Nikodem Kirsz 236559
Oskar Trela 236677

Rok akademicki *2021/22*
poniedziałek, 12:00

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 4 – całkowanie numeryczne metodą złożonej kwadratury Newtona-Cotesa oraz kwadratury Gaussa-Chebysheva

Opis rozwiązania

Celem tego zadanie było zaimplementowanie dwóch metod całkowania numerycznego: metodę złożonej kwadratury Newtona-Cotesa opartą na trzech węzłach (wzór Simpsona) oraz metodę kwadratury Gaussa-Chebysheva. Całkowanie numeryczne to metoda numeryczna polegająca na przybliżaniu całek oznaczonych.

Przy złożonej kwadraturze Newtona-Cotesa zadany przedział całkowania dzielimy na podprzedziały, których granice oznaczamy jako $< x_0, x_1 >, < x_1, x_2 >$…, gdzie $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$… (przedziały te są równej długości). Następnie wykorzystując wzór Simpsona:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + f(x_N) + 4 \cdot \big(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{N-1})\big) + 2 \cdot \big(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{N-2})\big)\Big)$$

$$h = x_{i+1} - x_i \Rightarrow h = const \quad N = \text{liczba węzłów}$$

obliczamy wartości całki na podprzedziale i zwiększamy ilość węzłów aż osiągniemy zadaną przez użytkownika dokładność. Następnie sumujemy wyliczone wartości całek.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\mathrm{x_i}}^{\mathrm{x_{i+1}}} \mathrm{f(x)dx}$$

Przy kwadraturze Gaussa-Chebysheva z wagą $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ do przybliżenia wartości całki wykorzystujemy wielomiany Chebysheva oraz odpowiednie wagi:

$$x_i = \ cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \qquad w_i = \frac{\pi}{n}$$

A samą całkę obliczamy ze wzoru:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{w_i f(x_i)}$$

Wyniki

Poniżej przedstawiliśmy wyniki działania naszego programu w postaci tabelki porównawczej obu metod, dla przykładowych funkcji.

Metoda Newtona-Cotesa		Metoda Gaussa-Chebysheva			
Wynik (dokł. 0.01)	Wynik (dokł. 0.01)	Wynik (2 węzły)	Wynik (3 węzły)	Wynik (4 węzły)	Wynik (5 węzłów)
$f(x) = 2x + 1$					
3.07413475	3.135725939	3.141592656	3.141592656	3.141592656	3.141592656
$f(x) = x^2 + 3$					
10.7397348374	10.957072147	10.995574288	10.995574288	10.995574288	10.995574288
$f(x) = x^3 - 2x - 5$					
-15.437118012	-15.668403215	-15.70796326	-15.70796328	-15.70796326	-15.70796326
$f(x) = sinx$					
-0.009591874	-0.000923214	$2.2204 \cdot 10^{-16}$	$3.3307 \cdot 10^{-16}$	$1.1102 \cdot 10^{-16}$	$1.1102 \cdot 10^{-16}$

Wnioski

1. Wyliczone przez nas wartości są bliskie rzeczywistym.
2. Metoda Newtona-Cotesa zwracała wyniki tym bliższe rzeczywistym, im mniejsza była wartość dokładności.
3. W metodzie Gaussa-Chebysheva największe różnice wyników od ilością węzłów widzimy przy funkcji trygonometrycznej.
4. Węzły kwadratury Gaussa są pierwiastkami odpowiedniego wielomianu ortagonlanego.