WS 2016/17 Simon Kaiser, 354692
Gruppe $\boxed{\mathbf{3}}$ Johannes Salentin, 367543

Diskrete Strukturen
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 30

Es sei eine Teilmenge X von $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ||x| + |y| = 1\}.$$

Für $i \in [0, 3]$ seien Abbildungen $r_i, s_i : X \to X$ gegeben durch

$$r_0(x, y) = (x, y), s_0(x, y) = (x, -y),$$
$$r_1(x, y) = (y, -x), s_1(x, y) = (y, x),$$
$$r_2(x, y) = (-x, -y), s_2(x, y) = (-x, y),$$
$$r_3(x, y) = (-y, x), s_3(x, y) = (-y, -x).$$

Schließlich seien $r := r_1$, $s := s_0$ und $D := \{r_0, r_1, r_2, r_3, s_0, s_1, s_2, s_3\}$.

a

Zeigen Sie exemplarisch an Hand der Abbildung r, dass die acht Elemente von D wohldefinierte Abbildungen sind.

$r := r_1 : X \to X, (x, y) \mapsto (y, -x)$.
Betrachte $g : X \to X, (x, y) \mapsto (-y, x)$ $(= r_1)$
$r \circ g : r(g(x, y)) = r(-y, x) = (x, y) = id_x$.
$g \circ f : g(r(x, y)) = g(y, -x) = (x, y) = id_x$.
Die Abbildung ist sowohl links- als auch rechtsinvers und somit bijektiv. Das bedeutet, dass r eine wohldefinierte Abbildung ist.

b

$r_0(x, y) = (x, y)$: Es passiert nichts. Der Punkt (x, y) wird nicht verändert.
$r_1(x, y) = (y, -x)$: Der Punkt (x, y) wird an der Winkelhalbierenden und an der x-Achse gespiegelt.
$r_2(x, y) = (-x, -y)$: Der Punkt (x, y) wird an der x- und y-Achse gespiegelt.
$r_3(x, y) = (-y, x)$: Der Punkt (x, y) wird an der Winkelhalbierenden und an der y-Achse gespiegelt.
$s_0(x, y) = (x, -y)$: Der Punkt (x, y) wird an der x-Achse gespiegelt.
$s_1(x, y) = (y, x)$: Der Punkt (x, y) wird an der Winkelhalbierenden gespiegelt.
$s_2(x, y) = (-x, y)$: Der Punkt (x, y) wird an der y-Achse gespiegelt.
$s_3(x, y) = (-y, -x)$: Der Punkt (x, y) wird an der Winkelhalbierenden, an der x- und y-Achse gespiegelt.

c

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$[0,3] \times [0,1] \to D, (i,j) \mapsto r^i \circ s^j$$

eine wohldefinierte Bijektion ist und bestimmen Sie das Urbild von $s \circ r$ unter dieser Bijektion.
Setze $g : D \to [0,3] \times [0,1], r^i \circ s^j \mapsto (i,j)$.

$$f \circ g : f(g(r^i \circ s^j)) = f(i,j) = r^i \circ s^j = id_D.$$
$$g \circ f : g(f(i,h)) = g(r^i \circ s^j) = (i,j) = id_{[0,3]\times[0,1]}.$$

Daraus folgt, dass die gegebene Abbildung eine wohldefinierte Bijektion ist.

Urbild.

$$f^{-1}(s \circ r) = \{(x,y) \in [0,3] \times [0,1] | f(x,y) \in \{s \circ r\}\} = \{(1,1)\}.$$
$$s \circ r = s_0 \circ r_1 : s_0(r_1(x,y)) = s_0(y,-x) = (y,x).$$

$r^0 \circ s^0 : (x,y)$
$r^0 \circ s^1 : (x,-y)$
$r^1 \circ s^0 : (y,-x)$
$r^1 \circ s^1 : (y,x)$ ✓
$r^2 \circ s^0 : (-x,-y)$
$r^2 \circ s^1 : (-x,y)$
$r^3 \circ s^0 : (-y,-x)$
$r^3 \circ s^1 : (-y,x)$

d

Zeigen Sie, dass $(g,f) \mapsto g \circ f$ eine wohldefinierte Verknüpfung auf D ist und dass D zusammen mit dieser Verknüpfung eine nicht-kommutative Gruppe bildet. Vermeiden Sie dabei allzu groß Fallunterscheidungen. Geben Sie eine kurze geometrische Interpretation der Nicht-Kommutativität an.
$a : D \times D \to D, (g,f) \mapsto g \circ f$.
Setze $b : D \to D \times D, g \circ f \mapsto (g,f)$.

$$a \circ b : a(b(g \circ f)) = a(g,f) = g \circ f = id_D,$$
$$b \circ a : b(a(g,f)) = b(g \circ f) = (g,f) = id_{D\times D}.$$

Die gegebene Verknüpfung auf D ist wohldefiniert, da sie bijektiv ist. □
Assoziativität.

$$xy(yaz) = xa(y \circ z) = x \circ (y \circ z)$$
$$\overset{\text{Assoz. bei Komposita}}{=} (x \circ y) \circ z$$
$$(xay) \circ z = (xay)az \quad \square$$

Existenz der Eins.

$$xae = eax = x \text{ mit } e = r_0 = id : (x,y) \mapsto (x,y).$$
$$xae = x \circ e = x \circ r_0 : x(r_0(x,y)) = (x,y). \checkmark$$
$$eax = e \circ x = r_0 \circ x : r_0(x(x,y)) = x(x,y). \checkmark$$

Das neutrale Element ist die Identitätsabbildung $id = r_0$.

Existenz der Inversen
r_0 und r_2 sind zu sich selbst invers, da $r_0^2 = (x, y)$ und $r_2^2 = (x, y)$.
Es gilt $(r_2(r_2(x, y)) = r_2(-x, -y) = (x, y))$.
Zudem sind r_1 und r_3 gegenseitig Inverse voneinander.

$$\begin{aligned} r_1 \circ r_3 &: r_1(r_3(x, y)) = r_1(-y, x) = (x, y), \\ r_3 \circ r_1 &: r_3(r_1(x, y)) = r_3(y, -x) = (x, y). \end{aligned}$$

Weiterhin sind alle s zu sich selbst invers.

$$\begin{gathered} s_0(s_0(x, y)) = s_0(x, -y) = (x, y), \\ s_1(s_1(x, y)) = s_1(y, x) = (x, y), \\ s_2(s_2(x, y)) = s_2(-x, y) = (x, y), \\ s_3(s_3(x, y)) = s_3(-y, -x) = (x, y). \end{gathered}$$

$\square$

Nicht-Kommutativität.
Betrachtet man einen Punkt im zweiten oder vierten Quadranten und spiegelt diesen an der Winkelhalbierenden, so landet man im jeweils anderen Quadranten $(2 \to 4, 4 \to 2)$, man spiegelt den Punkt also auf die andere Seite der y-Achse. Dies führt bei umgekehrter Verknüpfung zu unterschiedlichen Punkten. Hier kommt es auf die Reihenfolge der Verknüpfungen an.
Insgesamt bildet D mit der Verknüpfung eine nicht-kommutative Gruppe.

Aufgabe 31

Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu einem kommutativen Ring wird, mit Addition und Multiplikation. $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit dieser Struktur ein Körper?

Es gilt $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ und $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.
Zu zeigen ist, dass $((\mathbb{R} \times \mathbb{R}), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring und ein Körper ist. *Assoziativität.*

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) \\ =&(a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c2) \\ =&(a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)) \\ \text{Ass. auf } \mathbb{R} =& ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2) \\ =&(a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) \\ =&((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1 + c_2) \quad \square \quad \text{Analog für } \cdot. \end{aligned}$$

Kommutativität.

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2) + (b_1, b2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ \text{Komm.ges + auf } \mathbb{R} =& (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \quad \square \quad \text{Analog für } \cdot. \end{aligned}$$

Neutrales Element.
Für die Addition + sei $(0, 0)$ das neutrale Element.

$$(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1 + 0, a_2 + 0) = (a_1, a_2)$$

Wegen des Kommutativgesetzes gilt dies auch in anderer Richtung. $\square$
Für die Multiplikation $\cdot$ sei $(1, 1)$ das neutrale Element.

$$(a_1, a_2) \cdot (1, 1) = (a_1 \cdot 1, a_2 \cdot 1) = (a_1, a_2)$$

Wegen des Kommutativgesetzes gilt dies auch in anderer Richtung. $\square$

Negative bzgl. +.
In $\mathbb{R}$ existiert eine Negative für alle Elemente.

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) \\ =&(a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2)) = (0, 0) \end{aligned}$$

Wegen des Kommutativgesetzes gilt dies auch in anderer Richtung. $\square$

Distributivität.

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) \\ =&(a_1, a_2) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ =&(a_1 \cdot (b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2)) \\ \overset{\text{Distr. ü. } \mathbb{R}}{=}& (a_1 b_1 + a_1 c_1, a_2 b_2 + a_2 c_2) \\ =&(a_1 b_1, a_2 b_2) + (a_1 c_1, a_2 c_2) \\ =&(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) \quad \square \end{aligned}$$

Inverse bzgl. $\cdot$.
In R $\setminus \{0\}$ existiert ein Inverses für jedes Element, wober $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

$$(a_1, a_2) \cdot (a_1^{-1}, a_2^{-1}) = (a_1 \cdot a_1^{-1}, a_2 \cdot a_2^{-1}) = (1, 1).$$

Wegen des Kommutativgesetzes gilt dies auch in anderer Richtung. $\square$

$((\mathbb{R} \times \mathbb{R}), +, \cdot)$ ist ein Körper und zudem ein kommutativer Ring per Definition $(6.42(a), (b), (c))$.