WS 2016/17 Simon Kaiser, 354692
Gruppe $\boxed{\mathbf{3}}$ Johannes Salentin, 367543

Diskrete Strukturen
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 48

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\pi \in S_n$ mit $O := [1, n]/\pi$ gegeben.

a

Jede Permutation ist eine Verkettung von Nachbartranspositionen

- Auf einer Bahn finden zyklische Vertauschungen statt. Also braucht man $m-1$ Transpositionen um eine Bahn der Länge m darzustellen. Insgesamt benötigt man somit für eine Permutation die Anzahl von Transpositionen von $\sum\limits_{o \in O}(|o|-1)$, wobei $|o|$ die Länge einer Bahn ist.
- Man kann Transpositionen weiter in Nachbartranspositionen zerlegen. Mit 12.20(b) benötigt man $2 \cdot |i-j| - 1$ Nachbartranspositionen für eine Transposition.
Nach 12.25 ist $Inv((j, j+1)) = \{(j, j+1)\}$ und damit gilt
$|Inv(i, j)| = 2 \cdot |i-j| - 1$ mit $(i, j) \in [1, n] \times [1, n]$.

Da eine Transposition in eine ungerade Anzahl von Nachbartranspositionen zerlegt werden kann und somit eine Transposition eine ungerade Anzahl von Fehlständen erzeugt, ist das Signum -1 für eine ungerade Anzahl von Transpositionen. Jede Permutation $\pi \in S_n$ lässt sich nun durch $\sum_{o \in O}(|o|-1)$ Transpositionen darstellen (1.):

$$sgn(\pi) = (-1)^{\sum_{o \in O}(|o|-1)}.$$

$|o|$ ist die Länge einer Bahn. Ist diese Anzahl gleich 1, so kann diese Bahn einen Fehlstand haben und fällt weg. Es genügt also die Bahnen mit Länge > 1 zu betrachten.

$$(-1)^{\sum_{o \in O}(|o|-1)} = (-1)^{\sum_{o \in O, |o|>1}(|o|-1)}.$$

Außerdem reicht es aus, die Bahnen mit gerader Elementenzahl zu betrachten, da diese durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen dargestellt werden können (1.).
Da $sgn(\pi) = -1$ für ungerade viele Transpositionen, gilt

$$sgn(\pi) = (-1)^{|\{o \in O | |o| ist gerade\}|}.$$

Auf einer einzelnen Bahn werden die Elemente zyklisch vertauscht. Das heißt, eine Bahn der Länge m kann durch $m-1$ Transpositionen dargestellt werden. Wie bereits oben gezeigt, sind Transpositionen ungerade. Mit der Verkettungseigenschaft folgt:

$$sgn(\delta_k) = (-1)^{m_k - 1}, \text{ wobei } \pi = \prod_{k \in [1,|o|]} \delta_k \text{ und } n = \sum_{k \in [1,|o|]} m_k$$

$$\implies sgn(\pi) = \prod_{k \in [1,|o|]} sgn(\delta_k) = \prod_{k \in [1,|o|]} (-1)^{m_k - 1} = (-1)^{\sum_{k \in [1,|o|]} m_k - 1}$$
$$= (-1)^{n-|o|}.$$

Insgesamt gilt folglich:

$$\begin{aligned} sgn(\pi) &= (-1)^{\sum_{o\in O}(|o|-1)} = (-1)^{\sum_{o\in O,|o|>1}(|o|-1)} \\ &= (-1)^{n-|o|} = (-1)^{|\{o\in O||o| \text{ ist gerade}\}|}. \end{aligned}$$

b

$$(i) \iff \pi \text{ ist gerade} \iff |Inv(\pi)| \text{ ist gerade} \iff (-1)^{Inv(\pi)} = 1 = sgn(\pi) \iff (ii).$$

Wenn die Permutation π gerade ist, muss auch die Anzahl der Fehlstände gerade sein. Das bedeutet wiederum, dass $sgn(\pi) = 1$ ist. Also sind die Aussagen (i) und (ii) äquivalent.
Nach Teil a gilt $sgn(\pi) = (-1)^{|\{o\in O||o| \text{ ist gerade}\}|}$. Mit der Voraussetzung (iii) gilt $sgn(\pi) = (-1)^{|\{o\in O||o| \text{ ist gerade}\}|} = 1$, was äquivalent zu (ii) und damit zu (i) ist.
Wenn die Permutation π ein Kompositum einer geraden Anzahl von Transpositionen ist, so muss $\sum\limits_{o\in o}(|o|-1)$ gerade sein (gemäß a).

$$sgn(\pi) = (-1)^{\sum_{o\in O}(|o|-1)} = 1$$

und somit äquivalent zu (ii) und damit zu (i) und (iii). Insgesamt sind folglich die Aussagen $(i) - (iv)$ äquivalent.

Aufgabe 49

Es seien Gruppen G und H gegeben. Ein Gruppenhomomorphismus von G nach H ist eine Abbildung $\varphi : G \to H$ derart, dass für $x, x' \in G$ stets

$$\varphi(x \cdot^G x') = \varphi(x) \cdot^H \varphi(x')$$

gilt, kurz geschrieben als $\varphi(xx') = \varphi(x)\varphi(x')$.
Es seien abelsche Gruppen A und B gegeben. Ein Homomorphismus abelscher Gruppen von A nach B ist ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : A \to B$.

a

- Für $n \in \mathbb{N}_0, \pi \in S_n$ ist $S_n \to S_n, \sigma \mapsto \pi\sigma$ ein Gruppenhomomorphismus.

Zu zeigen ist $\varphi(x \circ x') = \varphi(x) \circ \varphi(x')$.

$$\begin{aligned} &\pi \circ x \circ x' = (\pi \circ x') \\ \iff_{\text{Assoziativgesetz}} &\pi \circ x \circ x' = \pi \circ x \circ \pi \circ x'. \end{aligned}$$

Seien $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\pi \circ x \circ x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \pi \circ x \circ \pi \circ x'.$$

Daraus folgt, dass kein Gruppenhomomorphismus vorliegt.

- Für $n \in \mathbb{N}_0, \pi \in S_n$ ist $S_n \to S_n, \sigma \mapsto \pi\sigma\pi^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus.

Zu zeigen ist $\varphi(x \circ x') = \varphi(x) \circ \varphi(x')$.

$$\begin{aligned} \pi \circ (x \circ x') \circ \pi^{-1} &= (\pi \circ x \circ \pi^{-1}) \circ \pi \circ x' \circ \pi^{-1} \\ \iff_{\text{Ass.ges}} \pi \circ x \circ x' \circ \pi^{-1} &= \pi \circ x \circ \pi^{-1} \circ \pi \circ x' \circ \pi^{-1} \\ \iff \pi \circ x \circ x' \circ \pi^{-1} &= \pi \circ x \circ x' \circ \pi^{-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass ein Gruppenhomomorphismus vorliegt.

- Für $a \in \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto ax$ ein Homomorphismus abelscher Gruppen.

Zu zeigen ist $\varphi(x + x') = \varphi(x) + \varphi(x')$ gelten.

$$\begin{aligned} a + x + x' &= a + x + a + x' \\ \iff_{\text{K.ges}} a + x + x' &\neq a + a + x + x'. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass kein Homomorphismus abelscher Gruppen vorliegt.

b

Es sei ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ gegeben.

- Es ist $\varphi(1) = 1$.
  $1 = \varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) =_{\text{Gr.homo.}} \varphi(1) \cdot \varphi(1) = 1 \ \cdot 1 = 1.$ □
- Für $x \in G$ ist $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.
  $e_H = \varphi(e_G) = \varphi(x \cdot x^{-1}) =_{\text{Gr.homo.}} \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1})$
  $\implies \varphi(x^{-1})$ ist Inverses zu $\varphi(x) \implies \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. □
- Genau dann ist φ injektiv, wenn für $x \in G$ aus $\varphi(x) = 1$ bereits $x = 1$ folgt.
  Gemäß (i) gilt $\varphi(1) = 1$. Injektivität ist erfüllt, wenn $\varphi(x) = \varphi(x') \implies x = x'$. Kein anderes Element darf noch auf 1 abbilden.
  $\varphi(x) = 1 \implies x = 1$. Also bildet nur ein Element auf 1 ab, da $\varphi(1) = 1$ gilt.
- Es ist $lm\ \varphi$ eine Untergruppe von H. $lm\ \varphi = \{\varphi(x) \in H | x \in G\} \subseteq H$.
  Die Gruppenaxiome Assoziativität, die Existenz eines neutralen Elements und die Existenz eines inversen Elements müssen erfüllt sein.
  Assoziativität gilt, da $Im\ \varphi \subseteq H$.
  Neutrales Element ist $\varphi(1) = 1$. Neutrales Element $\varphi(e_G) = e_H$ immer im Bild enthalten.
  Inverses Element ist $\varphi(x^{-1})$ als Inverses zu $\varphi(x)$ (ii) für ein beliebiges $x \in G$.
  Ergo ist $Im\ \varphi$ eine Untergruppe von H.