

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemático

Búsqueda y Estudio Fotométrico de Sistemas Binarios Eclipsantes

Tesis de Maestría en Astrofísica Planetaria y Tecnologías Afines

Presentada por:

**Ramón Caballero
Villegas**

Asesor:

**Dr. Andrés Alberto
Avilés Alvarado**

Año Académico 2022-2023

Resumen

Índice general

I	Introducción	2
1.	Estrellas	3
1.1.	Formación	3
1.2.	Secuencia Principal	4
1.2.1.	Equilibrio Hidrostático	4
1.2.2.	Equilibrio Termodinámico Local	5
1.3.	Atmósfera Estelar	6
1.3.1.	Atmósfera de Kurucz	6
1.4.	Evolución	7
2.	Sistemas Binarios	9
2.1.	Geometría del Sistema - Modelo de Roche	9
2.1.1.	Generalización a Órbitas Excéntricas y Asincrónicas	14
2.1.2.	Superficies Equipotenciales	14
2.2.	Clasificación Morfológica	15
2.2.1.	Sistemas Separados	16
2.2.2.	Sistemas Semi-separados	16
2.2.3.	Sistemas en Contacto	17
2.3.	Clasificaciones Observacionales	17
2.4.	Binarias Eclipsantes	18
2.4.1.	EA - Algol	18
2.4.2.	EB - β Lyrae	19
2.4.3.	EW - W UMa	19
3.	PHOEBE - Modelo Computacional	21
3.1.	Estructura de PHOEBE	21
3.2.	“Modelo Hacia Adelante”	23
3.2.1.	Discretización de la Superficie Estelar	24
3.2.2.	Distribución de Parámetros Superficiales	26
3.2.3.	Radiación Emergente	27
3.3.	El Problema Inverso	29
3.3.1.	Función de Calidad	30
3.3.2.	Estimación Inicial de Parámetros	31
3.3.2.1.	Geometría de la Curva de Luz	32
3.3.2.2.	EBAI - Eclipsing Binaries via Artificial Intelligence	32
3.3.3.	Optimización de Parámetros	34
3.3.3.1.	Simplex de Nelder-Mead	34
3.3.3.2.	Correcciones Diferenciales	34

3.3.4. Muestreo de la Función de Densidad de Probabilidad Posterior	35
3.3.4.1. <code>emcee</code> : MCMC en Python	37
II Muestra	38
4. Catálogos	39
4.1. Gaia	39
4.1.1. Fotometría	39
4.1.2. Data Release 2	39
4.2. Sloan Digital Sky Survey	40
4.2.1. Data Release 9	40
4.3. Szkody, et al. (2002): Cataclysmic Variables from the Sloan Digital Sky Survey .	40
5. Selección de Objeto	42
5.1. Búsqueda en Gaia	42
5.2. Selección de Objetos Observables	42
5.3. Búsqueda en SIMBAD	43
5.4. ATO J339.9469+45.1464 - EclBin_Candidate	43
5.4.1. Datos de Gaia	44
5.4.2. Datos de ZTF	44
6. Observaciones	45
6.1. Observatorio Astronómico Universitario - Iturbide	45
6.2. Fotometría	46
6.2.1. Estrellas de Comparación	47
6.2.2. Procesamiento de Imágenes	47
6.2.3. Fotometría Diferencial	48
III Metodología y Análisis de Datos	51
7. Periodo Orbital	52
8. Normalización de Flujos	54
8.1. Preservación de Color	54
9. Modelo Computacional	56
9.1. Estimaciones Iniciales	56
9.1.1. Elección del Modelo Inicial	56
9.2. Optimización de Parámetros	58
A. Gaia ADQL Queries	60
A.1. DR2	60
A.2. DR3	60

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Estrellas

Las **estrellas** son de los objetos más fundamentales e importantes en el estudio de los astros. LeBlanc (2010, Capítulo 1) define una estrella como “un objeto celeste en el cual existe, o alguna vez existió (en el caso de una estrella muerta) fusión de hidrógeno sostenido en su núcleo.” El núcleo de cada estrella activa alcanza temperaturas en el orden de decenas de millones Kelvin, lo cual permite forjar nuevos elementos más pesados mediante el proceso de fusión nuclear. El mecanismo principal para la generación de energía es la fusión de hidrógeno a helio: $4 \text{ } ^1\text{H} \rightarrow \text{ } ^4\text{He} + E$. Dentro de todas las estrellas existe un balance de fuerzas que mantiene la forma esférica de la estrella; esto se le conoce como el *equilibrio hidrostático*, en el cual la presión interna de la estrella tiene una contra-fuerza equivalente del peso de su mismo gas. Este balance es modelado a escalas menores a las de las propiedades macroscópicas de la estrella Prialnik (2010, Capítulo 2), en la cual la estrella está en un estado de *equilibrio termodinámico local*.

Una estrella es caracterizada por sus propiedades físicas, como su masa, composición química, radio, y temperatura. A continuación se planta una base para describir la estructura de una estrella al igual que su evolución, empezando con la formación de una *protoestrella*, la cual a lo largo del tiempo se transforma en una estrella.

1.1 Formación

El **medio interestelar** (ISM por sus siglas en inglés) es la región de espacio que existe entre el Sol y el resto de las estrellas dentro de nuestra Galaxia. Está compuesto de todo el polvo, gas, y partículas libres como los rayos cósmicos que atraviesan el espacio. La distribución de este material no es uniforme a cortas escalas de distancias astronómicas, por lo cual se observan acumulaciones de gas y polvo que se les conoce como **nubes moleculares**. Estas nebulosas se encuentran a temperaturas extremadamente frías, hasta los 10-20 K en su estado de equilibrio. Sin embargo, la nube puede llegar a ser perturbada de este estado, lo cual causa una distribución de masa y un campo gravitacional no uniforme, dando forma a cúmulos densos de material.

Dado suficiente tiempo una nube molecular va colapsando bajo su propio peso, donde la presión en la nube causa que el material se acumule en un solo punto en el espacio. Mientras más aumente la presión el gas se calienta; este proceso sigue hasta llegar a un equilibrio entre la presión interna del gas y la fuerza compresiva de gravedad, en donde la nube deja de contraerse. Dependiendo de la temperatura a la que alcanza el núcleo determina si se convierte en una estrella capaz de mantener una reacción continua de fusión nuclear. La masa mínima para que una nube molecular colapse a una estrella es de $0.08 M_{\odot}$ LeBlanc (2010, Capítulo 2). De no cumplir con esta condición, el cúmulo de gas y polvo no logrará mantener la cadena de reacciones termonucleares en su núcleo, resultando en una *enana café*, un objeto inerte resultado del proceso fallido de formación estelar.

Una vez que el material de la nube se estabilice—una vez que el objeto empiece a producir energía de orden de magnitud estelar—nace una **protoestrella**. Estos objetos extensos (aproximadamente $500 R_{\odot}$ para una protoestrella de $1 M_{\odot}$ Kutner (2017, Capítulo 15)) se mantienen a una baja temperatura durante esta etapa de su vida, alrededor de 2500 K en su superficie. Sin embargo, debido a la alta densidad, la nube no es completamente transparente, por lo cual solo la superficie es capaz de liberar energía por medio de radiación infrarroja; la energía producida en su interior primero debe de viajar a la superficie por medio de convección. Conforme va evolucionando la nube se sigue comprimiendo hasta llegar a un punto en el cual puede mantener reacciones termonucleares continuas en su núcleo, llegando al punto de ser una estrella en **secuencia principal**. La **Figura 1.1** muestra la evolución de una protoestrella a una estrella secuencia principal con respecto a su temperatura y luminosidad.

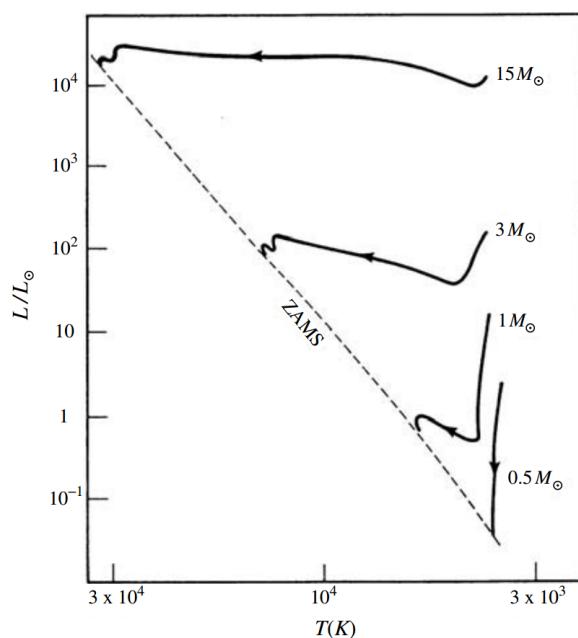


Figura 1.1: Diagrama de la evolución de una protoestrella hasta llegar a *ZAMS* (*Zero Age Main Sequence*), la edad a la que se convierte en una estrella de secuencia principal. Se muestran varios caminos evolutivos de una protoestrella en función de su masa, el cual es el parámetro de mayor importancia en su evolución y estado final. Figura obtenida de Kutner (2017, Capítulo 15).

1.2 Secuencia Principal

Una vez que una estrella llegue su etapa de secuencia principal el sistema se vuelve estable a largas escalas temporales. En este estado la estrella deja de comprimirse, ya que el colapso gravitacional es contrarrestado por la presión del gas caliente en su interior y la presión ejercida por la radiación producida en su núcleo. A continuación se definen dos conceptos importantes en la física estelar: el **equilibrio hidrostático** y el **equilibrio termodinámico local**.

1.2.1 Equilibrio Hidrostático

Podemos simplificar el modelo de una estrella al introducir la simetría esférica, en el cual las propiedades del gas que forma la estrella dependen únicamente de la distancia del núcleo. Para esto definimos la presión $P(r)$, densidad $\rho(r)$, temperatura $T(r)$, y aceleración gravitacional

$g(r)$ como funciones con respecto a la distancia r del centro. En base a estos fundamentos se puede deducir la estratificación de una estrella, formando varias capas de material con propiedades uniformes a lo largo de cada estrato. Dado que cada elemento está sujeto a un equilibrio de fuerzas descrita por la ecuación $P(r)dA - [P(r) + dP]dA - [\rho(r)dAdr]g(r) = 0$, la cual se ve en la **Figura 1.2**. Al simplificar esta ecuación e introduciendo un término para la presión radiativa—debido a la transferencia de momento de los fotones generados en el núcleo estelar al material circundante—se obtiene la **Ecuación 1.1**.

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)[g(r) - g_{rad}(r)] \quad (1.1)$$

Ecuación 1.1: Ecuación del equilibrio hidrostático para una estrella, tomando en cuenta los efectos de la presión radiativa saliente $g_{rad}(r)$. LeBlanc (2010, Capítulo 2)

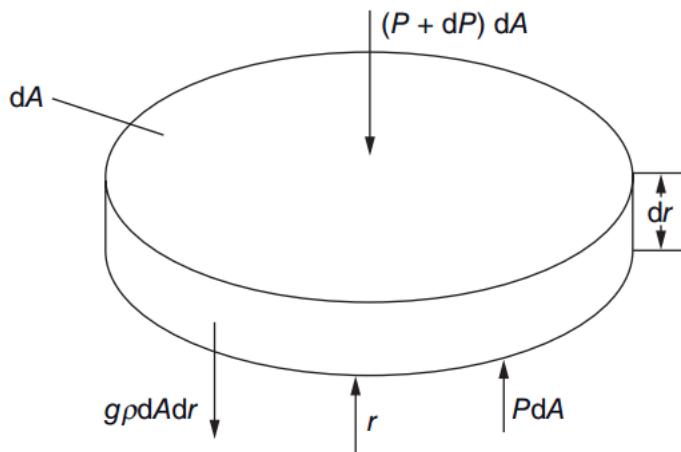


Figura 1.2: Diagrama de fuerzas actuando sobre cada elemento superficial dA de material de una estrella. Los efectos debido a elementos adyacentes son nulos, debido a que la presión en cada lado es constante, resultando en un gradiente de presión radial. Figura obtenida de LeBlanc (2010, Capítulo 2).

1.2.2 Equilibrio Termodinámico Local

Una estrella como resultado de su mecanismo de transporte de energía no está en un estado de equilibrio térmico. El núcleo, en donde se produce la gran mayoría de energía en una estrella, está a ordenes de magnitud más caliente que la fotosfera. Este transporte de energía ocurre principalmente por medio de *radiación y convección*; la conducción no juega un papel significativo. Para que una estrella se mantenga estable durante los miles de millones de años de su vida debe de estar en un tipo de equilibrio, donde cada estrato su volumen mantenga una composición estable a largas escalas de tiempo, lo cual implica que el flujo de energía que ingresa a cada capa es igual a la cantidad de energía que libera a la siguiente capa. Esto lleva a cabo otra simplificación en el modelo estelar: una estrella la podemos considerar como un sistema en **equilibrio termodinámico local**.

Para declarar que un sistema está en equilibrio termodinámico local debemos considerar el **caminio libre medio** de una partícula en el interior estelar. Considerando la distancia recorrida por un fotón antes de ser absorbido o esparcido por otra partícula obtenemos esta

medición, la cual dicta la escala de espacio del transporte de energía comparado a la escala espacial de la estrella. En el caso de que el camino libre medio sea significativamente menor que las dimensiones espaciales de la estrella su volumen se puede dividir en celdas discretas de tamaño despreciable, en las cuales cada una de las celdas está en equilibrio termodinámico dentro de si mismas Prialnik (2010, Capítulo 2). Por lo tanto, la estructura de la estrella se puede determinar siempre y cuando se sepa la masa de la estrella, y la densidad, temperatura, y composición química de cada punto en su interior.

1.3 Atmósfera Estelar

La gran mayoría de la radiación que recibimos de las estrellas—tanto de nuestro Sol como de sistemas estelares ajenos—provine de su **fotosfera**, la capa exterior sometida a la influencia gravitacional del astro. Debido al transporte de energía en los estratos interiores la fotosfera se encuentra a una temperatura a ordenes de magnitud menor que la temperatura en el núcleo; la intensidad monocromática de la estrella depende de esta temperatura, por lo cual la **distribución de energía espectral (SED)** por sus siglas en inglés) varía de la misma forma.

Un **cuerpo negro** es aquel objeto que se encuentra en un estado de equilibrio termodinámico con su ambiente, absorbiendo energía (en el caso de una estrella esta sería por medio de radiación) a la misma tasa que la emite Kutner (2017, Capítulo 2). El espectro de un cuerpo negro es descrito por la función de Planck (**Ecuación 1.2**), de la cual obtenemos la intensidad para cada longitud de onda dada la temperatura del cuerpo negro. La distribución espectral de energía se puede ver en la **Figura 1.3**. Esta aproximación, a pesar de omitir una parte apreciable de la composición de una estrella, es suficientemente adecuada para ciertos estudios donde no es necesario implementar un modelo complejo.

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (1.2)$$

Ecuación 1.2: Función de Planck describiendo la intensidad emitida por un cuerpo negro con temperatura T para una longitud de onda λ . h es la constante de Planck, k la constante de Boltzmann, y c la velocidad de la luz en un vacío.

Sin embargo, en la práctica la composición química de una estrella (conocido como su **metalidad**) llega a tener un efecto notable en su distribución espectral de energía medida. Esto se debe a la absorción, dispersión, y emisión de fotones por parte de las partículas en la atmósfera estelar, incluyendo electrones e iones libres, átomos, y moléculas esparcidas dentro de este volumen. Cada partícula interacciona con fotones de manera distinta, incluyendo la tasa de interacciones con respecto a la frecuencia de la radiación incidente. Existen varios códigos diseñados para modelar este comportamiento, llamados **model atmospheres** en inglés. Estos códigos reciben de entrada los parámetros conocidos de la estrella que se quiere modelar, su temperatura efectiva, aceleración gravitacional superficial, y metalicidad (en unidades solares), dando como resultado el espectro de la estrella.

1.3.1 Atmósfera de Kurucz

Entre los códigos de modelos de atmósferas estelares más utilizados está el de **ATLAS** escrito por Robert L. Kurucz. A continuación se especifican las suposiciones empleadas en el código de

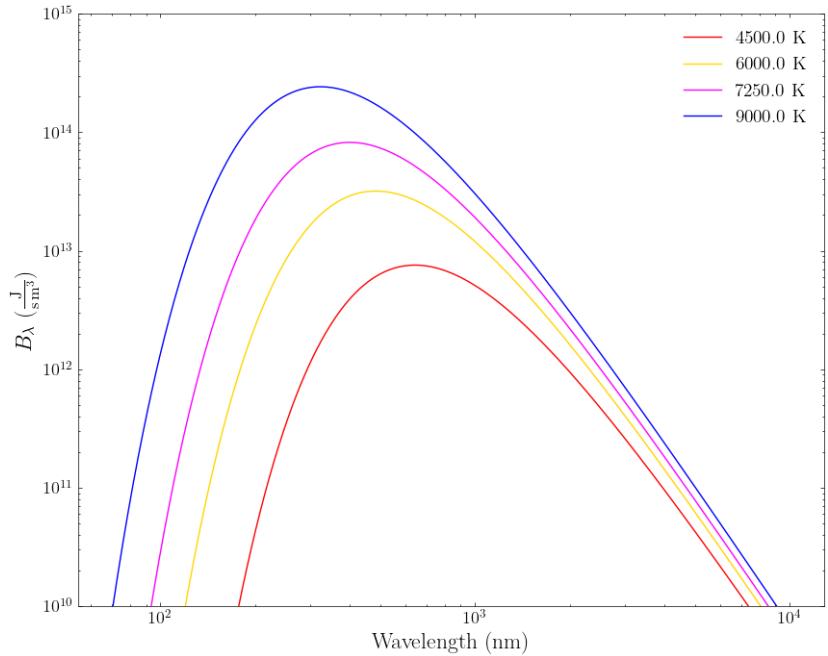


Figura 1.3: Intensidad de un cuerpo negro con temperatura efectiva especificada.

ATLAS descritas en Andrej Prša (2011, Sección 4.2); para una discusión completa del programa es necesario hacer referencia a Kurucz (1970).

Este modelo parte de las condiciones del *equilibrio hidrostático* y el *equilibrio termodinámico local* para una estrella, lo cual simplifica el problema a un trato unidimensional; las propiedades físicas de la atmósfera depende únicamente de su distancia al núcleo. El grosor de cada capa es ordenes de magnitud menor que la superficie que abarca la fotosfera estelar, lo cual permite modelar el estrato usando varios segmentos discretos que se aproximan a *planos paralelos*. La simetría esférica produce *capas homogéneas*, cuyas propiedades físicas como su composición química es uniforme en cada capa, solo variando con su profundidad. Esto también permite ignorar estructuras finas en la superficie de la estrella como la granulación y las manchas solares (en ciertos ajustes de modelos estas manchas aún son requeridas para un ajuste adecuado a los datos observacionales dados).

La **Figura 1.4** muestra el espectro sintético generado por el código ATLAS dado diferentes parámetros físicos. Estas aproximaciones son ideales para estudiar estrellas aisladas, las cuales son mayormente esféricas en forma. Sin embargo, este modelo tiene limitaciones significantes para estrellas deformes, como los sistemas binarios cercanos donde las fuerzas de marea causan una partida notable de su forma esférica. A pesar de no ser un modelo perfecto, en la mayoría de los casos es más adecuado utilizar un código como ATLAS que modelar una estrella como un simple cuerpo negro.

1.4 Evolución

En el transcurso del tiempo cada estrella será sujeta a ciertos cambios en su estructura. Esto se debe a que podemos considerar a una estrella como un objeto aislado en el espacio, lo cual significa que no tendrá algún ingreso de material significativo para reemplazar el combustible “quemado” en las reacciones termonucleares. A lo largo del tiempo la composición física y química de la estrella deberán cambiar para mantener el equilibrio termodinámico.

El combustible primario de una estrella viene siendo el hidrógeno atómico, el cual se fusiona con otros átomos (protón individuales) libres, resultando en la producción de grandes

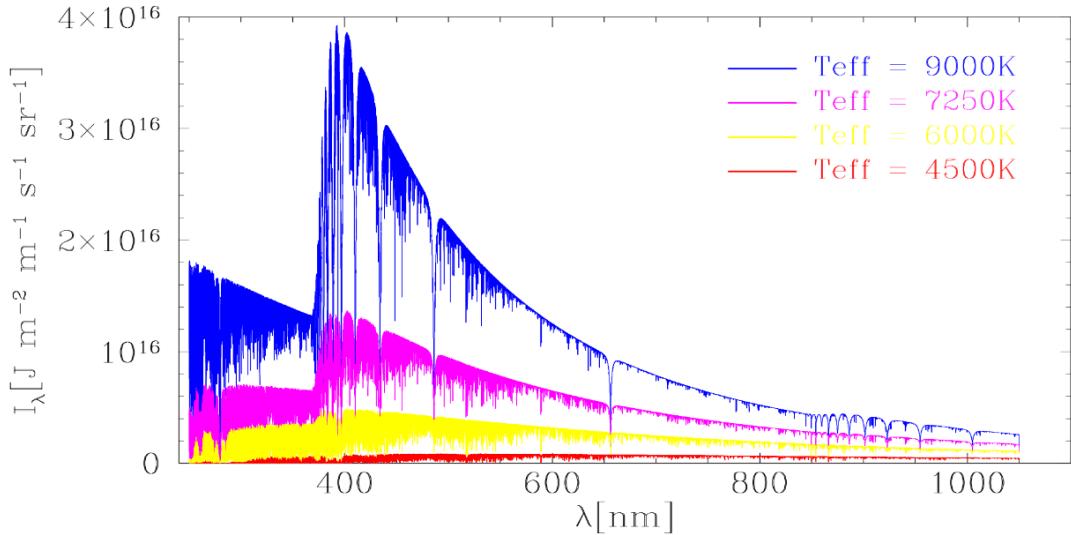


Figura 1.4: Espectros sintéticos de las tablas de Kurucz para estrellas de varias temperaturas. El resto de los parámetros físicos utilizados se mantuvieron fijos para los cuatro modelos: $\log g/g_0 = 4.0$ y $[M/H] = 0.0$. Figura obtenida de Andrej Prša (2011, Sección 4.2).

cantidades de energía en forma de radiación y moléculas de helio como producto. El helio no es inmediatamente útil para la estrella como combustible, ya que requiere temperaturas más altas de las que se encuentran durante esta fase evolutiva. Todas las estrellas conocidas pasan por esta etapa de evolución estelar; mientras que una estrella dependa principalmente del hidrógeno para brillar se dice que está en su etapa de *secuencia principal*.

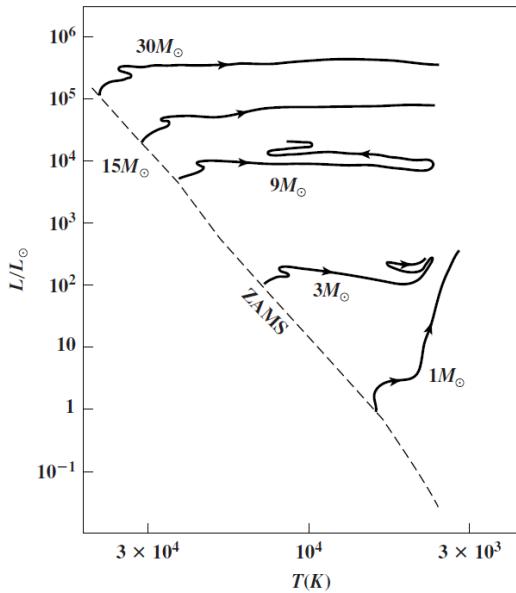


Figura 1.5: Evolución de estrellas de la secuencia principal basado en su masa inicial en el diagrama HR. La línea punteada representa la posición de la estrella en el primer momento que se integra a la secuencia principal. Al consumir el hidrógeno en su núcleo por las reacciones nucleares que ocurren en esta misma región se comienza a desatar el equilibrio delicado que mantiene la forma de la estrella. Esta deformación provoca una oscilación en su tamaño, causado por las fluctuaciones del balance entre la presión radiativa generada por las reacciones nucleares en el núcleo contra la presión gravitacional. Diagrama obtenido de Kutner (2017, Capítulo 2)

Capítulo 2

Sistemas Binarios

La gran mayoría de sistemas estelares dentro de nuestra Galaxia no son aquellos solitarios como nuestro propio sistema solar, si no que son compuestas de dos o más estrellas ubicadas en corta aproximación de una a otra, a ordenes de unidades astronómicas (AU por sus siglas en inglés). Estos sistemas multiples se pueden clasificar con mayor precisión para aquellos compuestos de solo dos estrellas, denominados como *sistemas binarios*. Dentro de un sistema binario la corta separación orbital entre ambas estrellas da como consecuencia a fenómenos que surgen mediante la interacción entre las componentes, tanto como la interacción gravitacional debido a sus masas, como a la física interesante que ocurre en el caso de interacciones de material entre una estrella a otra.

Los sistemas binarios estelares ofrecen un laboratorio celeste de gran importancia, ya que debido a la interacción a cortas escalas espaciales nos brindan información acerca de las estrellas que sería imposible obtener de otra manera. Andrej Prša (2011, Sección 2.1) menciona varios parámetros derivados de observaciones de estos sistemas, como las masas de cada una de las componentes estelares por medio de su interacción gravitacional, la calibración y estudio de la evolución estelar y su dependencia de la masa y luminosidad de la estrella; dadas observaciones de sistemas desconectados, en el cual ambas componentes son de la misma edad pero con diferentes propiedades que influyen su camino evolutivo. La clasificación de estos sistemas se basa tanto en propiedades observacionales—las cuales dependen tanto de las propiedades geométricas del sistema como de nuestra capacidad de observación, en cuanto a la capacidad de la instrumentación disponible—como en las propiedades físicas del sistema, incluyendo la proximidad de las componentes como sus propiedades lumínica.

2.1 Geometría del Sistema - Modelo de Roche

Es importante entender la forma geométrica de un sistema binario para llegar a una descripción adecuada de ellos. Esto incluye los parámetros orbitales de las estrellas tanto como la forma misma de ambas componentes, ya que en ciertos casos tratar las estrellas como esferas rígidas da como resultado un modelo incorrecto. A continuación se introduce las bases de las cuales se parte para llegar a una representación de un sistema modelo, llegando a describir el **modelo de Roche**.

Se define un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional considerando un marco de referencia no inercial, el cual está rotando con la misma velocidad que las componentes del sistema binario orbitan una a otra. Esta es una representación típica para el *problema de tres cuerpos*, en el cual tenemos a dos objetos masivos cuya influencia gravitacional se extiende al espacio representado por el sistema de coordenadas. En la **Figura 2.1** se puede ver este esquema, donde m_1 y m_2 representan ambas componentes estelares, posicionadas de tal manera que la distancia entre las estrellas solo tenga una componente en una dirección cartesiana.

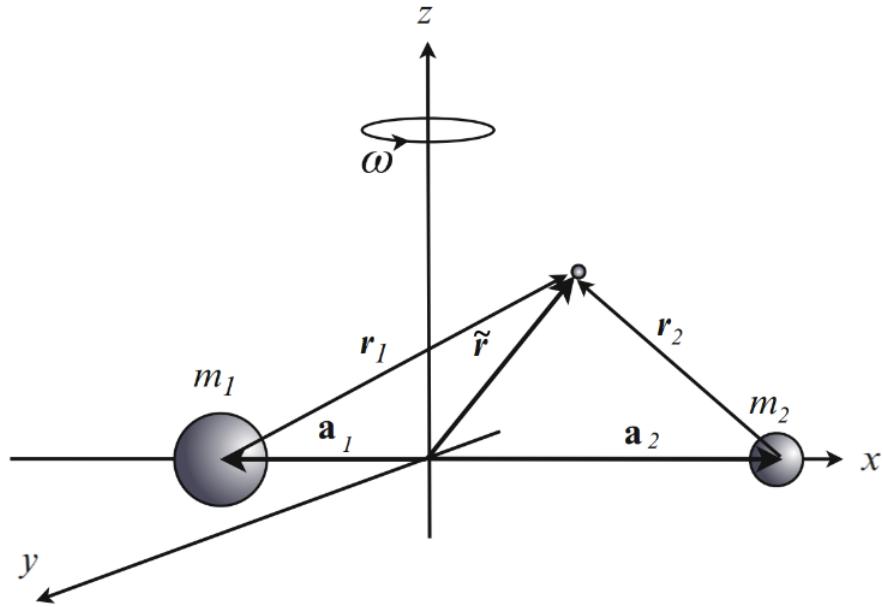


Figura 2.1: Configuración del problema de tres cuerpos dados dos objetos de alta masa m_1 y m_2 (las cuales representan cada componente estelar del sistema binario), y una partícula de masa despreciable de prueba ubicada a una distancia r_1 y r_2 de las estrellas respectivamente. El centro de masa del sistema está ubicado en el origen del sistema de coordenadas. Figura obtenida de Benacquista (2013, Sección 13.1), modificada cambiando los ejes y y x para que m_1 y m_2 estén ubicadas en el eje x para ser consistente con Andrej Prša (2011, Sección 3.1).

La **Figura 2.1** define el sistema de coordenadas rotando junto al sistema binario. La velocidad angular de Kepler está dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{P_{orb}} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}} \quad (2.1)$$

Donde $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ es la constante de gravitación universal, P_{orb} es el periodo orbital de las estrellas (el cual es igual para ambas estrellas de acuerdo a la segunda ley de Kepler), y $a = a_1 + a_2$ es el semieje mayor. Usando la **Ecuación 2.1** podemos definir el Lagrangiano para una partícula de prueba con masa m , el cual está a una distancia \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 de m_1 y m_2 respectivamente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{r}^2 + \frac{Gm_1m}{r_1} + \frac{Gm_2m}{r_2} \quad (2.2)$$

↓ Energía cinética rotacional
 ↑ Energía cinética lineal ↑ Potencial gravitacional

Donde \tilde{r} es la distancia al eje de rotación del marco de referencia, $r_1 = |\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{a}_1|$ y $r_2 = |\mathbf{r}_2| = |\mathbf{r} - \mathbf{a}_2|$. Utilizando los últimos 3 términos de la **Ecuación 2.2** podemos definir un pseudo-potencial que determina el movimiento de la partícula de prueba, tanto por la influencia gravitacional de las componentes como la fuerza centrifugal dada por la rotación del marco de referencia. Esta ecuación se puede simplificar al colocar el origen del sistema sobre la masa m_1 en vez de su centro de masa, donde $x_1 = 0$ es la posición de m_1 y $x_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$ es la

posición de la secundaria. Por lo tanto, la nueva coordenada del centro de masa del sistema se da por:

$$x_{\text{CoM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{qa}{1+q} \quad (2.3)$$

Donde se introduce el parámetro para la razón de masa $q = \frac{m_2}{m_1}$. En varios trabajos las componentes de un sistema binario son identificados de tal manera que $q \leq 1$; sin embargo, esta convención no suele ser conveniente al momento de crear un modelo del sistema (por ejemplo, Ding et al. (2022)), en donde se permite que $q > 1$ al asignar la componente primaria basado en parámetros orbitales en vez de sus masas.

Este potencial efectivo ψ se obtiene asumiendo una distribución de masa esférica para ambas estrellas Andrej Prša (2011, Sección 3.1):

$$\psi = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} - \frac{1}{2}\omega\tilde{r}^2 \quad (2.4)$$

Usando el potencial ψ es posible llegar a un potencial adimensional Ω el cual determina la forma de ambas componentes. La geometría del sistema se presta a un sistema de coordenadas esféricas, usando un ángulo polar θ cuyo valor va desde 0 en polo norte hasta 180° en el polo sur—paralelo al eje z en la **Figura 2.1**—y un ángulo azimutal ϕ cuyo valor es 0 en el eje x . Utilizamos las siguientes expresiones para convertir de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi = \lambda r \\ y &= r \sin \theta \sin \phi = \mu r \\ z &= r \cos \theta = \nu r \end{aligned} \quad (2.5)$$

En donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia entre la partícula de prueba ubicada en el punto (x, y, z) al origen del sistema de coordenadas. Partiendo del teorema de Pitágoras se puede llegar a una ecuación para calcular la distancia D entre dos puntos ubicados en (x, y, z) y (x', y', z') en un sistema de coordenadas esférico:

$$D = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (2.6)$$

La cual al expandir obtenemos:

$$D = \sqrt{x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2 + z^2 - 2zz' + z'^2} \quad (2.7)$$

Sustituyendo usando $d_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $d_2 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ como las distancias de ambos puntos al origen se obtiene:

$$D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2xx' - 2yy' - 2zz'} \quad (2.8)$$

$$D = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2[(\sin \theta \sin \theta')(\cos \phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta']} \quad (2.9)$$

Para obtener la distancia D en coordenadas esféricas es necesario hacer la conversión utilizando las **Ecuaciones 2.5**, llegando a la expresión final:

Donde los puntos (x, y, z) y (x', y', z') corresponden a (d_1, θ, ϕ) y (d_2, θ', ϕ') respectivamente. Se puede utilizar la **Ecuación 2.8** y **Ecuación 2.9**—y haciendo uso de las **Ecuaciones 2.5**—para obtener las distancias de la partícula de prueba m a ambas componentes estelares del sistema:

$$\begin{aligned} r_1 &= r \\ r_2 &= \sqrt{r^2 - 2ax + a^2} = \sqrt{r^2 - 2ar\lambda + a^2} \\ \tilde{r} &= \sqrt{(x - x_{\text{CoM}})^2 + y^2} = \sqrt{r^2(1 - \nu^2) - 2r\lambda x_{\text{CoM}} + x_{\text{CoM}}^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Notando que el origen del sistema de coordenadas está ubicada en la posición de la componente m_1 . Por lo tanto, el potencial es definido con respecto a m_1 ; para obtener el potencial con respecto a m_2 es necesario hacer una transformación descrita en Andrej Prša (2011, Sección 3.1). Sustituyendo las ecuaciones **Ecuaciones 2.10** en la expresión del potencial ψ se obtiene el potencial efectivo en coordenadas esféricas:

$$\psi(r, \lambda, \nu) = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{\sqrt{r^2 - 2ar\lambda + a^2}} - \frac{1}{2}\omega^2(r^2(1 - \nu^2) - 2r\lambda x_{\text{CoM}} + x_{\text{CoM}}^2) \quad (2.11)$$

Utilizando la tercera ley de Kepler de la forma $\omega^2 a^3 = G(m_1 + m_2)$ junto a la **Ecuación 2.3** y sustituyendo en la **Ecuación 2.11** se obtiene la forma final del potencial efectivo, eliminando la dependencia explícita a la velocidad angular del sistema y de la masa de la secundaria m_2 Andrej Prša (2011, Sección 3.1):

$$\begin{aligned} \psi(r, \lambda, \nu) = -\frac{Gm_1}{a} &\left[\frac{a}{r} + q \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - 2ar\lambda + a^2}} - \frac{r\lambda}{a} \right) \right. \\ &\left. + \frac{r^2}{2a^2}(1 + q)(1 - \nu^2) + \frac{q}{2(1 + q)} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

El potencial efectivo en la **Ecuación 2.12** se puede utilizar para definir un potencial adimensional, el cual define la forma de ambas componentes. Este potencial Ω se refiere al **potencial modificado de Kopal**, introducido en Kopal (1959, Capítulo III.1). Este potencial se relaciona con ψ por la siguiente ecuación:

$$\Omega = -\frac{a\psi}{Gm_1} - \frac{m_2^2}{2m_1(m_1 + m_2)} \quad (2.13)$$

$$\Omega = -\frac{a\psi}{Gm_1} - \frac{q^2}{2(1+q)} \quad (2.14)$$

El segundo término del RHS se puede simplificar multiplicando por $\frac{1/m_1^2}{1/m_1^2}$:

Sustituyendo la **Ecuación 2.12** en **Ecuación 2.14** obtenemos el potencial modificado de Kopal:

$$\Omega = \frac{1}{\varrho} + q \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho\lambda + 1}} - \varrho\lambda \right) + \frac{1}{2}(1+q)(1-\nu^2)\varrho^2 \quad (2.15)$$

Introduciendo la variable adimensional $\varrho = \frac{r}{a}$ usada en Andrej Prša (2011, Sección 3.1). Usando la **Ecuación 2.15** podemos determinar la forma de ambas estrellas asumiendo que la envoltura estelar (es decir, la capa superficial) coincide con superficies de **equipotenciales de Roche**, donde el valor de Ω es constante en toda la superficie Kopal (1959, Capítulo 3). Este modelo de las superficies estelares de un sistema binario comparte el nombre con el originador de esta idea, el matemático francés *Édouard Albert Roche* del siglo XIX. Sin embargo, para que este modelo sea una buena aproximación del fenómeno astrofísico debe de cumplir con las siguientes condiciones:

Órbita circular sincrónica - La formalización de los equipotenciales de Roche presentado en esta sección solo aplica para sistemas binarios cuya órbita es circular y sincrónica (los periodos de rotación de ambas estrellas son iguales al periodo orbital).

Oscilaciones no-radiales despreciables - Las estrellas por imbalances locales padecen de una distorsión anisótropo, el cual causa que la superficie estelar se desvíe del modelo de Roche. Sin embargo, en la mayoría de las estrellas estas oscilaciones no-radiales ocurren en el orden de la escala de tiempo hidrostática, la cual, por ejemplo, es de 15 minutos para una estrella tipo solar Kallrath y Milone (2009, Sección 3.1.5). Mientras la escala de tiempo de estas distorsiones sea despreciable con respecto al periodo orbital la superficie estelar (su fotosfera) se puede parametrizar con el modelo de Roche.

Alta densidad de masa - A pesar de que el material de una estrella esté distribuido por todo su volumen, el modelo de Roche simplifica la composición de una estrella a un punto infinitesimal el cual ejerce una fuerza gravitacional alrededor. Esta aproximación resulta en una superficie sin masa, cuya forma es dictada por el potencial de Roche. Esta aproximación permite derivar la expresión analítica en la **Ecuación 2.15**, la cual se puede aplicar a fenómenos de alta “condensación central” Kopal (1959, Capítulo III).

2.1.1 Generalización a Órbitas Excéntricas y Asincrónicas

Una desventaja del modelo de Roche presentado en la [Ecuación 2.15](#) yace en sus suposiciones principales; como consecuencia de estas, el potencial Ω definido hasta ahora solo puede ser aplicado a aquellos sistemas binarios cuya órbita es circular y sincrónica. Esto excluye los sistemas con órbitas excéntricas y/o asincrónicas, incluyendo sistemas binarios en contacto cuyas propiedades no pueden ser adecuadamente modeladas en este paradigma Kallrath y Milone (2009, [Sección 3.1.5](#)). R. E. Wilson (1979) generaliza el modelo de Roche a este tipo de órbitas, llegando a la siguiente expresión:

$$\Omega = \frac{1}{\varrho} + q \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \varrho^2 - 2\varrho\delta\lambda}} - \frac{\varrho\lambda}{\delta^2} \right) + \frac{F^2\varrho^2(1+q)(1-\nu^2)}{2} \quad (2.16)$$

Introduciendo dos términos: el *parámetro de sincronicidad* $F = \omega_{\text{rot}}/\omega_{\text{orb}}$ la razón de la velocidad angular rotacional de la componente a su velocidad angular orbital, y la *separación instantánea* entre ambas componentes $\delta = D/a$ normalizada con respecto al semieje mayor a Andrej Prša (2011, [Sección 3.1](#)). El cambio principal de este potencial modificado se refleja en la dependencia en la fase orbital del campo potencial; debido a la excentricidad del sistema, las componentes no mantienen una distancia constante una de otra, por lo cual el potencial de ser nuevamente calculado para cada fase. Al igual, este modelo considera aquellos casos donde $F \neq 1$, ignorando los efectos de rotación diferencial en las estrellas por simplicidad. Para el caso de una órbita sincrónica y circular (es decir, $F = 1$ y $D = a$) la [Ecuación 2.16](#) se reduce a la [Ecuación 2.15](#). Partiendo de esta ecuación se puede determinar la forma de ambas estrellas.

2.1.2 Superficies Equipotenciales

La forma de una estrella en el modelo de Roche es determinada por una **superficie equipotencial**, en la cual el valor del potencial Ω es igual, identificado por un contorno. Una forma conveniente de definir la superficie de un sistema es dando el valor de Ω en el polo norte de la estrella primaria, en las coordenadas polares ($\theta = 0 \rightarrow \lambda = 0, \nu = 1$); partiendo de este valor, incluyendo otros parámetros del sistema como la razón de masa y el semieje mayor de la órbita, se define el contorno para el valor del potencial del polo, denominado como Ω_{pol} . La expresión para el potencial del polo se reduce a:

$$\Omega_{\text{pol}} = \frac{1}{\varrho_{\text{pol}}} + \frac{q}{\sqrt{\delta^2 + \varrho_{\text{pol}}^2}} \quad (2.17)$$

Donde Ω_{pol} es el valor del potencial modificado de Roche en el polo de la estrella, y ϱ_{pol} es el radio normalizado al semieje mayor en el polo de la estrella. Usando esta expresión se puede parametrizar la forma y tamaño de la estrella utilizando un solo valor para el potencial; esto es gracias a la siguiente relación dada en Andrej Prša (2011, [Sección 3.1](#)):

$$\nabla p \parallel \rho \parallel \psi \quad (2.18)$$

Esta nos dice que el gradiente de la densidad ρ , la presión p , y el potencial efectivo ψ son paralelo uno a otro, lo cual necesariamente implica que una superficie constante del potencial coincide con las superficies constantes de densidad y presión. Esta superficie equipotencial es resuelta utilizando la [Ecuación 2.17](#) y [Ecuación 2.16](#), dando el valor $\Omega = \Omega_{\text{pol}}$ del sistema:

$$\frac{1}{\varrho_{\text{pol}}} + \frac{q}{\sqrt{\delta^2 + \varrho_{\text{pol}}}} = \frac{1}{\varrho} + q \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \varrho^2 - 2\varrho\delta\lambda}} - \frac{\varrho\lambda}{\delta^2} \right) + \frac{F^2\varrho^2(1+q)(1-\nu^2)}{2} \quad (2.19)$$

Esta es resuelta de manera iterativa para cada valor de λ y ν de la malla de valores utilizada en el problema. El resultado es la forma de ambas componentes del sistema binario, las cuales ya no son unas simples esferas o incluso elipses, si no que toman una forma de gota que sigue el campo de potencial establecido por medio de las fuerzas que rigen el sistema:

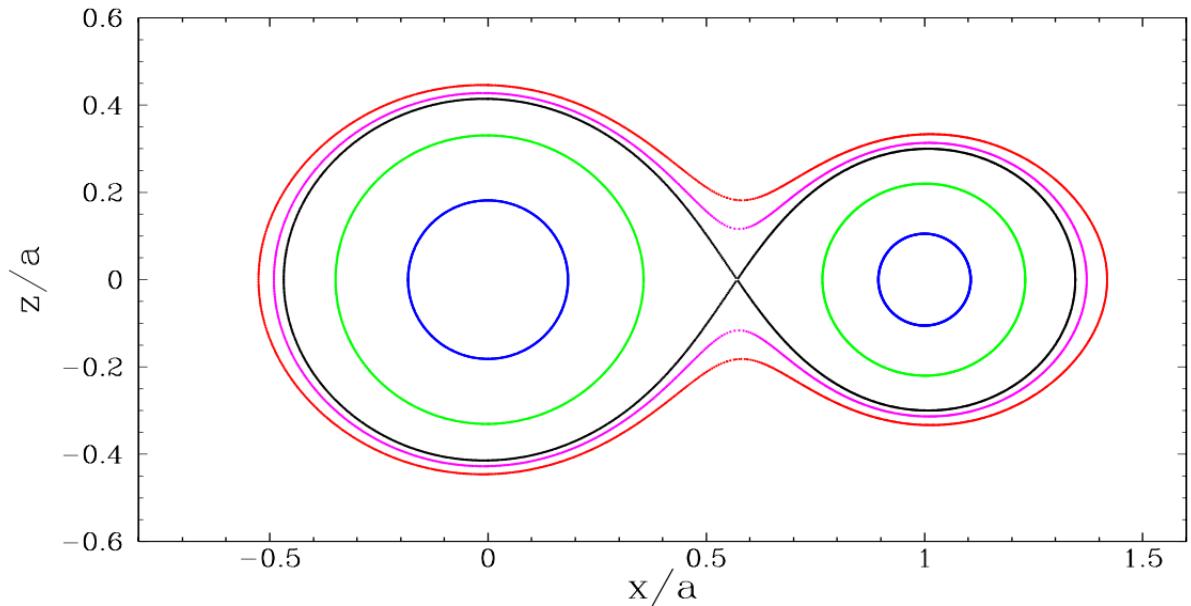


Figura 2.2: Distintas formas de las componentes dependiendo del valor dado para Ω . El potencial azul corresponde a $\Omega = 6.0$, verde a $\Omega = 3.5$, magenta a $\Omega = 2.8$, y rojo a $\Omega = 2.7$. La superficie negra corresponde a $\Omega = 2.87584$, el cual se le conoce como el **lóbulo de Roche crítico**. Figura obtenida de Andrej Prša (2011, Sección 3.1).

2.2 Clasificación Morfológica

Debido a que la estructura del potencial de Roche es una de las propiedades más importantes para un sistema binario estelar, se acostumbran a clasificar en base a la forma del potencial. Como se puede ver en la [Figura 2.2](#), diferentes valores para el potencial polar Ω_{pol} deforman ambas estrellas de maneras distintas, empezando con componentes mayormente esféricas para altos valores de Ω , hasta llegar a sistemas en contacto en el caso de $\Omega < 2.87584$; la importancia de este valor es explicada en esta sección.

2.2.1 Sistemas Separados

Los **sistemas separados** son aquellos cuya distancia orbital es suficientemente grande para que las componentes estelares no hagan contacto físico una con otra. Por lo tanto, estas componentes interactúan entre si principalmente mediante sus campos gravitacionales, distorsionando la forma de su compañera estelar. Las superficies estelares pueden ser mayormente esféricas o elipsoidales dependiendo del campo de potencial, como se puede ver en la [Figura 2.2](#) para los modelos que corresponden a $\Omega = 6.0$ y $\Omega = 3.5$. Estos sistemas son laboratorios importantes en el estudio de las propiedades físicas de las estrellas, debido no solo a que permiten calcular sus masas por medio de su interacción gravitacional, pero el hecho que no tengan contacto físico permite estudiar las propiedades evolutivas de las estrellas, ya que ambas componentes se desarrollan de manera independiente.

2.2.2 Sistemas Semi-separados

Un **sistema semi-separado** se distingue de otras morfologías debido a que la separación orbital de las componentes estelares llega a ser del orden de magnitud de unos cuantos radios solares. Esto causa que las superficies equipotenciales de ambas estrellas se acerquen una a otra. En la [Figura 2.2](#) se puede ver destacada la superficie de color negro, en el cual el potencial de una componente está en contacto con su compañera. Esta superficie se le conoce como el **lóbulo de Roche crítico**, o simplemente como el **lóbulo de Roche**. El punto en el que están en contacto es una región del espacio particular al problema de tres cuerpos, que se le conoce como un *punto de Lagrange*. Estas regiones del espacio dentro del marco de referencia no-inercial marcan donde las fuerzas ejercidas por el campo potencial de las componentes es igual a 0; una partícula dentro de una de estas regiones no es sometida a ninguna aceleración. La [Figura 2.3](#) muestra las posiciones relativas de los puntos de Lagrange.

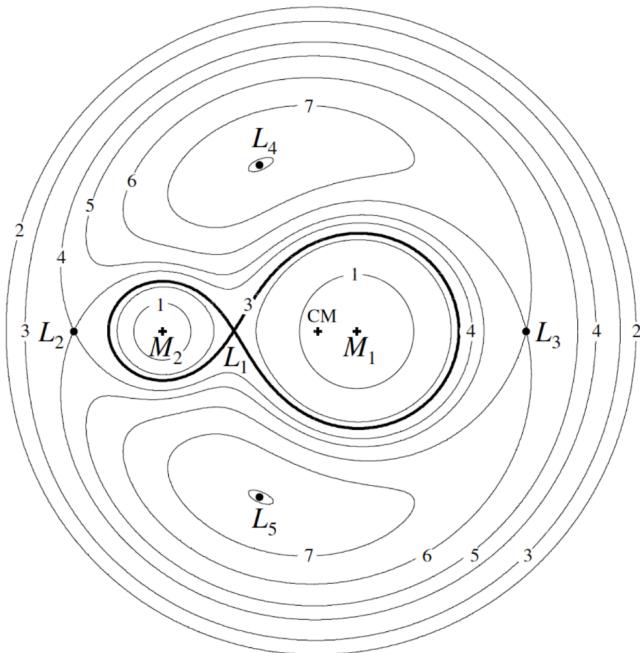


Figura 2.3: El modelo de Roche para un sistema binario con una razón de masa $q = m_2/m_1 = 0.25$. Se pueden apreciar los cinco puntos de Lagrange— L_1 - L_5 —que resultan del campo del potencial Ω . Figura obtenida de Ibáñez ([2021](#)).

De interés particular es el punto L_1 , el punto de contacto entre ambas componentes. Una vez que una componente llene su lóbulo de Roche, el material que previamente estaba ligado

a su superficie será atraída gravitacionalmente a la compañera estelar, iniciando un proceso de acreción de material. Las *variables cataclísmicas* son un ejemplo de este tipo de sistemas binarios semi-separados, donde la componente secundaria enana roja llena su lóbulo de Roche, transfiriendo material a la componente primaria enana blanca.

2.2.3 Sistemas en Contacto

Un sistema con un valor suficientemente pequeño de su potencial de Roche es un **sistema binario en contacto**. A diferencia de un sistema semi-separado, ambas componentes llenan su lóbulo de Roche en un sistema en contacto, haciendo contacto en el punto de Lagrange $L1$. Este caso de contacto (también llamado un sistema en *sobre-contacto* debido a que las estrellas no solo están en contacto con su lóbulo de Roche, si no que su material se derrama fuera del lóbulo crítico) da origen al fenómeno de una **envoltura común**: esta es una superficie equipotencial que envuelve a ambas estrellas, en lugar de que cada componente tenga su propia fotosfera independiente. La región de conexión—conocida como el “cuello” del sistema por su nombre en inglés—actúa como un puente entre las dos estrellas, sirviendo como un medio de transporte de tanto material estelar como energía. Ejemplos de superficies equipotenciales para estos sistemas se pueden ver en la **Figura 2.2**, las cuales corresponden a $\Omega = 2.8$ y $\Omega = 2.7$.

En el estudio de sistemas en contacto es importante introducir un nuevo parámetro el cual describe la cantidad en que el sistema está en sobre-contacto. El **factor de relleno**, por su nombre en inglés **fillout factor**, se define por medio de los valores del potencial en los puntos de Lagrange $L1 \rightarrow \Omega_{\text{crit}}^{L1}$ y $L2 \rightarrow \Omega_{\text{crit}}^{L2}$:

$$\mathcal{F} = \frac{\Omega - \Omega_{\text{crit}}^{L1}}{\Omega_{\text{crit}}^{L2} - \Omega_{\text{crit}}^{L1}} \quad (2.20)$$

Esta ecuación describe la concentración espacial del material superficial de las estrellas, definido únicamente con el potencial efectivo del sistema. El valor del factor de relleno está restringido los siguientes valores: $\mathcal{F} < 0$ para sistemas separados, $\mathcal{F} = 0$ para el caso de semi-contacto, y $0 < \mathcal{F} \leq 1$ para el caso de sobre-contacto. El factor de relleno resulta ser una parametrización útil al momento de modelar un sistema en contacto (por ejemplo, utilizando el paquete de software *PHOEBE*), debido a la precisión computacional que sería necesaria para ajustar los radios individuales de las estrellas.

2.3 Clasificaciones Observacionales

Dependiendo del método de detección y las propiedades aparentes del sistema se puede clasificar un sistema binario de estrellas. Estas clasificaciones son independiente de sus propiedades físicas, como la clase espectral de cada estrella o sus masas individuales. Al determinar su clasificación observational se puede delimitar las técnicas observacionales que son viables para recabar datos del sistema; un sistema astrométrico sería indistinguible de uno espectroscópico si uno intenta identificar las componentes individuales a simple vista, o con un telescopio demasiado débil para el trabajo.

Binarias visuales - aquellos sistemas cuya separación orbital aparente es suficientemente grande para distinguir las dos estrellas individuales en la bóveda celeste. A pesar de que se puede trazar la órbita de la secundaria con varios años de observaciones, se requiere de cálculos adicionales para determinar la órbita exacta de las componentes. Esto

se debe a la inclinación del sistema con respecto al eje de observación hacia la Tierra; solo es posible observar “una proyección del elipse orbital relativo en el plano del cielo,” aunque esto se puede superar usando el hecho de que la estrella primaria aparentemente inmóvil debe de estar presente “en un punto focal de la órbita relativa.” Karttunen et al. (2017, Capítulo 10)

Binarias espectroscópicas - presentan variaciones periódicas en sus espectros, en donde las líneas espectrales detectadas “oscilan periodicamente alrededor de la longitud de onda promedio” Kutner (2017, Capítulo 5). Esto se observa debido al *desplazamiento de Doppler*, lo cual causa que la frecuencia de un fotón se recorra hacia frecuencias más pequeñas (azules) o más grandes (rojas) dependiendo de su velocidad radial con respecto al observador, si se va acercando o alejando, respectivamente. Estas también pueden ser identificadas al observar dos distintos grupos de líneas espectrales, el cual es resultado de la contribución de ambas estrellas.

Binarias astrométricas - al igual que las espectroscópicas, las binarias astrométricas solo muestran una componente visible al ser observada, al contrario de las binarias visibles. Sin embargo, una binaria astrométrica difiere de las otras dos categorías definidas en cuestión de su movimiento observado en la bóveda celeste. Estas muestran un movimiento errático y no-lineal, algo que no se esperaría ver en una estrella solitaria dado su inercia según la primera ley de Newton. Estas perturbaciones son causadas por una estrella secundaria no aparente al observar el sistema.

2.4 Binarias Eclipsantes

Una de las propiedades más útiles de identificar de un sistema binario es la *inclinación* de su órbita con respecto a la línea de visión del sitio de observación (ya sea la Tierra en caso de un observatorio terrestre o un punto lejano dentro del sistema solar para un telescopio espacial). En dado caso que un sistema tenga una inclinación suficientemente alta se pueden observar eclipses dentro del sistema, en lo que una componente obscurece a su compañera de nuestra línea de visión, otorgando el nombre de **binaria eclipsante** a los sistemas que muestran este fenómeno. Aparte de su clasificación morfológica física, los sistemas binarios eclipsantes se pueden distinguir en 3 diferentes tipos de sistemas binarios cercanos, basados en la forma de su curva de luz.

2.4.1 EA - Algol

Las curvas de luz de tipo *EA* son atribuidas generalmente a sistemas binarios separados, donde ambas componentes estelares pueden mantener su forma esférica sin perturbaciones a escalas apreciables. Gracias a esta separación de las estrellas es posible definir claramente el comienzo y fin de ambos eclipses; fuera de los eclipses, la curva de luz se mantiene relativamente constante, mostrando variabilidad despreciable en casos de variabilidad elipsoidal (en el caso que las componentes no sean esferas perfectas debido a una leve distorsión por el potencial gravitacional) o en caso del calentamiento superficial de una componente por la radiación incidente de su compañera Samus (2016). Existen sistemas con un rango amplio de periodos orbitales, desde 4 horas hasta más de 25 años. Una curva de luz típica de un sistema *EA* se puede apreciar en la **Figura 2.4**.

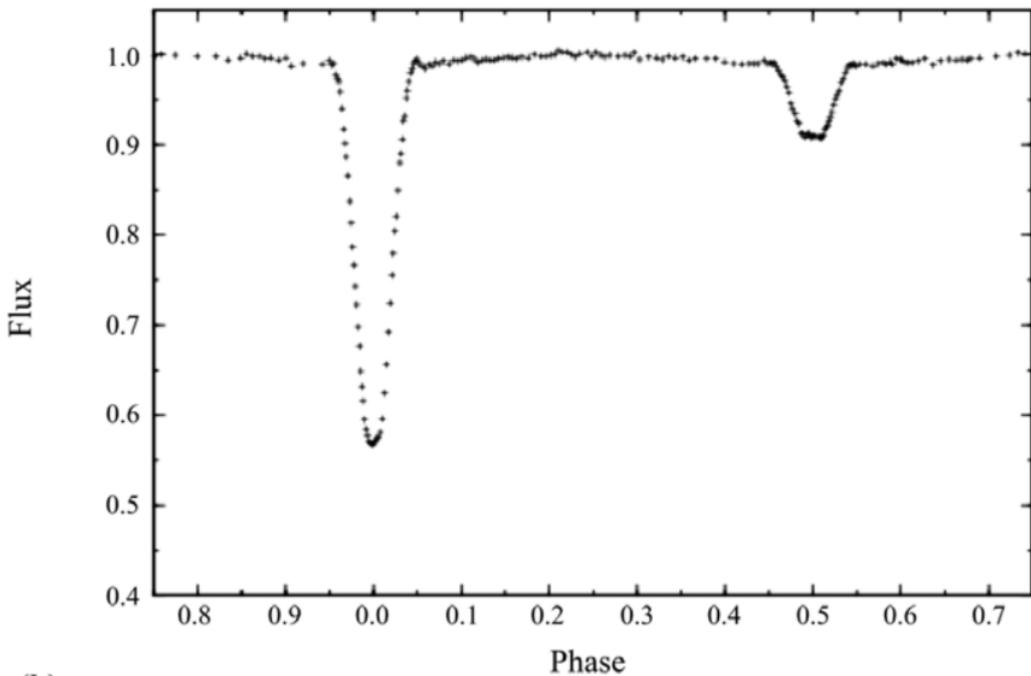


Figura 2.4: Curva de luz emblemática de un sistema eclipsante *EA*. Obtenida de Skelton y Smits (2009).

2.4.2 EB - β Lyrae

En el caso de un sistema eclipsante semi-separado, la curva de luz observada se le clasifica como tipo *EB*, o de tipo β Lyrae. En un sistema semi-separado una de las estrellas llena su lóbulo crítico de Roche, haciendo contacto con la superficie de su compañera. Esta distorsión es responsable de su forma elipsoidal en vez de esférica. El flujo que un observador recibe de una estrella es proporcional al área superficial visible en la línea de visión; en una estrella esférica, esta área es constante en el tiempo, pero en el caso de una estrella elipsoidal la cantidad de área observada depende de la fase orbital actual. Esto resulta en eclipses sin un comienzo y fin claramente delimitados. En la mayoría de los casos el periodo orbital de este tipo de sistemas es mayor de 1 día Samus (2016).

2.4.3 EW - W UMa

Sistemas en sobre-contacto, en donde ambas componentes llenan su lóbulo de Roche, producen curvas de luz que muestran variabilidad continua a lo largo de su órbita, parecido a los sistemas *EB*. Sin embargo, a diferencia de los sistemas semi-separados, ambas componentes de sistemas tipo *EW* están altamente acopladas una a otra, la diferencia de temperaturas siendo del orden de cientos de Kelvin—lo cual es evidente por la profundidad de ambos eclipses—de tipo espectral A-K Skelton y Smits (2009). El periodo orbital es menor de 1 día, del orden de unas cuantas horas, debido a su corta aproximación física. La envoltura común que comparten las estrellas es de una forma irregular; esta consiste de las superficies elipsoidales de las estrellas y del “cuello”, la región que llena el espacio alrededor del punto de Lagrange L1. Debido a esta geometría, cada fase orbital muestra una cantidad distinta de la superficie del sistema, causando la variabilidad continua en la curva de luz, sin una clara delimitación para ninguno de los eclipses. La **Figura 2.6** muestra una curva de luz típica de un sistema *EW*.

Una característica única de los sistemas *EW* es la diferencia en los máximos de la curva de luz. En ciertos casos puede ocurrir que un máximo del flujo sea mayor que el máximo medido

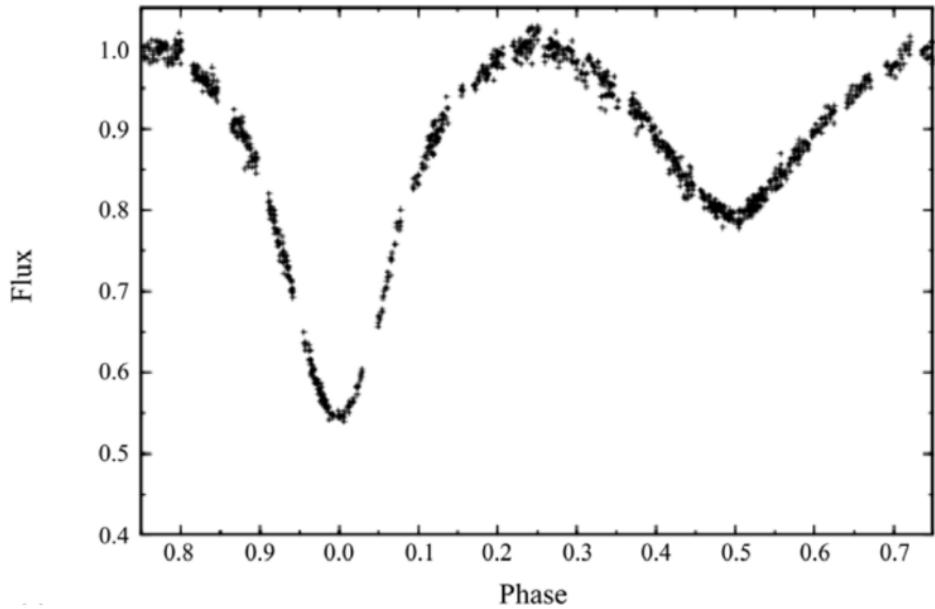


Figura 2.5: Curva de luz emblemática de un sistema eclipsante *EB*. Obtenida de Skelton y Smits (2009).

de el eclipse contrario, a pesar de estar viendo una cantidad similar de superficie estelar. Este fenómeno observational es denominado el *efecto O'Connell*. A pesar de que aún no es muy bien entendido la causa de este efecto, una de las interpretaciones más populares en la literatura es la presencia de manchas estelares [Ding et al. (2022) Raul Michel et al. (2023) R. Michel et al. (2016)], las cuales al ser más frías que el resto de la superficie llega a manifestar como una menor cantidad de radiación emitida por el sistema en ciertas fases. Esto se atribuye a la actividad magnética de la estrella, y se utiliza principalmente al momento de ajustar un modelo computacional a la curva de luz observada.

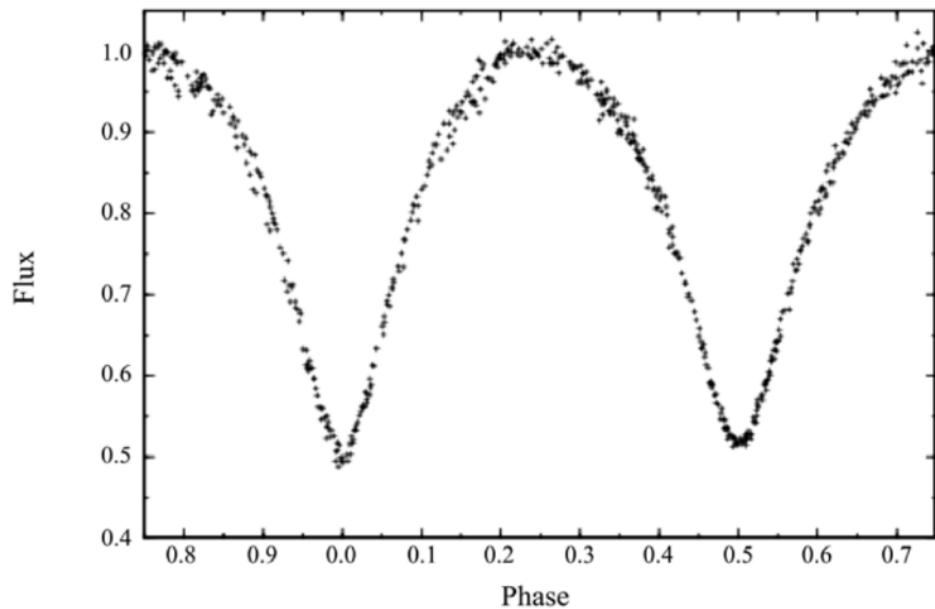


Figura 2.6: Curva de luz emblemática de un sistema eclipsante *EW*. Obtenida de Skelton y Smits (2009).

Capítulo 3

PHOEBE - Modelo Computacional

Como se ha planteado, los sistemas binarios estelares ofrecen una oportunidad de analizar el comportamiento y la estructura estelar que sería imposible deducir en estrellas aisladas. Sin embargo, el análisis analítico es una herramienta restringida en cuanto a la cantidad de información que puede extraer de una curva de luz; las ecuaciones que rigen un sistema binario no tienen una solución analítica. Para resolver este problema, se hacen códigos capaces de simular la física de un sistema binario, el cual partiendo de ciertos parámetros estelares y orbitales pueden reproducir los datos observacionales de un sistema equivalente en la bóveda celeste.

En el campo de sistemas binarios estelares, uno de los primeros códigos con mayor impacto es el código **Wilson-Devinney**, descrito por primera vez en Robert E. Wilson y Devinney (1971). El código de Wilson-Devinney—referenciado como el código **WD** en varias publicaciones—parte del modelo de Roche para representar las superficies de las estrellas, lo cual le permite hacer un trato adecuado de fenómenos físicos importantes como el oscurecimiento al limbo y el oscurecimiento gravitacional. A pesar de sobrepasar 5 décadas de edad el código WD sigue en uso actualmente en proyectos de investigación (por ejemplo, Li et al. (2022)), de los cuales se obtienen los parámetros físicos de un sistema binario estelar observado. Este trabajo de tesis de maestría utilizó la librería **PHOEBE** (PHysics Of Eclipsing BinariEs), basado en el código WD. En particular se hizo uso de la versión 2.4.13, notando las varias mejoras realizadas en esta segunda versión mayor en comparación con versiones menores a 2.0, las cuales utilizaban el código WD como el motor principal del modelo.

3.1 Estructura de PHOEBE

PHOEBE es un paquete de software escrito en Python para generar modelos de sistemas binarios estelares generales, partiendo del modelo de Roche y modelos de atmósferas estelares, produciendo datos sintéticos (curvas de luz fotométricas, velocidades radiales, perfil de líneas espectrales, etc.) para analizar y comparar con datos observados reales. Es posible crear un modelo utilizando un cliente gráfico¹ de PHOEBE, cuya funcionalidad depende de un servidor de PHOEBE (una instancia de `phoebe-server`) corriendo, de manera remota o local. Sin embargo, estas tienen sus limitaciones, y por lo general el equipo de PHOEBE recomiendan usar el paquete de Python de manera directa, escribiendo códigos en Python que llamen a funciones y manipulen los datos del modelo. Un código escrito y ejecutado no solo ofrece un mayor grado de libertad al momento de tratar los datos, si no que sirve como una receta que cualquiera puede analizar y ejecutar para obtener los mismos resultados de un experimento. Este trabajo de tesis únicamente hizo uso del paquete de PHOEBE en Python.

¹<http://phoebe-project.org/clients>

PHOEBE maneja cada sistema modelado como un *bundle*, el objeto principal responsable de almacenar no solo los parámetros del sistema, pero también los datos observados que corresponden al sistema físico. La **Figura 3.1** presenta un ejemplo de como crear un bundle de PHOEBE utilizando una curva de luz sintética (que solo se va a utilizar al momento de computar la curva observable del modelo, sin una contraparte real) y datos reales obtenidos del catálogo ZTF:

```

01 | import pandas as pd # paquete de manipulacion de datos
02 | import phoebe # importar el paquete
03 |
04 | # creando el bundle para un sistema binario en contacto
05 | b = phoebe.default_contact_binary()
06 |
07 | # agregando una curva de luz en el pasabanda Johnson:V para computar (
08 |     # no datos reales)
09 | b.add_dataset('lc', times=phoebe.linspace(0, 1, 101), dataset='lc01',
10 |               passband='Johnson:V')
11 | 
12 | # datos obtenidos del catalogo de ZTF; curva de luz fotometrica, en el
13 |     # pasabanda ZTF:g
14 | ztf_data: pd.DataFrame
15 |
16 | # agregando curva de luz observada por ZTF, incluyendo el flujo medido
17 |     # y su incertidumbre
18 | b.add_dataset('lc', times=ztf_data['times'], fluxes=ztf_data['fluxes'],
19 |               sigmas=ztf_data['flux_err'], passband='ZTF:g', dataset='lcZtfG')

```

Figura 3.1: Código para crear un bundle en PHOEBE junto a dos curvas de luz: lc01, una curva sintética en el pasabanda *Johnson:V*, y lcZtfG, una curva observada del sistema con datos proveniente de el catálogo de ZTF en el pasabanda *ZTF:G*. En el caso de lc01, solo se generarán datos sintéticos al momento de calcular el **modelo hacia adelante**.

A diferencia de otros códigos en el mundo de software, PHOEBE no utiliza mucho la programación orientada a objetos para manipular el modelo (por ejemplo, manipulando un objeto que represente la estrella primaria); la arquitectura de PHOEBE consolida todos los parámetros al nivel del bundle, tanto para tener acceso conveniente como para tener flexibilidad en cambiar el modelo de manera dinámica—por ejemplo agregando una componente de luz externa al sistema. Los parámetros de un bundle están organizados en una jerarquía, en donde un identificador no es único en un solo nivel. Por ejemplo, para inspeccionar la temperatura efectiva de las estrellas:

En la **Figura 3.2** se puede ver la estructura de los parámetros de un bundle, en el cual existen más de un parámetro con el calificador (`qualifier` por su nombre en inglés y su nombre en el código) `teff`. Estos se diferencian por la componente (`component` en el código) a la que le pertenecen, en donde `primary` se refiere a la estrella primaria y `secondary` a la secundaria, por sus identificadores respectivos en inglés. Más información—incluyendo la información más actual en el caso de ver una versión de PHOEBE mayor de 2.4.13—se puede encontrar en la página de documentación de PHOEBE².

²http://phoebe-project.org/docs/2.4/tutorials/general_concepts

```

01 | b: phoebe.Bundle # bundle de un sistema binario creado en un código
      anterior
02 | teff_primary = b.get_value(qualifier='teff', component='primary')
03 | b.set_value(qualifier='teff', component='secondary', value=teff_primary
      /2)

```

Figura 3.2: Definiendo un bundle almacenado en la variable `b`, el cual ya está configurado con ciertos parámetros del sistema. Estos son accesibles dentro del bundle; esto facilita la manipulación de parámetros del sistema programática, como se puede ver en este ejemplo al asignar el valor de la temperatura efectiva de la estrella secundaria como la mitad de la temperatura efectiva de la componente primaria.

3.2 “Modelo Hacia Adelante”

El propósito principal de códigos como PHOEBE cae en su capacidad para generar un “**modelo hacia adelante**” (traducido de forma directa de su nombre en inglés: **forward model**). Se parte de un modelo del sistema—en el caso de un sistema binario, este viene siendo el modelo de Roche junto a una formulación de las superficies estelares—el cual se va integrando en el tiempo, produciendo como resultado datos sintéticos observables como una curva de luz fotométrica o una curva de velocidades radiales. Un ejemplo de un sistema “de juguete” se puede ver en la **Figura 3.3**. Es importante notar que estos modelos se trabajan en el espacio fase de la órbita de un sistema; en casos donde el sistema no experimente algún cambio significativo a lo largo del tiempo, es suficiente computar el modelo para cada fase orbital observada, dado que una campaña de observación adecuada abarcaría las mismas fases orbitales más de una vez.

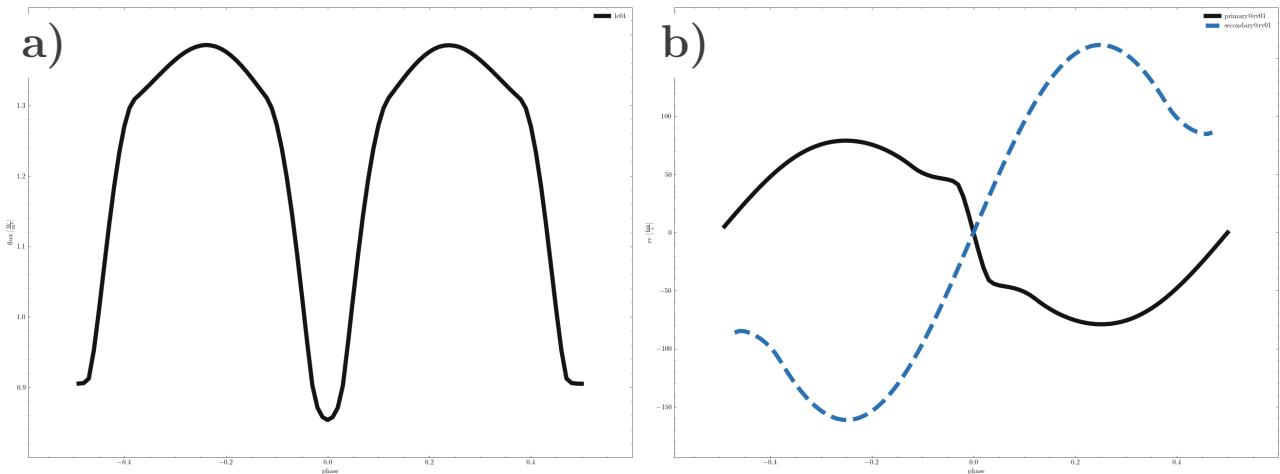


Figura 3.3: Datos sintéticos generados usando PHOEBE. Estas curvas representan un sistema binario separado, donde $M_1 = 1.0 M_\odot$, $M_2 = 0.5 M_\odot$, $R_1 = 2.0 R_\odot$, $R_2 = 1.2 R_\odot$, $T_1 = T_2 = 6000$ K, inclinación $i_{\text{orb}} = 90^\circ$ y periodo orbital $P_{\text{orb}} = 1.0$ d en una órbita sincrónica. La figura muestra dos diferentes tipos de observables: **a)** Curva de luz fotométrica, cuyas variaciones se deben a los eclipses en el sistema. **b)** Curva de velocidades radiales de ambas componentes, donde el movimiento de las estrellas individuales a lo largo de nuestra línea de visión causa fluctuaciones debido al efecto de Doppler.

Para generar datos sintéticos observables de un sistema binario, es necesario que PHOEBE tome ciertos aspectos en consideración, descritos a continuación en este capítulo.

3.2.1 Discretización de la Superficie Estelar

Partiendo del modelo de Roche es como se determina la superficie de ambas componentes, siguiendo el principio de superficies equipotenciales. Sin embargo, una descripción analítica de las variaciones de las propiedades estelares resultaría en una complejidad de tiempo intratable del problema; a pesar de permitirnos modelar pequeñas variaciones en los valores de cada parámetro superficial, este no es una opción realista dado la capacidad de computo actual. Es por esto que PHOEBE implementa un método el cual aproxima la superficie de las estrellas a un muestreo uniforme de puntos determinados por el modelo de Roche. Sin embargo, se requiere un tratamiento adicional del modelo de Roche; la **Ecuación 2.16** viene definida en coordenadas esféricas, lo cual causaría una distribución no uniforme en el tamaño de los elementos superficiales no deseada (aparte de causar un tipo de “costura” a lo largo del ecuador de la estrella Andrej Prša (2011, Sección 5.1.1)).

Para resolver este problema, se transforma la **Ecuación 2.16** a un sistema de coordenadas cilíndrico de acuerdo a las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} x &= \varrho_{\perp} \cos \phi \\ y &= \varrho_{\perp} \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{3.1}$$

Donde ϕ representa la longitud, ϱ_{\perp} es la componente en el plano orbital de la distancia al elemento superficial, y z mantiene su definición del sistema de coordenadas cartesianas. Utilizando estas transformaciones se llega a una expresión del potencial de Roche en coordenadas cilíndricas:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\varrho_{\perp} + z^2}} + q \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \varrho_{\perp}^2 + z^2 - 2\varrho_{\perp}\delta \cos \phi}} - \frac{\varrho_{\perp} \cos \phi}{\delta^2} \right) + \frac{F^2 (1+q) \varrho_{\perp}^2}{2} \tag{3.2}$$

Parecido a la **Ecuación 2.19** se puede llegar a una expresión similar para encontrar el valor de ϱ_{\perp} que le corresponde a los valores dados de ϕ y z , utilizando un método para encontrar raíces como el de *Newton-Raphson*:

$$f(\varrho_{\perp}) = \frac{1}{\sqrt{\varrho_{\perp} + z^2}} + q \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \varrho_{\perp}^2 + z^2 - 2\varrho_{\perp}\delta \cos \phi}} - \frac{\varrho_{\perp} \cos \phi}{\delta^2} \right) + \frac{F^2 (1+q) \varrho_{\perp}^2}{2} - \frac{1}{z_{\text{pol}}} - \frac{q}{\sqrt{z_{\text{pol}}^2 + \delta^2}} \tag{3.3}$$

↑ Potencial de Roche Ω
↑ Potencial de referencia en el polo Ω_{pol}

Donde se define $z_{\text{pol}} \equiv \varrho_{\text{pol}}$ como el valor de referencia del radio al polo de la estrella Andrej Prša (2011, Sección 5.1.1). Al hacer uso de la derivada $f'(\varrho_{\perp})$ —la cual se puede obtener como lo muestra Andrej Prša (2011, Sección 5.1.1)—es posible implementar un método para encontrar las raíces de esta ecuación. El muestreo de la superficie se hace a intervalos regulares de latitud y longitud:

$$\begin{array}{l}
 \text{Latitud} \\
 \downarrow \\
 \theta_k = \frac{\pi(k - 0.5)}{2N} \\
 \phi_l = \frac{\pi(l + [(l + 1) \bmod 2] \div 2)}{M_k} \\
 \text{Longitud} \\
 \uparrow
 \end{array} \tag{3.4}$$

Donde N es el número de elementos superficiales solicitados en la muestra. Se define los subíndices $k = 1 \dots N$ y $l = 1 \dots M_k$, donde $M_k := 1 + \text{int}(1.3N \sin \theta_k)$ Andrej Prša (2011, Sección 5.1). Una vez que se obtienen las posiciones de cada muestra se adopta una forma tal que forme una “malla” que representa la superficie estelar. Cada elemento de la malla se considera uniforme con respecto a sus propiedades, como su temperatura efectiva, gravedad superficial, el radio local, etc. En PHOEBE v2.0 y en adelante se utilizan elementos en forma de triángulos equiláteros, tal como se muestra en la **Figura 3.4**.

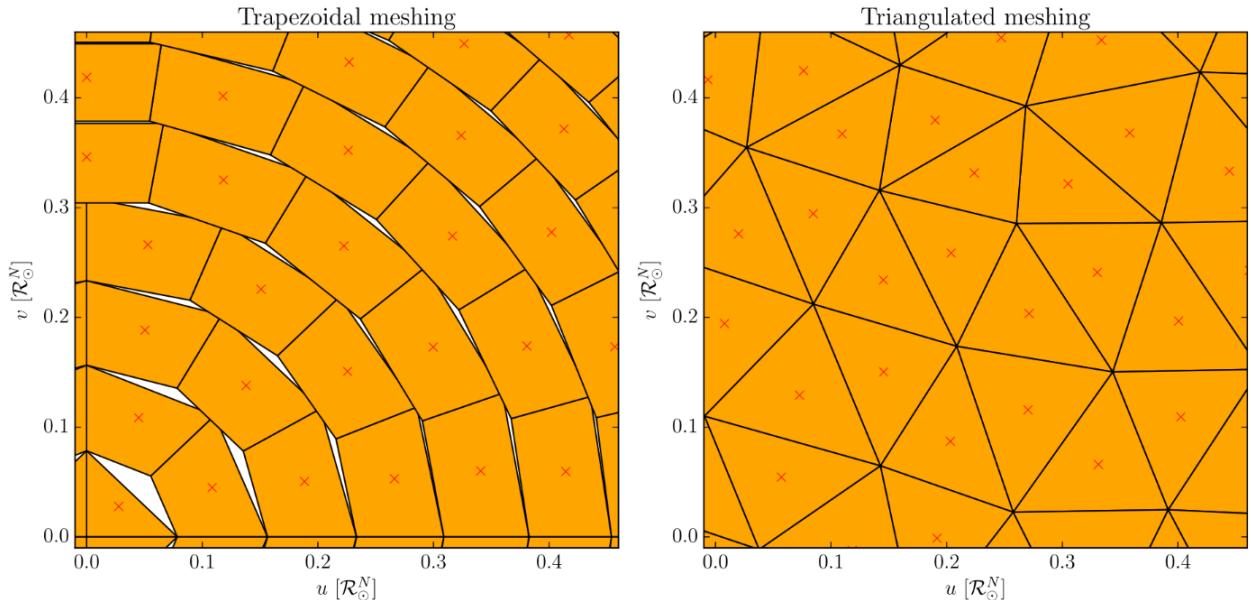


Figura 3.4: Comparación la discretización superficial usando elementos trapezoidales vs. triangulares en el polo estelar. Al utilizar elementos de área superficial idéntica se nota que en el caso de elementos trapezoidales llega a haber huecos en la superficie que se manifiestan en errores sistemáticos en las curvas sintéticas generadas por el modelo, debido a la contribución nula de estas fallas en la malla. Estos errores se ven más pronunciados entre mayor sea la distorsión experimentada por la estrella. Al utilizar elementos en forma de triángulos equiláteros se puede observar que se obtiene una superficie continua, eliminando esta fuente de error en el modelo. Figura obtenida de A. Prša, K. E. Conroy et al. (2016)

Esta malla de la superficie estelar se puede ver por completo en la **Figura 3.5**, donde los parámetros del sistema causan una distorsión apreciable de ambas estrellas debido a las fuerzas de marea en juego.

La malla, al igual que la superficie estelar, no es un objeto constante; en el caso de un sistema binario de órbita excéntrica las fuerzas de marea que causan estas distorsiones elipsoidales son dependientes de la fase orbital. A lo largo de la órbita del sistema, el campo del potencial de Roche va cambiando debido a la distancia no constante entre ambas componentes estelares. Uno de los principios del modelo de Roche es que las superficies estelares se ajustan al campo de fuerzas instantáneo del sistema, el cual va cambiando a escalas de tiempo significativamente

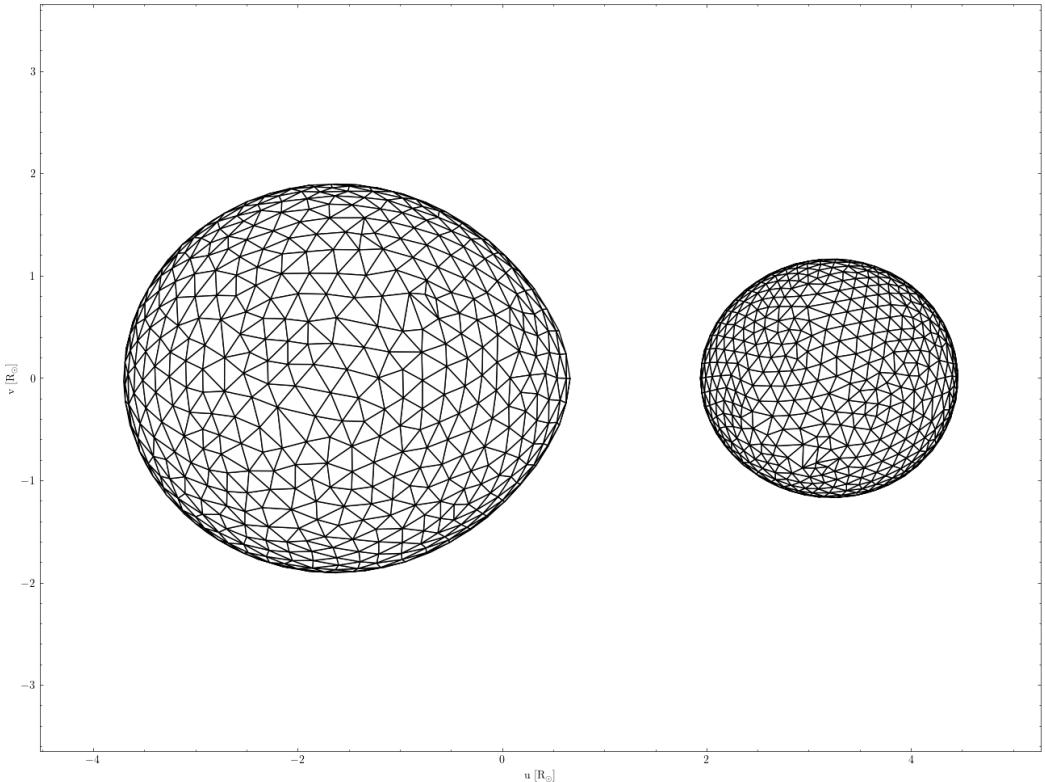


Figura 3.5: Mallas de las superficies estelares de un sistema simulado con PHOEBE, utilizando los mismos parámetros del modelo utilizado en la [Figura 3.3](#).

menores que el periodo orbital A. Prša, K. E. Conroy et al. (2016). Esto causaría un cambio apreciable en los radios estelares, debido a que las superficies equipotenciales del campo no son constantes en volumen. En teoría, si una estrella se rige a solo las superficies equipotenciales del mismo valor en cada fase orbital, la estrella debería de comprimirse o expandirse, irradiando parte de su energía a su ambiente exterior, llegando rápidamente a una órbita circular. Sin embargo, esto no es un fenómeno que se ha observado en la literatura; al contrario, existen sistemas como las estrellas “heartbeat” (nombrado por su parecido a una lectura de un electrocardiograma) cuya variabilidad se debe a la distorsión de sus superficies por fuerzas de marea en órbitas excéntricas Thompson et al. (2012). Como consecuencia, PHOEBE adopta un mecanismo para preservar el volumen del sistema; al momento de muestrear la superficie para generar la malla superficial, PHOEBE elige la superficie equipotencial que más se acerque al volumen calculado de las estrellas en su punto de periaastro, el punto en donde experimentan la mayor distorsión superficial.

3.2.2 Distribución de Parámetros Superficiales

Una estrella no es perfectamente uniforme en la superficie; un modelo acertado de una estrella debe tomar en cuenta la distribución de parámetros como su temperatura, intensidad, etc. Para esto se debe calcular la gravedad superficial en el polo estelar:

$$\mathbf{g}_{\text{pol}} = -\frac{Gm_1 \mathbf{r}_{\text{pol}}}{r_{\text{pol}}^2} - \frac{Gm_2 \mathbf{h}}{h^2} - \omega^2(t) d_{\perp,\text{rot}} \frac{\mathbf{d}_{\perp,\text{rot}}}{d_{\perp,\text{rot}}} \quad (3.5)$$

Donde se define r_{pol} como el radio al polo estelar, $h = \sqrt{r_{\text{pol}}^2 + d^2}$ es la distancia del polo

estelar al centro de la estrella compañera, $\omega(t)$ es la velocidad angular como función del tiempo, y $d_{\perp,\text{rot}}$ es la distancia del polo estelar hacia el eje de rotación del sistema (su centro de masa) Andrej Prša (2011, Sección 5.2). La gravedad superficial depende de manera indirecta de la fase orbital, debido al ajuste de la estrella a una superficie equipotencial a lo largo de la órbita del sistema. Este parámetro rige la distribución de material y energía en la estrella; las regiones de mayor gravedad superficial (en sistemas binarios eclipsantes suelen ser los polos estelares, debido a las fuerzas de marea que resultan en un radio ecuatorial mayor) con áreas más calientes que el resto de la superficie. Andrej Prša (2011, Sección 4.3) dice que el flujo monocromático para el rango de longitud de onda $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ es proporcional tanto a la gravedad superficial como a la temperatura efectiva:

$$F_\lambda = -\frac{16\sigma T_{\text{eff}}^3}{3\bar{\kappa}\rho} \frac{dT_{\text{eff}}}{d\Omega} g^\beta \quad (3.6)$$

Donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann, $\bar{\kappa}$ es el coeficiente de opacidad de Rosseland (el cual describe la opacidad, o la probabilidad de un fotón de atravesar un medio—en este caso la superficie estelar), ρ es la densidad del material en la fotosfera, g es la aceleración gravitacional local, y β es el *coeficiente del oscurecimiento gravitacional*. El valor de β en lo general se mantiene fijo dependiendo de la naturaleza de la envoltura estelar:

$$\beta = \begin{cases} 0.32 & \text{envoltura convectiva} & T_{\text{eff}} < 5000 \text{ K} \\ 1 & \text{envoltura radiativa} & T_{\text{eff}} > 8000 \text{ K} \end{cases} \quad (3.7)$$

Utilizando este coeficiente es posible calcular la temperatura y el flujo de un elemento superficial dependiendo de la aceleración gravitacional local, dado un valor de referencia que corresponde al polo estelar:

$$\begin{aligned} F &= F_{\text{pol}} \left(\frac{g}{g_{\text{pol}}} \right)^\beta \\ T_{\text{eff}} &= T_{\text{eff,pol}} \left(\frac{g}{g_{\text{pol}}} \right)^{\beta/4} \end{aligned} \quad (3.8)$$

De la cual se obtiene el flujo y la temperatura efectiva dada una aceleración gravitacional local, donde el término $(g/g_{\text{pol}})^{\beta/4}$ se conoce como la **corrección del oscurecimiento gravitacional**. La superficie resuelta con respecto a su gravedad superficial y temperatura efectiva se puede ver en la **Figura 3.6**.

3.2.3 Radiación Emergente

Una vez determinada la distribución de parámetros superficiales es posible determinar la radiación emergente de cada elemento superficial, del cual se calcula el flujo que recibe un observador. El flujo de una estrella no es una cantidad que PHOEBE determina directamente; PHOEBE más bien calcula la *intensidad*, que se define como la cantidad de energía dE emitida a través de el ángulo sólido $d\Omega$ por una superficie proyectada a un ángulo $dA \cos \theta$ en el intervalo de tiempo dt :

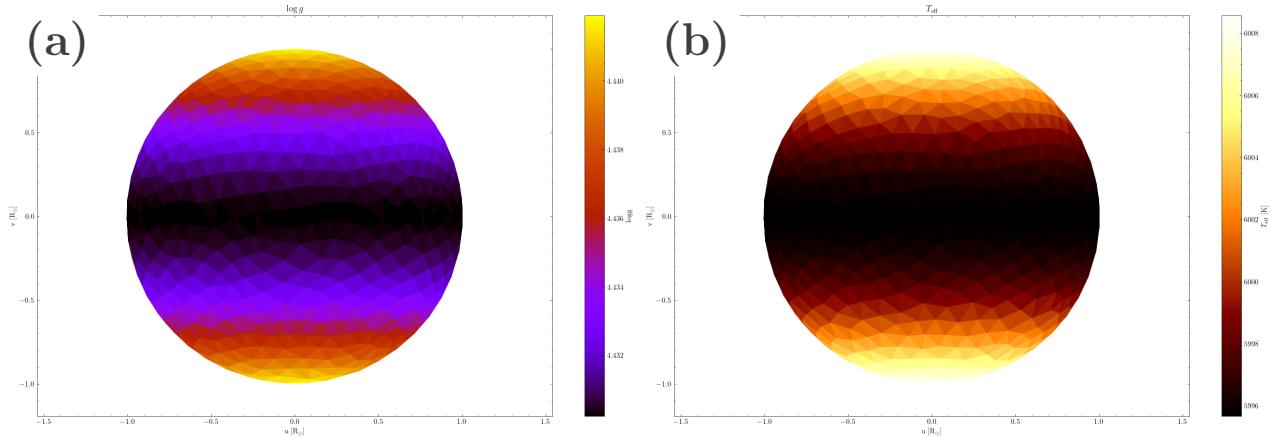


Figura 3.6: Malla de una estrella cuyas propiedades son las mismas que el Sol, generada utilizando PHOEBE, donde el potencial efectivo es calculado no en base al modelo de Roche, si no basado en su frecuencia de rotación, en el caso de una estrella singular—a pesar de que esta información no esté documentada explícitamente en un documento fácil de encontrar, esto se puede ver en el código fuente de PHOEBE 2, en este caso en el archivo [rotstar.py](#). Se puede ver la distribución de gravedad efectiva superficial en el índice (a), al cual se acopla la distribución de temperatura efectiva vista en el índice (b).

$$I_\lambda = \frac{dE}{d\lambda dA \cos \theta d\Omega dt} \quad (3.9)$$

Donde I_λ es la *intensidad monocromática*, para un intervalo de longitud de onda $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. Esta cantidad es calculada en la dirección normal de cada elemento superficial; la **Figura 3.7** muestra la distribución de intensidad absoluta a lo largo de la superficie estelar. La intensidad monocromática se obtiene partiendo del modelo atmosférico empleado, ya sea el de cuerpo negro básico o una tabla como la de Kurucz (1970). Para obtener la *intensidad absoluta* es necesario integrar la intensidad monocromática sobre todas las longitudes de onda:

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \quad (3.10)$$

Utilizando la intensidad monocromática definida en la **Ecuación 3.9** se usa para definir la **distribución espectral de energía (SED)** por sus siglas en inglés), donde $\mathcal{S} \equiv dI_\lambda/d\lambda$. El SED calculado depende tanto en las propiedades de la estrella como en el modelo empleado para su atmósfera estelar; en el caso de un cuerpo negro, su SED depende solo de su temperatura efectiva, mientras que modelos como Kurucz (1970) requieren parámetros adicionales como la metalicidad estelar y gravedad superficial. Sin embargo, en el modelo hacia adelante de una estrella es de gran importancia determinar la intensidad en una *pasa banda*; esta es definida por una curva de transmisión, la cual describe la cantidad de radiación incidente que traspasa el sistema óptico. PHOEBE tiene varias pasa bandas disponibles, como por ejemplo la de *Johnson:V* vista en la **Figura 3.8**. Utilizando la pasa banda elegida y el SED calculado se computa la intensidad de la pasa banda con la siguiente ecuación:

Donde I_{pb} como \mathcal{S} son funciones que toman de parámetro de entrada las propiedades termodinámicas de la estrella, incluyendo incluso efectos extrínsecos al sistema como la extinción interestelar A. Prša, K. E. Conroy et al. (2016). La intensidad I_{pb} definida en la **Ecuación**

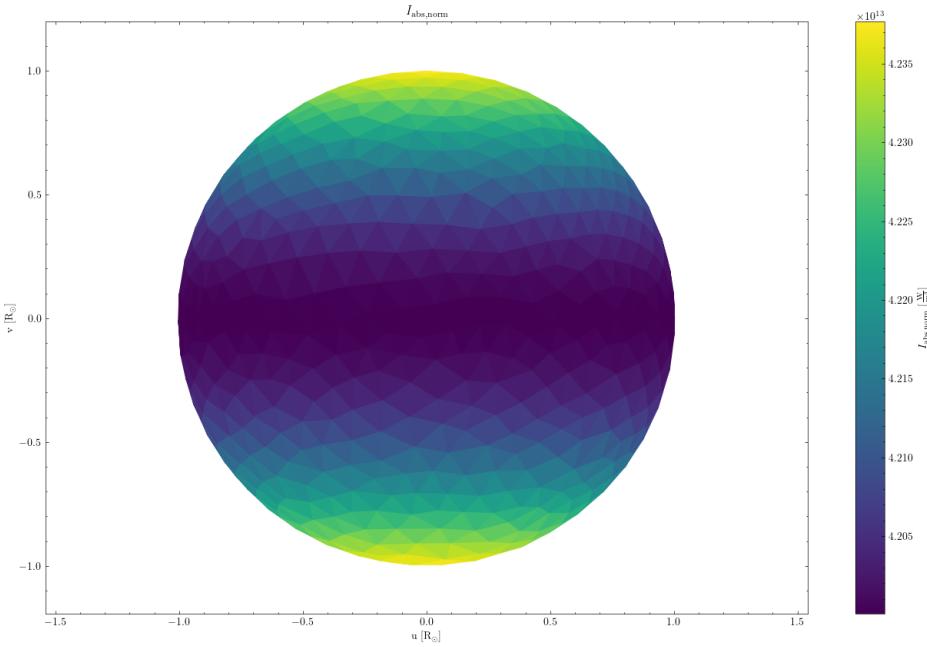


Figura 3.7: Intensidad absoluta de una estrella modelada utilizando PHOEBE, integrada en las longitudes de onda que abarca el pasa banda de *Johnson:V*. La figura muestra la intensidad absoluta en la dirección del vector normal a los elementos superficiales. Se puede apreciar la distribución de la intensidad, la cual sigue el mismo comportamiento de la gravedad superficial que se muestra en la **Figura 3.6**.

$$I_{\text{pb}} = \int_{\lambda} \mathcal{S}(\lambda) \mathcal{P}(\lambda) d\lambda \quad (3.11)$$

3.11 solo es apropiada para simular un detector calibrado por flujo de estrellas estándares; para medir la intensidad con respecto al número de fotones detectados es necesario dividir I_{pb} entre la energía del fotón incidente, definida como $E_{\lambda} = hc/\lambda$, e integrar:

$$I_{\text{pb,fot}} = \int_{\lambda} \left(\frac{\mathcal{S}(\lambda) \mathcal{P}(\lambda)}{E_{\lambda}} d\lambda \right) = \frac{1}{hc} \int_{\lambda} \lambda \mathcal{S}(\lambda) \mathcal{P}(\lambda) d\lambda \quad (3.12)$$

Por último, se integra $I_{\text{pb,fot}}$ o I_{pb} —dependiendo si se desea el flujo por cuentas de fotones o en energía—a lo largo de la superficie estelar visible para obtener el flujo emitido por la estrella en la pasa banda deseada, llegando como resultado a una curva de luz sintética como en la **Figura 3.3**, la cual forma la base del análisis fotométrico de un sistema binario estelar.

3.3 El Problema Inverso

El tener un modelo sofisticado de un sistema binario estelar nos ayuda a entender los mecanismos responsables por su comportamiento, incluyendo como afectan las diferentes combinaciones de parámetros estelares en las curvas observables del sistema. Sin embargo, el propósito de modelos como PHOEBE o WD yace en determinar los parámetros físicos que, una vez impuestas al modelo, generan una curva observable sintética que se acopla a datos reales observados del sistema. Esto en general se conoce como el **problema inverso**, y es tanto una gran parte

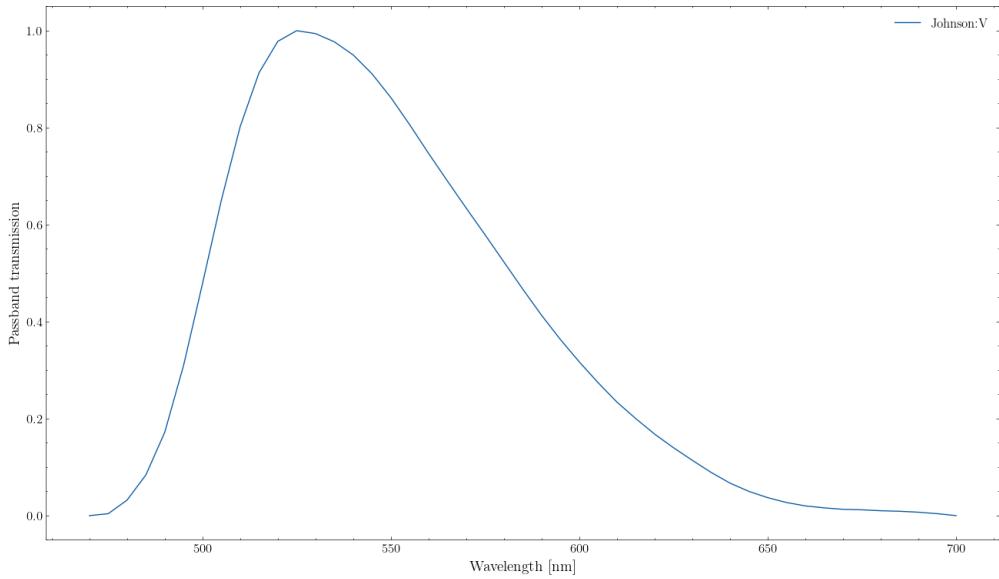


Figura 3.8: Curva de transmisión en PHOEBE para la pasa banda *Johnson:V*.

de este trabajo de tesis como el objetivo de varias investigaciones en la literatura. Encontrar los parámetros que mejor ajustan un modelo a datos observados es un proceso particular para cada objeto estudiado; sin embargo, existe un proceso general que se sigue para llegar a una conclusión cuyos errores y sesgos sean aceptables.

3.3.1 Función de Calidad

Para saber si un modelo es un buen ajusto a una curva observable de un sistema es necesario definir una función que sirva para parametrizar el error entre el modelo sintético y los datos reales. Para una curva observada, se calcula el χ^2 , el cual se define como la siguiente expresión:

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_{i,o} - y_{i,m}}{\sigma_i^2} + \ln \sigma_i^2 \right) \quad (3.13)$$

Donde y indica un punto en la curva del modelo, los subíndices o y m refiriéndose a datos observacionales o del modelo sintético, respectivamente. Cada punto del modelo se le atribuye un peso, la incertidumbre en el dato observado $\sigma_{i,o}$, el cual se determina antes de ingresar los datos a PHOEBE. En el caso de tener incertidumbres que han sido subestimadas se introduce el término σ_{inf} , donde al final se obtiene la incertidumbre σ_i :

$$\sigma_i^2 = \sigma_{i,o}^2 + y_{i,m}^2 \exp(2\sigma_{inf}) \quad (3.14)$$

En el caso de tener incertidumbres acertadas, $\sigma_{inf} = -\infty$, el cual simplifica la previa ecuación a solo $\sigma_i^2 = \sigma_{i,o}^2$.

Estos datos no necesariamente son mediciones fotométricas del sistema; pueden ser velocidades radiales o intensidades de líneas espectrales. El subíndice k denota la curva para la cual se está calculando el ajuste del modelo. Si se tiene varias curvas observadas (por ejemplo, en

diferentes bandas fotométricas) el ajuste total del modelo se califica por la suma de los ajustes individuales a cada curva observable:

$$\chi^2 = \sum_k \chi_k^2 \quad (3.15)$$

El objetivo de un ajuste de un modelo a datos observacionales es encontrar los parámetros físicos del sistema binario en cuestión que resultan en el χ^2 más cercano a 0 posible. El valor obtenido de χ^2 se parametriza en PHOEBE normalizando por el número de observaciones hechas en todas las curvas de luz combinadas N_{tot} , resultando en el parámetro λ , el cual indica un ajuste satisfactorio si $\lambda \approx 1$:

$$\lambda := \frac{\chi^2}{N_{\text{tot}}} \quad (3.16)$$

Sin embargo, el modelo descrito en la literatura, y que usa PHOEBE, es altamente no-lineal; el espacio de parámetros posee una topología compleja, el cual implica que existen más de una combinación de valores para los parámetros del modelo que se ajustan a un mismo conjunto de curvas observacionales, el cual se resalta en casos de degeneración de un modelo, donde 2 o más parámetros se ven correlacionados de tal manera que existen una cantidad infinita de soluciones al problema. Para finalizar la descripción de PHOEBE con respecto a este trabajo de tesis, se describe un proceso de ajuste de modelo a un conjunto de curvas de luz fotométricas, utilizando herramientas dadas dentro de PHOEBE, con la finalidad de llegar a la mejor combinación de parámetros evitando caer lo más posible en trampas como mínimos locales en el espacio de parámetros y modelos degenerados.

3.3.2 Estimación Inicial de Parámetros

La solución final para un sistema binario va a depender de manera significativa de los valores iniciales de los cuales se parte las siguientes etapas del ajuste. El proceso de estimar los valores iniciales es una combinación de manipulación manual y herramientas diseñadas para un ajuste rápido a los datos observacionales. Para utilizar estos estimadores es necesario primero encontrar el periodo orbital del sistema, el cual comúnmente corresponde a la segunda armónica de la frecuencia dominante de un periodograma; los algoritmos principales utilizados en la literatura son *Lomb-Scargle* VanderPlas (2018) el cual ajusta un modelo sinusoidal a una serie de tiempo (cuyas muestras no requieren haber sido tomadas en intervalos regulares del tiempo) y *Box Least Squares* (abreviado como BLS) Kovács, Zucker y Mazeh (2002), un algoritmo diseñado para casos donde la señal de los eclipses es diminuta a comparación con el flujo de base del sistema, por ejemplo los sistemas cuya duración de eclipses estelares es mucho menor que el periodo orbital. Existen varias implementaciones de periodogramas para su uso en el ámbito de la astrofísica; ambos están disponibles dentro de PHOEBE en la forma de un estimador:

Es posible correr un periodograma de manera automática o manual, dependiendo si una malla de frecuencias es dada como entrada al periodograma. Una vez que se obtenga el periodo orbital del sistema es posible determinar un punto de partida de los parámetros del sistema, utilizando la curva de luz doblada en fase. Dentro de PHOEBE existen 2 distintos métodos para esto: la estimación de parámetros utilizando de manera directa la geometría de la curva, o haciendo uso de **EBAI**.

```

01 | periodogram_freqs = phoebe.linspace(0.001, MAX_FREQ, NUM_FREQS)
02 | b.add_solver('estimator.lc_periodogram',
03 |                 solver='periodogram',
04 |                 algorithm='ls', # 'ls' corresponde a Lomb-Scargle, 'bls' a BLS
05 |                 sample_mode='manual',
06 |                 lc_datasets=['lc01', 'lc02'],
07 |                 sample_periods=periodogram_freqs)
08 | b.run_solver(solver='periodogram', solution='period_spectrum')

```

Figura 3.9: Ejemplo de cómo correr un periodograma de tipo Lomb-Scargle en un bundle de PHOEBE. Este caso en particular es para un modelo con 2 curvas de luz fotométricas distintas, que se ha determinado muestra un comportamiento sinusoidal. Dependiendo de la información antecedente disponible del objeto al estudiar se puede definir límites de manera manual del periodograma, por ejemplo si se sabe que es un sistema de corto periodo (<1 día). Los resultados del periodograma se pueden acceder en la solución `period_spectrum`, donde se puede obtener el espectro de potencias completo.

3.3.2.1 Geometría de la Curva de Luz

Dada una curva de luz fotométrica en fase es posible estimar ciertos parámetros del sistema analizando ciertas de sus características geométricas. Una vez que se haya encontrado el periodo orbital del sistema—y por ende haber obtenido la curva de luz en fase—es posible ajustar una función analítica compuesta de 2 funciones Gaussianas, un término coseno, un término constante, o cualquier combinación de estas que mejor se ajusten a los datos observacionales, generando en total 7 modelos Kyle E. Conroy et al. (2020). Utilizando un ajuste de mínimos cuadrados a las curvas en fase, una vez estimado los tiempos de los eclipses, se determina el mejor modelo usando un criterio. Del modelo final se obtiene valores iniciales para tanto propiedades orbitales del sistema—el tiempo de superconjunción primario t_0 , la excentricidad e , y el argumento de periastro ω_0 —como propiedades relativas entre las estrellas componentes: la suma de radios normalizado al semieje mayor de la órbita $(R_1 + R_2)/a_{\text{orb}}$ (esto se nota en la diferencia de anchura entre ambas jorobas de la curva de luz) y la razón de temperaturas efectivas $T_{\text{eff},2}/T_{\text{eff},1}$ (el cual se puede aproximar por la diferencia de profundidad entre el eclipse primario y secundario). Este estimador solo es capaz de analizar sistemas separados, por lo cual no se utilizó en este trabajo de tesis.

3.3.2.2 EBAI - Eclipsing Binaries via Artificial Intelligence

EBAI es una red neuronal artificial que hace uso de métodos de aprendizaje automático como *K-Nearest Neighbors* para mapear una curva de luz observacional a parámetros físicos de un sistema binario estelar. El algoritmo KNN ajusta una función a datos reales, permitiendo hacer una regresión basado en los vecinos cercanos de un punto. Los detalles de KNN se encuentran en Pedregosa et al. (2011), el cual describe la implementación dentro del paquete de Python `scikit-learn`. Una red neuronal es compuesta de varias capas de procesamiento, donde cada capa está compuesta de unidades individuales (o “neuronas”) que propagan valores de acuerdo a su función de activación. Esta arquitectura es la que las permite “aprender” relaciones en modelos no lineales como el de un sistema binario. Hasta el momento (PHOEBE version $\leq 2.4.13$) el estimador de EBAI es el único capaz de estimar los parámetros de un sistema binario en contacto; un esquema de su composición interna se puede ver en la **Figura 3.10**.

Para sistemas binarios en contacto, el estimador EBAI puede determinar la razón de masa q , la razón de temperaturas efectiva T_2/T_1 , la inclinación orbital i , y el factor de relleno f del

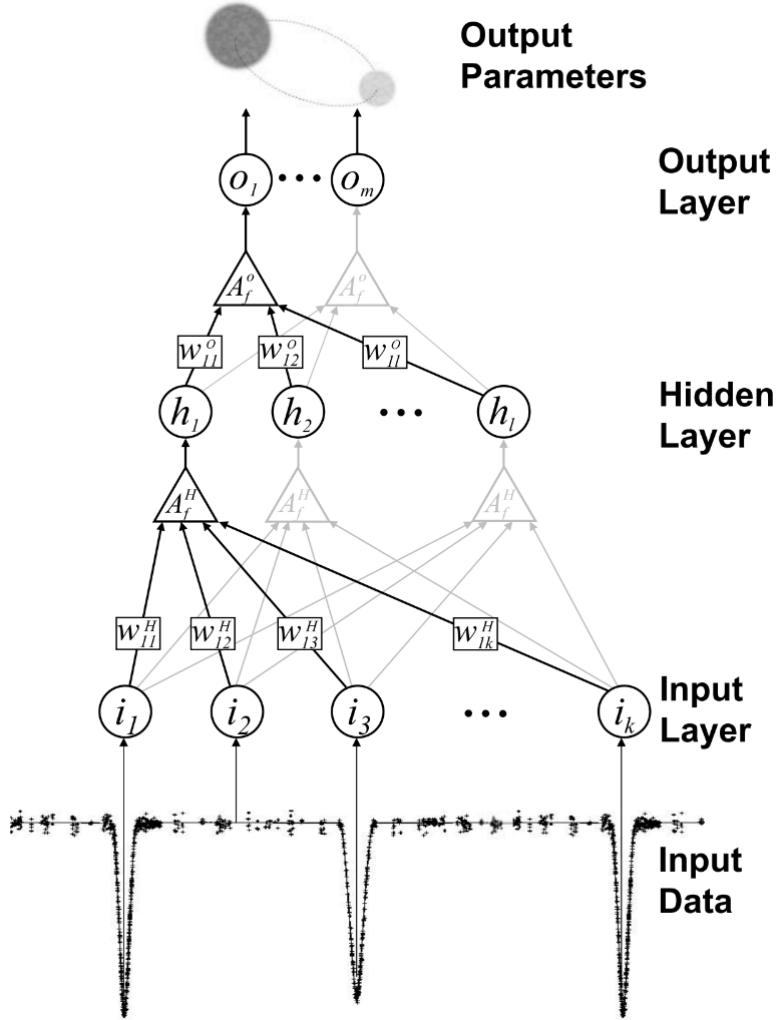


Figura 3.10: Esquema de una red neuronal artificial (ANN por sus siglas en inglés). El objetivo de una red como EBAI es partir de datos de entrada como una curva de luz observada y obtener los parámetros del sistema que generen un modelo sintético que se aproxime a los datos. Figura obtenida de A. Prša, Guinan et al. (2008).

sistema; el estimador calcula un valor para el tiempo de superconjunción t_0 del sistema binario, el cual es necesario para obtener una curva de luz en fase cuyo eclipse primario yace en la fase orbital 0. Dado un Bundle en PHOEBE, se puede generar una estimación inicial corriendo el siguiente código:

```

01 | # b: phoebe.Bundle
02 | b.add_solver('estimator.ebai', solver='ebai_estimator',
03 |                 ebai_method='knn', phase_bin=False,
04 |                 lc_datasets=['lc01', 'lc02'])
05 | b.run_solver(solver='ebai_estimator', solution='ebai_init_estimates')
06 | b.adopt_solution(solution='ebai_init_estimates')

```

Figura 3.11: Código para correr un estimador EBAI para un sistema compuesto de 2 curvas de luz fotométricas distintas, lc01 y lc02. Para un sistema binario separado también existe la opción de correr el estimador con `ebai_method='mlp'`, el cual usa una red neuronal propia de PHOEBE.

3.3.3 Optimización de Parámetros

Durante un ajuste de modelo es importante determinar si la combinación de parámetros elegida es óptima dado una serie de datos observados. Esto se basa en la función de costo definida en la [Ecuación 3.15](#); un ajuste adecuado del modelo implica tener un valor de χ^2 cercano a 0. PHOEBE ofrece herramientas especializadas para encontrar la combinación de parámetros que más se acerca a esta condición de manera sistemática. Estos son denominados *optimizadores*: algoritmos diseñados para explorar el espacio de parámetros y llegar a un mínimo de la función de costo. Este trabajo de tesis hizo uso de 2 optimizadores principales: **el simplex de Nelder-Mead y correcciones diferenciales**.

3.3.3.1 Simplex de Nelder-Mead

Descrito por primera vez por Nelder y Mead ([1965](#)), el **simplex de Nelder-Mead** (NMS por sus siglas en inglés) es un algoritmo heurístico que explora el espacio de parámetros mediante un *simplex*, un politopo compuesto de varios vértices que representan distintos puntos en la función que se busca optimizar. En el caso de PHOEBE, la función a optimizar es χ^2 ; para esto es necesario evaluar el ajuste en cada punto del simplex, lo cual requiere calcular el modelo hacia adelante para cada punto de prueba. Esto se demuestra con la siguiente modificación a la [Ecuación 3.15](#):

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \sum_i \frac{(F_i^{\text{obs}} - F_i^{\text{syn}}(\mathbf{p}))^2}{\sigma_i^2} \quad (3.17)$$

Donde \mathbf{p} representa el vector de parámetros del modelo, como la inclinación orbital, razón de masas, y cualquier otro incluido en el cálculo. El método de NMS solo requiere evaluaciones de la función de costo en los puntos del simplex; esto lo hace un método adecuado para optimizar funciones altamente no-lineales a cambio de una baja eficiencia computacional dependiendo del número de vértices a evaluar. En total, la cantidad de vértices empleados depende del número de dimensiones del modelo; en el caso de optimizar n parámetros del sistema binario, NMS utilizará $n+1$ vértices, o combinaciones de parámetros. Con cada iteración, el método manipula el simplex por medio de transformaciones geométricas, como lo muestra Andrej Prša ([2011, Sección 6.4](#)). En el ajuste de un sistema binario eclipsante el método de NMS se utiliza para intentar llegar al mínimo global de la función de costo, el cual el punto de parada es cuando haya convergido la optimización (donde el simplex se podría considerar de un tamaño geométrico despreciable), o cuando hayan pasado un cierto número de iteraciones, en el caso que no haya sido completamente exitoso. Su uso se puede ver en la [Figura 3.12](#). Para más información de la implementación y uso del optimizador se puede hacer referencia a la documentación de SciPy³

3.3.3.2 Correcciones Diferenciales

Una de las formas más directas de explorar el espacio de parámetros y llegar a un valor óptimo de la función de costo es por el método de **correcciones diferenciales**. Este algoritmo trabaja evaluando derivadas parciales de la función; estas son evaluadas por medio de diferencias finitas como se ve en la [Ecuación 3.18](#).

³<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.minimize-neldermead.html>

```

01 | # b: phoebe.Bundle
02 | b.add_solver('optimizer.nelder_mead', solver='opt_nm', maxiter=50,
03 |     fit_parameters=['teffratio', 'period@binary',
04 |         't0_supconj@binary', 'incl@binary', 'fillout_factor'])
05 | b.run_solver(solver='opt_nm', solution='opt_nm_solution')

```

Figura 3.12: Código para crear y ejecutar un optimizador utilizando el algoritmo NMS. Este código en particular busca encontrar la combinación de la razón de temperaturas, periodo orbital, el tiempo de superconjunción primario, la inclinación orbital, y el factor de relleno del sistema, como se puede ver por el argumento `fit_parameters` del resolvedor (`solver` por su categoría en inglés). Se especifica 50 como el máximo número de iteraciones que tiene permitido correr el optimizador en dado caso que no llegue a convergir a una solución; el criterio de convergencia se define por los argumentos `xatol` y `fatol` que definen una tolerancia de convergencia para los parámetros de entrada y la función de costo, respectivamente.

$$\frac{\partial f(p_1, \dots, p_k, \dots, p_n)}{\partial p_k} \rightarrow \frac{f(\dots p_k + \Delta p_k \dots) - f(\dots p_k \dots)}{\Delta p_k} \quad (3.18)$$

De esta manera PHOEBE explora el espacio alrededor de los valores actuales del modelo para cada parámetro p_k ; dado un valor de Δp_k se calcula χ^2 en el punto actual del modelo y el paso propuesto, siguiendo el camino que disminuya la función de costo. La técnica de correcciones diferenciales se puede aplicar a más de un parámetro a la vez, evaluando la diferencia parcial para cada parámetro a optimizar. Esta herramienta tiene mayor utilidad cuando el modelo esté cerca del mínimo global, por ejemplo después obtener estimaciones iniciales de los parámetros y utilizando un optimizador menos sensible a espacios mínimos locales como NMS. Sin embargo, un algoritmo de correcciones diferenciales puede divergir en modelos cuya discrepancia entre las curvas sintéticas y curvas observadas es significativo. Es por esto que PHOEBE no permite correr este optimizador por varias iteraciones de manera directa; esto obliga al operador a analizar la solución propuesta por el algoritmo y decidir si es una solución aceptable. Si es necesario ejecutar más iteraciones, el mismo resolvedor es capaz de correr de nuevo, utilizando los valores adoptados de la iteración pasada.

3.3.4 Muestreo de la Función de Densidad de Probabilidad Posterior

El modelo resultante de los optimizadores en teoría resulta en el mejor ajuste a los datos observacionales, lo cual es indicado por la métrica de χ^2 . Sin embargo, este parámetro no es suficiente para justificar que se haya encontrado el valor óptimo del modelo. Para los problemas de un alto número de dimensiones como los modelos de sistemas binarios, el espacio de parámetros está repleto de volúmenes donde el ajuste a los datos observacionales varía de manera significativa. Para modelos como un sistema binario estelar, también existe la posibilidad que ciertas combinaciones de parámetros que resulten en un modelo físicamente imposible, el cual debe de ser descartado por completo. Para determinar la distribución de densidad de cada parámetro—de donde se puede calcular *intervalos de confianza*—es necesario conocer la topología del espacio de parámetros.

En un mundo ideal este proceso se haría para todos los valores posibles para cada parámetro del modelo. Esto resulta ser prácticamente imposible para muchos modelos del mundo real debido al costo computacional de un modelo; para calcular un modelo hacia adelante en PHOE-

BE, dependiendo de la cantidad curvas de luz generadas y de las optimizaciones empleadas en el modelo, puede tardar un tiempo en el orden de decenas o cientos de segundos. Dado millones de combinaciones de los parámetros, esto resulta en un tiempo de cómputo en el orden de meses o años para cubrir todo el volumen del problema, lo cual no es factible para un proyecto de investigación.

Existen métodos estadísticos que sirven para explorar el espacio de parámetros de un modelo de manera sistemática, incorporando creencias o información previa que se conoce *a priori*. Se basan en el *teorema de Bayes*, que establece la probabilidad de obtener un vector de parámetros Θ_M para un modelo M dado un vector de datos \mathbf{D} es igual a:

$$\frac{\text{Posterior}}{P(\Theta_M|\mathbf{D}, M)} = \frac{\text{Verosimilitud} \quad P(\mathbf{D}|\Theta_M, M) \quad \text{Priori} \quad P(\Theta_M|M)}{P(\mathbf{D}|M)} \quad (3.19)$$

↑
Evidencia

La probabilidad que observemos una serie de parámetros Θ_M dado un vector de datos \mathbf{D} se le llama la **distribución de densidad posterior**, o **PDF** por sus siglas en inglés. El teorema de Bayes permite incorporar información conocida por medio de la distribución **priori**; esto puede incluir relaciones conocidas (por ejemplo, funciones determinadas por análisis estadísticos como Latković, Čeki y Lazarević (2021)), cuyas distribuciones pueden variar en cuanta confianza dependiendo de sus formas; una distribución Gaussiana conlleva mayor información de un parámetro que una distribución uniforme acotada. El valor de la **verosimilitud** dice la probabilidad de observar el vector de datos \mathbf{D} dado el vector de parámetros; PHOEBE utiliza el logaritmo natural de esta función, la cual se define en Kyle E. Conroy et al. (2020):

$$\ln P(\mathbf{D}|\Theta_M, M) = -0.5\chi^2 \quad (3.20)$$

La **evidencia** se define como la verosimilitud del modelo M integrado sobre todos los valores posibles de parámetros:

$$P(\mathbf{D}|M) = \int P(\mathbf{D}|\Theta_M, M)P(\Theta_M|M)d\Theta_M \quad (3.21)$$

Sin embargo, la evidencia es prácticamente imposible de calcular en el caso de un sistema binario estelar; no existe una solución analítica para este problema, por lo tanto para calcular la verosimilitud para un modelo de PHOEBE es necesario computar un modelo hacia adelante, generando curvas observables sintéticas que se pueden utilizar para calcular χ^2 de acuerdo a la **Ecuación 3.17**. Este proceso combinado con técnicas de integración numéricas resulta en un tiempo de computo con crecimiento exponencial. Para mitigar estos problemas se utilizan métodos de *Monte Carlo* para hacer un muestreo estocástico de tal manera que al aplicar un peso de importancia a cada muestra se puede llegar a una aproximación de la distribución posterior. Un esquema de este proceso se presenta en la **Figura 3.13**.

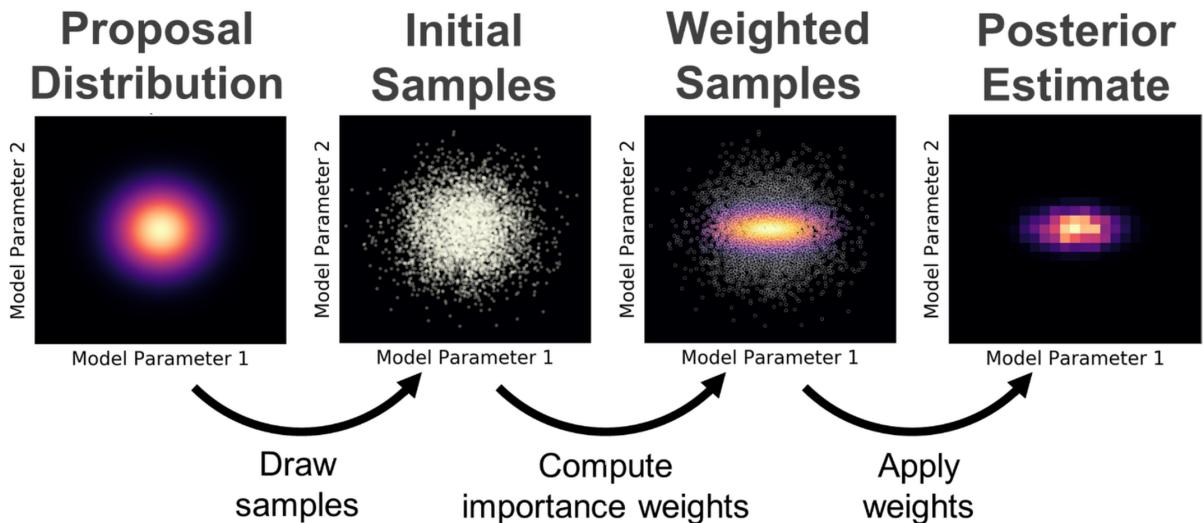


Figura 3.13: Esquema del *muestreo de importancia*, una técnica de generar muestras de una distribución propuesta como estimación inicial (a priori) $\mathcal{Q}(\Theta)$ que se muestra en la primera gráfica. Se emplea un algoritmo para proponer muestras del espacio de parámetros que aceptar o rechazar (cuyas muestras realizadas para este ejemplo se pueden ver en la segunda gráfica), con la finalidad de estimar la distribución posterior vista en la última gráfica. Figura obtenida de Speagle (2020).

3.3.4.1 emcee: MCMC en Python

Las **cadenas de Markov de Monte Carlo** (conocidas por sus siglas en inglés **MCMC**) generan muestras de la distribución a priori formando *cadenas* de valores del vector de parámetros Θ correlacionados. Cada valor muestreado se adjunta a la cadena; después de n iteraciones se calcula la *densidad* $\rho(\Theta_i)$ de las muestras dentro de una región δ_Θ centrada en el vector Θ_i , definida por el número de muestras dentro de la región de interés $m(\Theta_i)$:

$$\rho(\Theta) \equiv \frac{m(\Theta)}{n} \quad (3.22)$$

Dados suficientes iteraciones, la densidad $\rho(\Theta)$ estará distribuía de la misma forma que la distribución posterior $\mathcal{P}(\Theta)$; esto se puede integrar para llegar al *valor esperado* de la distribución posterior, la cual es definida como:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}} [f(\Theta)] = \int f(\Theta) \mathcal{P}(\Theta) d\Theta \quad (3.23)$$

Parte II

Muestra

Capítulo 4

Catálogos

4.1 Gaia

Originalmente denominado como *GAIA*, la misión de *Gaia* fue lanzada por la **Agencia Espacial Europea (ESA)** el 19 de Diciembre del 2013, con el objetivo de generar un mapa tridimensional de nuestra Galaxia, la Vía Láctea. Esto incluye calcular las propiedades astrométricas y astrofísicas de sus fuentes observadas con mayor precisión que cualquier otro catálogo publicado previamente. Para lograr esto se utiliza un satélite espacial, el cual está denominado como *Gaia*, ubicado en el punto de Lagrange L2 con respecto al sistema Sol-Tierra. Desde este punto la nave tiene una vista sin obstrucciones que le permite observar una cantidad de estrellas enorme, con ~1,000 millones de fuentes visibles con los instrumentos del satélite *Gaia*. Gaia Collaboration, Prusti et al. (2016)

4.1.1 Fotometría

4.1.2 Data Release 2

Para facilitar el acceso público a los datos recabados por la misión de *Gaia* la ESA ha escogido liberar los datos públicamente mediante los van recibiendo y procesando. Estos son conocidos como los **Data Releases**. Este trabajo se basa en el **Data Release 2**, el cuál de ahora en adelante será denominado simplemente **GDR2**. Este catálogo está compuesto de las observaciones hechas por *Gaia* entre las fechas de 25 de Julio del 2014 y el 23 de Mayo del 2016, un periodo de tiempo de 22 meses en total. Gaia Collaboration, Brown et al. (2018) GDR2 consiste de 1 692 919 135 de fuentes individuales. Existe una gran diversidad de objetos dentro de este catálogo, desde estrellas de secuencia principal, asteroides dentro del sistema solar, hasta estrellas variables en las regiones más lejanas en la Galaxia.

Los datos utilizados en este estudio fueron accedidos a través de el *Gaia Archive*¹, una herramienta libre publicada por la ESA. Este cuenta con una interfaz de ADQL², un lenguaje estructurado para hacer consultas a la base de datos de *Gaia*, incluyendo tablas conectando los datos de *Gaia* con otros catálogos, por ejemplo el catálogo de SDSS.

¹<https://gea.esac.esa.int/archive/>

²<https://www.ivoa.net/documents/ADQL/20180112/PR-ADQL-2.1-20180112.html>

4.2 Sloan Digital Sky Survey

La colección de catálogos **Sloan Digital Sky Survey**³ (de ahora en adelante será referido como **SDSS**) compila varias fuentes de datos astronómicos y astrofísicos en un sitio centralizado, con el objetivo de crear un mapa tridimensional del Universo con una precisión no vista antes. Estos incluyen imágenes de objetos astronómicos en varios colores, acompañados de un espectro obtenido como parte de esta misión. Para los finales del siglo XX habían surgido avances tecnológicos que llegarían a revolucionar la astronomía observacional. De estos, los de mayor interés ocurrieron con los detectores de estado sólido y en la capacidad computacional de procesamiento. Partiendo de estos empezaron a desarrollar la infraestructura necesaria para recabar datos fotométricos y espectroscópicos.

El instrumento principal utilizado es el telescopio de 2.5m, ubicado en el observatorio *Apache Point Observatory*, descrito a detalle en Gunn et al. (2006). Este telescopio de diseño de Ritchey-Chrétien alimenta dos instrumentos separados; una CCD multi-banda de ancha área, y un par de espectrógrafos alimentados por fibra óptica. Su construcción empezó en 1998, pero no fue hasta el año 2000 que estuvo operacional.

4.2.1 Data Release 9

SDSS libera datos en colecciones iterativas; es decir cada Data Release (DR) liberado contiene todas las observaciones que forman parte del DR previo, agregando los datos recabados durante el periodo de observación para el DR actual. Cada DR cae bajo una fase de operaciones de SDSS, delimitado tanto por las fechas de observaciones como por los instrumentos y tipos de datos disponibles. Para el periodo operacional de GDR2 el catálogo más actual de SDSS era el DR9 publicado como parte de SDSS-III⁴. Esta tercera fase fue marcada por una gran mejora del equipo espectroscópico, instalando nuevos instrumentos con los cuales pudieron analizar la dinámica de nuestra Galaxia, al igual que otras galaxias y planetas gaseosos extra-solares.

4.3 Szkody, et al. (2002): Cataclysmic Variables from the Sloan Digital Sky Survey

Con el lanzamiento del SDSS, Szkody y su equipo reconocieron una nueva área de oportunidad para expandir la población de variables cataclísmicas (VCs) conocidas en la Galaxia. De interés particular son aquellos sistemas que más se aproximan al periodo mínimo según los modelos evolutivos de las VCs; estos objetos llegan a magnitudes fuera del alcance de la mayoría de los telescopios usados hasta este entonces, por lo cual no han sido el objetivo de estudio en la literatura. Partiendo de SDSS Szkody y colaboradores iniciaron una búsqueda de VCs tenues, con la expectativa de capturar una muestra representativa de variables cataclísmicas en nuestra galaxia, en particular obteniendo muestras de poblaciones históricamente imperceptibles a nuestros instrumentos.

Para restringir los sistemas que buscar, Szkody y colaboradores aplicaron un criterio de color basado en el trabajo de Krisciunas, Margon y Szkody (1998), en el cual lograron determinar concentraciones de diferentes tipos de objetos utilizando diagramas de color-color. A pesar de haber hecho estas observaciones antes del año de lanzamiento de SDSS, Krisciunas y colaboradores lograron obtener observaciones utilizando equipo cuyas características se asemejan a las de los instrumentos utilizados para SDSS. Partiendo de estos resultados, Szkody y

³<https://www.sdss.org>

⁴<https://www.sdss3.org/index.php>

colaboradores determinaron criterios en las regiones azules y rojas del espectro, cuyos valores se encuentran en la ecuaciones en 4.1.

$$\begin{aligned}
 u^* - g^* &< 0.45 \\
 g^* - r^* &< 0.7 \\
 r^* - i^* &> 0.30 \\
 i^* - z^* &> 0.4
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Una vez recabada la muestra de candidatas a observar, Szkody y colaboradores confirmaron su estatus como variables cataclísmicas basado en los espectros obtenidos del SDSS desde el *Apache Point Observatory*. Estos datos los complementaron con observaciones de espectrografía con el telescopio de 3.5m en el *Apache Point Observatory* y observaciones fotométricas utilizando el telescopio de 0.76m en el *Manastash Ridge Observatory* de la Universidad de Washington. En total identificaron 22 sistemas como variables cataclísmicas, incluyendo 3 objetos previamente estudiados e identificados como tal. Presentan la concentración de los objetos en el diagrama color-color, vistos en la figura 4.1.

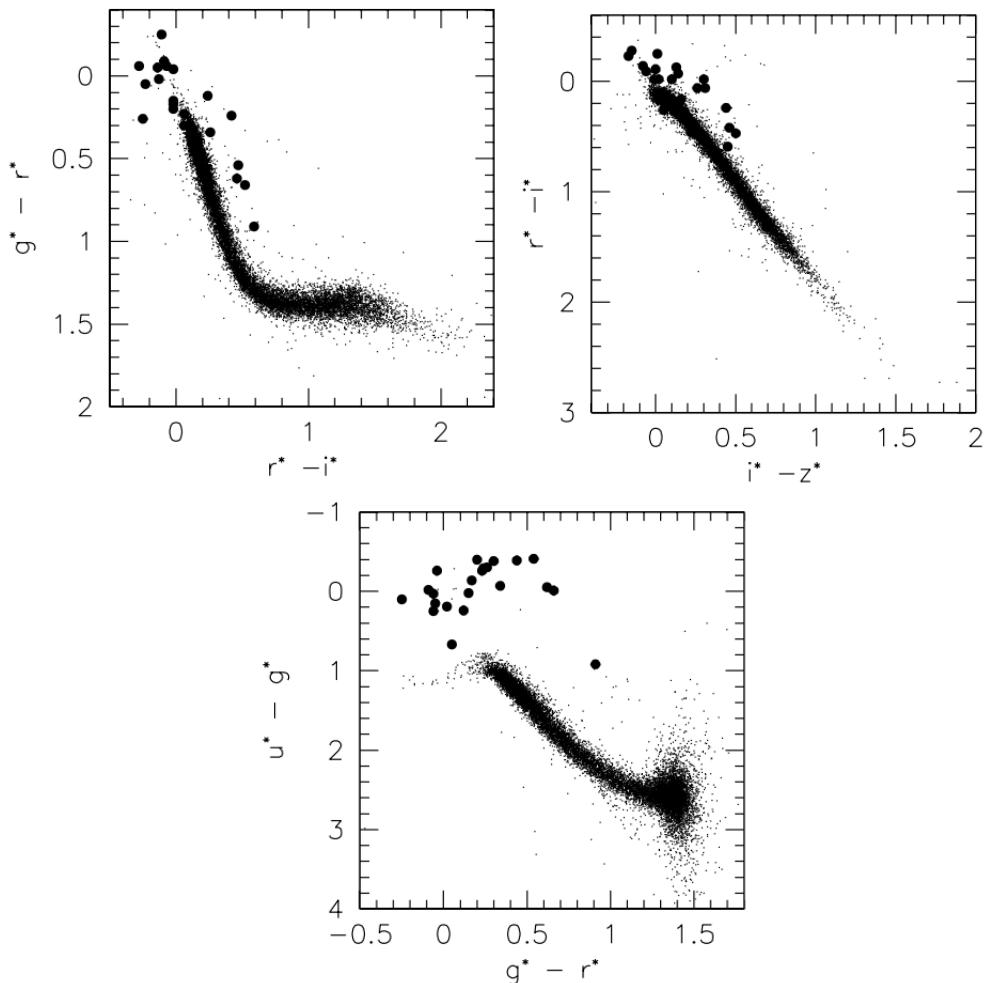


Figura 4.1: Variables cataclísmicas identificadas y observadas por Szkody y colaboradores (círculos negros fuertes). Se puede apreciar la separación de las variables cataclísmicas del locus estelar, vista en los puntos negros. Szkody et al. (2002)

Capítulo 5

Selección de Objeto

Este trabajo tiene como objetivo realizar una campaña de observación para un sistema pobremente estudiado, con el propósito de confirmar su estatus como variable cataclísmica o como una binaria eclipsante, dependiendo del sistema. Para esto, se implementó un proceso para separar e identificar objetos de interés para observar desde el Observatorio Astronómico Universitario en Iturbide. A continuación se describe los aspectos técnicos importantes de la búsqueda. El código completo se encuentra en la carpeta `obsrv_plan`, cuyo punto de entrada se ubica en el script `main.py`.

5.1 Búsqueda en Gaia

Para obtener la muestra inicial de objetos de interés acudimos a la base de datos de Gaia. Tal como es descrito en la sección 4.1 la selección de objetos fue llevada a cabo dentro del *Gaia Archive* utilizando su interfaz de ADQL. Sin embargo, los criterios definidos por Szkody y colaboradores solo fueron definidos para el sistema fotométrico de SDSS; para poder utilizar estos primero se llevó a cabo una conversión de las magnitudes reportadas en el catálogo de Gaia a magnitudes en los pasa bandas de SDSS. Esta conversión se llevó a cabo utilizando las siguientes relaciones definidas en la documentación de Gaia DR3 Leeuwen et al. (2022), como se puede ver en la figura 5.1. Partiendo de estas magnitudes transformadas se aplicó los criterios definidos en Szkody et al. (2002). Sin embargo, solo dos de los 4 indices de color se pueden aplicar a la muestra de Gaia; no están definidas transformaciones para las bandas u ni z de SDSS, ya que estas abarcan longitudes de onda más extremas que las observadas por Gaia. El query de ADQL ejecutada se puede encontrar en el apéndice A. Se obtuvieron en total más de 3 630 000 fuentes, el cual representa un 0.2 % de los 1 811 709 771 objetos reportados en el DR3 de Gaia. Un query similar fue ejecutado en la base de datos de Gaia para el segundo Data Release (DR2) (apéndice A.1).

5.2 Selección de Objetos Observables

La ubicación en la bóveda celeste de un sistema candidata juega un papel importante en la viabilidad de una campaña de observación desde el OAU. Esto determina si un objeto es visible desde la locación geográfica del observatorio durante las fechas de observación; de otra manera sería imposible apuntar un telescopio al sistema. Para realizar esta tarea se utilizaron los módulos de `astroplan` Morris et al. (2018) y `astropy` Collaboration et al. (2018), aplicando el algoritmo a los objetos resultados de la búsqueda en la base de datos de Gaia. El código responsable se encuentra en el archivo `observable_targets.py`.

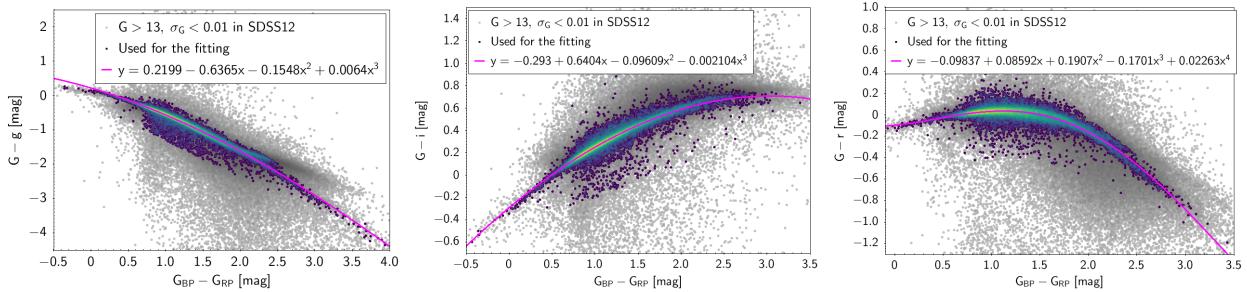


Figura 5.1: Relación empírica entre las magnitudes reportadas en GDR3 y SDSS12. Las relaciones están dadas para 3 de las 5 bandas de SDSS12, debido a las diferencias entre las pasa bandas de Gaia y SDSS. Leeuwen et al. (2022)

5.3 Búsqueda en SIMBAD

Una vez obtenidos los objetos de interés de la selección de objetos visibles se utilizó la base de datos de SIMBAD¹ Wenger et al. (2000) para restringir los objetos de interés a un tamaño manejable, con el objetivo de obtener un sistema clasificado como variable cataclísmica, binaria eclipsante, o candidata a alguna de estas clasificaciones. Uno de los objetivos de este trabajo de tesis fue realizar una campaña de observación al sistema elegido, con finalidad de obtener una curva de luz fotométrica; por lo tanto, un requisito para este trabajo de maestría es que este sistema sea uno con una cantidad mínima de estudios antecedentes; el estudio del sistema dependerá en gran parte de la curva de luz obtenida de las observaciones. Esta búsqueda se llevó a cabo utilizando el API de SIMBAD, el cual acepta mensajes y encuestas por HTTP. El código relevante a esta búsqueda se encuentra en `retrieve_vots.py`. A pesar de no haber obtenido una muestra significativa de candidatas a binarias eclipsantes se identificó un sistema de interés.

5.4 ATO J339.9469+45.1464 - EclBin_Candidate

Heinze et al. (2018) es un estudio donde se realizó una búsqueda de estrellas variables dentro del catálogo del **Asteroid Terrestrial-impact Last Alert System (ATLAS)**, aprovechando su cobertura de aproximadamente 13 000 deg² al menos 4 veces por noche. Esta cadencia de observación es ideal para observar estrellas variables; el tiempo de observación es suficientemente corto para obtener una curva de luz adecuada para estudiar estos sistemas. Lograron clasificar las estrellas variables del catálogo en 15 distintas categorías de la morfología de sus curvas de luz; de estas reportan que 74 700 fuentes son binarias eclipsantes. A pesar de haber confirmado la clasificación de estas fuentes, aún quedan varios sistemas cuya naturaleza es desconocido, sus únicos descriptores vienen siendo una clasificación tentativa.

ATO J339.9469+45.1464 está clasificado como una de estas candidatas a binaria eclipsante. Como este sistema carece una clasificación concreta, no existe mucha información acerca de ella. Tiene una magnitud promedio de aproximadamente 16.91, lo cual lo hace un sistema tenue. Con una ascensión recta de 22 39 47.2569 y declinación de +45 08 47.0311, **ATO J339.9469+45.1464** es un sistema ideal para observar desde el OAU en Iturbide.

¹<http://simbad.cds.unistra.fr/simbad/>

5.4.1 Datos de Gaia

Como parte de sus observaciones regulares, Gaia ha observado ATO J339.9469+45.1464 en 3 años de operación, obteniendo magnitudes del sistema en varias etapas en su fase empezando desde agosto del 2014 y las últimas observaciones siendo de mayo del 2017. En la figura 5.2 se puede ver las 3 curvas de luz de Gaia. Aparte de ser otra fuente de información de la variabilidad en el sistema, las observaciones en 3 diferentes pasa bandas relacionados uno con otro permite el análisis del color del sistema, el cual está ligado con las temperaturas de las estrellas individuales.

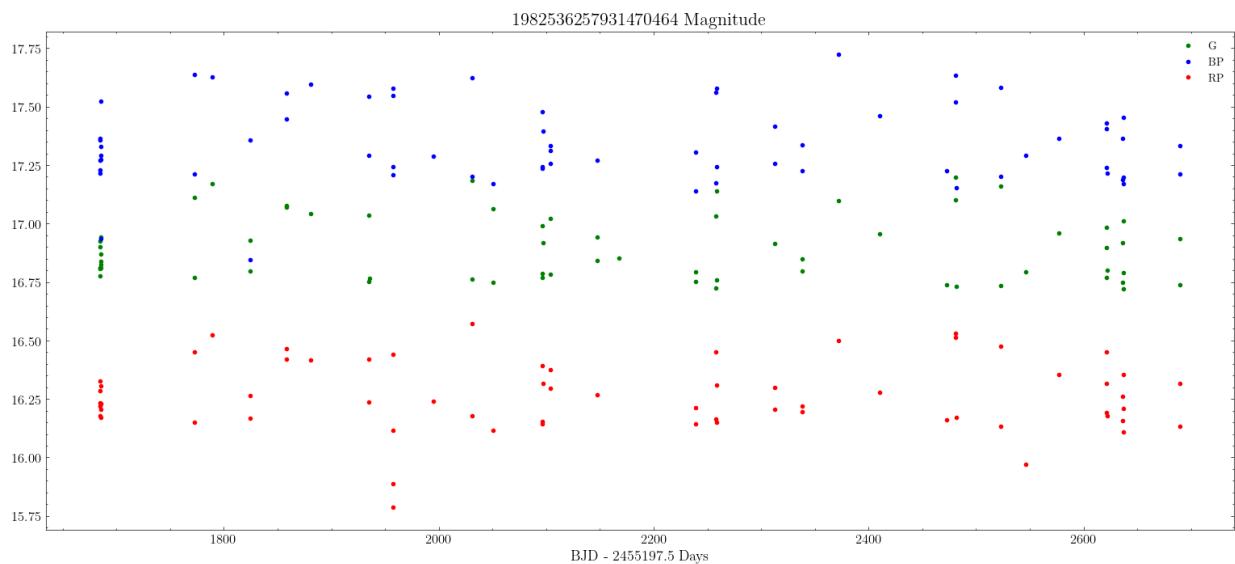


Figura 5.2: Magnitud de ATO J339.9469+45.1464 registrada en la base de datos de Gaia DR3. Se puede apreciar la variabilidad de aproximadamente 0.5 mag en el brillo del sistema, la cual la atribuimos a la presencia de eclipses en el sistema binario. Leeuwen et al. (2022)

5.4.2 Datos de ZTF

Capítulo 6

Observaciones

El segundo objetivo principal de este trabajo de tesis de maestría es realizar una campaña de observación a ATO J339.9469+45.1464 . Desde el **Observatorio Astronómico Universitario** en Iturbide, N.L. se midió el brillo del sistema durante 9 noches de observación; mediante la técnica de fotometría diferencial se obtiene una curva de luz, la cual se utiliza para determinar la naturaleza del objeto observado.

6.1 Observatorio Astronómico Universitario - Iturbide

El **Observatorio Astronómico Universitario - Iturbide** (el cual de ahora en adelante será referido como el OAU), ubicado en el cerro Picacho en el municipio de Iturbide, Nuevo León, es un nuevo sitio dedicado a la observación astronómica, equipado para realizar observaciones del Sol, monitoreo de basura espacial, y la observación de objetos variables, como los sistemas binarios o asteroides. A continuación se describe el equipo utilizado; como software de control se utilizó **Nightime Imaging 'N' Astronomy¹** (NINA), el cual permita consolidar el control de todas las componentes mecánicas en una sola aplicación.

El telescopio utilizado para hacer las observaciones del sistema fue el tubo óptico **CDK20** de **PlaneWave Instruments²** con un número $f/6.8$. Este telescopio de diseño *Dall-Kirkham corregido* cuenta con un grupo de lentes frente al espejo esférico secundario, el cual resta los efectos de la aberración esférica presente en otras configuraciones de espejos primarios y secundarios, resultando en una imagen más nítida. Este instrumento, combinado con una montura ecuatorial **Orion HDX110**, nos permite una vista clara de la bóveda celeste a 30° arriba del horizonte, con capacidad de observar objetos tenues más allá de 17 magnitudes.

El CCD usado para obtener las imágenes fue el **QHY174GPS³**. Este CCD cuenta con una resolución de 1920×1200 pixeles. Para reducir el ruido térmico tiene un mecanismo de enfriamiento termoeléctrico, el cual lo puede enfriar a una temperatura de -40° C bajo la temperatura ambiente. Frente al CCD va equipado una rueda de filtros **ZWO 7x36mm⁴**, la cual puede ser equipada con 7 filtros distintos. Para las observaciones recabadas en este trabajo, utilizamos solamente el filtro **Luminance**, el cual se aproxima a la región del visible del espectro electromagnético (**Figura 6.1**).

¹<https://nightime-imaging.eu>

²<https://planewave.com/product/cdk20-ota/>

³<https://www.qhyccd.com/qhy174gps-imx174-scientific-cooled-camera/>

⁴<https://astronomy-imaging-camera.com/product/new-zwo-efw-7x36mm/>

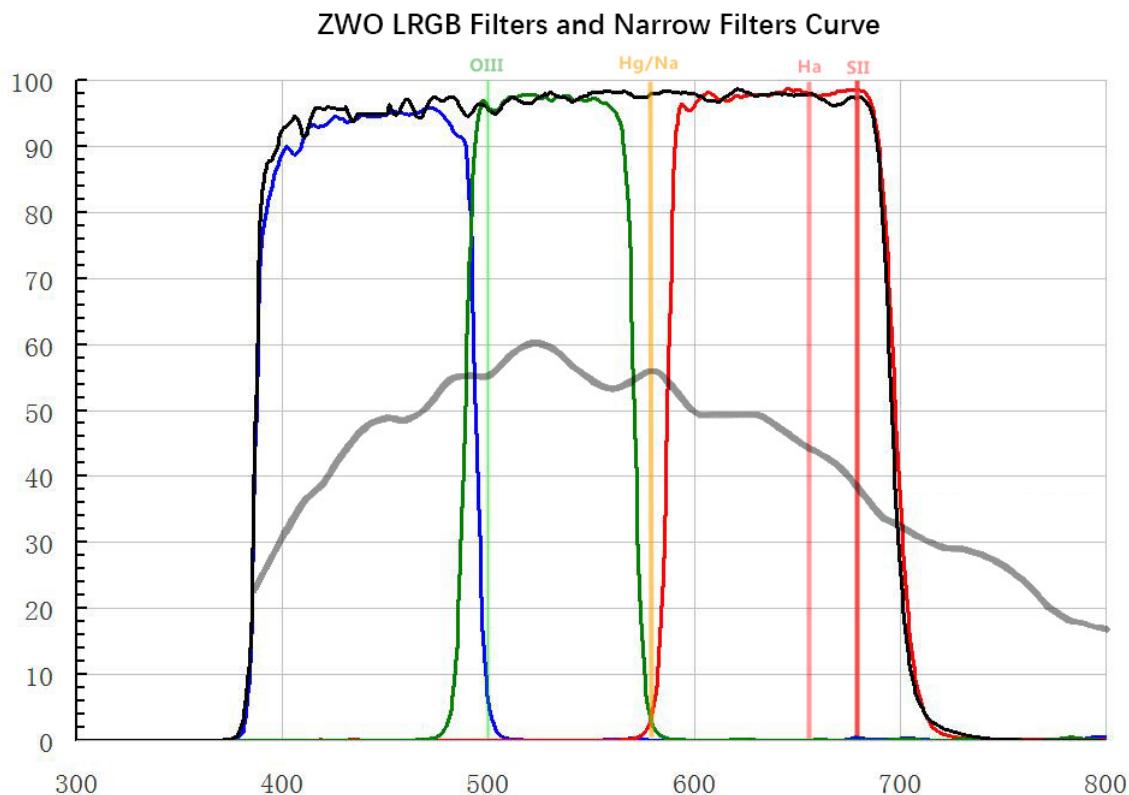


Figura 6.1: Curva de transmisión de filtros de ZWO. El filtro de **Luminance** se encuentra como la curva negra, abarcando todo el espectro visible, desde los 400nm hasta 700nm. Gráfica obtenida de la [página de productos de ZWO](#).

6.2 Fotometría

Para este trabajo se realizó una campaña de observación durante los últimos meses del 2022, con la finalidad de observar el sistema durante una fase orbital completa. Las fechas y duraciones de cada día de observación se encuentra en la **Tabla 6.1**. Durante varias de estas noches de observación las condiciones del sitio fueron menos que ideal; tanto las condiciones meteorológicas como contratiempos causados por el equipo en si causaron interrupciones en la medición del brillo del sistema. Esto es esperado en un observatorio en proceso de desarrollo; a pesar de los problemas técnicos, se pudieron obtener datos de calidad aceptable.

Fecha	HJD Inicio + 2 459 000	Tiempo Expocisiones	Duración
2022-10-21	874.66	114 · 60 s	2.59 h
2022-10-27	880.77	93 · 60 s	1.86 h
2022-11-05	889.67	98 · 60 s	2.02 h
2022-11-26	910.72	56 · 60 s	1.55 h
2022-12-06	920.55	243 · 60 s	4.90 h
2022-12-07	921.56	163 · 60 s	4.20 h
2022-12-08	922.53	188 · 60 s	5.57 h
2022-12-09	923.54	119 · 60 s	5.33 h
2022-12-10	924.53	122 · 60 s	2.20 h

Cuadro 6.1: Fechas de observaciones fotométricas desde el OAU.

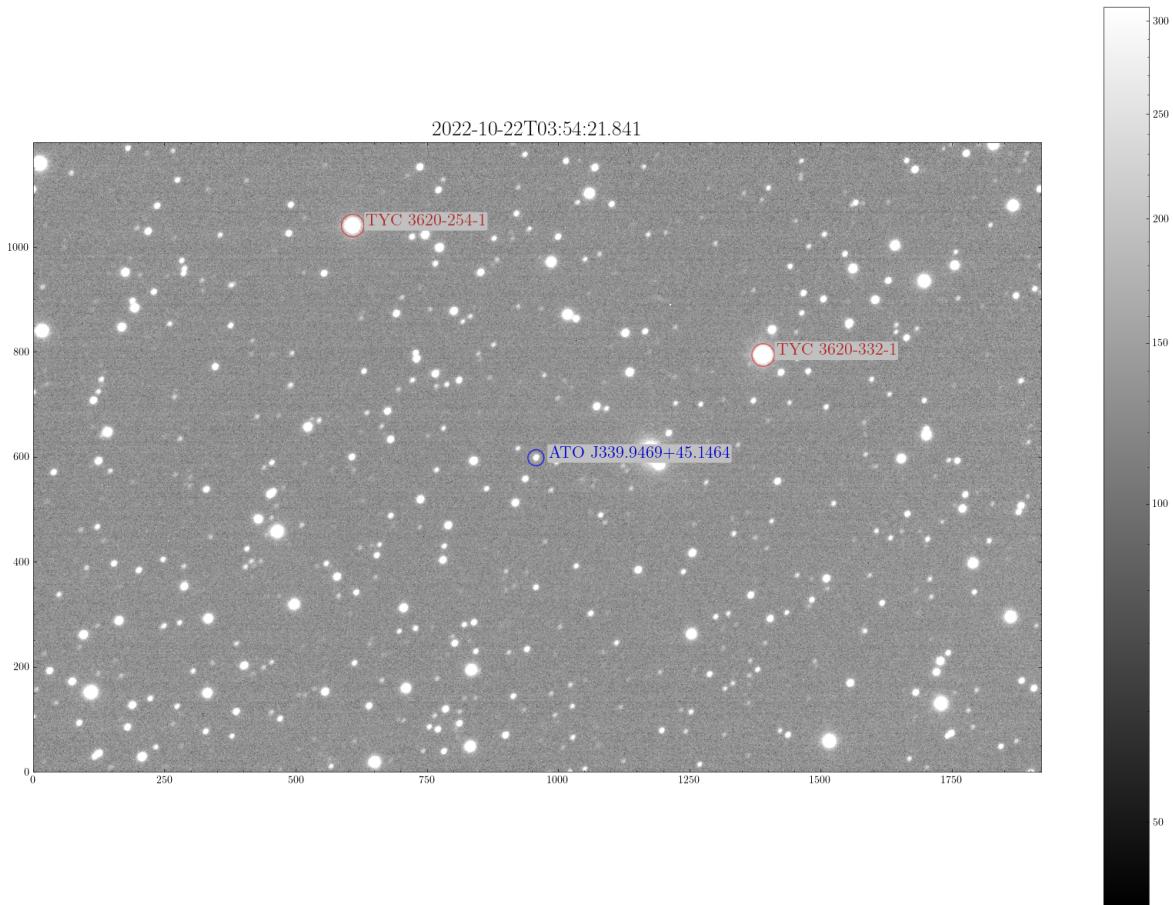


Figura 6.2: Imagen del campo de ATO J339.9469+45.1464, junto a 2 estrellas de comparación usadas en la fotometría diferencial marcadas en anillos rojos.

6.2.1 Estrellas de Comparación

Para determinar la magnitud diferencial de un objeto se necesita una estrella de comparación que yazca dentro del campo de la imagen de ciencias. Una manera de encontrar estrellas de referencias adecuadas es utilizando el [Variable Star Plotter](#) de la *AAVSO*; sin embargo, debido al diminuto campo de visión de nuestras imágenes (aproximadamente 1' de largo), no se encuentra alguna estrella standard registrada. Por lo tanto se utilizaron estrellas no variables de la base de datos de *SIMBAD*: [TYC 3620-254-1](#) y [TYC 3620-332-1](#). Sus posiciones relativo a la estrella objetivo ATO J339.9469+45.1464 se puede ver en la figura 6.2.

6.2.2 Procesamiento de Imágenes

La limpieza de las imágenes incluyó la corrección de bias, darks, y flats por medio de imágenes de calibración, las cuales fueron tomadas cada noche de observación. Esta sustracción se realizó utilizando el paquete `ccdproc` en Python, haciendo uso de sus funciones dedicadas al procesamiento de imágenes de CCD Craig et al. (2023). El código relevante se puede encontrar en el notebook [photometry_clean.ipynb](#). Una vez que las mediciones hayan sido corregidas de errores sistemáticos, fue necesario trasladar los datos dentro de las imágenes para que ATO J339.9469+45.1464 quede en el centro del campo, facilitando la fotometría por apertura. Dentro del mismo notebook [photometry_clean.ipynb](#) se ejecutó una tarea de *plate solving* para cada imagen calibrada; el proceso de *plate solve*, llevado a cabo utilizando *Astrometry* Lang et al. (2010), toma como referencia estrellas dentro del campo de la imagen, comparando contra una

base de datos pre-definida para determinar las coordenadas físicas que corresponden a una imagen. Esta información va encapsulada dentro de los metadatos del archivo FITS, conocido como **World Coordinate System (WCS)**. Una vez que una imagen sea resuelta se puede proyectar a las coordenadas de otra imagen, efectivamente “apilando” el sistema a observar.

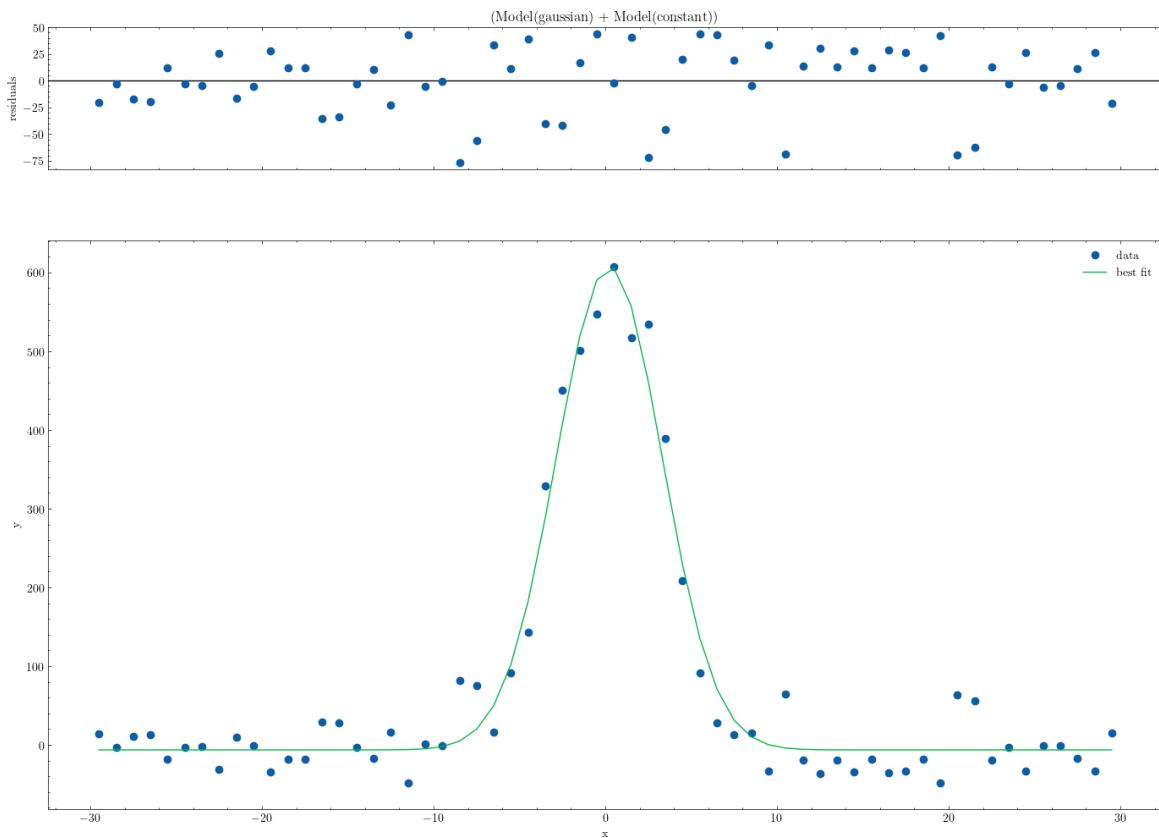


Figura 6.3: Perfil Gaussiano de ATO J339.9469+45.1464 . Esta imagen fue generada en el notebook [qphot_params_helper.ipynb](#), en donde se toma un corte transversal los pixeles del centro de la imagen del sistema. A este perfil radial se hace un ajuste de modelo Gaussiano con la finalidad de determinar un tamaño adecuado de aperturas basado en la anchura del modelo.

Utilizando las imágenes proyectadas se obtuvo el brillo de ATO J339.9469+45.1464 utilizando la tarea `qphot` de IRAF, dando como resultado magnitudes y flujos instrumentales del sistema. Para elegir el mejor tamaño de apertura para cada día se realizó un análisis del comportamiento del brillo de ambas estrellas de referencia; ya que estas se conocen que son estrellas singulares que carecen de variabilidad intrínseca esperamos que sus magnitudes a lo largo del tiempo no muestren cambios significativos. Al mismo tiempo, debido a las condiciones variables durante cada noche de observación no todas las magnitudes medidas resultaron útiles debido a una imagen barrida. Para no tener que descartar toda una noche de observación se implementó un proceso de *sigma clipping*, en el cual se descartan aquellas observaciones que caen fuera de un rango aceptable pre-determinado, tomando TYC 3620-332-1 como estrella de referencia. El proceso completo se encuentra en el código [qphot_sigma_clip.ipynb](#).

6.2.3 Fotometría Diferencial

Para obtener una magnitud diferencial de ATO J339.9469+45.1464 se necesita de una estrella de referencia cuya magnitud en el visible es conocida y bien estudiada. TYC 3620-332-1 ha sido observada por varios sondeos, por lo cual se ha medido su magnitud en el visible de 11.57. Utilizando esta estrella conocida podemos calcular la magnitud diferencial de ATO

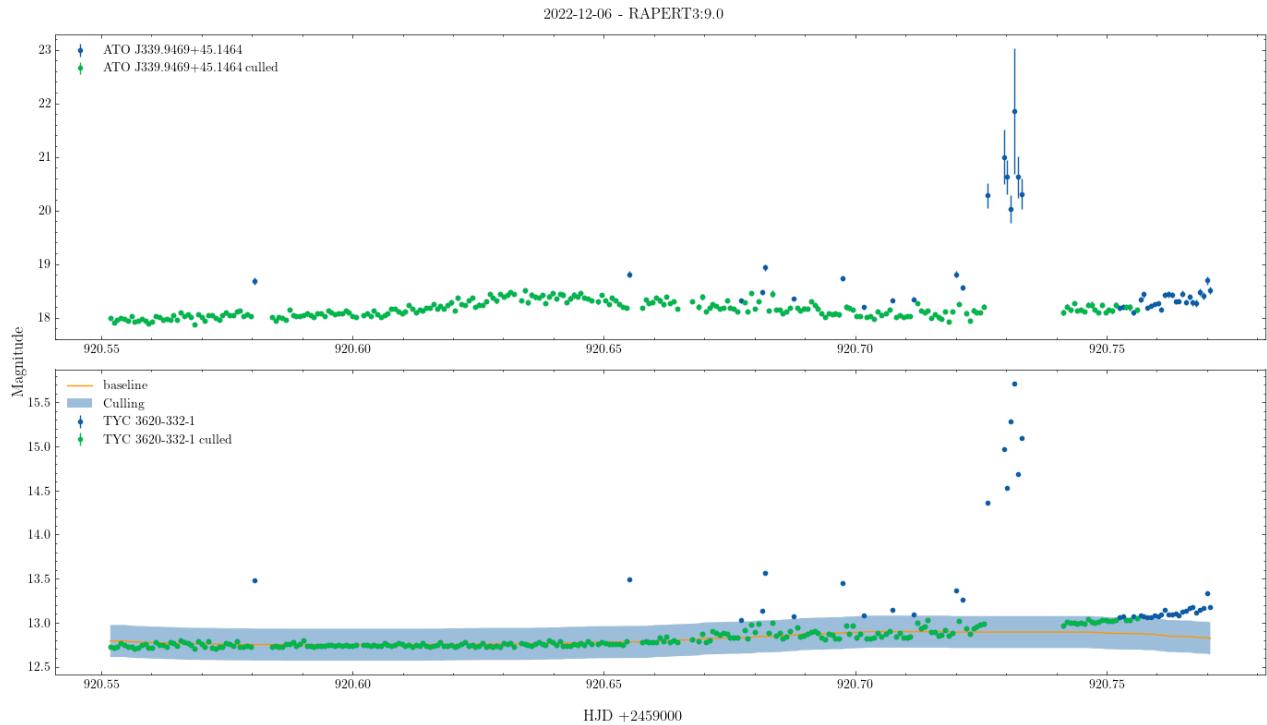


Figura 6.4: Resultado del sigma clipping para el 6 de diciembre. Este proceso se ejecutó para cada fecha de observación, con el fin de eliminar solo los datos más problemáticos. La línea base fue construida usando una técnica de media recorrida, para solo descartar aquellos datos cuya variación local es significante.

J339.9469+45.1464 con la [Ecuación 6.1](#). Una gran ventaja de la fotometría diferencial a comparación de magnitudes absolutas es que llega a minimizar los efectos causados por obstrucciones del cielo, como nubes intermitentes o celdas turbulentas en la atmósfera. Los resultados para un día de observación se encuentra en la [Figura 6.5](#), donde se puede apreciar la variabilidad de ATO J339.9469+45.1464 comparado con ambas estrellas de referencia. Este proceso se repite para cada noche de observación, al final obteniendo una curva de luz del sistema visto en la [Figura 6.6](#). El código completo se encuentra en [qphot_sigma_clip.ipynb](#).

$$\begin{aligned} E_{\text{inst}} &= V_{\text{TYC3620-332-1}} - V_{\text{TYC3620-332-1,inst}} \\ V_{\text{ATOJ339.9469+45.1464}} &= V_{\text{ATOJ339.9469+45.1464,inst}} - E_{\text{inst}} \end{aligned} \quad (6.1)$$

[Ecuación 6.1](#): Ecuación para obtener la magnitud diferencial de ATO J339.9469+45.1464. El primer paso es calcular el error en las magnitudes diferenciales medidas, E_{inst} utilizando la magnitud conocida de nuestra estrella de comparación, TYC 3620-332-1, $V_{\text{TYC3620-332-1}}$ y restando la magnitud instrumental medida de las imágenes de observación. Una vez obtenido el error este se resta de la magnitud instrumental de ATO J339.9469+45.1464, $V_{\text{ATOJ339.9469+45.1464,inst}}$, obteniendo su magnitud diferencial en el visible $V_{\text{ATOJ339.9469+45.1464}}$.



Figura 6.5: Magnitud diferencial para ATO J339.9469+45.1464 junto a las magnitudes de TYC 3620-332-1 y TYC 3620-254-1. Esta segunda estrella fue utilizada como estrella de campo, para corroborar que la resta descrita en la ecuación 6.1 adecuadamente eliminó los errores sistemáticos en otra estrella de referencia.

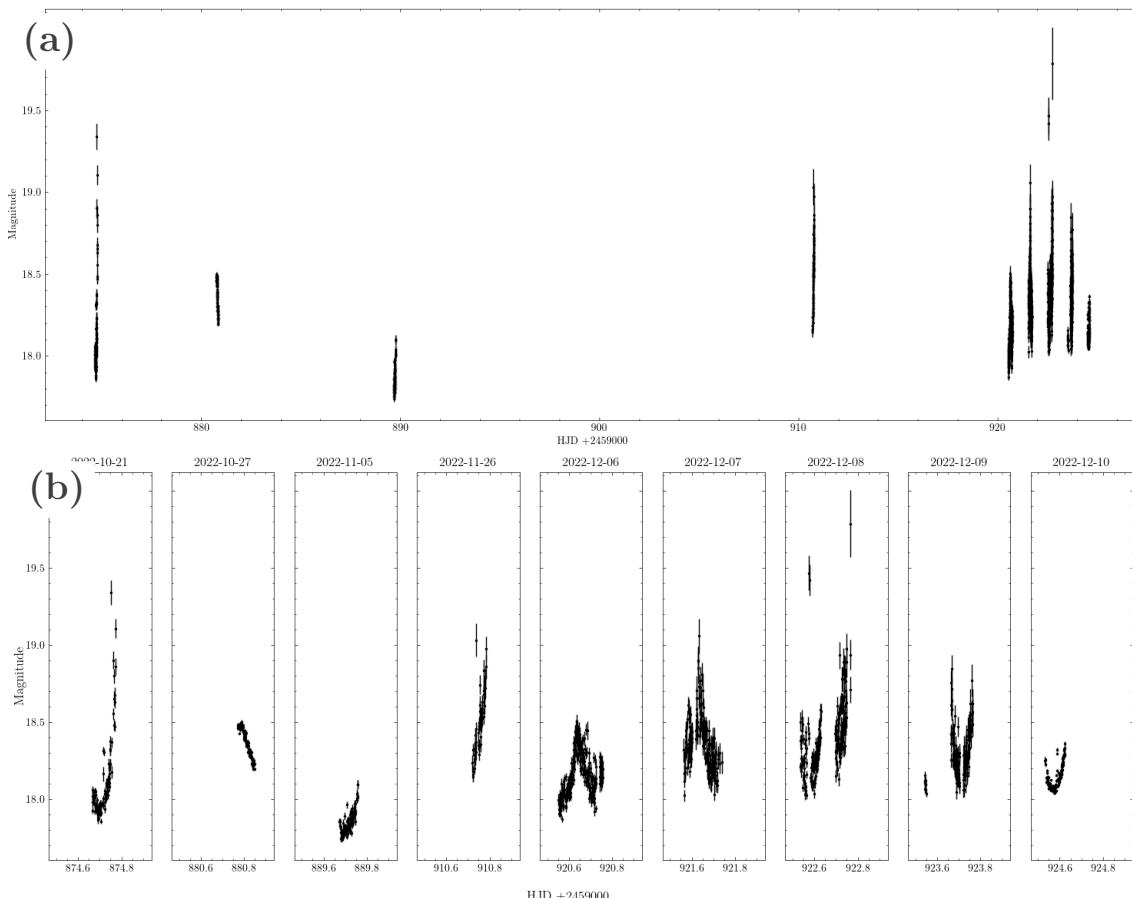


Figura 6.6: Magnitud diferencial de ATO J339.9469+45.1464. Ambas gráficas muestran los errores de medición, las cuales fueron más altas de lo ideal debido a las condiciones del sitio. **a)** Curva de luz completa, con cada día de observación. **b)** Curva de luz segmentada por día. Aquí se logra apreciar la cadencia de observación, viendo como cada día se logra observar una fase diferente del sistema.

Parte III

Metodología y Análisis de Datos

Capítulo 7

Periodo Orbital

Una de las propiedades más importantes presente en la curva de luz de una binaria eclipsante es su **periodo orbital**. Partiendo del periodo orbital es posible presentar los datos observacionales en el espacio fase en vez de tiempo, el cual nos permite ajustar modelos analíticos para determinar ciertas propiedades del sistema binario. Dada una curva de luz se puede encontrar el periodo orbital usando **periodogramas**: herramientas utilizadas para generar un espectro de potencias para una serie de tiempo periódica. Para series de tiempo cuyo muestreo no es uniforme en el tiempo (como es común de observaciones astronómicas) se utiliza el periodograma **Lomb-Scargle**, derivado de la transformada de Fourier VanderPlas (2018). Usando un mallado suficientemente fino para explorar el espacio de frecuencias se puede encontrar la frecuencia de mayor potencia, indicando el periodo orbital del sistema; al mismo tiempo, para restringir esta malla de periodos se impuso un límite máximo de 1 día, basado en las primeras observaciones de Iturbide. El espectro de frecuencias se encuentra en la **Figura 7.1**.

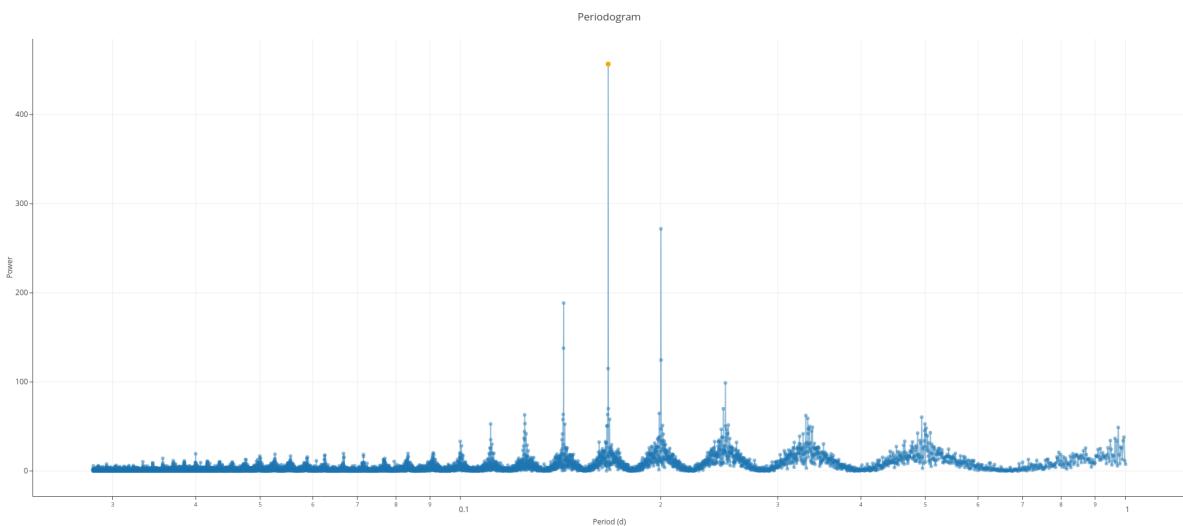


Figura 7.1: Espectro de frecuencias de las curvas de luz fotométricas de ATO J339.9469+45.1464, utilizando observaciones de ZTO en el filtro R. Este periodograma fue generado utilizando la herramienta del IRSA dedicada al análisis de series de tiempo, **Time Series Tool**. El pico de más alta potencia está ubicado en el periodo de 0.1667834993 d [4.002803983 h]

Dado este espectro de frecuencias encontramos que el periodo orbital yace en la segunda armónica de la frecuencia principal. Esto se debe a los requisitos para analizar una curva de luz de un sistema binario eclipsante; estos muestran dos valles en el espacio fase, las cuales corresponden a las etapas en la curva de luz en las que se observan eclipses en el sistema. Esto

es necesario para poder modelar la curva de luz en fase como una Gaussiana doble, el modelo aceptado para una binaria eclipsante. Utilizando la segunda armónica de la frecuencia de más alta potencia se puede ver esta forma esperada de la curva de luz, como se puede ver en la **Figura 7.2**. El periodo orbital encontrado es de 8.005607976 horas.

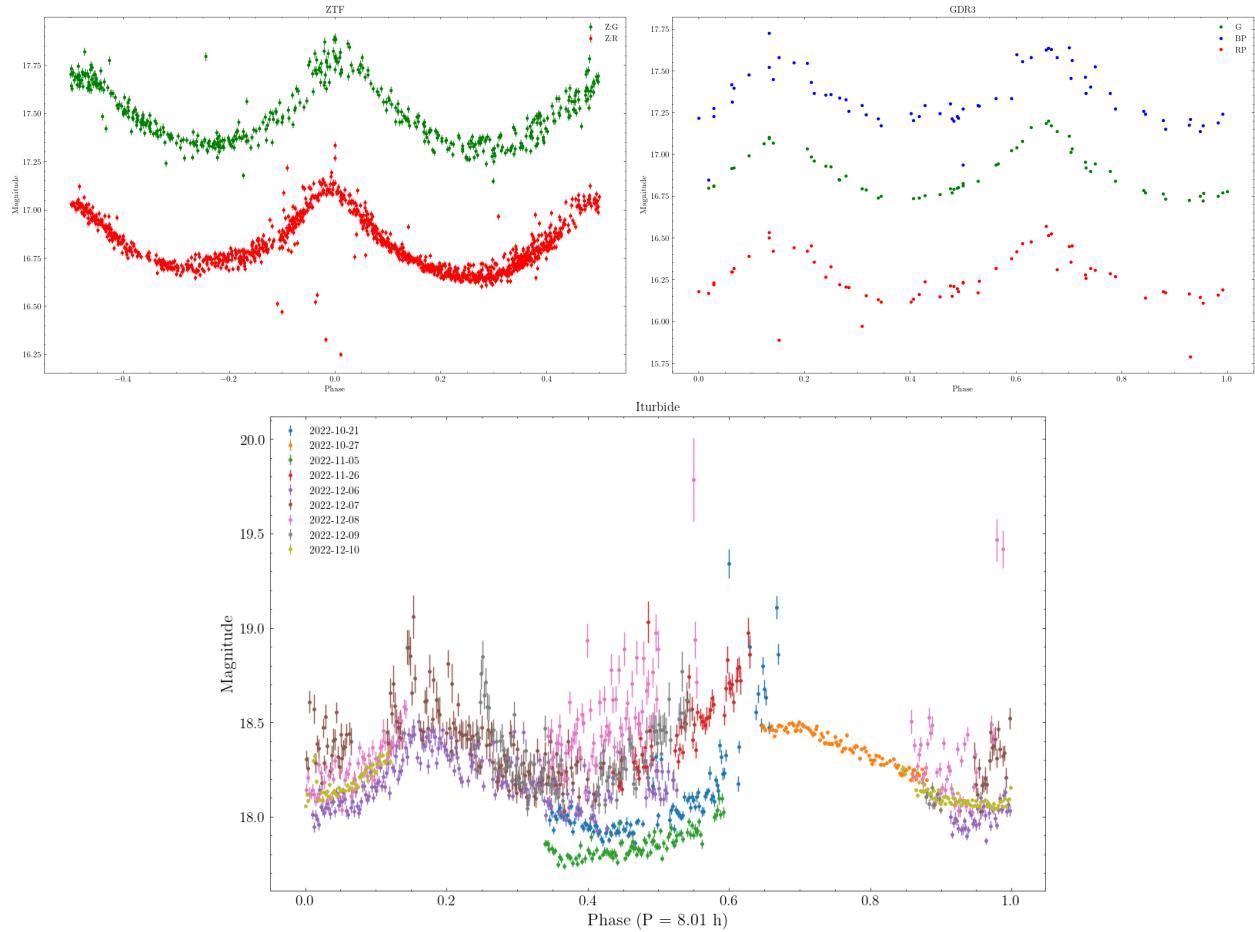


Figura 7.2: Curvas de luz de ZTF, Gaia e Iturbide en espacio fase dado un periodo orbital de 8.005607976 horas. El tiempo de conjunción superior son corregidos en los siguientes pasos de afinación del modelo de PHOEBE, el cual ajusta la fase 0 para que coincidan las 3 curvas de luz. Las observaciones de Iturbide se clasifican por su noche de observación, indicado por su color.

Capítulo 8

Normalización de Flujos

Tenemos a nuestra disposición las cuentas de fotones que corresponden a sus magnitudes para las curvas de luz de Gaia, para las cuales el flujo reportado es el promedio de todas las mediciones hechas en un transito, e Iturbide. Sin embargo, estas cuentas crudas no son adecuadas para el ajuste de modelo con PHOEBE; estas producen resultados no físicos cuando son utilizadas sin tratamiento adicional. Para esto las magnitudes determinadas en la sección anterior se convierten a flujos normalizados con la [Ecuación 8.1](#). Esta transformación fue aplicada a todas las curvas de luz recabadas (Gaia, ZTF, Iturbide) para poder trabajar con datos consistentes al momento de desarrollar el modelo computacional en PHOEBE.

$$f_p = 10^{-\frac{2}{5} \cdot (m_p - m_0)} \quad (8.1)$$

[Ecuación 8.1:](#) Ecuación usada para obtener flujos para cada pasa banda p . Esta determina el flujo normalizado f_p desde la magnitud reportada m_p utilizando una magnitud de referencia m_0 .

8.1 Preservación de Color

Gracias a las observaciones en varias pasa bandas tenemos información del color del sistema, debido a la diferencia de magnitud. Sin embargo PHOEBE trabaja solo con flujos, por lo cual la transformación descrita en la [Sección 8](#) fue necesaria. Para preservar el color por diferencia de magnitud se determina un solo valor de m_0 con el cual convertir las magnitudes; este m_0 corresponde a la magnitud en 0.25 de fase del pasa bandas más tenue del sistema. PHOEBE tablas de coeficientes que relacionan la temperatura efectiva del sistema binario con la diferencia de flujos. Andrej Prša ([2011](#))

En este trabajo se dividieron las curvas de luz de ATO J339.9469+45.1464 basado en su fuente: las de Gaia (G, G_{BP}, G_{RP}), las de ZTF ($ZTF : G, ZTF : R$), y la de Iturbide. Podemos determinar 2 diferentes colores del sistema, entre la diferencia de color en Gaia y ZTF (como solo se observó a ATO J339.9469+45.1464 con un solo filtro en Iturbide no contamos con datos de color). Para ZTF se tomó la magnitud de $ZTF : G$. Las curvas de luz en fase se pueden ver en la [Figura 8.1](#), donde se puede apreciar como preserva la diferencia de magnitud vista en [Figura 7.2](#). El código responsable de esta reducción se encuentra en [light_curves.ipynb](#) para Gaia, [light-curve-processing.ipynb](#) para ZTF, y [qphot_timeseries_analysis.ipynb](#) para Iturbide.

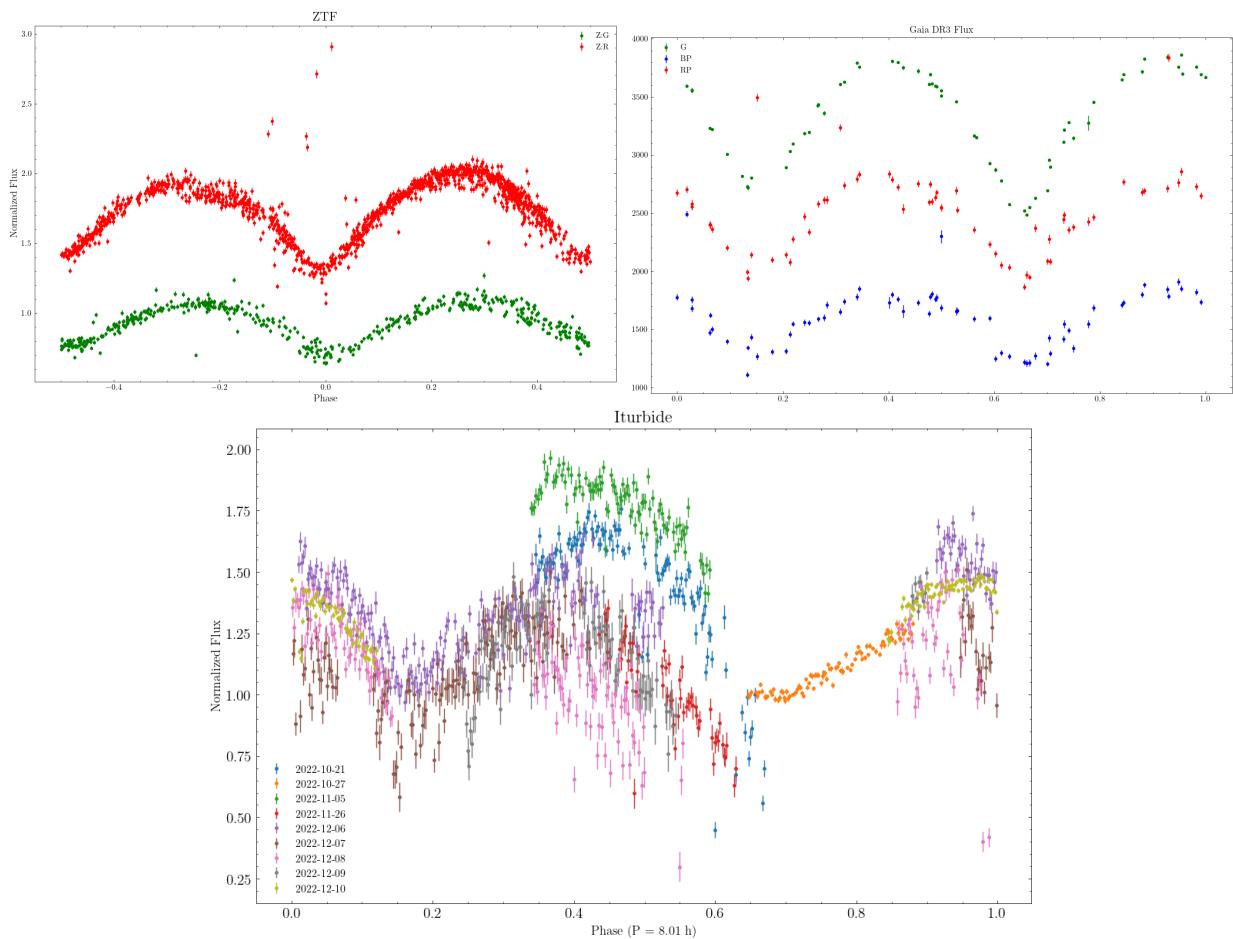


Figura 8.1: Flujo en fase de cada curva de luz utilizada. El catálogo de Gaia DR3 ya tiene reportado el flujo del sistema, por lo cual este se utilizó para el modelo en vez de obtener un flujo normalizado partiendo de las magnitudes.

Capítulo 9

Modelo Computacional

Usando todas las curvas de luz disponible para el sistema ATO J339.9469+45.1464 — tanto de Gaia como los datos recabados de Iturbide — se puede generar un modelo computacional cuyas propiedades físicas pueden adecuadamente explicar los datos observacionales. Este método al final daría como resultado una *solución fotométrica* del sistema. En el mejor de los casos, esta solución muestra un valor satisfactorio de ajuste a los datos observacionales. A continuación se plasma el proceso que se llevó a cabo para llegar a una solución fotométrica del sistema ATO J339.9469+45.1464; esta solución no es única en el sentido que otra combinación de parámetros podría llegar a las mismas conclusiones.

9.1 Estimaciones Iniciales

Una vez determinado el periodo orbital del sistema se puede empezar un estudio de la morfología de las curvas de luz en fase. PHOEBE para facilitar esto ofrece distintos métodos para generar las primeras estimaciones de parámetros físicos del sistema. El estimador **EBAI-KNN** para estimar los siguientes parámetros: el *tiempo de conjunción superior* (`t0_supconj`), la *razón de temperaturas* (`teffratio`), la *inclinación orbital* (`incl@binary`), el *factor de relleno* (*fillout factor* en inglés, `fillout_factor`), y la *razón de masas* (`q`). A pesar que dentro de PHOEBE estén implementados estimadores adicionales, solo se puede aplicar el **EBAI-KNN** estimador; esto se debe a que el modelo del sistema del que parte este trabajo corresponde al de una binaria en contacto (elegido por la morfología aparente de la curva de luz de Iturbide).

Dentro del Jupyter Notebook `ebai-default.ipynb` se puede encontrar el código con el que se llevaron a cabo las pruebas de estimación de parámetros. El estimador **EBAI-KNN** puede que obtenga diferentes soluciones del sistema dependiendo de la curva de luz utilizada; por lo cual se esperaba que obtuviera diferentes resultados dependiendo de la curva de entrada. Para obtener un panorama completo de las posibles soluciones fotométricas se ejecutaron varios estimadores de PHOEBE, cada uno operando sobre una diferente combinación de curvas de luz; se corrió un estimador por cada curva de luz individual, al igual que unos estimadores que tuvieron de entrada una combinación de curvas de luz de Gaia e Iturbide. El experimento completo junto a sus curvas de luz sintéticas correspondientes se pueden ver en el Notebook antedicho, acompañado de las gráficas resultantes de cada estimador.

9.1.1 Elección del Modelo Inicial

Una consideración importante en el proceso de modelación computacional es la existencia de diferentes soluciones fotométricas dado un mismo conjunto de datos. Esto se debe a la ortogonalidad de los parámetros en el sistema; dos o más parámetros pueden estar en un estado

de degeneración, donde existe una relación lineal entre estos, lo cual significa que no existe una solución única correcta del sistema. Para decidir entre los varios estimadores se tomó como criterio de selección el ajuste del "forward model.^a los datos mediante la estadística χ^2 . Estos se pueden ver en la **Figura 9.1**. Viendo solo la medida de ajuste χ^2 total para cada modelo se llegaría a la conclusión que el modelo `ebai_knn_iturbide_aviles_raw_solution` es el que más coincide con los datos observacionales. Sin embargo, es necesario ver el ajuste a cada curva de luz individual; la curva de luz obtenida de Iturbide tiene mayor dispersión y puntos de valor que cualquiera de las otras curvas. Es por esta razón que el χ^2 de `lc_iturbide_aviles_raw` es varias ordenes de magnitud mayor que cualquier otro estimador. Por lo tanto se eligió las estimaciones de `ebai_knn_gaia_norm_solution`, el cual utilizó la fotometría de Gaia normalizada. Los parámetros de este estimador fueron idénticos al estimador que utilizó los datos directos de la base de datos de Gaia. El resultado inicial del modelo se puede ver en la **Figura 9.2**, junto a los parámetros del modelo en la **Tabla 9.1**.

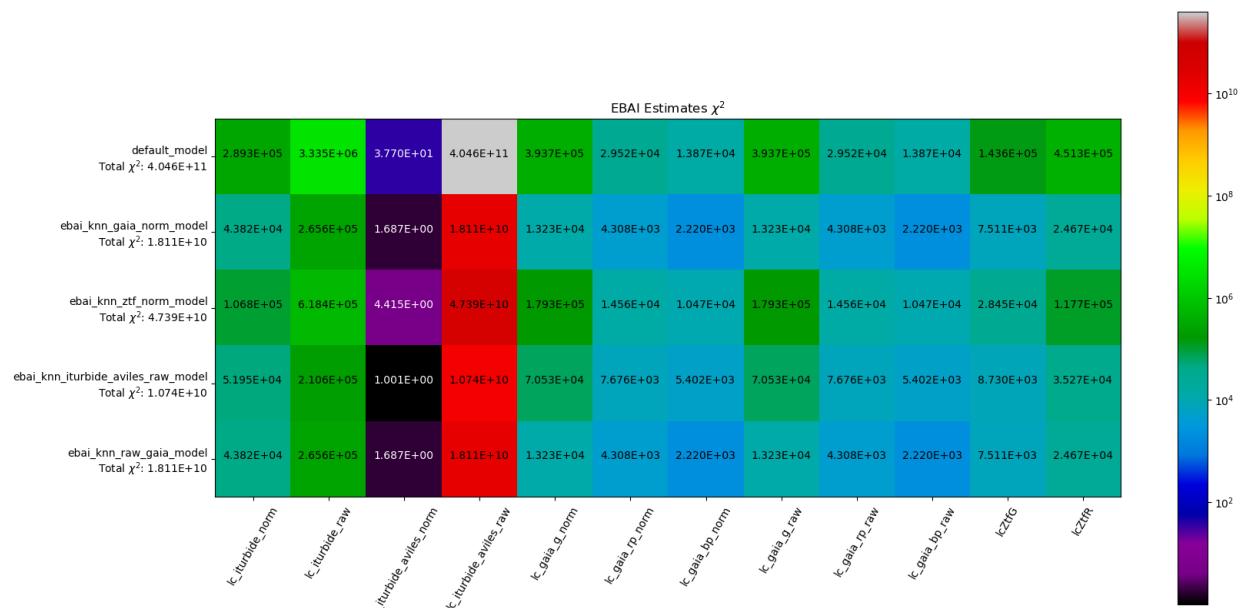


Figura 9.1: Resultados del ajuste (χ^2) de los modelos sintéticos generados utilizando los parámetros de los estimadores. Cada estadística fue calculada con respecto a todos los datos observacionales disponibles, sin importar las combinaciones de curvas de luz utilizadas para hacer la estimación. `raw_model` corresponde al modelo inicial que ofrece PHOEBE a través de la función `phoebe.default_contact_binary()`. Los nombres de los estimadores en el eje vertical de la gráfica indican los datos observacionales utilizados para cada estimación de parámetros.

Parámetro	Valor
<code>t0_supconj@binary</code>	-0.03748 d
<code>teffratio@binary</code>	0.98573
<code>incl@binary</code>	71.07442 deg
<code>fillout_factor@contact_envelope</code>	0.18522
<code>q@binary</code>	1.85648

Cuadro 9.1: Resultados adoptados de las estimaciones iniciales, utilizando el estimador cuyos datos de entrada fueron solo datos de Gaia. Las unidades de cada valor son especificadas excepto para los parámetros adimensionales.

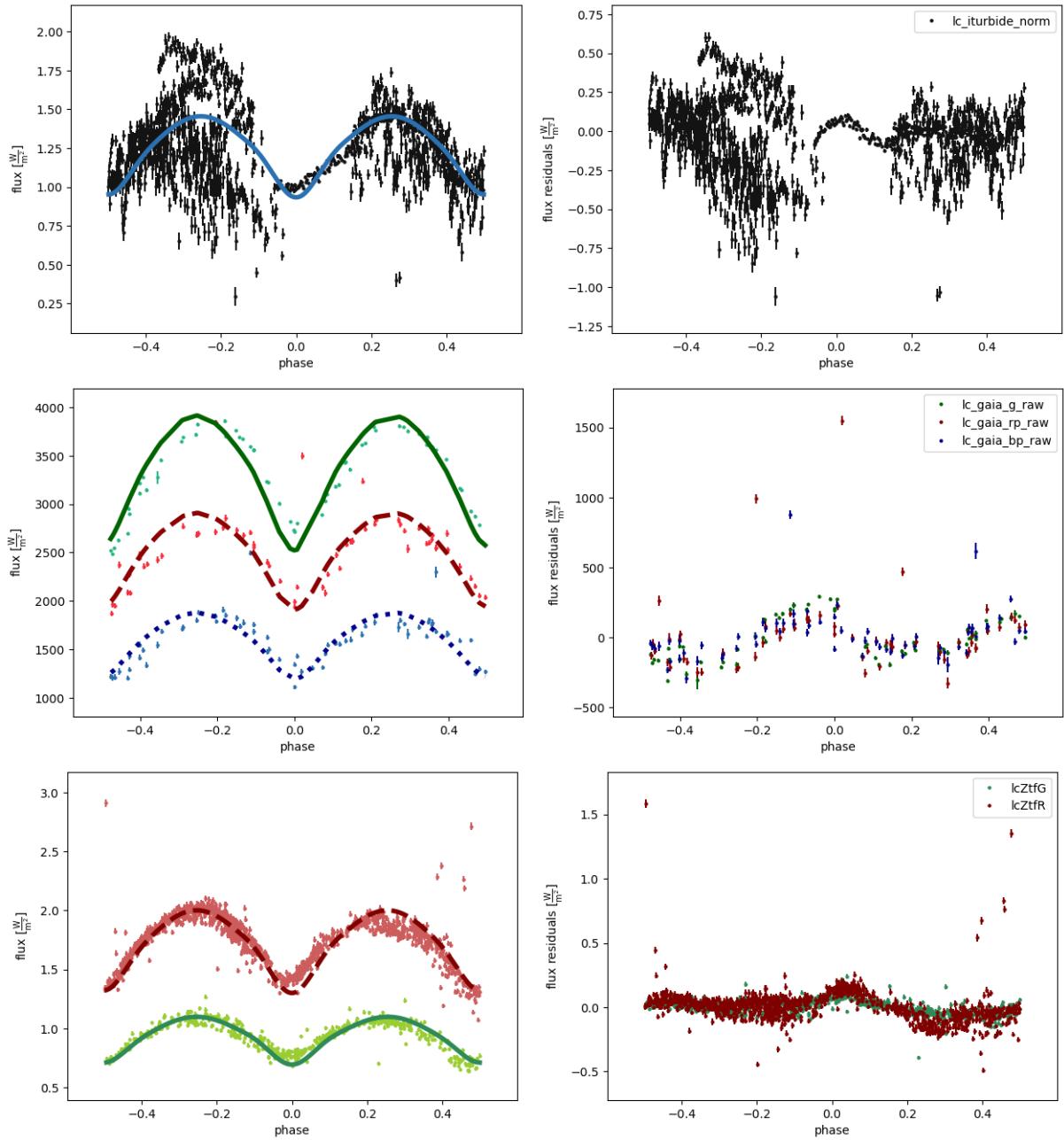


Figura 9.2: Modelos sintéticos del modelo utilizando los parámetros estimados por `ebai_knn_gaia_norm_solver` junto a los residuos en los flujos para cada curva de luz. Estos modelos fueron sintetizados utilizando un factor de escala de flujos flexible, utilizando la opción `pblum_mode = "dataset_scaled"`, el cual nos permite analizar la morfología del modelo sintético sin considerar por ahora el efecto en la escala de la curva de parámetros relacionados con la luminosidad de cada componente, como las temperaturas absolutas de ambas estrellas. Estos parámetros son ajustados en los siguientes pasos de afinación del modelo.

9.2 Optimización de Parámetros

Como se puede ver en la **Figura 9.2** el modelo inicial de PHOEBE no se ajusta perfectamente bien a los datos observacionales. Los residuos de los flujos no llegan a estar planos alrededor de 0; se alcanza a apreciar un comportamiento oscilatorio en fase. Por lo tanto es necesario ajustar estos parámetros para llegar al mínimo global en el espacio de parámetros. PHOEBE ofrece varias herramientas partiendo de una estimación inicial, haciendo uso de méto-

dos numéricos para evaluar el espacio de parámetros y llegar a un modelo con el mejor ajuste a los datos observacionales.

Apéndice A

Gaia ADQL Queries

A.1 DR2

```
01 | SELECT *,  
02 |   array_element(a0, 1) AS J2000_ra_prop,  
03 |   array_element(a0, 2) AS J2000_dec_prop,  
04 |   array_element(a0, 3) AS J2000_parallax_prop,  
05 |   array_element(a0, 4) AS J2000_pmra_prop,  
06 |   array_element(a0, 5) AS J2000_pmdec_prop,  
07 |   array_element(a0, 6) AS J2000_rv_prop, sdss_transform.g_sdss -  
      sdss_transform.r_sdss AS g_r_sdss_color, sdss_transform.r_sdss -  
      sdss_transform.i_sdss AS r_i_sdss_color  
08 | FROM (  
09 |   SELECT *,  
10 |     -0.13518 + 0.46245 * bp_rp + 0.2517 * Power(bp_rp, 2) - 0.021349 *  
        Power(bp_rp, 3) + phot_g_mean_mag AS g_sdss,  
11 |     0.29676 - 0.64728 * bp_rp + 0.10174 * Power(bp_rp, 2) +  
        phot_g_mean_mag AS i_sdss,  
12 |     0.12879 - 0.24662 * bp_rp + 0.027464 * Power(bp_rp, 2) + 0.049465  
        * Power(bp_rp, 3) + phot_g_mean_mag AS r_sdss  
13 |   FROM (  
14 |     SELECT source_id, phot_variable_flag, bp_rp, phot_g_mean_mag, ra,  
           dec, parallax, pmra, pmdec, radial_velocity AS rv, EPOCH_PROP(ra,  
           dec, parallax, pmra, pmdec, radial_velocity, ref_epoch, 2000) AS a0  
15 |       FROM gaiadr2.gaia_source  
16 |   ) AS gdr2  
17 | WHERE  
18 |   gdr2.phot_variable_flag = 'VARIABLE'  
19 |   AND gdr2.source_id IN (  
20 |     SELECT source_id  
21 |       FROM external.gaiadr2_geometric_distance  
22 |   )  
23 |   AND gdr2.source_id NOT IN (  
24 |     SELECT source_id  
25 |       FROM gaiadr2.sdssdr9_best_neighbour  
26 |   )  
27 | ) AS sdss_transform  
28 | WHERE sdss_transform.g_sdss - sdss_transform.r_sdss < 0.7 AND  
      sdss_transform.r_sdss - sdss_transform.i_sdss > 0.30
```

A.2 DR3

```

01 | SELECT TOP 3630000 * ,
02 |     array_element (sdss_transform.a0 , 1) AS J2000_ra_prop ,
03 |     array_element (sdss_transform.a0 , 2) AS J2000_dec_prop ,
04 |     array_element (sdss_transform.a0 , 3) AS J2000_parallax_prop ,
05 |     array_element (sdss_transform.a0 , 4) AS J2000_pmra_prop ,
06 |     array_element (sdss_transform.a0 , 5) AS J2000_pmdec_prop ,
07 |     array_element (sdss_transform.a0 , 6) AS J2000_rv_prop ,
08 |     sdss_transform.g_sdss - sdss_transform.r_sdss AS g_r_sdss_color ,
09 |     sdss_transform.r_sdss - sdss_transform.i_sdss AS r_i_sdss_color
10 | FROM
11 | (
12 |     SELECT * ,
13 |         -0.2199 + 0.6365 * bp_rp + 0.1548 * Power(bp_rp , 2) - 0.0064 *
14 |             Power(bp_rp , 3) + phot_g_mean_mag AS g_sdss ,
15 |             0.293 - 0.6404 * bp_rp + 0.09609 * Power(bp_rp , 2) + 0.002104 *
16 |                 Power(bp_rp , 3) + phot_g_mean_mag AS i_sdss ,
17 |                 0.09837 - 0.08592 * bp_rp + 0.1907 * Power(bp_rp , 2) + 0.1701 *
18 |                     Power(bp_rp , 3) + phot_g_mean_mag AS r_sdss ,
19 |                     0.4619 - 0.8992*bp_rp +0.08271*Power(bp_rp , 2) - 0.005029*Power(
20 |                         bp_rp , 3) + phot_g_mean_mag AS z_sdss
21 |     FROM (
22 |         SELECT *, EPOCH_PROP(ra, dec, parallax, pmra, pmdec,
23 |             radial_velocity, ref_epoch, 2000) AS a0
24 |             FROM gaiadr3.gaia_source) AS gdr3
25 |             WHERE gdr3.phot_variable_flag = 'VARIABLE'
26 |                 AND gdr3.source_id NOT IN
27 |                     (SELECT sdss.source_id FROM gaiadr3.sdssdr13_best_neighbour as
28 |                         sdss)
29 |     ) AS sdss_transform
30 | WHERE sdss_transform.g_sdss - sdss_transform.r_sdss < 0.7
31 |     AND sdss_transform.r_sdss - sdss_transform.i_sdss > 0.30;

```

Agradecimientos

This work has made use of data from the European Space Agency (ESA) mission *Gaia* (<https://www.cosmos.esa.int/gaia>), processed by the Gaia Data Processing and Analysis Consortium (DPAC, <https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/dpac/consortium>). Funding for the DPAC has been provided by national institutions, in particular the institutions participating in the *Gaia* Multilateral Agreement.

This research made use of Astropy,¹ a community-developed core Python package for Astronomy Collaboration et al. (2018).

This research has made use of the SIMBAD database, operated at CDS, Strasbourg, France.

This research made use of ccdproc, an Astropy package for image reduction Craig et al. (2023).

¹<http://www.astropy.org>

Bibliografía

- Benacquista, Matthew (2013). *An Introduction to the Evolution of Single and Binary Stars*. en. Undergraduate Lecture Notes in Physics. New York, NY: Springer. ISBN: 978-1-4419-9990-0 978-1-4419-9991-7. DOI: [10.1007/978-1-4419-9991-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9991-7). URL: <https://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-9991-7> (visitado 06-03-2024).
- Collaboration, The Astropy et al. (sep. de 2018). «The Astropy Project: Building an Open-science Project and Status of the v2.0 Core Package». En: *aj* 156, 123, pág. 123. DOI: [10.3847/1538-3881/aabc4f](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aabc4f). arXiv: [1801.02634 \[astro-ph.IM\]](https://arxiv.org/abs/1801.02634).
- Conroy, Kyle E. et al. (1 de oct. de 2020). «Physics of Eclipsing Binaries. V. General Framework for Solving the Inverse Problem». En: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 250.2, pág. 34. ISSN: 0067-0049, 1538-4365. DOI: [10.3847/1538-4365/abb4e2](https://doi.org/10.3847/1538-4365/abb4e2). arXiv: [2006.16951 \[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/2006.16951). URL: <http://arxiv.org/abs/2006.16951> (visitado 08-05-2024).
- Craig, Matt et al. (mayo de 2023). *astropy/ccdproc*: 2.4.1. Ver. 2.4.1. DOI: [10.5281/zenodo.7986923](https://doi.org/10.5281/zenodo.7986923). URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7986923>.
- Ding, Xu et al. (oct. de 2022). «Fast Derivation of Contact Binary Parameters for Large Photometric Surveys». en. En: *The Astronomical Journal* 164.5. Publisher: The American Astronomical Society, pág. 200. ISSN: 1538-3881. DOI: [10.3847/1538-3881/ac8e66](https://doi.org/10.3847/1538-3881/ac8e66). URL: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-3881/ac8e66> (visitado 11-03-2024).
- Gaia Collaboration, A. G. A. Brown et al. (ago. de 2018). «Gaia Data Release 2. Summary of the contents and survey properties.» En: *Astronomy & Astrophysics* 616.
- Gaia Collaboration, T. Prusti et al. (2016). «The Gaia mission». En: *Astronomy & Astrophysics* 595.
- Gunn, James E. et al. (abr. de 2006). «The 2.5 m Telescope of the Sloan Digital Sky Survey». En: *The Astronomical Journal* 131. DOI: [10.1086/500975](https://doi.org/10.1086/500975).
- Heinze, A. N. et al. (nov. de 2018). «A First Catalog of Variable Stars Measured by the Asteroid Terrestrial-impact Last Alert System (ATLAS)». en. En: *The Astronomical Journal* 156.5. Publisher: The American Astronomical Society, pág. 241. ISSN: 1538-3881. DOI: [10.3847/1538-3881/aae47f](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aae47f). URL: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-3881/aae47f> (visitado 01-11-2023).
- Ibáñez, Javier Abril (1 de ene. de 2021). «Cataclysmic Variables in Wide Field Surveys». Pages: 2021 Publication Title: Ph.D. Thesis ADS Bibcode: 2021PhDT.....5I. Tesis doct. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021PhDT.....5I> (visitado 04-04-2024).
- Kallrath, Josef y Eugene F. Milone (2009). *Eclipsing Binary Stars: Modeling and Analysis*. en. Astronomy and Astrophysics Library. New York, NY: Springer. ISBN: 978-1-4419-0698-4 978-1-4419-0699-1. DOI: [10.1007/978-1-4419-0699-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0699-1). URL: <https://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0699-1> (visitado 06-03-2024).
- Karttunen, Hannu et al. (2017). *Fundamental Astronomy*. Springer.
- Kopal, Zdenek (ene. de 1959). *Close binary systems*. Publication Title: The International Astrophysics Series ADS Bibcode: 1959cbs..book.....K. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1959cbs..book.....K> (visitado 24-03-2024).

- Kovács, G., S. Zucker y T. Mazeh (ago. de 2002). «A box-fitting algorithm in the search for periodic transits». En: *Astronomy & Astrophysics* 391.1, págs. 369-377. ISSN: 0004-6361, 1432-0746. DOI: [10.1051/0004-6361:20020802](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20020802). arXiv: [astro-ph/0206099](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0206099). URL: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0206099> (visitado 20-05-2024).
- Krisciunas, Kevin, Bruce Margon y Paula Skzody (ago. de 1998). «The Recognition of Unusual Objects in the Sloan Digital Sky Survey Color System». En: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*.
- Kurucz, R. L. (feb. de 1970). «Atlas: a Computer Program for Calculating Model Stellar Atmospheres». En: *SAO Special Report* 309. ADS Bibcode: 1970SAOSR.309.....K. ISSN: 0081-0320. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1970SAOSR..309.....K> (visitado 05-03-2024).
- Kutner, Marc L. (feb. de 2017). *Astronomy A Physical Perspective*. 2.^a ed. Cambridge University Press.
- Lang, Dustin et al. (mayo de 2010). «Astrometry.net: Blind astrometric calibration of arbitrary astronomical images». En: *The Astronomical Journal* 139.5. arXiv:0910.2233 [astro-ph], págs. 1782-1800. ISSN: 0004-6256, 1538-3881. DOI: [10.1088/0004-6256/139/5/1782](https://doi.org/10.1088/0004-6256/139/5/1782). URL: [http://arxiv.org/abs/0910.2233](https://arxiv.org/abs/0910.2233) (visitado 29-11-2023).
- Latković, Olivera, Atila Čeki y Sanja Lazarević (1 de mayo de 2021). «Statistics of 700 Individually Studied W UMa Stars». En: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 254. Publisher: IOP ADS Bibcode: 2021ApJS..254...10L, pág. 10. ISSN: 0067-0049. DOI: [10.3847/1538-4365/abeb23](https://doi.org/10.3847/1538-4365/abeb23). URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021ApJS..254...10L> (visitado 19-06-2024).
- LeBlanc, Francis (2010). *An Introduction to Stellar Astrophysics*. John Wiley & Sons Ltd.
- Leeuwen, F. van et al. (jun. de 2022). *Gaia DR3 documentation*. Gaia DR3 documentation, European Space Agency; Gaia Data Processing and Analysis Consortium. URL: <https://gea.esac.esa.int/archive/documentation/GDR3/index.html>.
- Li, Kai et al. (1 de nov. de 2022). «Extremely Low Mass Ratio Contact Binaries. I. The First Photometric and Spectroscopic Investigations of Ten Systems». En: *The Astronomical Journal* 164.5, pág. 202. ISSN: 0004-6256, 1538-3881. DOI: [10.3847/1538-3881/ac8ff2](https://doi.org/10.3847/1538-3881/ac8ff2). URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-3881/ac8ff2> (visitado 23-04-2024).
- Michel, R. et al. (10 de jun. de 2016). *ROTSE1 J164341.65+251748.1: a new W UMa-type eclipsing binary*. DOI: [10.48550/arXiv.1606.03464](https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.03464). arXiv: [1606.03464](https://arxiv.org/abs/1606.03464) [astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/1606.03464> (visitado 11-04-2024).
- Michel, Raul et al. (1 de abr. de 2023). «PHOTOMETRIC STUDY OF TWO CONTACT BINARY SYSTEMS AND A DETACHED LATE DWARF + M DWARF COMPONENTS». En: *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica* 59, págs. 123-135. DOI: [10.22201/ia.01851101p.2023.59.01.09](https://doi.org/10.22201/ia.01851101p.2023.59.01.09).
- Morris, Brett M. et al. (feb. de 2018). «astroplan: An Open Source Observation Planning Package in Python». en. En: *The Astronomical Journal* 155.3, pág. 128. ISSN: 1538-3881. DOI: [10.3847/1538-3881/aaa47e](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aaa47e). URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-3881/aaa47e> (visitado 30-10-2023).
- Nelder, J. A. y R. Mead (1 de ene. de 1965). «A Simplex Method for Function Minimization». En: *The Computer Journal* 7.4, págs. 308-313. ISSN: 0010-4620. DOI: [10.1093/comjnl/7.4.308](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308). URL: <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308> (visitado 31-05-2024).
- Pedregosa, Fabian et al. (2011). «Scikit-learn: Machine Learning in Python». En: *Journal of Machine Learning Research* 12.85, págs. 2825-2830. ISSN: 1533-7928. URL: <http://jmlr.org/papers/v12/pedregosa11a.html> (visitado 08-05-2024).
- Prialnik, Dina (2010). *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge University Press.

- Prša, A., K. E. Conroy et al. (1 de dic. de 2016). «Physics Of Eclipsing Binaries. II. Toward the Increased Model Fidelity». En: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 227. Publisher: IOP ADS Bibcode: 2016ApJS..227...29P, pág. 29. ISSN: 0067-0049. DOI: [10.3847/1538-4365/227/2/29](https://doi.org/10.3847/1538-4365/227/2/29). URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2016ApJS..227...29P> (visitado 01-05-2024).
- Prša, A., E. F. Guinan et al. (1 de nov. de 2008). «Artificial Intelligence Approach to the Determination of Physical Properties of Eclipsing Binaries. I. The EBAI Project». En: *The Astrophysical Journal* 687. Publisher: IOP ADS Bibcode: 2008ApJ...687..542P, págs. 542-565. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/591783](https://doi.org/10.1086/591783). URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2008ApJ...687..542P> (visitado 30-04-2024).
- Prša, Andrej (jun. de 2011). *PHOEBE Scientific Reference. PHOEBE version 0.30*. Inf. téc. Villanova University College of Arts, Sciences Department of Astronomy y Astrophysics.
- Samus, Nikolai (dic. de 2016). *GCVS Variability Types and Distribution Statistics of Designated Variable Stars According to their Types of Variability*. URL: <http://www.sai.msu.su/gcvs/gcvs/vartype.htm> (visitado 10-04-2024).
- Skelton, P.L. y D. Smits (1 de abr. de 2009). «Modelling of W UMa-type variable stars». En: *South African Journal of Science* 105, págs. 120-126. DOI: [10.4102/sajs.v105i3/4.62](https://doi.org/10.4102/sajs.v105i3/4.62).
- Speagle, Joshua S. (7 de mar. de 2020). *A Conceptual Introduction to Markov Chain Monte Carlo Methods*. arXiv: [1909.12313\[astro-ph, physics:physics, stat\]](https://arxiv.org/abs/1909.12313). URL: [http://arxiv.org/abs/1909.12313](https://arxiv.org/abs/1909.12313) (visitado 03-06-2024).
- Szkody, Paula et al. (1 de ene. de 2002). «Cataclysmic Variables from The Sloan Digital Sky Survey. I. The First Results». En: *The Astronomical Journal* 123. ADS Bibcode: 2002AJ....123..430S, págs. 430-442. ISSN: 0004-6256. DOI: [10.1086/324734](https://doi.org/10.1086/324734). URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2002AJ....123..430S> (visitado 25-03-2024).
- Thompson, Susan E. et al. (jun. de 2012). «A Class Of Eccentric Binaries With Dynamic Tidal Distortions Discovered With Kepler». En: *The Astrophysical Journal* 753.1. Publisher: The American Astronomical Society, pág. 86. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1088/0004-637X/753/1/86](https://doi.org/10.1088/0004-637X/753/1/86). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/753/1/86> (visitado 03-05-2024).
- VanderPlas, Jacob T. (mayo de 2018). «Understanding the Lomb–Scargle Periodogram». En: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 236.1. Publisher: The American Astronomical Society, pág. 16. ISSN: 0067-0049. DOI: [10.3847/1538-4365/aab766](https://doi.org/10.3847/1538-4365/aab766). URL: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4365/aab766> (visitado 20-05-2024).
- Wenger, M. et al. (abr. de 2000). «The SIMBAD astronomical database: The CDS reference database for astronomical objects». En: *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* 143.1, págs. 9-22. ISSN: 0365-0138, 1286-4846. DOI: [10.1051/aas:2000332](https://doi.org/10.1051/aas:2000332). URL: [http://aas.aanda.org/10.1051/aas:2000332](https://aas.aanda.org/10.1051/aas:2000332) (visitado 15-11-2023).
- Wilson, R. E. (1 de dic. de 1979). «Eccentric orbit generalization and simultaneous solution of binary star light and velocity curves.» En: *The Astrophysical Journal* 234. ADS Bibcode: 1979ApJ...234.1054W, págs. 1054-1066. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/157588](https://doi.org/10.1086/157588). URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1979ApJ...234.1054W> (visitado 25-03-2024).
- Wilson, Robert E. y Edward J. Devinney (1 de jun. de 1971). «Realization of Accurate Close-Binary Light Curves: Application to MR Cygni». En: *The Astrophysical Journal* 166. Publisher: IOP ADS Bibcode: 1971ApJ...166..605W, pág. 605. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/150986](https://doi.org/10.1086/150986). URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1971ApJ...166..605W> (visitado 23-04-2024).