WS 2016/17 Simon Kaiser, 354692
Gruppe 3 Johannes Salentin, 367543

Diskrete Strukturen
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 17

a

Es seien
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, a \mapsto (a-1, 2)$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (b_1, b_2) \mapsto b_1 + b_2$.
Untersuchen Sie, ob die Komposita $g \circ f$ und $f \circ g$ definiert sich und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.
Ja, die Abbildungen sind definiert, denn die Abbildungen f und g sind so gegeben, dass die Zielmenge von f gleich der Startmenge von g ist, und die Zielmenge von g gleich der Startmenge von f ist. Die Komposita $g \circ f$ und $f \circ g$ sind also definiert.

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = (a-1) + 2 = a + 1 \text{ für } a \in \mathbb{Z}.$$
$$(\mathrm{f} \circ g)(b_1, b_2) = f(g((b_1, b_2))) = (b_1 + b_2 - 1, 2) \text{ für } (b_1, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

b

Zeigen oder widerlegen Sie:
(i)
Für alle Abbildungen $f, g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ gilt $g \circ f = f \circ g$.
Widerlegung durch Gegenbeispiel:
Seien $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 1$
und $g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2$ gegeben.
So ist $g \circ f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2$
und $f \circ g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 1, 3 \mapsto 1, 3 \mapsto 1$ nicht gleich.
Somit ist die Aussage widerlegt.
(ii)
Für alle Abbildungen $f, g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ gilt $g \circ f \neq f \circ g$.
Widerlegung durch Gegenbeispiel:
Seien $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$
und $g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2$ gegeben.
So sind $g \circ f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3$
und $f \circ g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3$ gleich.
Somit ist die Aussage widerlegt.
Insgesamt gibt es aber Abbildungen, für die $g \circ f = f \circ g$ gilt, aber es gibt

auch Abbildungen, für die genau dies nicht gilt, also $g \circ f \neq f \circ g$ ist. Folglich sind beide Aussagen widerlegt.

c

Zu zeigen: Die Abbildung $f : \{0,1\}^{\{0,1\}} \to \{0,1,2,3\}, h \mapsto h_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1$ ist invertierbar.
Die Abbildung ordnet jeder Abbildung mit Start- und Zielmenge $\{0,1\}$ einer Zahl von 0 bis 3 zu. F kann somit auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\text{f:}\{0{,}1\}^{\{0,1\}} \to \{0,1,2,3\}, &(f_0 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0) \mapsto 0,\\ &(f_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0) \mapsto 1,\\ &(f_2 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1) \mapsto 2,\\ &(f_3 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 1) \mapsto 3.\end{aligned}$$

Sei nun g gegeben mit:

$$\begin{aligned}g : \{0,1,2,3\} \to \{0,1\}^{\{0,1\}}, &0 \mapsto (f_0 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0),\\ &1 \mapsto (f_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0),\\ &2 \mapsto (f_2 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1),\\ &3 \mapsto (f_3 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 1).\end{aligned}$$

Dann gilt $f \circ g = id_{\{0,1,2,3\}}$ und $g \circ f = id_{\{0,1\}^{\{0,1\}}}$.
Das bedeutet, g ist eine Inverse zu f und folglich ist f auch invertierbar.

Aufgabe 18

Sei $x \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$.
$f : X \to X, x \mapsto 4x - 3$.
Sei $X = \mathbb{N}$ oder $X = \mathbb{Z}, g : X \to X, y \mapsto (y+3)div$.
$(\text{g } \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x-3) = (4x-3+3)div4$
$\qquad = 4x\ div4 = x$, also $g \circ f = id_x$.
Daraus folgt, dass f injektiv ist gemäß (3.29a).
Es gibt kein $x \in X$ mit $4x = 5$, also kein $x \in X$ mit $f(x) = 4x - 3 = 2$. Es folgt, dass f nicht surjektiv ist.
Sei nun $x = \mathbb{Q}$. $g : X \to X, y \mapsto \frac{1}{4}(y+3)$.
Es gilt für $x, y \in X : y = 4x - 3 \iff y + 3 = 4x \iff \frac{y+3}{4} = x$.
$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(4x-3) = \frac{1}{4}(4x-3+3) = \frac{1}{4} \cdot 4x = x$
$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\frac{1}{4}(y+3)) = y$.

Also $g \circ f = id_x$ und $f \circ g = id_x$ nach (3.6).
Nach (3.29c) ist f also bijektiv. $\square$