покращити уявлення про систему загалом, бачити статус її готовності;
- розуміти обсяг виконаної та майбутньої роботи з тестування;
- не повторюватися в перевірках і не пропустити нічого важливого в процесі тестування.

Для автоматизації тестування було вирішено писати End-to-end тести.

Наскрізне тестування, воно ж End-to-end або E2E – це процес тестування, при якому відбувається докладна емуляція користувача в середовищі.

Суть цього тестування – подивитися, чи працює програма для кінцевого клієнта, як розрахувалося спочатку. При цьому потрібно враховувати, що користувачу все одно, чи функціонує програма ”як треба”, головне, щоб програма функціонувала і виправдовувала очікування, тому основний наголос робиться на коректне функціонування, тобто позитивне тестування.

У ході розробки автоматизації було обрано POM (Page Object Model) патерн проектування – типовий спосіб вирішення певної проблеми, що часто зустрічається при проектуванні архітектури програм.

Вибір технологій випав на Selenium WebDriver та Ruby, а саме Cucumber та Capybara.

WebDriver – це популярний інструмент управління браузером, який

максимально правдиво імітує дії користувача.

Cucumber – це інструмент тестування програмного забезпечення з відкритим кодом. Cucumber дозволяє писати тест кейси, які кожен може легко зрозуміти незалежно від технічних знань.

Автоматизація тестування Cucumber використовує два важливих файли:

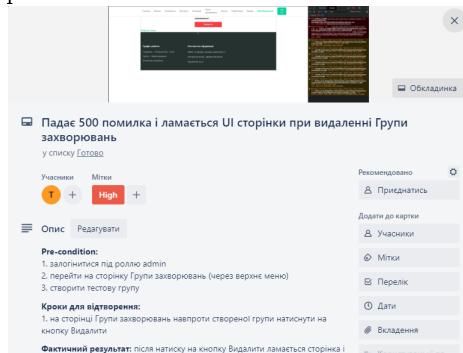
1. Feature file (файл із розширенням .feature) – містить код, написаний простою англійською мовою.

2. Step Definition file (файл із визначеними кроками) – містить фактичний код, написаний розробником, використовуючи Capybara.

Capybara – це бібліотека, написана мовою програмування Ruby, яка дозволяє легко моделювати, як користувач взаємодіє із додатком.

Отже, в ході даної роботи було спершу мануально протестовано проект "Особлива дитина", також було створено фреймворк для автоматизації тестування та автоматизовано найважливіші тестові випадки. Всі знайдені дефекти в ході тестування було записано в трекенговій системі Trello.

Відповідно до написаних автоматизованих тестів було створено Traceability matrix, де можна побачити, який функціонал вже протестований. Traceability matrix дає можливість порахувати відсотковість покриття тестами нашої програми.



Розроблений програмний продукт є сайтом, тому тестування проводиться з урахуванням інтересів потенційного користувача та зважаючи на забезпечення потрібної бізнес-логіки. Наведено один із прикладів знайдених помилок.

Отже, саме так було організовано тестування програмного продукту. Тестування – це важливий етап в розробці програми, тому що саме тестувальник бере на себе роль кінцевого користувача та може заздалегідь виявити дефект, що дозволяє в подальшому випустити на кінцевий ринок якісний продукт. Адже саме для проекту "Особлива дитина" надзвичайно важливо, щоб програмний продукт був чітким, зрозумілим та простим у користуванні.

# **Мобільні застосунки для вивчення програмування в шкільному освітньому процесі**

*Слободян Ганна, Перун Галина*

*slobodian.hanna@chnu.edu.ua, g.perun@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

Останні роки змусили процес навчання набути значно іншого характеру. У зв'язку з пандемією та повномаштабною війною в Україні, ледь не всі навчальні заклади перейшли на змішану чи повністю дистанційну форму навчання. Таке рішення має ряд переваг. Набагато простіше і швидше навчатися прямо з дому. Тим не менше, для того, щоб забезпечити можливість отримувати знання на відстані, потрібно мати, як мінімум, смартфон та якісний інтернет зв'язок. У сучасності доволі популярною та прибутковою є ІТ сфера. Стационарна форма навчання давала можливість людям, що не мають вдома персонального комп'ютера, навчатися програмуванню. На жаль, навіть зараз не кожен може дозволити собі якісний смартфон, не те що ПК. Тому розглянемо ряд мобільних застосунків, що дозволяють вивчати програмування дітям різного віку в своєму смартфоні.

ScratchJr – початкова мова програмування в мобільному застосунку, що є спрощеним варіантом стандартного Scratch. Тут є тільки шість категорій команд в кожному з яких від п'яти до семи скриптів, які можна застосувати до об'єктів. Головним героєм залишився рудий кіт. Програма дозволяє обирати інші об'єкти з меню, або створювати власні. Такі ж функції збереглися по відношенню і до сцени. Застосунок розрахований для опанування дітьми від шести років і є повністю безкоштовним. Мова подання інформації - українська.

Codeacademy Go – застосунок для початку вивчення веброзробки Data Science, Python, SQL, HTML&CSS, Java та ін. У додатку можна вивчати не тільки ці мови, але і проходити курси за різними напрямами. Будь-який курс можна пройти в будь-який момент, проходити попередні курси необов'язково. Застосунок є безкоштовним, але можлива підписка для доступу до всіх курсів. Інформація подається англійською мовою.

Dcoder, code compiler IDE – це застосунок-компілятор для програмістів. Середовище підтримує понад тридцять мов програмування. Містить розділ з завданнями, які допоможуть в вивчені програмування. Застосунок надає наступні можливості:

- синхронізації з GitHub і Bitbucket;
- підсвічування синтаксису;
- робота з проектами з декількох файлів;
- налагодження коду.

У застосунку лаконічний і зrozумілий дизайн. Також є чат з інши-

ми розробниками. Основний функціонал безкоштовний. Мова додатку - англійська.

Datacamp – це програма, яка пропонує вивчення тільки трьох таких мов: SQL, Python та R. Не зважаючи на невеликий вибір, для сфери аналізу даних цього більш ніж достатньо. Вивчати програмування можна користуючись як безкоштовною так і платною версією застосунку. Для кожної мови є декілька шляхів розвитку, котрі також розділені на теми. Навчання проходить у форматі теоретичної відео-частини та практики з написанням коду й запитаннями з варіантами відповідей. Мова використання – англійська.

Проаналізувавши перераховані додатки можна зрозуміти, що практичне вивчення мов програмування, під час освітнього процесу, можливе не зважаючи на доступність персональних комп'ютерів. Єдиним вагомим мінусом є відсутність українськомовного інтерфейсу, що може ускладнити навчання. Проте майже всі англомовні застосунки можна використовувати як вільне середовище для програмування, де завдання буде подавати вчитель. Крім того, в застосунках є пільгий ряд переваг: широкий вибір мов програмування; орієнтація на різні вікові категорії; додаткові, вже готові, варіанти завдань. Отже, вони дозволяють вчителю якісно подавати навчальний матеріал.

1. <https://skillspot.co/learning-to-code-on-your-phone-the-best-coding-apps-of-2021/>

# Інструменти розробки мов програмування для платформи .NET

Тетяна Сопронюк, Андрій Дробот

t.sopronyuk@chnu.edu.ua, drobot.andrii@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича

У даній роботі пропонується інструментарій для розробки мов програмування на платформі .NET. Всі етапи розробки візуалізуються на прикладі реалізації оператора присвоєння, адже будь-яка мова високого рівня не обходиться без нього. У ці інструменти входять: генератор синтаксичних аналізаторів Antlr, мова програмування C# та шаблон проектування "Відвідувач" ("Visitor") [1]. Для візуалізації використано бібліотеку GraphViz.

Візьмемо для прикладу такий оператор присвоєння з деякої мови програмування високого рівня: **abc:=5+(price+tax)\*0.9.**

Мета — поставити у відповідність будь-якому оператору присвоєння з використанням ідентифікаторів, констант, арифметичних операцій та вкладених дужок фрагмент коду мовою CIL (Common Intermediate Language) для віртуальної машини .NET.

У середовищі Antlr нами створено граматику, яка описує структуру таких операторів присвоєння:

```
grammar Operator;
assignment: IDEN ASSIGN e;
e: e PLUS t | t;
t: t MULT f | f;
f: LEFT e RIGHT | oper;
oper: IDEN | NUMBER;
NUMBER: ([0-9]*[.])?[0-9]+;
IDEN: [a-zA-Z]+;
PLUS: '+';
MULT: '*';
LEFT: '(';
RIGHT: ')';
ASSIGN: ':=';
```

Також засобами Antlr виконуються два етапи компіляції програми: лексичний аналіз і синтаксичний аналіз. Відповідно для кожного з цих етапів було згенеровані окремі класи OperatorLexer та OperatorParser.

Завдання класу OperatorLexer полягає в тому, щоб із вхідної послідовності символів згенерувати послідовність лексем - токенів. Під лексемою розуміються найменша змістовна одиниця.

У випадку нашого оператора присвоєння розпізнаються такі типи лексем: ідентифікатор, числовий константа, операція присвоєння, операції додавання та множення, ліва та права дужки. Крім розпізнавання лексем, в класі OperatorLexer проводиться пошук лексичних помилок, наприклад,

недопустимих символів. На етапі лексичного аналізу реалізовано також підхід, який ґрунтуються на теорії автоматів: генерується і візуалізується автомат з різними типами заключних станів (Рис. 1) для розпізнавання різних типів лексем (Рис. 2).

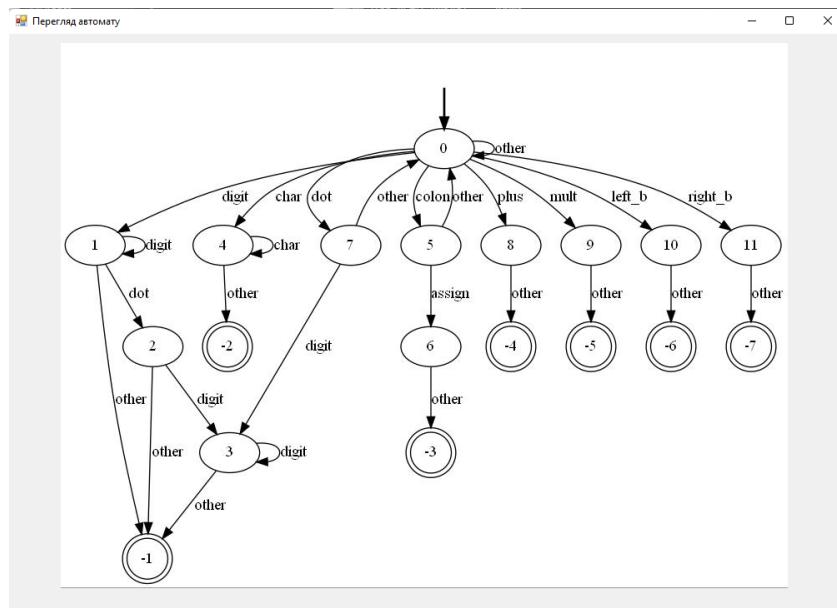


Рис. 1: Автомат з різними типами заключних станів

Деталі автомата			
Групи символів		Заключні стани автомата	
Назва групи символів	Символи	Стан	Значення
CHAR	A-Z a-z	-1	Розпізнано число
DIGIT	0-9	-2	Розпізнано ідентифікатор
DOT	.	-3	Зустріли інший символ після присвоєння
COLON	:	-4	Зустріли інший символ після +
ASSIGN	=	-5	Зустріли інший символ після *
MULT	*	-6	Зустріли інший символ після (
PLUS	+	-7	Зустріли інший символ після )
LEFT_B	(		
RIGHT_B	)		
OTHER	Будь-який інший символ		

Рис. 2: Деталі детермінованого скінченного автомату

Результатом роботи класу OperatorParser є синтаксичне і абстрактне дерева розбору (Рис. 3). Конструктор класу приймає набір токенів, згенерованих за допомогою класу OperatorParser.

Аналогічно класу OperatorLexer, обов'язком класу OperatorParser є вивалення синтаксичних помилок. Прикладом такої помилки може бути недопустимий порядок операцій.

Для обходу отриманого дерева розбору і генерації проміжного коду [2] використовується шаблон проектування "Відвідувач" (Visitor). Шаблон відвідувач дає змогу легко додавати нові операції — потрібно просто додати новий похідний від відвідувача клас.

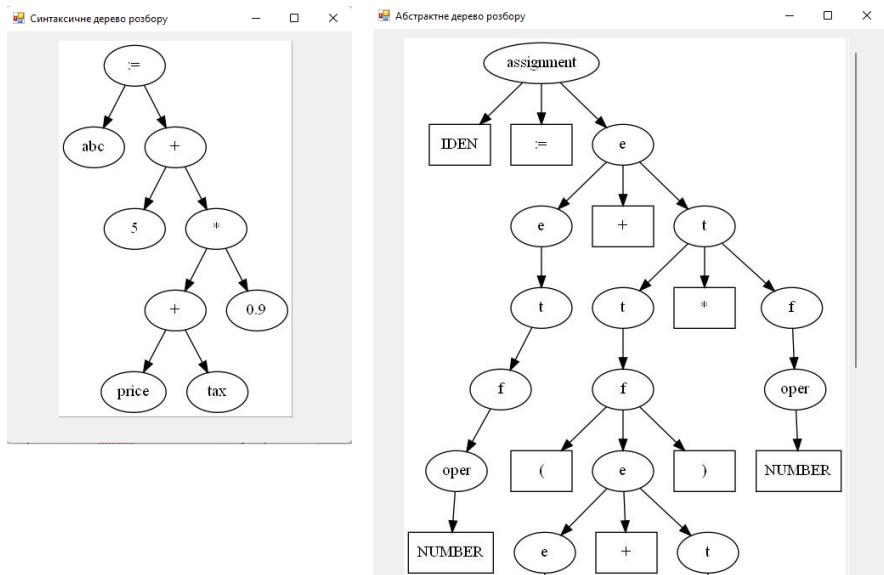


Рис. 3: Результат виконання програмою синтаксичного аналізу

У компіляторі, що використовує проміжну мову, може бути два етапи вибору інструкцій - один для перетворення дерева синтаксичного аналізу в проміжний код, а другий етап для перетворення проміжного коду в інструкції з набору команд цільової машини. Ця друга фаза не вимагає обходу дерева; вона може бути виконана лінійно і зазвичай включає просту заміну операцій на відповідні їм коди проміжної мови. Такий підхід і було використано нами. Спочатку дерево перетворюється у команди власної проміжної мови, після чого вони перетворюються у команди мови CIL для віртуальної машини .NET (Рис. 4).

The screenshot shows the main interface of the Sumator application. At the top, there's a search bar with the placeholder "Оператор присвоєння:" containing the text "abc:=5+(price+tax)\*0.9". To its right is a button labeled "Результат". Below the search bar, there are two sections: "Проміжна мова" (Intermediate Language) on the left and "Мова CIL" (CIL Language) on the right. The intermediate language section contains a list of assembly-like instructions: Load =0.9, Store \$2, Read tax, Store \$1, Read price, Add \$1, Mpy \$2, Store \$3, Load =5, Add \$3, and a highlighted instruction "Store abc". The CIL language section shows the generated CIL code, which includes method definitions for reading input, parsing strings, and performing arithmetic operations like addition, multiplication, and assignment. To the right of the CIL code, there are three lines of output: "\$1 - 10", "\$2 - 0,9", and "\$3 - 99". Below the CIL code, specific variable values are listed: abc - 104, price - 100, and tax - 10. At the bottom of the interface, there are several buttons: "Назад" (Back), "Старт" (Start), "Далі" (Next), "Відкрити повний IL" (Open full IL), and "Суматор: 104". On the right side, there's a section titled "Лексичний аналіз" (Lexical Analysis) with a grammar rule: <iden,p1><assign><number,q1><plus><left><iden,p2><plus><iden,p3><rig>. Below this are buttons for "За допомогою граматики" (Using grammar), "За допомогою автомата" (Using automata), and "Перегляд автомата" (View automata). At the very bottom, there are two more buttons: "Абстрактне дерево розбору" (Abstract parse tree) and "Синтаксичне дерево розбору" (Syntax parse tree).

Рис. 4: Головне вікно програми

Програма дозволяє покрокове виконання проміжного коду з демонстрацією міститого тимчасових змінних і суматора (проміжних результацій).

Отже, на прикладі одної інструкції мови програмування високого рівня (оператора присвоєння) нами продемонстровано генерацію програми мовою CIL. Аналогічно, за такою ж схемою будуються коди для інших інструкцій мови програмування високого рівня. Виконання отриманого коду перекладається на платформу .NET.

1. Santosh Singh. ANTLR C# Cookbook – 2019. – [Електронний ресурс]. URL: <https://www.amazon.com/Create-Compiler-Using-ANTLR-Crash-Course-ebook/dp/B09BJ4CRTJ>
2. Сопронюк Т.М. Системне програмування. Частина II. Елементи теорії компіляції: Навчальний посібник у двох частинах. – Чернівці: ЧНУ, 2008. – 64 с.

## **Емулятор машини Тюрінга**

*Микола Філіпчук, Ольга Філіпчук*

*m.filipchuk@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федковича*

Машина Тюрінга (МТ) – абстрактна обчислювальна машина, запропонована в 1936 р. англійським математиком Аланом Тюрінгом для формального визначення поняття алгоритму [1]. Вона традиційно завжди розглядається при викладанні студентам ВНЗ розділу «Теорія алгоритмів» в курсах дискретної математики чи математичної логіки та теорії алгоритмів.

Багаторічний досвід викладання вищезгаданих курсів показав, що певна частина студентів відчуває труднощі з розумінням та ефективним застосуванням матеріалу даного розділу, у зв'язку з чим виникає потреба використання у процесі викладання якогось зручного наглядного демонстраційного засобу. Враховуючи цей аспект, одним із авторів даної праці було створено Web-емулятор МТ. Реалізація емулятора виконана засобами HTML 5, CSS 3 та JavaScript.

Створений емулятор має дружній, інтуїтивно зрозумілий інтерфейс користувача та надає наступні можливості:

- 1) задання потрібного зовнішнього алфавіту МТ та вказування відповідного порожнього символу у ньому;
- 2) динамічне формування потрібного внутрішнього алфавіту МТ;
- 3) режим конструктора команд для формування програми МТ у вигляді таблиці команд;
- 4) режим конструктора для формування потрібної початкової конфігурації МТ;
- 5) завантаження заданих початкової конфігурації та відповідної програми МТ у пам'ять емулятора для подальшого виконання;
- 6) покрокове ручне чи повне автоматичне виконання програми МТ з можливістю регулювання швидкості виконання тактів;
- 7) візуалізація на кожному такті відповідної поточної проміжної конфігурації МТ та команди, яка буде виконуватися;
- 8) у випадку застосовності МТ до початкового слова, демонстрація відповідної кінцевої конфігурації МТ;
- 9) режим експорту поточного коду програми МТ у вигляді переліку команд;
- 10) режим імпорту існуючого коду програми МТ з автоматичним формуванням в емуляторі відповідних зовнішнього та внутрішнього алфавітів, а також таблиці команд;
- 11) можливість модифікації раніше сформованої чи імпортованої програми МТ.

Інтерфейс і роботу емулятора продемонстровано на рис. 1–6.

### Стрічка машини Тюрінга

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

**Зовнішній алфавіт**

<input type="checkbox"/> Цифри	<input type="checkbox"/> Букви	<input type="checkbox"/> Інше
<input checked="" type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> k
<input checked="" type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> l
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> c	<input type="checkbox"/> m
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> n
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> e	<input type="checkbox"/> o
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> f	<input type="checkbox"/> p
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> g	<input type="checkbox"/> q
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> h	<input type="checkbox"/> r
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> i	<input type="checkbox"/> s
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> j	<input type="checkbox"/> t
<input type="checkbox"/> Порожній символ: 0		

**Внутрішній алфавіт**

- $q_0$
- $q_1$

**Додати стан**
**Видалити стан**

**Програма**

	<b>0</b>	<b>1</b>
$q_1$		
$q_0$		

**Експорт**
**Імпорт**

Рис. 1. Інтерфейс і стартовий вигляд емулятора

**Зовнішній алфавіт**

<input type="checkbox"/> Цифри	<input type="checkbox"/> Букви	<input type="checkbox"/> Інше
<input checked="" type="checkbox"/> 0	<input checked="" type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> k
<input checked="" type="checkbox"/> 1	<input checked="" type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> l
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> c	<input type="checkbox"/> m
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> n
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> e	<input type="checkbox"/> o
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> f	<input type="checkbox"/> p
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> g	<input type="checkbox"/> q
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> h	<input type="checkbox"/> r
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> i	<input type="checkbox"/> s
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> j	<input type="checkbox"/> t
<input type="checkbox"/> Порожній символ: 0		

**Внутрішній алфавіт**

- $q_0$
- $q_1$
- $q_2$

**Додати стан**
**Видалити стан**

**Програма**

	<b>0</b>	<b>a</b>	<b>b</b>
$q_1$	$q_2$	$0\ L$	$q_1\ b\ R$
$q_2$		$q_2\ a\ L$	
$q_0$			

**Експорт**
**Імпорт**

**Введіть команду:**  $q_2, b \rightarrow$

-
-
-
Ввід
Відміна

Рис. 2. Режим конструктора команд для формування програми

**Стрічка машини Тюрінга**

0	0	0	0	0	0	a	b	b	a	b	<b>0</b>	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----------	---	---	---	---	---	---

**Введіть символ:** 0
**Ввід**
**Відміна**
**або**
**Встановіть голівку**
**або**
**Очистіть стрічку**

Рис. 3. Режим конструктора для формування початкової конфігурації

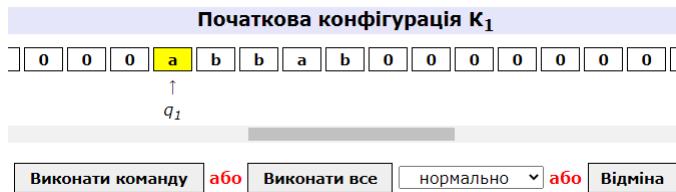


Рис. 4. Приклад сформованої початкової конфігурації

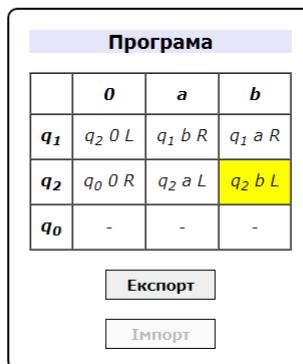


Рис. 5. Емулятор в процесі виконання заданої програми

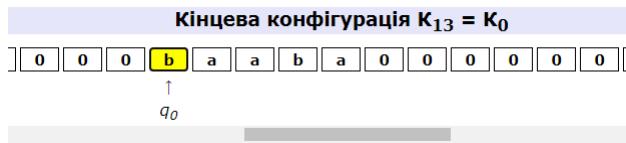


Рис. 6. Демонстрація відповідної кінцевої конфігурації

Емулятор доступний за посиланням:

<http://kolya.pp.ua/MT.html>

1. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. — К.: Видавничча група BHV, 2007. — 368 с.

# **Розробка низькорівневого програмного забезпечення для маршрутизаторів на платформі ARM**

*Антон Шанін*

*shanin.anton@chnu.edu.ua*

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

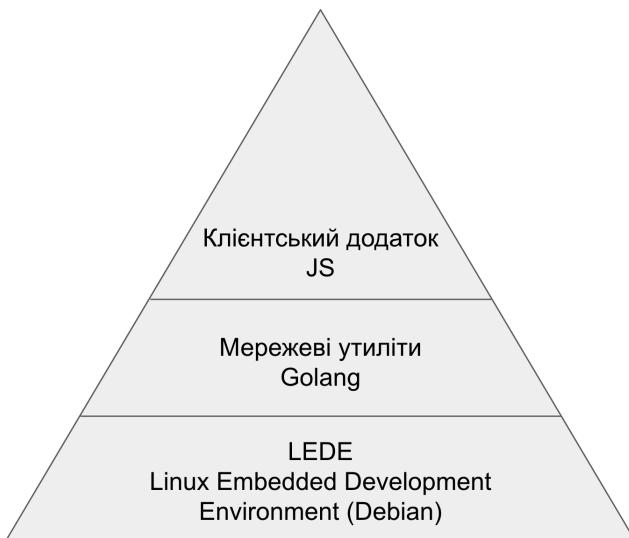
Маршрутизатор – це головний пристрій в топології комп’ютерної мережі, що відповідає за швидке та інкапсульоване доставлення мережевих пакетів до кінцевого пристрою. Через нього проходить весь потік інформації, яка має бути захищена від потенційних атак, викрадення даних та шахрайства [1].

Метою даної роботи є розробка програмного забезпечення, для най-розвинутих маршрутизаторів, які представлені на ринку України. Основною ідеєю була розробка альтернативного ПЗ, наданого виробником, яка в свою чергу забезпечує швидку та безпечну передачу даних та є зручною для налаштування і підтримки мережі, з інтуїтивно зрозумілим дизайном та гнучкістю налаштування і конфігурування процесів [2]. Кінцевий користувач розробленого ПЗ має можливість самостійно визнати бажану процесорну і сигнальну потужність маршрутизатора, налаштовувати різноманітні оптимізаційні процеси та шари захисту локальної мережі.

Розроблене ПЗ створене на основі ядра Linux є відкритим програмним забезпеченням, вільнодоступним для встановлення на будь-які пристрой користувачі та має наступні переваги [2]:

1. Оптимізоване використання ресурсів процесора шляхом використання розподілених запитів.
2. Підтримка VPN та Proxу, яку можна налаштувати без додаткових залежностей на пристроях в мережі.
3. Підтримка запуску користувальських команд через протоколи SSH та Telnet або запуску SiriCommands.
4. Програмна підтримка сучасних стандартів Wi-Fi a/b/g/n (специфікація RFC номер 5416).
5. Локальне відслідковування підозрілого трафіку, яке виходить з маршрутизатора.

Архітектура розробленого ПЗ наведена на рисунку



При розробці програмного забезпечення було створено покращену реалізацію протоколу MPTCP (MultiPath Transmisson Control Protocol) на основі RFC 8684, яка дозволяє одночасно створювати два та більше підключень до хостів, що забезпечує пришвидшений та безперебійний доступ по мережі. MPTCP - це значне підсилення для користувачької мережі та додатків, оскільки забезпечується стійкість ваших додатків і є можливість використовувати більшу мережеву пропускну здатність [4]. Алгоритм використання протоколу MPTCP, запропонований в роботі, дозволяє знаходити найшвидший шлях у мережі, що робить описану технологію ідеальним варіантом для вирішення описаних в роботі проблем.

1. Vincent Zimmer, Jiming Sun, Marc Jones, Stefan Reinauer. *Embedded Firmware Solutions: Development Best Practices for the Internet of Things*, 2015.
2. Шанін А. А. Проектування низькорівневого програмного забезпечення для маршрутизаторів на платформі ARM // Матеріали студентської наукової конференції Чернівецького національного університету (12–14 квітня 2022 року). Факультет математики та інформатики. – Чернівці : Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, 2022. – С. 93–94.
3. Jacob Beningo. *Developing Reusable Firmware: A Practical Approach to APIs, HALs and Drivers*, 2017.
4. Mijanur Rahaman Palash. *Multipath TCP in Wireless Networks*. Southern Illinois University Carbondale, 2018. С. 45–60.

**Автономні нелінійні крайові задачі для невироджених диференціально-алгебраїчних систем**

*Сергій Чуйко, Олена Чуйко, Дар'я Д'яченко*

*chuiko-slav@ukr.net*

*Донбаський держ. пед. ун-т, 84 112, Україна, Донецька обл., Слов'янськ*

Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі для невиродженої диференціально-алгебраїчної системи. Побудовано збіжну ітераційну схему для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної крайової задачі для невиродженої диференціально-алгебраїчної системи.

Позначимо  $A$  та  $B = (m \times n)$  – вимірні матриці та  $Z(z, \varepsilon) = n$  – вимірну вектор-функцію. Слабконелінійною автономною періодичною диференціально-алгебраїчною крайовою задачею будемо називати задачу про знаходження розв'язку [1, 2]

$$z(t, \varepsilon) = \text{col}(z^{(1)}(t, \varepsilon), \dots, z^{(n)}(t, \varepsilon)), \quad z^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)],$$

$$z^{(i)}(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad b(0) := b^*, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

диференціально-алгебраїчної системи

$$A z' = B z + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad (1)$$

який задовільняє крайову умову

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha. \quad (2)$$

Тут  $\ell z(\cdot, \varepsilon)$  – лінійний обмежений векторний функціонал

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b(\varepsilon)] \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо в малому околі розв'язку не-терової ( $q \neq n$ ) диференціально-алгебраїчної

$$z_0(t) = \text{col}(z_0^{(1)}(t), \dots, z_0^{(n)}(t)), \quad z_0^{(i)}(\cdot) \in \mathbb{C}^1[a, b^*], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

породжуючої крайової задачі

$$A z'_0 = B z_0, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^q. \quad (3)$$

Вектор-функцію  $Z(z, \varepsilon)$  припускаємо неперевно-диференційованою за не-відомою  $z(t, \varepsilon)$  у малому околі розв'язку породжуючої задачі і неперевно-диференційованою за малим параметром  $\varepsilon$  в малому додатному околі нуля.

Матрицю  $A$  припускаємо, взагалі кажучи, прямокутною:  $m \neq n$ , або квадратною, але виродженою. За умови [3]

$$P_{A^*} = 0 \quad (4)$$

породжуюча система (3) приводиться до традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$z'_0 = A^+ B z_0 + P_{A_{\rho_0}} \nu_0; \quad (5)$$

тут

$$\operatorname{rank} A := m < n.$$

Крім того,  $A^+$  — псевдообернена (по Муру — Пенроузу),  $P_{A^*}$  — матриця-ортопроектор:

$$P_{A^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(A^*),$$

$P_{A_{\rho_0}}$  —  $(n \times \rho_0)$ -матриця, утворена з  $\rho_0$  лінійно-незалежних стовпців  $(n \times n)$ -матриці-ортопроектора

$$P_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(A),$$

$\nu_0 \in \mathbb{R}^{\rho_0}$  — довільна константа. Припустимо, що періодична задача для системи (5) представляє критичний випадок:

$$P_{Q^*} \neq 0, \quad Q := \ell X_0(\cdot).$$

У критичному випадку для фіксованої константи  $\nu_0 \in \mathbb{R}^{\rho_0}$  за умови

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[ \nu_0 \right] (\cdot) \right\} = 0 \quad (6)$$

породжуюча задача (3) має  $r$ -параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + G \left[ \nu_0 \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут  $X_0(t)$  — нормальна ( $X_0(a) = I_n$ ) фундаментальна матриця однорідної частини диференціальної системи (5), крім того

$$G \left[ \nu_0 \right] (t) := X_0(t) Q^+ \ell K \left[ \nu_0 \right] (\cdot) + K \left[ \nu_0 \right] (t)$$

— узагальнений оператор Гріна породжуючої періодичної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (5),

$$K \left[ \nu_0 \right] (t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s) \nu_0 ds$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші  $z(a) = 0$  для диференціально-алгебраїчної системи (5). Матриця  $P_{Q_d^*}$  утворена з  $d$  лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора  $P_{Q^*}$ , а матриця  $P_{Q_r}$  — з  $r$  лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора  $P_Q$ . За умови (4) система (1) приводиться до традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$z' = A^+ B z + P_{A_{\rho_0}} \nu_0 + \varepsilon A^+ Z(z, \varepsilon); \quad (7)$$

Як відомо [1, 3], автономна періодична крайова задача для системи (7) суттєво відрізняється від аналогічних неавтономних періодичних задач; на відміну від останніх, правий кінець  $b(\varepsilon)$  проміжку  $[a, b(\varepsilon)]$ , на якому шукаємо розв'язок нелінійної крайової задачі для системи (7), невідомий і підлягає визначенню в процесі побудови самого розв'язку. Скористаємося прийомом [3], який полягає у зображенні невідомої функції

$$b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) := \beta^*.$$

Функція  $\beta(\varepsilon)$  підлягає визначенню в процесі знаходження розв'язку періодичної крайової задачі для системи (7). Сутність прийому полягає в заміні незалежної змінної

$$t = a + (\tau - a)(1 - \varepsilon\beta(\varepsilon))$$

і знаходженні розв'язку нелінійної крайової задачі для системи (7) і функції  $\beta(\varepsilon)$ , як функції малого параметра. У критичному випадку за умови (6) для фіксованої константи  $\nu_0 \in \mathbb{R}^{\rho_0}$  умова розв'язності нелінійної крайової задачі для системи (7) набуває вигляду

$$\begin{aligned} P_{Q_d^*} \left\{ (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)) \alpha - \ell K \left[ \beta(\varepsilon)(A^+ B z(t, \varepsilon) + P_{A_{\rho_0}} \nu_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)) A^+ Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon) \right] (\cdot) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Використовуючи неперервність нелінійної вектор-функції  $Z(z(t, \varepsilon), \varepsilon)$ , по  $\varepsilon$  у малому додатному околі нуля, переходимо до межі при  $\varepsilon \rightarrow 0$  у рівності (8) і отримуємо необхідну умову

$$\begin{aligned} F(\check{c}_0) := P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[ \beta^*(A^+ B z_0(t, c_r^*) + P_{A_{\rho_0}} \nu_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + A^+ Z(z_0(t, c_r^*), 0) \right] (\cdot) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

існування розв'язку періодичної задачі для системи (1) у критичному випадку; тут

$$\check{c}_0 := \begin{pmatrix} c_r^* \\ \beta^* \end{pmatrix}.$$

Таким чином, доведена наступна лема.

**Лема 1.** *Припустимо, що автономна періодична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) для фіксованої константи  $\nu_0 \in \mathbb{R}^{\rho_0}$  за умов (4) та (6) представляє критичний випадок  $P_{Q^*} \neq 0$  і має розв'язок*

$$z(t, \varepsilon) = \text{col}(z^{(1)}(t, \varepsilon), \dots, z^{(n)}(t, \varepsilon)), \quad z^{(i)}(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)],$$

$$z^{(i)}(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

який при  $\varepsilon = 0$  перетворюється на породжуючий

$$z(t, 0) = z_0(t, c_r^*).$$

Тоді вектор

$$\check{c}_0 \in \mathbb{R}^{r+1}$$

задовільняє рівняння (9).

Перші  $r$  компонент  $c_r^* \in \mathbb{R}^r$  кореня рівняння (9) визначають амплітуду породжуючого розв'язку  $z_0(t, c_r^*)$ , у малому околі якого може існувати шуканий розв'язок вихідної задачі (1), (2). Крім того, з рівняння (9) може бути знайдена величина  $\beta^*$ , яка визначає перше наближення до невідомої функції

$$b_1(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta^*.$$

Якщо ж рівняння (9) не має дійсних коренів, то вихідна диференціально-алгебраїчна задача (1), (2) не має шуканих розв'язків. Рівняння (9) будемо далі називати рівнянням для породжуючих констант автономної нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2). Як відомо [3, 4, 5, 6], вихідна диференціально-алгебраїчна задача (1), (2) розв'язана за умови простоти коренів рівняння (9) для породжуючих констант.

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. Campbell S.L., Petzold L.R. Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Alg. Descrete Methods. – 1983. – № 4. – Pp. 517–521.
3. Chuiko S. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – Vol. 17. – № 1. – Pp. 139–150.
4. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – Л.; М.: Гостехиздат. – 1949. – 244 с.
5. Chuiko S.M., Boichuk I.A. An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.) – Vol. 12. – 2009. – № 3. – P. 405–416.
6. Chuiko S.M., Starkova O.V. About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods // Nonlinear oscillation. – 2009. – 12. – № 4. – P. 556 – 573.

# Conditions for asymptotic equivalence of Functional Stochastic Differential Equations

*Grygoriy Petryna*

*grpetryna@gmail.com*

*Taras Shevchenko National University of Kyiv*

In this work, some useful results for Functional Stochastic Differential Equations were obtained. For the system of Differential Equations:

$$\dot{x} = f_1(t, x(t))dt, \quad (1)$$

where  $f_1 : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Together with the system of Functional Stochastic Differential Equations

$$\dot{y} = f_1(t, y(t))dt + f_2(t, y_t)dt + \sigma(t, y_t)dW(t) \quad (2)$$

Where  $f_2(t, \phi) : [0, \infty] \times C_h \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\sigma(t, \phi) : [0, \infty] \times C_h \rightarrow \mathbb{R}$ ;

$C_h = C([-h, 0]; \mathbb{R})$ ;  $y_t = y(t + \Theta)$ ,  $\Theta \in [-h, 0]$  and  $W(t)$  is a Wiener process on a probability space  $(\Omega, \mathbf{F}, P)$  with filtration  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\} \subset \mathbf{F}$

Under several assumptions, we can prove that:

a)system (2) is asymptotically mean square equivalent to the system (1) that is for each solution  $y(t)$  of system (2) there corresponds a solution  $x(t)$  of system (1) such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}|x(t) - y(t)|^2 = 0$$

b)system (2) is asymptotically equivalent to the system (1) with probability 1 that is for each solution  $y(t)$  of system (2) there corresponds a solution  $x(t)$  of system (1) such that

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0\right\} = 1$$

Let us put  $h_0$ , so the following inequality holds:

$$40e^{L^2 h_0 + 3h_0 L} h_0 L^2 < 1 \quad (3)$$

then, since the function  $m(h) = 40e^{L^2 h + 3hL} h L^2$  monotonically increasing and  $m(0) = 0$ , hence for all  $h \leq h_0$  inequality (3) holds. Here, functions  $f_1(t, x(t)), f_2(t, y_t), \sigma(t, y_t)$  satisfy the following conditions:

- 1)  $|f_1(t, x_1) - f_1(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$
- 2)  $|f_2(t, \xi) - f_2(t, \phi)| + |\sigma(t, \xi) - \sigma(t, \phi)| \leq L||\xi - \phi||_C$
- 3)  $\exists \gamma_h > 0$ , such that:  
a)  $|f_2(t, \phi)| \leq K e^{-\gamma_h t}, t \geq 0$

b)  $|\sigma(t, \phi)| \leq Ke^{-\gamma_h t}, t \geq 0$

c)  $e^{-\gamma_h h} \leq 40e^{L^2 h + 2hL} h L^2$

d)  $(\gamma_h + L)h < 1$

Where  $L, K, \gamma_h$  are some positive constants that do not depend on time, and such that  $\gamma_h > L$ .

**Theorem.** Let's assume that the previous assumptions hold, then:

a) system (2) is asymptotically mean square equivalent to the system (1) that is for each solution  $y(t)$  of system (2) there corresponds a solution  $x(t)$  of system (1) such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}|x(t) - y(t)|^2 = 0$$

b) system (2) is asymptotically equivalent to the system (1) with probability 1 that is for each solution  $y(t)$  of the system (2) there corresponds to a solution  $x(t)$  of the system (1) such that

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0\right\} = 1$$

