WS 2016/17 DS Tutorium
Woche $\boxed{\mathbf{6}}$

Aufgabe 1. Uhrengruppe

Sei $U = [1, 12]$.

$$x +^u y = \begin{cases} x +^{\mathbb{Z}} y & \text{für } x, y \in U \text{ mit } x +^{\mathbb{Z}} y \in [1, 12] \\ x +^{\mathbb{Z}} y - 12 & \text{für } x, y \in U \text{ mit } x +^{\mathbb{Z}} y \in [13, 24] \end{cases}$$

$a : U \times U \to U$. $x \ a \ y = \{...\}$.

Assoziativität: $x, y, z \in U$. Z.z.: $xa(yaz) = (xay)az$.

$$xa(yaz) = \begin{cases} xa(y+z), & \text{falls } y+z \in [1,12] \\ xa(y+z-12), & \text{falls } y+z \in [13,24] \\ x+y+z-12, & \text{falls } y+z \in [13,24],\ x+y+z-12 \in [13,24] \\ x+y+z-12-12, & \text{falls } y+z \in [13,24],\ x+y+z-12 \in [13,24] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+y+z, & \text{falls } y+z \in [1,12],\ x+y+z \in [1,12] \\ x+y+z-12, & \text{falls } y+z \in [1,12],\ x+y+z \in [13,24] \\ x+y+z-12, & \text{falls } y+z \in [13,24],\ x+y+z \in [13,24] \\ x+y+z-24, & \text{falls } y+z \in]13,24],\ x+y+z \in [25,36] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+y+z, & \text{falls } x+y+z \in [1,12] \\ x+y+z-12, & \text{falls } x+y+z \in [13,24] \\ x+y+z-24, & \text{falls } x+y+z \in [25,36] \end{cases}$$

Daraus folgt: $(xay)az$

Kommutativiät: $x, y \in U$.

$$xay = \begin{cases} x+y, & \text{falls } x+y \in [1,12] \\ x+y-12, & \text{falls } x+y \in [13,24] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+y, & ... \\ x+y-12, & ... \end{cases}$$

$= yax$

Existenz der Null: $x \in U$ $xa12 = x + 12 - 12 = x$, $12ax = 12 + x - 12 = x$.

Existenz der Negativen: $x \in [1, 11] : x + 12 - x = 12 \in [1, 12]$.
$xa(12 - x) = x + 12 - x = 12$

$12 + 12 = 24 \in [13, 24]$
$12a12 = 12 + 12 - 12 = 12$
Bei der Existenz der Negativen bzw. Null seien beide Seiten zu beachten!

U ist abelsche Gruppe mit Addition $+^u = a$.

Aufgabe 2. Boolsche Algebra

Seien Monoide M_1, M_2. Z.z.: $M_1 \times M_2$ wird ein Monoid.
Mit Multiplikation: $(x_1, x_2)(y_1, y_1) = (x_1y_1, x_2y_2)$.
Sei $m : (M_1 \times M_2) \times (M_1 \times M_2) \to M_1 \times M_2$

$$(x_1, x_2)\ m\ (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2) \text{ für } (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$$

Assoziativität:
Für $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in M_1 \times M_2$ ist
$(x_1, x_2)\ m\ ((y_1, y_2)\ m\ (z_1, z_2))$
$= (x_1, x_2)\ m\ (y_1z_1, y_2z_2)$
$= (x_1(y_1z_1), x_2(y_2z_2)$
$= ((x_1y_1)z_1, (x_2y_2z_2)$
$= (x_1y_1, x_2y_2)\ m\ (z_1, z_2)$
$= ((x_1x_2)\ m\ (y_1, y_2)\ m\ (z_1, z_2)$

Existenz der Eins:
Für $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$.
(1,1) m $(\mathrm{x}_1, x_2) = (1x_1, 1x_2) = (x_1, x_2)$
$(\mathrm{x}_1, x_2)\ m\ (1, 1) = (x_11, x_21) = (x_1, x_1)$
$(1, 1)$ ist neutrales Element in $M_1 \times M_2$ bzgl. m.