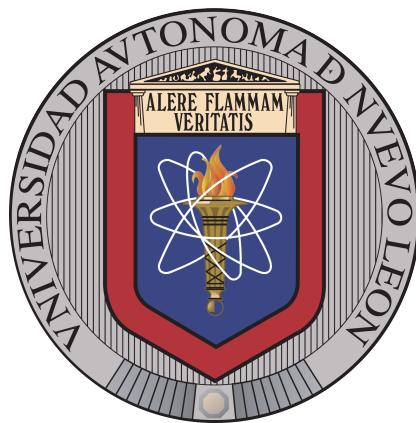


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICO
POSGRADO EN ASTROFÍSICA PLANETARIA Y TECNOLOGÍAS AFINES



BÚSQUEDA Y ESTUDIO FOTOMÉTRICO DE
SISTEMAS BINARIOS ECLIPSANTES

POR

RAMÓN CABALLERO VILLEGAS

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN ASTROFÍSICA PLANETARIA Y TECNOLOGÍAS
AFINES

OCTUBRE 2024

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICO
POSGRADO EN ASTROFÍSICA PLANETARIA Y TECNOLOGÍAS AFINES



BÚSQUEDA Y ESTUDIO FOTOMÉTRICO DE
SISTEMAS BINARIOS ECLIPSANTES

POR

RAMÓN CABALLERO VILLEGAS

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN ASTROFÍSICA PLANETARIA Y TECNOLOGÍAS
AFINES

OCTUBRE 2024



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICO
POSGRADO EN ASTROFÍSICA PLANETARIA Y TECNOLOGÍAS AFINES

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Búsqueda y Estudio Fotométrico de Sistemas Binarios Eclipsantes», realizada por el alumno Ramón Caballero Villegas, con número de matrícula 2125383, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Astrofísica Planetaria y Tecnologías Afines.

El Comité de Tesis

Dr. Andrés Alberto Avilés Alvarado
Asesor

Nombre del revisor A
Revisor

Nombre del revisor B
Revisor

Vo. Bo.

Dr. nombre del subdirector
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, octubre 2024

ÍNDICE GENERAL

I	Introducción	2
1.	Estrellas	3
1.1.	Formación	4
1.2.	Secuencia Principal	5
1.2.1.	Equilibrio Hidrostático	6
1.2.2.	Equilibrio Termodinámico Local	6
1.3.	Atmósfera Estelar	8
1.3.1.	Atmósfera de Kurucz	10
1.4.	Evolución	11
2.	Sistemas Binarios	13
2.1.	Geometría del Sistema - Modelo de Roche	14
2.1.1.	Generalización a Órbitas Excéntricas y Asincrónicas	20
2.1.2.	Superficies Equipotenciales	21
2.2.	Clasificación Morfológica	22

2.2.1. Sistemas Separados	23
2.2.2. Sistemas Semi-separados	24
2.2.3. Sistemas en Contacto	25
2.3. Clasificaciones Observacionales	26
2.4. Binarias Eclipsantes	28
2.4.1. EA - Algol	28
2.4.2. EB - β Lyrae	29
2.4.3. EW - W UMa	30
3. PHOEBE - Modelo Computacional	32
3.1. Estructura de PHOEBE	33
3.2. “Modelo Hacia Adelante”	35
3.2.1. Discretización de la Superficie Estelar	36
3.2.2. Distribución de Parámetros Superficiales	41
3.2.3. Radiación Emergente	43
3.3. El Problema Inverso	46
3.3.1. Función de Calidad	47
3.3.2. Estimación Inicial de Parámetros	49
3.3.2.1. Geometría de la Curva de Luz	49
3.3.2.2. EBAI - Eclipsing Binaries via Artificial Intelligence .	51
3.3.3. Optimización de Parámetros	51

ÍNDICE GENERAL	4
-----------------------	---

3.3.3.1. Simplex de Nelder-Mead	53
3.3.3.2. Correcciones Diferenciales	55
3.3.4. Muestreo de la Función de Densidad de Probabilidad Posterior	56
3.3.4.1. <code>emcee</code> : MCMC en Python	58
3.3.4.2. MCMC en PHOEBE	62
II Muestra	66
4. Catálogos	67
4.1. Gaia	67
4.1.1. Data Release 3	67
4.1.2. Fotometría	68
4.2. Sloan Digital Sky Survey	70
4.2.1. Data Release 9	70
4.3. Zwicky Transient Facility	71
5. Selección de Objeto	73
5.1. Szkody et al. (2002): Cataclysmic Variables from the Sloan Digital Sky Survey	73
5.2. Búsqueda en Gaia	75
5.3. Selección de Objetos Observables	77
5.4. Búsqueda en SIMBAD	77

ÍNDICE GENERAL	5
5.5. ATO J339.9469+45.1464 - EclBin	78
5.5.1. Datos de Gaia	80
5.5.2. Datos de ZTF	80
6. Observaciones	83
6.1. Observatorio Astronómico Universitario - Iturbide	83
6.2. Fotometría	85
6.2.1. Estrellas de Comparación	86
6.2.2. Procesamiento de Imágenes	87
6.2.3. Fotometría Diferencial	89
III Metodología y Análisis de Datos	93
7. Periodo Orbital	94
8. Normalización de Flujos y Preservación de Color	97
9. Modelo Computacional	100
9.1. Preparación del Modelo	100
9.2. Estimaciones Iniciales	102
9.2.1. Elección del Modelo Inicial	103
9.3. Optimización de Parámetros	106
9.4. Ajuste de Luminosidad y Temperatura Efectiva	111

9.5. Muestreo MCMC	113
9.5.1. Eliminación de Observaciones Erróneas	114
9.5.2. Distribuciones Priors	116
9.5.3. Inicializando el Muestreo MCMC	118
9.5.4. Monitoreo del Muestreo	119
9.5.4.1. Tiempo de Autocorrelación	119
9.5.4.2. Fracción de Pasos Aceptados	120
9.5.4.3. Errores en el Espacio de Parámetros	123
9.5.4.4. Camino Trazado por los Caminadores	123
9.6. Resultados	126
9.6.1. Funciones de Densidad de Probabilidad a Posteriori	127
9.6.2. Incertidumbres en el Modelo Hacia Adelante	128
IV Discusión y Conclusiones	132
10. Consideraciones del Modelo de PHOEBE	133
10.1. Datos Espectroscópicos	133
10.1.1. Apache Point Observatory	134
10.1.2. Gaia DR3	136
10.1.3. Análisis: PyHammer	138
10.2. Correlaciones Entre Parámetros	141

10.3. Extinción Interestelar	144
10.4. Multi-Modalidad de la PDF Posterior	146
A. Gaia ADQL Query	151
B. PHOEBE Gráficas Adicionales	153
B.1. Distribuciones Priors Completas	154
B.2. Trazos Completos de los Caminadores	155
B.3. Distribuciones de Densidad de Probabilidad Completas	156
B.4. Correlaciones de Parámetros Muestreados	157

Parte I

Introducción

CAPÍTULO 1

ESTRELLAS

Las **estrellas** son de los objetos más fundamentales e importantes en el estudio de los astros. LeBlanc (2010, Capítulo 1) define una estrella como “un objeto celeste en el cual existe, o alguna vez existió (en el caso de una estrella muerta) fusión de hidrógeno sostenido en su núcleo.” El núcleo de cada estrella activa alcanza temperaturas en el orden de decenas de millones de Kelvin, lo cual permite generar nuevos elementos más pesados mediante el proceso de fusión nuclear. El mecanismo principal para la generación de energía es la fusión de hidrógeno a helio: $4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + E$. Dentro de todas las estrellas existe un balance de fuerzas que mantiene la forma esférica de la estrella; esto se le conoce como el *equilibrio hidrostático*, en el cual la presión interna de la estrella tiene una contra-fuerza equivalente del peso de su mismo gas. Este balance es modelado a escalas menores a las de las propiedades macroscópicas de la estrella Prialnik (2010, Capítulo 2), en la cual la estrella está en un estado de *equilibrio termodinámico local*.

Una estrella está caracterizada por sus propiedades físicas, como su masa, composición química, radio, y temperatura. A continuación se plantea una base para describir la estructura de una estrella al igual que su evolución, empezando con la formación de una *protoestrella*, la cual con el paso del tiempo se transforma en una estrella.

1.1 FORMACIÓN

El **medio interestelar** (ISM por sus siglas en inglés) es la región de espacio que existe entre el Sol y el resto de las estrellas dentro de nuestra Galaxia. Está compuesto de todo el polvo, gas, y partículas libres como los rayos cósmicos que atraviesan el espacio. La distribución de este material no es uniforme a cortas escalas de distancias astronómicas, por lo cual se observan acumulaciones de gas y polvo que se les conoce como **nubes moleculares**. Estas nubes se encuentran a temperaturas extremadamente frías, hasta los 10-20 K en su estado de equilibrio. Sin embargo, la nube puede llegar a ser perturbada de este estado, lo cual causa una distribución de masa y un campo gravitacional no uniforme, dando forma a cúmulos densos de material.

Dado suficiente tiempo una nube molecular va colapsando bajo su propio peso, donde la presión en la nube provoca que el material se acumule en un solo punto en el espacio. Mientras más aumente la presión el gas se calienta; este proceso sigue hasta llegar a un equilibrio entre la presión interna del gas y la fuerza compresiva de gravedad, en donde la nube deja de contraerse. Dependiendo de la temperatura a la que alcanza el núcleo determina si se convierte en una estrella capaz de mantener una reacción continua de fusión nuclear. La masa mínima para que una nube molecular colapse a una estrella es de $0.08 M_{\odot}$ LeBlanc (2010, Capítulo 2). De no cumplir con esta condición, el cúmulo de gas y polvo no logrará mantener la cadena de reacciones termonucleares en su núcleo, resultando en una *enana café*, un objeto inerte resultado del proceso fallido de formación estelar.

Una vez que el material de la nube se estabilice—una vez que el objeto empieza a producir energía de orden de magnitud estelar—nace una **protoestrella**. Estos objetos extensos (aproximadamente $500 R_{\odot}$ para una protoestrella de $1 M_{\odot}$ Kutner (2017, Capítulo 15)) se mantienen a una baja temperatura durante esta etapa de su vida, alrededor de 2500 K en su superficie. Sin embargo, debido a la alta densidad,

la nube no es completamente transparente, por lo cual solo la superficie es capaz de liberar energía por medio de radiación infrarroja; la energía producida en su interior primero debe de viajar a la superficie por medio de convección. Conforme va evolucionando la nube se sigue comprimiendo hasta llegar a un punto en el cual puede mantener reacciones termonucleares continuas en su núcleo, llegando al punto de ser una estrella en **secuencia principal**. La **Figura 1.1** muestra la evolución de una protoestrella a una estrella secuencia principal con respecto a su masa.

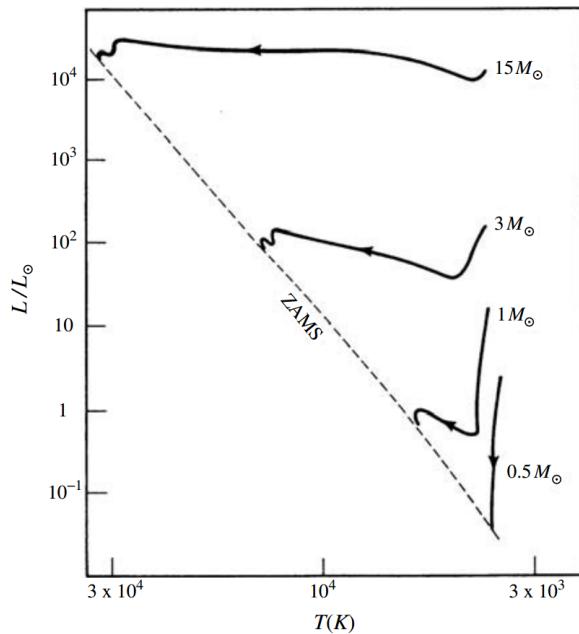


FIGURA 1.1: Diagrama de la evolución de una protoestrella hasta llegar a *ZAMS* (*Zero Age Main Sequence*), la edad a la que se convierte en una estrella de secuencia principal. Se muestran varios caminos evolutivos de una protoestrella en función de su masa, el cual es el parámetro de mayor importancia en su evolución y estado final. Figura obtenida de Kutner (2017, Capítulo 15).

1.2 SECUENCIA PRINCIPAL

Una vez que una estrella llegue su etapa de secuencia principal el sistema se vuelve estable a largas escalas temporales. En este estado la estrella deja de

comprimirse, ya que el colapso gravitacional es contrarrestado por la presión del gas caliente en su interior y la presión ejercida por la radiación producida en su núcleo. A continuación se definen dos conceptos importantes en la física estelar: el **equilibrio hidrostático** y el **equilibrio termodinámico local**.

1.2.1 EQUILIBRIO HIDROSTÁTICO

Podemos simplificar el modelo de una estrella al introducir la simetría esférica, en el cual las propiedades del gas que forma la estrella dependen únicamente de la distancia del núcleo. Para esto definimos la presión $P(r)$, densidad $\rho(r)$, temperatura $T(r)$, y aceleración gravitacional $g(r)$ como funciones con respecto a la distancia r del centro. En base a estos fundamentos se puede deducir la estratificación de una estrella, formando varias capas de material con propiedades uniformes a lo largo de cada estrato. Dado que cada elemento dentro de la estrella está sujeto a un equilibrio de fuerzas descrita por la ecuación $P(r)dA - [P(r) + dP]dA - [\rho(r)dAdr]g(r) = 0$, la cual se ve en la **Figura 1.2**, al simplificar esta ecuación e introduciendo un término para la presión radiativa—debido a la transferencia de momento de los fotones generados en el núcleo estelar al material circundante—se obtiene la **Ecuación 1.1**.

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)[g(r) - g_{rad}(r)] \quad (1.1)$$

Ecuación 1.1: Ecuación del equilibrio hidrostático para una estrella, tomando en cuenta los efectos de la presión radiativa saliente $g_{rad}(r)$. LeBlanc (2010, Capítulo 2)

1.2.2 EQUILIBRIO TERMODINÁMICO LOCAL

Una estrella como resultado de su mecanismo de transporte de energía no está en un estado de equilibrio térmico. El núcleo, en donde se produce la gran mayoría de

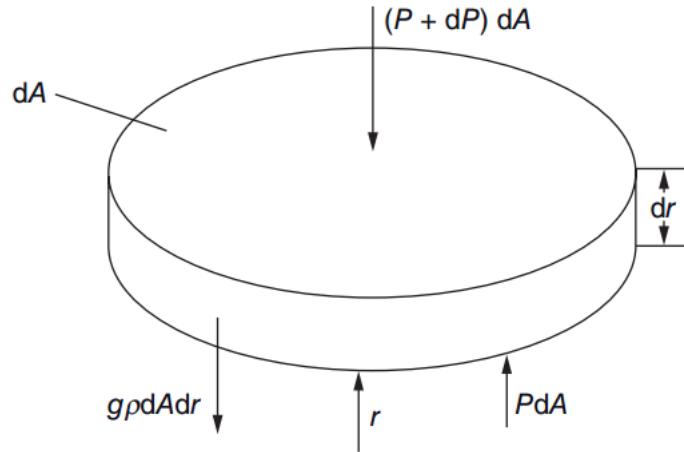


FIGURA 1.2: Diagrama de fuerzas actuando sobre cada elemento dentro de la estrella con área dA de material de una estrella. Los efectos debido a elementos adyacentes son nulos, debido a que la presión en cada lado es constante, resultando en un gradiente de presión radial. Figura obtenida de LeBlanc (2010, Capítulo 2).

energía en una estrella, está a ordenes de magnitud más caliente que la fotósfera. Este transporte de energía ocurre principalmente por medio de *radiación* y *convección*; la conducción no juega un papel significativo ya que el camino libre medio de las partículas de gas es grande. Para que una estrella se mantenga estable durante los miles de millones de años de su vida debe de estar en un tipo de equilibrio, donde cada capa mantiene una composición estable a largas escalas de tiempo, lo cual implica que el flujo de energía que ingresa a cada capa es igual a la cantidad de energía que libera a la siguiente capa. Esto lleva a cabo otra simplificación en el modelo estelar: una estrella la podemos considerar como un sistema en **equilibrio termodinámico local**.

Para declarar que un sistema está en equilibrio termodinámico local debemos considerar el **camino libre medio** de una partícula en el interior estelar. Considerando la distancia recorrida por un fotón antes de ser absorbido o esparcido por otra partícula obtenemos esta medición, la cual dicta la escala de espacio del transporte de energía comparado a la escala espacial de la estrella. En el caso de que el camino libre medio sea significativamente menor que las dimensiones espaciales de la estre-

lla su volumen se puede dividir en celdas discretas de tamaño despreciable, en las cuales cada una de las celdas está en equilibrio termodinámico dentro de si mismas Prialnik (2010, Capítulo 2). Por lo tanto, la estructura de la estrella se puede determinar siempre y cuando se sepa la masa de la estrella, y la densidad, temperatura, y composición química de cada punto en su interior.

1.3 ATMÓSFERA ESTELAR

La gran mayoría de la radiación que recibimos de las estrellas—tanto de nuestro Sol como de sistemas estelares ajenos—proviene de su **fotósfera**, la capa exterior sometida a la influencia gravitacional del astro. Debido al transporte de energía en las capas interiores la fotósfera se encuentra a una temperatura a ordenes de magnitud menor que la temperatura en el núcleo; la intensidad monocromática de la estrella depende de esta temperatura, por lo cual la **distribución de energía espectral (SED)** por sus siglas en inglés) varía de la misma forma.

Un **cuerpo negro** es aquel objeto que se encuentra en un estado de equilibrio termodinámico con su ambiente, absorbiendo energía (en el caso de una estrella esta sería por medio de radiación) a la misma tasa que la emite Kutner (2017, Capítulo 2). El espectro de un cuerpo negro está descrito por la función de Planck (**Ecuación 1.2**), de la cual obtenemos la intensidad para cada longitud de onda dada la temperatura del cuerpo negro. La distribución espectral de energía se puede ver en la **Figura 1.3**. Esta aproximación, a pesar de omitir una parte apreciable de la composición de una estrella, es suficientemente adecuada para ciertos estudios donde no es necesario implementar un modelo complejo.

Sin embargo, en la práctica la composición química de una estrella (conocido como su **metallicidad**) llega a tener un efecto notable en su distribución espectral de energía medida. Esto se debe a la absorción, dispersión, y emisión de fotones por parte de las partículas en la atmósfera estelar, incluyendo electrones y iones

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (1.2)$$

Ecuación 1.2: Función de Planck describiendo la intensidad emitida por un cuerpo negro con temperatura T para una longitud de onda λ . h es la constante de Planck, k la constante de Boltzmann, y c la velocidad de la luz en un vacío.

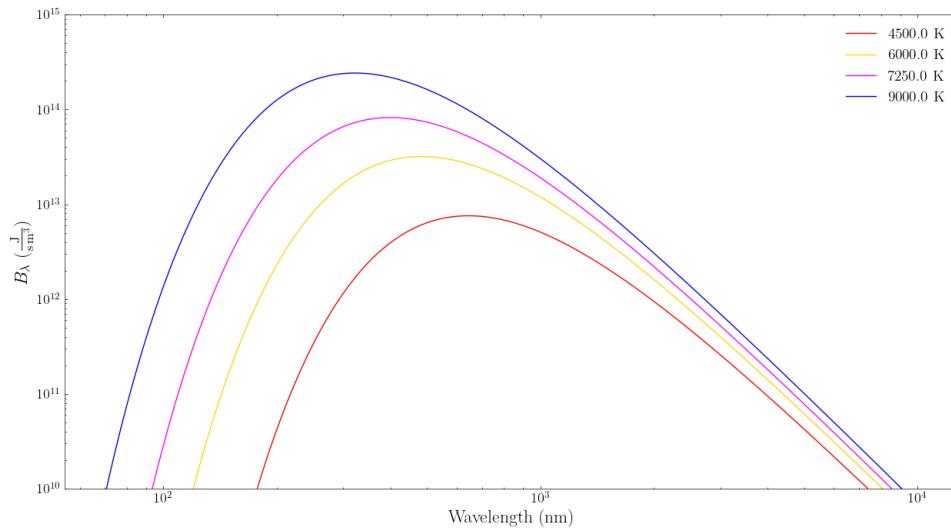


FIGURA 1.3: Intensidad de un cuerpo negro con temperatura efectiva especificada.

libres, átomos, y moléculas esparcidas dentro de este volumen. Cada partícula interacciona con fotones de manera distinta, incluyendo la tasa de interacciones con respecto a la frecuencia de la radiación incidente. Existen varios códigos diseñados para modelar este comportamiento, llamados **model atmospheres** en inglés. Estos códigos reciben de entrada los parámetros conocidos de la estrella que se quiere modelar, su temperatura efectiva, aceleración gravitacional superficial, y metalicidad (en unidades solares), dando como resultado el espectro de la estrella.

1.3.1 ATMÓSFERA DE KURUCZ

Entre los códigos de modelos de atmósferas estelares más utilizados está el de **ATLAS** escrito por Robert L. Kurucz. A continuación se especifican las suposiciones empleadas en el código de **ATLAS** descritas en Prša (2011, Sección 4.2); para una discusión completa del programa es necesario hacer referencia a Kurucz (1970).

Este modelo parte de las condiciones del *equilibrio hidrostático* y el *equilibrio termodinámico local* para una estrella, lo cual simplifica el problema a un trato unidimensional; las propiedades físicas de la atmósfera dependen únicamente de su distancia al núcleo. El grosor de cada capa es ordenes de magnitud menor que la superficie que abarca la fotosfera estelar, lo cual permite modelar dicha capa usando varios segmentos discretos que se aproximan a *planos paralelos*. La simetría esférica produce *capas homogéneas*, cuyas propiedades físicas como su composición química es uniforme en cada capa, solo variando con su profundidad. Esto también permite ignorar estructuras finas en la superficie de la estrella como la granulación y las manchas solares (en ciertos ajustes de modelos estas manchas aún son requeridas para un ajuste adecuado a los datos observacionales dados como se presenta en el **Capítulo 9**).

La **Figura 1.4** muestra el espectro sintético generado por el código **ATLAS** dado diferentes parámetros físicos. Estas aproximaciones son ideales para estudiar estrellas aisladas, las cuales son mayormente esféricas en forma. Sin embargo, este modelo tiene limitaciones significantes para estrellas deformes, como los sistemas binarios cercanos donde las fuerzas de marea causan una partida notable de su forma esférica. A pesar de no ser un modelo perfecto, en la mayoría de los casos es más adecuado utilizar un código como **ATLAS** que modelar una estrella como un simple cuerpo negro.

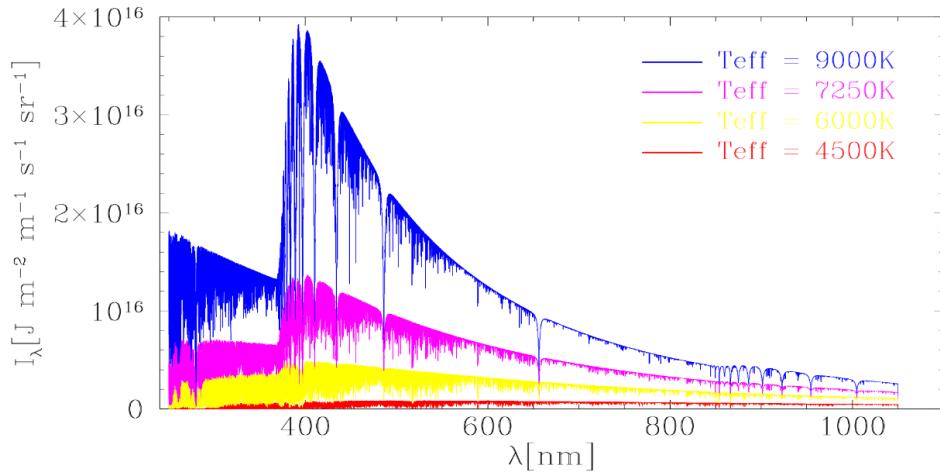


FIGURA 1.4: Espectros sintéticos de las tablas de Kurucz para estrellas de varias temperaturas. El resto de los parámetros físicos utilizados se mantuvieron fijos para los cuatro modelos: $\log g/g_0 = 4.0$ y $[M/H] = 0.0$. Figura obtenida de Prša (2011, Sección 4.2).

1.4 EVOLUCIÓN

Con el transcurso del tiempo cada estrella estará sujeta a ciertos cambios en su estructura. Esto se debe a que podemos considerar a una estrella como un objeto aislado en el espacio, lo cual significa que no tendrá algún ingreso de material significativo para reemplazar el combustible “quemado” en las reacciones termonucleares. A lo largo del tiempo la composición física y química de la estrella deberán cambiar para mantener el equilibrio termodinámico.

El combustible primario de una estrella viene siendo el hidrógeno atómico, el cual se fusiona con otros átomos (protones individuales) libres, resultando en la producción de grandes cantidades de energía en forma de radiación y moléculas de helio como producto. El helio no es inmediatamente útil para la estrella como combustible, ya que requiere temperaturas más altas de las que se encuentran durante esta fase evolutiva. Todas las estrellas conocidas pasan por esta etapa de evolución estelar; mientras que una estrella dependa principalmente del hidrógeno para brillar

se dice que está en su etapa de *secuencia principal*.

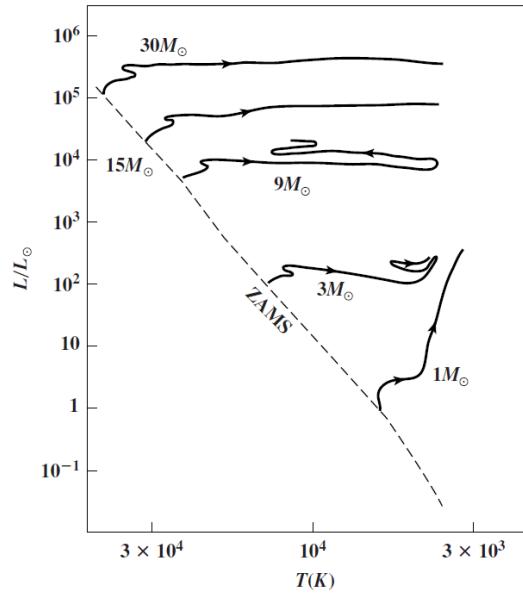


FIGURA 1.5: Evolución de estrellas de la secuencia principal basado en su masa inicial en el diagrama HR. La línea punteada representa la posición de la estrella en el primer momento que se integra a la secuencia principal. Al consumir el hidrógeno en su núcleo por las reacciones nucleares que ocurren en esta misma región se comienza a desatar el equilibrio delicado que mantiene la forma de la estrella. Esta deformación provoca una oscilación en su tamaño, causado por las fluctuaciones del balance entre la presión radiativa generada por las reacciones nucleares en el núcleo contra la presión gravitacional. Diagrama obtenido de Kutner (2017, Capítulo 2)

CAPÍTULO 2

SISTEMAS BINARIOS

La gran mayoría de sistemas estelares dentro de nuestra Galaxia no son aquellos solitarios como nuestro propio sistema solar, si no que son compuestas de dos o más estrellas ubicadas en corta aproximación de una a otra, a ordenes de unidades astronómicas (AU por sus siglas en inglés). Estos sistemas multiples se pueden clasificar con mayor precisión para aquellos compuestos de solo dos estrellas, denominados como *sistemas binarios*. Dentro de un sistema binario la corta separación orbital entre ambas estrellas da como consecuencia a fenómenos que surgen mediante la interacción entre las componentes, tanto como la interacción gravitacional debido a sus masas, como a la física interesante que ocurre en el caso de interacciones de material entre una estrella a otra.

Los sistemas binarios estelares ofrecen un laboratorio celeste de gran importancia, ya que debido a la interacción a cortas escalas espaciales nos brindan información acerca de las estrellas que sería imposible obtener de otra manera. Prša (2011, Sección 2.1) menciona varios parámetros derivados de observaciones de estos sistemas, como las masas de cada una de las componentes estelares por medio de su interacción gravitacional, la calibración y estudio de la evolución estelar y su dependencia de la masa y luminosidad de la estrella; dadas observaciones de sistemas desconectados, en el cual ambas componentes son de la misma edad pero con diferentes propiedades que influyen su camino evolutivo. La clasificación de estos sistemas se basa tanto en pro-

piedades observacionales—las cuales dependen tanto de las propiedades geométricas del sistema como de nuestra capacidad de observación, en cuanto a la capacidad de la instrumentación disponible—como en las propiedades físicas del sistema, incluyendo la proximidad de las componentes como sus propiedades lumínica.

2.1 GEOMETRÍA DEL SISTEMA - MODELO DE ROCHE

Es importante entender la forma geométrica de un sistema binario para llegar a una descripción adecuada de ellos. Esto incluye los parámetros orbitales de las estrellas tanto como la forma misma de ambas componentes, ya que en ciertos casos tratar las estrellas como esferas rígidas da como resultado un modelo incorrecto. A continuación se introduce las bases de las cuales se parte para llegar a una representación de un sistema modelo, llegando a describir el **modelo de Roche**.

Se define un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional considerando un marco de referencia no inercial, el cual está rotando con la misma velocidad que las componentes del sistema binario orbitan una a otra. Esta es una representación típica para el *problema de tres cuerpos*, en el cual tenemos a dos objetos masivos cuya influencia gravitacional se extiende al espacio representado por el sistema de coordenadas. En la **Figura 2.1** se puede ver este esquema, donde m_1 y m_2 representan ambas componentes estelares, posicionadas de tal manera que la distancia entre las estrellas solo tenga una componente en una dirección cartesiana.

La **Figura 2.1** define el sistema de coordenadas rotando junto al sistema binario. La velocidad angular de Kepler está dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{P_{orb}} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}} \quad (2.1)$$

Donde $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ es la constante de gravitación universal,

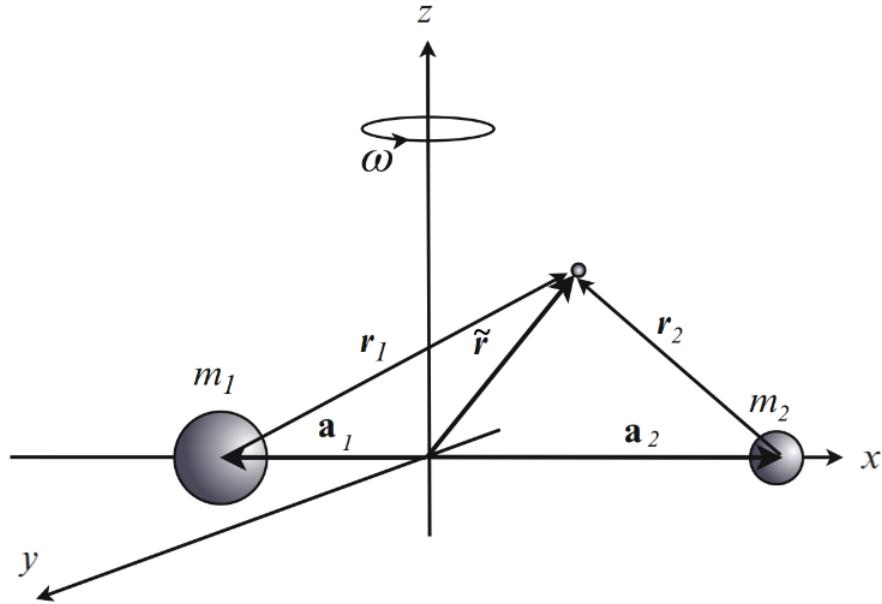


FIGURA 2.1: Configuración del problema de tres cuerpos dados dos objetos de alta masa m_1 y m_2 (las cuales representan cada componente estelar del sistema binario), y una partícula de masa despreciable de prueba ubicada a una distancia r_1 y r_2 de las estrellas respectivamente. El centro de masa del sistema está ubicado en el origen del sistema de coordenadas. Figura obtenida de Benacquista (2013, Sección 13.1), modificada cambiando los ejes y y x para que m_1 y m_2 estén ubicadas en el eje x para ser consistente con Prša (2011, Sección 3.1).

P_{orb} es el periodo orbital de las estrellas (el cual es igual para ambas estrellas de acuerdo a la segunda ley de Kepler), y $a = a_1 + a_2$ es el semieje mayor. Usando la **Ecuación 2.1** podemos definir el Lagrangiano para una partícula de prueba con masa m , el cual está a una distancia \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 de m_1 y m_2 respectivamente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{r}^2 + \frac{Gm_1m}{r_1} + \frac{Gm_2m}{r_2} \quad (2.2)$$

Energía cinética rotacional
Energía cinética lineal
Potencial gravitacional

Donde \tilde{r} es la distancia al eje de rotación del marco de referencia, $r_1 = |\mathbf{r}_1| =$

$|\mathbf{r} - \mathbf{a}_1|$ y $r_2 = |\mathbf{r}_2| = |\mathbf{r} - \mathbf{a}_2|$. Utilizando los últimos 3 términos de la **Ecuación 2.2** podemos definir un pseudo-potencial que determina el movimiento de la partícula de prueba, tanto por la influencia gravitacional de las componentes como la fuerza centrifugal dada por la rotación del marco de referencia. Esta ecuación se puede simplificar al colocar el origen del sistema sobre la masa m_1 en vez de su centro de masa, donde $x_1 = 0$ es la posición de m_1 y $x_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$ es la posición de la secundaria. Por lo tanto, la nueva coordenada del centro de masa del sistema se da por:

$$x_{\text{CoM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{qa}{1+q} \quad (2.3)$$

Donde se introduce el parámetro para la razón de masa $q = \frac{m_2}{m_1}$. En varios trabajos las componentes de un sistema binario son identificados de tal manera que $q \leq 1$; sin embargo, esta convención no suele ser conveniente al momento de crear un modelo del sistema (por ejemplo, Ding et al. (2022)), en donde se permite que $q > 1$ al asignar la componente primaria basado en parámetros orbitales en vez de sus masas.

Este potencial efectivo ψ se obtiene asumiendo una distribución de masa esférica para ambas estrellas Prša (2011, Sección 3.1):

$$\psi = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} - \frac{1}{2}\omega\tilde{r}^2 \quad (2.4)$$

Usando el potencial ψ es posible llegar a un potencial adimensional Ω el cual determina la forma de ambas componentes. La geometría del sistema se presta a un sistema de coordenadas esféricas, usando un ángulo polar θ cuyo valor va desde 0 en polo norte hasta 180° en el polo sur—paralelo al eje z en la **Figura 2.1**—y un ángulo azimutal ϕ cuyo valor es 0 en el eje x . Utilizamos las siguientes expresiones para convertir de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi = \lambda r \\y &= r \sin \theta \sin \phi = \mu r \\z &= r \cos \theta = \nu r\end{aligned}\tag{2.5}$$

En donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia entre la partícula de prueba ubicada en el punto (x, y, z) al origen del sistema de coordenadas. Partiendo del teorema de Pitágoras se puede llegar a una ecuación para calcular la distancia D entre dos puntos ubicados en (x, y, z) y (x', y', z') en un sistema de coordenadas esférico:

$$D = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\tag{2.6}$$

La cual al expandir obtenemos:

$$D = \sqrt{x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2 + z^2 - 2zz' + z'^2}\tag{2.7}$$

Sustituyendo usando $d_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $d_2 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ como las distancias de ambos puntos al origen se obtiene:

$$D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2xx' - 2yy' - 2zz'}\tag{2.8}$$

Para obtener la distancia D en coordenadas esféricas es necesario hacer la conversión utilizando las **Ecuaciones 2.5**, llegando a la expresión final:

$$D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2[(\sin \theta \sin \theta')(\cos \phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta']}\tag{2.9}$$

Donde los puntos (x, y, z) y (x', y', z') corresponden a (d_1, θ, ϕ) y (d_2, θ', ϕ') respectivamente. Se puede utilizar la **Ecuación 2.8** y **Ecuación 2.9**—y haciendo uso de las **Ecuaciones 2.5**—para obtener las distancias de la partícula de prueba m a ambas componentes estelares del sistema:

$$\begin{aligned} r_1 &= r \\ r_2 &= \sqrt{r^2 - 2ax + a^2} = \sqrt{r^2 - 2ar\lambda + a^2} \\ \tilde{r} &= \sqrt{(x - x_{\text{CoM}})^2 + y^2} = \sqrt{r^2(1 - \nu^2) - 2r\lambda x_{\text{CoM}} + x_{\text{CoM}}^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Notando que el origen del sistema de coordenadas está ubicada en la posición de la componente m_1 . Por lo tanto, el potencial es definido con respecto a m_1 ; para obtener el potencial con respecto a m_2 es necesario hacer una transformación descrita en Prša (2011, Sección 3.1). Sustituyendo las ecuaciones **Ecuaciones 2.10** en la expresión del potencial ψ se obtiene el potencial efectivo en coordenadas esféricas:

$$\psi(r, \lambda, \nu) = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{\sqrt{r^2 - 2ar\lambda + a^2}} - \frac{1}{2}\omega^2(r^2(1 - \nu^2) - 2r\lambda x_{\text{CoM}} + x_{\text{CoM}}^2) \quad (2.11)$$

Utilizando la tercera ley de Kepler de la forma $\omega^2 a^3 = G(m_1 + m_2)$ junto a la **Ecuación 2.3** y sustituyendo en la **Ecuación 2.11** se obtiene la forma final del potencial efectivo, eliminando la dependencia explícita a la velocidad angular del sistema y de la masa de la secundaria m_2 Prša (2011, Sección 3.1):

$$\begin{aligned} \psi(r, \lambda, \nu) &= -\frac{Gm_1}{a} \left[\frac{a}{r} + q \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - 2ar\lambda + a^2}} - \frac{r\lambda}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2}{2a^2}(1 + q)(1 - \nu^2) + \frac{q}{2(1 + q)} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

El potencial efectivo en la **Ecuación 2.12** se puede utilizar para definir un potencial adimensional, el cual define la forma de ambas componentes. Este potencial

Ω se refiere al **potencial modificado de Kopal**, introducido por Kopal (1959, Capítulo III.1). Este potencial se relaciona con ψ por la siguiente ecuación:

$$\Omega = -\frac{a\psi}{Gm_1} - \frac{m_2^2}{2m_1(m_1 + m_2)} \quad (2.13)$$

El segundo término del RHS se puede simplificar multiplicando por $\frac{1/m_1^2}{1/m_1^2}$:

$$\Omega = -\frac{a\psi}{Gm_1} - \frac{q^2}{2(1+q)} \quad (2.14)$$

Sustituyendo la **Ecuación 2.12** en **Ecuación 2.14** obtenemos el potencial modificado de Kopal:

$$\Omega = \frac{1}{\varrho} + q \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho\lambda + 1}} - \varrho\lambda \right) + \frac{1}{2}(1+q)(1-\nu^2)\varrho^2 \quad (2.15)$$

Introduciendo la variable adimensional $\varrho = \frac{r}{a}$ usada en Prša (2011, Sección 3.1). Usando la **Ecuación 2.15** podemos determinar la forma de ambas estrellas asumiendo que la envoltura estelar (es decir, la capa superficial) coincide con superficies de **equipotenciales de Roche**, donde el valor de Ω es constante en toda la superficie Kopal (1959, Capítulo 3). Este modelo de las superficies estelares de un sistema binario comparte el nombre con el originador de esta idea, el matemático francés *Édouard Albert Roche* del siglo XIX. Sin embargo, para que este modelo sea una buena aproximación del fenómeno astrofísico debe de cumplir con las siguientes condiciones:

Órbita circular sincrónica - La formalización de los equipotenciales de Roche presentado en esta sección solo aplica para sistemas binarios cuya órbita es circular y sincrónica (los períodos de rotación de ambas estrellas son iguales al periodo orbital).

Oscilaciones no-radiales despreciables - Las estrellas por imbalances locales padecen de una distorsión anisótropo, el cual causa que la superficie estelar se desvíe del modelo de Roche. Sin embargo, en la mayoría de las estrellas estas oscilaciones no-radiales ocurren en el orden de la escala de tiempo hidrostática, la cual, por ejemplo, es de 15 minutos para una estrella tipo solar Kallrath & Milone (2009, Sección 3.1.5). Mientras la escala de tiempo de estas distorsiones sea despreciable con respecto al periodo orbital la superficie estelar (su fotósfera) se puede parametrizar con el modelo de Roche.

Alta densidad de masa - A pesar de que el material de una estrella esté distribuido por todo su volumen, el modelo de Roche simplifica la composición de una estrella a un punto infinitesimal el cual ejerce una fuerza gravitacional alrededor. Esta aproximación resulta en una superficie sin masa, cuya forma es dictada por el potencial de Roche. Esta aproximación permite derivar la expresión analítica en la **Ecuación 2.15**, la cual se puede aplicar a fenómenos de alta “condensación central” Kopal (1959, Capítulo III).

2.1.1 GENERALIZACIÓN A ÓRBITAS EXCÉNTRICAS Y ASINCRÓNICAS

Una desventaja del modelo de Roche presentado en la **Ecuación 2.15** yace en sus suposiciones principales; como consecuencia de estas, el potencial Ω definido hasta ahora solo puede ser aplicado a aquellos sistemas binarios cuya órbita es circular y sincrónica. Esto excluye los sistemas con órbitas excéntricas y/o asincrónicas, incluyendo sistemas binarios en contacto cuyas propiedades no pueden ser adecuadamente modeladas en este paradigma [Kallrath & Milone (2009, Sección 3.1.5)]. Wilson (1979) generaliza el modelo de Roche a este tipo de órbitas, llegando a la siguiente expresión:

Introduciendo dos términos: el *parámetro de sincronicidad* $F = \omega_{\text{rot}}/\omega_{\text{orb}}$ la razón de la velocidad angular rotacional de la componente a su velocidad angular

$$\Omega = \frac{1}{\varrho} + q \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \varrho^2 - 2\varrho\delta\lambda}} - \frac{\varrho\lambda}{\delta^2} \right) + \frac{F^2\varrho^2(1+q)(1-\nu^2)}{2} \quad (2.16)$$

orbital, y la *separación instantánea* entre ambas componentes $\delta = D/a$ normalizada con respecto al semieje mayor a Prša (2011, Sección 3.1). El cambio principal de este potencial modificado se refleja en la dependencia en la fase orbital del campo potencial; debido a la excentricidad del sistema, las componentes no mantienen una distancia constante una de otra, por lo cual el potencial de ser nuevamente calculado para cada fase. Al igual, este modelo considera aquellos casos donde $F \neq 1$, ignorando los efectos de rotación diferencial en las estrellas por simplicidad. Para el caso de una órbita sincrónica y circular (es decir, $F = 1$ y $D = a$) la **Ecuación 2.16** se reduce a la **Ecuación 2.15**. Partiendo de esta ecuación se puede determinar la forma de ambas estrellas.

2.1.2 SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

La forma de una estrella en el modelo de Roche es determinada por una **superficie equipotencial**, en la cual el valor del potencial Ω es igual, identificado por un contorno. Una forma conveniente de definir la superficie de un sistema es dando el valor de Ω en el polo norte de la estrella primaria, en las coordenadas polares ($\theta = 0 \rightarrow \lambda = 0, \nu = 1$); partiendo de este valor, incluyendo otros parámetros del sistema como la razón de masa y el semieje mayor de la órbita, se define el contorno para el valor del potencial del polo, denominado como Ω_{pol} . La expresión para el potencial del polo se reduce a:

$$\Omega_{\text{pol}} = \frac{1}{\varrho_{\text{pol}}} + \frac{q}{\sqrt{\delta^2 + \varrho_{\text{pol}}^2}} \quad (2.17)$$

Donde Ω_{pol} es el valor del potencial modificado de Roche en el polo de la estrella, y ϱ_{pol} es el radio normalizado al semieje mayor en el polo de la estrella. Usando esta expresión se puede parametrizar la forma y tamaño de la estrella utilizando un solo valor para el potencial; esto es gracias a la siguiente relación dada por Prša (2011, Sección 3.1):

$$\nabla p \parallel \rho \parallel \psi \quad (2.18)$$

Esta nos dice que el gradiente de la densidad ρ , la presión p , y el potencial efectivo ψ son paralelo uno a otro, lo cual necesariamente implica que una superficie constante del potencial coincide con las superficies constantes de densidad y presión. Esta superficie equipotencial es resuelta utilizando la **Ecuación 2.17** y **Ecuación 2.16**, dando el valor $\Omega = \Omega_{\text{pol}}$ del sistema:

$$\frac{1}{\varrho_{\text{pol}}} + \frac{q}{\sqrt{\delta^2 + \varrho_{\text{pol}}}} = \frac{1}{\varrho} + q \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \varrho^2 - 2\varrho\delta\lambda}} - \frac{\varrho\lambda}{\delta^2} \right) + \frac{F^2\varrho^2(1+q)(1-\nu^2)}{2} \quad (2.19)$$

Esta es resuelta de manera iterativa para cada valor de λ y ν de la malla de valores utilizada en el problema. El resultado es la forma de ambas componentes del sistema binario, las cuales ya no son unas simples esferas o incluso elipses, si no que toman una forma de gota que sigue el campo de potencial establecido por medio de las fuerzas que rigen el sistema:

2.2 CLASIFICACIÓN MORFOLÓGICA

Debido a que la estructura del potencial de Roche es una de las propiedades más importantes para un sistema binario estelar, se acostumbran a clasificar en base a la forma del potencial. Como se puede ver en la **Figura 2.2**, diferentes valores para el potencial polar Ω_{pol} deforman ambas estrellas de maneras distintas, empezando con

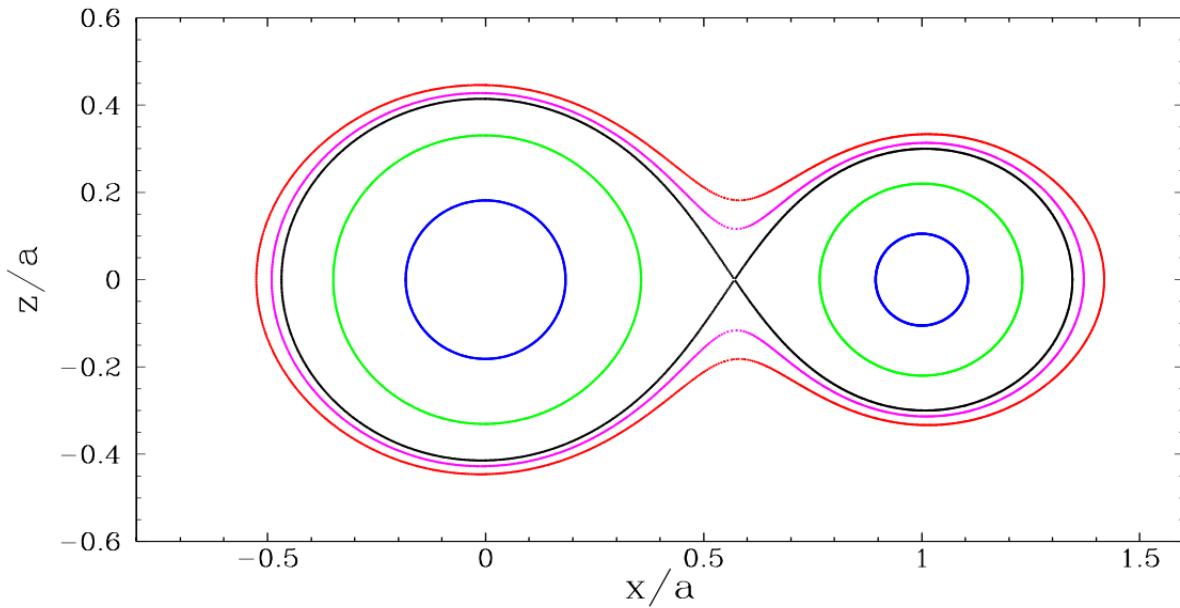


FIGURA 2.2: Distintas formas de las componentes dependiendo del valor dado para Ω . El potencial azul corresponde a $\Omega = 6.0$, verde a $\Omega = 3.5$, magenta a $\Omega = 2.8$, y rojo a $\Omega = 2.7$. La superficie negra corresponde a $\Omega = 2.87584$, el cual se le conoce como el **lóbulo de Roche crítico**. Figura obtenida de Prša (2011, Sección 3.1).

componentes mayormente esféricas para altos valores de Ω , hasta llegar a sistemas en contacto en el caso de $\Omega < 2.87584$; la importancia de este valor es explicada en esta sección.

2.2.1 SISTEMAS SEPARADOS

Los **sistemas separados** son aquellos cuya distancia orbital es suficientemente grande para que las componentes estelares no hagan contacto físico una con otra. Por lo tanto, estas componentes interactúan entre si principalmente mediante sus campos gravitacionales, distorsionando la forma de su compañera estelar. Las superficies estelares pueden ser mayormente esféricas o elipsoidales dependiendo del campo de potencial, como se puede ver en la **Figura 2.2** para los modelos que corresponden a $\Omega = 6.0$ y $\Omega = 3.5$. Estos sistemas son laboratorios importantes en el estudio

de las propiedades físicas de las estrellas, debido no solo a que permiten calcular sus masas por medio de su interacción gravitacional, pero el hecho que no tengan contacto físico permite estudiar las propiedades evolutivas de las estrellas, ya que ambas componentes se desarrollan de manera independiente.

2.2.2 SISTEMAS SEMI-SEPARADOS

Un **sistema semi-separado** se distingue de otras morfologías debido a que la separación orbital de las componentes estelares llega a ser del orden de magnitud de unos cuantos radios solares. Esto causa que las superficies equipotenciales de ambas estrellas se acerquen una a otra. En la **Figura 2.2** se puede ver destacada la superficie de color negro, en el cual el potencial de una componente está en contacto con su compañera. Esta superficie se le conoce como el **lóbulo de Roche crítico**, o simplemente como el **lóbulo de Roche**. El punto en el que están en contacto es una región del espacio particular al problema de tres cuerpos, que se le conoce como un *punto de Lagrange*. Estas regiones del espacio dentro del marco de referencia no-inercial marcan donde las fuerzas ejercidas por el campo potencial de las componentes es igual a 0; una partícula dentro de una de estas regiones no es sometida a ninguna aceleración. La **Figura 2.3** muestra las posiciones relativas de los puntos de Lagrange.

De interés particular es el punto *L1*, el punto de contacto entre ambas componentes. Una vez que una componente llene su lóbulo de Roche, el material que previamente estaba ligado a su superficie será atraída gravitacionalmente a la compañera estelar, iniciando un proceso de acreción de material. Las *variables cataclísmicas* son un ejemplo de este tipo de sistemas binarios semi-separados, donde la componente secundaria enana roja llena su lóbulo de Roche, transfiriendo material a la componente primaria enana blanca.

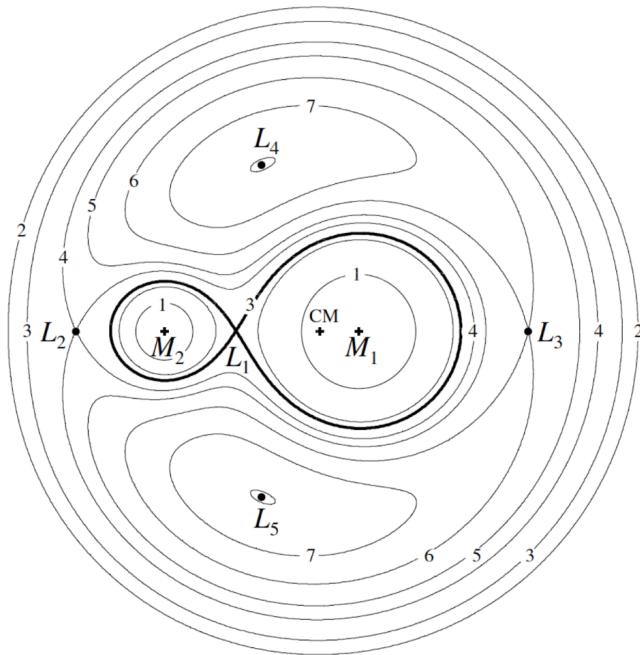


FIGURA 2.3: El modelo de Roche para un sistema binario con una razón de masa $q = m_2/m_1 = 0.25$. Se pueden apreciar los cinco puntos de Lagrange— L_1 - L_5 —que resultan del campo del potencial Ω . Figura obtenida de Ibáñez (2021).

2.2.3 SISTEMAS EN CONTACTO

Un sistema con un valor suficientemente pequeño de su potencial de Roche es un **sistema binario en contacto**. A diferencia de un sistema semi-separado, ambas componentes llenan su lóbulo de Roche en un sistema en contacto, haciendo contacto en el punto de Lagrange L_1 . Este caso de contacto (también llamado un sistema en *sobre-contacto* debido a que las estrellas no solo están en contacto con su lóbulo de Roche, si no que su material se derrama fuera del lóbulo crítico) da origen al fenómeno de una **envoltura común**: esta es una superficie equipotencial que envuelve a ambas estrellas, en lugar de que cada componente tenga su propia fotósfera independiente. La región de conexión—conocida como el “cuello” del sistema por su nombre en inglés—actúa como un puente entre las dos estrellas, sirviendo como un medio de transporte de tanto material estelar como energía. Ejemplos de superficies equipotenciales para estos sistemas se pueden ver en la **Figura 2.2**, las

cuales corresponden a $\Omega = 2.8$ y $\Omega = 2.7$.

En el estudio de sistemas en contacto es importante introducir un nuevo parámetro el cual describe la cantidad en que el sistema está en sobre-contacto. El **factor de relleno**, por su nombre en inglés **fillout factor**, se define por medio de los valores del potencial en los puntos de Lagrange $L1 \rightarrow \Omega_{\text{crit}}^{L1}$ y $L2 \rightarrow \Omega_{\text{crit}}^{L2}$:

$$\mathcal{F} = \frac{\Omega - \Omega_{\text{crit}}^{L1}}{\Omega_{\text{crit}}^{L2} - \Omega_{\text{crit}}^{L1}} \quad (2.20)$$

Esta ecuación describe la concentración espacial del material superficial de las estrellas, definido únicamente con el potencial efectivo del sistema. El valor del factor de relleno está restringido los siguientes valores: $\mathcal{F} < 0$ para sistemas separados, $\mathcal{F} = 0$ para el caso de semi-contacto, y $0 < \mathcal{F} \leq 1$ para el caso de sobre-contacto. El factor de relleno resulta ser una parametrización útil al momento de modelar un sistema en contacto (por ejemplo, utilizando el paquete de software *PHOEBE*), debido a la precisión computacional que sería necesaria para ajustar los radios individuales de las estrellas.

2.3 CLASIFICACIONES OBSERVACIONALES

Dependiendo del método de detección y las propiedades aparentes del sistema se puede clasificar un sistema binario de estrellas. Estas clasificaciones son independiente de sus propiedades físicas, como la clase espectral de cada estrella o sus masas individuales. Al determinar su clasificación observacional se puede delimitar las técnicas observacionales que son viables para recabar datos del sistema; un sistema astrométrico sería indistinguible de uno espectroscópico si uno intenta identificar las componentes individuales a simple vista, o con un telescopio demasiado débil para el trabajo.

Binarias visuales - aquellos sistemas cuya separación orbital aparente es suficientemente grande para distinguir las dos estrellas individuales en la bóveda celeste. A pesar de que se puede trazar la órbita de la secundaria con varios años de observaciones, se requiere de cálculos adicionales para determinar la órbita exacta de las componentes. Esto se debe a la inclinación del sistema con respecto al eje de observación hacia la Tierra; solo es posible observar “una proyección del elipse orbital relativo en el plano del cielo,” aunque esto se puede superar usando el hecho de que la estrella primaria aparentemente inmóvil debe de estar presente “en un punto focal de la órbita relativa.” Karttunen et al. (2017, Capítulo 10)

Binarias espectroscópicas - presentan variaciones periódicas en sus espectros, en donde las líneas espectrales detectadas “oscilan periodicamente alrededor de la longitud de onda promedio” Kutner (2017, Capítulo 5). Esto se observa debido al *desplazamiento de Doppler*, lo cual causa que la frecuencia de un fotón se recorra hacia frecuencias más pequeñas (azules) o más grandes (rojas) dependiendo de su velocidad radial con respecto al observador, si se va acercando o alejando, respectivamente. Estas también pueden ser identificadas al observar dos distintos grupos de líneas espectrales, el cual es resultado de la contribución de ambas estrellas.

Binarias astrométricas - al igual que las espectroscópicas, las binarias astrométricas solo muestran una componente visible al ser observada, al contrario de las binarias visibles. Sin embargo, una binaria astrométrica difiera de las otras dos categorías definidas en cuestión de su movimiento observado en la bóveda celeste. Estas muestran un movimiento errático y no-lineal, algo que no se esperaría ver en una estrella solitaria dado su inercia según la primera ley de Newton. Estas perturbaciones son causadas por una estrella secundaria no aparente al observar el sistema.

2.4 BINARIAS ECLIPSANTES

Una de las propiedades más útiles de identificar de un sistema binario es la *inclinación* de su órbita con respecto a la línea de visión del sitio de observación (ya sea la Tierra en caso de un observatorio terrestre o un punto lejano dentro del sistema solar para un telescopio espacial). En dado caso que un sistema tenga una inclinación suficientemente alta se pueden observar eclipses dentro del sistema, en lo que una componente obscurece a su compañera de nuestra línea de visión, otorgando el nombre de **binaria eclipsante** a los sistemas que muestran este fenómeno. Aparte de su clasificación morfológica física, los sistemas binarios eclipsantes se pueden distinguir en 3 diferentes tipos de sistemas binarios cercanos, basados en la forma de su curva de luz.

2.4.1 EA - ALGOL

Las curvas de luz de tipo *EA* son atribuidas generalmente a sistemas binarios separados, donde ambas componentes estelares pueden mantener su forma esférica sin perturbaciones a escalas apreciables. Gracias a esta separación de las estrellas es posible definir claramente el comienzo y fin de ambos eclipses; fuera de los eclipses, la curva de luz se mantiene relativamente constante, mostrando variabilidad despreciable en casos de variabilidad elipsoidal (en el caso que las componentes no sean esferas perfectas debido a una leve distorsión por el potencial gravitacional) o en caso del calentamiento superficial de una componente por la radiación incidente de su compañera Samus (2016). Existen sistemas con un rango amplio de periodos orbitales, desde 4 horas hasta más de 25 años. Una curva de luz típica de un sistema *EA* se puede apreciar en la **Figura 2.4**.

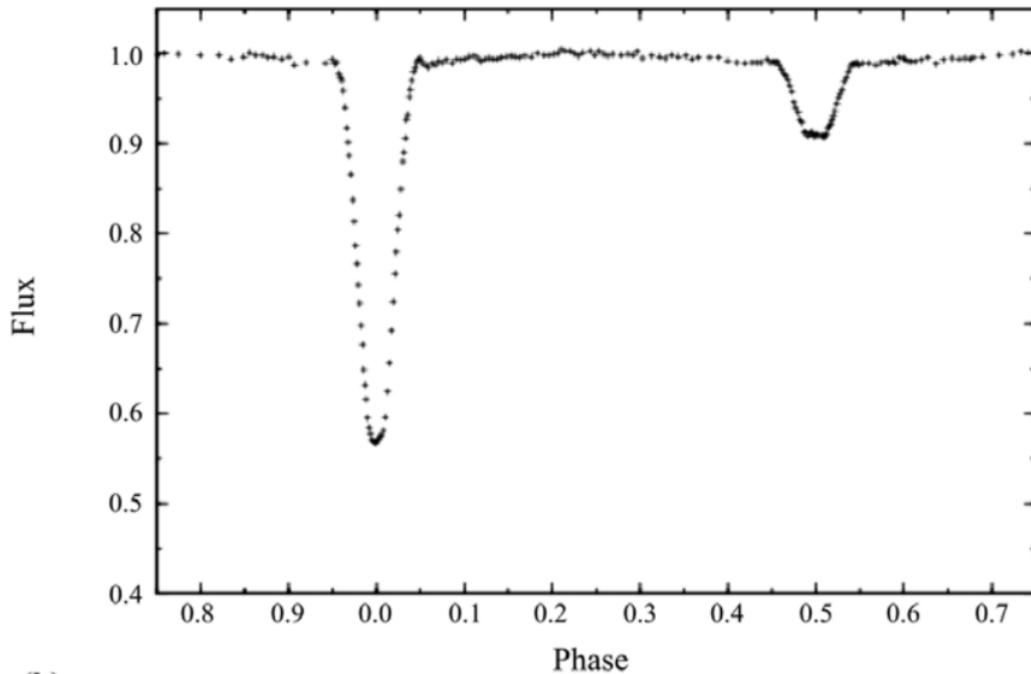


FIGURA 2.4: Curva de luz emblemática de un sistema eclipsante *EA*. Obtenida de Skelton & Smits (2009).

2.4.2 EB - B LYRAE

En el caso de un sistema eclipsante semi-separado, la curva de luz observada se le clasifica como tipo *EB*, o de tipo β Lyrae. En un sistema semi-separado una de las estrellas llena su lóbulo crítico de Roche, haciendo contacto con la superficie de su compañera. Esta distorsión es responsable de su forma elipsoidal en vez de esférica. El flujo que un observador recibe de una estrella es proporcional al área superficial visible en la línea de visión; en una estrella esférica, esta área es constante en el tiempo, pero en el caso de una estrella elipsoidal la cantidad de área observada depende de la fase orbital actual. Esto resulta en eclipses sin un comienzo y fin claramente delimitados. En la mayoría de los casos el periodo orbital de este tipo de sistemas es mayor de 1 día Samus (2016).

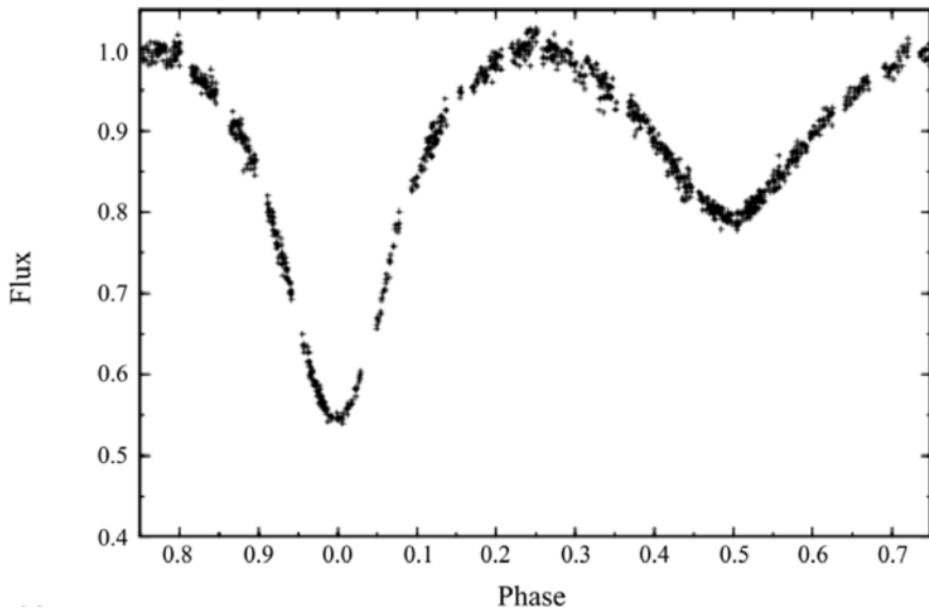


FIGURA 2.5: Curva de luz emblemática de un sistema eclipsante *EB*. Obtenida de Skelton & Smits (2009).

2.4.3 EW - W UMA

Sistemas en sobre-contacto, en donde ambas componentes llenan su lóbulo de Roche, producen curvas de luz que muestran variabilidad continua a lo largo de su órbita, parecido a los sistemas *EB*. Sin embargo, a diferencia de los sistemas semi-separados, ambas componentes de sistemas tipo *EW* están altamente acopladas una a otra, la diferencia de temperaturas siendo del orden de cientos de Kelvin—lo cual es evidente por la profundidad de ambos eclipses—de tipo espectral A-K Skelton & Smits (2009). El periodo orbital es menor de 1 día, del orden de unas cuantas horas, debido a su corta aproximación física. La envoltura común que comparten las estrellas es de una forma irregular; esta consiste de las superficies elipsoidales de las estrellas y del “cuello”, la región que llena el espacio alrededor del punto de Lagrange L1. Debido a esta geometría, cada fase orbital muestra una cantidad distinta de la superficie del sistema, causando la variabilidad continua en la curva de luz, sin una clara delimitación para ninguno de los eclipses. La **Figura 2.6** muestra una curva de luz típica de un sistema *EW*.

Una característica única de los sistemas *EW* es la diferencia en los máximos de la curva de luz. En ciertos casos puede ocurrir que un máximo del flujo sea mayor que el máximo medido de el eclipse contrario, a pesar de estar viendo una cantidad similar de superficie estelar. Este fenómeno observacional es denominado el *efecto O'Connell*. A pesar de que aún no es muy bien entendido la causa de este efecto, una de las interpretaciones más populares en la literatura es la presencia de manchas estelares [Ding et al. (2022) Michel et al. (2023) Michel et al. (2016)], las cuales al ser más frías que el resto de la superficie llega a manifestar como una menor cantidad de radiación emitida por el sistema en ciertas fases. Esto se atribuye a la actividad magnética de la estrella, y se utiliza principalmente al momento de ajustar un modelo computacional a la curva de luz observada.

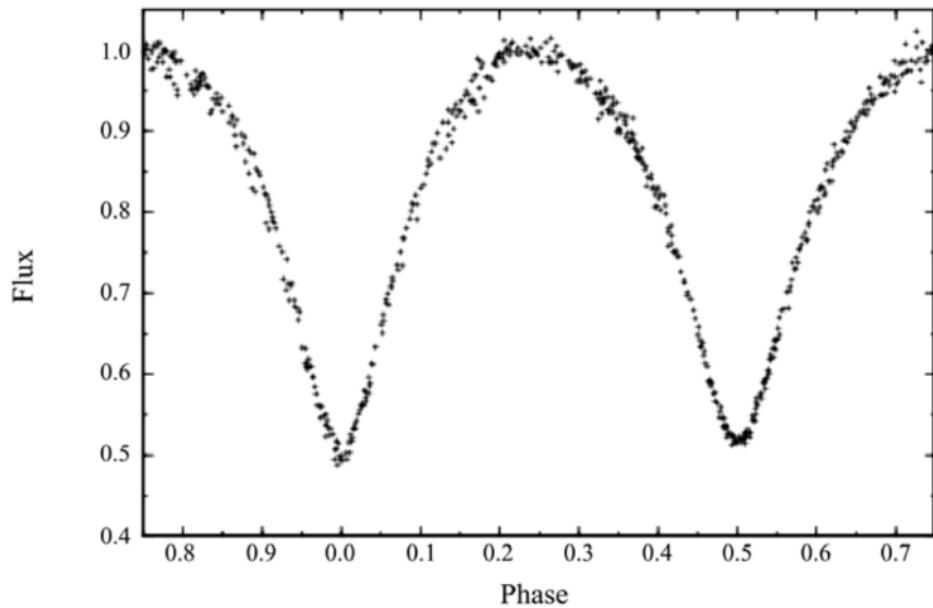


FIGURA 2.6: Curva de luz emblemática de un sistema eclipsante *EW*. Obtenida de Skelton & Smits (2009).

CAPÍTULO 3

PHOEBE - MODELO COMPUTACIONAL

Utilizando el modelo de Roche combinado con el modelo de transporte de radiación en el interior estelar, es posible generar una curva de luz observable sintética de un sistema binario estelar, dado los parámetros físicos del sistema. Para realizar esta tarea se utilizan códigos computacionales que integran las ecuaciones planteadas en el **Capítulo 2**. El uso principal de estos modelos sintéticos computados es en la comparación con curvas reales observadas de sistemas binarios; los parámetros del modelo se pueden ajustar de tal manera que se encuentre la mejor combinación de valores que resulten en una curva sintética (fotométrica en el caso de una curva de luz, velocidades radiales, etc.) cuya diferencia con la curva observada sea la menor posible. El proceso del ajuste del modelo es laborioso, por lo cual se han desarrollado códigos que proporcionan herramientas para facilitar esta tarea.

En el campo de sistemas binarios estelares, uno de los primeros códigos con mayor impacto es el código **Wilson-Devinney**, descrito por primera vez en Wilson & Devinney (1971). El código de Wilson-Devinney—referenciado como el código **WD** en varias publicaciones—parte del modelo de Roche para representar las superficies de las estrellas, lo cual le permite hacer un trato adecuado de fenómenos físicos importantes como el oscurecimiento al limbo y el oscurecimiento gravitacional. A pesar de sobrepasar 5 décadas de edad el código WD sigue en uso actualmente en proyectos de investigación (por ejemplo, Li et al. (2022)), de los cuales se obtienen los

parámetros físicos de un sistema binario estelar observado. Este trabajo de tesis de maestría utilizó la librería **PHOEBE** (**P**Hysics **O**f **E**cclipsing **B**inari**E**s¹), basado en el código WD. En particular se hizo uso de la versión 2.4.13, notando las varias mejoras realizadas en esta segunda versión mayor en comparación con versiones menores a 2.0, las cuales utilizaban el código WD como el motor principal del modelo.

3.1 ESTRUCTURA DE PHOEBE

PHOEBE es un paquete de software escrito en Python para generar modelos de sistemas binarios estelares generales, partiendo del modelo de Roche y modelos de atmósferas estelares, produciendo datos sintéticos (curvas de luz fotométricas, velocidades radiales, perfil de líneas espectrales, etc.) para analizar y comparar con datos observados reales. Es posible crear un modelo utilizando un cliente gráfico² de PHOEBE, cuya funcionalidad depende de un servidor de PHOEBE (una instancia de `phoebe-server`) corriendo, de manera remota o local. Sin embargo, estas tienen sus limitaciones, y por lo general el equipo de PHOEBE recomiendan usar el paquete de Python de manera directa, escribiendo códigos en Python que llamen a funciones y manipulen los parámetros del modelo. Un código escrito y ejecutado no solo ofrece un mayor grado de libertad al momento de tratar los datos, si no que sirve como una receta que cualquiera puede analizar y ejecutar para obtener los mismos resultados de un experimento. Este trabajo de tesis únicamente hizo uso del paquete de PHOEBE en Python.

PHOEBE maneja cada sistema modelado como un *bundle*, el objeto principal responsable de almacenar no solo los parámetros del sistema, pero también los datos observados que corresponden al sistema físico. La **Figura 3.1** presenta un ejemplo de como crear un bundle de PHOEBE utilizando una curva de luz sintética (que solo se va a utilizar al momento de computar la curva observable del modelo, sin

¹<http://phoebe-project.org>

²<http://phoebe-project.org/clients>

una contraparte real) y datos reales obtenidos del catálogo ZTF:

```

01 | import pandas as pd # paquete de manipulacion de datos
02 | import phoebe # importar el paquete
03 |
04 | # creando el bundle para un sistema binario en contacto
05 | b = phoebe.default_contact_binary()
06 |
07 | # agregando una curva de luz en el pasabanda Johnson:V para
     computar (no datos reales)
08 | b.add_dataset('lc', times=phoebe.linspace(0, 1, 101),
     dataset='lc01', passband='Johnson:V')
09 |
10 | # datos obtenidos del catalogo de ZTF; curva de luz
     fotometrica, en el pasabanda ZTF:g
11 | ztf_data: pd.DataFrame
12 |
13 | # agregando curva de luz observada por ZTF, incluyendo el
     flujo medido y su incertidumbre
14 | b.add_dataset('lc', times=ztf_data['times'],
     fluxes=ztf_data['fluxes'], sigmas=ztf_data['flux_err'],
     passband='ZTF:g', dataset='lcZtfG')

```

FIGURA 3.1: Código para crear un bundle en PHOEBE junto a dos curvas de luz: `lc01`, una curva sintética en el pasabanda *Johnson:V*, y `lcZtfG`, una curva observada del sistema con datos proveniente de el catálogo de ZTF en el pasabanda *ZTF:G*. En el caso de `lc01`, solo se generarán datos sintéticos al momento de calcular el **modelo hacia adelante**.

A diferencia de otros códigos en el mundo de software, PHOEBE no utiliza mucho la programación orientada a objetos para manipular el modelo (por ejemplo manipulando un objeto que represente la estrella primaria); la arquitectura de PHOEBE consolida todos los parámetros al nivel del bundle, tanto para tener acceso conveniente para tener flexibilidad en cambiar el modelo de manera dinámica—por ejemplo agregando una componente de luz externa al sistema. Los parámetros de un bundle están organizados en una jerarquía, en donde un identificador no es único en un solo nivel. Por ejemplo, el código para inspeccionar la temperatura efectiva de la estrella primaria y asignar un valor a la temperatura efectiva de la estrella

secundaria se puede ver en la **Figura 3.2**.

```
01 | b: phoebe.Bundle # bundle de un sistema binario creado en un
   |     código anterior
02 | teff_primary = b.get_value(qualifier='teff',
   |     component='primary')
03 | b.set_value(qualifier='teff', component='secondary',
   |     value=teff_primary/2)
```

FIGURA 3.2: Definiendo un bundle almacenado en la variable `b`, el cual ya está configurado con ciertos parámetros del sistema. Estos son accesibles dentro del bundle; esto facilita la manipulación de parámetros del sistema programática, como se puede ver en este ejemplo al asignar el valor de la temperatura efectiva de la estrella secundaria como la mitad de la temperatura efectiva de la componente primaria.

Los parámetros de un bundle están organizados de tal manera que existen más de un parámetro con el calificador (`qualifier` por su nombre en inglés y su nombre en el código) `teff`. Estos se diferencian por la componente (`component` en el código) a la que le pertenecen, en donde `primary` se refiere a la estrella primaria y `secondary` a la secundaria, por sus identificadores respectivos en inglés. Más información—incluyendo la información más actual en el caso de ver una versión de PHOEBE diferente a 2.4.13—se puede encontrar en la página de documentación de PHOEBE³.

3.2 “MODELO HACIA ADELANTE”

El propósito principal de librerías como PHOEBE cae en su capacidad para generar un “**modelo hacia adelante**” (traducido de forma directa de su nombre en inglés: `forward model`). Parte de un modelo del sistema—en el caso de un sistema binario, este viene siendo el modelo de Roche junto a una formulación de las superficies estelares—el cual se va integrando en el tiempo, produciendo como

³http://phoebe-project.org/docs/2.4/tutorials/general_concepts

resultado datos sintéticos observables como una curva de luz fotométrica o una curva de velocidades radiales. Un ejemplo de un sistema “de juguete” se puede ver en la **Figura 3.3**. Es importante notar que estos modelos se trabajan en el espacio fase de la órbita de un sistema; en casos donde el sistema no experimente algún cambio significativo a lo largo del tiempo, es suficiente computar el modelo para cada fase orbital observada, dado que una campaña de observación adecuada abarcaría las mismas fases orbitales más de una vez.

Para generar datos sintéticos observables de un sistema binario, es necesario que PHOEBE tome ciertos aspectos en consideración, descritos a continuación en este capítulo.

3.2.1 DISCRETIZACIÓN DE LA SUPERFICIE ESTELAR

Partiendo del modelo de Roche se determinan las superficies de ambas componentes, siguiendo el principio de superficies equipotenciales. Sin embargo, una descripción analítica de las variaciones de las propiedades estelares resultaría en una complejidad de tiempo intratable del problema; a pesar de permitirnos modelar pequeñas variaciones en los valores de cada parámetro superficial, este no es una opción realista dado la capacidad de computo actual. Es por esto que PHOEBE implementa un método el cual aproxima la superficie de las estrellas a un muestreo uniforme de puntos determinados por el modelo de Roche. Sin embargo, se requiere un tratamiento adicional del modelo de Roche; la **Ecuación 2.16** viene definida en coordenadas esféricas, lo cual causaría una distribución no uniforme en el tamaño de los elementos superficiales no deseada (aparte de causar un tipo de “costura” a lo largo del ecuador de la estrella Prša (2011, Sección 5.1.1)).

Para resolver este problema, se transforma la **Ecuación 2.16** a un sistema de coordenadas cilíndrico de acuerdo a las siguientes transformaciones:

Donde ϕ representa la longitud, ϱ_{\perp} es la componente en el plano orbital de

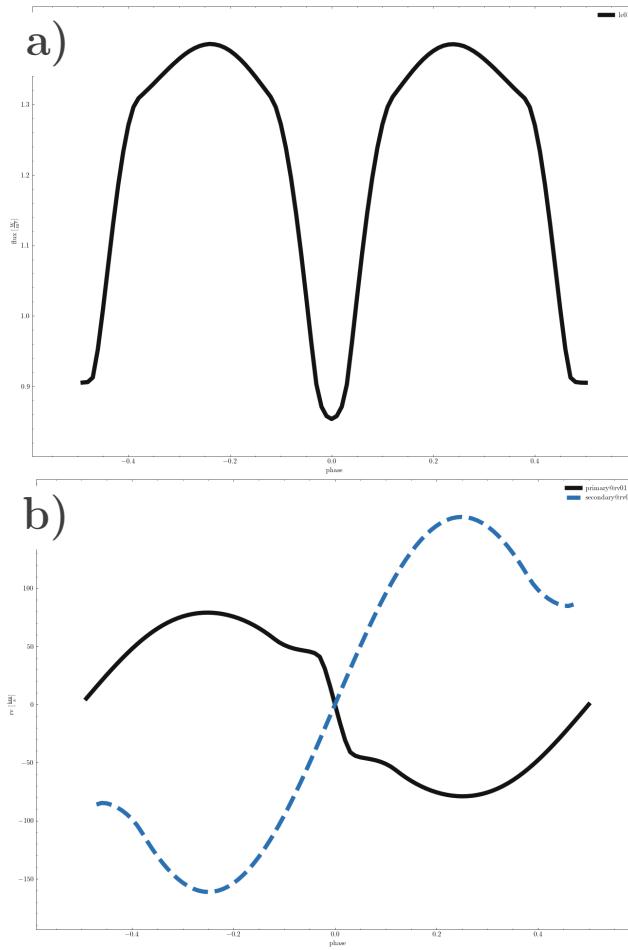


FIGURA 3.3: Datos sintéticos generados usando PHOEBE. Estas curvas representan un sistema binario separado, donde $M_1 = 1.0 M_{\odot}$, $M_2 = 0.5 M_{\odot}$, $R_1 = 2.0 R_{\odot}$, $R_2 = 1.2 R_{\odot}$, $T_1 = T_2 = 6000$ K, inclinación $i_{\text{orb}} = 90^{\circ}$ y periodo orbital $P_{\text{orb}} = 1.0$ d en una órbita sincrónica. La figura muestra dos diferentes tipos de observables: **a)** Curva de luz fotométrica, cuyas variaciones se deben a los eclipses en el sistema. **b)** Curva de velocidades radiales de ambas componentes, donde el movimiento de las estrellas individuales a lo largo de nuestra línea de visión causa fluctuaciones debido al efecto de Doppler.

la distancia al elemento superficial, y z mantiene su definición del sistema de coordenadas cartesianas. Utilizando estas transformaciones se llega a una expresión del potencial de Roche en coordenadas cilíndricas:

Parecido a la **Ecuación 2.19** se puede llegar a una expresión similar para

$$\begin{aligned} x &= \varrho_{\perp} \cos \phi \\ y &= \varrho_{\perp} \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\varrho_{\perp} + z^2}} + q \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \varrho_{\perp}^2 + z^2 - 2\varrho_{\perp}\delta \cos \phi}} - \frac{\varrho_{\perp} \cos \phi}{\delta^2} \right) + \frac{F^2 (1+q) \varrho_{\perp}^2}{2} \tag{3.2}$$

encontrar el valor de ϱ_{\perp} que le corresponde a los valores dados de ϕ y z , utilizando un método para encontrar raíces como el de *Newton-Raphson*:

$$\begin{aligned} &\text{Potencial de Roche } \Omega \\ &\downarrow \\ f(\varrho_{\perp}) &= \frac{1}{\sqrt{\varrho_{\perp} + z^2}} + q \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \varrho_{\perp}^2 + z^2 - 2\varrho_{\perp}\delta \cos \phi}} - \frac{\varrho_{\perp} \cos \phi}{\delta^2} \right) \\ &\quad + \frac{F^2 (1+q) \varrho_{\perp}^2}{2} - \frac{1}{z_{\text{pol}}} - \frac{q}{\sqrt{z_{\text{pol}}^2 + \delta^2}} \\ &\uparrow \text{Potencial de referencia en el polo } \Omega_{\text{pol}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Donde se define $z_{\text{pol}} \equiv \varrho_{\text{pol}}$ como el valor de referencia del radio al polo de la estrella [Prša (2011, Sección 5.1.1)]. Al hacer uso de la derivada $f'(\varrho_{\perp})$ —la cual se puede obtener como lo muestra Prša (2011, Sección 5.1.1)—es posible implementar un método para encontrar las raíces de esta ecuación. El muestreo de la superficie se hace a intervalos regulares de latitud y longitud:

$$\begin{aligned} &\text{Latitud} \\ &\downarrow \\ \theta_k &= \frac{\pi (k - 0.5)}{2N} \\ \phi_l &= \frac{\pi (l + [(l + 1) \bmod 2] \div 2)}{M_k} \\ &\uparrow \text{Longitud} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Donde N es el número de elementos superficiales solicitados en la muestra. Se

define los subíndices $k = 1 \dots N$ y $l = 1 \dots M_k$, donde $M_k := 1 + \text{int}(1.3N \sin \theta_k)$ Prša (2011, Sección 5.1). Una vez que se obtienen las posiciones de cada muestra se adopta una forma tal que forme una “malla” que representa la superficie estelar. Cada elemento de la malla se considera uniforme con respecto a sus propiedades, como su temperatura efectiva, gravedad superficial, el radio local, etc. En PHOEBE v2.0 y en adelante se utilizan elementos en forma de triángulos equiláteros, tal como se muestra en la **Figura 3.4**.

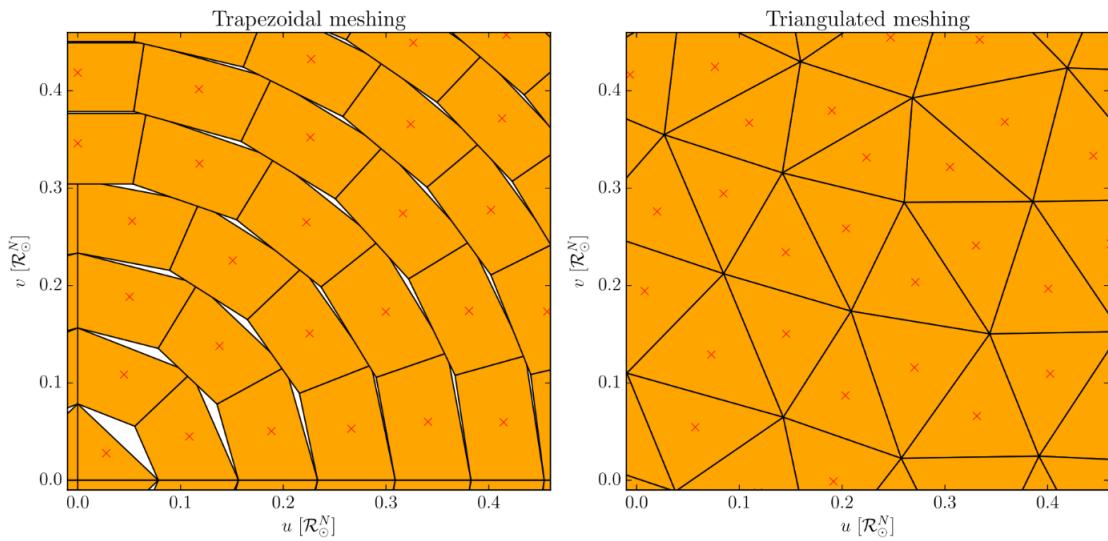


FIGURA 3.4: Comparación la discretización superficial usando elementos trapezoidales vs. triangulares en el polo estelar. Al utilizar elementos de área superficial idéntica se nota que en el caso de elementos trapezoidales llega a haber huecos en la superficie que se manifiestan en errores sistemáticos en las curvas sintéticas generadas por el modelo, debido a la contribución nula de estas fallas en la malla. Estos errores se ven más pronunciados entre mayor sea la distorsión experimentada por la estrella. Al utilizar elementos en forma de triángulos equiláteros se puede observar que se obtiene una superficie continua, eliminando esta fuente de error en el modelo. Figura obtenida de Prša et al. (2016)

Esta malla de la superficie estelar se puede ver por completo en la **Figura 3.5**, donde los parámetros del sistema causan una distorsión apreciable de ambas estrellas debido a las fuerzas de marea en juego.

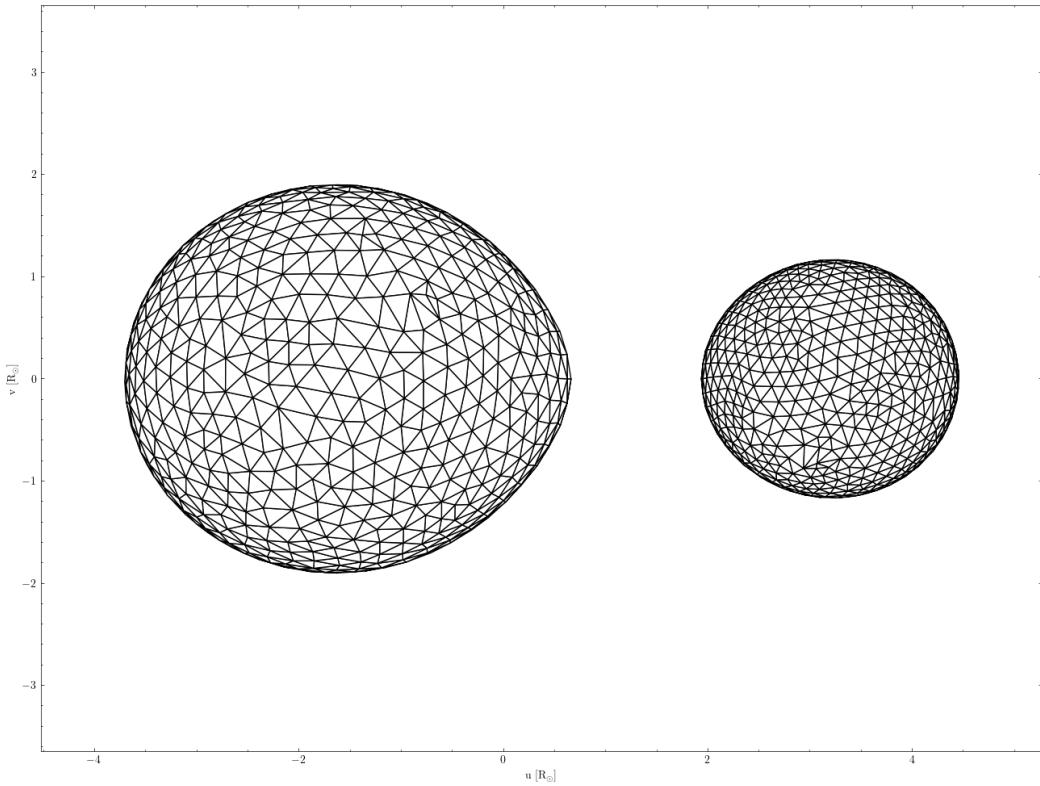


FIGURA 3.5: Mallas de las superficies estelares de un sistema simulado con PHOEBE, utilizando los mismos parámetros del modelo utilizado en la **Figura 3.3**.

La malla, al igual que la superficie estelar, no es un objeto constante; en el caso de un sistema binario de órbita excéntrica las fuerzas de marea que causan estas distorsiones elipsoidales son dependientes de la fase orbital. A lo largo de la órbita del sistema, el campo del potencial de Roche va cambiando debido a la distancia no constante entre ambas componentes estelares. Uno de los principios del modelo de Roche es que las superficies estelares se ajustan al campo de fuerzas instantáneo del sistema, el cual va cambiando a escalas de tiempo significativamente menores que el periodo orbital Prša et al. (2016). Esto causaría un cambio apreciable en los radios estelares, debido a que las superficies equipotenciales del campo no son constantes en volumen. En teoría, si una estrella se rige a solo las superficies equipotenciales del mismo valor en cada fase orbital, la estrella debería de comprimirse o expandirse, irradiando parte de su energía a su ambiente exterior, llegando rápidamente a una órbita circular. Sin embargo, en la literatura no existen observaciones publicadas

que apoyen esta teoría; al contrario, existen sistemas como las estrellas “heartbeat” (nombrado por su parecido a una lectura de un electrocardiograma) cuya variabilidad se debe a la distorsión de sus superficies por fuerzas de marea en órbitas excéntricas [Thompson et al. (2012)]. Como consecuencia, PHOEBE adopta un mecanismo para preservar el volumen del sistema; al momento de muestrear la superficie para generar la malla superficial, PHOEBE elige la superficie equipotencial que más se acerque al volumen calculado de las estrellas en su punto de periastro, el punto en donde experimentan la mayor distorsión superficial.

3.2.2 DISTRIBUCIÓN DE PARÁMETROS SUPERFICIALES

Una estrella no es perfectamente uniforme en la superficie; un modelo acertado de una estrella debe tomar en cuenta la distribución de parámetros como su temperatura, intensidad, etc. Para esto se debe calcular la gravedad superficial en el polo estelar:

$$\mathbf{g}_{\text{pol}} = -\frac{Gm_1}{r_{\text{pol}}^2} \frac{\mathbf{r}_{\text{pol}}}{r_{\text{pol}}} - \frac{Gm_2}{h^2} \frac{\mathbf{h}}{h} - \omega^2(t) d_{\perp,\text{rot}} \frac{\mathbf{d}_{\perp,\text{rot}}}{d_{\perp,\text{rot}}} \quad (3.5)$$

Donde se define r_{pol} como el radio al polo estelar, $h = \sqrt{r_{\text{pol}}^2 + d^2}$ es la distancia del polo estelar al centro de la estrella compañera, $\omega(t)$ es la velocidad angular en el tiempo t , y $d_{\perp,\text{rot}}$ es la distancia del polo estelar hacia el eje de rotación del sistema Prša (2011, Sección 5.2). La gravedad superficial depende de manera indirecta de la fase orbital, debido al ajuste de la estrella a una superficie equipotencial a lo largo de la órbita del sistema. Este parámetro rige la distribución de material y energía en la estrella; las regiones de mayor gravedad superficial (en sistemas binarios suelen ser los polos estelares debido a las fuerzas de marea que resultan en un radio ecuatorial mayor) con áreas más calientes que el resto de la superficie. Prša (2011, Sección 4.3) dice que el flujo monocromático para el rango de longitud de onda $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ es proporcional tanto a la gravedad superficial como a la temperatura efectiva:

$$F_\lambda = -\frac{16\sigma T_{\text{eff}}^3}{3\bar{\kappa}\rho} \frac{dT_{\text{eff}}}{d\Omega} g^\beta \quad (3.6)$$

Donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann, $\bar{\kappa}$ es el coeficiente de opacidad de Rosseland (el cual describe la opacidad, o la probabilidad de un fotón de atravesar la superficie estelar), ρ es la densidad del material en la fotósfera, g es la aceleración gravitacional local, y β es el *coeficiente del oscurecimiento gravitacional*. El valor de β en lo general se mantiene fijo dependiendo de la naturaleza de la envoltura estelar:

$$\beta = \begin{cases} 0.32 & \text{envoltura convectiva} & T_{\text{eff}} < 5000 \text{ K} \\ 1 & \text{envoltura radiativa} & T_{\text{eff}} > 8000 \text{ K} \end{cases} \quad (3.7)$$

Utilizando este coeficiente es posible calcular la temperatura y el flujo de un elemento superficial dependiendo de la aceleración gravitacional local, dado un valor de referencia que corresponde al polo estelar:

$$\begin{aligned} F &= F_{\text{pol}} \left(\frac{g}{g_{\text{pol}}} \right)^\beta \\ T_{\text{eff}} &= T_{\text{eff,pol}} \left(\frac{g}{g_{\text{pol}}} \right)^{\beta/4} \end{aligned} \quad (3.8)$$

De la cual se obtiene el flujo y la temperatura efectiva dada una aceleración gravitacional local, donde el término $(g/g_{\text{pol}})^{\beta/4}$ se conoce como la **corrección del oscurecimiento gravitacional**. La superficie resuelta con respecto a su gravedad superficial y temperatura efectiva se puede ver en la **Figura 3.6**.

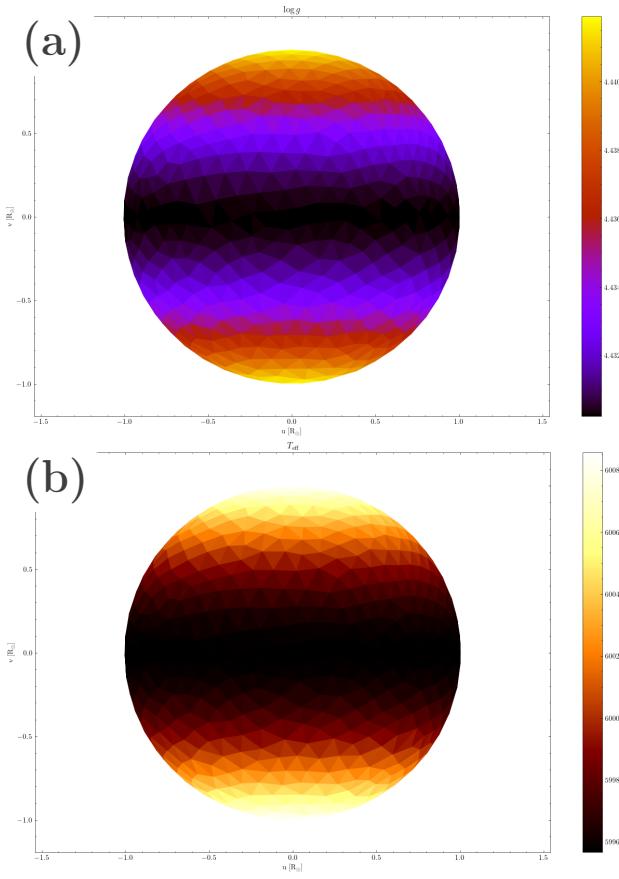


FIGURA 3.6: Malla de una estrella cuyas propiedades son las mismas que el Sol, generada utilizando PHOEBE, donde el potencial efectivo es calculado no en base al modelo de Roche, si no basado en su frecuencia de rotación, en el caso de una estrella aislada—a pesar de que esta información no esté documentada explícitamente en un documento fácil de encontrar, esto se puede ver en el código fuente de PHOEBE 2, en este caso en el archivo `rotstar.py`. Se puede ver la distribución de gravedad efectiva superficial en el índice (a), al cual se acopla la distribución de temperatura efectiva vista en el índice (b).

3.2.3 RADIACIÓN EMERGENTE

Una vez determinada la distribución de parámetros superficiales es posible determinar la radiación emergente de cada elemento superficial, del cual se calcula el flujo que recibe un observador. El flujo de una estrella no es una cantidad que

PHOEBE determina directamente; PHOEBE más bien calcula la *intensidad*, que se define como la cantidad de energía dE emitida a través de el ángulo sólido $d\Omega$ por una superficie proyectada a un ángulo $dA \cos \theta$ en el intervalo de tiempo dt :

$$I_\lambda = \frac{dE}{d\lambda dA \cos \theta d\Omega dt} \quad (3.9)$$

Donde I_λ es la *intensidad monocromática*, para un intervalo de longitud de onda $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. Esta cantidad es calculada en la dirección normal de cada elemento superficial; la **Figura 3.7** muestra la distribución de intensidad absoluta a lo largo de la superficie estelar. La intensidad monocromática se obtiene partiendo del modelo atmosférico empleado, ya sea el de cuerpo negro básico o una tabla como la de Kurucz (1970). Para obtener la *intensidad absoluta* es necesario integrar la intensidad monocromática sobre todas las longitudes de onda:

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \quad (3.10)$$

Utilizando la intensidad monocromática dada por la **Ecuación 3.9** se usa para definir la **distribución espectral de energía** (**SED** por sus siglas en inglés), donde $\mathcal{S} \equiv dI_\lambda/d\lambda$. La SED calculado depende tanto en las propiedades de la estrella como en el modelo empleado para su atmósfera estelar; en el caso de un cuerpo negro, su SED depende solo de su temperatura efectiva, mientras que modelos como Kurucz (1970) requieren parámetros adicionales como la metalicidad estelar y gravedad superficial. Sin embargo, en el modelo hacia adelante de una estrella es de gran importancia determinar la intensidad en una *pasa banda*; esta es definida por una curva de transmisión, la cual describe la cantidad de radiación incidente que traspasa el sistema óptico. PHOEBE tiene varias pasa bandas disponibles, como por ejemplo la de *Johnson:V* vista en la **Figura 3.8**. Utilizando la pasa banda elegida y la SED calculado se computa la intensidad de la pasa banda con la siguiente ecuación:

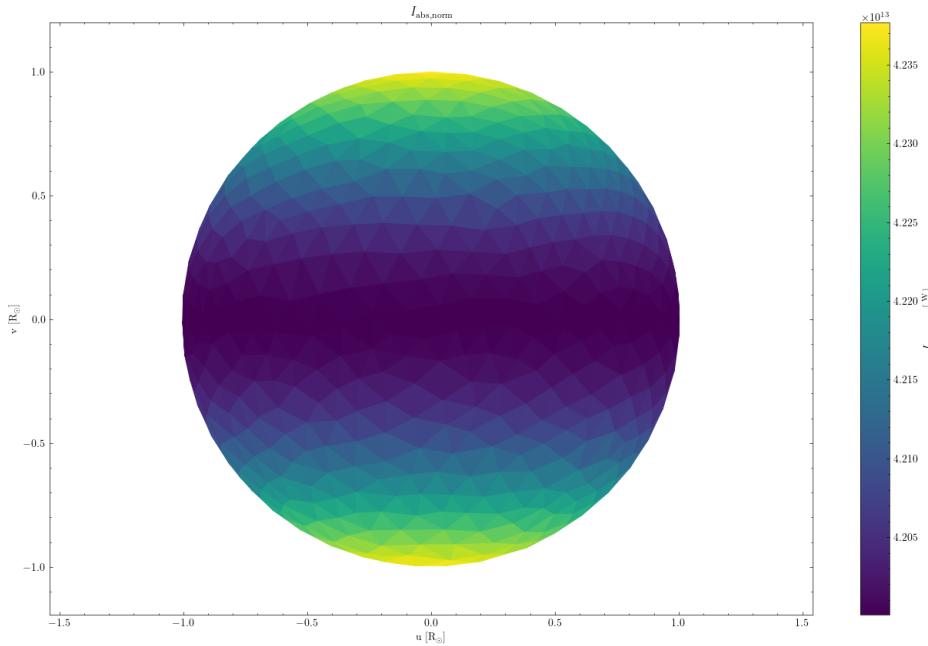


FIGURA 3.7: Intensidad absoluta de una estrella modelada utilizando PHOEBE, integrada en las longitudes de onda que abarca el pasa banda de *Johnson*: *V*. La figura muestra la intensidad absoluta en la dirección del vector normal a los elementos superficiales. Se puede apreciar la distribución de la intensidad, la cual sigue el mismo comportamiento de la gravedad superficial que se muestra en la **Figura 3.6**.

$$I_{\text{pb}} = \int_{\lambda} \mathcal{S}(\lambda) \mathcal{P}(\lambda) d\lambda \quad (3.11)$$

Donde I_{pb} como \mathcal{S} son funciones que toman de parámetro de entrada las propiedades termodinámicas de la estrella, incluyendo incluso efectos extrínsecos al sistema como la extinción interestelar [Prša et al. (2016)]. La intensidad I_{pb} definida en la **Ecuación 3.11** solo es apropiada para simular un detector calibrado por flujo de estrellas estándares; para medir la intensidad con respecto al número de fotones detectados es necesario dividir I_{pb} entre la energía del fotón incidente, definida como $E_{\lambda} = hc/\lambda$, e integrar:

Por último, se integra $I_{\text{pb,fot}}$ o I_{pb} —dependiendo si se desea el flujo por cuentas

$$I_{\text{pb,fot}} = \int_{\lambda} \left(\frac{\mathcal{S}(\lambda) \mathcal{P}(\lambda)}{E_{\lambda}} d\lambda \right) = \frac{1}{hc} \int_{\lambda} \lambda \mathcal{S}(\lambda) \mathcal{P}(\lambda) d\lambda \quad (3.12)$$

de fotones o en energía—a lo largo de la superficie estelar visible para obtener el flujo emitido por la estrella en la pasa banda deseada, llegando como resultado a una curva de luz sintética como en la **Figura 3.3**, la cual forma la base del análisis fotométrico de un sistema binario estelar.

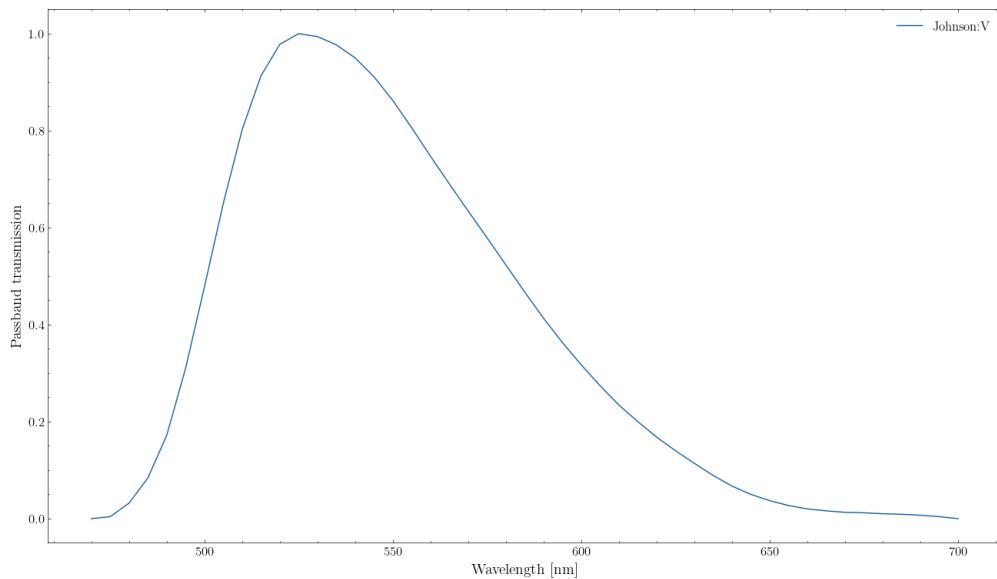


FIGURA 3.8: Curva de transmisión en PHOEBE para la pasa banda *Johnson:V*.

3.3 EL PROBLEMA INVERSO

El tener un modelo sofisticado de un sistema binario estelar nos ayuda a entender los mecanismos responsables de su comportamiento, incluyendo como afectan las diferentes combinaciones de parámetros estelares en las curvas observables del sistema. Sin embargo, el propósito de modelos como PHOEBE o WD yace en determinar los parámetros físicos que, una vez imputadas al modelo, generan una curva observable sintética que se acopla a datos reales observados del sistema. Esto en general se conoce como el **problema inverso**, y es tanto una gran parte de este

trabajo de tesis como el objetivo de varias investigaciones en la literatura. Encontrar los parámetros que mejor ajustan un modelo a datos observados es un proceso particular para cada objeto estudiado; sin embargo, existe un proceso general que se sigue para llegar a una conclusión cuyos errores y sesgos sean aceptables.

3.3.1 FUNCIÓN DE CALIDAD

Para saber si un modelo es un buen ajuste a una curva observable de un sistema es necesario definir una función que sirva para parametrizar el error entre el modelo sintético y los datos reales. Para una curva observada, se calcula el χ^2 , el cual se define como la siguiente expresión:

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_{i,o} - y_{i,m}}{\sigma_i^2} + \ln \sigma_i^2 \right) \quad (3.13)$$

Donde y indica un punto en la curva del modelo, los subíndices o y m refiriéndose a datos observacionales o del modelo sintético, respectivamente. Cada punto del modelo se le atribuye un peso, la incertidumbre en el dato observado $\sigma_{i,o}$, el cual se determina antes de ingresar los datos a PHOEBE. En el caso de tener incertidumbres que han sido subestimadas se introduce el término σ_{inf} , donde al final se obtiene la incertidumbre σ_i :

$$\sigma_i^2 = \sigma_{i,o}^2 + y_{i,m}^2 \exp(2\sigma_{inf}) \quad (3.14)$$

En el caso de tener incertidumbres acertadas, $\sigma_{inf} = -\infty$, el cual simplifica la previa ecuación a solo $\sigma_i^2 = \sigma_{i,o}^2$.

Estos datos no necesariamente son mediciones fotométricas del sistema; pueden ser velocidades radiales o intensidades de líneas espectrales. El subíndice k denota

la curva para la cual se está calculando el ajuste del modelo. Si se tienen varias curvas observadas (por ejemplo, en diferentes bandas fotométricas) el ajuste total del modelo se califica por la suma de los ajustes individuales a cada curva observable:

$$\chi^2 = \sum_k \chi_k^2 \quad (3.15)$$

El objetivo de un ajuste de un modelo a datos observacionales es encontrar los parámetros físicos del sistema binario en cuestión que resultan en el χ^2 más cercano a 0 posible. El valor obtenido de χ^2 se parametriza en PHOEBE normalizando por el número de observaciones hechas en todas las curvas de luz combinadas N_{tot} , resultando en el parámetro λ , el cual indica un ajuste satisfactorio si $\lambda \approx 1$:

$$\lambda := \frac{\chi^2}{N_{\text{tot}}} \quad (3.16)$$

Sin embargo, el modelo descrito en la literatura, y que usa PHOEBE, es altamente no-lineal; el espacio de parámetros posee una topología compleja, el cual implica que existen más de una combinación de valores para los parámetros del modelo que se ajustan a un mismo conjunto de curvas observacionales, el cual se resalta en casos de degeneración de un modelo, donde 2 o más parámetros se ven correlacionados de tal manera que existen una cantidad infinita de soluciones al problema.

Para finalizar la descripción de PHOEBE con respecto a este trabajo de tesis, se describe un proceso de ajuste de modelo a un conjunto de curvas de luz fotométricas, utilizando herramientas dadas dentro de PHOEBE, con la finalidad de llegar a la mejor combinación de parámetros evitando caer lo más posible en trampas como mínimos locales en el espacio de parámetros y modelos degenerados.

3.3.2 ESTIMACIÓN INICIAL DE PARÁMETROS

La solución final para un sistema binario va a depender de manera significativa de los valores iniciales de los cuales parten las siguientes etapas del ajuste. El proceso de estimar los valores iniciales es una combinación de manipulación manual y herramientas diseñadas para un ajuste rápido a los datos observacionales. Para utilizar estos estimadores es necesario primero encontrar el periodo orbital del sistema, el cual comúnmente corresponde a la segunda harmonica de la frecuencia dominante de un periodograma; los algoritmos principales utilizados en la literatura son *Lomb-Scargle* [Lomb (1976), Scargle (1982)] el cual ajusta un modelo sinusoidal a una serie de tiempo (cuyas muestras no requieren haber sido tomadas en intervalos regulares del tiempo) y *Box Least Squares* (abreviado como BLS) [Kovács et al. (2002)], un algoritmo diseñado para casos donde la señal de los eclipses es pequeña a comparación con el flujo de base del sistema, por ejemplo los sistemas cuya duración de eclipses estelares es mucho menor que el periodo orbital. Existen varias implementaciones de periodogramas para su uso en el ámbito de la astrofísica; ambos están disponibles dentro de PHOEBE en la forma de un estimador:

Es posible correr un periodograma de manera automática o manual, dependiendo si una malla de frecuencias es dada como entrada al periodograma. Una vez que se obtenga el periodo orbital del sistema es posible determinar un punto de partida de los parámetros del sistema, utilizando la curva de luz ajustada en fase. Dentro de PHOEBE existen 2 distintos métodos para esto: la estimación de parámetros utilizando de manera directa la geometría de la curva, o haciendo uso de **EBAI**.

3.3.2.1 GEOMETRÍA DE LA CURVA DE LUZ

Dada una curva de luz fotométrica en fase es posible estimar ciertos parámetros del sistema analizando ciertas características geométricas. Una vez que se haya encontrado el periodo orbital del sistema—y por ende haber obtenido la curva de luz

```

01 | periodogram_freqs = phoebe.linspace(0.001, MAX_FREQ,
02 |                                     NUM_FREQS)
03 | b.add_solver('estimator.lc_periodogram',
04 |               solver='periodogram',
05 |               algorithm='ls', # 'ls' corresponde a Lomb-Scargle,
06 |               'bls' a BLS
07 |               sample_mode='manual',
08 |               lc_datasets=['lc01', 'lc02'],
09 |               sample_periods=periodogram_freqs)
10 | b.run_solver(solver='periodogram', solution='period_spectrum')

```

FIGURA 3.9: Ejemplo de cómo correr un periodograma de tipo Lomb-Scargle en un bundle de PHOEBE. Este caso en particular es para un modelo con 2 curvas de luz fotométricas distintas, que se ha determinado muestra un comportamiento sinusoidal. Dependiendo de la información antecedente disponible del objeto al estudiar se puede definir límites de manera manual del periodograma, por ejemplo si se sabe que es un sistema de corto periodo (<1 día). Los resultados del periodograma se pueden acceder en la solución `period_spectrum`, donde se puede obtener el espectro de potencias completo.

en fase—es posible ajustar una función analítica compuesta de 2 funciones Gaussianas, un término coseno, un término constante, o cualquier combinación de estas que mejor se ajusten a los datos observacionales, generando en total 7 modelos Conroy et al. (2020). Utilizando un ajuste de mínimos cuadrados a las curvas en fase, una vez estimado los tiempos de los eclipses, se determina el mejor modelo usando un criterio. Del modelo final se obtienen valores iniciales tanto para propiedades orbitales del sistema—the tiempo de superconjunción primario t_0 , la excentricidad e , y el argumento de periastro ω_0 —como propiedades relativas entre las estrellas componentes: la suma de radios normalizado al semieje mayor de la órbita $(R_1 + R_2)/a_{\text{orb}}$ (esto se nota en la diferencia de anchura entre ambas jorobas de la curva de luz) y la razón de temperaturas efectivas $T_{\text{eff},2}/T_{\text{eff},1}$ (el cual se puede aproximar por la diferencia de profundidad entre el eclipse primario y secundario). Este estimador solo es capaz de analizar sistemas separados, por lo cual no se utilizó en este trabajo de tesis.

3.3.2.2 EBAI - ECLIPSING BINARIES VIA ARTIFICIAL INTELLIGENCE

EBAI es una red neuronal artificial que hace uso de métodos de aprendizaje automático como *K-Nearest Neighbors* para mapear una curva de luz observacional a parámetros físicos de un sistema binario estelar. El algoritmo KNN ajusta una función a datos reales, permitiendo hacer una regresión basado en los vecinos cercanos de un punto. Los detalles de KNN se encuentran en Pedregosa et al. (2011), el cual describe la implementación dentro del paquete de Python `scikit-learn`. Una red neuronal es compuesta de varias capas de procesamiento, donde cada capa está compuesta de unidades individuales (o “neuronas”) que propagan valores de acuerdo a su función de activación. Esta arquitectura es la que les permite “aprender” relaciones en modelos no lineales como el de un sistema binario. Hasta el momento (PHOEBE version $\leq 2.4.13$) el estimador de EBAI es el único capaz de estimar los parámetros de un sistema binario en contacto; un esquema de su composición interna se puede ver en la **Figura 3.10**.

Para sistemas binarios en contacto, el estimador EBAI puede determinar la razón de masa q , la razón de temperaturas efectiva T_2/T_1 , la inclinación orbital i , y el factor de relleno f del sistema; el estimador calcula un valor para el tiempo de superconjunción t_0 del sistema binario, el cual es necesario para obtener una curva de luz en fase cuyo eclipse primario yace en la fase orbital 0. Dado un Bundle en PHOEBE, se puede generar una estimación inicial corriendo el siguiente código:

3.3.3 OPTIMIZACIÓN DE PARÁMETROS

Durante un ajuste de modelo es importante determinar si la combinación de parámetros elegida es óptima dado una serie de datos observados. Esto se basa en la función de costo definida en la **Ecuación 3.15**; un ajuste adecuado del modelo implica tener un valor de χ^2 cercano a 0. PHOEBE ofrece herramientas especializadas para encontrar la combinación de parámetros que más se acerca a esta condición

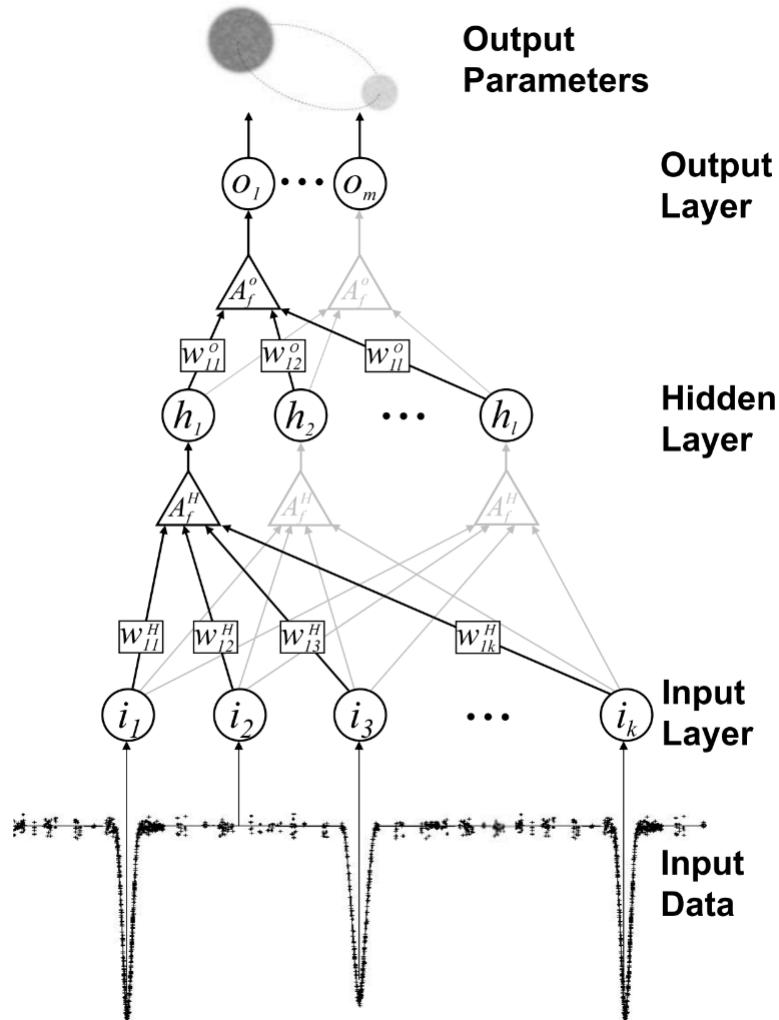


FIGURA 3.10: Esquema de una red neuronal artificial (ANN por sus siglas en inglés). El objetivo de una red como EBAI es partir de datos de entrada como una curva de luz observada y obtener los parámetros del sistema que generen un modelo sintético que se aproxime a los datos. Figura obtenida de Prša et al. (2008).

de manera sistemática. Estos son denominados *optimizadores*: algoritmos diseñados para explorar el espacio de parámetros y llegar a un mínimo de la función de costo. Este trabajo de tesis hizo uso de 2 optimizadores principales: **el simplex de Nelder-Mead y correcciones diferenciales**.

```

01 | # b: phoebe.Bundle
02 | b.add_solver('estimator.ebai', solver='ebai_estimator',
03 |                 ebai_method='knn', phase_bin=False,
04 |                 lc_datasets=['lc01', 'lc02'])
05 | b.run_solver(solver='ebai_estimator',
06 |                 solution='ebai_init_estimates')
06 | b.adopt_solution(solution='ebai_init_estimates')

```

FIGURA 3.11: Código para correr un estimador EBAI para un sistema compuesto de 2 curvas de luz fotométricas distintas, lc01 y lc02. Para un sistema binario separado también existe la opción de correr el estimador con `ebai_method='mlp'`, el cual usa una red neuronal propia de PHOEBE.

3.3.3.1 SIMPLEX DE NELDER-MEAD

Desarrollado por Nelder & Mead (1965), el **simplex de Nelder-Mead** (NMS por sus siglas en inglés) es un algoritmo heurístico que explora el espacio de parámetros mediante un *simplex*, un politopo compuesto de varios vértices que representan distintos puntos en la función que se busca optimizar. En el caso de PHOEBE, la función a optimizar es χ^2 ; para esto es necesario evaluar el ajuste en cada punto del simplex, lo cual requiere calcular el modelo hacia adelante para cada punto de prueba. Esto se demuestra con la siguiente modificación a la **Ecuación 3.15**, visto en la **Ecuación 3.17**.

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \sum_i \frac{(F_i^{\text{obs}} - F_i^{\text{syn}}(\mathbf{p}))^2}{\sigma_i^2} \quad (3.17)$$

\mathbf{p} representa el vector de parámetros del modelo, como la inclinación orbital, razón de masas, y cualquier otro incluido en el cálculo. El método de NMS solo requiere evaluaciones de la función de costo en los puntos del simplex; esto lo hace un método adecuado para optimizar funciones altamente no-lineales a cambio de una baja eficiencia computacional dependiendo del número de vértices a evaluar.

En total, la cantidad de vértices empleados depende del número de dimensiones del modelo; en el caso de optimizar n parámetros del sistema binario, NMS utilizará $n+1$ vértices, o combinaciones de parámetros. Con cada iteración, el método manipula el simplex por medio de transformaciones geométricas, como lo muestra Prša (2011, Sección 6.4). En el ajuste de un sistema binario eclipsante el método de NMS se utiliza para intentar llegar al mínimo global de la función de costo, el cual el punto de parada es cuando haya convergido la optimización (donde el simplex se podría considerar de un tamaño geométrico despreciable), o cuando hayan pasado un cierto número de iteraciones, en el caso que no haya sido completamente exitoso. Su uso se puede ver en la **Figura 3.12**. Para más información de la implementación y uso del optimizador se puede hacer referencia a la documentación de SciPy⁴.

```

01 | # b: phoebe.Bundle
02 | b.add_solver('optimizer.nelder_mead', solver='opt_nm',
                 maxiter=50,
03 |     fit_parameters=['teffratio', 'period@binary',
04 |         't0_supconj@binary', 'incl@binary', 'fillout_factor'])
05 | b.run_solver(solver='opt_nm', solution='opt_nm_solution')
```

FIGURA 3.12: Código para crear y ejecutar un optimizador utilizando el algoritmo NMS. Este código en particular busca encontrar la combinación de la razón de temperaturas, periodo orbital, el tiempo de superconjunction primario, la inclinación orbital, y el factor de relleno del sistema, como se puede ver por el argumento `fit_parameters` del resovedor (`solver` por su categoría en inglés). Se especifica 50 como el máximo número de iteraciones que tiene permitido correr el optimizador en dado caso que no llegue a converger a una solución; el criterio de convergencia se define por los argumentos `xatol` y `fatol` que definen una tolerancia de convergencia para los parámetros de entrada y la función de costo, respectivamente.

⁴<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.minimize-neldermead.html>

3.3.3.2 CORRECCIONES DIFERENCIALES

Una de las formas más directas de explorar el espacio de parámetros y llegar a un valor óptimo de la función de costo es por el método de **correcciones diferenciales**. Este algoritmo trabaja evaluando derivadas parciales de la función; estas son evaluadas por medio de diferencias finitas como se ve en la **Ecuación 3.18**.

$$\frac{\partial f(p_1, \dots, p_k, \dots, p_n)}{\partial p_k} \rightarrow \frac{f(\dots p_k + \Delta p_k \dots) - f(\dots p_k \dots)}{\Delta p_k} \quad (3.18)$$

De esta manera PHOEBE explora el espacio alrededor de los valores actuales del modelo para cada parámetro p_k ; dado un valor de Δp_k se calcula χ^2 en el punto actual del modelo y el paso propuesto, siguiendo el camino que disminuya la función de costo. La técnica de correcciones diferenciales se puede aplicar a más de un parámetro a la vez, evaluando la diferencia parcial para cada parámetro a optimizar. Esta herramienta tiene mayor utilidad cuando el modelo esté cerca del mínimo global, por ejemplo después obtener estimaciones iniciales de los parámetros y utilizando un optimizador menos sensible a espacios mínimos locales como NMS. Sin embargo, un algoritmo de correcciones diferenciales puede divergir en modelos cuya discrepancia entre las curvas sintéticas y curvas observadas es significativo. Es por esto que PHOEBE no permite correr este optimizador por varias iteraciones de manera directa; esto obliga al operador a analizar la solución propuesta por el algoritmo y decidir si es una solución aceptable. Si es necesario ejecutar más iteraciones, el mismo resovedor es capaz de correr de nuevo, utilizando los valores adoptados de la iteración previa.

3.3.4 MUESTREO DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD POSTERIOR

El modelo resultante de los optimizadores en teoría resulta en el mejor ajuste a los datos observacionales, lo cual es indicado por la métrica de χ^2 . Sin embargo, este parámetro no es suficiente para justificar que se haya encontrado el valor óptimo del modelo. Para los problemas de un alto número de dimensiones como los modelos de sistemas binarios, el espacio de parámetros está repleto de volúmenes donde el ajuste a los datos observacionales varía de manera significativa. Para modelos como un sistema binario estelar, también existe la posibilidad que ciertas combinaciones de parámetros que resulten en un modelo físicamente imposible, el cual debe de ser descartado por completo. Para determinar la distribución de densidad de cada parámetro—de donde se puede calcular *intervalos de confianza*—es necesario conocer la topología del espacio de parámetros.

En un mundo ideal este proceso se haría para todos los valores posibles para cada parámetro del modelo. Esto resulta ser prácticamente imposible para muchos modelos del mundo real debido al costo computacional de un modelo; para calcular un modelo hacia adelante en PHOEBE, dependiendo de la cantidad curvas de luz generadas y de las optimizaciones empleadas en el modelo, puede tardar un tiempo en el orden de decenas o cientos de segundos. Dado millones de combinaciones de los parámetros, esto resulta en un tiempo de cómputo en el orden de meses o años para cubrir todo el volumen del problema, lo cual no es factible para un proyecto de investigación.

Existen métodos estadísticos que sirven para explorar el espacio de parámetros de un modelo de manera sistemática, incorporando creencias o información previa que se conoce *a priori*. Se basan en el *teorema de Bayes*, que establece la probabilidad de obtener un vector de parámetros Θ_M para un modelo M dado un vector de datos \mathbf{D} es igual a:

$$P(\Theta_M | \mathbf{D}, M) = \frac{P(\mathbf{D} | \Theta_M, M) P(\Theta_M | M)}{P(\mathbf{D} | M)}$$

↓ Verosimilitud ↓ Priori
Posterior ↓
 ↓ Evidencia ↑

(3.19)

La probabilidad que observemos una serie de parámetros Θ_M dado un vector de datos \mathbf{D} se le llama la **distribución de densidad posterior**, o **PDF** por sus siglas en inglés. El teorema de Bayes permite incorporar información conocida por medio de la distribución **priori**; esto puede incluir relaciones conocidas (por ejemplo, funciones determinadas por análisis estadísticos como Latković et al. (2021)), cuyas distribuciones pueden variar en cuanta confianza dependiendo de sus formas; una distribución Gaussiana conlleva mayor información de un parámetro que una distribución uniforme acotada. El valor de la **verosimilitud** dice la probabilidad de observar el vector de datos \mathbf{D} dado el vector de parámetros; PHOEBE utiliza el logaritmo natural de esta función, la cual se define en Conroy et al. (2020):

$$\ln P(\mathbf{D} | \Theta_M, M) = -0.5\chi^2 \quad (3.20)$$

La **evidencia** se define como la verosimilitud del modelo M integrado sobre todos los valores posibles de parámetros:

$$P(\mathbf{D} | M) = \int P(\mathbf{D} | \Theta_M, M) P(\Theta_M | M) d\Theta_M \quad (3.21)$$

Sin embargo, la evidencia es prácticamente imposible de calcular en el caso de un sistema binario estelar; no existe una solución analítica para este problema, por lo tanto para calcular la verosimilitud para un modelo de PHOEBE es necesario computar un modelo hacia adelante, generando curvas observables sintéticas que se pueden utilizar para calcular χ^2 de acuerdo a la **Ecuación 3.17**. Este proceso

combinado con técnicas de integración numéricas resulta en un tiempo de computo con crecimiento exponencial. Para mitigar estos problemas se utilizan métodos de *Monte Carlo* para hacer un muestreo estocástico de tal manera que al aplicar un peso de importancia a cada muestra se puede llegar a una aproximación de la distribución posterior. Un esquema de este proceso se presenta en la **Figura 3.13**.

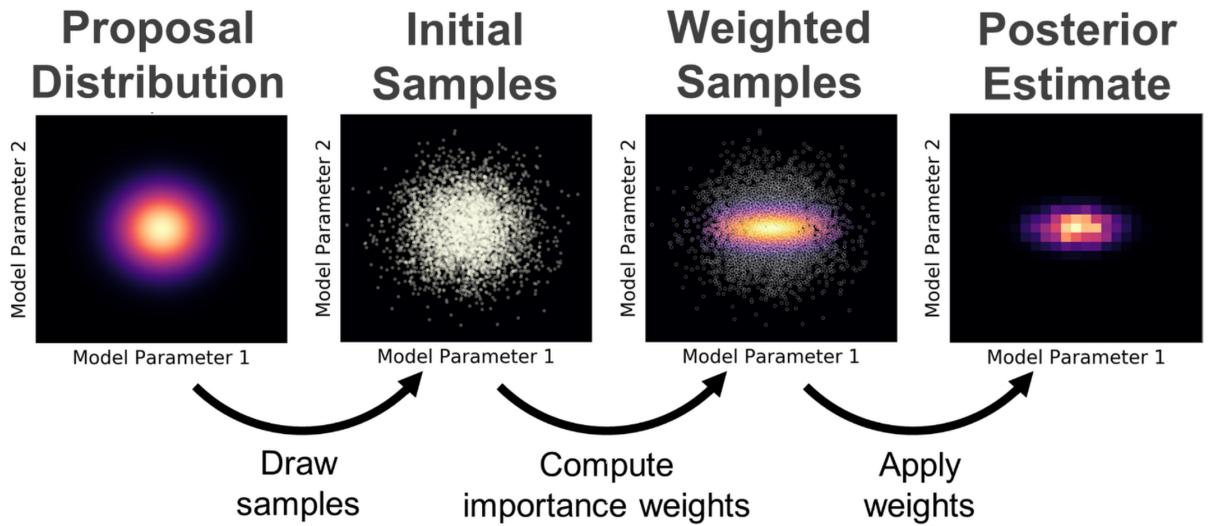


FIGURA 3.13: Esquema del *muestreo de importancia*, una técnica para generar muestras de una distribución propuesta como estimación inicial (a priori) $\mathcal{Q}(\Theta)$ que se muestra en la primera gráfica. Se emplea un algoritmo para proponer muestras del espacio de parámetros que aceptar o rechazar (cuyas muestras realizadas para este ejemplo se pueden ver en la segunda gráfica), con la finalidad de estimar la distribución posterior vista en la última gráfica. Figura obtenida de Speagle (2020).

3.3.4.1 EMCEE: MCMC EN PYTHON

Las **cadenas de Markov de Monte Carlo** (conocidas por sus siglas en inglés **MCMC**) generan muestras de la distribución a priori formando *cadenas* de valores del vector de parámetros Θ correlacionados. Cada valor muestreado se adjunta a la cadena; después de n iteraciones se calcula la *densidad* $\rho(\Theta_i)$ de las muestras dentro de una región δ_Θ centrada en el vector Θ_i , definida por el número de muestras dentro

de la región de interés $m(\Theta_i)$:

$$\rho(\Theta) \equiv \frac{m(\Theta)}{n} \quad (3.22)$$

Dadas suficientes iteraciones, la densidad $\rho(\Theta)$ estará distribuida de la misma forma que la distribución posterior $\mathcal{P}(\Theta)$; esto se puede integrar para llegar al *valor esperado* de la distribución posterior, la cual es definida como:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}} [f(\Theta)] = \int f(\Theta) \mathcal{P}(\Theta) d\Theta \quad (3.23)$$

Esta integral se puede expresar como una sumatoria como es visto en Speagle (2020), donde $f_i(\Theta) \equiv f_i$ son muestras del espacio de parámetros tomadas de tal manera que cada muestra se considera *independiente e idénticamente distribuida (IID)* por sus siglas en inglés) tras n iteraciones:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}} [f(\Theta)] = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_i \quad (3.24)$$

Donde el peso de cada muestra se toma como $1/n$ debido a que las muestras se consideran IID. El proceso de generar cada muestra en la cadena de Markov consiste de un algoritmo probabilístico que solo depende de la muestra anterior; el algoritmo de **Metropolis-Hastings** descrito en Mackay (2003) adopta una muestra propuesta Θ^* bajo la siguiente condición:

$$a = \frac{\tilde{\mathcal{P}}(\Theta')}{\tilde{\mathcal{P}}(\Theta)} \frac{\mathcal{Q}(\Theta; \Theta')}{\mathcal{Q}(\Theta'; \Theta)} \quad (3.25)$$

Donde $\tilde{\mathcal{P}}/\mathcal{Z} = \mathcal{P}$ representa la función de densidad posterior no normalizada (antes de dividir por la evidencia \mathcal{Z} para llegar a la función de densidad de probabilidad \mathcal{P}), y $\mathcal{Q}(\Theta_1; \Theta_2)$ representa la función de densidad de propuestas, la cual calcula la probabilidad de obtener una nueva muestra Θ' dada la muestra/posición actual Θ . El factor a representa la probabilidad de aceptar la nueva muestra Θ' : si $a \geq 1$, entonces se toma Θ' como la nueva posición de la cadena. Si $a < 1$, se acepta la nueva muestra con una probabilidad de a ; en el caso de ser rechazada, la cadena se mantiene en su posición actual Θ , a partir de donde el proceso empieza de nuevo para la siguiente iteración. Este algoritmo trabaja bajo la suposición que se puede calcular el valor de $\tilde{\mathcal{P}}$ para un valor dado de Θ ; al dejar correr la cadena por n iteraciones se encuentra que la densidad del espacio de parámetros $\rho(\Theta)$ converge con $n \rightarrow \infty$.

En Python existe la librería `emcee`⁵, una implementación de MCMC haciendo uso de ensambles de cadenas de Markov e invarianza de transformaciones afines para generar cadenas de muestras con un tiempo menor de convergencia a la solución final. `emcee` implementa un algoritmo denominado el *stretch move*, descrito en Goodman & Weare (2010), en donde la nueva posición de una cadena depende de otra cadena en el ensamble $S = X_k$, para k caminadores $X \in X_1, X_2, \dots, X_k$. Dado un caminador X_k , primero se toma otro caminador del ensamble complementario $S_{[k]} = X_j, j \neq k$ del cual proponer una nueva posición Y :

$$(X_k(t) \rightarrow Y) = X_j + Z[X_k(t) - X_j] \quad (3.26)$$

Donde Z es un valor aleatorio muestreado de una distribución $g(z = Z)$:

⁵<https://emcee.readthedocs.io/en/stable/>

$$g(z) \propto \begin{cases} \frac{1}{z} & | z \in \text{Cond}(z) \\ 0 & | z \notin \text{Cond}(z) \end{cases} \quad (3.27)$$

Donde se define el conjunto $\text{Cond}(z) = [1/c, c]$ dado un valor c ; Goodman & Weare (2010) dan un valor de $c = 2$, pero en principio es un parámetro ajustable del algoritmo para obtener mejores resultados según el problema en cuestión. Una vez obtenido una nueva posición se evalúa con un criterio parecido a aquel implementado en el algoritmo de Metropolis-Hastings:

$$q = Z^{(N-1)} \left(\frac{\tilde{\mathcal{P}}(\Theta_Y)}{\tilde{\mathcal{P}}(\Theta_X)} \right) \quad (3.28)$$

Donde Θ_Y y Θ_X corresponden al vector de parámetros de los caminadores Y y X respectivamente. La nueva posición solo es aceptada si $q \geq 1$, de lo contrario el caminador permanece en su posición actual $Y = X_k(t+1) = X_k(t)$. Dado a que cada nuevo valor en la cadena de un caminador depende del estado actual del resto del ensamble, este problema es inherentemente serial; para poder actualizar a más de un caminador a la vez se divide el ensamble S en 2 subconjuntos $S^{(1)} = \{X_k; k = 1, 2, \dots, K/2\}$ y $S^{(2)} = \{X_k; k = (K/2) + 1, \dots, K\}$ para un ensamble total compuesto de K caminadores. Esto permite actualizar la posición de todos los caminadores en un subconjunto $S^{(1)}$ o $S^{(2)}$ simultáneamente usando los caminadores en el subconjunto opuesto para proponer su nueva posición. Foreman-Mackey et al. (2013) describen el proceso a mayor detalle, mientras que la implementación se puede ver en su repositorio de GitHub⁶.

⁶<https://github.com/dfm/emcee>

3.3.4.2 MCMC EN PHOEBE

El problema de un sistema binario estelar es uno de alta dimensionalidad debido a la cantidad de parámetros libres. Al momento de explorar el espacio de parámetros la distribución de densidad posterior tiende a estar concentrada en pequeños volúmenes de cuboides de N dimensiones; el volumen crece a una alta tasa a comparación con el área superficial del cuboide. Esto presenta una situación problemática para un proceso de MCMC, en donde una mayor razón de las posiciones propuestas para cada caminador es rechazada por la mayor diferencia entre los valores resultantes de la función $\tilde{\mathcal{P}}$. El volumen de un cuboide de N dimensiones con lados de largo l se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$V(l) = \prod_{i=1}^N l = l^N \quad (3.29)$$

Esta baja tasa de pasos aceptados causa un largo *tiempo de autocorrelación*, el cual describe el número de iteraciones necesarios para que una cadena “olvide” su posición inicial. El tiempo de autocorrelación parametriza la cantidad de muestras independientes en el ensamble de cadenas; por lo tanto el número de muestras independientes está dado por el número de iteraciones totales corridos en el muestreo dividido por el tiempo de autocorrelación. Para problemas como el modelado de un sistema binario en PHOEBE, este problema se puede mitigar con el uso de una mayor cantidad de caminadores (en el orden de cientos de caminadores) y el uso de una distribución adecuada de muestreo inicial.

Para correr un muestreo de parámetros en PHOEBE simplemente se necesita crear un nuevo resolvedor (*solver* en la API de PHOEBE) del tipo `emcee`, en el cual se especifican las características del ensamble. Esto se puede ver en la **Figura 3.14**.

El resolvedor `emcee` creado usará los conjuntos de datos—*datasets* en PHOEBE—habilitados para evaluar la función de costo para cada vector de parámetros

```

01 | b.add_solver('sampler.emcee', solver='mcmc_sampler',
02 |     init_from=['mcmc_prior'],
03 |     niters=5000, nwalkers=200,
04 |     progress_every_niters=5)

```

FIGURA 3.14: Resolvedor de tipo `emcee` para muestrear el espacio de parámetros dado el bundle `b`. Este muestreo está configurado para correr 5000 iteraciones con 200 caminadores; al contrario de un optimizador, el muestreo de `emcee` no tiene manera de saber si ha convergido a una solución para determinar cuando ha obtenido suficientes muestras. Por seguridad, se puede configurar para que el muestreo guarde su progreso después de cada `progress_every_niters` iteraciones, el cual se puede utilizar para revisar el progreso del muestreo o para continuar un proceso que haya terminado de manera prematura (por ejemplo, en el caso de una falla en el equipo).

muestreado. En vez de especificar explícitamente los parámetros que muestrear, el resolvedor toma de entrada el parámetro `init_from`, el cual representa el conjunto de distribuciones propuestas $\mathcal{Q}(\Theta)$ para los parámetros que muestrear. Estos son distribuciones de forma arbitraria; para facilitar su creación y maximizar la facilidad de tomar muestras discretas PHOEBE ofrece la habilidad de crear distribuciones informativas (de forma de Gaussianas) o no-informativas (distribuciones uniformes limitadas a cierto rango) alrededor de los valores actuales de los parámetros en el bundle visto en la **Figura 3.15**.

Un muestreo ideal convergerá a una distribución de densidad que se asemejará a la distribución de probabilidad posterior de cada parámetro. De estas distribuciones posteriores se pueden determinar los valores promedios e incertidumbres (por ejemplo, en el caso de que sea una Gaussiana, el valor promedio y la incertidumbre son triviales de obtener tras un ajuste analítico de las muestras individuales, cosa que PHOEBE lo hace en automático) de cada parámetro, al igual que identificar correlaciones entre distintos parámetros del modelo. En dado caso que el muestreo corrido no haya sido suficiente (no haya convergido, ciertos caminadores se quedaron “atascados” en una región del espacio de parámetros, etc.) es posible continuar el re-

```

01 | b.add_distribution({
02 |     'asini@orbit': phoebe.gaussian_around(0.5),
03 |     'q': phoebe.gaussian_around(0.1),
04 |     'vgamma@system': phoebe.gaussian_around(5.0),
05 |     'ecc@orbit': phoebe.gaussian_around(0.05),
06 |     'per0@orbit': phoebe.gaussian_around(10.0)
07 | }, distribution='ndg', overwrite_all=True)
08 |
09 | b.add_distribution({
10 |     'asini@orbit': phoebe.uniform_around(2),
11 |     'q': phoebe.uniform_around(0.5),
12 |     'vgamma@system': phoebe.uniform_around(15.0),
13 |     'ecc@orbit': phoebe.uniform_around(0.2),
14 |     'per0@orbit': phoebe.uniform_around(20.0)
15 | }, distribution='nuni', overwrite_all=True)

```

FIGURA 3.15: Creando dos distribuciones por separado para iniciar como punto de partida para un muestreo de MCMC en PHOEBE dado un bundle `b` cuyos valores han sido previamente optimizados para llegar a un ajuste adecuado. La distribución `ndg` representa una Gaussiana multi-dimensional, especificando el valor de σ para cada parámetro como valor de entrada a la función `phoebe.gaussian_around`. La distribución `nuni` representa una distribución multi-dimensional uniforme, donde el valor de entrada a la función `phoebe.uniform_around` representa la anchura total de la distribución de densidad de cada parámetro. La representación gráfica de estas distribuciones se puede ver en la **Figura 3.16**

solvedor actual utilizando el parámetro del resovedor `continue_from` para apuntar a la solución producida por el resolvedor, o es posible crear un nuevo resolvedor de tipo `sampler.emcee` cuyas distribuciones a priori sean la distribución de densidad producida por el muestreo previo. Información adicional del API de PHOEBE se ubica en su página de documentación⁷.

⁷<http://phoebe-project.org/docs/2.4/tutorials/emcee>

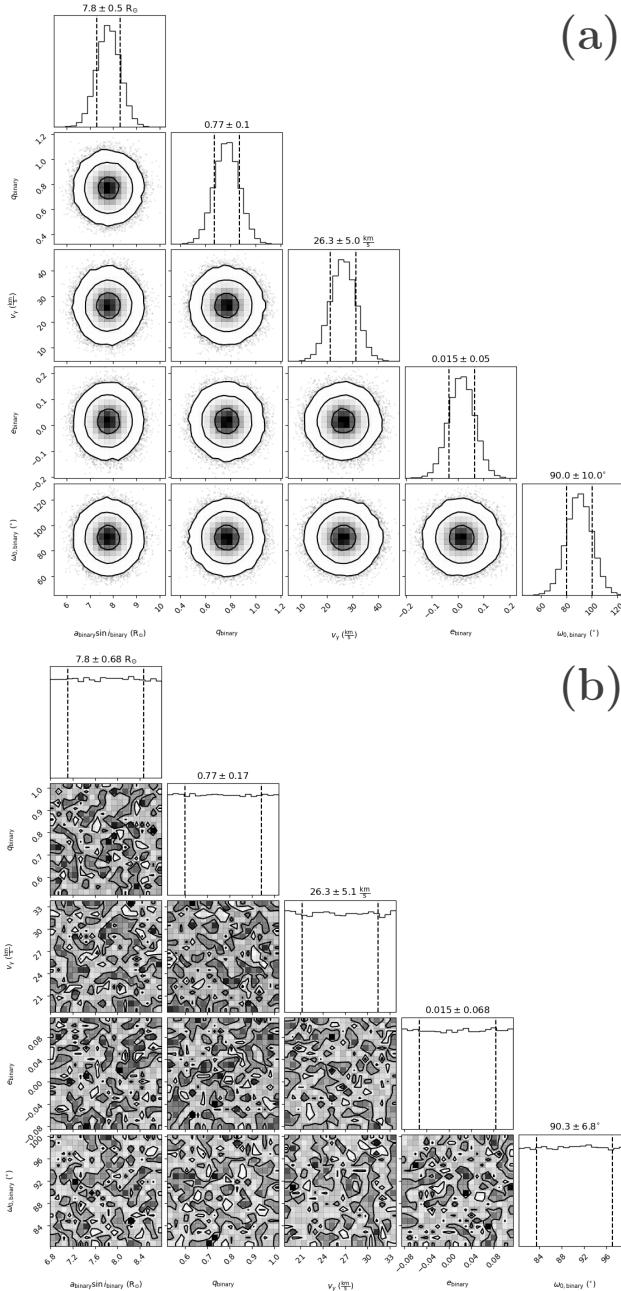


FIGURA 3.16: Gráfica mostrando las distribuciones creadas por el código en la **Figura 3.15**. Este *corner plot* (su nombre en inglés) permite ver las distribuciones de los parámetros individuales en el último cuadro de cada gráfica, al igual que ver las correlaciones entre cada par de parámetros representada por cada intersección de una columna y un renglón. **(a)** representa la distribución normal multivariada `ndg`, mientras que **(b)** muestra la distribución uniforme `nuni`.

Parte II

Muestra

CAPÍTULO 4

CATÁLOGOS

4.1 GAIA

Originalmente denominado como GAIA, la misión **Gaia** fue lanzada por la **Agencia Espacial Europea (ESA)** el 19 de Diciembre del 2013, con el objetivo de generar un mapa tridimensional de la Galaxia. Esto incluye calcular las propiedades astrométricas y astrofísicas de sus fuentes observadas con mayor precisión que cualquier otro catálogo publicado previamente. Para lograr esto se utiliza un satélite espacial, el cual está denominado como *Gaia*, ubicado en el punto de Lagrange L2 con respecto al sistema Sol-Tierra. Desde este punto el satélite tiene una vista sin obstrucciones que le permite observar una cantidad impresionante de objetos, con ~1,000 millones de fuentes visibles. [Gaia Collaboration et al. (2016)]

4.1.1 DATA RELEASE 3

Para facilitar el acceso público a los datos recabados por la misión de *Gaia* la ESA ha escogido liberar los datos públicamente conforme los van recibiendo y procesando. Estos son conocidos como los *Data Releases*. Este trabajo emplea el **Data Release 3 (GDR3)** el cual está compuesto de las observaciones hechas por

Gaia entre el 25 de Julio del 2014 y el 28 de Mayo del 2017, un periodo de 22 meses en total. GDR3 consiste de información para 1 811 709 771 de fuentes individuales, incluyendo parámetros astrométricos y datos fotométricos.

Los datos utilizados en este trabajo fueron obtenidos a través de *Gaia Archive*¹, una herramienta libre publicada por la ESA. Esta cuenta con una interfaz de ADQL², un lenguaje estructurado para hacer consultas a las tablas en la base de datos de Gaia. Aparte de las tablas publicadas por la ESA también se pueden acceder a tablas publicadas por investigadores como parte de sus trabajos de investigación, como el de Bailer-Jones et al. (2021) que reportan las distancias de las fuentes en el catálogo *eDR3* de Gaia (*early Data Release 3*, publicado antes del catálogo completo DR3) corrigiendo por errores sistemáticos en la medición del paralaje de las fuentes.

4.1.2 FOTOMETRÍA

Compuesto de 2 tubos ópticos que comparten un mismo plano focal, el instrumento principal de Gaia fue fabricado con el objetivo de escanear el cielo entero, sistemáticamente obteniendo observaciones de cada objeto que pasa por su campo de visión, midiendo sus propiedades astrométricas (su paralaje, las componentes de su posición angular, y las componentes de su movimiento propio) en diferentes tiempos. Información a detalle de los instrumentos abordo de Gaia se puede encontrar en la página web de la misma misión³.

El instrumento fotométrico de Gaia consiste de una matriz de CCDs ubicada en el plano focal de los tubos ópticos. Estos están divididos en base a su función en el procesamiento del tránsito de un objeto; un esquema del plano focal se encuentra en la documentación en línea de Gaia⁴. Tres de los grupos de CCDs son los de mayor

¹<https://gea.esac.esa.int/archive/>

²<https://www.ivoa.net/documents/ADQL/20180112/PR-ADQL-2.1-20180112.html>

³<https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/instruments>

⁴<https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/focal-plane>

interés en cuanto a las mediciones fotométricas de Gaia: el *Sky Mapper*, los cuales son responsables de detectar las fuentes que estén en tránsito del plano focal y de hacer una primera medición de la magnitud de la fuente en el pasabanda ancha *G*; y los *fotómetros azul* y *rojo*, los cuales toman medidas espectro-fotométricas de las fuentes en tránsito en las pasabandas *BP* y *RP* respectivamente. Las observaciones integradas y procesadas de cada tránsito para un objeto se pueden extraer por medio de la base de datos *Datalink* ofrecida como datos complementarios de la base de datos principal de Gaia. van Leeuwen et al. (2022, Sección 20.7.1) documentan la información técnica con respecto a los campos de los datos.

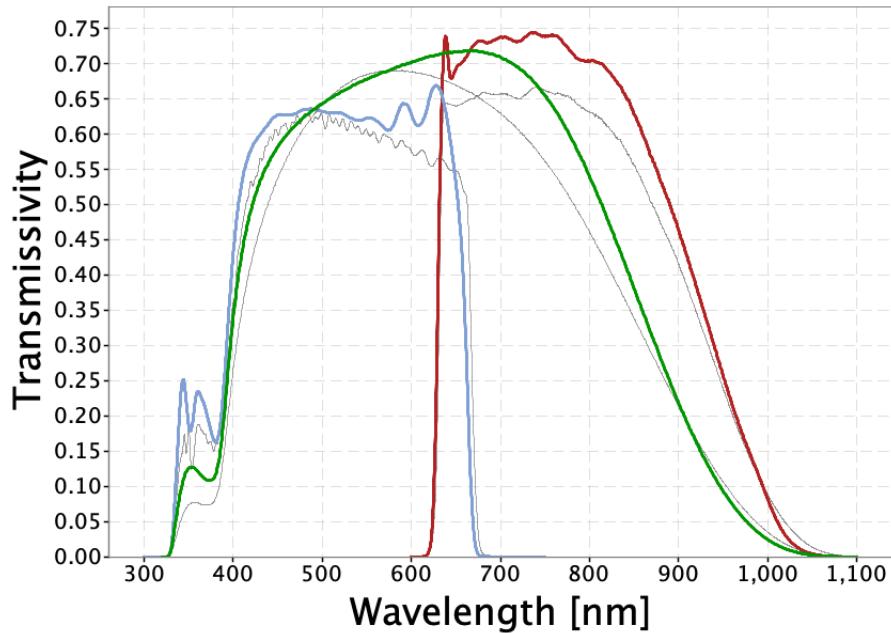


FIGURA 4.1: Curvas actualizadas de transmisividad para las pasabandas *G* (verde), *G_{BP}* (azul), y *G_{RP}* (rojo) para DR3. Las curvas originales reportadas antes del lanzamiento de la misión se ven en gris claro en el fondo. Figura obtenida de van Leeuwen et al. (2022, Sección 5.4.1).

4.2 SLOAN DIGITAL SKY SURVEY

La colección de catálogos **Sloan Digital Sky Survey**⁵ (de ahora en adelante será referido como **SDSS**) compila varias fuentes de datos astronómicos en un sitio centralizado, con el objetivo de crear un mapa tridimensional del Universo con una precisión no vista antes. Estos incluyen imágenes de objetos astronómicos en varios colores, acompañados de un espectro obtenido como parte de esta misión. Para finales del siglo XX habían surgido avances tecnológicos que llegarían a revolucionar la astronomía observacional. De estos, los de mayor interés ocurrieron con los detectores de estado sólido y en la capacidad computacional de procesamiento. Partiendo de estos se empezó a desarrollar la infraestructura necesaria para recabar datos fotométricos y espectroscópicos.

El instrumento principal utilizado es el telescopio de 2.5m, ubicado en el observatorio *Apache Point Observatory*, descrito a detalle en Gunn et al. (2006). Este telescopio de diseño Ritchey-Chrétien alimenta dos instrumentos separados; un CCD multi-banda de gran área, y un par de espectrógrafos alimentados por fibra óptica. Su construcción empezó en 1998, pero no fue hasta el año 2000 que estuvo operacional.

4.2.1 DATA RELEASE 9

SDSS libera datos en colecciones iterativas; es decir cada Data Release (DR) liberado contiene todas las observaciones que forman parte del DR previo, agregando los datos recabados durante el periodo de observación para el DR actual. Cada DR cae bajo una fase de operaciones de SDSS, delimitado tanto por las fechas de observaciones como por los instrumentos y tipos de datos disponibles. Para el periodo operacional de GDR2 el catálogo más actual de SDSS era el DR9 publicado como

⁵<https://www.sdss.org>

parte de SDSS-III⁶. Esta tercera fase fue marcada por una gran mejora del equipo espectroscópico, instalando nuevos instrumentos con los cuales pudieron analizar la dinámica de nuestra Galaxia, al igual que otras galaxias y planetas gaseosos extra-solares.

4.3 ZWICKY TRANSIENT FACILITY

El censo observacional **Zwicky Transient Facility (ZTF)** [Bellm et al. (2018)] tiene como objetivo observar el cielo del hemisferio norte con una cadencia no realizada antes por su predecesor el *Palomar Transient Factory*. Las observaciones de ZTF se hacen desde el *Observatorio Palomar*, ubicado en San Diego, California, haciendo uso del telescopio Schmidt de 48 pulgadas (denominado *P48*). Gracias a los avances en la tecnología de CCD y la velocidad de cómputo el sondeo ZTF ofrece una gran mejora en el procesamiento de datos que le permite reducir el “tiempo muerto” entre exposiciones consecutivas, aumentando la resolución temporal de observación de fenómenos transitorios y de objetos variables. Observaciones de ZTF consisten de tres filtros únicos: *ZTF-g*, *ZTF-r*, y *ZTF-i*, cuyas curvas de transmisividad se pueden ver en la **Figura 4.2**. La fotometría se calibra con cada imagen utilizando estrellas del catálogo de *Pan-STARRS 1* para cada cuadrante, asegurando que se tenga un índice de color correcto. Tanto las imágenes tomadas para cada exposición como las mediciones de la fotometría reducida están disponibles en Data Releases en el registro de *Infrared Science Archive (IRSA)* en línea⁷. Este trabajo de maestría hizo uso del Data Release 20 (DR20), el cual consiste de observaciones hechas desde Marzo del 2018 hasta Septiembre 2020. Para más detalles técnicos del procesamiento y la distribución de datos se hace referencia a Masci et al. (2018).

⁶<https://www.sdss3.org/index.php>

⁷<http://irsa.ipac.caltech.edu/Missions/ztf.html>

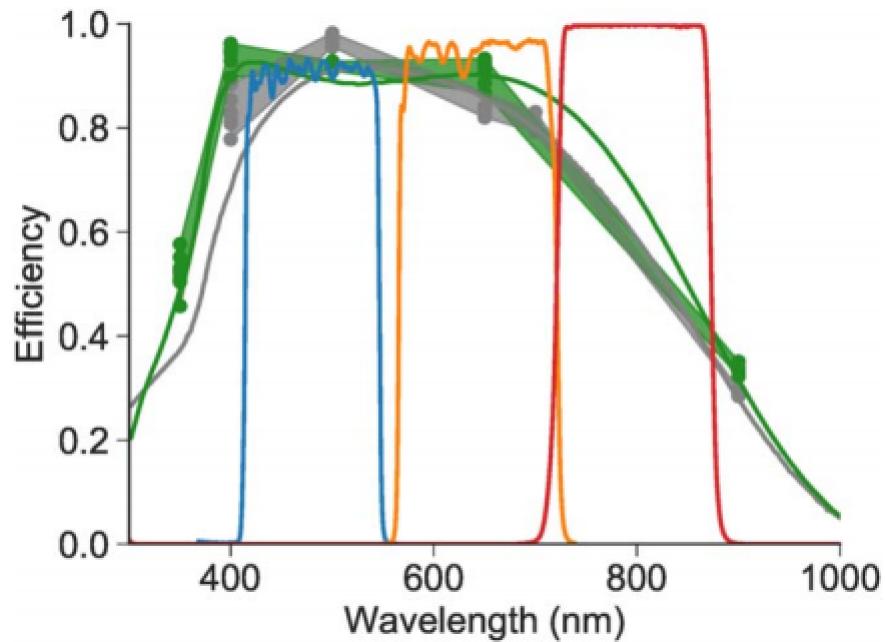


FIGURA 4.2: Gráfica de transmisividad para los filtros $ZTF-g$, $ZTF-r$, y $ZTF-i$, dados por las curvas azul, naranja, y roja respectivamente. El campo focal del telescopio P48 está compuesto de un mosaico de CCDs que cubren el campo visual entero del telescopio, cubiertos por capas anti-reflectantes. Las curvas del fondo representan el modelo de la eficiencia cuántica de las CCDs cubiertos por una o dos capas anti-reflectantes en gris o verde, respectivamente. Figura obtenida de Bellm et al. (2018).

CAPÍTULO 5

SELECCIÓN DE OBJETO

Este trabajo tiene como objetivo realizar una campaña de observación para un sistema cuyos parámetros físicos no han sido determinados, con el propósito de confirmar su estatus como variable cataclísmica o como una binaria eclipsante, dependiendo del sistema y proponer una primera solución fotométrica del sistema. Para esto, se implementó un proceso para separar e identificar objetos de interés para observar desde el Observatorio Astronómico Universitario en Iturbide. A continuación se describe los aspectos técnicos importantes de la búsqueda. El código completo se encuentra en la carpeta `obsrv_plan`, cuyo punto de entrada se ubica en el script `main.py`.

5.1 SZKODY ET AL. (2002): CATACLYSMIC VARIABLES FROM THE SLOAN DIGITAL SKY SURVEY

Con el lanzamiento del SDSS, Szkody y su equipo reconocieron una nueva área de oportunidad para expandir la población de *variables cataclísmicas* (VCs) conocidas en la Galaxia. De interés particular son aquellos sistemas que más se aproximan al periodo mínimo según los modelos evolutivos de las VCs; estos objetos llegan a magnitudes fuera del alcance de la mayoría de los telescopios usados hasta

este entonces, por lo cual no han sido el objetivo de estudio en la literatura. Partiendo de SDSS Szkody y colaboradores iniciaron una búsqueda de VCs, con la expectativa de capturar una muestra representativa de variables cataclísmicas en nuestra galaxia, en particular obteniendo muestras de poblaciones históricamente imperceptibles a nuestros instrumentos.

Para restringir los sistemas que buscar, Szkody et al. (2002) aplicaron un criterio de color basado en el trabajo de Krisciunas et al. (1998), en el cual lograron determinar concentraciones de diferentes tipos de objetos utilizando diagramas de color-color. A pesar de haber hecho estas observaciones antes del año de lanzamiento de SDSS, Krisciunas y colaboradores lograron obtener observaciones utilizando equipo cuyas características se asemejan a las de los instrumentos utilizados para SDSS. Partiendo de estos resultados, Szkody y colaboradores determinaron los siguientes criterios en las regiones azules y rojas del espectro:

$$\begin{aligned} u^* - g^* &< 0.45 \\ g^* - r^* &< 0.7 \\ r^* - i^* &> 0.30 \\ i^* - z^* &> 0.4 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Una vez recabada la muestra de candidatas a observar, Szkody y colaboradores confirmaron su estatus como variables cataclísmicas basado en los espectros obtenidos del SDSS desde el *Apache Point Observatory*. Estos datos los complementaron con observaciones de espectroscopía con el telescopio de 3.5m en el *Apache Point Observatory* así como observaciones fotométricas utilizando el telescopio de 0.76m en el *Manastash Ridge Observatory* de la Universidad de Washington. En total identificaron 22 sistemas como variables cataclísmicas, incluyendo 3 objetos previamente estudiados e identificados como tal. Presentan la concentración de los objetos en el diagrama color-color, vistos en la **Figura 5.1**.

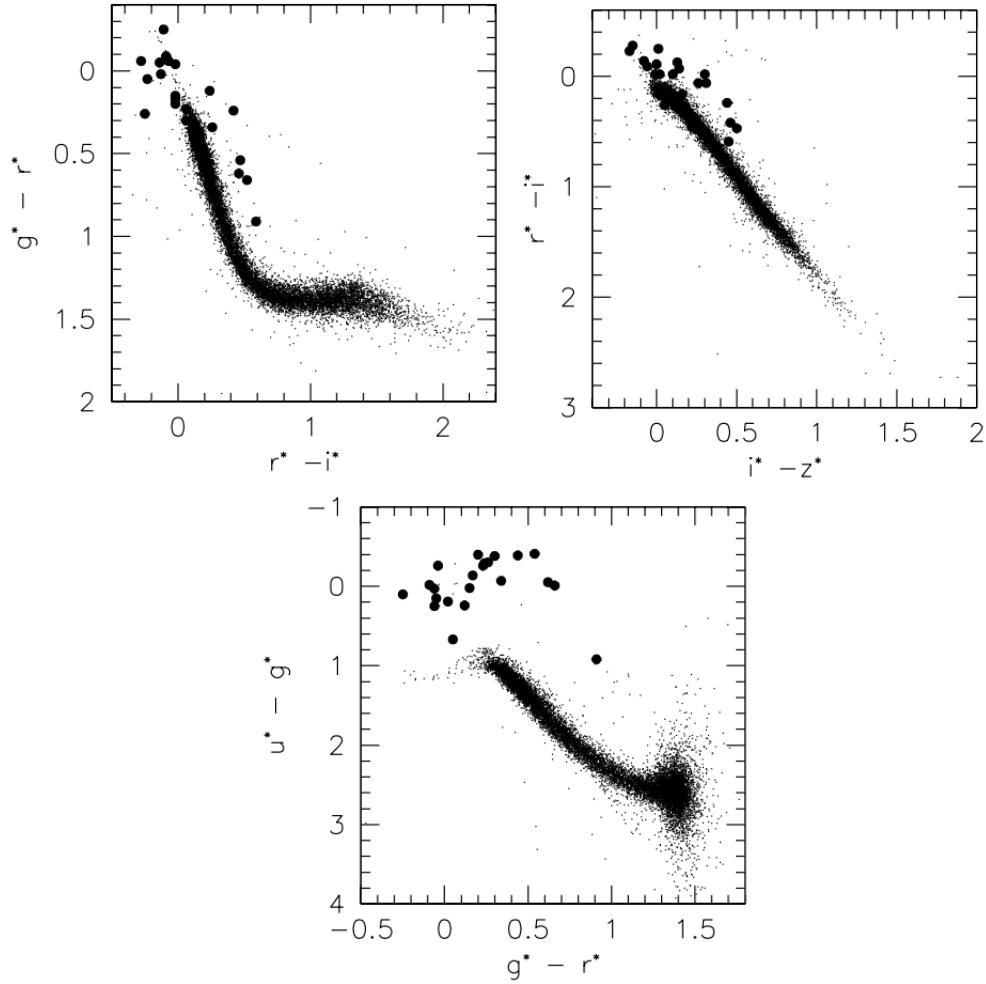


FIGURA 5.1: Variables cataclísmicas identificadas y observadas por Szkody y colaboradores (círculos negros fuertes). Se puede apreciar la separación de las variables cataclísmicas del locus estelar, vista en los puntos negros. Szkody et al. (2002)

5.2 BÚSQUEDA EN GAIA

Para obtener la muestra inicial de objetos de interés recurrimos a la base de datos de Gaia. La selección de objetos fue llevada a cabo dentro del *Gaia Archive* utilizando su interfaz de ADQL. Los criterios definidos por Szkody y colaboradores solo fueron definidos para el sistema fotométrico de SDSS; para poder utilizar estos primero se llevó a cabo una conversión de las magnitudes reportadas en el catálogo de Gaia a magnitudes en los pasa bandas de SDSS. Esta conversión se llevó a cabo

utilizando las transformaciones definidas en la documentación de Gaia DR3 van Leeuwen et al. (2022), como se puede ver en la **Figura 5.2**. Partiendo de estas magnitudes transformadas se aplicó los criterios definidos en Szkody et al. (2002). Sin embargo, solo dos de los 4 indices de color se pudieron aplicar a la muestra de Gaia; no están definidas transformaciones para las bandas u ni z de SDSS, ya que estas abarcan longitudes de onda más extremas que las observadas por Gaia. El query de ADQL ejecutada se puede encontrar en el apéndice A. Se obtuvieron en total más de 3 630 000 fuentes, el cual representa un 0.2 % de los 1 811 709 771 objetos reportados en el DR3 de Gaia.

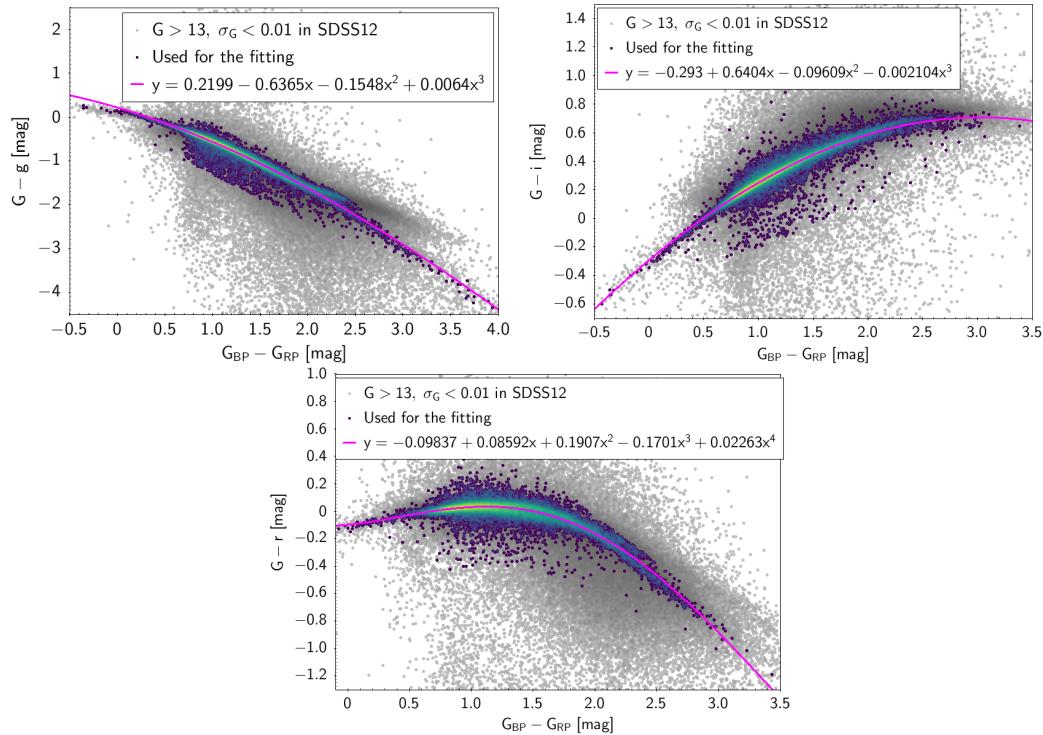


FIGURA 5.2: Relación empírica entre las magnitudes reportadas en GDR3 y SDSS12. Las relaciones están dadas para 3 de las 5 bandas de SDSS12, debido a las diferencias entre las pasa bandas de Gaia y SDSS. van Leeuwen et al. (2022)

5.3 SELECCIÓN DE OBJETOS OBSERVABLES

La ubicación en la bóveda celeste de un sistema candidata juega un papel importante en la viabilidad de una campaña de observación desde el OAU. Esto determina si un objeto es visible desde la locación geográfica del observatorio durante las fechas de observación; de otra manera sería imposible apuntar un telescopio al sistema. Para realizar esta tarea se utilizaron los módulos de `astroplan` Morris et al. (2018) y `astropy` Collaboration et al. (2018), aplicando el algoritmo a los objetos resultados de la búsqueda en la base de datos de Gaia. El código responsable se encuentra en el archivo `observable_targets.py`.

5.4 BÚSQUEDA EN SIMBAD

Una vez obtenidos los objetos de interés de la selección de objetos visibles se utilizó la base de datos de SIMBAD¹ Wenger et al. (2000) para restringir los objetos de interés a un tamaño manejable, con el objetivo de obtener un sistema clasificado como variable cataclísmica, binaria eclipsante, o candidata a alguna de estas clasificaciones. Uno de los objetivos de este trabajo de tesis fue realizar una campaña de observación al sistema elegido, con finalidad de obtener una curva de luz fotométrica; por lo tanto, un requisito para este trabajo de maestría es que este sistema sea uno con una cantidad mínima de estudios antecedentes; el estudio del sistema dependerá en gran parte de la curva de luz obtenida de las observaciones. El código que llevó a cabo esta búsqueda se encuentra en `categorize_all_targets.ipynb`, cuyos resultados se pueden ver en la **Figura 5.3**. Las estrellas variables de largo periodo (`LongPeriodV*` y las candidatas `LongPeriodV*_Candidate`) que consisten predominantemente de estrellas pulsantes son las que representan la mayoría de objetos obtenidos de la búsqueda en Gaia. Varios de las fuentes de GDR3 no tienen algún estudio antecedente que SIMBAD tenga registrado en su base de datos; de los

¹<http://simbad.cds.unistra.fr/simbad/>

3 630 000 resultados, solo fue posible conseguir la clasificación de 997 199 objetos individuales. De aquellos resultados clasificados como candidatos a binarias eclipsantes se escogió un objeto visible desde el **Observatorio Astronómico Universitario** en Iturbide, N.L., descrito en la **Sección 6.1**.

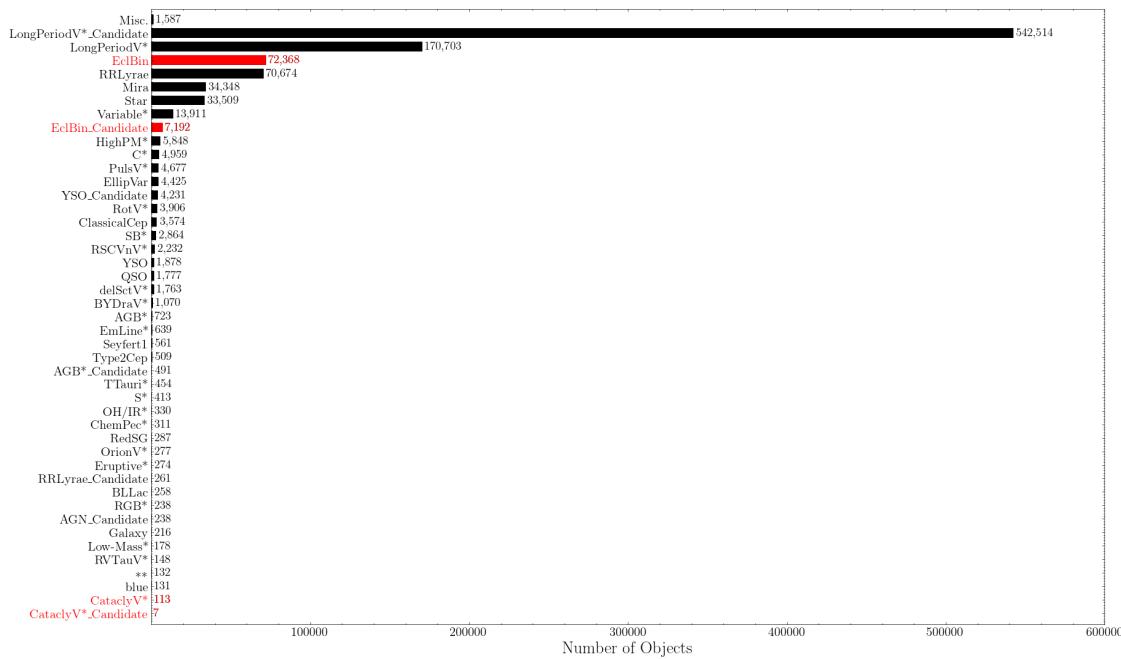


FIGURA 5.3: Histograma de las clasificaciones de los objetos capturados en la búsqueda dentro del catálogo GDR3, haciendo un análisis cruzado con la base de datos de SIMBAD. En rojo se resaltan las categorías de principal interés: los sistemas *binarias eclipsantes* (*EclBin*) junto a las *candidatas a binarias eclipsantes* (*EclBin_Candidate*), e incluyendo sistemas de tipo *variable cataclísmica* (*CataclyV** y las candidatas *CataclyV*_Candidate*), un tipo en particular de sistemas binarios en semi contacto Smith (2007). Varias clasificaciones de baja importancia quedan agrupadas en la categoría *Misc.* por brevedad.

5.5 ATO J339.9469+45.1464 - ECLBIN

Heinze et al. (2018) realizaron una búsqueda de estrellas variables dentro de la primera publicación de datos del catálogo **Asteroid Terrestrial-impact Last**

Alert System (ATLAS), el cual contiene las observaciones realizadas por el telescopio Haleakalā durante los primeros 2 años de operación hasta finales de Junio del 2017, aprovechando su cobertura de aproximadamente 13 000 deg² al menos 4 veces por noche. Esta cadencia de observación es ideal para observar estrellas variables; el tiempo de observación es suficientemente corto para obtener una curva de luz adecuada para estudiar estos sistemas. Lograron clasificar las estrellas variable del catálogo en 15 distintas categorías dependiendo de la morfología de sus curvas de luz; de estas reportan que 74 700 fuentes son binarias eclipsantes. A pesar de haber confirmado la clasificación de estas fuentes, aún quedan varios sistemas cuya naturaleza es desconocida.

ATO J339.9469+45.1464 está clasificado como una de estas candidatas a binaria eclipsante. Como este sistema carece una clasificación concreta, no existe mucha información acerca de ella. Tiene una magnitud promedio de aproximadamente 16.91, lo cual lo hace un sistema tenue. Con una ascensión recta de 22 39 47.2569 y declinación de +45 08 47.0311, ATO J339.9469+45.1464 es un sistema ideal para observar desde el OAU en Iturbide.

Antes de terminar este trabajo de maestría pero después de haber seleccionado al objeto ATO J339.9469+45.1464 para estudiar, su clasificación en SIMBAD cambió a ser una binaria eclipsante confirmada. Chen et al. (2020) utilizaron los datos dentro del Data Release 2 del catálogo de ZTF para clasificar varios tipos de estrellas variables utilizando una metodología para identificar y clasificar objetos hasta una magnitud de 20.6. Sin embargo, este estudio solo llegó a clasificar el sistema; este trabajo de tesis profundiza el estudio para este sistema, llegando a una solución fotométrica para determinar los parámetros físicos del sistema.

5.5.1 DATOS DE GAIA

Gaia ha observado a ATO J339.9469+45.1464 durante 3 años de su operación, obteniendo magnitudes del sistema en varias etapas en su fase empezando desde agosto del 2014 hasta mayo del 2017. En la **Figura 5.4** se pueden ver las 3 curvas de luz de Gaia en cada pasabanda, G_{BP} , G_{RP} y G . Estas mediciones en distintos filtros permite el análisis del color del sistema, el cual permite ajustar la temperatura efectiva de una solución fotométrica a los datos observados. Este método de determinar las temperaturas efectivas del sistema no solo nos libra de tener que utilizar una relación empírica para darle como dato de entrada al modelo—un ajuste de mínimos cuadrados tendrá que tomar en cuenta la física de radiación de ambas componentes durante cualquier proceso de optimización de parámetros—pero también permite determinar la incertidumbre de este parámetro por medio del muestreo del espacio de parámetros libres.

5.5.2 DATOS DE ZTF

Las curvas de luz de Gaia DR3 ofrecen mediciones con una precisión nunca antes vistas. Sin embargo, el enfoque de la misión es en el cálculo de las propiedades astrométricas de los objetos observados (incluyendo posiciones angulares, velocidades propias, etc.); el producto principal de la misión no son las curvas de luz fotométricas. La cadencia de observación resulta en una resolución temporal pobre del sistema. Una dificultad adicional en el análisis de PHOEBE es el trato de la extinción interestelar, ya que por cuestiones técnicas PHOEBE no puede generar un modelo sintético para ciertas pasabandas cuando se aplica el efecto de extinción interestelar; por ejemplo, PHOEBE puede calcular un modelo que cuenta con curvas de luz en los 3 pasabandas de Gaia, pero no puede generar una curva sintética para un modelo en las pasabandas de ZTF. Las tablas de atmósferas estelares que PHOEBE utiliza no tienen la información necesaria para extinguir de manera adecuada la radiación

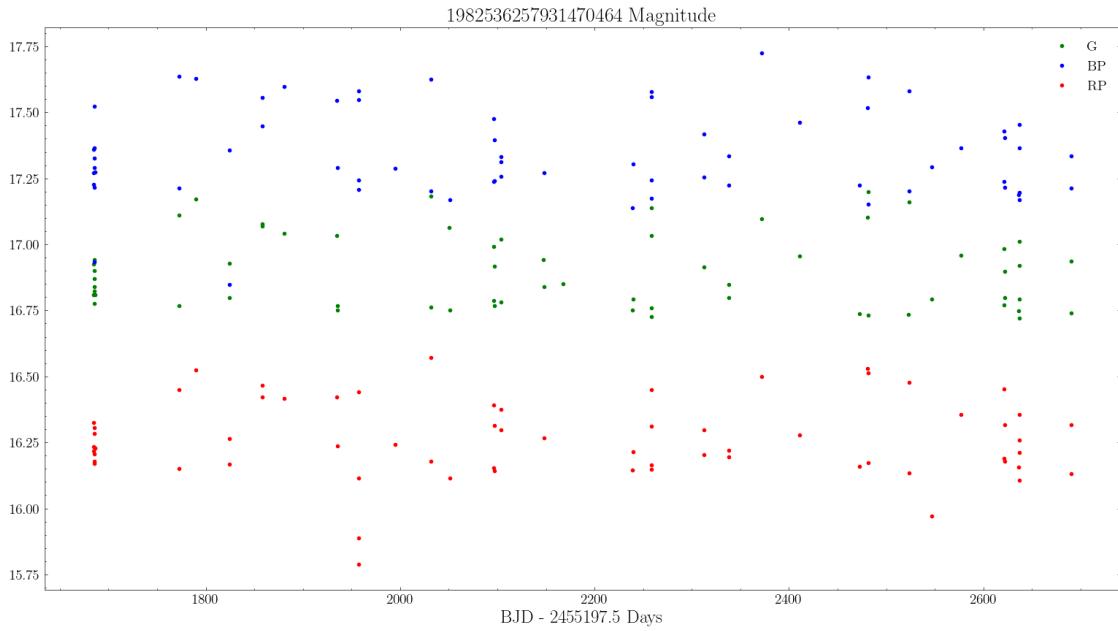


FIGURA 5.4: Magnitud de ATO J339.9469+45.1464 registrada en la base de datos de Gaia DR3 bajo su número identificador en el catálogo. La variabilidad de aproximadamente 0.5 mag en el brillo del sistema se atribuye a la presencia de eclipses en el sistema binario. Las tres curvas de luz corresponden a cada pasabanda de la misión de Gaia: verde es la banda G , en azul la banda G_{BP} , y en rojo la banda G_{RP} . [van Leeuwen et al. (2022)]

emergente para cada pasabanda. En el caso de las curvas de luz de GDR3 esto llega a ser un problema significativo cuando se tiene un coeficiente de extinción $E(B-V)$ apreciable, debido a que afecta principalmente a cortas longitudes de onda.

Para complementar la información de color obtenida de Gaia y obtener una curva de luz con alta resolución temporal—y una alta cobertura de la curva de luz en fase—se realizó una búsqueda de datos en el catálogo de ZTF, en particular el *Data Release 20* la última versión de los datos publicados durante la fase de recolección de datos del proyecto. Para ATO J339.9469+45.1464 se obtuvieron 2 curvas de luz en las bandas ZTF:g y ZTF:r, las cuales no han sido corregidas para tomar en cuenta el color del sistema en el procesamiento hecho por IRSA. Las observaciones de ZTF se registraron desde el 20 de abril del 2018 hasta el 2 de julio del 2023 para el filtro

ZTF:g, y desde el 17 de mayo del 2018 hasta el 2 de julio del 2023 para el filtro ZTF:r. Las curvas de luz completas se pueden ver en la **Figura 5.5**.

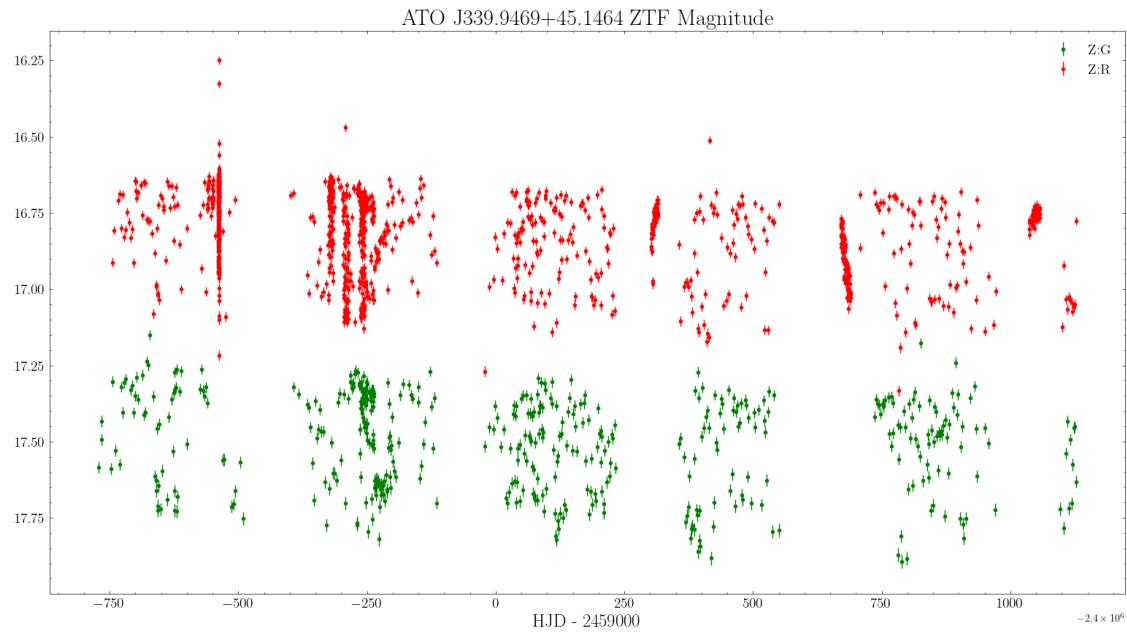


FIGURA 5.5: Curvas de luz en las pasabandas ZTF:g (verde) y ZTF:r (rojo) para ATO J339.9469+45.1464 , obtenido del catálogo de ZTF por su identificador de SIMBAD.

CAPÍTULO 6

OBSERVACIONES

El segundo objetivo principal de este trabajo de investigación fue realizar una campaña de observación al objeto de interés ATO J339.9469+45.1464 . Desde el **Observatorio Astronómico Universitario (OAU)** en Iturbide, N.L. se midió el brillo del sistema durante 9 noches de observaciones sin filtro, del cual utilizando la técnica de fotometría diferencial se obtuvo una curva de luz del sistema. Los datos observacionales producidos de este estudio se utilizan como un conjunto complementario a las curvas fotométricas del objeto descritas en los capítulos anteriores; a pesar de no tener información del color del sistema las observaciones realizadas desde el OAU son de las más recientes realizadas—junto a los datos de ZTF—los cuales ofrecen una vista al comportamiento y estado actual de ATO J339.9469+45.1464.

6.1 OBSERVATORIO ASTRONÓMICO UNIVERSITARIO - ITURBIDE

El **Observatorio Astronómico Universitario - Iturbide**, ubicado en el cerro Picasso en el municipio de Iturbide, Nuevo León, es un nuevo sitio dedicado a la observación astronómica, equipado para realizar observaciones del Sol, monitoreo de basura espacial, y la observación de objetos variables como sistemas binarios es-

telares y asteroides. A continuación se describe el equipo utilizado; como software de control se utilizó **Nighttime Imaging 'N' Astronomy¹** (**NINA**), el cual permita consolidar el control de todas las componentes mecánicas en una sola aplicación.

El telescopio utilizado para hacer las observaciones del sistema fue el tubo óptico **CDK20** de **PlaneWave Instruments²** con un número $f/6.8$. Este telescopio de diseño *Dall-Kirkham corregido* cuenta con un grupo de lentes frente al espejo esférico secundario, el cual resta los efectos de la aberración esférica presente en otras configuraciones de espejos primarios y secundarios, resultando en una imagen más nítida. Este instrumento, combinado con una montura ecuatorial **Astro-Physics 1600 GTO³**, nos permite una vista clara de la bóveda celeste a 30° arriba del horizonte, con capacidad de observar objetos tenues hasta de 17 magnitudes variando la configuración de las exposiciones.

El CCD usado para obtener las imágenes fue el **QHY174GPS⁴**. Este CCD cuenta con una resolución de 1920×1200 pixeles. Para reducir el ruido térmico tiene un mecanismo de enfriamiento termoeléctrico, el cual lo puede enfriar a una temperatura de -40° C bajo la temperatura ambiente. Frente al CCD va equipado una rueda de filtros **ZWO 7x36mm⁵**, la cual puede ser equipada con 7 filtros distintos. Para las observaciones recabadas en este trabajo, utilizamos solamente el filtro **Luminance**, el cual representa una curva de transmisividad para la región del visible del espectro electromagnético (**Figura 6.1**, obtenida de la página comercial de ZWO⁶).

¹<https://nighttime-imaging.eu>

²<https://planewave.com/product/cdk20-ota/>

³<https://www.astro-physics.com/1600gto>

⁴<https://www.qhyccd.com/qhy174gps-imx174-scientific-cooled-camera/>

⁵<https://astronomy-imaging-camera.com/product/new-zwo-efw-7x36mm/>

⁶<https://astronomy-imaging-camera.com/product/zwo-lrgb-36mm-filters/>

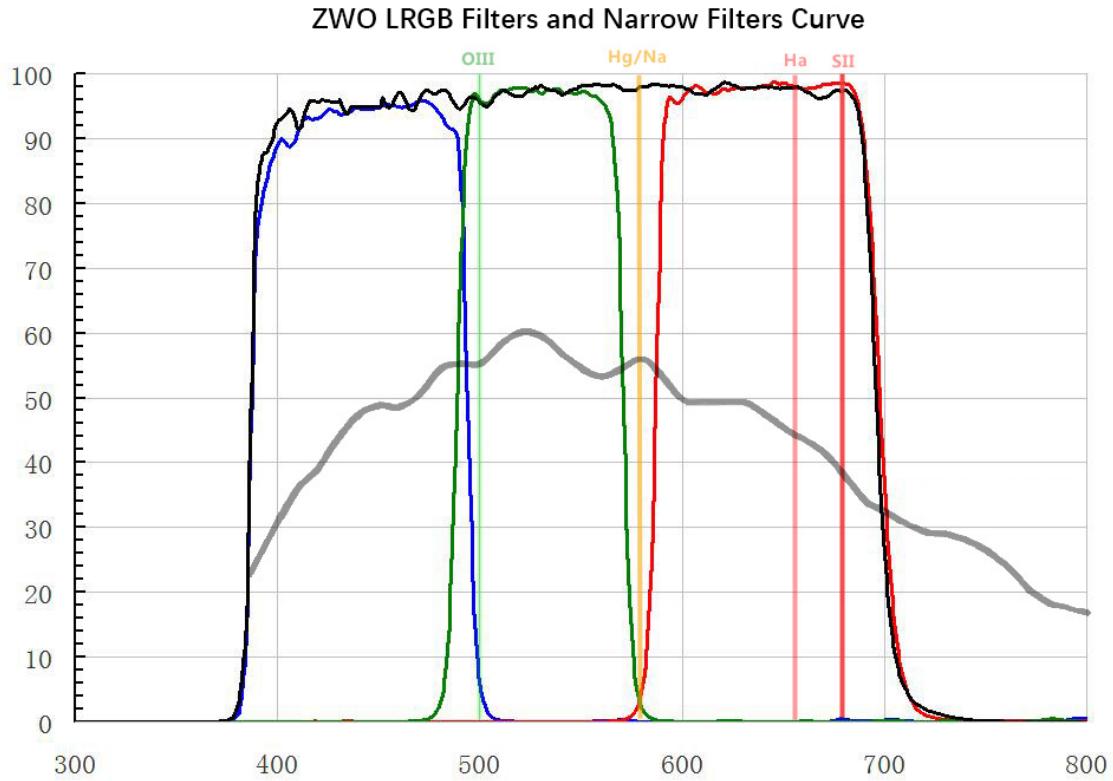


FIGURA 6.1: Curva de transmisión de filtros de ZWO. El filtro de **Luminance** se encuentra como la curva negra, abarcando todo el espectro visible, desde los 400nm hasta 700nm.

6.2 FOTOMETRÍA

Para este trabajo se realizó una campaña de observación durante los últimos meses del 2022, con la finalidad de observar el sistema durante una fase orbital completa. Las fechas y duraciones de cada día de observación se encuentra en la **Tabla 6.1**. Varias de las noches de observaciones sufrieron de pobres condiciones del sitio, las cuales llegaron a afectar la calidad de las observaciones; tanto las condiciones meteorológicas como contratiempos causados por el equipo en si causaron interrupciones en las exposiciones continuas y perturbaciones en las imágenes mayores a las que se puede corregir en el procesamiento de datos. Esto es esperado en un observatorio en proceso de desarrollo; a pesar de los problemas técnicos, se pudieron obtener

datos de calidad aceptable. Los vientos fuertes fueron un gran obstáculo debido a la nula protección del CCD montado al telescopio, ya que cualquier perturbación por parte del viento resultaba en una imagen defectuosa. Dado que las observaciones de este proyecto se realizaron en el 2022 solo el viento sigue siendo un problema para observaciones posteriores; todavía no se implementa una cúpula para proteger el telescopio del viento, pero el auto-enfocador y guiator están funcionando de manera apropiada.

Fecha (UTC)	HJD Inicio +2 459 000	Tiempo Expocisiones	Duración
2022-10-22	874.67	111 · 60 s	2.67 h
2022-10-23	875.57	159 · 60 s	5.28 h
2022-10-28	880.77	124 · 60 s	2.11 h
2022-11-06	889.58	125 · 60 s	4.25 h
2022-12-07	920.55	231 · 60 s	5.25 h
2022-12-08	921.57	138 · 60 s	4.25 h
2022-12-09	922.54	127 · 60 s	4.97 h
2022-12-10	923.54	129 · 60 s	5.44 h
2022-12-11	924.53	122 · 60 s	2.20 h

TABLA 6.1: Bitácora de fechas de observaciones fotométricas desde el OAU.

6.2.1 ESTRELLAS DE COMPARACIÓN

Para determinar la magnitud diferencial de un objeto se necesita una estrella de comparación dentro del campo de la imagen de ciencias. Una manera de encontrar estrellas de referencias adecuadas es utilizando el Variable Star Plotter⁷ de la AAVSO; sin embargo, debido al pequeño campo de visión de nuestras imágenes (aproximadamente 1' de largo), no se encuentra alguna estrella standard registrada. Por lo tanto para realizar la fotometría diferencial solo es necesario tener estrellas de

⁷<https://app.aavso.org/vsp/>

comparación con un número de cuentas (flujo integrado) similar al objeto de interés. El campo visible de ATO J339.9469+45.1464 utilizando el equipo de OAU se puede ver en la **Figura 6.2**.

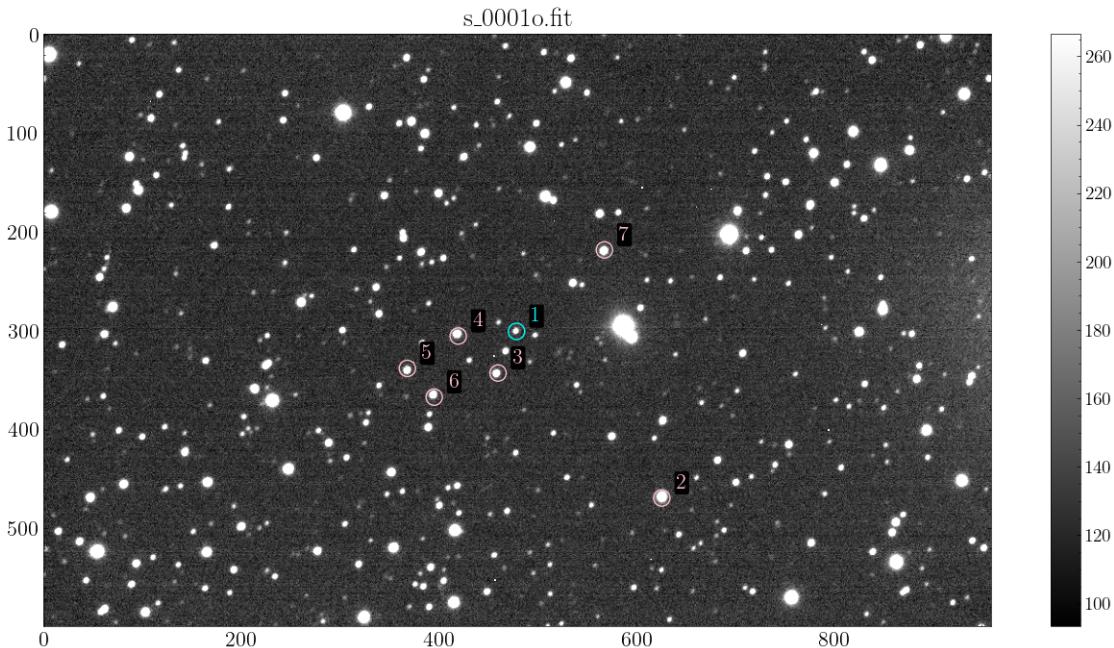


FIGURA 6.2: Imagen del campo de ATO J339.9469+45.1464 marcado con la etiqueta 1 en, junto a las estrellas de referencia usadas en la fotometría diferencial marcadas en anillos rosas marcados con etiquetas del 2 al 7.

6.2.2 PROCESAMIENTO DE IMÁGENES

La limpieza de las imágenes incluyó la corrección de bias, darks, y flats por medio de imágenes de calibración, las cuales fueron tomadas cada noche de observación. Esto fue realizado utilizando tareas standard de IRAF [Tody (1986)]. Cada imagen fue revisada manualmente para determinar si era de suficiente calidad para hacer una medición adecuada. Se analizó la forma que proyecta el objeto en la imagen del CCD; solo las imágenes cuyo perfil se aproxima a un círculo fueron aceptadas para realizar el proceso de fotometría diferencial.

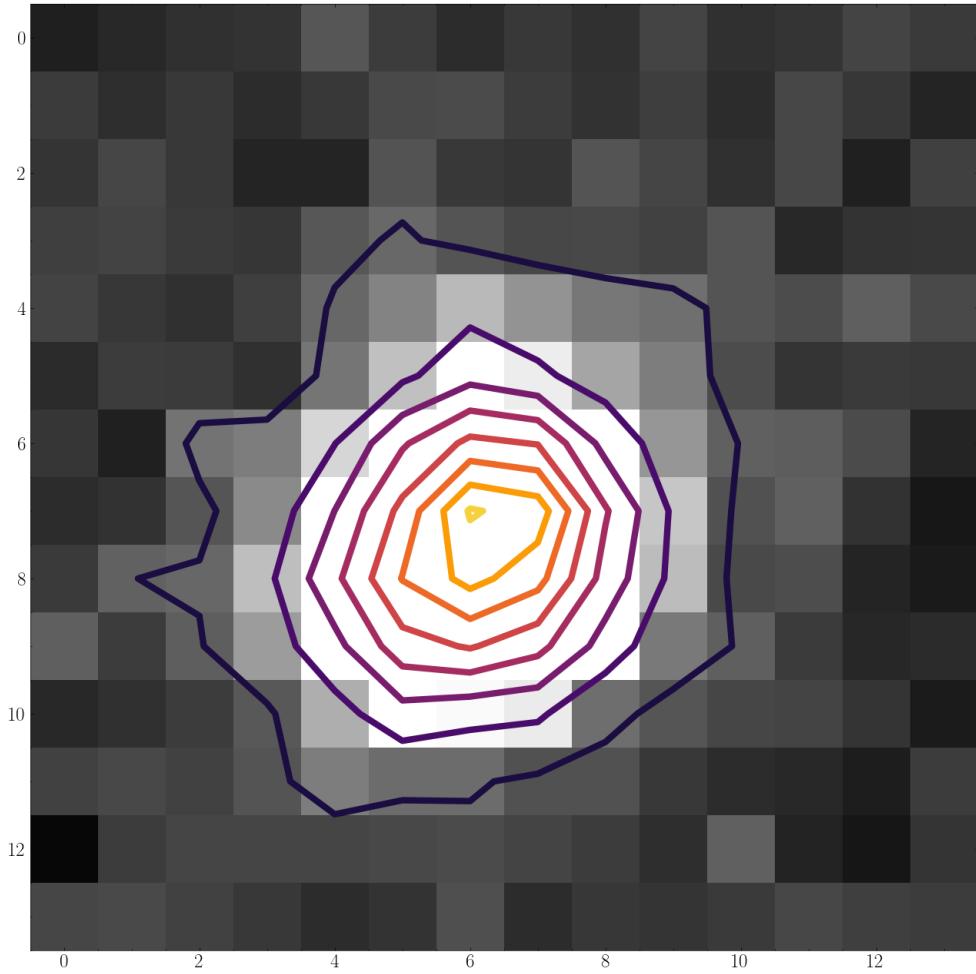


FIGURA 6.3: Isógrama de las cuentas registradas del flujo de ATO J339.9469+45.1464 para un corte de 14×14 pixeles, donde el color más claro denota una mayor cantidad de cuentas.

Una vez que las mediciones fueran corregidas, fue necesario trasladar los datos dentro de las imágenes para que ATO J339.9469+45.1464 quede en el centro del campo, facilitando la fotometría por apertura. Utilizando el script `shift_images.py` se ejecutó una tarea de *plate solving* para cada imagen calibrada; el proceso de *plate solve*, llevado a cabo utilizando el programa *Astrometry* [Lang et al. (2010)], toma como referencia estrellas dentro del campo de la imagen comparando contra una base de datos pre-definida para determinar las coordenadas físicas que corresponden a una imagen. Esta información va encapsulada dentro de los metadatos del archivo FITS, conocido como **World Coordinate System (WCS)**. Una vez que una imagen sea

resuelta se puede proyectar a las coordenadas de otra imagen, posicionando la estrella variable en una posición única dentro del encuadro de cada imagen, facilitando el uso de coordenadas en pixeles para definir las aperturas de medición fotométrica.

Utilizando las imágenes proyectadas se obtuvo el brillo del objeto utilizando la tarea `qphot` de IRAF, dando como resultado magnitudes instrumentales del sistema. La apertura en tamaño de pixeles se definió en base al ancho a media altura (*full-width at half-maximum*) de ATO J339.9469+45.1464 para cada imagen, utilizando la tarea `imexam` de IRAF. Este se usó como el radio de la apertura circular, junto a una apertura anular para sustraer el brillo de fondo del cielo, el cual se utilizó para las 7 estrellas marcadas en la **Figura 6.2**. Las magnitudes instrumentales medidas se pueden ver en la **Figura 6.4**. A pesar de que todos los objetos muestran un comportamiento variable, esto no es una característica intrínseca de todos los sistemas. En particular, la estrella de comparación se considera que emite un flujo relativamente constante a comparación del sistema variable ATO J339.9469+45.1464; por lo tanto, las variaciones vistas en su curva de luz se deben a perturbaciones atmosféricas e instrumentales, lo cual nos permite eliminar estos efectos por medio de la fotometría diferencial.

6.2.3 FOTOMETRÍA DIFERENCIAL

Para obtener una magnitud diferencial de ATO J339.9469+45.1464 se necesita de una estrella de referencia de la cual se observe un flujo constante. Aparte del requisito de ser una fuente constante, una estrella de referencia ideal sería del mismo color que el sistema variable ATO J339.9469+45.1464; sin embargo, en casos como el de este estudio se puede despreciar este último requisito debido al bajo número de opciones disponibles dentro del campo visible. Del campo visible en la **Figura 6.2** se eligió el objeto número 5 como la estrella de referencia. Su curva de luz instrumental se puede ver a mayor detalle en la **Figura 6.5**. La magnitud diferencial m_d de ATO J339.9469+45.1464 se obtiene restando la magnitud instrumental del objeto de

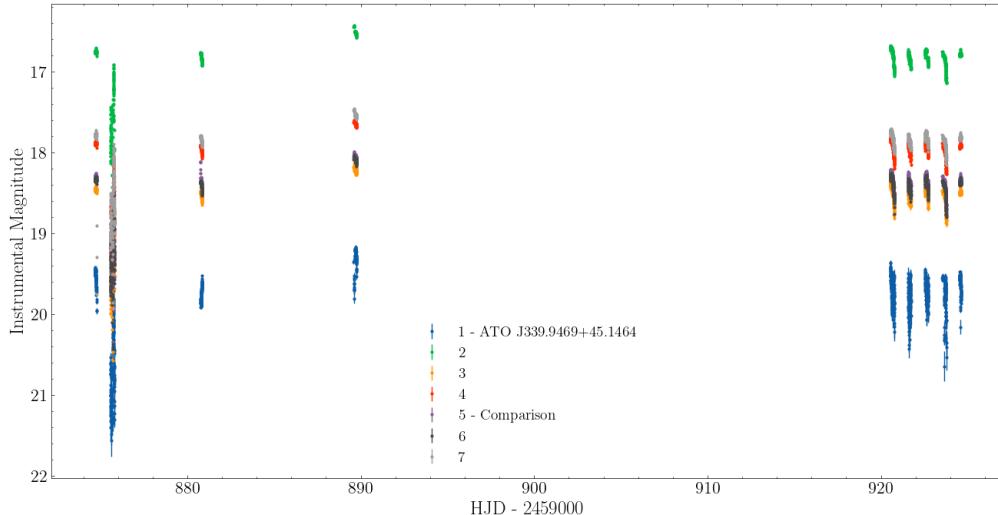


FIGURA 6.4: Magnitudes instrumentales reportada por IRAF mediante la técnica de fotometría de apertura. De los 7 objetos resaltados en la **Figura 6.2** se distinguen el objeto principal ATO J339.9469+45.1464 con la etiqueta 1, y la estrella de referencia utilizada para determinar la magnitud diferencial de ATO J339.9469+45.1464.

referencia 5 $m_{\text{inst},5}$ de la magnitud instrumental medido de ATO J339.9469+45.1464 $m_{\text{inst,ATOJ339.9469+45.1464}}$ utilizando la **Ecuación 6.1**, cuya curva de luz resultante se puede ver en la **Figura 6.6**. Las imágenes calibradas se encuentran como un *Release* dentro del repositorio de GitHub este proyecto de investigación, junto a los datos de la fotometría de apertura.⁸

$$m_d = m_{\text{inst,ATOJ339.9469+45.1464}} - m_{\text{inst},5} \quad (6.1)$$

⁸https://github.com/KnightIV/UANL_MAPTA_Observaciones/releases/tag/data

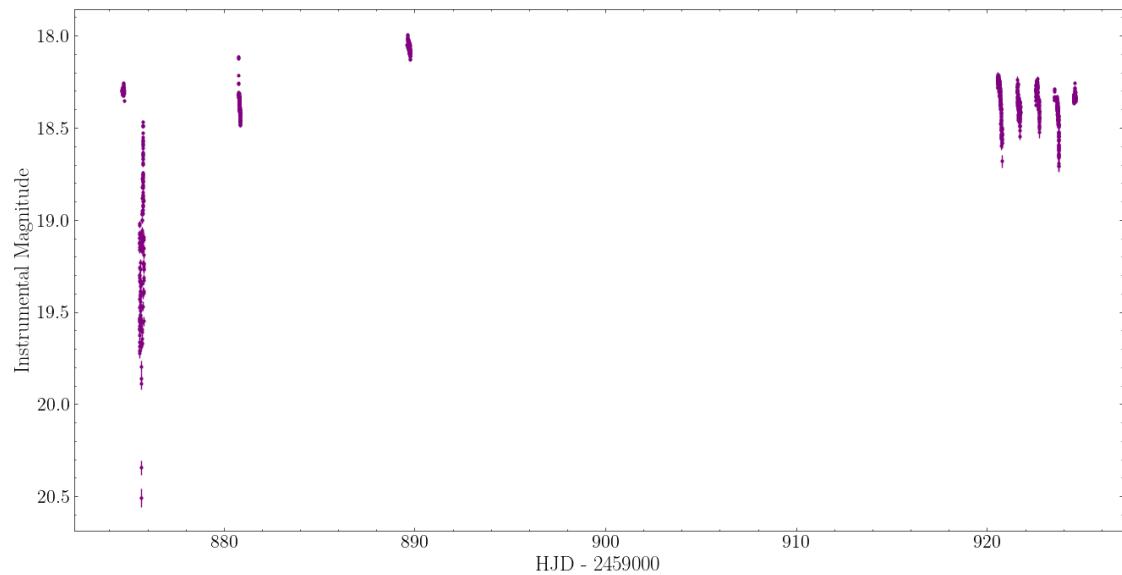


FIGURA 6.5: Magnitud instrumental de la estrella de referencia utilizada para determinar la magnitud diferencial de ATO J339.9469+45.1464. La variabilidad en la curva de luz se atribuye a factores extrínsecos del sistema.

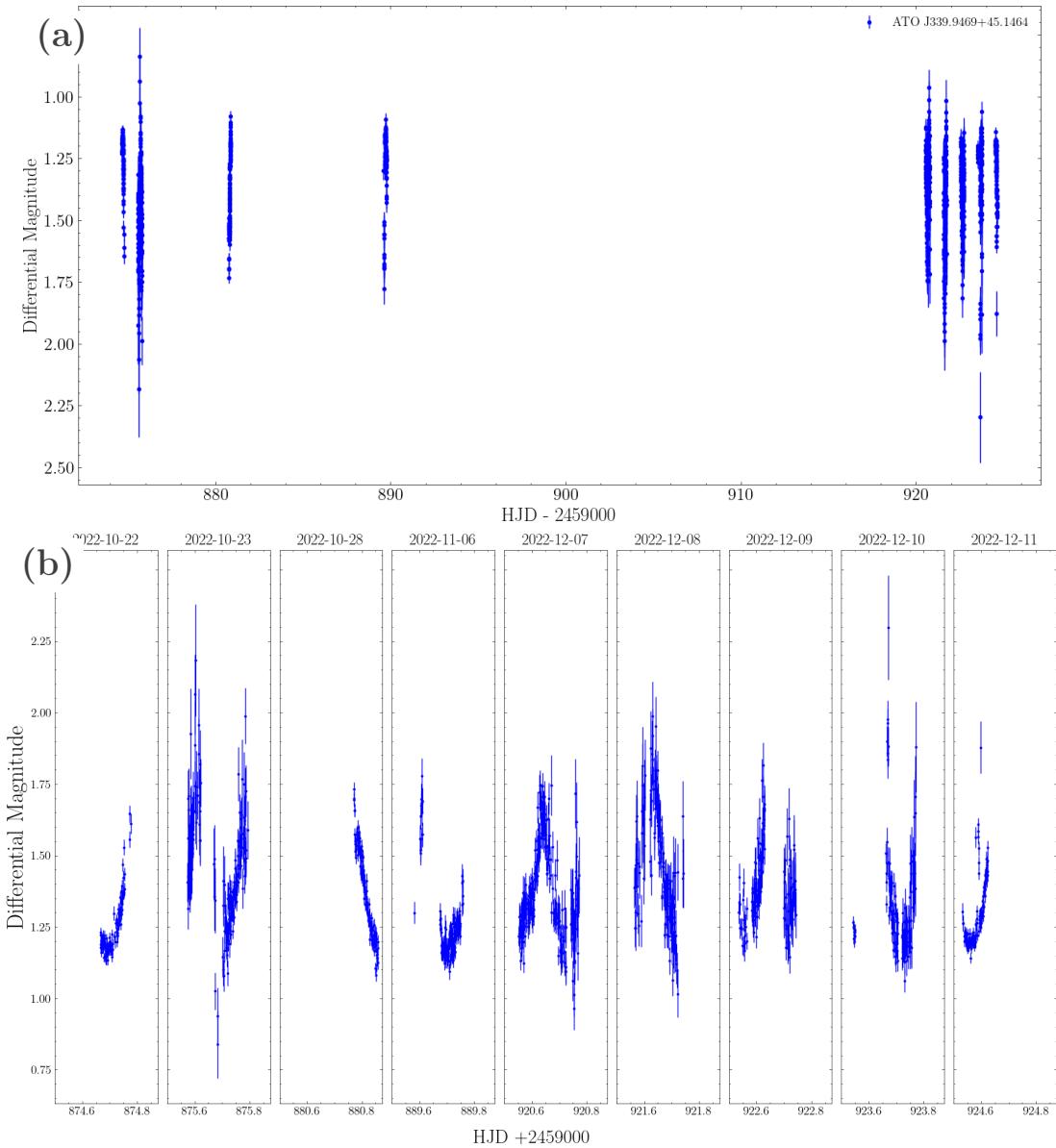


FIGURA 6.6: Magnitud diferencial de ATO J339.9469+45.1464. **(a)** Curva de luz completa. **(b)** Curva de luz segmentada por día, con la cual se logra apreciar la cadencia de observación, viendo como cada día se logra observar una fase diferente del sistema.

Parte III

Metodología y Análisis de Datos

CAPÍTULO 7

PERIODO ORBITAL

Una de las propiedades más importantes presente en la curva de luz de una binaria eclipsante es su *periodo orbital*. Partiendo del periodo orbital es posible presentar los datos observacionales en el espacio fase en vez de tiempo, el cual nos permite ajustar un modelo cuyos parámetros expliquen una característica física del sistema. Dada una curva de luz se puede encontrar el periodo orbital usando **periodogramas**: herramientas utilizadas para generar un espectro de potencias para una serie de tiempo periódica. Para series de tiempo cuyo muestreo no es uniforme en el tiempo (como es común de observaciones astronómicas) se utiliza el periodograma **Lomb-Scargle**, derivado de la transformada de Fourier por Lomb (1976) y Scargle (1982). En particular se utiliza una generalización del periodograma Lomb-Scargle para ajustar curvas de luz en diferentes bandas al mismo tiempo; el periodograma de *Lomb-Scargle multibanda* utiliza un modelo de Fourier truncado que describe la variabilidad en común de todas las bandas en las que se observó el sistema, y a este le suma un modelo de ajustes de Fourier truncados para cada banda individual, el cual ajusta la variabilidad vista en los residuos del ajuste del término en común [VanderPlas & Ivezic' (2015)]. Usando un mallado suficientemente fino para explorar el espacio de frecuencias se puede encontrar la frecuencia de mayor potencia, indicando el periodo orbital del sistema; al mismo tiempo, para restringir esta malla de periodos se impuso un límite máximo de 1 día, basado en las primeras observaciones

de Iturbide. El espectro de frecuencias se encuentra en la **Figura 7.1**.

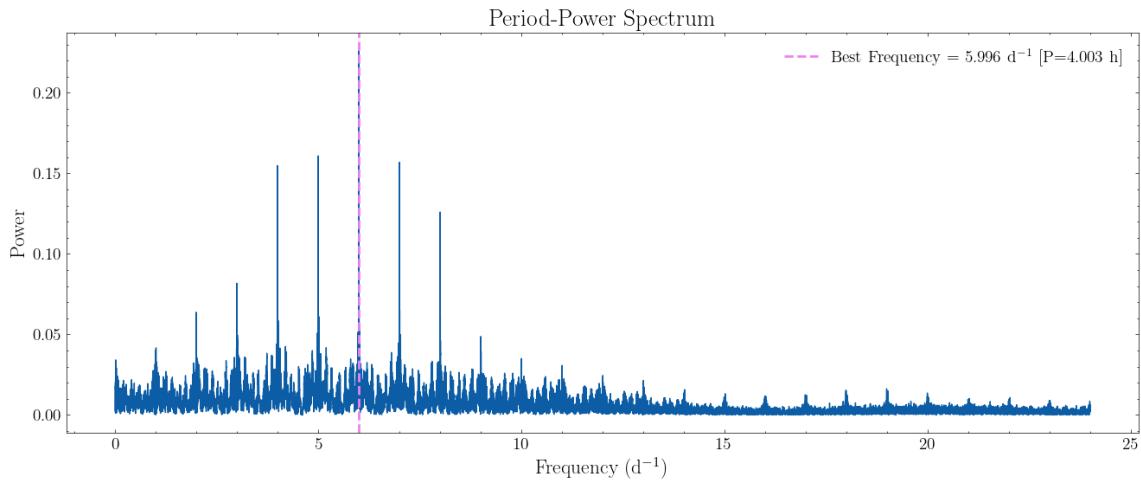


FIGURA 7.1: Espectro de frecuencias de las curvas de luz fotométricas de ATO J339.9469+45.1464, utilizando todas las observaciones recabadas de Gaia, ZTF, e Iturbide. El pico de más alta potencia está ubicado en el periodo de aproximadamente 0.1668 d (4.003 h).

Dado este espectro de frecuencias encontramos que el periodo orbital es igual a la frecuencia principal multiplicada por 2. Esto se debe a los requisitos para analizar una curva de luz de un sistema binario eclipsante, los cuales muestran dos valles en el espacio fase, cada uno correspondiendo a los eclipses de la componente primaria y la secundaria respectivamente. La curva de luz en fase la cual muestra ambos eclipses se puede ver en la **Figura 7.2**. El periodo orbital encontrado es de 8.00558 ± 0.00013 horas. Se hizo uso de la implementación del periodograma Lomb-Scargle para multiples bandas de `astropy`, utilizando la clase `LombScargleMultiband`. El código donde se realizó el análisis se encuentra en el Notebook `periodogram.ipynb`.

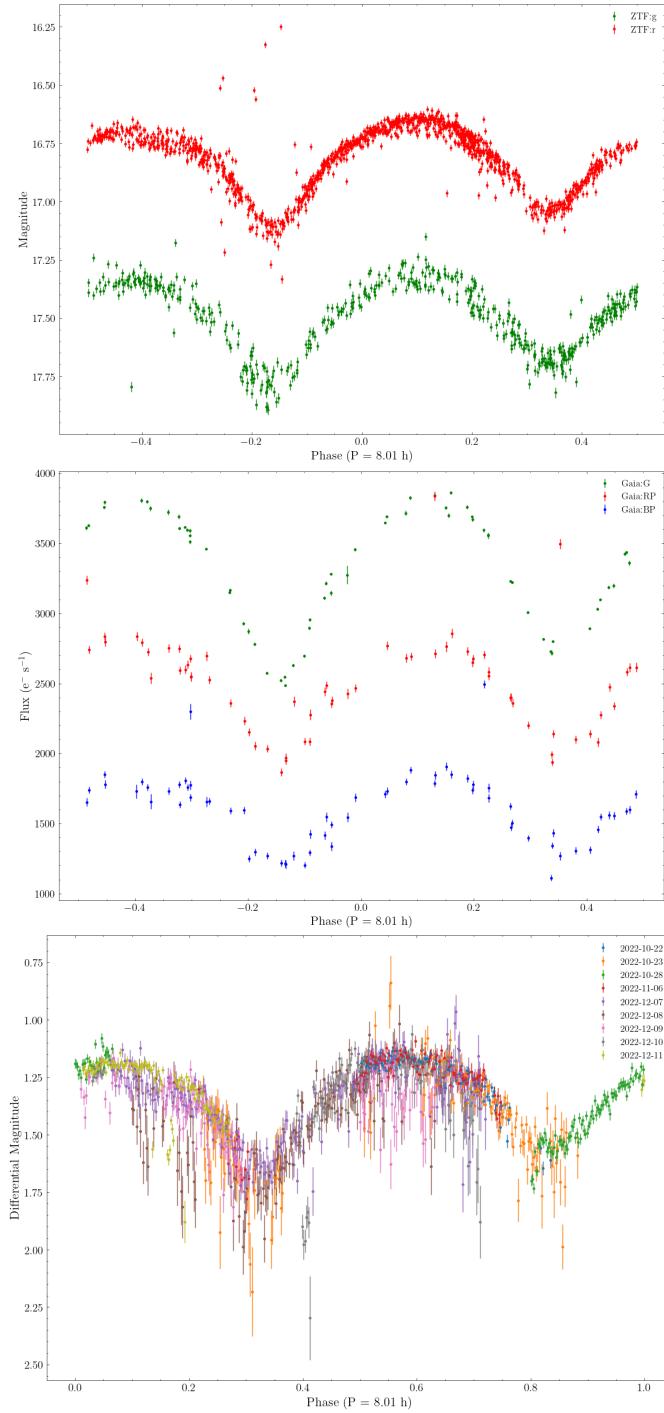


FIGURA 7.2: Curvas de luz de ZTF, Gaia e Iturbide en espacio fase dado un período orbital de 8.00558 ± 0.00013 horas. El tiempo de conjunción superior son corregidos en los siguientes pasos de afinación del modelo de PHOEBE, el cual ajusta la fase 0 para que coincidan las 3 curvas de luz. Las observaciones de Iturbide se clasifican por su noche de observación, indicado por su color.

CAPÍTULO 8

NORMALIZACIÓN DE FLUJOS Y PRESERVACIÓN DE COLOR

Las curvas de luz obtenidas de los catálogos Gaia y ZTF al igual que las observaciones realizadas en el OAU permiten el estudio de ATO J339.9469+45.1464 ajustando un modelo de un sistema binario eclipsante utilizando PHOEBE. Sin embargo, PHOEBE trabaja directamente con flujos; al calcular el modelo hacia adelante PHOEBE integra las intensidades calculadas para cada elemento superficial de ambas estrellas e integra la radiación emergente en la dirección del observador para obtener una medición del flujo en unidades de Wm^{-2} . Los datos obtenidos del catálogo de Gaia vienen con el flujo registrado por el satélite de cada tránsito del objeto por su campo de visión—este viene reportado en unidades de $\text{e}^{-\text{s}}^{-1}$, el cual se puede utilizar directamente en PHOEBE en el caso de no necesitar conocer la luminosidad absoluta de las componentes estelares.

Los datos recabados del catálogo de ZTF no reportan alguna medición directa del flujo recibido—estos solo reportan las magnitudes y sus errores obtenidas de su procesamiento fotométrico. El procesamiento de las imágenes en cada filtro descrito por Masci et al. (2018) da como resultado curvas de luz calibradas con estrellas de calibración del catálogo Pan-STARRS1. Aunque no es posible obtener una medición del flujo recibido sin conocer el flujo f_0 que corresponde a una magnitud m_0 , es

posible obtener curvas de flujos normalizados que preservan la información del color del sistema ofrecido por la fotometría multibanda. Para cada punto de magnitud m_p para la pasabanda p se aplica la siguiente transformación para obtener el flujo normalizado:

$$f_p = 10^{-\frac{2}{5}(m_p - m_0)} \quad (8.1)$$

Donde m_0 es la magnitud de referencia. En vez de escoger una magnitud m_0 para cada pasabanda se elige solo un valor de m_0 el cual se aplica a ambas curvas de ZTF, dando como resultado el flujo relativo obtenido del sistema en base a su distribución de energía espectral (SED). Este dato permite el ajuste de la temperatura efectiva del sistema sin necesidad de acudir a una estimación a priori basado en relaciones analíticas o estadísticas con respecto a otros parámetros del modelo [Kallrath & Milone (2009, Sección 5.1.2.2)]. A la vez, al tener una manera concreta de evaluar de manera directa la temperatura efectiva del sistema es posible conocer la incertidumbre utilizando solo datos fotométricos. Para obtener el flujo normalizado de las curvas de ZTF se utilizó la magnitud del sistema en la fase 0.25 en el pasabanda ZTF:g. El resultado se puede ver en la **Figura 8.1**. El código donde se realizó este procedimiento se encuentra en el Notebook `light-curve-processing.ipynb`.

Debido a que la curva de luz de las observaciones hechas en el OAU en Iturbide, N.L. son magnitudes diferenciales, no es posible determinar el flujo real incidente a la CCD. Por lo tanto se adopta el mismo procedimiento hecho para las curvas de luz de ZTF. Utilizando la **Ecuación 8.1** los flujos normalizados se obtuvieron usando la magnitud en fase 0.25 como el valor de m_0 , el código presente en el Notebook `periodogram.ipynb`. La curva de luz resultante se puede ver en la **Figura 8.1**. Como se mencionó al principio del capítulo, no fue necesario tratar las curvas obtenidas de Gaia DR3 de esta manera, debido a que los datos obtenidos de la fotometría de época¹ ya reporta el flujo medido por Gaia.

¹https://gea.esac.esa.int/archive/documentation/GDR3/Gaia_archive/chap_datamodel/sec_

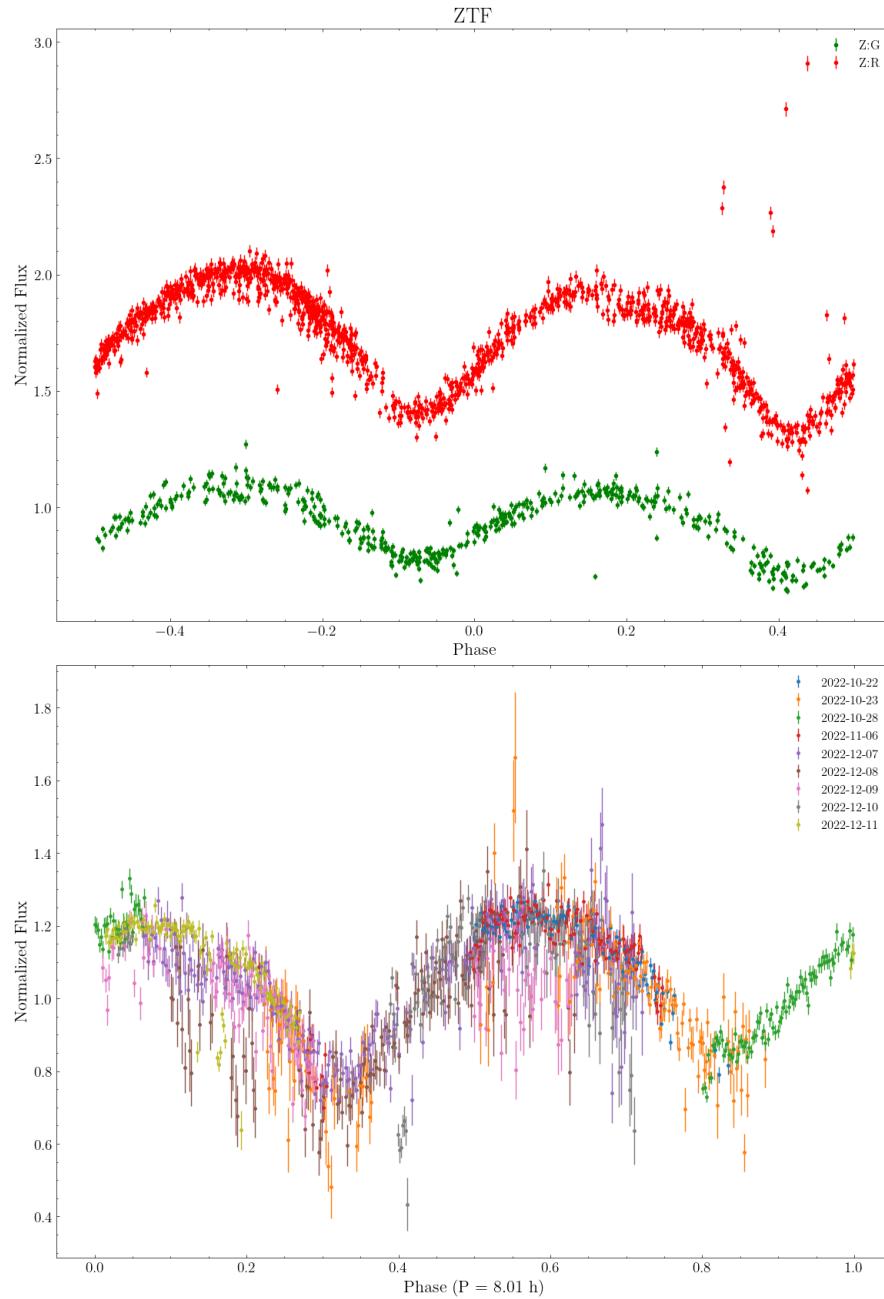


FIGURA 8.1: Flujo en fase de las curvas de luz obtenidas para ATO J339.9469+45.1464. De estos dos conjuntos de datos solo ZTF contiene información del color del sistema, y por ende una cantidad medible del cual determinar la temperatura efectiva del sistema.

CAPÍTULO 9

MODELO COMPUTACIONAL

Usando todas las curvas de luz disponible para ATO J339.9469+45.1464 se puede generar un modelo computacional cuyos parámetros físicos resultan en una curva de luz sintética que reproduzca de manera adecuada las curvas fotométricas observadas. Este método al final daría como resultado una *solución fotométrica* del sistema, en cual se reportan los valores óptimos de cada parámetro y la incertidumbre dada por la calidad de los datos. A continuación se plasma el proceso que se llevó a cabo para llegar a una solución fotométrica del sistema ATO J339.9469+45.1464; debido a la alta dimensionalidad del problema de sistemas binarios estelares, no se puede garantizar que esta sea la única combinación de parámetros que mejor ajusten el modelo a los datos, aunque esta posibilidad es mitigada utilizando las herramientas disponibles en PHOEBE.

9.1 PREPARACIÓN DEL MODELO

El modelo en PHOEBE (llamado *bundle* en inglés por el nombre de la clase `phoebe.Bundle`) necesita ser preparado al principio para empezar el proceso de ajuste. Esto incluye cargar las curvas fotométricas observadas de cada catálogo al bundle; PHOEBE requiere que estas sean en arreglos de tiempo, flujos, y errores de flujo—las mediciones de flujo se deben a que PHOEBE no trabaja de mane-

ra directa con magnitudes, y los errores son necesarios para que las herramientas de optimización de parámetros puedan funcionar adecuadamente. En el Notebook `initial-model-prep.ipynb` está el código que se utilizó para cargar los datos de Iturbide, Gaia, y ZTF al bundle en el que se trabajó; esto incluye realizar una limpieza de las curvas de luz. Esto es más evidente en las curvas de luz en fase vistas en la **Figura 7.2** donde se aprecia que varias observaciones quedan fuera de la forma general aparente de su curva de luz respectiva. Las observaciones más erróneas se pueden eliminar utilizando las banderas (*flags* como se identifican en los datos) que marcan los problemas que sucedieron durante las observaciones. Para los pocos puntos que quedaron fuera del rango de la curva de luz promedio se utilizaron límites de flujo manuales en base a las gráficas vistas en la **Figura 7.2**. Cada punto contribuye al cálculo de la función de costo que parametriza la calidad del ajuste, por lo cual es importante eliminar aquellos datos que tendrían un efecto negativo significativo, afectando algoritmos que buscan optimizar el valor de esta función.

Una optimización empleada en el cómputo del modelo hacia adelante es limitar los puntos de tiempo para el cual se calcula el flujo recibido del sistema. Esto es necesario para limitar el tiempo de ejecución del programa, en particular para los procesos de optimización y muestreo MCMC que corren por varias iteraciones, calculando el modelo sintético en cada iteración. PHOEBE utiliza los valores de los tiempos de las curvas de luz proporcionadas para calcular el modelo hacia adelante, lo cual provoca que el modelo tarde varios minutos para generar la curva sintética. Para declarar las fases de cómputo de manera explícita se utiliza el siguiente código (implementado en el Notebook `ebai-default.ipynb`), visto en la **Figura 9.1**. El cálculo del modelo hacia adelante en PHOEBE es en función de tiempo, no de fase, por lo cual PHOEBE genera una lista de tiempos para el cual calcular el modelo utilizando la función `phases_to_times`, tomando como argumentos el periodo del sistema, el tiempo de conjunción superior, y el cambio del periodo orbital con el tiempo (dP_{orb}/dt) en el caso de ser distinto a 0. Los tiempos generados por esta función no se transforman a los tiempos de las observaciones, pero debido a que el

modelo sintético es evaluado únicamente en fase esto no es un requisito importante para este estudio. El tiempo de cómputo para el modelo hacia adelante de las curvas de ZTF:g y ZTF:r se redujo de 10 minutos por modelo a aproximadamente 1 minuto por modelo.

```

01 | import phoebe
02 |
03 | # b: phoebe.Bundle
04 | b.flip_constraint('compute_phases@lcZtfG',
05 |         solve_for='compute_times@lcZtfG')
06 | b.set_value(qualifier='compute_phases',
07 |         dataset='lcZtfG',
08 |         value=phoebe.linspace(-0.5, 0.5, num=151, endpoint=True))

```

FIGURA 9.1: Estableciendo valores fijos de las fases orbitales para cuales calcular el modelo hacia adelante para la curva de luz `lcZtfG` en la pasabanda ZTF:g. La función `phoebe.linspace` genera una lista de valores numéricos en el intervalo $[-0.5, 0.5]$ de 151 elementos, una disminución significativa de los 453 puntos de tiempo en la curva observada de ZTF:g.

9.2 ESTIMACIONES INICIALES

Una vez determinado el periodo orbital del sistema se puede empezar un estudio de la morfología de las curvas de luz en fase, cuya forma se relaciona directamente con parámetros físicos del sistema. PHOEBE ofrece distintos métodos para generar las primeras estimaciones de los parámetros del sistema. El estimador **EBAI-KNN** (descrito en la Sección 3.3.2.2) es capaz de estimar los siguientes parámetros: el *tiempo de conjunción superior* (`t0_supconj`), la *razón de temperaturas* (`teffratio`), la *inclinación orbital* (`incl@binary`), el *factor de relleno* (`fillout factor` en inglés, `fillout_factor`), y la *razón de masas* (`q`). A pesar que dentro de PHOEBE estén implementados estimadores adicionales, solo se puede aplicar el estimador **EBAI-KNN**; esto se debe a que el modelo del sistema del que parte

este trabajo corresponde al de una binaria en contacto (elegido por la morfología aparente de la curva de luz de Iturbide). Para poder adoptar los valores propuestos por los estimadores fue necesario eliminar la restricción puesta por PHOEBE en el parámetro `fillout_factor`. Este parámetro está restringido por la función interna de PHOEBE `pot_to_fillout_factor`, la cual toma como entrada la razón de masa q y el valor del potencial de Roche Ω que coincide con la superficie delimitada por la envoltura común de una binaria en contacto. Como resultado el parámetro `fillout_factor` queda restringido por los parámetros `pot@contact_envelope` y el radio de la estrella primaria `requiv`, lo que efectivamente significa que los radios del sistema binario quedan parametrizados por el factor de relleno.

Dentro del Jupyter Notebook `ebai-default.ipynb` se puede encontrar el código con el que se llevaron a cabo las pruebas de estimación de parámetros. El estimador **EBAI-KNN** puede que obtenga diferentes soluciones del sistema dependiendo de la curva de luz utilizada; por lo cual se esperaba que obtuviera diferentes resultados dependiendo de las curvas de entrada. Para obtener un panorama completo de las posibles soluciones fotométricas se ejecutaron varios estimadores de PHOEBE, cada uno operando sobre una diferente combinación de curvas de luz; se corrió un estimador por cada curva de luz individual, al igual que unos estimadores que tuvieron de entrada una combinación de curvas de luz de Gaia, Iturbide, y ZTF, con la finalidad de experimentar con las capacidades de PHOEBE. El experimento completo junto a sus curvas de luz sintéticas correspondientes se pueden ver en el Notebook antes mencionado, acompañado de las gráficas resultantes de cada estimador.

9.2.1 ELECCIÓN DEL MODELO INICIAL

Una consideración importante en el proceso de modelación computacional es la existencia de diferentes soluciones fotométricas dado un mismo conjunto de datos. Esto se debe a la ortogonalidad de los parámetros en el sistema; dos o más parámetros pueden estar correlacionados el uno al otro, lo cual significa que no existe una

solución única correcta del sistema. Para decidir entre los varios estimadores se tomó como criterio de selección el ajuste del modelo hacia adelante utilizando la métrica definida en la **Ecuación 3.16**, λ , la cual está normalizada al número de puntos en las curvas de luz observadas. Estos se pueden ver en la **Figura 9.2**. Viendo solo la medida del ajuste λ total para cada modelo se llegaría a la conclusión que el modelo `ebai_knn_ztf_solution` es el que más coincide con los datos observacionales. Sin embargo, es necesario no solo ver el ajuste a cada curva de luz individual, pero también considerar los valores físicos obtenidos del estimador. Un criterio que empleamos fue adoptar la solución cuya razón de masa q sea la más cercana al valor obtenido utilizando la red neuronal desarrollada por Poro et al. (2022). Dado el periodo orbital de 8.01 h obtenemos un valor estimado de aproximadamente 0.692; de este se obtiene $1/q \approx 1.444$, el cual es importante tener en mente ya que q en PHOEBE no está restringido al intervalo $(0, 1]$ como en el modelo de Poro et al. (2022). Por lo tanto se eligió las estimaciones de `ebai_knn_ztf_gaia_solution`, el cual utilizó la fotometría de Gaia y ZTF. El resultado inicial del modelo se puede ver en la **Figura 9.3**, junto a los parámetros del modelo en la **Tabla 9.1**.

Parámetro	Valor
<code>t0_supconj@binary</code>	0.02571 d
<code>teffratio@binary</code>	0.98746
<code>incl@binary</code>	70.3197 deg
<code>fillout_factor@contact_envelope</code>	0.25767
<code>q@binary</code>	1.93380

TABLA 9.1: Resultados adoptados de las estimaciones iniciales, utilizando el estimador cuyos datos de entrada fueron las curvas de Gaia y ZTF. Las unidades de cada valor son especificadas excepto para los parámetros adimensionales.

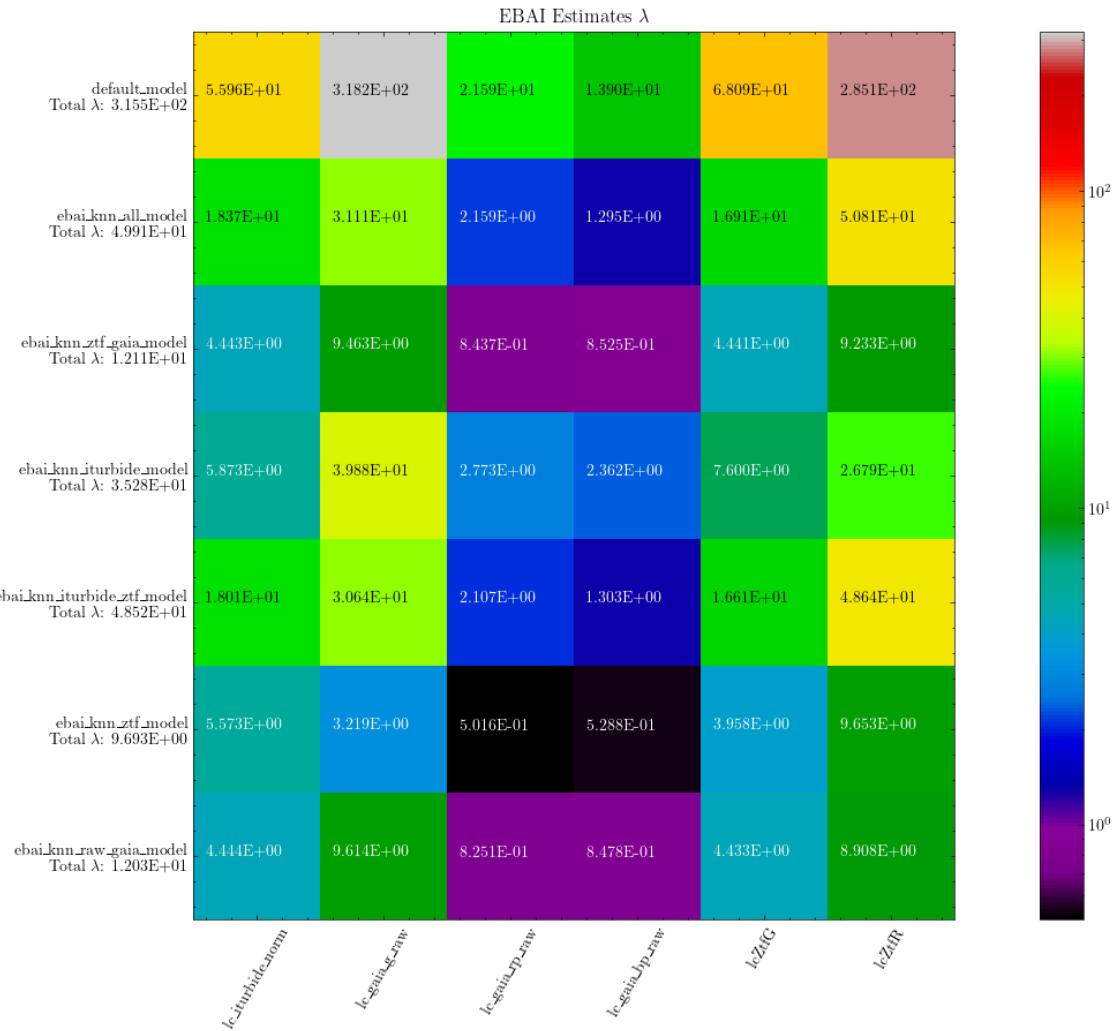


FIGURA 9.2: Resultados del ajuste (λ) de los modelos sintéticos generados utilizando los parámetros dados por cada estimador. Cada estadística fue calculada con respecto a todos los datos observacionales disponibles, sin importar las combinaciones de curvas de luz utilizadas para hacer la estimación. `default_model` corresponde al modelo inicial que ofrece PHOEBE a través de la función `phoebe.default_contact_binary()`. Los nombres de los estimadores en el eje vertical de la gráfica indican los datos observacionales utilizados para cada estimación de parámetros, junto al valor del ajuste el modelo sintético a todas las curvas del modelo.

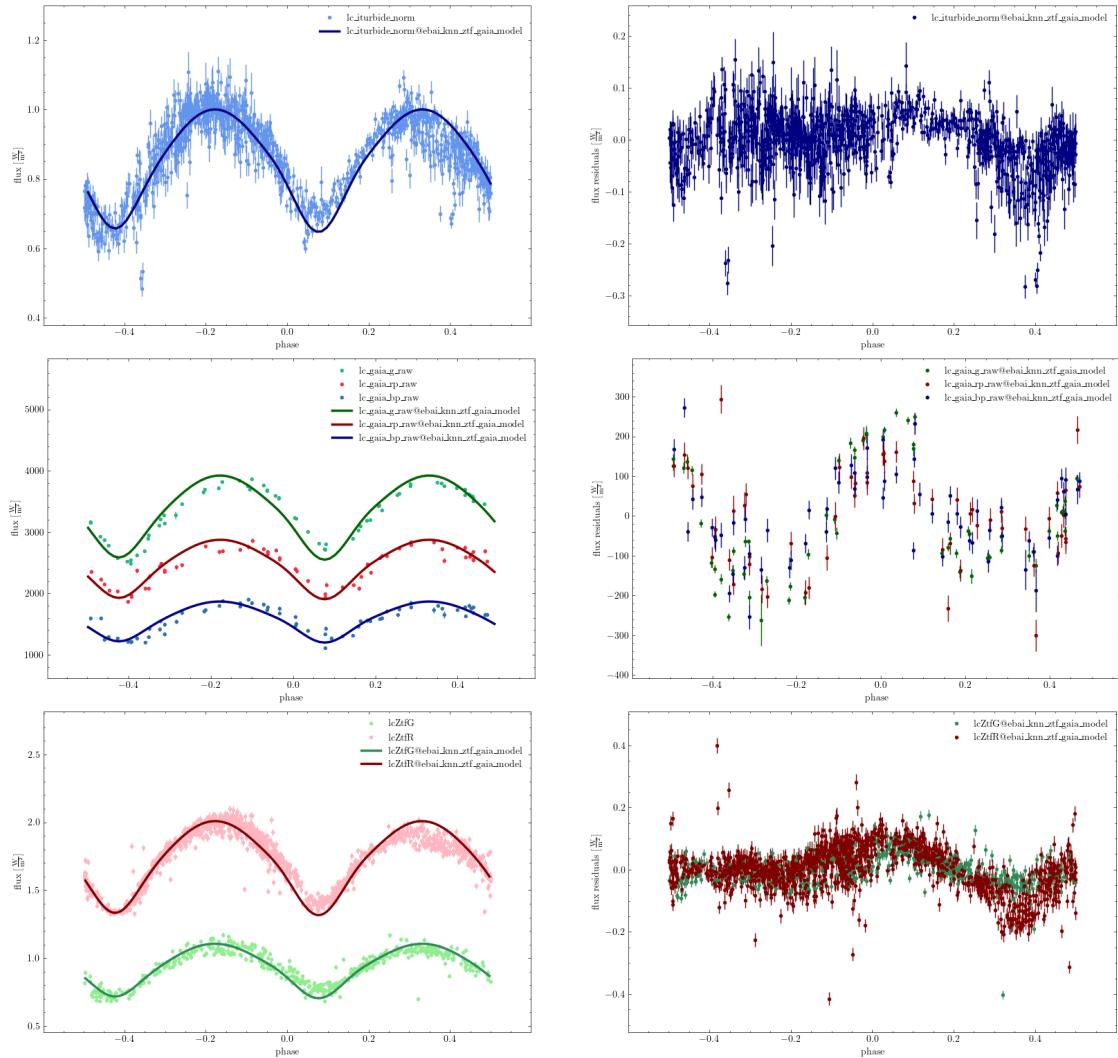


FIGURA 9.3: Modelos sintéticos del modelo utilizando los parámetros estimados por `ebai_knn_ztf_gaia_solver` junto a los residuos en los flujos para cada curva de luz. Estos modelos fueron sintetizados utilizando un factor de escala de flujos flexible, utilizando la opción `pblum_mode = "dataset_scaled"`, el cual nos permite analizar la morfología del modelo sintético sin considerar por ahora el efecto en la escala de la curva de parámetros relacionados con la luminosidad de cada componente, como las temperaturas absolutas o los radios de ambas estrellas. Estos parámetros son ajustados en los siguientes pasos de afinación del modelo.

9.3 OPTIMIZACIÓN DE PARÁMETROS

Como se puede ver en la **Figura 9.3** el modelo inicial de PHOEBE no se ajusta perfectamente bien a los datos observacionales, visto en los residuos de cada curva

de luz. En la siguiente etapa del proyecto se emplea un muestreo MCMC, el cual en teoría es capaz de determinar el mínimo global del espacio de parámetros, pero a un costo computacional que crece exponencialmente con la distancia de los parámetros del sistema actuales al mínimo global de la función de calidad.

El proceso de optimización de parámetros es distinto para cada sistema modelado; ciertas estrategias pueden funcionar para un sistema y al mismo tiempo no llegar a una solución adecuada para otro sistema. Para el caso de ATO J339.9469+45.1464 primero se ajustó el tiempo de superconjunción; los eclipses del modelo sintético están desfasados de los eclipses de las curvas observadas en la **Figura 9.3**. Esto resultó en un nuevo valor de 0.02589 d. Utilizando un optimizador de Nelder Mead Simplex (*NMS*, descrito en la **Sección 3.3.3.1**) se buscó optimizar los parámetros configurados en la estimación inicial del modelo. Con la finalidad de obtener un ajuste consistente y solo utilizar datos de alta calidad se decidió emplear las dos curvas de luz de ZTF para el resto del ajuste del modelo. Esto se debe al número de datos; son más numerosas que las observaciones hechas por Gaia, y son de mejor calidad que las realizadas desde el OAU. Al tener observaciones simultaneas en diferentes pasabandas también es posible determinar las temperaturas efectivas de las componentes estelares.

El primer optimizador *NMS* corrigió la razón de temperaturas efectivas (el cual sirve para modificar la luminosidad relativa de la estrella secundaria con respecto a la primaria, ajustando la profundidad del eclipse secundario con respecto al eclipse primario), el factor de relleno `fillout_factor` (que sirve como una parametrización de la razón de radios de las estrellas, ajustando el ancho de ambos eclipses), la inclinación orbital del sistema `incl@binary` (que dicta el aspecto de los eclipses observados con respecto al plano de observación, determinando la profundidad y la agudeza de los eclipses), y la razón de masa `q`. La razón de masa no es un parámetro que se pueda constreñir bien utilizando solo información fotométrica; esto se debe a las correlaciones presentes en el modelo con los demás parámetros del sistema. Después de 114 iteraciones el optimizador logró converger a una solución dada en la

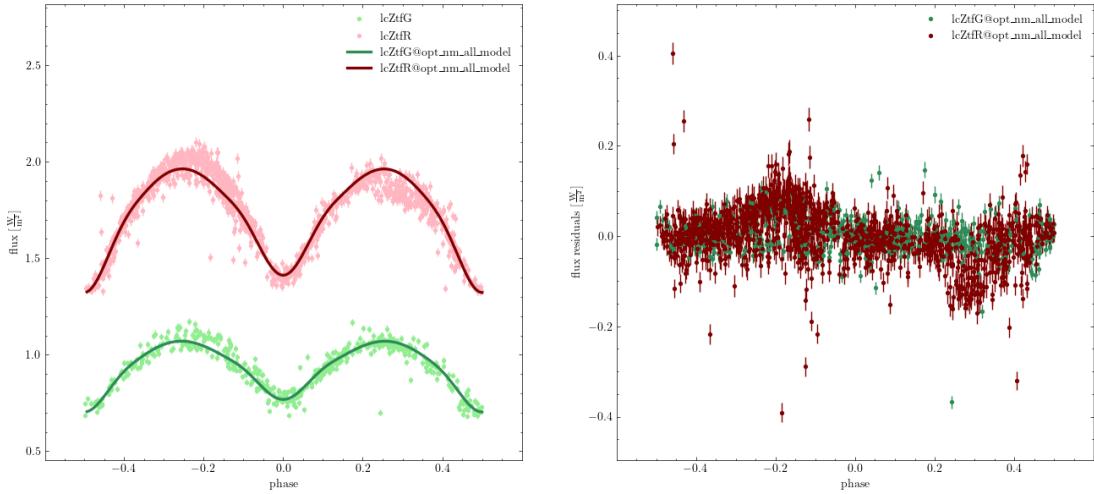


FIGURA 9.4: Modelo sintético generado utilizando los parámetros dados por el optimizador NMS, vistos en la **Tabla 9.2**, utilizando el tiempo de superconjunción corregido.

Tabla 9.2.

Parámetro	Valor optimizado
teffratio@binary	1.07991
incl@binary	70.19810 deg
fillout_factor@contact_envelope	0.09356
q@binary	2.13478

TABLA 9.2: Valores optimizados utilizando el algoritmo Nelder-Mead Simplex.

La curva sintética del modelo optimizado visto en la **Figura 9.4** muestra una asimetría en las jorobas de la curva de luz en fase. Estos máximos corresponden a las fases orbitales en las cuales la mayor cantidad de elementos superficiales de ambas componentes coinciden con nuestra línea de observación. Este fenómeno se le denomina el *efecto O'Connell*, descrito originalmente por O'Connell (1951) donde se distingue del efecto de periastro que es causado por efectos de marea en sistemas con órbitas excéntricas. El *efecto O'Connell* se debe a la diferencia de luminosidad entre diferentes hemisferios de una estrella; puede ser causado por un punto caliente

debido a la acreción de material en el caso de haber una alta tasa de transferencia de masa [Darwish et al. (2024)], o por manchas en la superficie estelar debido a actividad en la fotósfera. Para llegar a un mejor ajuste de la curva fotométrica se introdujo una mancha fría en la estrella secundaria. Después de hacer un ajuste manual de los parámetros de la mancha se utilizó un optimizador NMS para obtener los parámetros óptimos de la mancha estelar. Los parámetros optimizados se pueden ver en la **Tabla 9.3**, y la mancha estelar se puede ver representada en la **Figura 9.5**.

Parámetro	Valor optimizado
colat	89.77983 deg
long	81.09966 deg
radius	25.12086 deg
relteff	0.93007

TABLA 9.3: Parámetros de la mancha estelar optimizados utilizando el algoritmo Nelder-Mead Simplex, el cual logró converger después de 102 iteraciones. Todos los parámetros son relativos a la superficie estelar a la que le pertenece la mancha; la longitud `long` donde se define la longitud 0° viendo a la estrella primaria, la latitud `colat` se define como el ángulo polar empezando desde el polo norte de la estrella, el radio angular `radius`, y la temperatura efectiva relativa `relteff` con respecto a la temperatura superficial.

Una vez que se haya llegado a un nivel de ajuste adecuado con los optimizadores de tipo NMS se aplicó un último ajuste utilizando correcciones diferenciales, los cuales funcionan mejor cuando los parámetros se encuentren lo suficientemente cerca del mínimo global, para evitar caer y estar atrapados dentro de un mínimo local. El motivo para acercarnos lo más posible al mínimo global es para reducir el trabajo del muestreo MCMC; entre mayor sea la distancia que los caminadores tengan que recorrer, se requerirá más iteraciones para obtener un muestreo adecuado del espacio de parámetros. El resolvedor se crea con el código en la **Figura 9.6**,

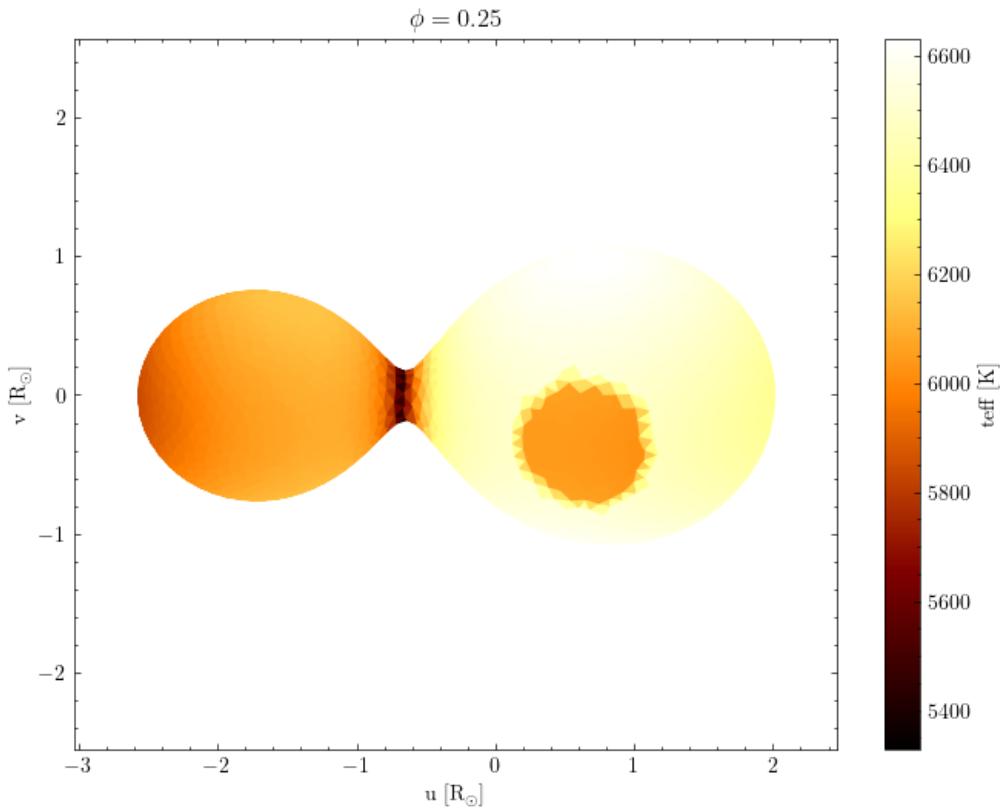


FIGURA 9.5: Malla representando la superficie estelar de ambas componentes en su fase orbital $\phi = 0.25$, en el máximo menor de la curva fotométrica. Aquí se puede apreciar la mancha estelar introducida a la componente secundaria. La temperatura efectiva de cada elemento superficial de la envoltura en común, donde la mancha se ve de un color más oscuro debido a su baja temperatura con respecto al resto de la superficie estelar.

en donde se define el tamaño de los pasos que intenta hacer el optimizador; estos deben de ser suficientemente pequeños para evitar saltos fuera del área de interés, pero suficientemente grandes para que haya un cambio en el ajuste del modelo. El tamaño de los pasos se determinó por medio de experimentación manual del efecto en un modelo sintético de PHOEBE.

Después de 17 iteración se obtuvieron los parámetros vistos en la **Tabla 9.4**, de los cuales se generaron las curvas sintéticas vistas en la **Figura 9.7**. El optimizador de correcciones diferenciales no se utilizó para ajustar los parámetros de la mancha

```

01 | b.add_solver('optimizer.differential_corrections',
02 |     solver='dc_relative', overwrite=True,
03 |     fit_parameters=['teffratio', 'incl@binary',
04 |         'fillout_factor', 'q'],
05 |     steps={
06 |         'q': 0.01,
07 |         'incl@binary': 1,
08 |         'fillout_factor': 0.01,
09 |         'teffratio': 0.01
10 |     })

```

FIGURA 9.6: Código que se utilizó para crear el optimizador de correcciones diferenciales para los parámetros que dictan la forma de la curva de luz en fase. El argumento `steps` del optimizador representa $\Delta p = \{\Delta p_1, \dots, \Delta p_k\}$ visto en la **Ecuación 3.18**.

Parámetro	Valor optimizado
teffratio@binary	1.06676
incl@binary	68.42157 deg
fillout_factor@contact_envelope	0.07892
q@binary	1.10457

TABLA 9.4: Valores optimizados utilizando un optimizador de correcciones diferenciales.

estelar; estos se mantuvieron fijos en sus valores determinados por el optimizador NMS para después explorar utilizando MCMC.

9.4 AJUSTE DE LUMINOSIDAD Y TEMPERATURA EFECTIVA

Utilizando las curvas calibradas de ZTF en ambas pasabandas se determinó la temperatura efectiva del sistema partiendo únicamente de las curvas fotométricas. Para esto se manipularon en total 3 parámetros del sistema: la temperatura efectiva

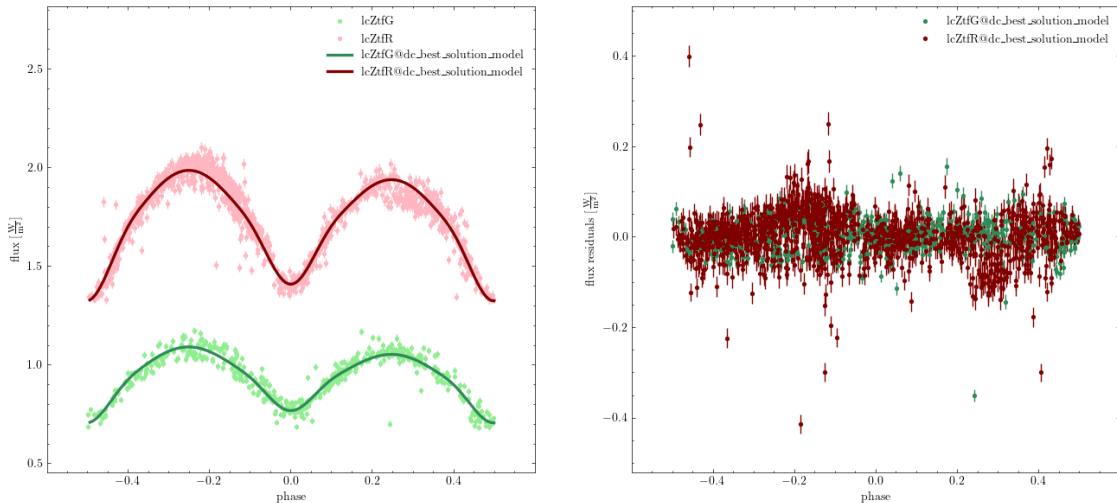


FIGURA 9.7: Modelo sintético junto a el residuo de flujo tomando en cuenta una mancha estelar fría en la componente secundaria (vista en la [Figura 9.5](#)) y utilizando los parámetros resultados del proceso de optimización vistos en la [Tabla 9.4](#).

de la componente primaria (`teff@primary`), la razón de temperaturas de las componentes T_2/T_1 (`teffratio`), y el factor de escala de la luminosidad de pasabanda (`pblum@primary@lcZtfG`) para la pasabanda ZTF:g. Se acopló la temperatura efectiva del sistema al color (dado por el flujo relativo entre las curvas de ZTF) utilizando el modo `pblum_mode` con el valor `component-coupled` para la curva de ZTF:g, y un valor de `dataset-coupled` para la curva de ZTF:r. En el modo `component-coupled` el usuario proporciona un valor para la luminosidad emergente de la componente primaria en el tiempo t_0 del sistema, a partir del cual PHOEBE determina un factor de escala tal que las intensidades superficiales de las estrellas sean igual a la luminosidad dada. El modo `dataset-coupled` aplica el mismo factor de escala a la curva de ZTF:r que el factor dado a la curva ZTF:g, manteniendo información del color del sistema [Conroy et al. (2020)].

Una vez que se haya establecido esta configuración del bundle se aplicó un optimizador de tipo NMS para ajustar los tres parámetros mencionados en el párrafo pasado. Como valor inicial se ajustó manualmente la temperatura efectiva de la primaria a 4600 K, el cual se determinó por medio de experimentación manual.

Después de 174 iteraciones el optimizador logró converger a la solución dada en la **Tabla 9.5**. Dado que estos parámetros principalmente afectan el factor de escala de las curvas de luz, los demás parámetros del sistema se mantuvieron fijos, manteniendo la forma de las curvas de luz.

Parámetro	Valor optimizado
teff@primary	4203.69115 K
teffratio@binary	1.05213
pblum@primary@lcZtfG	4.78643 W

TABLA 9.5: Valores optimizados para la temperatura efectiva de la estrella primaria, junto a la luminosidad de pasabanda que produce el factor de escala necesario para ajustar a la curva fotométrica. La temperatura efectiva de la secundaria está constreñida por la temperatura efectiva de la primaria y la razón de temperaturas; dado estos parámetros, la temperatura efectiva secundaria es igual a 4422.837561158592 K.

9.5 MUESTREO MCMC

Una vez que se haya obtenido el conjunto de parámetros que mejor ajustan el modelo sintético a los datos observacionales se busca obtener las incertidumbres para cada parámetro. La manera recomendada por el equipo de desarrollo de PHOEBE es por medio de un muestreo Bayesiano *Monte Carlo Markov Chain*. Utilizando un muestreo MCMC es posible determinar la morfología del espacio de parámetros de manera holística; esto permite identificar cualquier correlación que exista entre los parámetros del sistema. El proceso de muestreo empleado en este proyecto es por PHOEBE utilizando el paquete de Python `emcee`, descrito en la **Sección 3.3.4**. Antes de correr el proceso de muestreo se preparó el bundle de la siguiente manera.

9.5.1 ELIMINACIÓN DE OBSERVACIONES ERRÓNEAS

PHOEBE utiliza la probabilidad logarítmica (lnprobability) del modelo sintético como la *función de mérito* para el muestreo. Esta se define en la siguiente ecuación:

$$\text{lnprobability} = \text{lnpriors} + \text{lnlikelihood} \quad (9.1)$$

Donde $\text{lnpriors} = \sum_{\Pi} \ln P(p|\pi)$ es la probabilidad logarítmica de obtener los parámetros actuales del modelo p de una distribución a priori π sumando sobre todas las distribuciones priores Π [Conroy et al. (2020)]. El término lnlikelihood es la verosimilitud, la cual está definida en la **Ecuación 3.20**. Tras varios experimentos corriendo varias instancias del muestreo MCMC se descubrió que los caminadores son excepcionalmente sensibles a fluctuaciones en la función de mérito; las observaciones que se desvían de manera significativa de la región principal de la curva de luz en fase indican un ajuste inadecuado según la función de mérito. Debido a que las incertidumbres de estos puntos probablemente fueron registradas de manera errónea estos puntos se eliminaron de la curva observada. En el Notebook `remove-bad-observations.ipynb` se aplicó un criterio a la desviación estándar de los residuos del modelo optimizado; aquellos puntos cuya diferencia con el modelo sintético sea mayor de un múltiplo de la desviación estándar fue eliminado de los datos. Los resultados de esta optimización se pueden ver en la **Figura 9.8**. El modelo sintético utilizando solo estos datos se puede ver en la **Figura 9.9**, donde se puede apreciar a mayor detalle la forma oscilatoria de los residuos. Esto indica que los valores obtenidos no son los óptimos y aún hay más cambios que se podrían emplear para llegar a un mejor ajuste; sin embargo, este es un ajuste suficientemente bueno para este proyecto para continuar al muestreo del espacio de parámetros con MCMC.

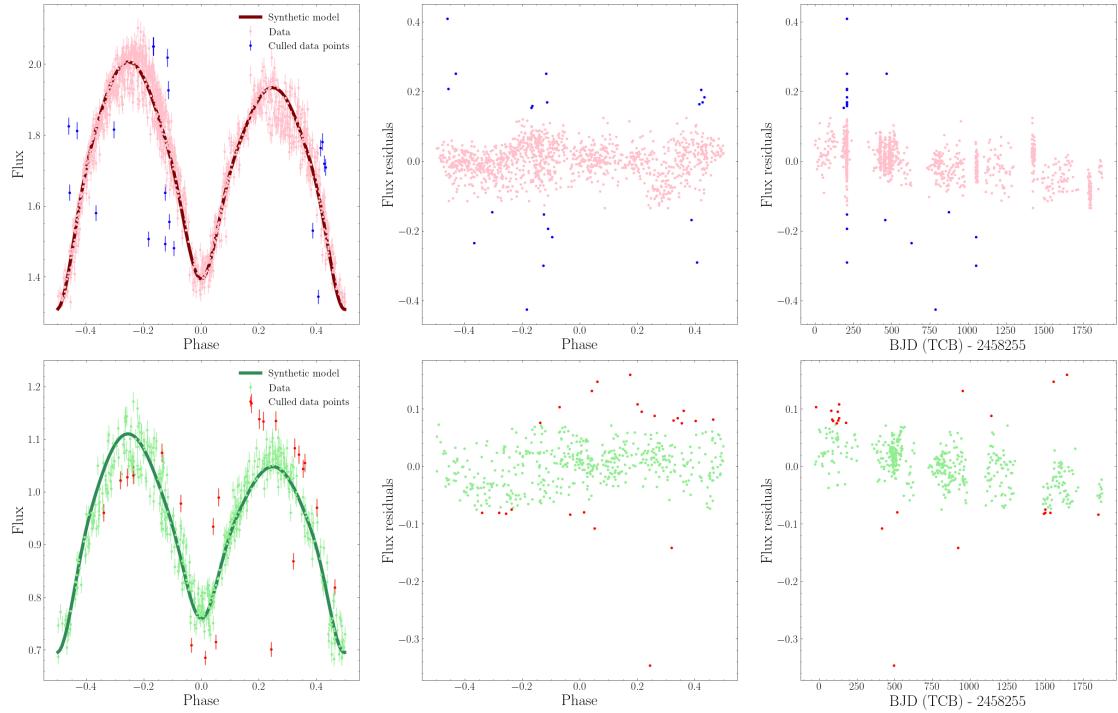


FIGURA 9.8: Resultados de aplicar el criterio de eliminación para las curvas de luz de ZTF, donde la figura superior corresponde a el pasabanda ZTF:r y la inferior a ZTF:g. Se optó por codificar este criterio en el código en vez de eliminar los datos manualmente para ser fácilmente reproducible. El factor de escala del criterio fue ajustado manualmente tal que los puntos más erróneos sean eliminados con éxito, y al mismo tiempo preservar la forma y dispersión principal que existen en los datos.

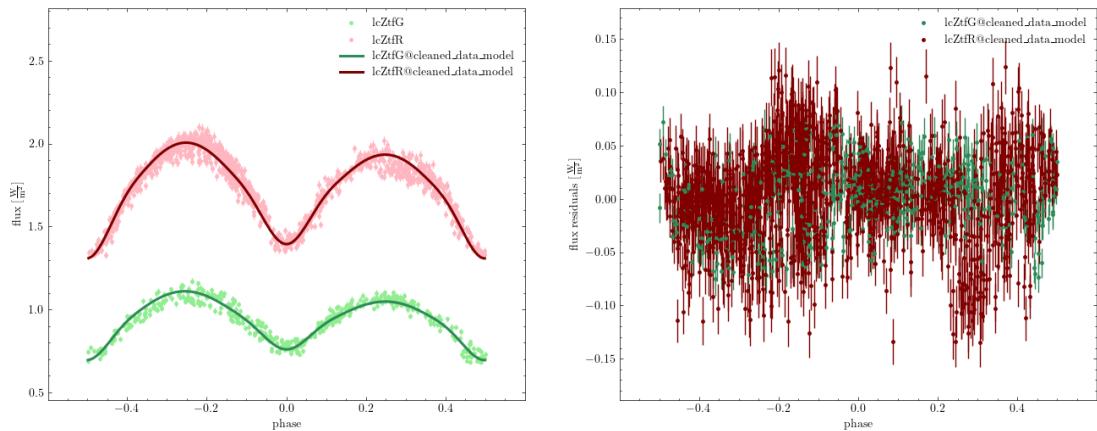


FIGURA 9.9: Modelo sintético en las pasabandas de ZTF calculado después de eliminar las observaciones más problemáticas de las curvas observadas.

9.5.2 DISTRIBUCIONES PRIORES

Para poder muestrear el espacio de parámetros, el algoritmo MCMC requiere de una región inicial a partir de cual inicializar las posiciones de cada caminador. Estas distribuciones iniciales también actúan como una guía; al principio del muestreo los caminadores en su mayoría no saldrán de las regiones de concentración de estas distribuciones. La forma de las priores dejará de importar tanto entre más iteraciones logre correr la cadena, de la cual se estimará la distribución posterior de densidad de cada parámetro.

PHOEBE ofrece unas herramientas para los tipos de distribuciones más comunes en este trabajo: la distribución uniforme y la distribución Gaussiana (normal). Para el muestreo de ATO J339.9469+45.1464 se utilizaron distribuciones uniformes para los parámetros ajustables del bundle—todos aquellos que han sido ajustados a lo largo de la optimización de parámetros. Una distribución uniforme no tiene un significado físico intrínseco más allá de comunicar una falta de información del problema. En nuestro caso, las priores sirven para marcar un límite práctico para cada parámetro, tanto para evitar que los caminadores se pierdan en espacios que produzcan un resultado no físico, cómo para constreñir el volumen de interés a lo más cercano de los parámetros óptimos derivados en el proceso de optimización.

Se crearon tres colecciones de distribuciones en el bundle de PHOEBE para delimitar los parámetros ajustables del modelo: uno para los parámetros de interés del sistema binario, otro para los parámetros que rigen la mancha estelar en la componente secundaria, y finalmente uno que restringe el factor de escala en el pasabanda ZTF:g. Las colecciones individuales de distribuciones priores se pueden ver en la **Figura 9.10**, la **Sección B.1** muestra todos los priores utilizados para el proceso de MCMC.

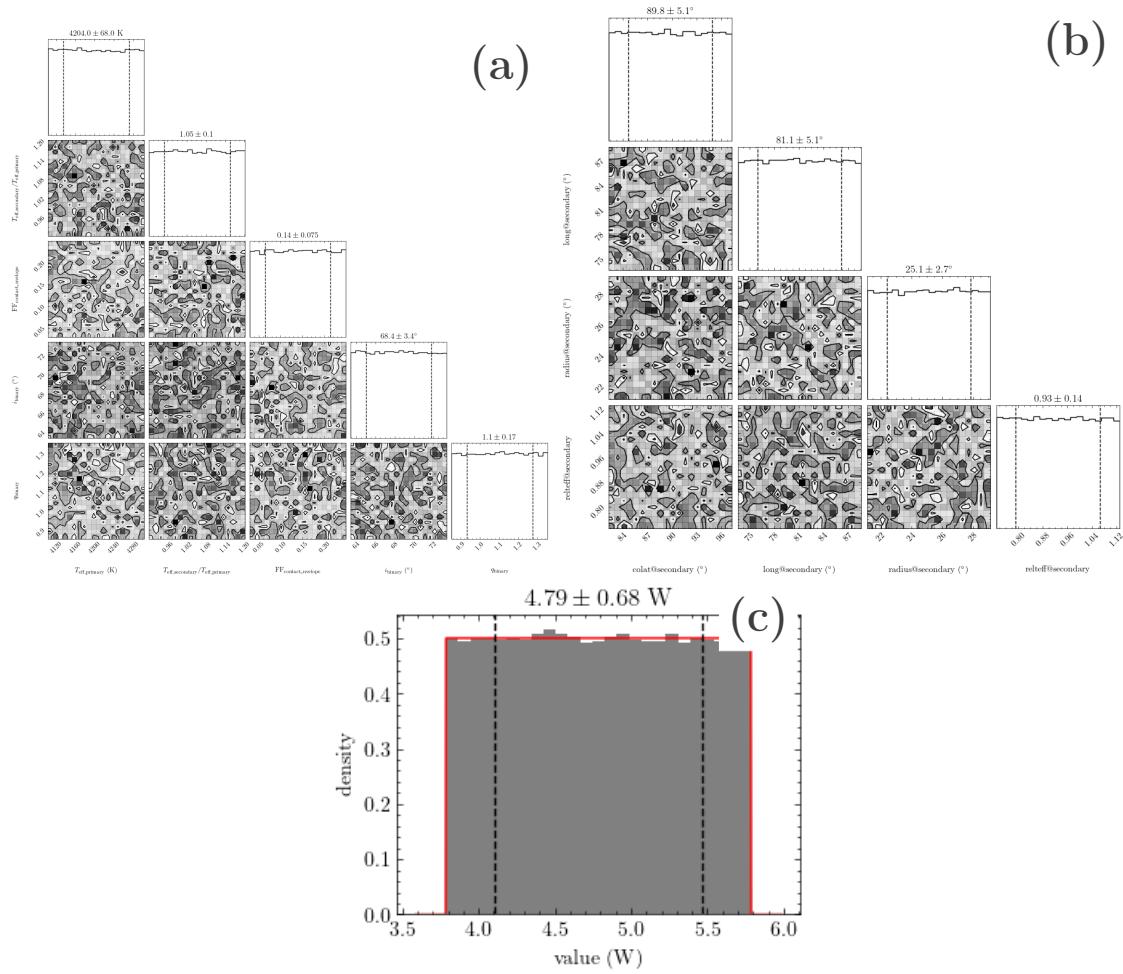


FIGURA 9.10: Distribuciones priores utilizadas como límites iniciales a cada caminador. Se separaron en 3 distintas colecciones por cuestiones de organización dentro del código: (a) los parámetros principales del sistema solar que afectan la forma de la curva fotométrica sintética en orden de izquierda a derecha y de arriba a abajo: la temperatura efectiva de la componente primaria (T_1), la razón de temperaturas (T_2/T_1), el factor de relleno (f), la inclinación orbital (i_{orb}), y la razón de masas (q). (b) los parámetros de la mancha estelar en la componente secundaria que se introdujo para tomar en cuenta el efecto O'Connell: su posición con respecto al origen del sistema de coordenadas en la secundaria (su longitud y latitud), el radio angular, y la razón de temperatura de la mancha a la temperatura efectiva de la superficie estelar. (c) la luminosidad en el pasabanda ZTF:g, la cual determina el factor de escala de las curvas de luz de ZTF.

9.5.3 INICIALIZANDO EL MUESTREO MCMC

Una vez que se hayan determinado las distribuciones priesas a utilizar para inicializar la cadena se puede empezar el muestreo. Se emplearon 160 caminadores en total; en general, es mejor tener la mayor cantidad de caminadores posible tal que sea mayor que la cantidad de parámetros que se van a explorar (10 parámetros vs. 160 caminadores). Esto también está restringido por el cómputo disponible. El algoritmo *stretch-move* descrito por Foreman-Mackey et al. (2013) muestra que un ensamble no es completamente paralelizable, por lo tanto no es necesario restringir la cantidad de caminadores estrictamente al número de procesadores (hilos) disponibles en una computadora.

El muestreo MCMC se corrió en un servidor propiedad del Dr. Carlos Esteban Chávez Pech de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica en la Universidad Autónoma de Nuevo León. Este servidor cuenta con 4 CPUs físicos AMD Opteron(tm) Processor 6376, el cual suma a 64 procesadores virtuales disponibles al sistema operativo (y por ende al código MCMC). La computadora está equipada con 32 GB de memoria RAM—a pesar que el mayor costo del muestreo es en el cómputo directo, la cantidad de memoria requerida aumenta rápidamente entre más caminadores se utilizan debido a la copia de datos necesaria por el proceso de paralelización por medio del módulo `multiprocessing` de Python. El muestreo final de este trabajo utilizó 13 GB de memoria, el cual fue asignado por el código al principio del proceso, manteniéndose estable por el resto del tiempo de cómputo.

Para poder estar revisando el progreso del muestreo se configuró el resovedor para guardar su cadena actual cada 5 iteraciones. Cada iteración en promedio tardó entre 520 a 560 segundos por terminar, lo cual resultaba en un reporte de progreso aproximadamente cada 45 minutos. Esto también actúa como un respaldo; si el proceso termina de manera errónea es posible reiniciar el muestreo partiendo de la última iteración registrada en el archivo de progreso.

9.5.4 MONITOREO DEL MUESTREO

9.5.4.1 TIEMPO DE AUTOCORRELACIÓN

Un proceso de MCMC se puede considerar finalizado una vez que los caminadores hayan convergido a una región particular en el espacio de parámetros. Debido al proceso estocástico que cada caminador emplea para determinar su camino por el espacio de parámetros, es esperado—y deseado—que en algún momento vuelva a navegar el mismo camino que recorrió en iteraciones pasadas. Cada nuevo conjunto de parámetros Θ_i en una cadena $\{\Theta_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Theta_i \rightarrow \dots \rightarrow \Theta_n\}$ tiene una mayor probabilidad de estar correlacionado con las posiciones previas Θ_{i-1} . Esto no es deseado, debido a que tener varias muestras correlacionadas nos impide obtener una estimación adecuada de la distribución posterior [Speagle (2020)]. Para determinar el grado de correlación entre cada paso en la cadena se utiliza el **tiempo de autocorrelación** (**autocorrelation time** en inglés), el cual se mide por medio de la autocovarianza que muestra la cadena utilizando un desfase t .

$$C_f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Theta_i - \bar{\Theta}) \cdot (\Theta_{i+t} - \bar{\Theta}) \right] \quad (9.2)$$

Utilizando la **Ecuación 9.2** se calcula la covarianza entre el vector de parámetros Θ_i para la iteración i y el valor de la cadena después de t iteraciones. El valor de $C_f(t)$ es mayor cuando $t = 0$; cada valor está directamente correlacionado con sí mismo al ser idénticos. De lo contrario, el valor teórico mínimo ocurre cuando los parámetros obtenidos en la iteración i e $i + t$ son completamente independientes. Se define una función de autocorrelación $A(t)$ para un desfase t :

$$A(t) \equiv \frac{C_f(t)}{C_f(0)} \quad (9.3)$$

Del cual se define el **tiempo de autocorrelación integrado** τ_f por Foreman-

Mackey et al. (2013):

$$\tau_f \equiv \sum_{t=-\infty}^{\infty} A(t) - 1 = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{C_f(t)}{C_f(0)} - 1 = 2 \sum_{t=1}^{\infty} A(t) \quad (9.4)$$

El término -1 se introduce para restar el caso de $A(0) = 1$. La integración se restringe solo para $t > 0$; se multiplica por 2 debido a la simetría $A(t) = A(-t)$ [Speagle (2020)].

Dentro de PHOEBE existen funciones para calcular τ_f para cada parámetro en la muestra; por lo tanto, la **Ecuación 9.2** sería evaluada para un parámetro a la vez, dándonos el número de iteraciones requeridas para obtener muestras independientes de cada parámetro. En el código `mcmc_utils.py` se define la función `printParameterAutocorrTimes`, la cual imprime el tiempo de autocorrelación de cada parámetro dada una cadena MCMC en la forma de una solución. Un ejemplo se puede ver en la **Figura 9.11**.

9.5.4.2 FRACCIÓN DE PASOS ACEPTADOS

Para explorar el espacio de parámetros cada caminador decide entre moverse a una nueva posición o quedarse en su posición actual. Dado que el paso que toma cada caminador es determinado de manera aleatoria varios pasos van a ser rechazados en una dada iteración en la cadena. La fracción de saltos aceptados a iteraciones se le conoce como la **fracción de pasos aceptados** (**acceptance fractions** en inglés). Conroy et al. (2020) recomiendan esta fracción esté en el rango de 0.2 a 0.5 para todos los caminadores en la cadena. Valores mayores a 0.5 este indican que los caminadores están explorando sin sentido, ya que no están siendo guiados por la función de costo. Al contrario, valores menores a 0.2 son indicadores de que la gran mayoría de los saltos propuestos han sido rechazados, lo cual resulta en un cadena con muy pocas muestras independientes de las cuales estimar la distribución posterior de densidad [Foreman-Mackey et al. (2013)]. La **Figura 9.12** se utilizó para diagnosticar si el

```

01 | Parameter autocorrelation times
02 |   Total iterations: 465 (131 burnin)
03 |   Avg. autocorr time: 47.22028105437427
04 |   Avg. IIDs: 7.073231936408811
05 |
06 | -----
07 |   teff@primary@star@component
08 |   Autocorrelation time: 31.434501067709036
09 |   IIDs ([iters - burnin]/autocorr_time): 10.625268054376729
10 |   teffratio@binary@orbit@component
11 |   Autocorrelation time: 21.366271511782326
12 |   IIDs ([iters - burnin]/autocorr_time): 15.632114373151971
13 |   fillout_factor@contact_envelope@envelope@component
14 |   Autocorrelation time: 54.501126163049854
15 |   IIDs ([iters - burnin]/autocorr_time): 6.128313734303019
16 |   incl@binary@orbit@component
17 |   Autocorrelation time: 29.773153661983663
18 |   IIDs ([iters - burnin]/autocorr_time): 11.218159950132302
19 |   q@binary@orbit@component
20 |   Autocorrelation time: 65.7180243303593
21 |   IIDs ([iters - burnin]/autocorr_time): 5.082319552410896
22 |   pblum@primary@lcZtfG@lc@dataset
23 |   Autocorrelation time: 65.32641769723654
24 |   IIDs ([iters - burnin]/autocorr_time): 5.1127860944092305
25 |   colat@secondary_spot@secondary@spot@feature
26 |   Autocorrelation time: 64.5003963|1717
27 |   IIDs ([iters - burnin]/autocorr_time): 5.178262756629427
28 |   long@secondary_spot@secondary@spot@feature
29 |   Autocorrelation time: 38.025785518192954
30 |   IIDs ([iters - burnin]/autocorr_time): 8.783513488240814
31 |   radius@secondary_spot@secondary@spot@feature
32 |   Autocorrelation time: 43.34151061708348
33 |   IIDs ([iters - burnin]/autocorr_time): 7.706238090103639
34 |   relteff@secondary_spot@secondary@spot@feature
35 |   Autocorrelation time: 58.21562366632833
35 |   IIDs ([iters - burnin]/autocorr_time): 5.737291451421557

```

FIGURA 9.11: Datos de salida de la función `printParameterAutocorrTimes` después de 465 iteraciones, de las cuales 131 son utilizadas de “burn-in.” El número de muestras independientes (IIDs) es calculado restando el número de iteraciones del periodo de quemado.

muestreo estaba explorando el espacio de parámetros de manera adecuada o si estaba siendo restringido por la función de costo.

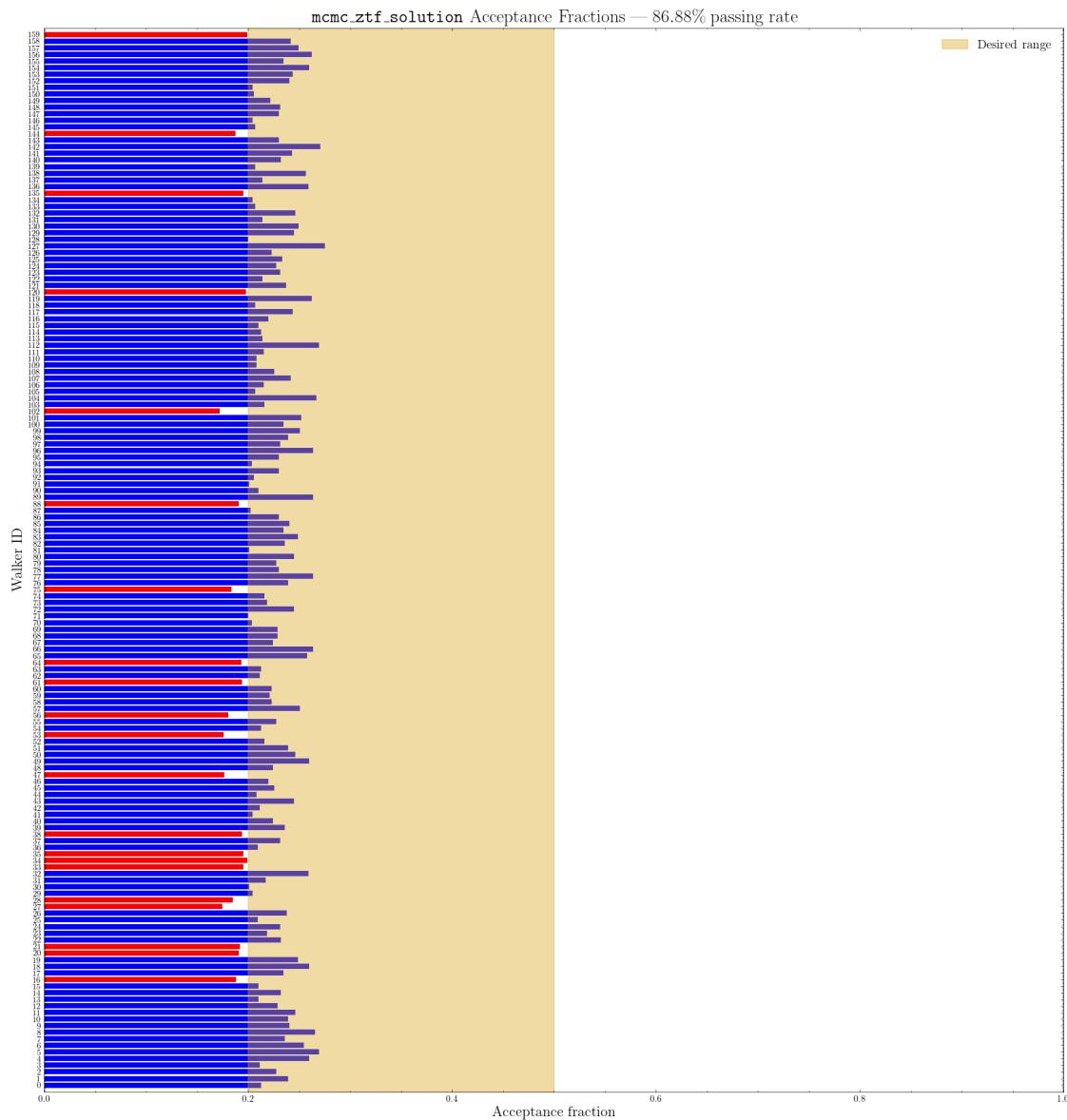


FIGURA 9.12: Fracción de pasos aceptados (eje x) para cada caminador (eje y) en el muestreo después de 865 iteraciones. El rango ideal de 0.2 a 0.5 está marcado por la región amarilla. Aquellos caminadores que no estén dentro de este rango están resaltados por barras rojas.

9.5.4.3 ERRORES EN EL ESPACIO DE PARÁMETROS

Es inevitable que mientras los caminadores exploren el espacio de parámetros encuentren una combinación de valores que resulten en un modelo inválido, ya sea por limitaciones técnicas de PHOEBE o porque esa combinación en particular resulta en un sistema físicamente imposible. Estos resultan en errores, y por ende PHOEBE los trata como pasos fallidos. El resolvedor de tipo MCMC de PHOEBE es capaz de mantener un registro de todas las muestras fallidas y mostrarlas en una gráfica, para poder identificar fácilmente cualquier región de interés. En la **Figura 9.13** se puede ver todas las muestras fallidas en la cadena de este modelo.

La gran mayoría de fallas en las muestras son consecuencia de valores inválidos dado la atmósfera estelar de Castelli & Kurucz (2004), representados por las marcas azules, específicamente con respecto al oscurecimiento al limbo. No se modificó ningún parámetro para mitigar estos errores, principalmente debido a que no muestran una frontera claramente definida. Las marcas de color azul oscuras indican una falta de triángulos en la malla de la superficie estelar; esto se mitigó aumentando el número de triángulos del modelo por medio del parámetro `ntriangles` para permitir que los caminadores exploraran regiones del espacio de parámetros que requieran una mayor resolución espacial, como la frontera del factor de relleno $f = 0$. No se implementó alguna solución para el resto de los errores debido a su baja cantidad, lo cual indica que no son un problema significativo para seguir explorando el espacio de parámetros de manera adecuada.

9.5.4.4 CAMINO TRAZADO POR LOS CAMINADORES

PHOEBE ofrece la habilidad de ver el camino trazado por cada caminador individual del muestreo. Una inspección visual nunca debería ser la única fuente para una conclusión del modelo; sin embargo, es especialmente útil para identificar problemas obvios con el muestreo, los cuales pueden ser analizados sistemáticamente

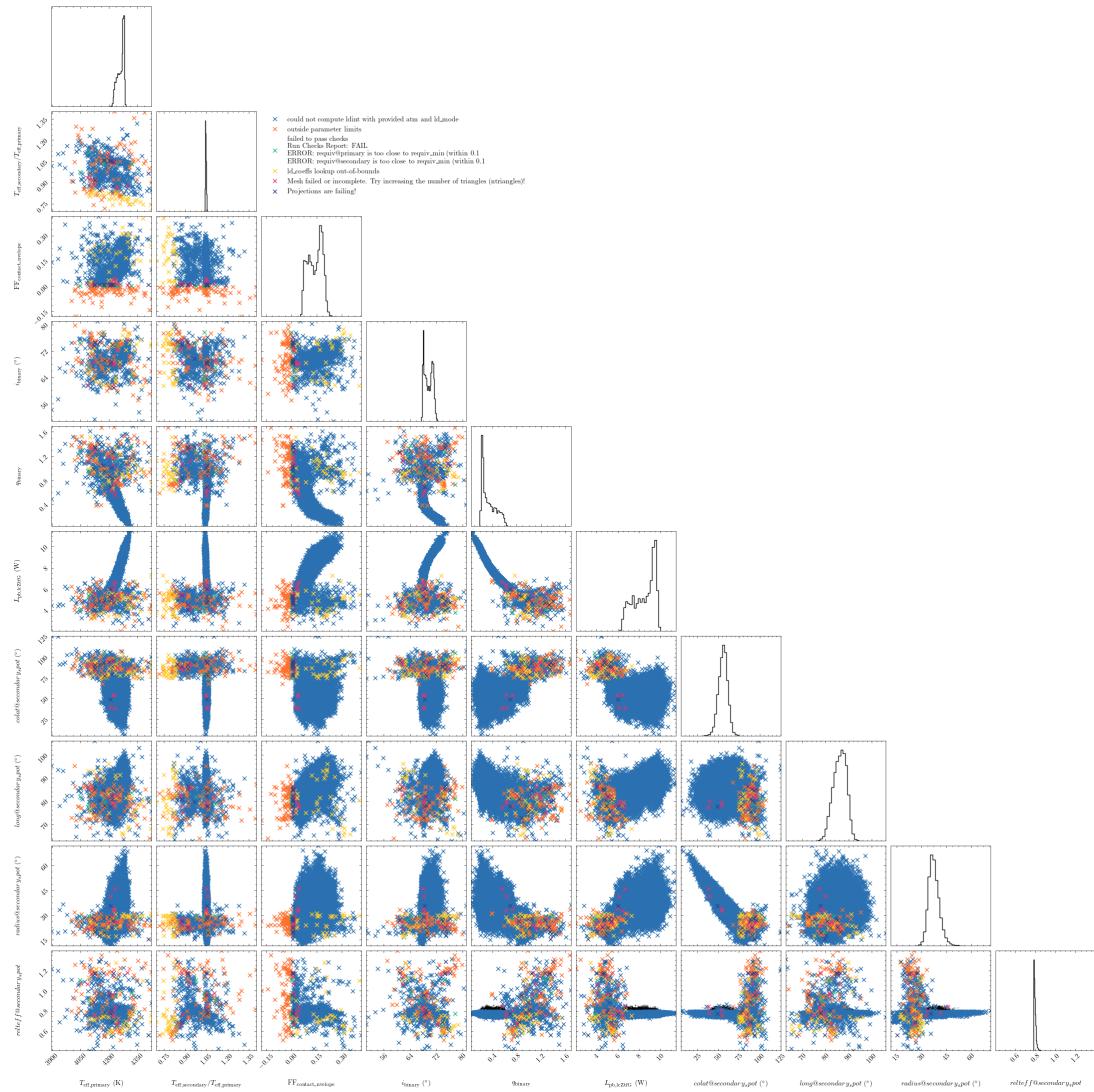


FIGURA 9.13: Muestras obtenidas del proceso MCMC que resultaron en una falla del modelo hacia adelante, después de 2870 iteraciones.

por medio de código u otros métodos reproducibles. Las gráficas fueron producidas utilizando el argumento `style` dado a la función `plot` del bundle de PHOEBE. Para identificar si el muestreo ha logrado encontrar una solución óptima se acudió al trazo de los caminadores con respecto a la probabilidad logarítmica (`lnprobability`) del modelo resultante, el cual se puede ver en la **Figura 9.14**.

También es posible ver tendencias en el vector de parámetros de cada caminador; a simple vista es posible identificar tendencias en general si los caminadores

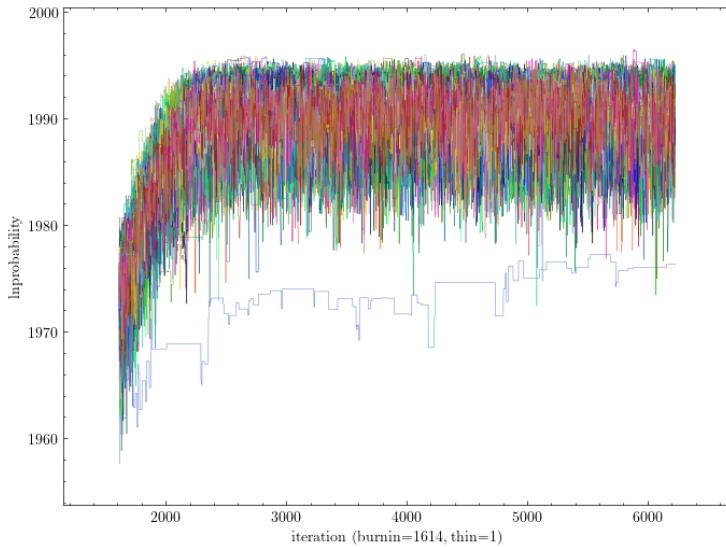


FIGURA 9.14: La probabilidad logarítmica de cada uno de los 160 caminadores que forma la cadena de Markov después de 6233 iteraciones. Con la excepción de un individual, todos los caminadores llegaron a converger a un espacio de parámetros que son igual de válidos dados las curvas observacionales de ZTF.

están migrando a una región en particular de cada parámetro, o si algún caminador se ha quedado inmóvil, el cual también se podría reflejar en la fracción de pasos aceptados. Esto se puede ver en la **Figura 9.15**.

Se ha especificado un tiempo de quemado de 1614 iteraciones para ambas gráficas, eliminando todas las iteraciones previas. Para ver la ruta completa que han tomado los caminadores con respecto a los parámetros del modelo se hace referencia al apéndice en la **Sección B.2** (las figuras de tamaño completo se pueden ver en el Notebook `updated-data-mcmc-sampling.ipynb`). En estas gráficas se puede apreciar el número de iteraciones que fueron requeridas para llegar al espacio de parámetros más óptimo, lo cual resulta en un muestreo ineficiente. Esto es una consecuencia de haber escogido una distribución prior uniforme no informativa para el muestreo. El caso ideal hubiera sido que esta solución se haya encontrado en el proceso de optimización; la migración de los caminadores requirió una gran cantidad de iteraciones, y por lo tanto un enorme tiempo de cómputo que efectivamente se tiene que utilizar como periodo de quemado.

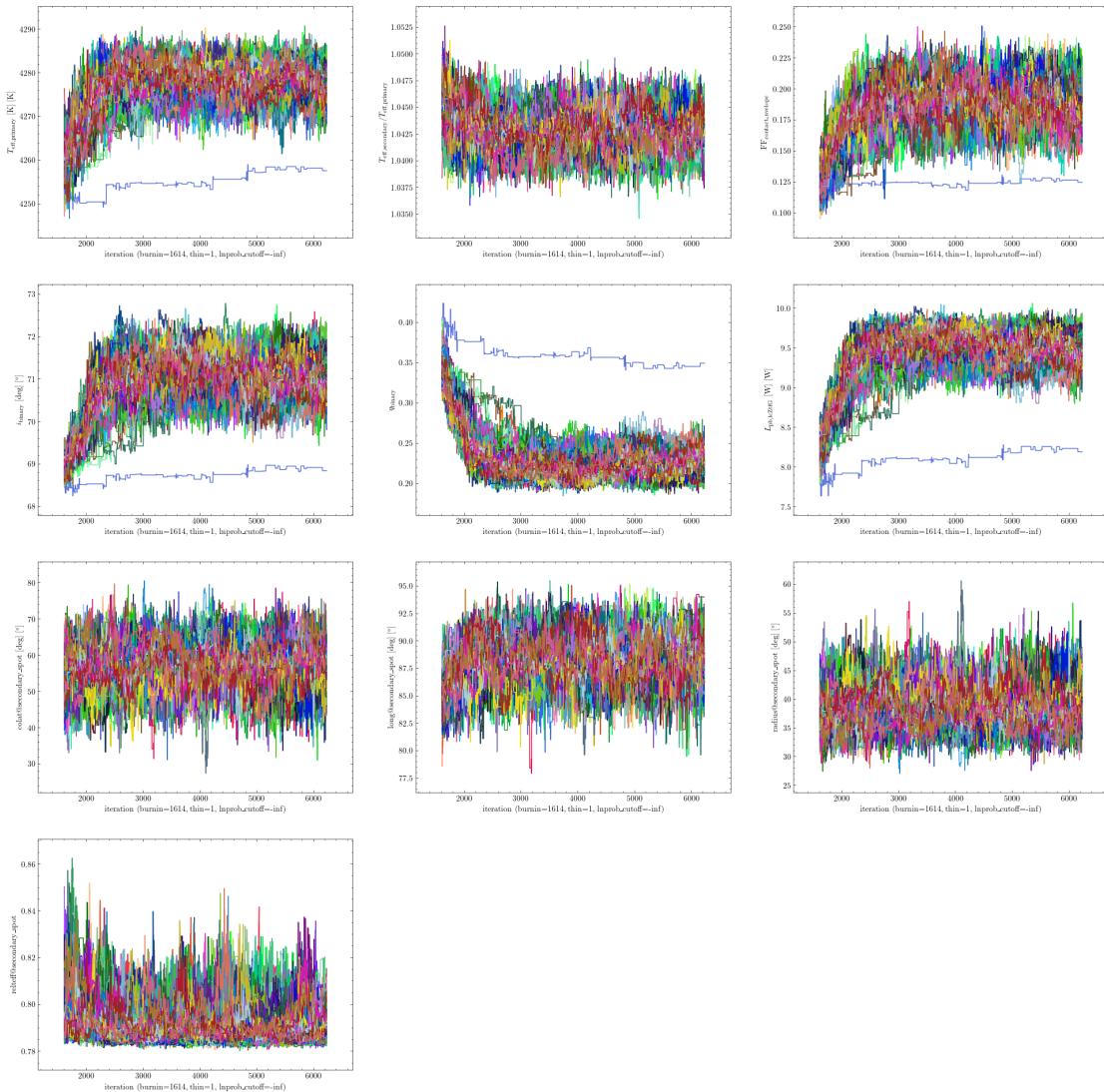


FIGURA 9.15: El valor de cada parámetro muestreado para cada caminador como función de iteraciones corridas del muestreo después de 6233 iteraciones. Se puede ver un punto alrededor de las 2200 iteraciones a partir de la cual los caminadores se establecen en una región bien definida para cada parámetro, lo cual es un indicador que el muestreo ha convergido.

9.6 RESULTADOS

Es prácticamente imposible determinar con certeza si una cadena de Markov ha convergido con éxito a un volumen del espacio de parámetros para un modelo de

un sistema binario estelar. Esto se debe al alto número de dimensiones involucradas en el modelo; esto corresponde a una disminución significativa en la fracción de pasos aceptados, y por ende un aumento en el tiempo de autocorrelación [Speagle (2020)]. Por lo tanto, por cuestiones de tiempo se detuvo el muestreo de MCMC llegando a las 6413 iteraciones, de las cuales 2200 se utilizaron de quemado antes de converger. Un análisis visual de los trazos de los caminadores demuestra que todos los caminadores llegaron a un espacio de parámetros bien definido, del cual no salen en el resto del muestreo. El tiempo de autocorrelación promedio de todos los parámetros fue de 647.14, el cual corresponde a un promedio de 7.36 muestras independientes e idénticamente distribuidas (IDs); la inclinación orbital fue el parámetro peor muestreado, con un tiempo de autocorrelación de 826.86 iteraciones, llegando a 5.76 IDs. En promedio la cadena mostró una fracción de pasos aceptados de 0.04. Esto es significativamente menos del rango recomendado por Foreman-Mackey et al. (2013) de 0.2 a 0.5, el cual también es un síntoma de un modelo de alta dimensionalidad. El código responsable por correr el muestreo se tuvo que reiniciar varias veces en el transcurso del proyecto, lo cual al experimentar con el código tuvo un impacto subjetivo en la fracción de pasos aceptados reportado por PHOEBE; antes del primer reinicio el muestreo tenía una fracción de pasos aceptados promedio de 0.196, con el 43.12 % de los caminadores ostentando una fracción de pasos aceptados entre 0.2 y 0.5.

9.6.1 FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD A POSTERIORI

Las funciones de densidad de probabilidad (PDFs por sus siglas en inglés) se pueden revisar tanto a lo largo del proceso utilizando los archivos de progreso, como hasta el final que haya terminado de correr el número de iteraciones configuradas en el resolvedor. Utilizando la distribución de las muestras en la cadena se puede determinar las incertidumbres de cada parámetro y al mismo tiempo inspeccionar de

manera visual las correlaciones que existen entre diferentes parámetros. La **Figura 9.16** muestra estas distribuciones.

La luminosidad se incluyó como un parámetro de molestia, el cual afecta el modelo sintético resultante, pero no es un parámetro que nos interese medir. Para los parámetros de interés se marginaliza (integra) sobre todos los parámetros de molestia, incluyéndolos como parámetros que muestrear. La figura completa incluyendo la luminosidad de pasabanda de ZTF:g se puede ver en el apéndice en la **Figura B.4**. Todas las distribuciones posteriores en la cadena muestran una forma asimétrica, algunas más pronunciadas que otras. PHOEBE reporta el valor promedio obtenido en la muestra y 2 intervalos de confianza, los cuales se reportan en la **Tabla 9.6**.

9.6.2 INCERTIDUMBRES EN EL MODELO HACIA ADELANTE

Utilizando las distribuciones posteriores es posible visualizar la dispersión en el modelo sintético. Esto se hace con el parámetro `sample_from` del cómputo en uso, en el cual se puede especificar las distribuciones de las cuales obtener muestras individuales, calculando un modelo hacia adelante de estos valores obtenidos. En la **Figura 9.17** se puede apreciar la dispersión (en las regions oscurecidas) del modelo promedio, el cual surge como resultado de las incertidumbres de cada parámetro. Este cálculo requiere de una gran cantidad de memoria para poder generar un alto número de muestras, por lo cual se disminuyó el número de muestras de 50 a 25; aún con relativamente pocas muestras se puede apreciar como el modelo promedio se ajusta a los datos observacionales. Al calcular la probabilidad logarítmica del modelo vemos que el muestreo llegó a un espacio de parámetros que mejor explican las curvas observadas, obteniendo una puntuación de 1844.72 contra 1688.85 del último modelo optimizado de la **Sección 9.3**.

Parámetro	Valor
T_1	$4278.3_{-3.5}^{+3.1}$ K
T_2/T_1	$1.0428_{-0.0015}^{+0.0015}$
f	$0.187_{-0.015}^{+0.015}$
i_{orb}	$71.06_{-0.43}^{+0.4}$ \circ
q	$0.223_{-0.011}^{+0.014}$
$L_{\text{pb,ZTF:g}}$	$9.52_{-0.18}^{+0.14}$ W
Lat_{spot}	$58.2_{-5.3}^{+4.8}$ \circ
Lon_{spot}	$88.3_{-1.8}^{+1.8}$ \circ
$\text{Radius}_{\text{spot}}$	$37.9_{-2.7}^{+3.4}$ \circ
T_{spot}/T_2	$0.7893_{-0.0038}^{+0.0073}$

TABLA 9.6: Valores obtenidos de la cadena de Markov junto a sus incertidumbres asimétricas. Estos valores fueron calculados después de 6233 iteraciones.

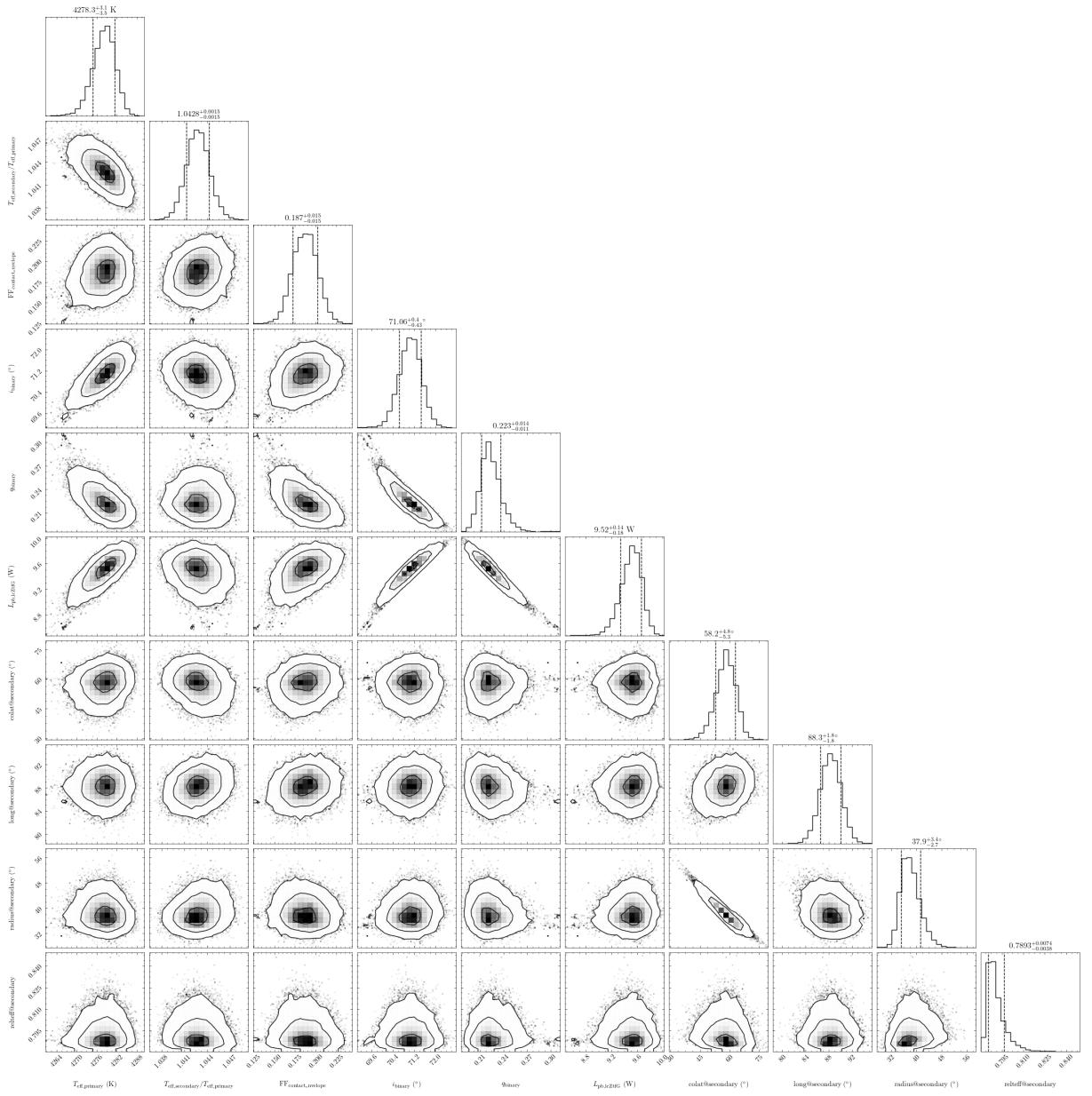


FIGURA 9.16: Gráfica mostrando las muestras en la cadena después de 6413 iteraciones (2200 iteraciones de tiempo de quemado), marginalizando sobre la luminosidad de el pasabanda ZTF:g en la muestra. Se aplicó un corte de calidad, aceptando solo las muestras cuya probabilidad logarítmica sea mayor a 1980 (utilizando el argumento `lnprob_cutoff = 1980`). La mayoría de los parámetros muestran una forma Gaussiana, de las cuales se obtiene los valores promedio junto a sus incertidumbres. La temperatura relativa de la mancha estelar `relteff` muestra una forma Gaussiana sesgada.

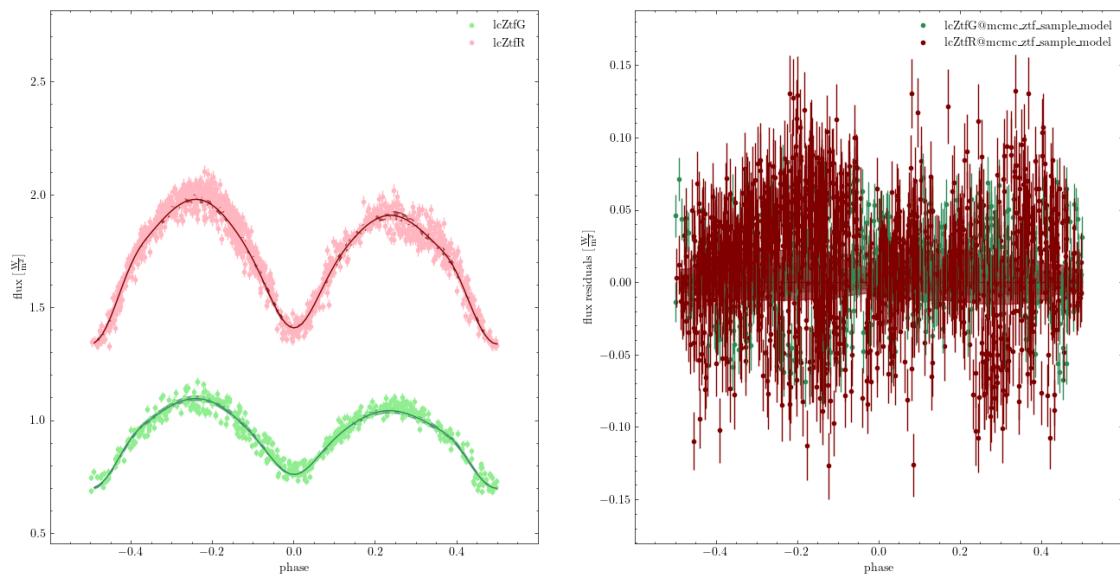


FIGURA 9.17: Modelo sintético generado por PHOEBE utilizando muestras de la estimación de la distribución posterior obtenida mediante el proceso MCMC. Este modelo fue calculado con 25 muestras en total de las distribuciones posteriores.

Parte IV

Discusión y Conclusiones

CAPÍTULO 10

CONSIDERACIONES DEL MODELO DE PHOEBE

El resultado final obtenido en el **Capítulo 9** está sujeto a varias consideraciones. En general, es imposible constreñir de manera adecuada varios parámetros del modelo de un sistema binario estelar utilizando solo curvas fotométricas resueltas en el tiempo, y aún menos con solo magnitudes diferenciales. Para tener un modelo más completo se requiere datos complementarios, como curvas de velocidades radiales para poder obtener el semi-eje mayor en unidades reales y por ende las masas de ambas componentes—cosa que es posible dentro de PHOEBE utilizando estimadores y optimizadores adicionales a los empleados en este proyecto de investigación. En este capítulo se plasman detalles particulares con el modelo sintético derivado, incluyendo degeneraciones en el modelo y un comportamiento multi-modal que considerar.

10.1 DATOS ESPECTROSCÓPICOS

En el transcurso de este proyecto se buscó entre otras fuentes adicionales para intentar encontrar observaciones espectroscópicas de ATO J339.9469+45.1464 que pudieran constreñir otros parámetros del sistema, como la temperatura efectiva del

sistema (la cual se dejaría como parámetro fijo en vez de utilizar la diferencia de color en el flujo de ZTF) o la masa de la estrella primaria, la cual no se puede constreñir utilizando solo curvas de luz fotométricas. A pesar de las capacidades avanzadas de PHOEBE, actualmente no tiene manera de generar un espectro sintético con cual comparar a un espectro observado. En total se obtuvieron 3 espectros independientes de ATO J339.9469+45.1464: 2 de ellos fueron proporcionados por la Dra. Paula Szkody de la Universidad de Washington, y 1 espectro obtenido del catálogo Gaia DR3.

10.1.1 APACHE POINT OBSERVATORY

Desde el *Observatorio Apache Point (Apache Point Observatory)* la Dra. Szkody logró observar a ATO J339.9469+45.1464 con el telescopio **ARC 3.5m** con el espectrógrafo **KOSMOS**, un espectrógrafo de baja resolución ($R \sim 2200$) con una rendija de 0.86 pulgadas en la posición *Alta*, la cual resulta en un rango de longitudes de onda de $4150 - 7050 \text{ \AA}$. La información técnica de KOSMOS se encuentra en la documentación en línea de KOSMOS¹. Ambos espectros se pueden ver en la **Figura 10.1**.

Los espectros de KOSMOS fueron tomados la misma noche del 4 de diciembre del 2023 en exposiciones de 10 minutos consecutivas. Sin embargo, ambos espectros muestran una baja razón de señal a ruido (SNR), probablemente por el bajo tiempo de exposición. Para aumentar el SNR se generó un espectro promedio entre los dos espectros individuales. Utilizando la función `snr_derived` del paquete `specutils`² es posible estimar el SNR basado en solo el espectro medido del archivo. La función `snr_derived` implementa un algoritmo general para esta tarea, donde se considera que la señal principal cae en un continuo; el ruido se mide por la dispersión alrededor del medio del espectro. El espectro promedio se puede ver en la **Figura 10.2**, para el

¹<https://www.apo.nmsu.edu/arc35m/Instruments/KOSMOS/userguide.html>

²<https://specutils.readthedocs.io/en/stable/index.html>

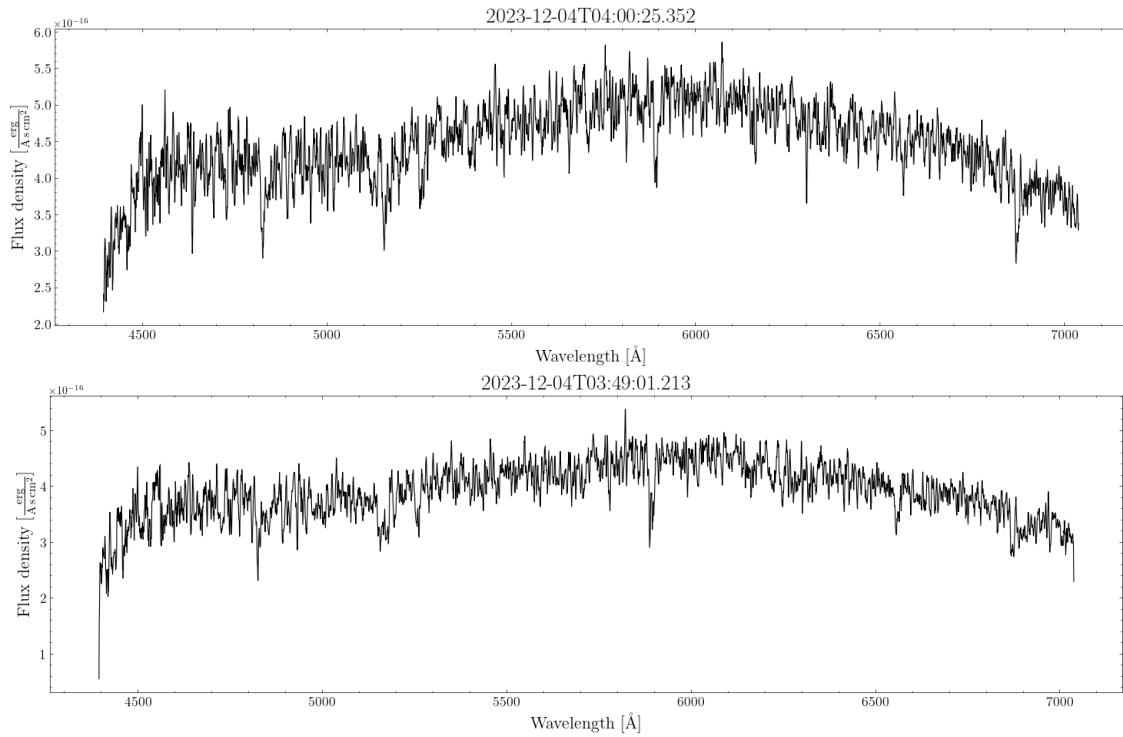


FIGURA 10.1: Espectros tomados de ATO J339.9469+45.1464 por la Dra. Paula Szkody desde APO.

cual el SNR calculado es de 50.94, a comparación de 39.54 y 38.98 respectivamente de los espectros individuales en la **Figura 10.1**.

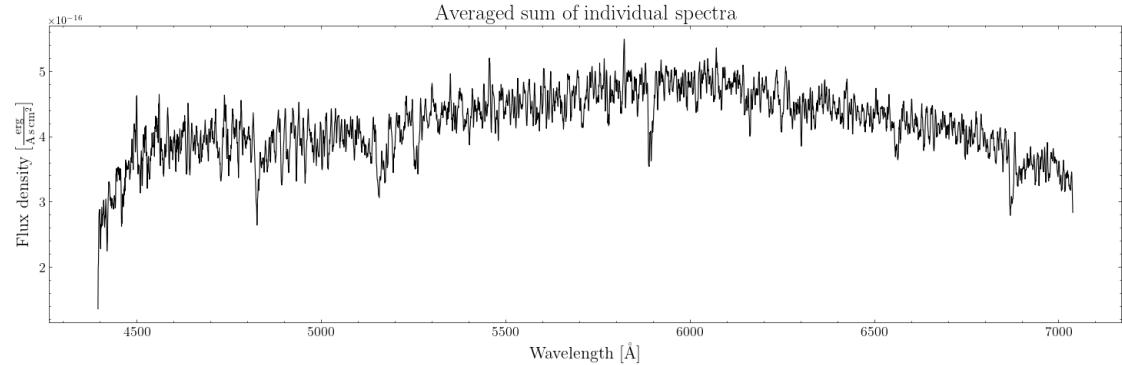


FIGURA 10.2: Espectro promedio de ATO J339.9469+45.1464, utilizando el flujo promedio en cada longitud de onda de ambos espectros en la **Figura 10.1**.

10.1.2 GAIA DR3

Junto a las curvas de luz fotométricas descritas en la **Sección 4.1** Gaia DR3 ofrece espectros de aproximadamente 220 millones de las fuentes observadas. Gaia cuenta con un arreglo de espectro-fotómetros BP y RP (los cuales corresponden a las pasabandas *Gaia:BP* y *Gaia:RP* respectivamente) que cubren los rangos [330 – 680] nm para BP y [640 – 1050] nm para RP [Carrasco et al. (2021)]. Cada transito de un objeto por el campo de visión de Gaia contribuye al espectro promedio de baja resolución; la resolución espectral varía con la longitud de onda observada, yendo de 100 a 30 para el rango espectral de BP y de 100 a 70 para RP (visto en la figura 3 de Carrasco et al. (2021)). Es posible determinar si una fuente en Gaia DR3 cuenta con un espectro por medio del campo `has_xp_continuous`. Integrando el espectro en cada rango de longitud de onda se obtiene el flujo total en *Gaia:BP* y *Gaia:RP*.

Para obtener datos limpios de calidad adecuada se someten a un proceso de calibración extenso, incluyendo la distorsión por la geometría del CCD y la caracterización del espacio local del objeto—una revisión extensa del procesamiento y validación es dada por De Angeli et al. (2023). El espectro observado $h_{s,k}(u_i)$ dado un sistema de pseudo-longitudes de onda u en el catálogo Gaia DR3 se da como una combinación lineal de una función de base φ para una fuente s :

$$h_{s,k}(u_i) = \sum_{n=0}^{N-1} b_{s,n} \sum_{j=-J}^J A_k(u_i, u_{i+j}) \varphi_n(u_i + j) \quad (10.1)$$

Donde k denota una unidad de calibración (un intervalo de parámetros continuos cuya variación es baja [Carrasco et al. (2021)]), b_s son los coeficientes que contienen la información necesaria para construir el espectro BP/RP de la fuente, y A_k es el modelo del instrumento. La función de base elegida por su ortogonalidad, su convergencia a 0 dado un valor de entrada suficientemente alto, y su centro en $\theta = 0$ se utilizaron funciones Hermite como las bases del espectro continuo:

Donde se define la transformación lineal de las pseudo-longitudes de onda $\theta =$

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(\theta) &= \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} \\
 \varphi_1(\theta) &= \sqrt{2} \pi^{-\frac{1}{4}} \theta e^{-\frac{\theta^2}{2}} \\
 \varphi_n(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{n}} \theta \varphi_{n-1}(\theta) - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \varphi_{n-2}(\theta)
 \end{aligned} \tag{10.2}$$

$\Theta \cdot u + \Delta\theta$ con el factor de escala Θ y un desplazamiento de $\Delta\theta$ basado en el espectro de la fuente s . El archivo disponible a través del servicio DataLink de Gaia DR3 contiene los coeficientes de las funciones de base para los espectros BP/RP de ATO J339.9469+45.1464, incluyendo los coeficientes de los errores y la matriz de correlación entre los coeficientes de las funciones de base. Para facilitar la lectura y el análisis de este espectro el equipo de Gaia ofrece la herramienta GaiaXPy³ que acepta como entrada el archivo del espectro continuo. Utilizando la función `calibrate` de GaiaXPy este se puede muestrear dado una malla de longitudes de onda reales en unidades [nm], dando como resultado el espectro visto en la **Figura 10.3**.

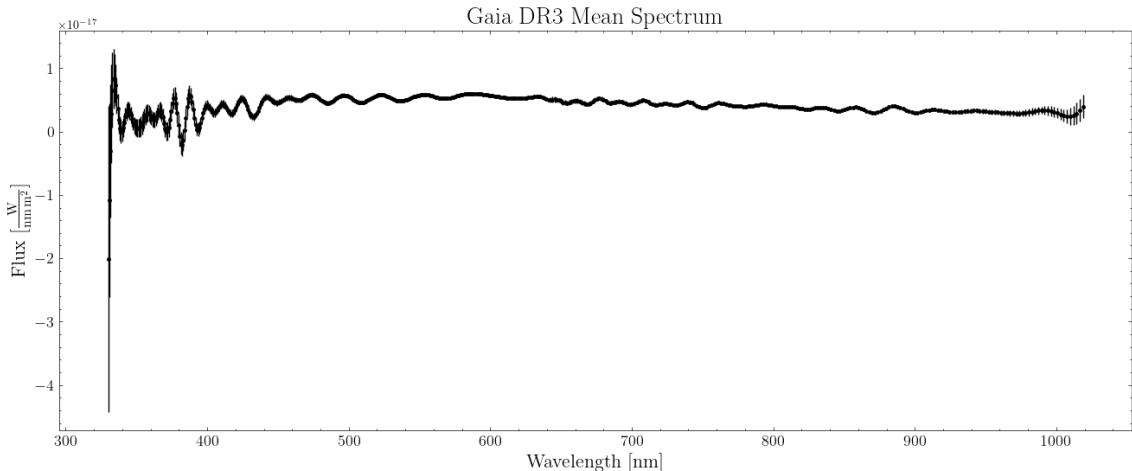


FIGURA 10.3: Espectro continuo de ATO J339.9469+45.1464 obtenido de Gaia DR3 muestreado utilizando una malla de longitudes de onda equidistantes en un espacio logarítmico para mejorar la resolución del muestreo en el rango más azul.

³<https://gaiaxpy.readthedocs.io/en/latest/index.html>

10.1.3 ANÁLISIS: PYHAMMER

Para llevar a cabo un análisis rápido de ambos espectros obtenidos se utilizó la herramienta de clasificación espectral **PyHammer**⁴. PyHammer—descrito por Kesseli et al. (2017) y después por Roulston et al. (2020) para la versión 2—fue desarrollado para facilitar la clasificación automática y manual de espectros estelares de sistemas binarios por medio de plantillas espetrales para varios tipos de estrellas, desde tipo O hasta tipo L generados partiendo de datos del catálogo SDSS BOSS (SDSS Baryon Oscillation Spectroscopic Survey). Aparte del tipo espectral, PyHammer cuenta con plantillas para determinar la metalicidad y gravedad superficial (la cual se utiliza para distinguir entre estrellas enanas y gigantes) basado en líneas espetrales de referencia.

Utilizamos ambos espectros especificados en esta sección (el espectro promedio de APO y el espectro muestreado de Gaia DR3 en una malla de longitudes de onda uniforme en una escala no logarítmica) para corroborar los parámetros obtenidos del modelo de PHOEBE. Los resultados de ambos análisis de PyHammer se pueden ver en la **Figura 10.4**. Ambos resultados indican que el sistema está compuesto de estrellas tipo K, con una metalicidad de -0.5dex .

Los resultados del análisis de PyHammer coinciden con la temperatura efectiva derivada usando PHOEBE y las curvas fotométricas de ZTF, dado el rango de temperaturas efectivas de estrellas tipo K de aproximadamente 3900 – 5300 K. Sin embargo, mucho cuidado es necesario al interpretar estos resultados. El espectro de Gaia, a pesar de ser el más completo, es de muy baja resolución espectral, lo cual causa la perdida de información de las líneas de emisión y absorción que permitirían una clasificación adecuada del sistema. El espectro de Gaia también muestra errores significativos en las longitudes de ondas más cortas, lo cual causa una discrepancia contra el espectro de plantilla. Al mismo tiempo, el espectro de APO carece de una buena razón de señal a ruido; a pesar de que la plantilla K4 sea la que mejor se ajusta

⁴Disponible en GitHub: <https://github.com/BU-hammerTeam/PyHammer>

a los datos, se puede ver en la gráfica superior de la **Figura 10.4** un decaimiento repentino en las longitudes de onda más largas del espectro medido, algo que no se observa en el de Gaia y que no tenemos una explicación satisfactoria en este trabajo. Dado que la temperatura efectiva de la componente primaria no tiene un efecto significativo en la morfología de la curva de luz de un sistema binario en contacto [Wadhwa et al. (2023)] no es necesario descartar todo el modelo de PHOEBE para ATO J339.9469+45.1464. Un análisis a mayor profundidad con datos espectroscópicos de mayor precisión ayudaría a constreñir parámetros adicionales del modelo. En el caso de tener varios espectros del sistema a lo largo del tiempo se podría construir una curva de velocidades radiales, la cual se podría ingresar al modelo en PHOEBE directamente.

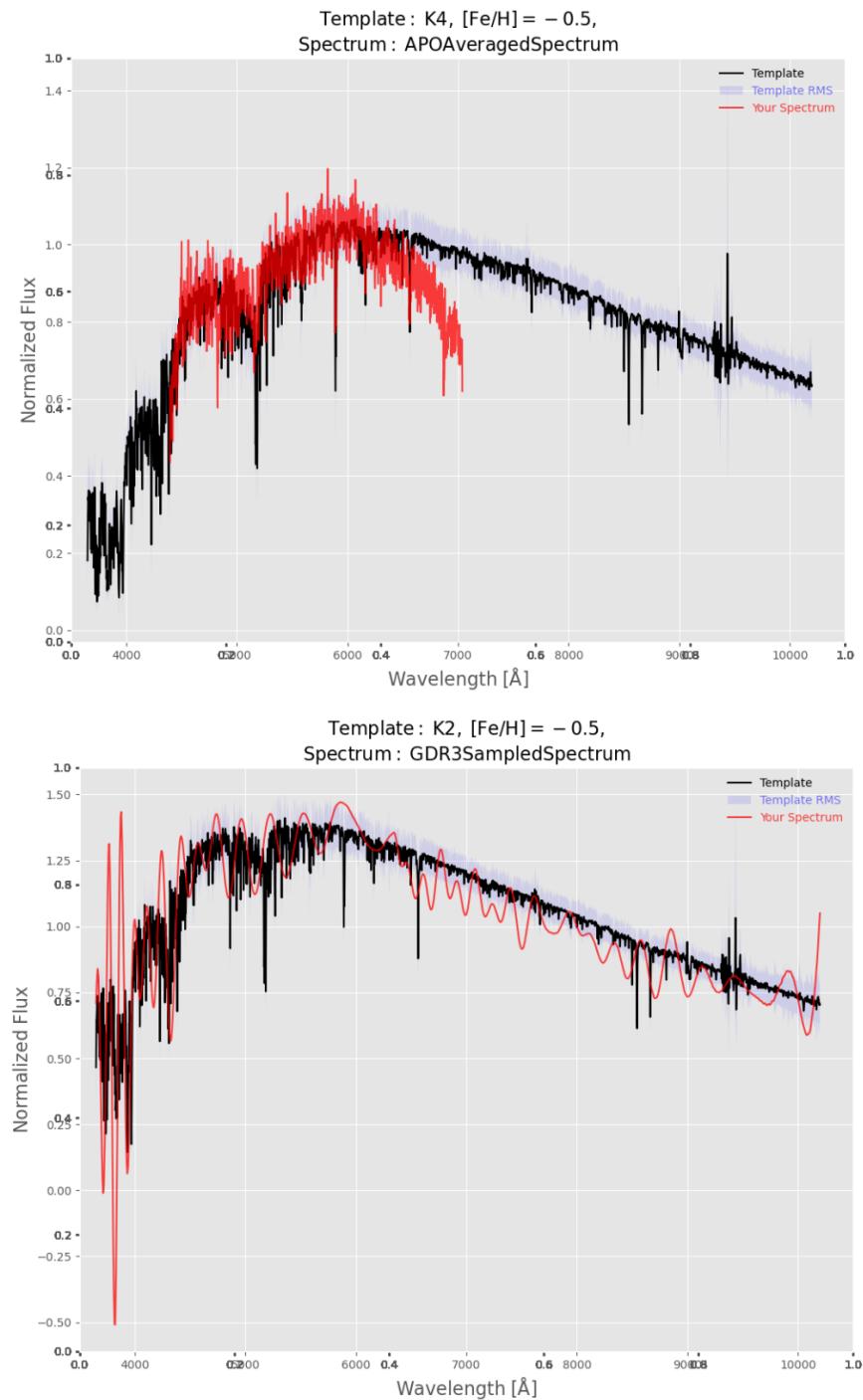


FIGURA 10.4: Resultados del análisis usando PyHammer para el espectro de APO y de Gaia DR3 en la gráfica superior e inferior, respectivamente. Partiendo de una estimación inicial automática por PyHammer se ajustó el tipo espectral y la metalicidad hasta llegar al mejor ajuste visto en esta figura, utilizando el χ^2 reportado en la aplicación como guía.

10.2 CORRELACIONES ENTRE PARÁMETROS

Una de las mayores dificultades en el ajuste de un modelo de un sistema binario es debido a las correlaciones entre distintos parámetros del modelo. Algunas correlaciones son esperadas desde un principio; por ejemplo, en un sistema binario en contacto existe una correlación fundamental entre la razón de masa q y el factor de escala de la luminosidad en una pasabanda. Un pequeño ejemplo se puede ver en la **Figura 10.5**; esta relación se manifiesta en una correlación lineal como se puede ver en la **Figura 10.6**.

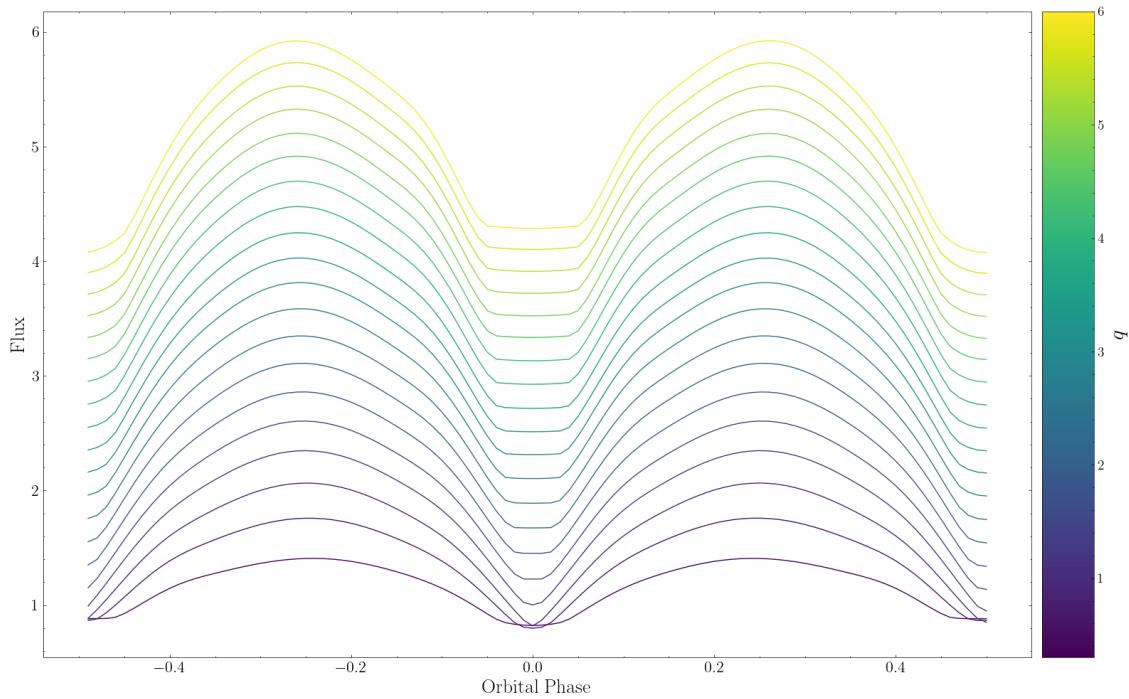


FIGURA 10.5: Modelo sintético en el pasabanda Johnson:V de un sistema binario en contacto en PHOEBE, manteniendo fijo el factor de relleno en $f = 0.3$. Se puede observar como el flujo sintético calculado va aumentando a pesar de mantener fijo el factor de escala de la luminosidad en la pasabanda—la cual corresponde al parámetro `pblum`—debido en parte al constreñimiento de los radios estelares a la razón de masa.

Esta correlación presenta un gran problema para la solución fotométrica del sistema: los valores presentados en la **Sección 9.6.1** no representan una solu-

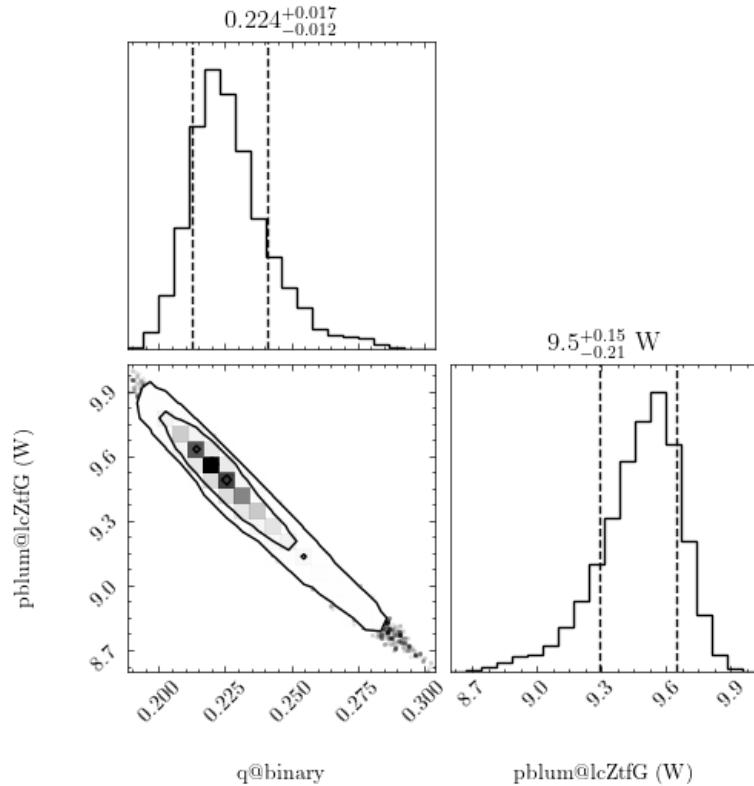


FIGURA 10.6: Gráfica de correlación entre la razón de masa q y el factor de escala de luminosidad en el pasabanda ZTF:g $pblum@lcZtfG$.

ción única, por la cual cualquier combinación de valores de la razón de masa y $pblum@lcZtfG$ que caigan en esta línea pueden llegar a ajustar el modelo. Esta dependencia se podría eliminar por completo haciendo uso de flujos absolutos (por ejemplo, el trabajo hecho por Odesse & Lovekin (2022)), lo cual por definición dejaría fijo el factor de escala del flujo sintético en 1. Al mismo tiempo esto haría que el modelo sintético sea sensible a cualquier parámetro que afecte la luminosidad absoluta del sistema, como las masas de las componentes y temperaturas efectivas, el cual permitiría muestrear estos parámetros y obtener distribuciones de densidad de probabilidad de ellos.

Para cuantificar las correlaciones entre parámetros se ajustó una relación polinomio entre los parámetros muestreados. Este proceso se ejecutó para los pares de parámetros que mostraron una correlación obvia después de una inspección visual.

Se intentó ajustar una función de grado 1 a 10, de los cuales se hizo un análisis de convergencia para determinar el menor grado del polinomio que mejor se ajusta a las muestras. La **Figura 10.7** muestra la correlación entre la razón de masa y la inclinación orbital del sistema muestreado; las demás correlaciones se pueden ver en el apéndice en la **Sección B.4**.

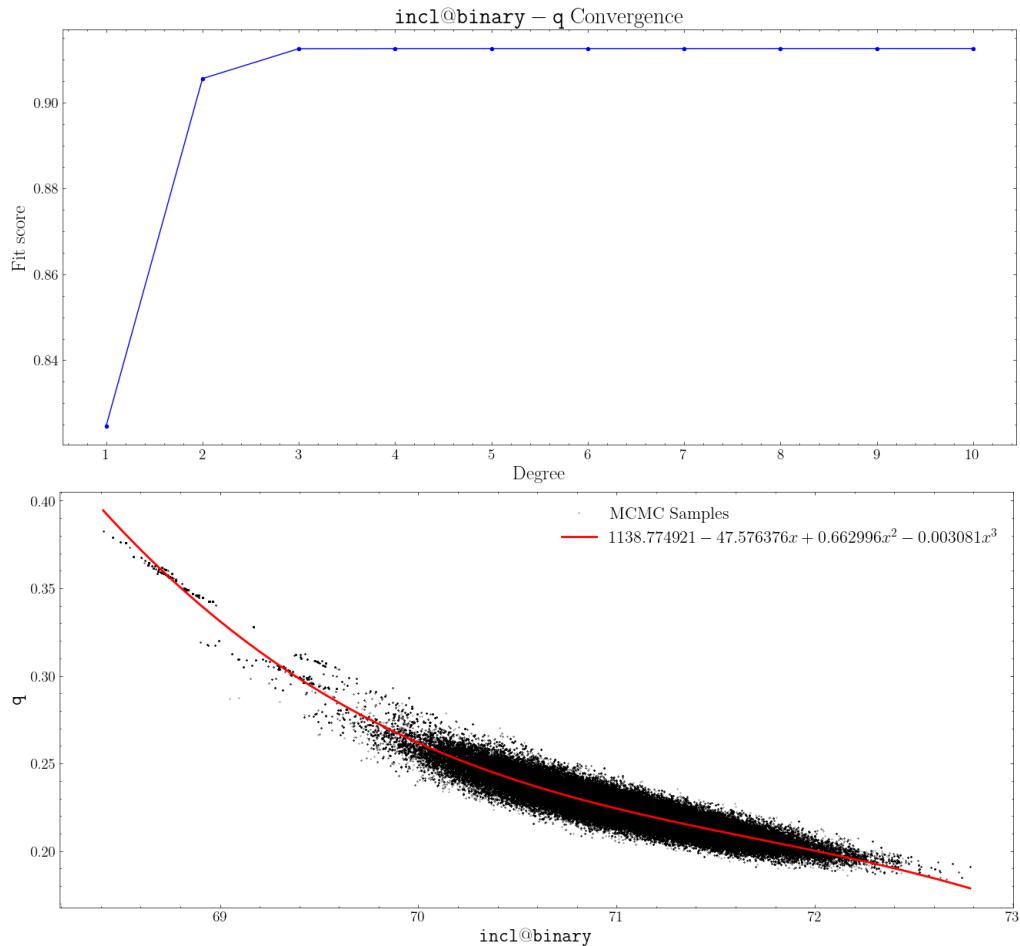


FIGURA 10.7: Función polinomial ajustado a las muestras de la razón de masa q y la inclinación orbital $\text{incl}@\text{binary}$, utilizando los valores de la inclinación como el parámetro independiente—denotado como x de la línea sólida roja—para ser consistente con las relaciones que aparecen en la **Figura 9.16**. El ajuste del modelo llega a converger utilizando un polinomio de grado 3 de acuerdo a la gráfica superior, el cual es reportado en la gráfica inferior.

Los ajustes fueron hechos haciendo uso del módulo de regresión lineal de

scikit-learn. Es importante notar que estas correlaciones aparecen debido a los datos que se usaron para alimentar el modelo; no es un fenómeno físico presente en el sistema binario. Cada correlación entre distintos parámetros indica la existencia de una solución fotométrica no única, dado que cualquier combinación de parámetros que cumplan con la función de correlación ajustada sería igual de correcta, salvo si se introducen nuevos datos que permitan restringir aún más los parámetros del sistema.

10.3 EXTINCIÓN INTERESTELAR

Como se mencionó en la **Sección 9.4**, se utilizó la fotometría de ZTF para determinar la temperatura efectiva del sistema binario, específicamente los flujos normalizados tal que la información del color del sistema no se pierda en la conversión de magnitudes. Sin embargo, cuando se realizó este mismo proceso utilizando los flujos de Gaia DR3 (dados en cuentas de electrones por segundo), se obtuvo una temperatura efectiva inconsistente con el resultado de ZTF. Para intentar explicar esta discrepancia investigamos el efecto de la extinción interestelar debido al polvo en la línea de visión de ATO J339.9469+45.1464.

Para analizar el efecto del polvo en las observaciones fotométricas de Gaia se utilizó el paquete de Python `dustmaps`⁵, el cual contiene información de varios mapas de polvo hechos en la literatura. Este paquete contiene mapas que toman en cuenta la distancia al objetivo, calculando la extinción que experimentaría la luz al pasar por el polvo presente en la línea de visión. Para este breve análisis se usó el mapa de polvo desarrollado por Green et al. (2019), el cual utiliza fotometría de Pan-STARRS 1 y 2MASS en conjunto con las distancias determinadas utilizando el paralaje reportado en el catálogo de Gaia DR2 para modelar una distribución tridimensional del polvo interestelar. Bailer-Jones et al. (2021) corrige errores sistemáticos en las mediciones del paralaje, reportando distancias corregidas por medio de métodos probabilísticos,

⁵<https://github.com/greggreen/dustmaps>

por lo cual decidimos utilizar su distancia reportada a ATO J339.9469+45.1464 en vez de una simple inversión del paralaje reportado por Gaia DR3⁶. El mapa de polvo sintético generado alrededor de ATO J339.9469+45.1464 se puede ver en la **Figura 10.8**.

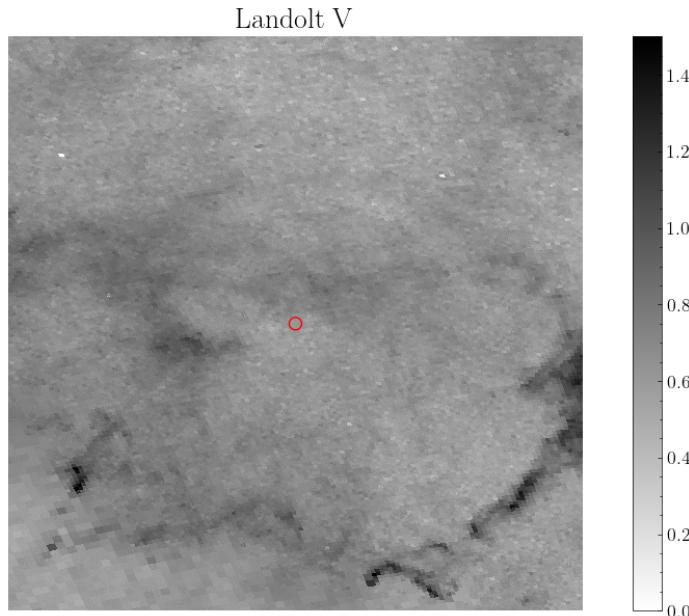


FIGURA 10.8: Distribución del polvo interestelar alrededor de ATO J339.9469+45.1464 en la pasabanda Landolt V, asumiendo $R_V = 3.1$. Este mapa presenta unidades de extinción A_V , las cuales se obtuvieron utilizando el coeficiente 2.742 reportado por Schlafly & Finkbeiner (2011). El circulo rojo marca la ubicación de ATO J339.9469+45.1464.

El exceso $E(B - V)$ es un parámetro libre en PHOEBE, el cual se puede utilizar para parametrizar el enrojecimiento del sistema binario. Al menos que ambas componentes estelares sean completamente idénticas y experimenten poca irradiación mutua y distorsión estelar, no es adecuado tratar la extinción interestelar como un efecto uniforme en toda la curva de luz de un sistema binario [Jones et al. (2020)]. PHOEBE es capaz de calcular el valor de la extinción observada en cada fase orbital basado en el perfil espectral del modelo, la función de transmisión de el pasabanda

⁶La distancia reportada se encuentra en la tabla `external.gaiaedr3_distance` en el *Gaia Archive*.

de la curva de luz, y la ley de enrojecimiento empleada. Sin embargo, este método tiene la desventaja de no ser compatible con todas las pasabandas disponibles en PHOEBE, debido a que uno de los requisitos es que exista una variación particular `ext` en los servidores de PHOEBE. Por esta razón fue necesario tratar las curvas de luz de Gaia por separado de ZTF.

Primero fue necesario ajustar el tiempo de superconjunction del modelo utilizando las curvas de luz de Gaia. Esto se debe a la presencia de un efecto sistemático en el tiempo de medición en la fotometría de Gaia; a pesar de que las curvas se ajusten adecuadamente al mismo periodo orbital, el eclipse principal del modelo queda desfasado con los datos observados. Tras correr un optimizador de tipo Nelder-Mead se encuentra el tiempo de superconjunction de los datos de Gaia de 0.03199 d a comparación de 0.02589 d para las curvas de ZTF e Iturbide. Después fue necesario eliminar la restricción del valor `ebv` del modelo por medio de la función `flip_constraint` del modelo, restringiendo el valor de `Av` en su lugar. Esto nos permite ingresar de manera directa el valor que se obtiene del exceso en el visible de `dustmaps`, utilizando el módulo `BayestarQuery` y usando las coordenadas de ATO J339.9469+45.1464 junto a su distancia para obtener una muestra del enrojecimiento en valores de $E(B - V)$. El valor máximo de 0.16 logró un mejor ajuste a los datos, como se puede ver en la **Figura 10.9**.

10.4 MULTI-MODALIDAD DE LA PDF POSTERIOR

Durante el transcurso de este proyecto se llevaron a cabo varias pruebas e intentos de ajuste del modelo de PHOEBE a los datos observacionales. El primer ajuste al que se llegó de manera satisfactoria dio como resultado una combinación distinta de parámetros; el código relevante se encuentra en una versión previa en el repositorio de GitHub⁷. Las correlaciones entre parámetros se pueden ver en la

⁷El commit con identificador 18d244a4ac8e5f7e17d0a625156af0e9105245f4 muestra la versión del código más actual con la solución alterna del modelo.

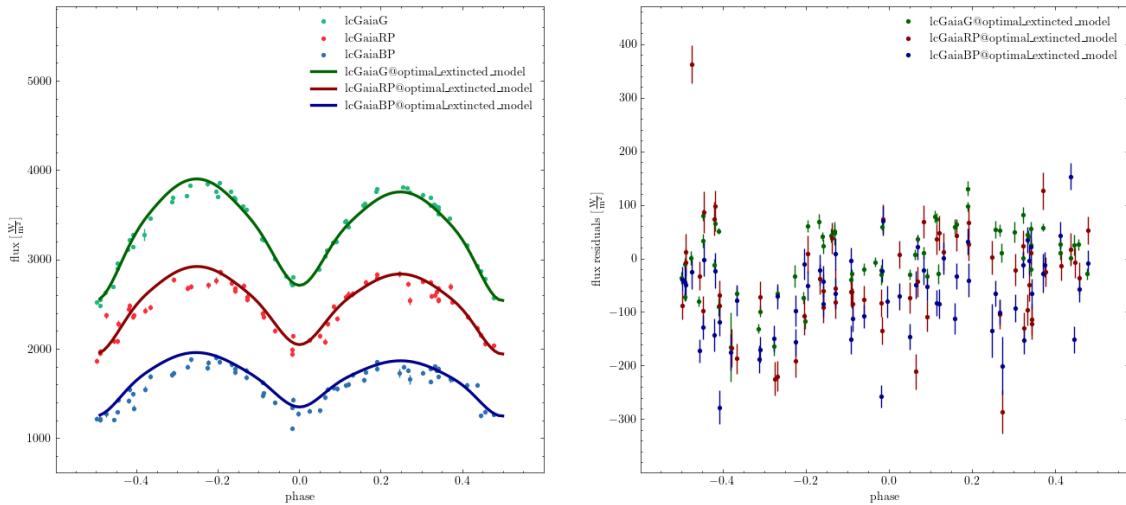


FIGURA 10.9: Modelo de PHOEBE incorporando la extinción interestelar a los datos de Gaia, utilizando un valor de $E(B - V)$.

figura [Figura 10.10](#), junto a los valores e incertidumbres correspondientes en la [Tabla 10.1](#). Para este modelo se adoptaron diferentes parámetros iniciales de los estimadores corridos—por ejemplo, el tiempo de superconjunción se dejó fijo en $-0.0375\text{ }d$, lo cual causa que la curva de luz en fase esté centrado en el eclipse más profundo, afectando el parámetro de razón de temperatura—lo cual al optimizar y finalmente muestrear llevó el modelo a una región distinta del espacio de parámetros. Este muestreo se configuró con 160 caminadores en total, igual que el muestreo descrito en la [Sección 9.5](#).

Esta solución fue obtenida después de 6116 iteraciones en total. Sin embargo, esta solución no es completamente adecuada. El periodo de quemado fue de 4816; esto se debe a que los caminadores se encontraban atrapados en ciertas regiones del espacio de parámetros, nunca saliendo por su propia cuenta. La solución para este problema fue utilizar la capacidad del resolvedor MCMC de PHOEBE para adoptar el resultado del muestreo como las distribuciones priori de un nuevo muestreo MCMC. Con el fin de eliminar las muestras de los caminadores inmóviles se aproximaron las distribuciones posteriores de muestras a distribuciones continuas Gaussianas multi-dimensionales; a pesar de perder información de la forma discreta

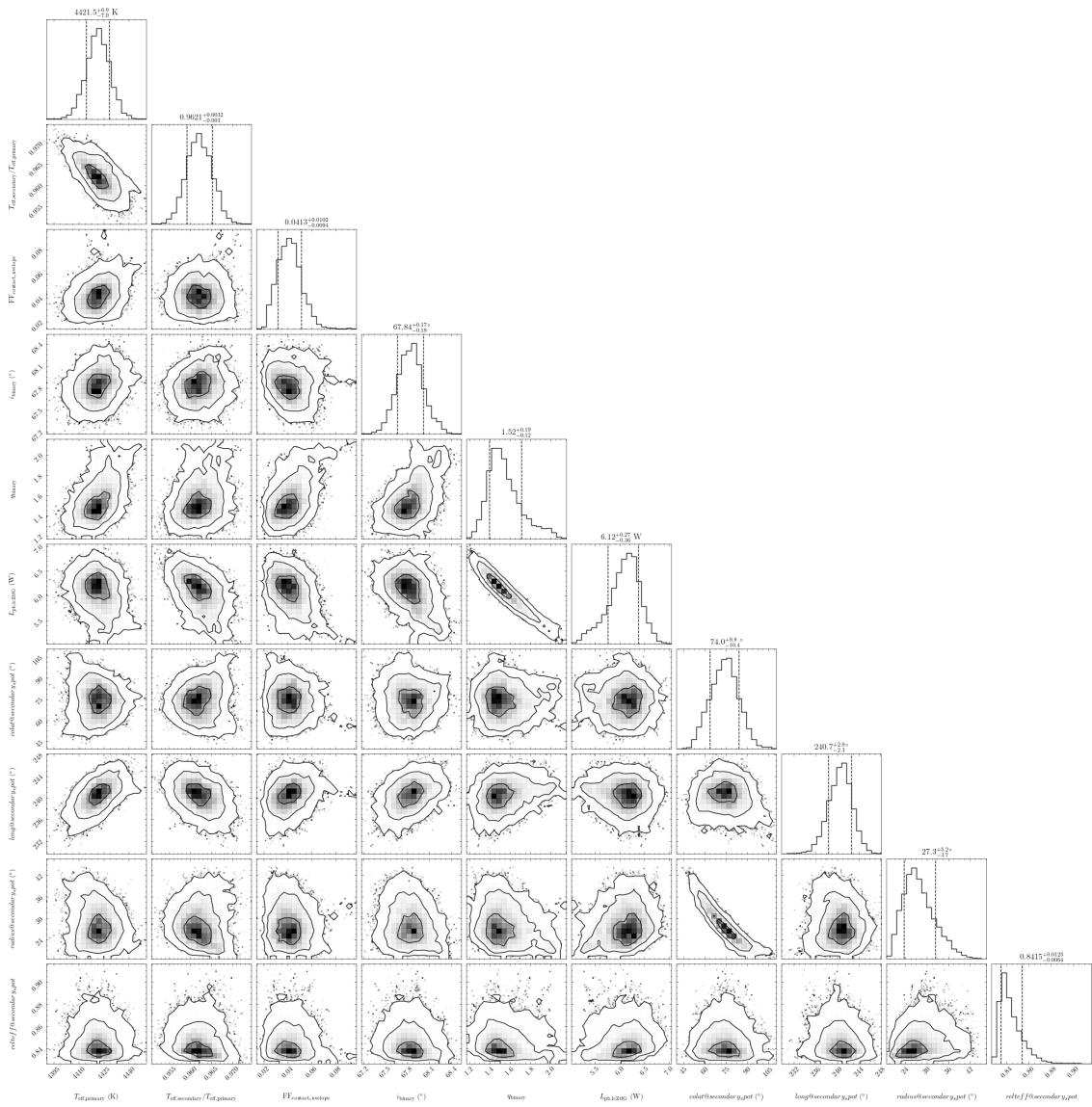


FIGURA 10.10: Gráfica de correlación de una solución alterna que se obtuvo utilizando las curvas de ZTF. Incluye el parámetro de molestia `pblum@lcZtfG`.

de las muestras—y al mismo tiempo introduce un sesgo en la forma inicial de las muestras—dados suficiente iteraciones los caminadores tendrán la oportunidad de explorar el espacio fuera de la región dada por las distribuciones a priori, siguiendo la forma de la distribución posterior. Debido a que solo se pudieron correr un total de 1345 para la última ronda de muestreo (el cual incluye 304 iteraciones del periodo de quemado, lo que eleva el tiempo de quemado total a 5120 iteraciones con solo 996 iteraciones utilizadas) no es posible decir que este muestreo ha convergido de

Parámetro	Valor
T_1	$4421.5^{+6.9}_{-7.0}$ K
T_2/T_1	$0.9621^{+0.0032}_{-0.003}$
f	$0.0413^{+0.0102}_{-0.0094}$
i_{orb}	$67.84^{+0.17\circ}_{-0.18}$
q	$1.52^{+0.19}_{-0.12}$
Lat _{spot}	$74.0^{+9.9\circ}_{-10.4}$
Lon _{spot}	$240.7^{+2.0\circ}_{-2.3}$
Radius _{spot}	$27.3^{+5.2\circ}_{-3.7}$
T_{spot}/T_2	$0.8415^{+0.0125}_{-0.0064}$

TABLA 10.1: Valores e incertidumbres de solución alterna al modelo de PHOEBE.

manera adecuada.

Debido a la falta de experiencia utilizando PHOEBE, la optimización del tiempo de cómputo de este muestreo inicial se llevó a cabo de una manera distinta. A parte del proceso de eliminación de observaciones erróneas que se realizó (descrito en la **Sección 9.5.1**), se eliminaron la mitad de las observaciones de ambas curvas ZTF:g y ZTF:r, utilizando los “slices” de Python. A pesar de que este método redujo el tiempo de cómputo del modelo hacia adelante, tiene la desventaja de perder mucha información de observaciones individuales. Al mismo tiempo, esta optimización no tuvo el mismo efecto significativo que solo computar el modelo hacia adelante para una malla de fases orbitales determinadas (descrito en la **Sección 9.1**), lo cual resultó en tiempos promedios de ~ 3600 seg por iteración de MCMC contra un tiempo promedio de ~ 500 seg por iteración del último muestreo descrito en la **Sección**

9.5.

Este primer intento de explorar el espacio de parámetros se ejecutó en el servidor “Alzíir” por parte del Instituto de Astronomía Ensenada de la Universidad Nacional Autónoma de México, en colaboración con el Dr. Raúl Michel Murillo. Esta computadora cuenta con un procesador AMD Opteron(tm) Processor 6376 de 64 hilos, con un total de 512 GB de memoria RAM; una vez corriendo el código en el servidor, el proceso llegó a ocupar más de 50 GB de memoria. Debido al alto tiempo de cómputo para cada iteración, y la solución alterna dada en la **Sección 9.6.1**, esta solución se abandonó por el momento, pero debería de ser considerada en un trabajo a futuro en caso que se obtenga una nueva fuente de datos para constreñir el modelo.

APÉNDICE A

GAIA ADQL QUERY

```

01 | SELECT TOP 3630000 * ,
02 |   array_element (sdss_transform.a0 , 1) AS J2000_ra_prop ,
03 |   array_element (sdss_transform.a0 , 2) AS J2000_dec_prop ,
04 |   array_element (sdss_transform.a0 , 3) AS
05 |     J2000_parallax_prop ,
06 |   array_element (sdss_transform.a0 , 4) AS J2000_pmra_prop ,
07 |   array_element (sdss_transform.a0 , 5) AS J2000_pmdec_prop ,
08 |   array_element (sdss_transform.a0 , 6) AS J2000_rv_prop ,
09 |   sdss_transform.g_sdss - sdss_transform.r_sdss AS
10 |     g_r_sdss_color ,
11 |   sdss_transform.r_sdss - sdss_transform.i_sdss AS
12 |     r_i_sdss_color
13 | FROM
14 | (
15 |   SELECT * ,
16 |     -0.2199 + 0.6365 * bp_rp + 0.1548 * Power(bp_rp , 2) -
17 |       0.0064 * Power(bp_rp , 3) + phot_g_mean_mag AS g_sdss ,
18 |     0.293 - 0.6404 * bp_rp + 0.09609 * Power(bp_rp , 2) +
19 |       0.002104 * Power(bp_rp , 3) + phot_g_mean_mag AS i_sdss ,
20 |     0.09837 - 0.08592 * bp_rp + 0.1907 * Power(bp_rp , 2) +
21 |       0.1701 * Power(bp_rp , 3) + phot_g_mean_mag AS r_sdss ,
22 |     0.4619 - 0.8992*bp_rp +0.08271*Power(bp_rp , 2) -
23 |       0.005029*Power(bp_rp , 3) + phot_g_mean_mag AS z_sdss
24 |   FROM (
25 |     SELECT *, EPOCH_PROP(ra, dec, parallax, pmra, pmdec,
26 |       radial_velocity, ref_epoch, 2000) AS a0
27 |     FROM gaiadr3.gaia_source) AS gdr3
28 |     WHERE gdr3.phot_variable_flag = 'VARIABLE'
29 |       AND gdr3.source_id NOT IN
30 |         (SELECT sdss.source_id FROM
31 |           gaiadr3.sdssdr13_best_neighbour as sdss)
32 |   ) AS sdss_transform
33 |   WHERE sdss_transform.g_sdss - sdss_transform.r_sdss < 0.7
34 |     AND sdss_transform.r_sdss - sdss_transform.i_sdss > 0.30;

```

APÉNDICE B

PHOEBE GRÁFICAS ADICIONALES

B.1 DISTRIBUCIONES PRIORES COMPLETAS

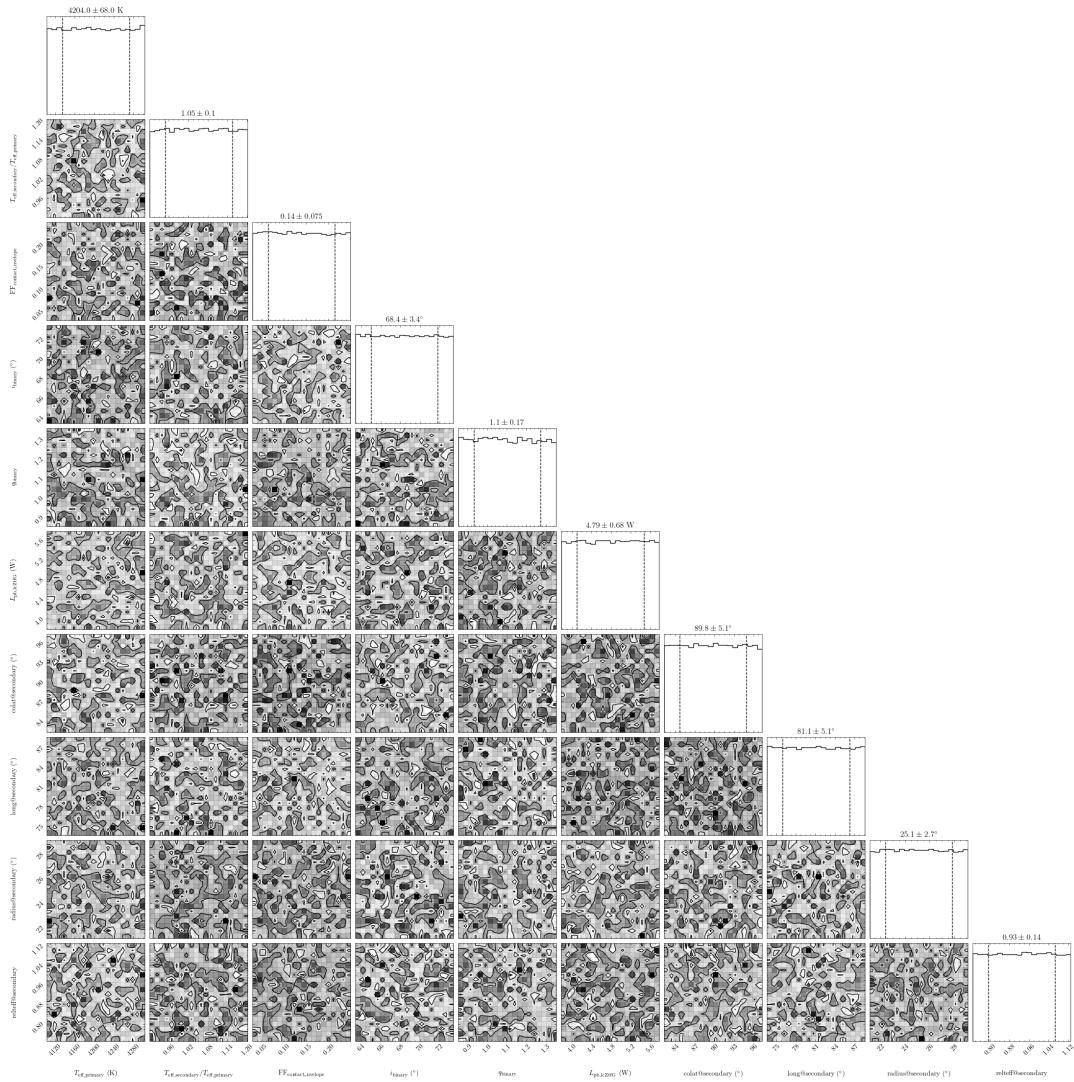


FIGURA B.1: Distribuciones uniformes de todos los parámetros muestreados utilizando cadenas de Monte Carlo (MCMC). La topología compleja que se ve en cada cuadrante se debe a las muestras que PHOEBE toma para cada parámetro en el proceso de generar la gráfica, no debido a la distribución almacenada por PHOEBE. Los priores, junto a esta gráfica, fueron generados en el Notebook `updated-data-mcmc-sampling.ipynb`.

B.2 TRAZOS COMPLETOS DE LOS CAMINADORES

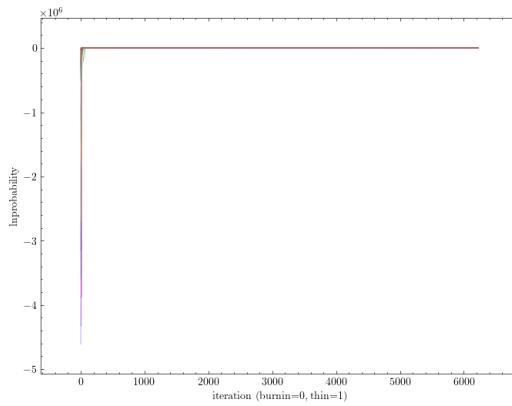


FIGURA B.2: Probabilidad logarítmica de cada caminador como función del número de iteraciones pasadas, después de 6233 iteraciones.

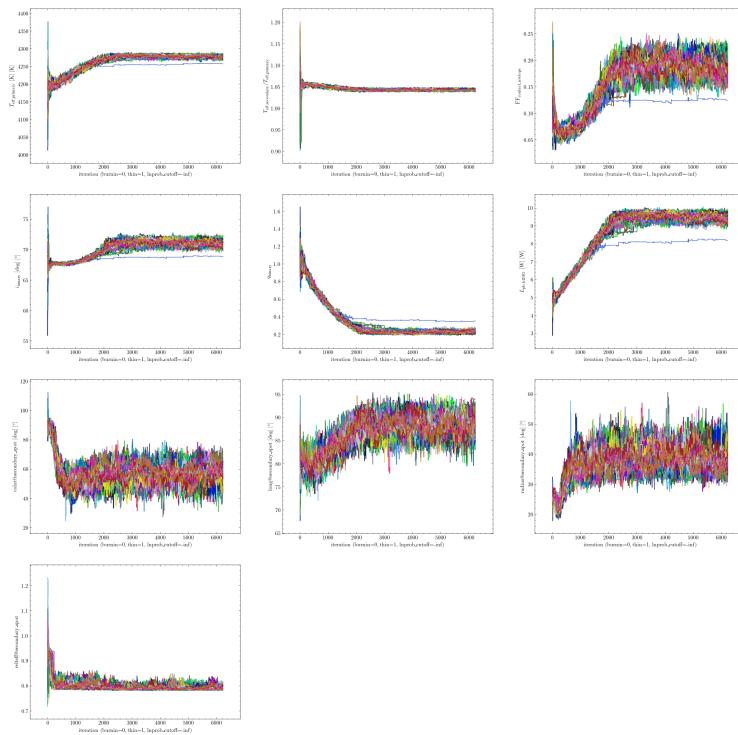


FIGURA B.3: Valor de cada parámetro muestreado para todos los caminadores como función del número de iteraciones pasadas, después de 6233 iteraciones.

B.3 DISTRIBUCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD COMPLETAS

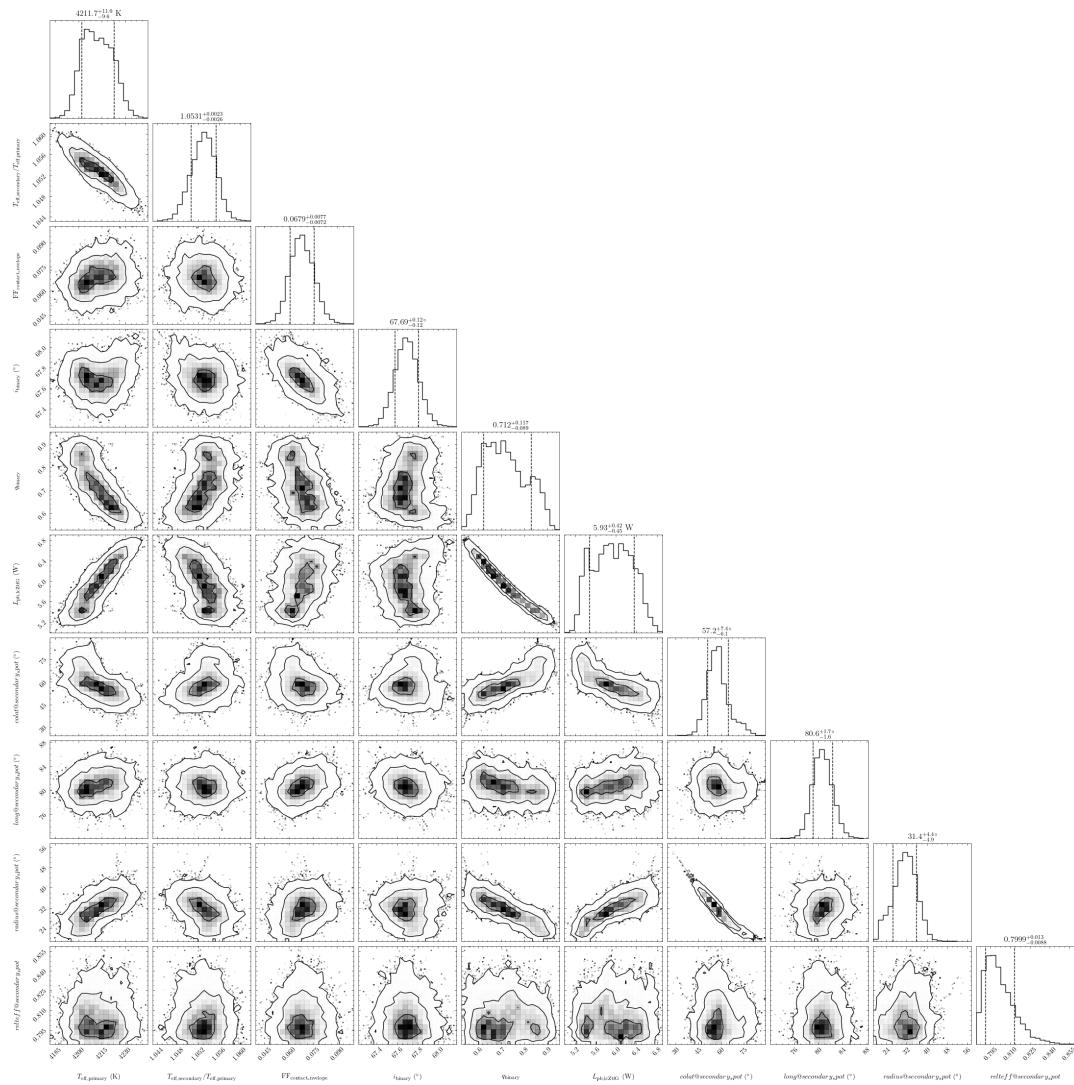


FIGURA B.4: Resultados completos del muestreo MCMC utilizando los datos de ZTF. Aquí se incluye el parámetro de molestia `pblum@primary@1cZtfG`, el cual representa la luminosidad en el pasabanda ZTF:g de la componente primaria, utilizada como el factor de escala para la curva de luz de ZTF:g y la temperatura efectiva del sistema reflejada por la curva de ZTF:r. Se puede apreciar la correlación lineal entre la razón de masa q y la luminosidad de pasabanda.

B.4 CORRELACIONES DE PARÁMETROS MUESTREADOS

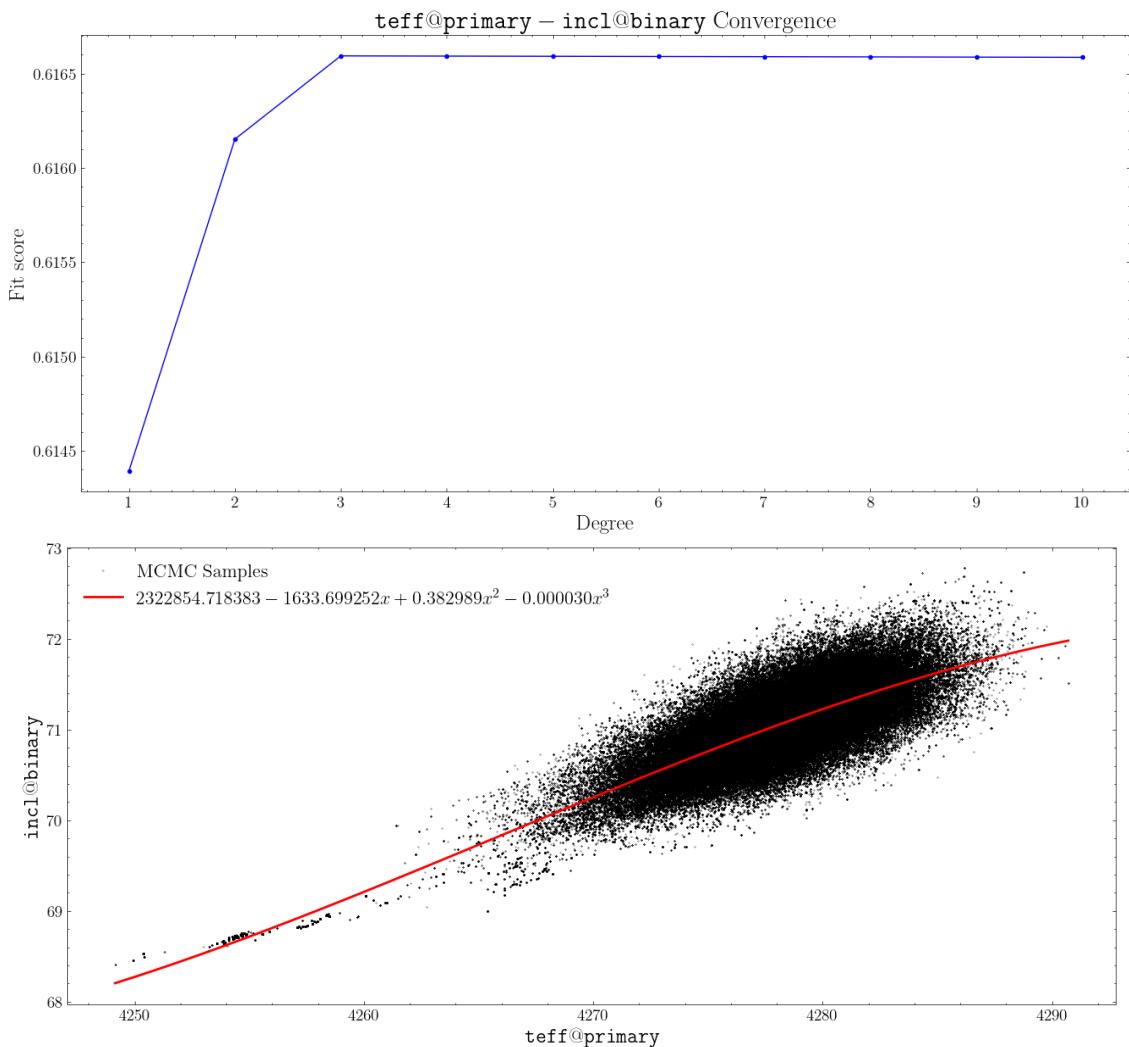


FIGURA B.5: Función polinomio ajustada a las muestras de la inclinación orbital `incl@binary` y la temperatura efectiva de la componente primaria `teff@primary`.

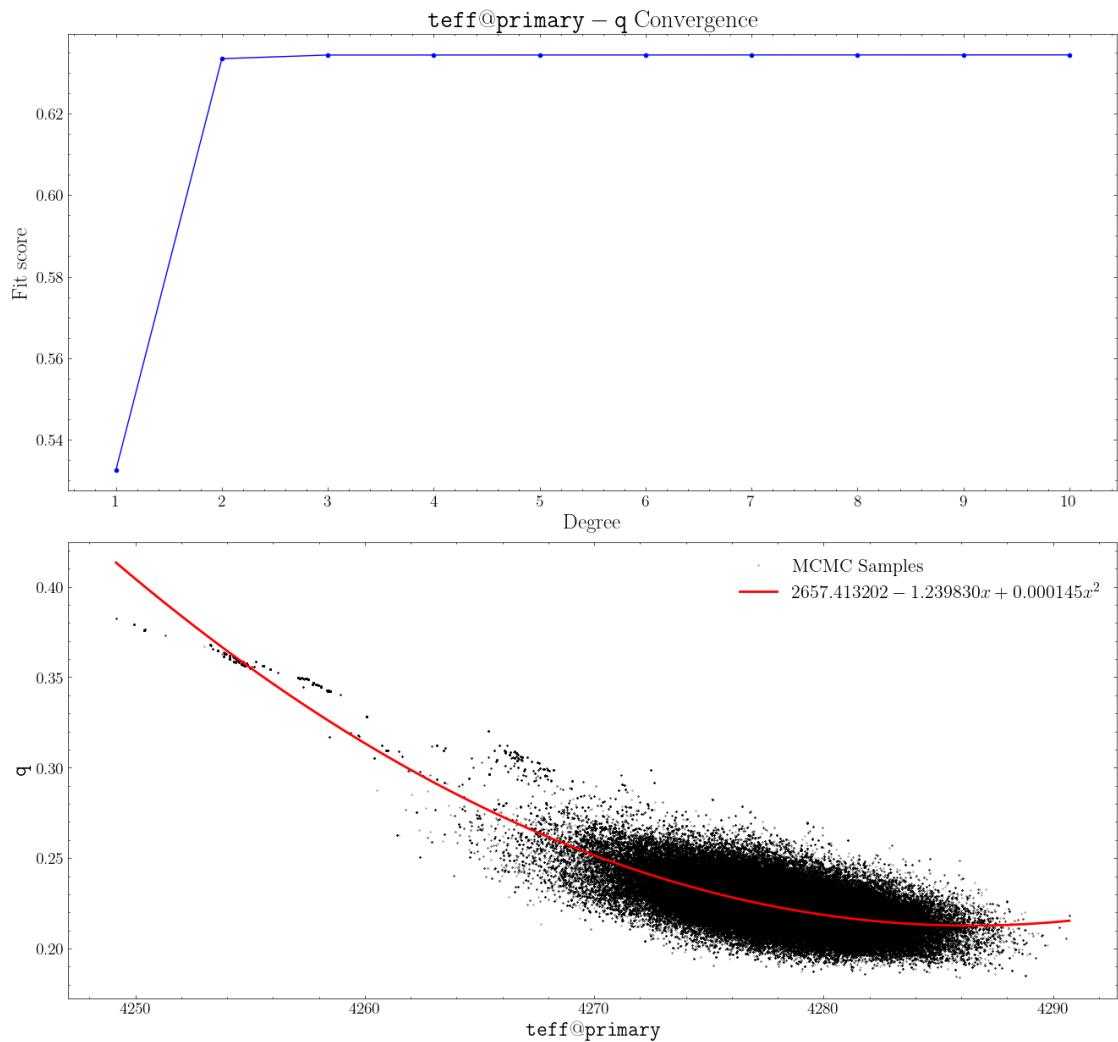


FIGURA B.6: Función polinomio ajustada a las muestras de la razón de masa q y la temperatura efectiva de la componente primaria $\text{teff}@{\text{primary}}$.

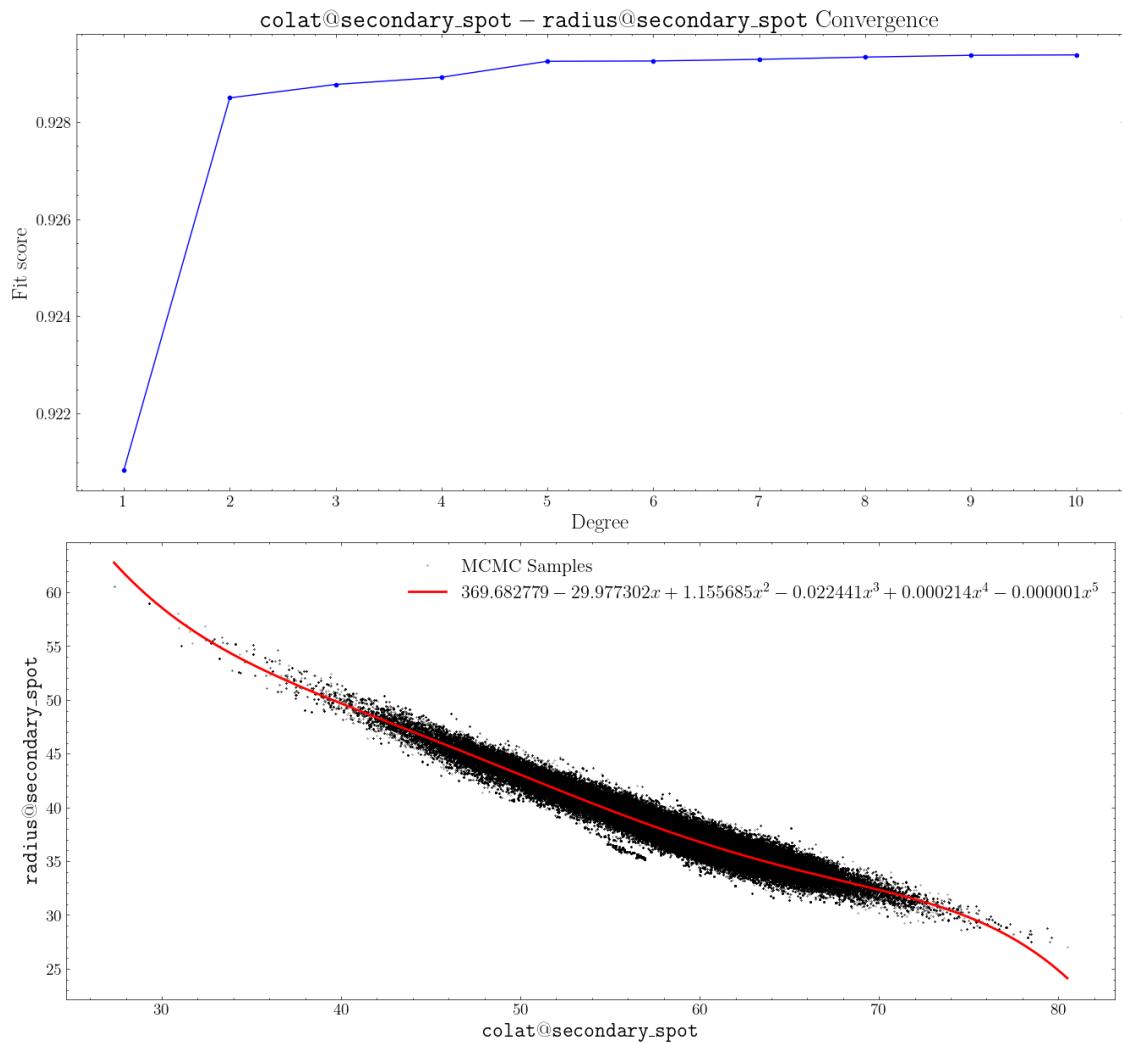


FIGURA B.7: Función polinomio ajustada a las muestras del radio angular de la mancha en la superficie de la componente secundaria `radius@secondary_spot` y su latitud `colat@secondary_spot`.

AGRADECIMIENTOS

This work has made use of data from the European Space Agency (ESA) mission *Gaia* (<https://www.cosmos.esa.int/gaia>), processed by the Gaia Data Processing and Analysis Consortium (DPAC, <https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/dpac/consortium>). Funding for the DPAC has been provided by national institutions, in particular the institutions participating in the *Gaia* Multilateral Agreement.

This job has made use of the Python package GaiaXPy, developed and maintained by members of the Gaia Data Processing and Analysis Consortium (DPAC), and in particular, Coordination Unit 5 (CU5), and the Data Processing Centre located at the Institute of Astronomy, Cambridge, UK (DPCI).

Based on observations obtained with the Samuel Oschin Telescope 48-inch and the 60-inch Telescope at the Palomar Observatory as part of the Zwicky Transient Facility project. ZTF is supported by the National Science Foundation under Grants No. AST-1440341 and AST-2034437 and a collaboration including current partners Caltech, IPAC, the Oskar Klein Center at Stockholm University, the University of Maryland, University of California, Berkeley , the University of Wisconsin at Milwaukee, University of Warwick, Ruhr University, Cornell University, Northwestern University and Drexel University. Operations are conducted by COO, IPAC, and UW.

This research made use of Astropy,¹ a community-developed core Python package for Astronomy Collaboration et al. (2018).

¹<http://www.astropy.org>

This research has made use of the SIMBAD database, operated at CDS, Strasbourg, France.

This research made use of ccdproc, an Astropy package for image reduction Craig et al. (2023).

BIBLIOGRAFÍA

- Bailer-Jones, C. A. L., Rybizki, J., Fouesneau, M., Demleitner, M., & Andrae, R. (2021). Estimating Distances from Parallaxes. V. Geometric and Photogeometric Distances to 1.47 Billion Stars in Gaia Early Data Release 3 [Publisher: IOP ADS Bibcode: 2021AJ....161..147B]. *The Astronomical Journal*, *161*, 147. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/abd806>
- Bellm, E. C., Kulkarni, S. R., Graham, M. J., Dekany, R., Smith, R. M., Riddle, R., Masci, F. J., Helou, G., Prince, T. A., Adams, S. M., Barbarino, C., Barlow, T., Bauer, J., Beck, R., Belicki, J., Biswas, R., Blagorodnova, N., Bodewits, D., Bolin, B., ... Zolkower, J. (2018). The zwicky transient facility: System overview, performance, and first results [Publisher: The Astronomical Society of the Pacific]. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, *131*(995), 018002. <https://doi.org/10.1088/1538-3873/aaecbe>
- Benacquista, M. (2013). *An Introduction to the Evolution of Single and Binary Stars*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9991-7>
- Carrasco, J. M., Weiler, M., Jordi, C., Fabricius, C., De Angeli, F., Evans, D. W., van Leeuwen, F., Riello, M., & Montegriffo, P. (2021). Internal calibration of Gaia BP/RP low-resolution spectra [ADS Bibcode: 2021A&A...652A..86C]. *Astronomy and Astrophysics*, *652*, A86. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202141249>
- Castelli, F., & Kurucz, R. L. (2004, 5 de mayo). New Grids of ATLAS9 Model Atmospheres. <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0405087>

- Chen, X., Wang, S., Deng, L., Grijs, R. d., Yang, M., & Tian, H. (2020). The zwicky transient facility catalog of periodic variable stars [Publisher: The American Astronomical Society]. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 249(1), 18. <https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab9cae>
- Collaboration, T. A., Price-Whelan, A. M., Sipőcz, B. M., Günther, H. M., Lim, P. L., Crawford, S. M., Conseil, S., Shupe, D. L., Craig, M. W., Dencheva, N., Ginsburg, A., VanderPlas, J. T., Bradley, L. D., Pérez-Suárez, D., Val-Borro, M. d., Contributors), (P., Aldcroft, T. L., Cruz, K. L., Robitaille, T. P., ... Contributors), ((2018). The astropy project: Building an open-science project and status of the v2.0 core package* [Publisher: The American Astronomical Society]. *The Astronomical Journal*, 156(3), 123. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aabc4f>
- Conroy, K. E., Kochoska, A., Hey, D., Pablo, H., Hambleton, K. M., Jones, D., Giamarco, J., Abdul-Masih, M., & Prsa, A. (2020). Physics of Eclipsing Binaries. V. General Framework for Solving the Inverse Problem. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 250(2), 34. <https://doi.org/10.3847/1538-4365/abb4e2>
- Craig, M., Crawford, S., Seifert, M., Robitaille, T., Sipőcz, B., Walawender, J., Crawford, S., Vinícius, Z., Ninan, J. P., Droettboom, M., Bowers, T. E., Youn, J., Gondhalekar, Y., Tollerud, E., Lim, P. L., Bray, E. M., Bach, Y. P., stottsc0, Janga, V. R., ... Weiner, B. (2023, mayo). *astropy/ccdproc: 2.4.1* (Ver. 2.4.1). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7986923>
- Darwish, M. S., Abdelkawy, A. G. A., & Hamed, G. M. (2024). Light curve analysis and evolutionary status of four newly identified short-period eclipsing binaries [Publisher: Nature Publishing Group]. *Scientific Reports*, 14(1), 3998. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-54289-1>
- De Angeli, F., Weiler, M., Montegriffo, P., Evans, D. W., Riello, M., Andrae, R., Carrasco, J. M., Busso, G., Burgess, P. W., Cacciari, C., Davidson, M., Harrison, D. L., Hodgkin, S. T., Jordi, C., Osborne, P. J., Pancino, E., Altavilla, G., Barstow, M. A., Bailer-Jones, C. A. L., ... Yoldas, A. (2023). Gaia Data

- Release 3. Processing and validation of BP/RP low-resolution spectral data [ADS Bibcode: 2023A&A...674A...2D]. *Astronomy and Astrophysics*, 674, A2. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202243680>
- Ding, X., Ji, K., Li, X., Xiong, J., Cheng, Q., Wang, J., & Liu, H. (2022). Fast Derivation of Contact Binary Parameters for Large Photometric Surveys [Publisher: The American Astronomical Society]. *The Astronomical Journal*, 164(5), 200. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/ac8e66>
- Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D., & Goodman, J. (2013). Emcee: The MCMC hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(925), 306-312. <https://doi.org/10.1086/670067>
- Gaia Collaboration, Prusti, T., de Bruijne, J., Brown, A., Vallenari, A., Babusiaux, C., Bailer-Jones, C., Bastian, U., Biermann, M., Evans, D., Eyer, L., F., J., Jordi, C., Klioner, S., Lammers, U., Lindegren, L., Luri, X., Mignard, F., Milligan, D., ... Zschocke, S. (2016). The Gaia mission. *Astronomy & Astrophysics*, 595.
- Goodman, J., & Weare, J. (2010). Ensemble samplers with affine invariance. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 5(1), 65-80. <https://doi.org/10.2140/camcos.2010.5.65>
- Green, G. M., Schlafly, E., Zucker, C., Speagle, J. S., & Finkbeiner, D. (2019). A 3d dust map based on gaia, pan-STARRS 1, and 2mass. *The Astrophysical Journal*, 887(1), 93. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab5362>
- Gunn, J. E., Siegmund, W. A., Mannery, E. J., Owen, R. E., Hull, C. L., Leger, R. F., Carey, L. N., Knapp, G. R., York, D. G., Boroski, W. N., Kent, S. M., Lupton, R. H., Rockosi, C. M., Evans, M. L., Waddell, P., Anderson, J. E., Annis, J., Barentine, J. C., Bartoszek, L. M., ... Wang, S.-i. (2006). The 2.5 m Telescope of the Sloan Digital Sky Survey. *The Astronomical Journal*, 131. <https://doi.org/10.1086/500975>
- Heinze, A. N., Tonry, J. L., Denneau, L., Flewelling, H., Stalder, B., Rest, A., Smith, K. W., Smartt, S. J., & Weiland, H. (2018). A First Catalog of Variable Stars Measured by the Asteroid Terrestrial-impact Last Alert System (ATLAS)

- [Publisher: The American Astronomical Society]. *The Astronomical Journal*, 156(5), 241. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aae47f>
- Ibáñez, J. A. (2021, 1 de enero). *Cataclysmic Variables in Wide Field Surveys* [Tesis doctoral] [Pages: 2021 Publication Title: Ph.D. Thesis ADS Bibcode: 2021PhDT.....5I]. Consultado el 4 de abril de 2024, desde <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021PhDT.....5I>
- Jones, D., Conroy, K. E., Horvat, M., Giammarco, J., Kochoska, A., Pablo, H., Brown, A. J., Sowicka, P., & Prša, A. (2020). Physics of eclipsing binaries. IV. the impact of interstellar extinction on the light curves of eclipsing binaries [Publisher: IOP Publishing]. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 247(2), 63. <https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab7927>
- Kallrath, J., & Milone, E. F. (2009). *Eclipsing Binary Stars: Modeling and Analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0699-1>
- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (2017). *Fundamental Astronomy*. Springer.
- Kesseli, A. Y., West, A. A., Veyette, M., Harrison, B., Feldman, D., & Bochanski, J. J. (2017). An Empirical Template Library of Stellar Spectra for a Wide Range of Spectral Classes, Luminosity Classes, and Metallicities Using SDSS BOSS Spectra [Publisher: IOP ADS Bibcode: 2017ApJS..230...16K]. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 230, 16. <https://doi.org/10.3847/1538-4365/aa656d>
- Kopal, Z. (1959, enero). *Close binary systems* [Publication Title: The International Astrophysics Series ADS Bibcode: 1959cbs..book....K]. Consultado el 24 de marzo de 2024, desde <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1959cbs..book....K>
- Kovács, G., Zucker, S., & Mazeh, T. (2002). A box-fitting algorithm in the search for periodic transits. *Astronomy & Astrophysics*, 391(1), 369-377. <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20020802>
- Krisciunas, K., Margon, B., & Szkody, P. (1998). The Recognition of Unusual Objects in the Sloan Digital Sky Survey Color System. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*.

- Kurucz, R. L. (1970). Atlas: a Computer Program for Calculating Model Stellar Atmospheres [ADS Bibcode: 1970SAOSR.309.....K]. *SAO Special Report, 309*. Consultado el 5 de marzo de 2024, desde <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1970SAOSR.309.....K>
- Kutner, M. L. (2017, febrero). *Astronomy A Physical Perspective* (2.^a ed.). Cambridge University Press.
- Lang, D., Hogg, D. W., Mierle, K., Blanton, M., & Roweis, S. (2010). Astrometry.net: Blind astrometric calibration of arbitrary astronomical images [arXiv:0910.2233 [astro-ph]]. *The Astronomical Journal, 139*(5), 1782-1800. <https://doi.org/10.1088/0004-6256/139/5/1782>
Comment: submitted to AJ.
- Latković, O., Čeki, A., & Lazarević, S. (2021). Statistics of 700 Individually Studied W UMa Stars [Publisher: IOP ADS Bibcode: 2021ApJS..254...10L]. *The Astrophysical Journal Supplement Series, 254*, 10. <https://doi.org/10.3847/1538-4365/abeb23>
- LeBlanc, F. (2010). *An Introduction to Stellar Astrophysics*. John Wiley & Sons Ltd.
- Li, K., Gao, X., Liu, X.-Y., Gao, X., Li, L.-Z., Chen, X., & Sun, G.-Y. (2022). Extremely low mass ratio contact binaries. i. the first photometric and spectroscopic investigations of ten systems. *The Astronomical Journal, 164*(5), 202. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/ac8ff2>
- Lomb, N. R. (1976). Least-Squares Frequency Analysis of Unequally Spaced Data [Publisher: Springer ADS Bibcode: 1976Ap&SS..39..447L]. *Astrophysics and Space Science, 39*, 447-462. <https://doi.org/10.1007/BF00648343>
- Mackay, D. J. C. (2003, 1 de octubre). *Information Theory, Inference and Learning Algorithms* [Publication Title: Information Theory ADS Bibcode: 2003itil.book.....M]. Consultado el 22 de junio de 2024, desde <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2003itil.book.....M>
- Masci, F. J., Laher, R. R., Rusholme, B., Shupe, D. L., Groom, S., Surace, J., Jackson, E., Monkewitz, S., Beck, R., Flynn, D., Terek, S., Landry, W., Hacopians, E., Desai, V., Howell, J., Brooke, T., Imel, D., Wachter, S., Ye, Q.-Z.,

- ... Kulkarni, S. R. (2018). The zwicky transient facility: Data processing, products, and archive [Publisher: The Astronomical Society of the Pacific]. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 131(995), 018003. <https://doi.org/10.1088/1538-3873/aae8ac>
- Michel, R., Echevarria, J., Cang, T., Fox-Machado, L., & Gonzalez-Buitrago, D. (2016, 10 de junio). ROTSE1 J164341.65+251748.1: a new W UMa-type eclipsing binary. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.03464>
- Michel, R., Barani, C., Martignoni, M., Acerbi, F., & Altamirano-Dévora, L. (2023). PHOTOMETRIC STUDY OF TWO CONTACT BINARY SYSTEMS AND A DETACHED LATE DWARF + M DWARF COMPONENTS. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 59, 123-135. <https://doi.org/10.22201/ia.01851101p.2023.59.01.09>
- Morris, B. M., Tollerud, E., Sipőcz, B., Deil, C., Douglas, S. T., Medina, J. B., Vyhmeister, K., Smith, T. R., Littlefair, S., Price-Whelan, A. M., Gee, W. T., & Jeschke, E. (2018). astroplan: An Open Source Observation Planning Package in Python. *The Astronomical Journal*, 155(3), 128. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aaa47e>
- Nelder, J. A., & Mead, R. (1965). A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*, 7(4), 308-313. <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>
- O'Connell, D. J. K. (1951). The so-called periastron effect in close eclipsing binaries [ADS Bibcode: 1951PRCO....2...85O]. *Publications of the Riverview College Observatory*, 2, 85-100. Consultado el 29 de julio de 2024, desde <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1951PRCO....2...85O>
- Odesse, P. E., & Lovekin, C. (2022). Using Computational Models to Uncover the Parameters of Three Kepler Binaries: KIC 5957123, KIC 8314879, and KIC 10727668 [Publisher: IOP ADS Bibcode: 2022ApJ...926...46O]. *The Astrophysical Journal*, 926, 46. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac4156>
- Pedregosa, F., Varoquaux, G., Gramfort, A., Michel, V., Thirion, B., Grisel, O., Blondel, M., Prettenhofer, P., Weiss, R., Dubourg, V., Vanderplas, J., Passos, A., Cournapeau, D., Brucher, M., Perrot, M., & Duchesnay, É. (2011). Scikit-

- learn: Machine Learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12(85), 2825-2830. Consultado el 8 de mayo de 2024, desde <http://jmlr.org/papers/v12/pedregosa11a.html>
- Poro, A., Sarabi, S., Zamanpour, S., Fotouhi, S., Davoudi, F., Khakpash, S., Salehian, S. R., Madayen, T., Foroutanfar, A., Bakhshi, E., Mahdavi, N. S., Alicavus, F., Farahani, A. M., Sabbaghian, G., Hosseini, R. S., Aryaeefar, A., & Hemati, M. (2022). Investigation of the Orbital Period and Mass Relations for W UMa-type Contact Systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 510(4), 5315-5329. <https://doi.org/10.1093/mnras/stab3775>
- Prialnik, D. (2010). *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge University Press.
- Prša, A., Conroy, K. E., Horvat, M., Pablo, H., Kochoska, A., Bloemen, S., Giamarco, J., Hambleton, K. M., & Degroote, P. (2016). Physics Of Eclipsing Binaries. II. Toward the Increased Model Fidelity [Publisher: IOP ADS Bibcode: 2016ApJS..227...29P]. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 227, 29. <https://doi.org/10.3847/1538-4365/227/2/29>
- Prša, A., Guinan, E. F., Devinney, E. J., DeGeorge, M., Bradstreet, D. H., Giamarco, J. M., Alcock, C. R., & Engle, S. G. (2008). Artificial Intelligence Approach to the Determination of Physical Properties of Eclipsing Binaries. I. The EBAI Project [Publisher: IOP ADS Bibcode: 2008ApJ...687..542P]. *The Astrophysical Journal*, 687, 542-565. <https://doi.org/10.1086/591783>
- Prša, A. (2011, junio). *PHOEBE Scientific Reference: PHOEBE version 0.30* (inf. tén.). Villanova University College of Arts, Sciences Department of Astronomy y Astrophysics.
- Roulston, B. R., Green, P. G., & Kesseli, A. Y. (2020). Classifying Single Stars and Spectroscopic Binaries Using Optical Stellar Templates. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 249(2), 34. <https://doi.org/10.3847/1538-4365/aba1e7>

- Samus, N. (2016, diciembre). *GCVS Variability Types and Distribution Statistics of Designated Variable Stars According to their Types of Variability*. Consultado el 10 de abril de 2024, desde <http://www.sai.msu.su/gcvs/gcvs/vartype.htm>
- Scargle, J. D. (1982). Studies in astronomical time series analysis. II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. [Publisher: IOP ADS Bibcode: 1982ApJ...263..835S]. *The Astrophysical Journal*, 263, 835-853. <https://doi.org/10.1086/160554>
- Schlafly, E. F., & Finkbeiner, D. P. (2011). MEASURING REDDENING WITH SLOAN DIGITAL SKY SURVEY STELLAR SPECTRA AND RECALIBRATING SFD [Publisher: The American Astronomical Society]. *The Astrophysical Journal*, 737(2), 103. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/737/2/103>
- Skelton, P., & Smits, D. (2009). Modelling of W UMa-type variable stars. *South African Journal of Science*, 105, 120-126. <https://doi.org/10.4102/sajs.v105i3/4.62>
- Smith, R. C. (2007, 23 de enero). Cataclysmic Variables. <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0701654>
- Speagle, J. S. (2020, 7 de marzo). A conceptual introduction to markov chain monte carlo methods. Consultado el 3 de junio de 2024, desde <https://arxiv.org/abs/1909.12313>
- Szkody, P., Anderson, S. F., Agüeros, M., Covarrubias, R., Bentz, M., Hawley, S., Margon, B., Voges, W., Henden, A., Knapp, G. R., Vanden Berk, D. E., Rest, A., Miknaitis, G., Magnier, E., Brinkmann, J., Csabai, I., Harvanek, M., Hindsley, R., Hennessy, G., ... York, D. G. (2002). Cataclysmic Variables from The Sloan Digital Sky Survey. I. The First Results [ADS Bibcode: 2002AJ....123..430S]. *The Astronomical Journal*, 123, 430-442. <https://doi.org/10.1086/324734>
- Thompson, S. E., Everett, M., Mullally, F., Barclay, T., Howell, S. B., Still, M., Rowe, J., Christiansen, J. L., Kurtz, D. W., Hambleton, K., Twicken, J. D., Ibrahim, K. A., & Clarke, B. D. (2012). A class of eccentric binaries with

- dynamic tidal distortions discovered with kepler [Publisher: The American Astronomical Society]. *The Astrophysical Journal*, 753(1), 86. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/753/1/86>
- Tody, D. (1986, 13 de octubre). The iraf data reduction and analysis system. En D. L. Crawford (Ed.). <https://doi.org/10.1111/12.968154>
- VanderPlas, J. T., & Ivezić, Ž. (2015). PERIODOGRAMS FOR MULTIBAND ASTRONOMICAL TIME SERIES [Publisher: The American Astronomical Society]. *The Astrophysical Journal*, 812(1), 18. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/812/1/18>
- van Leeuwen, F., de Bruijne, J., Babusiaux, C., Busso, G., Castañeda, J., Ducourant, C., Fabricius, C., Hambly, N., Hobbs, D., Luri, X., Marrese, P. M., Mora, A., Muinonen, K., Pourbaix, D., Rimoldini, L., Roegiers, T., Sartoretti, P., Teyssier, D., Ulla, A., ... Zucker, S. (2022, junio). Gaia DR3 documentation. <https://gea.esac.esa.int/archive/documentation/GDR3/index.html>
- Wadhwa, S., Tothill, N., Filipovic, M., & De Horta, A. (2023, 28 de septiembre). Effective Temperature and the Light Curve Solution of Contact Binary Systems. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.16946>
- Wenger, M., Ochsenbein, F., Egret, D., Dubois, P., Bonnarel, F., Borde, S., Genova, F., Jasniewicz, G., Laloë, S., Lesteven, S., & Monier, R. (2000). The SIMBAD astronomical database: The CDS reference database for astronomical objects. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 143(1), 9-22. <https://doi.org/10.1051/aas:2000332>
- Wilson, R. E. (1979). Eccentric orbit generalization and simultaneous solution of binary star light and velocity curves. [ADS Bibcode: 1979ApJ...234.1054W]. *The Astrophysical Journal*, 234, 1054-1066. <https://doi.org/10.1086/157588>
- Wilson, R. E., & Devinney, E. J. (1971). Realization of Accurate Close-Binary Light Curves: Application to MR Cygni [Publisher: IOP ADS Bibcode: 1971ApJ...166..605W]. *The Astrophysical Journal*, 166, 605. <https://doi.org/10.1086/150986>