WS 2016/17 Simon Kaiser, 354692
Gruppe $\boxed{\textbf{3}}$ Johannes Salentin, 367543

Diskrete Strukturen
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 23

Es sei eine Menge X gegeben.

a

Es seien eine Menge I und eine Familie $(c_i)_{i \in I}$ von Äquivalenzrelation auf X gegeben. Für $x, y \in X$ gelte genau dann $x\ c\ y$, wenn für $i \in I$ stets $x\ c_i\ y$ gilt. Zeigen Sie, dass c eine Äquivalenzrelation auf X ist.
c_i ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn die Reflexivität, Transitivität und Symmetrie von c gilt.
c ist genau dann reflexiv, wenn $x\ c\ x$ gilt. c_i sei Äquivalenzrelation auf x, dann gilt $x\ c_i\ x$ für alle $i \in I$, da für alle $x \in X$ $x\ c\ x$ gilt. ✓

c ist genau dann transitiv, wenn aus $x\ c\ y$ und $y\ c\ z$ $x\ c\ z$ folgt. c_i sei eine Äquivalenzrelation, dann folgt aus $x\ c_i\ y$ und $y\ c_i\ z$ $x\ c_i\ z$, da für alle $x, y, z \in X$ aus $x\ c\ y$ und $y\ c\ z$ $x\ c\ z$ folgt. ✓

c ist genau dann symmetrisch, wenn $x\ c\ y$ und $y\ c\ x$ gilt. c_i sei eine Äquivalenzrelation, dann gilt dann gilt $x\ c_i\ y$ und $y\ c_i\ x$ für $i \in I$, da $x\ c\ y$ und $y\ c\ x$ für $x, y \in X$ gilt. ✓

Da Reflexivität, Transitivität und Symmetrie von c_i soeben bewiesen wurde, ist c_i eine Äquivalenzrelation. $\square$

b

c ist genau dann reflexiv, wenn$x\ c\ x$ gilt.
Es existiert ein d aus C so, dass $x\ d\ x$ gilt. Da $x\ d\ x$ gilt, gilt auch $x\ c\ x$ $\square$
c ist genau dann transitiv, wenn aus $x\ c\ y$ und $y\ c\ z$ $x\ c\ z$ folgt.
Es existiert ein d aus C so, dass aus $x\ d\ y$ und $y\ d\ z$ $x\ d\ z$ folgt. Da aus $x\ d\ y$ und $y\ d\ z$ $x\ d\ z$ folgt, folgt auch aus aus $x\ c\ y$ und $y\ c\ z$ $x\ c\ z$. $\square$
c ist genau dann symmetrisch, wenn $x\ c\ y$ und $y\ c\ x$ gilt. Es existiert ein d aus C so, dass $x\ d\ y$ und $y\ d\ x$ gilt. Da $x\ d\ y$ und $y\ d\ x$ gilt, gilt auch $x\ c\ y$ und $y\ c\ x$. $\square$

Für jede Äquivalenzrelation d auf X derart, dass für $x, y \in X$ aus $x\ r\ y$ stets $x\ d\ y$ folgt , folgt für $x, y, \in X$ auch aus $x\ c\ y$ $x\ d\ y$.
Somit gilt $x\ c\ y$, wenn $x\ d\ y$ gilt. Ebenso gilt $y\ c\ z$, wenn $y\ d\ z$ gilt. Weil d eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus $x\ d\ z$ und $y\ d\ z$ $x\ d\ z$. Gemäß Definition der Transitivität (4.3a) ist c transitiv und die zweite Bedinung erfüllt. ✓

Aufgabe 24

a

Es sei eine Abbildung $f : X \to Y$ gegeben.
(i) Es sei eine Äquivalenzrelation c auf Y gegeben. Für $x, \tilde{x} \in X$ gelte $x\ c_f\ \tilde{x} \in X$ genau dann, wenn $f(x)\ c\ f(x)$ gilt. Zeigen Sie, dass c_f eine Äquivalenzrelation auf X ist.
(ii) Folgern Sie, dass $=_f$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

Zur Bedingung (i): Es sei eine Äquivalenzrelation c auf Y gegeben. Für $x, \tilde{x} \in X$ gelte $x\ c_f\ \tilde{x}$ genau dann, wenn $f(x)\ c\ f(\tilde{x})$ gilt.
$x\ c_f\ x$ gilt, wenn $f(x)\ c\ f(x)$ gilt. Da c eine Äquivalenzrelation ist, ist dies erfüllt und somit ist c_f reflexiv. ✓
Aus $x\ c_f\ y$ und $y\ c_f\ z$ folgt $x\ c_f\ z$, wenn aus $f(x)\ c\ f(y)$ und $f(y)\ c\ f(z)$ $f(x)\ c\ f(z)$ folgt. Da c eine Äquivalenzrelation ist, ist dies erfüllt und somit ist c_f transitiv. ✓
Aus $x\ c_f\ y$ folgt $y\ c_f\ x$, wenn aus $f(x)\ c\ f(y)$ auch $f(y)\ c\ f(x)$ folgt. Da c eine Äquivalenzrelation ist, ist dies erfüllt und somit ist c_f symmetrisch. ✓
c_f ist also eine Äquivalenzrelation, weil sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. □

Zur Bedingung (ii): Fur $x, \tilde{x} \in X$ gilt $x =_f \tilde{x}$, wenn $f(x) = f(\tilde{x})$.
Ersetzen wir nun c und c_f aus a entsprechend mit $=$ und $=_f$, heißt dass es $x =_f \tilde{x}$, wenn $f(x) = f(\tilde{x})$ gilt. Die Äquivalenzrelation $=_f$ ist aber eine konkrete Relation für c_f aus a), wobei '=' eine Äquivalenzrelation, wie c, ist. □
$\boxed{\text{MUSTER}}$ $f : X \to Y$. $x, \tilde{x} \in X$. $x\ c_f$ gilt genau dann wenn, $f(x)\ c\ f(\tilde{x})$.
Beweis: Seien $x, x^i, x^{ii} \in X$ mit $x\ c_f\ x^i$ und $x^i\ c_f\ x^i$
$\implies f(x)\ c\ f(x^i)$ und $f(x^i)\ c\ f(x^i)$
$\implies f(x)\ c\ f(x^i)$
$\implies c_f$ transitiv.
Seien $x, \tilde{x} \in X$ mit $x\ c_f\ \tilde{x}$.
$\implies f(x)\ c\ f(\tilde{x})$
$\implies f(\tilde{x})\ c\ f(x)$
$\implies \tilde{x}\ c_f\ x$
$\implies c_f$ ist symmetrisch.
Insgesamt ist c_f eine Äquivalenzrelation auf X. Zur Bedingungen (ii):
$=$ ist eine Äquivalenzrelation auf Y, also ist $=_f$ nach 24a)i) eine Äquivalenz-

relaion auf X.

b

$T : AF \to B$
Zur Bildgleichheit: Für $a, b \in AF$ gilt $a =_{\bar{T}}$, wenn $T(a) = T(b)$ gilt.
Das bedeutet, dass zwei aussagenlogische Formeln in dieser Relation stehen, wenn die potentiellen Wahrheitstafeln beider gleich sind, also die aussagenlogischen Formeln logisch äquivalent sind.
Zum Homomorphiesatz: Es gibt eine induzierte Abbildung $\bar{T} : AF/ =_T \to B, [a] \mapsto f(a)$, welche $T = \bar{T} \circ quo$ erfüllt.
Also gilt für $a, b \in AF$ $a =_T B$, wenn ihre Wahrheitstafeln gleich sind, also die aussagenlogischen Formeln logische äquivalent sind. Eine Äquivalenzrelation bezüglich $=_T$ entspricht der Gesamtheit der logisch äquivalenten aussagenlogischen Formeln, wobei die Quotientenmenge $AF/ =_T$ die Einteilung in Gruppen von logisch äquivalenten aussagenlogischen Formeln widerspricht. Die Quotientenabbildung $auo : AF \to AF/ =_T$ kann als Zuordnung von aussagenlogischen Formeln zu ihrer Klasse von logisch äquivalenten aussagenlogischen Formeln aufgefasst werden, wobei diesen Klassen durch die induzierte Abbildung $\bar{T} : AF/ =_T \to B$ die entsprechenden Wahrheitstafeln zugeordnet werden.
$\boxed{\text{MUSTER}}$ Seien $F, G \in AF$, $F =_{AF} G$ genau dann, wenn $T(F) = T(G)$, d.h. $T \equiv G$. Nach Homomorphiesatz: $\bar{T} : AF/_{=_T} \to B, [F]_{=_T} \mapsto T(F)$ ist wohldefinierte, injektive Abbildung, die folgende Eigenschaften erfüllt: Mit $T : \bar{T} \circ quo$, $quo : AF \to AF_{=_T}, F \mapsto [F]_{=_T}$ für alle $F \in AF$.
$[F]_{=_T} = \{G \in AF | G =_T F\} = \{G \in AF \mid G \equiv F\}$. Somit ist T surjektiv, wegen $Im(\bar{T}) = Im(T)$, auch $\bar{T}$ surjektiv. Insgesamt $\bar{T}$ ist eine Bijektion. $\boxed{\text{x c y} \iff [x] = [y]}$.