WS 2016/17 DS Tutorium

Woche $\boxed{\mathbf{5}}$

Kongruenz modulo 3

a

Zu Beweisen: $\equiv_3$ ist Äquivalenzrelation.
$x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv_3 y$ genau dann, wenn ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $x = q \cdot 3 + y$ existiert.
Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv_3 y$ und $y \equiv_3 z$, das heißt, es existieren $p, q \in \mathbb{Z}$, sodass $x = p \cdot 3 + y$ und $y = q \cdot 3 + z$ gilt.
$\boxed{\mathbf{T}}$ $x = p \cdot 3 + y = p \cdot 3 + q \cdot 3 + z = (\underbrace{p + q}_{r}) \cdot 3 + z$, also $x \equiv_3 z$, ergo ist $\equiv_3$ transitiv.
$\boxed{\mathbf{R}}$ Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x = 0 \cdot 3 + x = x$, also $x \equiv_3 x$, ergo ist $\equiv_3$ reflexiv.
$\boxed{\mathbf{S}}$ Sei $x \equiv_3 y$, also $x = q \cdot 3 + y$. $y = -q \cdot 3 + x = (-q) \cdot 3 + x$, also $y \equiv_3 x$, also ist $\equiv_3$ symmetrisch.

b

$[1] = [-2]$ in $\mathbb{Z} \backslash \equiv_3$. Wegen $1 = 1 \cdot 3 + (-2) = 1 \equiv_3 -2$, also $[1] = [-2]$ in $\mathbb{Z} \backslash \equiv_3$ nach (Prop 5.6 b)).