Tutorium Woche $\boxed{12}$

Aufgabe 60

Es sei ein Körper K gegeben. Ferner seien $A \in K^{4\times 4}, b \in K^{4\times 1}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & -9 \\ -4 & -2 & 4 & -10 \\ -4 & -4 & 4 & -11 \\ 2 & 4 & 4 & 12 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $Sol(A,b)$.
Hinweis. Machen Sie Fallunterscheidungen von der Form "Wenn 2=0 in K ist, dann gilt [...]".

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & -9|5 \\ -4 & -2 & 4 & -10|6 \\ -4 & -4 & 4 & -11|4 \\ 2 & 4 & 4 & 12|-4 \end{pmatrix} add_{2,1,-4}, add_{3,1,-4}, add_{4,1,2}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & -9 & 5 \\ 0 & -2 & 24 & 26 & -14 \\ 0 & -4 & 24 & 25 & -16 \\ 0 & 4 & -6 & -6 & 6 \end{pmatrix} add_{4,2,2}, add_{3,2,-2}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & -9|5 \\ 0 & -2 & 24 & 26|-14 \\ 0 & 0 & -24 & -27|12 \\ 0 & 0 & 42 & 46|-22 \end{pmatrix} add_{4,3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -9|5 \\ 0 & -2 & 24 & 25|-14 \\ 0 & 0 & -24 & -27|12 \\ 0 & 0 & -6 & -8|2 \end{pmatrix} add_{3,4,-4}, sw_{3,4}, mult_{1,-1}, mult2,-1,$$
$$mult_{3,-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 9|-5 \\ 0 & 2 & -24 & -26|14 \\ 0 & 0 & 6 & 8|-2 \\ 0 & 0 & 0 & 5|4 \end{pmatrix}.$$

Sei 2=0 in K.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} add_{4,2,1}\ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$Sol(A,b) = \{ \begin{pmatrix} 1+b \\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} | a, b \in K\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei 3=0 in K.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} add_{1,3,-1}, add_{2,3,-1}, add_{4,3,1}, mult_{2,-1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$Sol(A,b) = \{ \begin{pmatrix} 1+a \\ 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} | a \in K\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $5 = 0$ in K.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $x \in Sol(A, b)$ gilt -1=0 in K. Widerspruch.
$Sol(A, b) = \{\}$.

Sei $2 \neq 0, 3 \neq 0, 5 \neq 0$ in K.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} mult_{4,5^{-1}}, add_{1,4,-1}, add_{2,4,-1^0}, add_{3,4,-1^0} \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5^{-1} \cdot 26 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5^{-1} \cdot 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5^{-1} \cdot 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5^{-1} \cdot 4 \end{pmatrix}.$$

$$Sol(A, b) = \{5^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -26 \\ 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}\}.$$

Aufgabe 61

Es seien ein Körper K und $A \in K^{2 \times 2}$ gegeben. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind.

- (a) Für alle $b \in K^{2 \times 1}$ ist gibt es genau eine Lösung des linearen Gleichungssystems zur erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$.
- (b) Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems zur Koeffizientenmatrix A ist gegeben durch

  $$Sol(A, b) = \{0\}.$$

- (c) Es gilt

  $$A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1} \neq 0.$$

Aufgabe des Tutors

- 4 Vorspeisen
- 6 Hauptgerichte
- 3 Nachspeisen
- Vorspeisen und Nachspeisen nicht notwendig verschieden

2 Personen bestellen:

- Höchstens 2 Vorspeisen
- Höchstens 2 Nachspeisen

- Entweder genau ein Hauptgericht oder 2 verschiedene Hauptgerichte

Sei V die Menge der Vorspeisen, H die Menge Haupgerichte, N die Menge der Nachspeisen.
$B_{Vorspeisen} = MComb_0(V) \uplus MComb_1(V) \uplus MComb_2(V)$.
$B_{Nachspeisen} = MComb_0(N) \cup MComb_1(N) \uplus MComb_2(V)$.
$B_{Hauptgerichte} = Comb_1(H) \uplus Comb_2(H)$.

$B = B_{Vorspeisen} \times B_{Nachspeisen} \times B_{Hauptgerichte}$. Summenregel (16.4), Korollar (16.61), Korollar (16.54):
$|B_{Vorspeisen}| = |MComb_0(V) \uplus MComb_1(V) \uplus MComb_2(V)| =$
$|MComb_0(V)| + |MComb_1(V)| + MComb_2(V)| =$
$\binom{0+4-1}{0} + \binom{1+4-1}{1} + \binom{2+4-1}{2} = \binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} = 1 + 4 + 10 = 15.$

$|B_{Nachspeisen}| = ... = \binom{0+3-1}{0} = \binom{1+3-1}{1} + \binom{2+3-1}{2} = \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2}$
$= 1 + 3 + 6 = 10.$

$|B_{Hauptspeise}| = |Comb_1(H) \uplus Comb_2(H)| = |Comb_1(H)| = |Comb_2(H)|$
$= \binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 6 + 15 = 21.$
$|B| = |B_{Vorspeisen} \times B_{Nachspeisen} \times B_{Hauptgerichte}|$
$= |B_{Vorspeisen}| \cdot |B_{Nachspeisen}| \cdot |B_{Hauptgerichte}| = 15 \cdot 10 \cdot 21 = 3150.$