有一种很有意思的游戏，就是有物体若干堆，可以是火柴棍或是围棋子等等均可。两个人轮流从堆中取物体若干，规定最后取光物体者取胜。这是我国民间很古老的一个游戏，别看这游戏极其简单，却蕴含着深刻的数学原理。下面我们来分析一下要如何才能够  
取胜。

（一）巴什博奕（Bash Game）：只有一堆n个物品，两个人轮流从这堆物品中取物，规  
定每次至少取一个，最多取m个。最后取光者得胜。

    显然，如果n=m+1，那么由于一次最多只能取m个，所以，无论先取者拿走多少个，  
后取者都能够一次拿走剩余的物品，后者取胜。因此我们发现了如何取胜的法则：如果  
n=（m+1）r+s，（r为任意自然数，s≤m),那么先取者要拿走s个物品，如果后取者拿走  
k（≤m)个，那么先取者再拿走m+1-k个，结果剩下（m+1）（r-1）个，以后保持这样的  
取法，那么先取者肯定获胜。总之，要保持给对手留下（m+1）的倍数，就能最后获胜。  
    这个游戏还可以有一种变相的玩法：两个人轮流报数，每次至少报一个，最多报十  
个，谁能报到100者胜。  
（二）威佐夫博奕（Wythoff Game）：有两堆各若干个物品，两个人轮流从某一堆或同  
时从两堆中取同样多的物品，规定每次至少取一个，多者不限，最后取光者得胜。  
  
    这种情况下是颇为复杂的。我们用（ak，bk）（ak ≤ bk ,k=0，1，2，…,n)表示  
两堆物品的数量并称其为局势，如果甲面对（0，0），那么甲已经输了，这种局势我们  
称为奇异局势。前几个奇异局势是：（0，0）、（1，2）、（3，5）、（4，7）、（6，  
10）、（8，13）、（9，15）、（11，18）、（12，20）。

    可以看出,a0=b0=0,ak是未在前面出现过的最小自然数,而 bk= ak + k，奇异局势有  
如下三条性质：

    1。任何自然数都包含在一个且仅有一个奇异局势中。  
    由于ak是未在前面出现过的最小自然数，所以有ak > ak-1 ，而 bk= ak + k > ak  
-1 + k-1 = bk-1 > ak-1 。所以性质1。成立。  
    2。任意操作都可将奇异局势变为非奇异局势。  
    事实上，若只改变奇异局势（ak，bk）的某一个分量，那么另一个分量不可能在其  
他奇异局势中，所以必然是非奇异局势。如果使（ak，bk）的两个分量同时减少，则由  
于其差不变，且不可能是其他奇异局势的差，因此也是非奇异局势。  
    3。采用适当的方法，可以将非奇异局势变为奇异局势。

    假设面对的局势是（a,b），若 b = a，则同时从两堆中取走 a 个物体，就变为了  
奇异局势（0，0）；如果a = ak ，b > bk，那么，取走b  – bk个物体，即变为奇异局  
势；如果 a = ak ，  b < bk ,则同时从两堆中拿走 ak – ab – ak个物体,变为奇异局  
势（ ab – ak , ab – ak+ b – ak）；如果a > ak ，b= ak + k,则从第一堆中拿走多余  
的数量a – ak 即可；如果a < ak ，b= ak + k,分两种情况，第一种，a=aj （j < k）  
,从第二堆里面拿走 b – bj 即可；第二种，a=bj （j < k）,从第二堆里面拿走 b – a  
j 即可。

    从如上性质可知，两个人如果都采用正确操作，那么面对非奇异局势，先拿者必胜  
；反之，则后拿者取胜。

    那么任给一个局势（a，b），怎样判断它是不是奇异局势呢？我们有如下公式：

    ak =[k（1+√5）/2]，bk= ak + k  （k=0，1，2，…,n 方括号表示取整函数)  
  
奇妙的是其中出现了黄金分割数（1+√5）/2 = 1。618…,因此,由ak，bk组成的矩形近  
似为黄金矩形，由于2/（1+√5）=（√5-1）/2，可以先求出j=[a（√5-1）/2]，若a=[  
j（1+√5）/2]，那么a = aj，bj = aj + j，若不等于，那么a = aj+1，bj+1 = aj+1  
+ j + 1，若都不是，那么就不是奇异局势。然后再按照上述法则进行，一定会遇到奇异  
局势。

（三）尼姆博奕（Nimm Game）：有三堆各若干个物品，两个人轮流从某一堆取任意多的  
物品，规定每次至少取一个，多者不限，最后取光者得胜。

    这种情况最有意思，它与二进制有密切关系，我们用（a，b，c）表示某种局势，首  
先（0，0，0）显然是奇异局势，无论谁面对奇异局势，都必然失败。第二种奇异局势是  
（0，n，n），只要与对手拿走一样多的物品，最后都将导致（0，0，0）。仔细分析一  
下，（1，2，3）也是奇异局势，无论对手如何拿，接下来都可以变为（0，n，n）的情  
形。

    计算机算法里面有一种叫做按位模2加，也叫做异或的运算，我们用符号（+）表示  
这种运算。这种运算和一般加法不同的一点是1+1=0。先看（1，2，3）的按位模2加的结  
果：

1 =二进制01  
2 =二进制10  
3 =二进制11 （+）  
———————  
0 =二进制00 （注意不进位）

    对于奇异局势（0，n，n）也一样，结果也是0。

    任何奇异局势（a，b，c）都有a（+）b（+）c =0。

如果我们面对的是一个非奇异局势（a，b，c），要如何变为奇异局势呢？假设 a < b  
< c,我们只要将 c 变为 a（+）b,即可,因为有如下的运算结果: a（+）b（+）(a（+）  
b)=(a（+）a)（+）(b（+）b)=0（+）0=0。要将c 变为a（+）b，只要从 c中减去 c-（  
a（+）b）即可。  
  
    例1。（14，21，39），14（+）21=27，39-27=12，所以从39中拿走12个物体即可达  
到奇异局势（14，21，27）。

    例2。（55，81，121），55（+）81=102，121-102=19，所以从121中拿走19个物品  
就形成了奇异局势（55，81，102）。

    例3。（29，45，58），29（+）45=48，58-48=10，从58中拿走10个，变为（29，4  
5，48）。

    例4。我们来实际进行一盘比赛看看：  
        甲:(7,8,9)->(1,8,9)奇异局势  
        乙:(1,8,9)->(1,8,4)  
        甲:(1,8,4)->(1,5,4)奇异局势  
        乙:(1,5,4)->(1,4,4)  
        甲:(1,4,4)->(0,4,4)奇异局势  
        乙:(0,4,4)->(0,4,2)  
        甲:(0.4,2)->(0,2,2)奇异局势  
        乙:(0,2,2)->(0,2,1)  
        甲:(0,2,1)->(0,1,1)奇异局势  
        乙:(0,1,1)->(0,1,0)  
        甲:(0,1,0)->(0,0,0)奇异局势  
        甲胜。

取火柴的游戏  
题目1：今有若干堆火柴，两人依次从中拿取，规定每次只能从一堆中取若干根，   
可将一堆全取走，但不可不取，最后取完者为胜，求必胜的方法。   
题目2：今有若干堆火柴，两人依次从中拿取，规定每次只能从一堆中取若干根，   
可将一堆全取走，但不可不取，最后取完者为负，求必胜的方法。  
嘿嘿，这个游戏我早就见识过了。小时候用珠算玩这个游戏：第一档拨一个，第二档拨两个，依次直到第五档拨五个。然后两个人就轮流再把棋子拨下来，谁要是最后一个拨谁就赢。有一次暑假看见两个小孩子在玩这个游戏，我就在想有没有一个定论呢。下面就来试着证明一下吧  
先解决第一个问题吧。  
定义：若所有火柴数异或为0，则该状态被称为利他态，用字母T表示；否则，   
为利己态，用S表示。  
[定理1]：对于任何一个S态，总能从一堆火柴中取出若干个使之成为T态。  
证明：  
    若有n堆火柴，每堆火柴有A(i)根火柴数，那么既然现在处于S态，  
      c = A(1) xor A(2) xor … xor A(n) > 0;  
    把c表示成二进制，记它的二进制数的最高位为第p位，则必然存在一个A(t),它二进制的第p位也是1。（否则，若所有的A(i)的第p位都是0，这与c的第p位就也为0矛盾）。  
    那么我们把x = A(t) xor c,则得到x < A(t).这是因为既然A(t)的第p位与c的第p位同为1,那么x的第p位变为0,而高于p的位并没有改变。所以x < A(t).而  
    A(1) xor A(2) xor … xor x xor … xor A(n)  
  = A(1) xor A(2) xor … xor A(t) xor c xor … xor A(n)  
  = A(1) xor A(2) xor… xor A(n) xor A(1) xor A(2) xor … xor A(n)  
  = 0  
这就是说从A(t)堆中取出 A(t) – x 根火柴后状态就会从S态变为T态。证毕  
[定理2]：T态，取任何一堆的若干根，都将成为S态。  
证明：用反证法试试。  
      若  
      c = A(1) xor A(2) xor … xor A(i) xor … xor A(n) = 0；  
      c’ = A(1) xor A(2) xor … xor A(i’) xor c xor … xor A(n) = 0;  
      则有  
c xor c’ = A(1) xor A(2) xor … xor A(i) xor … xor A(n) xor A(1) xor A(2) xor … xor A(i’) xor c xor … xor A(n) = A(i) xor A(i’) =0  
      进而推出A(i) = A(i’)，这与已知矛盾。所以命题得证。  
[定理 3]：S态，只要方法正确，必赢。   
  最终胜利即由S态转变为T态，任何一个S态，只要把它变为T态，（由定理1，可以把它变成T态。）对方只能把T态转变为S态(定理2)。这样，所有S态向T态的转变都可以有己方控制，对方只能被动地实现由T态转变为S态。故S态必赢。  
[定理4]：T态，只要对方法正确，必败。   
  由定理3易得。   
接着来解决第二个问题。  
定义：若一堆中仅有1根火柴，则被称为孤单堆。若大于1根，则称为充裕堆。  
定义：T态中，若充裕堆的堆数大于等于2，则称为完全利他态，用T2表示；若充裕堆的堆数等于0，则称为部分利他态，用T0表示。  
   
孤单堆的根数异或只会影响二进制的最后一位，但充裕堆会影响高位（非最后一位）。一个充裕堆，高位必有一位不为0，则所有根数异或不为0。故不会是T态。  
[定理5]：S0态，即仅有奇数个孤单堆，必败。T0态必胜。   
证明：  
S0态，其实就是每次只能取一根。每次第奇数根都由己取，第偶数根都由对   
方取，所以最后一根必己取。败。同理,  T0态必胜#  
[定理6]：S1态，只要方法正确，必胜。   
证明：  
若此时孤单堆堆数为奇数，把充裕堆取完；否则，取成一根。这样，就变成奇数个孤单堆，由对方取。由定理5，对方必输。己必胜。  #   
[定理7]：S2态不可转一次变为T0态。   
证明：  
充裕堆数不可能一次由2变为0。得证。  #

[定理8]：S2态可一次转变为T2态。   
证明：  
由定理1，S态可转变为T态，态可一次转变为T态，又由定理6，S2态不可转一次变为T0态，所以转变的T态为T2态。  #   
[定理9]：T2态，只能转变为S2态或S1态。   
证明：  
由定理2，T态必然变为S态。由于充裕堆数不可能一次由2变为0，所以此时的S态不可能为S0态。命题得证。   
[定理10]：S2态，只要方法正确，必胜.   
证明：  
方法如下：   
      1）  S2态，就把它变为T2态。（由定理8）   
      2）  对方只能T2转变成S2态或S1态（定理9）  
    若转变为S2,  转向1）   
    若转变为S1,  这己必胜。（定理5）   
[定理11]：T2态必输。   
证明：同10。   
综上所述，必输态有：  T2,S0   
          必胜态：    S2,S1,T0.   
两题比较：   
第一题的全过程其实如下：   
S2->T2->S2->T2->  ……  ->T2->S1->T0->S0->T0->……->S0->T0(全0)   
第二题的全过程其实如下：   
S2->T2->S2->T2->  ……  ->T2->S1->S0->T0->S0->……->S0->T0(全0)   
下划线表示胜利一方的取法。  是否发现了他们的惊人相似之处。   
我们不难发现(见加黑部分)，S1态可以转变为S0态（第二题做法），也可以转变为   
T0（第一题做法）。哪一方控制了S1态，他即可以有办法使自己得到最后一根（转变为   
T0）,也可以使对方得到最后一根（转变为S0）。   
  所以，抢夺S1是制胜的关键！   
  为此，始终把T2态让给对方，将使对方处于被动状态，他早晚将把状态变为S1.

推荐HDOJ题目  
<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1907>  
<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=2509>  
看完上面的结论，就能顺利解决上面2道了

S-Nim  
<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1536>  
<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1944>

博弈算法入门小节 1536 1517 1907  
小子最近迷途于博弈之中。。。感触颇深。  
为了让大家能够在学习博弈的时候少走弯路，最重要的也是为了加深自己的影响，温故而知新，特发此贴与大家共勉。  
学博弈先从概念开始：  
特别推荐LCY老师的课件：博弈入门。  
下载地址：<http://acm.hdu.edu.cn/forum/read.php?tid=6875>  
这个课件个人认为从博弈的基本思想，一直到解博弈的中心算法做了很好的诠释。但是特别要注意的是。课件后面一部分英语写的讲义是重中之重。小子英语很弱，在这困扰很久。现在为大家大概介绍一下。  
主要是后继点和SG值的问题:  
SG值：一个点的SG值就是一个不等于它的后继点的SG的且大于等于零的最小整数。  
后继点：也就是按照题目要求的走法（比如取石子可以取的数量，方法）能够走一步达到的那个点。  
具体的有关SG值是怎么运用的希望大家自己多想想。  
课件后面有一个1536的代码。可以放在后面做做  
看到这里推荐大家做几道题：1846（最简单的博弈水题）  
1847（求SG值）

有了上面的知识接下来我们来看看组合博弈（n堆石子）  
推荐大家看个资料：  
博弈-取石子游戏(推荐等级五星级)  
<http://acm.hdu.edu.cn/forum/read.php?fid=20&tid=5748>  
<http://hi.baidu.com/netnode/blog/item/30932c2edc7384514fc226ea.html>  
这里提出了一个奇异状态的问题。看了这篇文章你会发现异或运算在博弈中使用的妙处。当然这里指出的只是组合博弈中一种特殊情况。  
王道还是对SG值的求解，但是知道这么一种思路无疑对思维的广度和深度扩展是很有帮助的。  
ZZ博弈  
<http://acm.hdu.edu.cn/forum/read.php?fid=9&tid=10617>  
这里介绍了组和博弈的两种大的类型，一种是最后取的是N状态一种是最后取的是P状态，两个状态的解题方法能看懂很有帮助。当然，能够把推导过程理解，吃透无疑是大牛级的做法~小子也佩服的紧~     
    1536题推荐做做这题，这题前面提醒大家是一个求SG值的题目，题目前面是对异或运算运用在组合博弈问题中的很好的解释。当然题目本身是有所不同的。因为在这里面对取法有所要求。那么这样就回归到了解决博弈问题的王道算法——求SG值上。  
    有关运用求SG值的博弈题目有： 1850（也可基于奇异状态异或）  
1848（中和的大斐波那契数列的典型求SG值题）  
1517（个人认为有点猥琐的题目。。。。在此题上困扰很久。当然搞出来很开心。小子是用比较规矩的求SG值的方法求出来的，但是论坛有人对其推出来了规律，这里佩服一下，大家可以学习一下）  
1079（更猥琐的题目，对新手要求较高，因为按传统方法需要比较细致的模拟加对边角状态的考虑，同样有人推出来了公式）  
当你全部看完以上的东西。做完以上的题目的话。。。小子恭喜你~你博弈入门了~~~~  
    这里小子告诉大家。博弈很强大。学习要耐心~谢谢

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

博弈小结：

（忽略从word上复制过来之后的奇葩缩进）

看了张一飞+贾志豪+方展鹏+曹钦翔的论文都讲得超好，这些应该到处都可以找到的。

终于会基本的博弈了。

仅仅只是看完之后的回忆录而已，基本上和论文相似，仅总结加深记忆用。

看到本文的人轻点喷。

也许看论文会更清晰。

以前博弈各种弱，只是零零星星的了解一些知识，严格的证明之类的没有接触。

现在终于都搞清啦！不过碰上奇葩博弈还是做不出。。。

1.极大极小搜索

         好吧！表示最后才看到这个的。还是比较好理解的。

         还有α-β剪枝，这个应该自己随便yy都可以搞出来的。

         好吧！用来做五子棋，3连棋之类的。

         至少会了这个，一般的博弈都可以拿0分以上了。

2.普通NIM游戏

         概念题：一堆石子n个，每次最多取m个，求先手必胜还是必败。

     N表示比生态，P表示必败态。

         终止状态是P状态，然后找出能到达这个点的点标记为N状态，

         继续扫，找到只能到达N状态的点标记为P状态，如此循环往复。

         这个比较直观。类似拓扑的扫一次即可。

         对于很多堆石子的话张一飞论文说得很清楚，小结一下。

         首先看两堆石子，如果个数完全一样，那么后手必胜，因为现手在一堆中拿走了

         一些棋子之后，后手总能在另一堆中拿一样多的棋子。

         考虑把局面S分解成A和B，先手必胜成为S胜，后手胜为T胜。

如果A=B,则T胜。如S={3,3,2,2}分解成{3,3}和{2,2}.

如果对于A是S胜，B是S败(由于A，B等价，反过来亦然)，S只需要先拿A，然后T如果拿A，S也拿A，T拿B，S也拿B，那么S因为对于A，S是先手，所以S总是可以拿到A的最后一个，并且可以逼着T当B的先手。因为B先手必败，S也可以拿掉B的最后一个。

如果对于A和B都是S败，那么A先随便拿一个，对于T来说就变成了上一种情况了。那么此时T胜。

当A和B都是S胜时，S肯定不会第一步把局面变成一胜一负，他会继续变成AB都对于T必胜，那么T又纠结了。如此往复，就无法确定了。

上面的分解，归纳一下，如果对于B，S必败，那么整个局面的胜负和A一样。

那么如果原几何是{2,2,2,7,7,3,3,9}就可以分解成A{2,9},B{2,7,3},C{2,7,3}。因为B+C是必败的，所以A+B+C的胜负和A一样，这样就转化成了一个不重集合了，打裸就少了一堆状态了。

好吧！以上就可以类比出XOR运算了。沿着这个思路，就可以想到一个函数来优化打裸了。

         设f[x]=x。(一下xor用+代替)

         那么对于一堆石子S={a1,a2,a3…..an}

         另p=f[a1]+f[a2]+…..+f[an]

如果p=0则该状态是S败，否则S胜。

因为终止状态是p=0，要证明这个结论的正确性，只需要证明从p≠0能够转移到p=0,而从p=0只能转移到p≠0即可。

首先，明确xor的基本性质。

1.a+b=c,则有a+c=b.

2.p=a1+a2+…..an≠0,必然存在k，使p+ak<ak，因为p的最高位为1，肯定有一个ak该位也是1，p+ak该位就是0了。所以得证。

证明从p≠0能够转移到p=0

         因为p=f[a1]+f[a2]+…..f[an]=a1+a2+…+an。

         找到p+ak<ak的k和a1交换。

         设x=p+a1<a1,直接把a1变成x1,那么p=p+a1+a2+…..+an=0.

证明从p=0只能转到p≠0

         如果a的全部序列都是0了，你就玩完了。

其他时候，随便你选什么数ak,那么其他数的xor和肯定等于ak。

p=(ak-xxx) + ak,xxx为正数且小于ak，那么p显然就不为0了。

至此，证明了f[a1]=a1的正确性了。

现在题目稍稍拓展一下。

N堆石子，每次任选一堆，可以从这堆拿走不超过m个的石子。求先手必胜还是必败。

这个的f[a1]=a1%m.

因为游戏的分解之类的东西与前一个游戏一样，所以只需考虑一堆石子即可。

考虑最开始的那个打裸，从后往前推一下N和P就可一直到a1%m=0时必败。

来个终极版NIM游戏。

有若干排石子，每次必须选相邻的两个拿走，把原来的那排变成了两排。

谁无路可走了谁就挂了。

分析这个题，发现各种分解的性质和前面的两个游戏一样的。现在就需要求f值了。

和前面的游戏一样，我们设计的f值必须满足

终止状态p=0，从p≠0能够转移到p=0,从p=0只能转移到p≠0即可。

第一个条件是显然成立的。

回忆论文，先假设#S表示S这个状态的f值之xor和，

要满足第二个条件

         因p=f[a1]+f[a2]+….+f[an]≠0,设x=f[a2]+f[a3]+….+f[an]=p+f[a1].

         因p+f[a1]<f[a1],所以x<f[a1].

         把a1干掉后可能变成了{b1,b2,…..bm}

         那么必须#{b1,b2,….bm}+x=0,如果1~f[a1]-1,都被#{b1,b2….bm}包含了，

         那么肯定是可以找到满足条件的x的。

要满足第三个条件

         即p=f[a1]+f[a2]+…+f[an]=0时。f[a1]=f[a2]+…+f[an]=x;

         同样把a1干掉，得到{b1,b2….bm}

         Pn=#{b1,b2,…..bm}+x≠0,必须对于任意b都成立。

         所以x不能出现在a1能转到的状态中。

                  所以f值就是他的后继的f值中没有出现过的值的最小值就行了。

其实，这就是sg值了。以前一直觉得这东西特别神奇，原来就这样就证明出来了。

看sg函数的使用条件：

1.       谁无法操作就输，与就是能找到必败态。

2.       满足类似拓扑序的东东

3.       各个游戏独立

4.       平等游戏

5.       对操作的限制，至于常数有关。

3.anti-nim游戏

         如果定义拿最后一个棋子的人输就成了anti-nim游戏。

         传说中的SJ定理登场了。实际上很多定理都会披上这么牛叉的名字。

         我们就一种情况一种情况的玩吧。

         这里的SG应该还是指的NIM中的SG。

先手必胜有两种状态：

1.如果每一个小游戏都只剩下一个石子了，SG为0。

2.至少一堆石子>1,且SG不为0.

证明

         1显然成立。

         2的话分两种情况

a.       只有一堆石子>1,好吧！整个生杀大权都交你主宰了。你可以把它变成1。

b.       至少两队石子>1,你只需要把SG值边为0就可以了，这个操作之后，至少还有两堆石子>1，然后对方随便怎么操作，都会把SG变成非0，你们就一直这么玩就行了。

还需要证明1,2的反面是必败的。

1显然了。

2的话，你会把SG变成非0，而且因为现在至少两堆石子>1了，所以你还会给人家至少留一个>1的，那么无论怎么搞，都会送给后手一个必胜态。

4.every-SG游戏

    就是多线程博弈。

形象的说就是红队和蓝队每个队n个人，然后进行n个博弈，最后结束的一场博弈的胜者胜利。

显然，每个博弈的胜者都想让时间坚持得更久，每个败者都想让这场博弈早点结束。

不难列出每个点到终止的步数的DP方程。

如果v是先手必胜，则f[v]=max(f[u])+1,其中u为v的后继且u为先手必败。

否则f[v]=min(f[u])+1,u为v后继。

         然后可以求出每一个博弈的步数。

         求出这个最大值，如果最大值是奇数，那么先手必胜。这个显然。

        还有黄金分割那道题，二分图有关的博弈，k倍动态减法游戏。写在应用里了。

5.不平等博弈

         传说中的超现实数(也译成超实数)登场了。

         首先明确超现实数的两个定义

         定义surreal number x={XL|XR}，满足XL中的任意一个数小于等于XR中的任意一个数。

         然后是看他们如何比较大小

         x={XL|XR}和y={YL|YR},要满足x<=y,必须满足XL的任意一个元素<y,YR的任意一个元素>x.

         首先{|}=0.

         然后可以构造出第一批新数{0|},{|0}

         根据定义可以知道{|0}<{|}<{0|}

         那么{|0}=-1,{0|}=1.

         然后可以继续构造出一堆数。

         接下来是加法运算法则。

         x+y={XL|XR}+{YL|YR}={XL+y,YL+x|XR+y,YR+x} 。XL+y运算即把XL中的每一个元素+y。

         这个公式十分美观，应该一眼就能记住了。

         加法的交换律和结合律都是满足的。

       然后就类比到不平等博弈问题。

       两个人A,B面临着不同的局面恰好可以分成L，R，我们可以把它构造成超现实数。

       于是乎整个局面变成了x={SA|SB}，比如A可以转移到x，y，z。B可以转移到w。

       就变成了{x,y,z|w}.

         如果x>0

则说明x>=0成立，且x<=0不成立。

也就有SA中的元素都>=0,y中的元素都>0,那么A能转移到的状态总是有>=0的，y能转移到的总是>0的，那么A总是有状态可转，那么A必胜。

如果x<0

         说明x>=0不成立，x<=0成立。

         也就是SA的元素都<0,SB则有<=0,同理B必胜。

如果x=0

         也就是说x>=0和x<=0同时成立。

         那么SA都<0,SB都>0.那么A先手的话会转移到<0的，然后B必胜，B同理。

         所以此时先手必败。

有一种很有意思的游戏，就是有物体若干堆，可以是火柴棍或是围棋子等等均可。两个  
人轮流从堆中取物体若干，规定最后取光物体者取胜。这是我国民间很古老的一个游戏  
，别看这游戏极其简单，却蕴含着深刻的数学原理。下面我们来分析一下要如何才能够  
取胜。

（一）巴什博奕（Bash Game）：只有一堆n个物品，两个人轮流从这堆物品中取物，规  
定每次至少取一个，最多取m个。最后取光者得胜。

    显然，如果n=m+1，那么由于一次最多只能取m个，所以，无论先取者拿走多少个，  
后取者都能够一次拿走剩余的物品，后者取胜。因此我们发现了如何取胜的法则：如果  
n=（m+1）r+s，（r为任意自然数，s≤m),那么先取者要拿走s个物品，如果后取者拿走  
k（≤m)个，那么先取者再拿走m+1-k个，结果剩下（m+1）（r-1）个，以后保持这样的  
取法，那么先取者肯定获胜。总之，要保持给对手留下（m+1）的倍数，就能最后获胜。  
    这个游戏还可以有一种变相的玩法：两个人轮流报数，每次至少报一个，最多报十  
个，谁能报到100者胜。  
（二）威佐夫博奕（Wythoff Game）：有两堆各若干个物品，两个人轮流从某一堆或同  
时从两堆中取同样多的物品，规定每次至少取一个，多者不限，最后取光者得胜。  
  
    这种情况下是颇为复杂的。我们用（ak，bk）（ak ≤ bk ,k=0，1，2，…,n)表示  
两堆物品的数量并称其为局势，如果甲面对（0，0），那么甲已经输了，这种局势我们  
称为奇异局势。前几个奇异局势是：（0，0）、（1，2）、（3，5）、（4，7）、（6，  
10）、（8，13）、（9，15）、（11，18）、（12，20）。

    可以看出,a0=b0=0,ak是未在前面出现过的最小自然数,而 bk= ak + k，奇异局势有  
如下三条性质：

    1。任何自然数都包含在一个且仅有一个奇异局势中。  
    由于ak是未在前面出现过的最小自然数，所以有ak > ak-1 ，而 bk= ak + k > ak  
-1 + k-1 = bk-1 > ak-1 。所以性质1。成立。  
    2。任意操作都可将奇异局势变为非奇异局势。  
    事实上，若只改变奇异局势（ak，bk）的某一个分量，那么另一个分量不可能在其  
他奇异局势中，所以必然是非奇异局势。如果使（ak，bk）的两个分量同时减少，则由  
于其差不变，且不可能是其他奇异局势的差，因此也是非奇异局势。  
    3。采用适当的方法，可以将非奇异局势变为奇异局势。

    假设面对的局势是（a,b），若 b = a，则同时从两堆中取走 a 个物体，就变为了  
奇异局势（0，0）；如果a = ak ，b > bk，那么，取走b  – bk个物体，即变为奇异局  
势；如果 a = ak ，  b < bk ,则同时从两堆中拿走 ak – ab – ak个物体,变为奇异局  
势（ ab – ak , ab – ak+ b – ak）；如果a > ak ，b= ak + k,则从第一堆中拿走多余  
的数量a – ak 即可；如果a < ak ，b= ak + k,分两种情况，第一种，a=aj （j < k）  
,从第二堆里面拿走 b – bj 即可；第二种，a=bj （j < k）,从第二堆里面拿走 b – a  
j 即可。

    从如上性质可知，两个人如果都采用正确操作，那么面对非奇异局势，先拿者必胜  
；反之，则后拿者取胜。

    那么任给一个局势（a，b），怎样判断它是不是奇异局势呢？我们有如下公式：

    ak =[k（1+√5）/2]，bk= ak + k  （k=0，1，2，…,n 方括号表示取整函数)  
  
奇妙的是其中出现了黄金分割数（1+√5）/2 = 1。618…,因此,由ak，bk组成的矩形近  
似为黄金矩形，由于2/（1+√5）=（√5-1）/2，可以先求出j=[a（√5-1）/2]，若a=[  
j（1+√5）/2]，那么a = aj，bj = aj + j，若不等于，那么a = aj+1，bj+1 = aj+1  
+ j + 1，若都不是，那么就不是奇异局势。然后再按照上述法则进行，一定会遇到奇异  
局势。

（三）尼姆博奕（Nimm Game）：有三堆各若干个物品，两个人轮流从某一堆取任意多的  
物品，规定每次至少取一个，多者不限，最后取光者得胜。

    这种情况最有意思，它与二进制有密切关系，我们用（a，b，c）表示某种局势，首  
先（0，0，0）显然是奇异局势，无论谁面对奇异局势，都必然失败。第二种奇异局势是  
（0，n，n），只要与对手拿走一样多的物品，最后都将导致（0，0，0）。仔细分析一  
下，（1，2，3）也是奇异局势，无论对手如何拿，接下来都可以变为（0，n，n）的情  
形。

    计算机算法里面有一种叫做按位模2加，也叫做异或的运算，我们用符号（+）表示  
这种运算。这种运算和一般加法不同的一点是1+1=0。先看（1，2，3）的按位模2加的结  
果：

1 =二进制01  
2 =二进制10  
3 =二进制11 （+）  
———————  
0 =二进制00 （注意不进位）

    对于奇异局势（0，n，n）也一样，结果也是0。

    任何奇异局势（a，b，c）都有a（+）b（+）c =0。

如果我们面对的是一个非奇异局势（a，b，c），要如何变为奇异局势呢？假设 a < b  
< c,我们只要将 c 变为 a（+）b,即可,因为有如下的运算结果: a（+）b（+）(a（+）  
b)=(a（+）a)（+）(b（+）b)=0（+）0=0。要将c 变为a（+）b，只要从 c中减去 c-（  
a（+）b）即可。  
  
    例1。（14，21，39），14（+）21=27，39-27=12，所以从39中拿走12个物体即可达  
到奇异局势（14，21，27）。

    例2。（55，81，121），55（+）81=102，121-102=19，所以从121中拿走19个物品  
就形成了奇异局势（55，81，102）。

    例3。（29，45，58），29（+）45=48，58-48=10，从58中拿走10个，变为（29，4  
5，48）。

    例4。我们来实际进行一盘比赛看看：  
        甲:(7,8,9)->(1,8,9)奇异局势  
        乙:(1,8,9)->(1,8,4)  
        甲:(1,8,4)->(1,5,4)奇异局势  
        乙:(1,5,4)->(1,4,4)  
        甲:(1,4,4)->(0,4,4)奇异局势  
        乙:(0,4,4)->(0,4,2)  
        甲:(0.4,2)->(0,2,2)奇异局势  
        乙:(0,2,2)->(0,2,1)  
        甲:(0,2,1)->(0,1,1)奇异局势  
        乙:(0,1,1)->(0,1,0)  
        甲:(0,1,0)->(0,0,0)奇异局势  
        甲胜。

取火柴的游戏  
题目1：今有若干堆火柴，两人依次从中拿取，规定每次只能从一堆中取若干根，   
可将一堆全取走，但不可不取，最后取完者为胜，求必胜的方法。   
题目2：今有若干堆火柴，两人依次从中拿取，规定每次只能从一堆中取若干根，   
可将一堆全取走，但不可不取，最后取完者为负，求必胜的方法。  
嘿嘿，这个游戏我早就见识过了。小时候用珠算玩这个游戏：第一档拨一个，第二档拨两个，依次直到第五档拨五个。然后两个人就轮流再把棋子拨下来，谁要是最后一个拨谁就赢。有一次暑假看见两个小孩子在玩这个游戏，我就在想有没有一个定论呢。下面就来试着证明一下吧  
先解决第一个问题吧。  
定义：若所有火柴数异或为0，则该状态被称为利他态，用字母T表示；否则，   
为利己态，用S表示。  
[定理1]：对于任何一个S态，总能从一堆火柴中取出若干个使之成为T态。  
证明：  
    若有n堆火柴，每堆火柴有A(i)根火柴数，那么既然现在处于S态，  
      c = A(1) xor A(2) xor … xor A(n) > 0;  
    把c表示成二进制，记它的二进制数的最高位为第p位，则必然存在一个A(t),它二进制的第p位也是1。（否则，若所有的A(i)的第p位都是0，这与c的第p位就也为0矛盾）。  
    那么我们把x = A(t) xor c,则得到x < A(t).这是因为既然A(t)的第p位与c的第p位同为1,那么x的第p位变为0,而高于p的位并没有改变。所以x < A(t).而  
    A(1) xor A(2) xor … xor x xor … xor A(n)  
  = A(1) xor A(2) xor … xor A(t) xor c xor … xor A(n)  
  = A(1) xor A(2) xor… xor A(n) xor A(1) xor A(2) xor … xor A(n)  
  = 0  
这就是说从A(t)堆中取出 A(t) – x 根火柴后状态就会从S态变为T态。证毕  
[定理2]：T态，取任何一堆的若干根，都将成为S态。  
证明：用反证法试试。  
      若  
      c = A(1) xor A(2) xor … xor A(i) xor … xor A(n) = 0；  
      c’ = A(1) xor A(2) xor … xor A(i’) xor c xor … xor A(n) = 0;  
      则有  
c xor c’ = A(1) xor A(2) xor … xor A(i) xor … xor A(n) xor A(1) xor A(2) xor … xor A(i’) xor c xor … xor A(n) = A(i) xor A(i’) =0  
      进而推出A(i) = A(i’)，这与已知矛盾。所以命题得证。  
[定理 3]：S态，只要方法正确，必赢。   
  最终胜利即由S态转变为T态，任何一个S态，只要把它变为T态，（由定理1，可以把它变成T态。）对方只能把T态转变为S态(定理2)。这样，所有S态向T态的转变都可以有己方控制，对方只能被动地实现由T态转变为S态。故S态必赢。  
[定理4]：T态，只要对方法正确，必败。   
  由定理3易得。   
接着来解决第二个问题。  
定义：若一堆中仅有1根火柴，则被称为孤单堆。若大于1根，则称为充裕堆。  
定义：T态中，若充裕堆的堆数大于等于2，则称为完全利他态，用T2表示；若充裕堆的堆数等于0，则称为部分利他态，用T0表示。  
   
孤单堆的根数异或只会影响二进制的最后一位，但充裕堆会影响高位（非最后一位）。一个充裕堆，高位必有一位不为0，则所有根数异或不为0。故不会是T态。  
[定理5]：S0态，即仅有奇数个孤单堆，必败。T0态必胜。   
证明：  
S0态，其实就是每次只能取一根。每次第奇数根都由己取，第偶数根都由对   
方取，所以最后一根必己取。败。同理,  T0态必胜#  
[定理6]：S1态，只要方法正确，必胜。   
证明：  
若此时孤单堆堆数为奇数，把充裕堆取完；否则，取成一根。这样，就变成奇数个孤单堆，由对方取。由定理5，对方必输。己必胜。  #   
[定理7]：S2态不可转一次变为T0态。   
证明：  
充裕堆数不可能一次由2变为0。得证。  #

[定理8]：S2态可一次转变为T2态。   
证明：  
由定理1，S态可转变为T态，态可一次转变为T态，又由定理6，S2态不可转一次变为T0态，所以转变的T态为T2态。  #   
[定理9]：T2态，只能转变为S2态或S1态。   
证明：  
由定理2，T态必然变为S态。由于充裕堆数不可能一次由2变为0，所以此时的S态不可能为S0态。命题得证。   
[定理10]：S2态，只要方法正确，必胜.   
证明：  
方法如下：   
      1）  S2态，就把它变为T2态。（由定理8）   
      2）  对方只能T2转变成S2态或S1态（定理9）  
    若转变为S2,  转向1）   
    若转变为S1,  这己必胜。（定理5）   
[定理11]：T2态必输。   
证明：同10。   
综上所述，必输态有：  T2,S0   
          必胜态：    S2,S1,T0.   
两题比较：   
第一题的全过程其实如下：   
S2->T2->S2->T2->  ……  ->T2->S1->T0->S0->T0->……->S0->T0(全0)   
第二题的全过程其实如下：   
S2->T2->S2->T2->  ……  ->T2->S1->S0->T0->S0->……->S0->T0(全0)   
下划线表示胜利一方的取法。  是否发现了他们的惊人相似之处。   
我们不难发现(见加黑部分)，S1态可以转变为S0态（第二题做法），也可以转变为   
T0（第一题做法）。哪一方控制了S1态，他即可以有办法使自己得到最后一根（转变为   
T0）,也可以使对方得到最后一根（转变为S0）。   
  所以，抢夺S1是制胜的关键！   
  为此，始终把T2态让给对方，将使对方处于被动状态，他早晚将把状态变为S1.

推荐HDOJ题目  
<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1907>  
<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=2509>  
看完上面的结论，就能顺利解决上面2道了

S-Nim  
<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1536>  
<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1944>

博弈算法入门小节 1536 1517 1907  
小子最近迷途于博弈之中。。。感触颇深。  
为了让大家能够在学习博弈的时候少走弯路，最重要的也是为了加深自己的影响，温故而知新，特发此贴与大家共勉。  
学博弈先从概念开始：  
特别推荐LCY老师的课件：博弈入门。  
下载地址：<http://acm.hdu.edu.cn/forum/read.php?tid=6875>  
这个课件个人认为从博弈的基本思想，一直到解博弈的中心算法做了很好的诠释。但是特别要注意的是。课件后面一部分英语写的讲义是重中之重。小子英语很弱，在这困扰很久。现在为大家大概介绍一下。  
主要是后继点和SG值的问题:  
SG值：一个点的SG值就是一个不等于它的后继点的SG的且大于等于零的最小整数。  
后继点：也就是按照题目要求的走法（比如取石子可以取的数量，方法）能够走一步达到的那个点。  
具体的有关SG值是怎么运用的希望大家自己多想想。  
课件后面有一个1536的代码。可以放在后面做做  
看到这里推荐大家做几道题：1846（最简单的博弈水题）  
1847（求SG值）

有了上面的知识接下来我们来看看组合博弈（n堆石子）  
推荐大家看个资料：  
博弈-取石子游戏(推荐等级五星级)  
<http://acm.hdu.edu.cn/forum/read.php?fid=20&tid=5748>  
<http://hi.baidu.com/netnode/blog/item/30932c2edc7384514fc226ea.html>  
这里提出了一个奇异状态的问题。看了这篇文章你会发现异或运算在博弈中使用的妙处。当然这里指出的只是组合博弈中一种特殊情况。  
王道还是对SG值的求解，但是知道这么一种思路无疑对思维的广度和深度扩展是很有帮助的。  
ZZ博弈  
<http://acm.hdu.edu.cn/forum/read.php?fid=9&tid=10617>  
这里介绍了组和博弈的两种大的类型，一种是最后取的是N状态一种是最后取的是P状态，两个状态的解题方法能看懂很有帮助。当然，能够把推导过程理解，吃透无疑是大牛级的做法~小子也佩服的紧~     
    1536题推荐做做这题，这题前面提醒大家是一个求SG值的题目，题目前面是对异或运算运用在组合博弈问题中的很好的解释。当然题目本身是有所不同的。因为在这里面对取法有所要求。那么这样就回归到了解决博弈问题的王道算法——求SG值上。  
    有关运用求SG值的博弈题目有： 1850（也可基于奇异状态异或）  
1848（中和的大斐波那契数列的典型求SG值题）  
1517（个人认为有点猥琐的题目。。。。在此题上困扰很久。当然搞出来很开心。小子是用比较规矩的求SG值的方法求出来的，但是论坛有人对其推出来了规律，这里佩服一下，大家可以学习一下）  
1079（更猥琐的题目，对新手要求较高，因为按传统方法需要比较细致的模拟加对边角状态的考虑，同样有人推出来了公式）  
当你全部看完以上的东西。做完以上的题目的话。。。小子恭喜你~你博弈入门了~~~~  
    这里小子告诉大家。博弈很强大。学习要耐心~谢谢

----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

博弈小结：

（忽略从word上复制过来之后的奇葩缩进）

看了张一飞+贾志豪+方展鹏+曹钦翔的论文都讲得超好，这些应该到处都可以找到的。

终于会基本的博弈了。

仅仅只是看完之后的回忆录而已，基本上和论文相似，仅总结加深记忆用。

看到本文的人轻点喷。

也许看论文会更清晰。

以前博弈各种弱，只是零零星星的了解一些知识，严格的证明之类的没有接触。

现在终于都搞清啦！不过碰上奇葩博弈还是做不出。。。

1.极大极小搜索

         好吧！表示最后才看到这个的。还是比较好理解的。

         还有α-β剪枝，这个应该自己随便yy都可以搞出来的。

         好吧！用来做五子棋，3连棋之类的。

         至少会了这个，一般的博弈都可以拿0分以上了。

2.普通NIM游戏

         概念题：一堆石子n个，每次最多取m个，求先手必胜还是必败。

     N表示比生态，P表示必败态。

         终止状态是P状态，然后找出能到达这个点的点标记为N状态，

         继续扫，找到只能到达N状态的点标记为P状态，如此循环往复。

         这个比较直观。类似拓扑的扫一次即可。

         对于很多堆石子的话张一飞论文说得很清楚，小结一下。

         首先看两堆石子，如果个数完全一样，那么后手必胜，因为现手在一堆中拿走了

         一些棋子之后，后手总能在另一堆中拿一样多的棋子。

         考虑把局面S分解成A和B，先手必胜成为S胜，后手胜为T胜。

如果A=B,则T胜。如S={3,3,2,2}分解成{3,3}和{2,2}.

如果对于A是S胜，B是S败(由于A，B等价，反过来亦然)，S只需要先拿A，然后T如果拿A，S也拿A，T拿B，S也拿B，那么S因为对于A，S是先手，所以S总是可以拿到A的最后一个，并且可以逼着T当B的先手。因为B先手必败，S也可以拿掉B的最后一个。

如果对于A和B都是S败，那么A先随便拿一个，对于T来说就变成了上一种情况了。那么此时T胜。

当A和B都是S胜时，S肯定不会第一步把局面变成一胜一负，他会继续变成AB都对于T必胜，那么T又纠结了。如此往复，就无法确定了。

上面的分解，归纳一下，如果对于B，S必败，那么整个局面的胜负和A一样。

那么如果原几何是{2,2,2,7,7,3,3,9}就可以分解成A{2,9},B{2,7,3},C{2,7,3}。因为B+C是必败的，所以A+B+C的胜负和A一样，这样就转化成了一个不重集合了，打裸就少了一堆状态了。

好吧！以上就可以类比出XOR运算了。沿着这个思路，就可以想到一个函数来优化打裸了。

         设f[x]=x。(一下xor用+代替)

         那么对于一堆石子S={a1,a2,a3…..an}

         另p=f[a1]+f[a2]+…..+f[an]

如果p=0则该状态是S败，否则S胜。

因为终止状态是p=0，要证明这个结论的正确性，只需要证明从p≠0能够转移到p=0,而从p=0只能转移到p≠0即可。

首先，明确xor的基本性质。

1.a+b=c,则有a+c=b.

2.p=a1+a2+…..an≠0,必然存在k，使p+ak<ak，因为p的最高位为1，肯定有一个ak该位也是1，p+ak该位就是0了。所以得证。

证明从p≠0能够转移到p=0

         因为p=f[a1]+f[a2]+…..f[an]=a1+a2+…+an。

         找到p+ak<ak的k和a1交换。

         设x=p+a1<a1,直接把a1变成x1,那么p=p+a1+a2+…..+an=0.

证明从p=0只能转到p≠0

         如果a的全部序列都是0了，你就玩完了。

其他时候，随便你选什么数ak,那么其他数的xor和肯定等于ak。

p=(ak-xxx) + ak,xxx为正数且小于ak，那么p显然就不为0了。

至此，证明了f[a1]=a1的正确性了。

现在题目稍稍拓展一下。

N堆石子，每次任选一堆，可以从这堆拿走不超过m个的石子。求先手必胜还是必败。

这个的f[a1]=a1%m.

因为游戏的分解之类的东西与前一个游戏一样，所以只需考虑一堆石子即可。

考虑最开始的那个打裸，从后往前推一下N和P就可一直到a1%m=0时必败。

来个终极版NIM游戏。

有若干排石子，每次必须选相邻的两个拿走，把原来的那排变成了两排。

谁无路可走了谁就挂了。

分析这个题，发现各种分解的性质和前面的两个游戏一样的。现在就需要求f值了。

和前面的游戏一样，我们设计的f值必须满足

终止状态p=0，从p≠0能够转移到p=0,从p=0只能转移到p≠0即可。

第一个条件是显然成立的。

回忆论文，先假设#S表示S这个状态的f值之xor和，

要满足第二个条件

         因p=f[a1]+f[a2]+….+f[an]≠0,设x=f[a2]+f[a3]+….+f[an]=p+f[a1].

         因p+f[a1]<f[a1],所以x<f[a1].

         把a1干掉后可能变成了{b1,b2,…..bm}

         那么必须#{b1,b2,….bm}+x=0,如果1~f[a1]-1,都被#{b1,b2….bm}包含了，

         那么肯定是可以找到满足条件的x的。

要满足第三个条件

         即p=f[a1]+f[a2]+…+f[an]=0时。f[a1]=f[a2]+…+f[an]=x;

         同样把a1干掉，得到{b1,b2….bm}

         Pn=#{b1,b2,…..bm}+x≠0,必须对于任意b都成立。

         所以x不能出现在a1能转到的状态中。

                  所以f值就是他的后继的f值中没有出现过的值的最小值就行了。

其实，这就是sg值了。以前一直觉得这东西特别神奇，原来就这样就证明出来了。

看sg函数的使用条件：

1.       谁无法操作就输，与就是能找到必败态。

2.       满足类似拓扑序的东东

3.       各个游戏独立

4.       平等游戏

5.       对操作的限制，至于常数有关。

3.anti-nim游戏

         如果定义拿最后一个棋子的人输就成了anti-nim游戏。

         传说中的SJ定理登场了。实际上很多定理都会披上这么牛叉的名字。

         我们就一种情况一种情况的玩吧。

         这里的SG应该还是指的NIM中的SG。

先手必胜有两种状态：

1.如果每一个小游戏都只剩下一个石子了，SG为0。

2.至少一堆石子>1,且SG不为0.

证明

         1显然成立。

         2的话分两种情况

a.       只有一堆石子>1,好吧！整个生杀大权都交你主宰了。你可以把它变成1。

b.       至少两队石子>1,你只需要把SG值边为0就可以了，这个操作之后，至少还有两堆石子>1，然后对方随便怎么操作，都会把SG变成非0，你们就一直这么玩就行了。

还需要证明1,2的反面是必败的。

1显然了。

2的话，你会把SG变成非0，而且因为现在至少两堆石子>1了，所以你还会给人家至少留一个>1的，那么无论怎么搞，都会送给后手一个必胜态。

4.every-SG游戏

    就是多线程博弈。

形象的说就是红队和蓝队每个队n个人，然后进行n个博弈，最后结束的一场博弈的胜者胜利。

显然，每个博弈的胜者都想让时间坚持得更久，每个败者都想让这场博弈早点结束。

不难列出每个点到终止的步数的DP方程。

如果v是先手必胜，则f[v]=max(f[u])+1,其中u为v的后继且u为先手必败。

否则f[v]=min(f[u])+1,u为v后继。

         然后可以求出每一个博弈的步数。

         求出这个最大值，如果最大值是奇数，那么先手必胜。这个显然。

        还有黄金分割那道题，二分图有关的博弈，k倍动态减法游戏。写在应用里了。

5.不平等博弈

         传说中的超现实数(也译成超实数)登场了。

         首先明确超现实数的两个定义

         定义surreal number x={XL|XR}，满足XL中的任意一个数小于等于XR中的任意一个数。

         然后是看他们如何比较大小

         x={XL|XR}和y={YL|YR},要满足x<=y,必须满足XL的任意一个元素<y,YR的任意一个元素>x.

         首先{|}=0.

         然后可以构造出第一批新数{0|},{|0}

         根据定义可以知道{|0}<{|}<{0|}

         那么{|0}=-1,{0|}=1.

         然后可以继续构造出一堆数。

         接下来是加法运算法则。

         x+y={XL|XR}+{YL|YR}={XL+y,YL+x|XR+y,YR+x} 。XL+y运算即把XL中的每一个元素+y。

         这个公式十分美观，应该一眼就能记住了。

         加法的交换律和结合律都是满足的。

       然后就类比到不平等博弈问题。

       两个人A,B面临着不同的局面恰好可以分成L，R，我们可以把它构造成超现实数。

       于是乎整个局面变成了x={SA|SB}，比如A可以转移到x，y，z。B可以转移到w。

       就变成了{x,y,z|w}.

         如果x>0

则说明x>=0成立，且x<=0不成立。

也就有SA中的元素都>=0,y中的元素都>0,那么A能转移到的状态总是有>=0的，y能转移到的总是>0的，那么A总是有状态可转，那么A必胜。

如果x<0

         说明x>=0不成立，x<=0成立。

         也就是SA的元素都<0,SB则有<=0,同理B必胜。

如果x=0

         也就是说x>=0和x<=0同时成立。

         那么SA都<0,SB都>0.那么A先手的话会转移到<0的，然后B必胜，B同理。

         所以此时先手必败。