

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 5 – metoda aproksymacja oparta o wielomiany Czebyszewa

Opis rozwiązania

Celem tego zadania było zaimplementowanie metody aproksymacji funkcji przy użyciu wielomianów Czebyszewa.

Aproksymacja jest to przybliżanie *funkcji aproksymowanej* pewną *funkcją aproksymującą*.

Przybliżenie *funkcji aproksymującej*:

$$f(x) \approx \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^n c_j T_j(x),$$

gdzie:

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$T_i(x) = 2x \cdot T_{i-1}(x) - T_{i-2}(x),$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$T_i(x)$ to wielomiany Czebyszewa, które w odróżnieniu od potęg x zachowują się równomiernie i oczekiwany błąd jest rozłożony bardziej równomiernie.

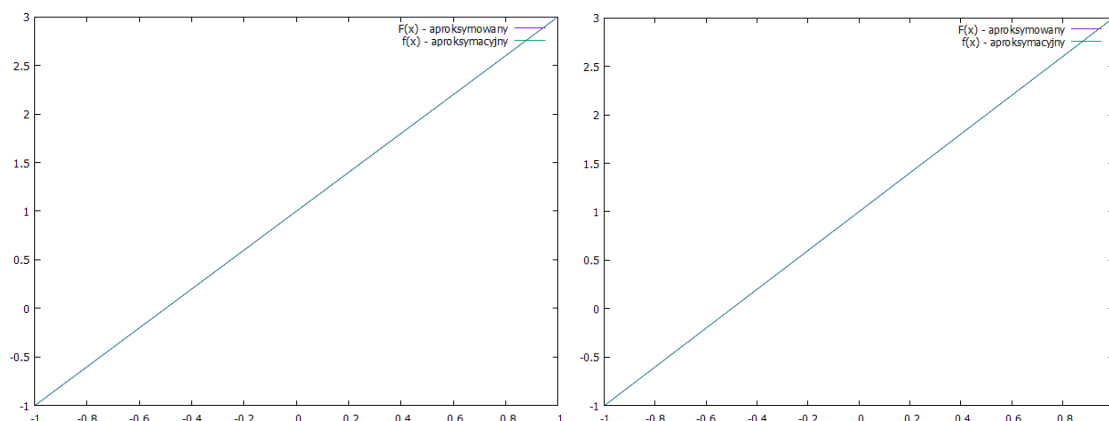
Ze względu na charakter całki aproksymacja odbywa się na przedziale $[-1; 1]$.

Wyniki

Poniżej przedstawiliśmy wyniki działania naszego programu w postaci wykresów funkcji aproksymującej porównanej z funkcją aproksymowaną.

Tabela 1 - Przypadki aproksymacji funkcji o zadanych parametrach przy obliczaniu.

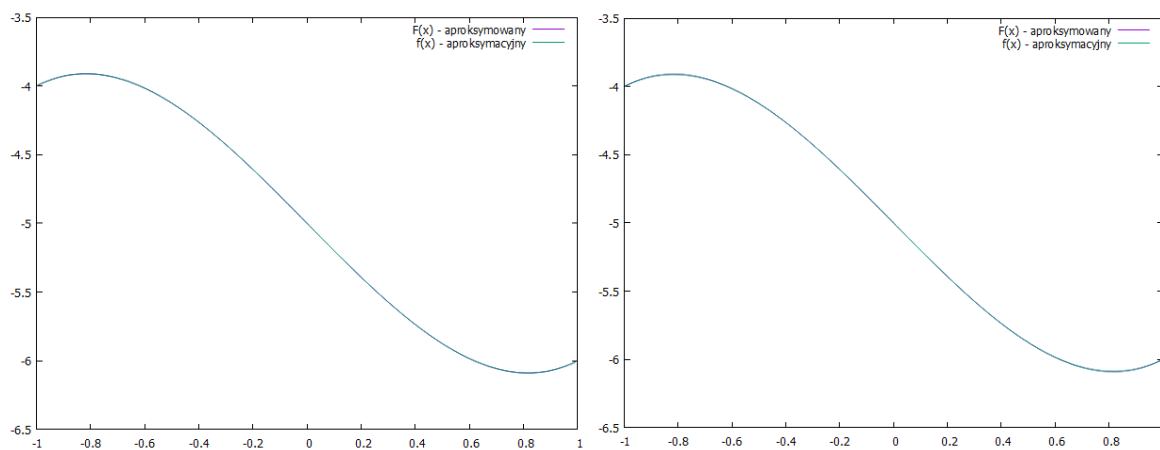
Funkcja	Stopień wielomianu aproksymującego	Ilość węzłów dla całkowania	Błąd aproksymacji
$2x + 1$	2	2	0
	6	6	$4,1415E - 30$



Rysunek 1 - Funkcja aproksymowana i aproksymacyjna kolejno dla przypadków z tabeli 1.

Tabela 2 - Przypadki aproksymacji funkcji o zadanych parametrach przy obliczaniu.

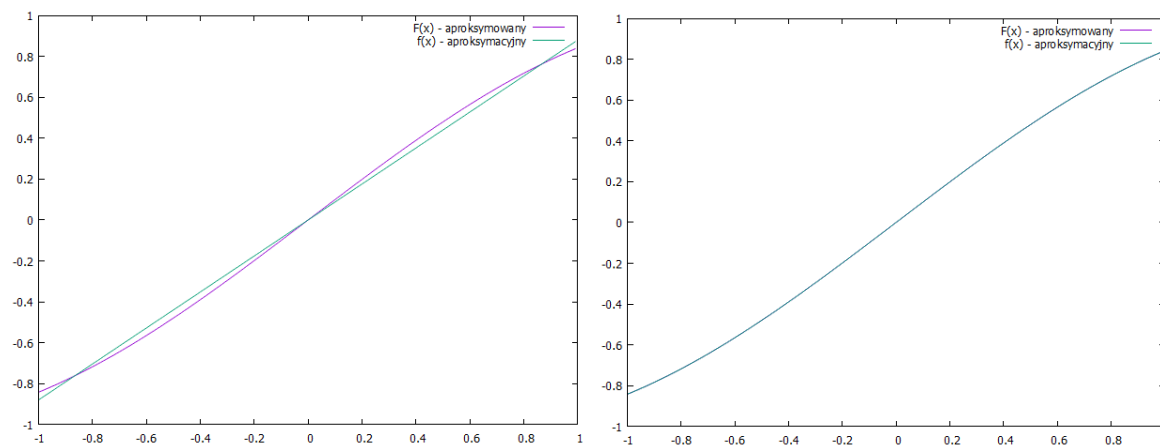
Funkcja	Stopień wielomianu aproksymującego	Ilość węzłów dla całkowania	Błąd aproksymacji
$x^3 - 2x - 5$	4	4	$3,1554E - 30$
	8	8	$7,1786E - 29$



Rysunek 2 - Funkcja aproksymowana i aproksymacyjna kolejno dla przypadków z tabeli 2.

Tabela 3 - Przypadki aproksymacji funkcji o zadanych parametrach przy obliczaniu.

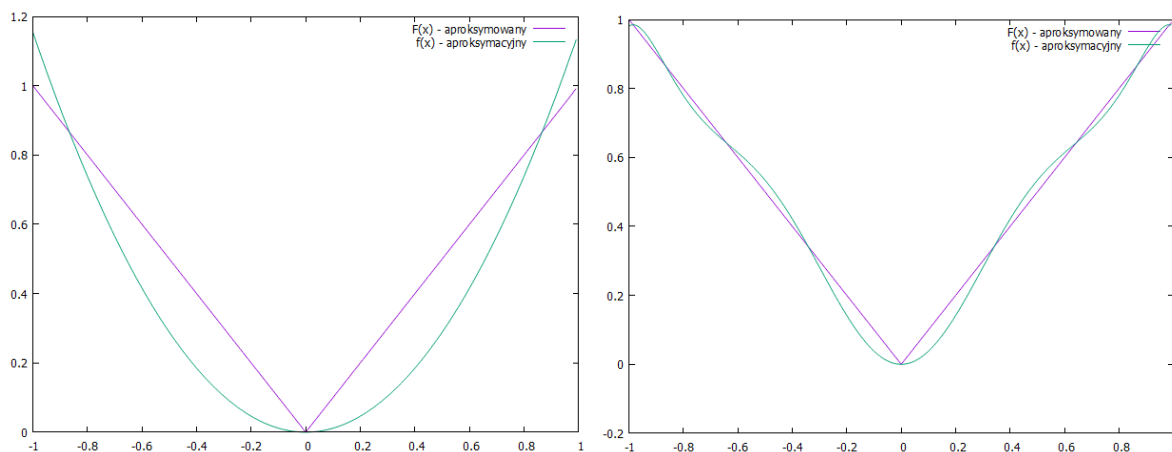
Funkcja	Stopień wielomianu aproksymującego	Ilość węzłów dla całkowania	Błąd aproksymacji
$\sin(x)$	3	3	0,008665
	7	7	$5,8E - 11$



Rysunek 3 - Funkcja aproksymowana i aproksymacyjna kolejno dla przypadków z tabeli 3.

Tabela 4 - Przypadki aproksymacji funkcji o zadanych parametrach przy obliczaniu.

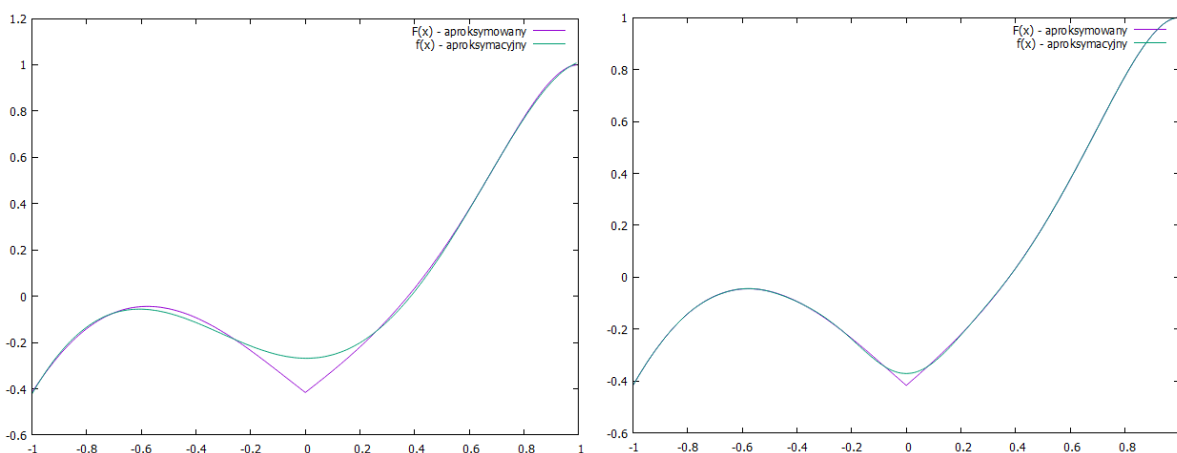
Funkcja	Stopień wielomianu aproksymującego	Ilość węzłów dla całkowania	Błąd aproksymacji
$ x $	3	3	0,2496
	9	9	0,01442



Rysunek 4 - Funkcja aproksymowana i aproksymacyjna kolejno dla przypadków z tabeli 4.

Tabela 5 - Przypadki aproksymacji funkcji o zadanych parametrach przy obliczaniu.

Funkcja	Stopień wielomianu aproksymującego	Ilość węzłów dla całkowania	Błąd aproksymacji
$\cos(x^3 + x - 2)$	6	6	0,03261
	20	20	0,002144



Rysunek 5 - Funkcja aproksymowana i aproksymacyjna kolejno dla przypadków z tabeli 5.

Wnioski

1. Błąd aproksymacji w większości przypadków funkcji maleje wraz ze wzrostem stopnia funkcji aproksymacyjnej, wyjątkiem jest funkcja liniowa.
2. Minimalny stopień w przypadku aproksymowania wielomianów wynosi $n + 1$.