Nikodem Kirsz 236559
Oskar Trela 236677

Rok akademicki *2021/22*
poniedziałek, 12:00

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 2 – *rozwiązywanie układu N równań liniowych z N niewiadomymi:*

Opis rozwiązania

Założeniem zadania drugiego jest zaimplementowanie jednej z podanych metod rozwiązywania układu N równań liniowych z N niewiadomymi, gdzie $N \in \mathbb{N}$. W naszym przypadku jest to metoda eliminacji Gaussa. Nasza implementacja nie posiada ograniczenia maksymalnej ilości równań. Wszystkie dane przekazywane są do programu za pomocą pliku tekstowego, gdzie użytkownik może podać wiele układów równań w postaci macierzy uzupełnionych.

Metoda Gaussa:

1. W pierwszej kolejności doprowadzamy macierz do postaci, w której wartości elementów na przekątnej są największe w kolumnie (pomijając elementy znajdujące się nad nimi). Dokonujemy to poprzez zamianę rzędów miejscami.
2. Metodą eliminacji Gaussa doprowadzamy macierz do postaci macierzy schodkowej.
3. Weryfikujemy macierz, szukając rzędów zawierających same zera dla macierzy głównej oraz macierzy rozszerzonej. Na podstawie wyników ustalamy, czy układ jest oznaczony, nieoznaczony, czy sprzeczny.
4. Począwszy od najniższego rzędu, w którym niezerowe są jedynie współczynnik zmiennej oraz wyraz wolny wyliczamy wartość zmiennej, a następnie dla każdego kolejnego rzędu podstawiamy przemnożoną przez współczynnik wartość zmiennej i wyliczamy wartość nowej zmiennej (zawsze po jednej dla każdego rzędu).

Wyniki

Program został zabezpieczony w razie pojawienia się dla układów nieoznaczonych i sprzecznych. W takich przypadkach zamiast wyniku użytkownik zostaje poinformowany o jego rodzaju.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 33 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, \ \ x_2 = 2, \ \ x_3 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, \ \ x_2 = 2, \ \ x_3 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 21 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -4, \ \ x_4 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Sprzeczny

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 3{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 13{,}5 \end{bmatrix}$$

Nieoznaczony

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 7, \ \ x_2 = 5, \ \ x_3 = 3$$

Wnioski

1. Metoda Gausa jest prostą do implementacji i zrozumienia metodą.
2. Metoda ta jest nieoptymalna dla większych układów równań ze względu na złożoność czasową Eliminacji Gausa wynoszącą $O(n^3)$ W takich przypadkach stosuje się metody iteracyjne.
3. Program został przetestowany na licznych przypadkach układów równań liniowych i nie zostało zaobserwowane żadne niepożądane zachowanie. Rozwiązania są zgodne z oczekiwanymi. Możemy zatem przyjąć, że program działa poprawnie.
4. Implementacja rozwiązania jest w stanie wykryć układy nieoznaczone i sprzeczne tak jak w przypadkach w sekcji **Wyniki**. Dzięki temu nasz program jest mniej podatny na błędy.