Nikodem Kirsz 236559
Oskar Trela 236677

Rok akademicki *2021/22*

poniedziałek, 12:00

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 1 – *rozwiązywanie równań nieliniowych*

Opis rozwiązania

Założeniem zadania pierwszego jest zaimplementowanie dwóch metod rozwiązywania równań nieliniowych, w naszym przypadku jest to metoda bisekcji oraz metoda stycznych (Newtona). Funkcje dla których nasz program będzie szukał rozwiązania muszą być ciągłe oraz określone na przedziale $< a, b >$. Dokładność wyniku szacowana będzie za pomocą nierówności $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon,\ i \in N$.

Metoda bisekcji:

1. Sprawdzamy czy wartości funkcji na granicach podanego przedziału są różnych znaków oraz czy wartość wybranego warunku stopu ma sens (ilość iteracji $\in < 1, \infty)$ oraz epsilon $\in (0, \infty)$). Jeżeli któryś z tych warunków nie jest spełniony funkcja kończy swoje działanie zwracając błąd.
2. Obliczamy środek przedziału $x_i = \frac{(a+b)}{2}$.
3. Jeżeli wybrany warunek stopu został spełniony (została wykonana konkretna ilość iteracji, lub różnica między dwoma ostatnimi środkami jest mniejsza niż epsilon) funkcja kończy swoje działanie zwracając wyliczoną wartość x_i.
4. Kalkulowana jest wartość funkcji dla aktualnej wartości s_i. Jeżeli jest ona mniejsza od zera wtedy do dolnej granicy przedziału przypisujemy wartość x_i, a jeżeli jest większa od zera to wartość x_i przypisujemy do górnej granicy przedziału.
5. Do poprzedniej wartości środka przedziału przypisujemy aktualną wartość środka przedziału ($x_{i-1} = x_i$), a następnie powtarzamy proces od punktu **2**.

Metoda stycznych (Newtona):

1. Sprawdzamy czy wartości funkcji na granicach podanego przedziału są różnych znaków oraz czy wartość wybranego warunku stopu ma sens (ilość iteracji $\in < 1, \infty)$ oraz epsilon $\in (0, \infty)$). Jeżeli któryś z tych warunków nie jest spełniony funkcja kończy swoje działanie.
2. Przyjmujemy, że naszym potencjalnym rozwiązaniem jest środek przedziału $< a, b >$ ($s = \frac{(a+b)}{2}$).
3. Korzystając ze wzoru $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ obliczamy odciętą miejsca przecięcia stycznej funkcji (x_{n+1}) z osią OX dla argumentu x_n i otrzymujemy tym samym przybliżenie rozwiązania.
4. Jeżeli wybrany warunek stopu został spełniony (została wykonana konkretna ilość iteracji, lub różnica między dwoma ostatnimi środkami jest mniejsza niż epsilon) funkcja kończy swoje działanie zwracając wyliczoną wartość. W przeciwnym wypadku nasze x_{n+1}staje się x_n i proces od punktu **3.** jest powtarzany do momentu uzyskania satysfakcjonującego nas przybliżenia rozwiązania.

Wyniki

Dla porównania wydajności obu metod wykonaliśmy doświadczenia na kilku funkcjach nieliniowych.

Tabela 1 - Dane porównawcze dla wybranych funkcji.

Funkcja	Warunek stopu	Metoda	Przedział		Epsilon (ε)	Ilość iteracji	Rozwiązanie
			a	b			
$x^3 - 2x - 5$	dokładność	bisekcji	-10	9	$\mathbf{1 \cdot 10^{-4}}$	18	2,09453964
		stycznych				10	2,09455148
	liczba iteracji	bisekcji			$1{,}9 \cdot 10^{-2}$	**10**	2,07910156
		stycznych			$1{,}1 \cdot 10^{-6}$		2,09455148
$2^{(x-2)} - 3$	dokładność	bisekcji	-1	4,5	$\mathbf{1 \cdot 10^{-4}}$	16	3,58498383
		stycznych				25	3,5849625
	liczba iteracji	bisekcji			$6{,}6 \cdot 10^{-7}$	**23**	3,58496219
		stycznych			$1{,}0 \cdot 10^{-1}$		3,58868814
$\sin(x^2 - 2)$	dokładność	bisekcji	-2	1	$\mathbf{1 \cdot 10^{-4}}$	15	$-1{,}41415405$
		stycznych				6	$-1{,}41421356$
	liczba iteracji	bisekcji			$7{,}3 \cdot 10^{-4}$	**12**	$-1{,}41479492$
		stycznych			$2{,}2 \cdot 10^{-16}$		$-1{,}41421356$
$3^{sin(x^3-2)} - 2$	dokładność	bisekcji	$-1{,}3$	0,8	$\mathbf{1 \cdot 10^{-4}}$	15	$-1{,}22187805$
		stycznych				3	$-1{,}22189968$
	liczba iteracji	bisekcji			$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	**7**	$-1{,}21796875$
		stycznych			$2{,}2 \cdot 10^{-16}$		$-1{,}22189968$

Wnioski

1. Biorąc pod uwagę powyższe wyniki możemy stwierdzić, że szybsza w rozwiązywaniu równań wielomianowych i trygonometrycznych jest metoda Newtona. Wymaga mniejszej ilości iteracji do osiągnięcia zadanej dokładności.
2. Dla funkcji wykładniczej metoda bisekcji jest szybsza i dokładniejsza. Różnice tę dobrze obrazuje przykład drugi w tabeli – różnica w dokładności przy zadanej ilości iteracji jest znaczna.
3. Metoda bisekcji jest prostsza i bardziej intuicyjna od metody Newtona i jest też bardziej uniwersalna.
4. Metoda stycznych (Newtona) może znaleźć miejsca zerowe poza wyznaczonym przedziałem, ze względu na sposób jej działania.