WS 2016/17 — Simon Kaiser, 354692
Gruppe 3 — Johannes Salentin, 367543

Diskrete Strukturen
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 17

a

Es seien
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, a \mapsto (a-1, 2)$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (b_1, b_2) \mapsto b_1 + b_2$.
Untersuchen Sie, ob die Komposita $g \circ f$ und $f \circ g$ definiert sich und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.
Ja, die Abbildungen sind definiert, denn die Abbildungen f und g sind so gegeben, dass die Zielmenge von f gleich der Startmenge von g ist, und die Zielmenge von g gleich der Startmenge von f ist. Die Komposita $g \circ f$ und $f \circ g$ sind also definiert.

$$g \circ f = g(f(a)) = (a-1) + 2 = a + 1.$$
$$\text{f} \circ g = f(g((b_1, b_2))) = (b_1 + b_2 - 1, 2).$$

b

Zeigen oder widerlegen Sie:
(i)
Für alle Abbildungen $f, g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ gilt $g \circ f = f \circ g$.
Widerlegung durch Gegenbeispiel:
Seien $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 1$
und $g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2$ gegeben.
So ist $g \circ f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2$
und $f \circ g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 1, 3 \mapsto 1, 3 \mapsto 1$ nicht gleich.
Somit ist die Aussage widerlegt.
(ii)
Für alle Abbildungen $f, g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ gilt $g \circ f \neq f \circ g$.
Widerlegung durch Gegenbeispiel:
Seien $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$
und $g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2$ gegeben.
So sind $g \circ f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3$
und $f \circ g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3$ gleich.
Somit ist die Aussage widerlegt.
Insgesamt gibt es aber Abbildungen, für die $g \circ f = f \circ g$ gilt, aber es gibt

auch Abbildungen, für die genau dies nicht gilt, also $g \circ f \neq f \circ g$ ist. Folglich sind beide Aussagen widerlegt.

c

Zu zeigen: Die Abbildung $f : \{0,1\}^{\{0,1\}} \to \{0,1,2,3\}, h \mapsto h_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1$ ist invertierbar.
Die Abbildung ordnet jeder Abbildung mit Start- und Zielmenge $\{0,1\}$ einer Zahl von 0 bis 3 zu. F kann somit auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\text{f:}\{0,1\}^{\{0,1\}} \to \{0,1,2,3\}, &(f_0 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0) \mapsto 0,\\ &(f_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0) \mapsto 1,\\ &(f_2 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1) \mapsto 2,\\ &(f_3 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 1) \mapsto 3.\end{aligned}$$

Sei nun g gegeben mit:

$$\begin{aligned}g : \{0,1,2,3\} \to \{0,1\}^{\{0,1\}}, 0 &\mapsto (f_0 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0),\\ 1 &\mapsto (f_1 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0),\\ 2 &\mapsto (f_2 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1),\\ 3 &\mapsto (f_3 : \{0,1\} \to \{0,1\}, 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 1).\end{aligned}$$

Dann gilt $f \circ g = id_{\{0,1,2,3\}}$ und $g \circ f = id_{\{0,1\}^{\{0,1\}}}$.
Das bedeutet, g ist eine Inverse zu f und folglich ist f auch invertierbar.

Aufgabe 18

$x \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$, $f : X \to X, x \mapsto 4x - 3$
f ist injektiv, falls eine Abbildung g existiert, sodass $g \circ f = id_x$ gilt.
$\left(y = 4x - 3 \iff y + 3 = 4x \iff x = \frac{x+3}{4}\right)$
Sei $g : X \to X, x \mapsto \frac{x+3}{4}$ gegeben. So ist
$g \circ f = g(f(x) = \frac{(4x-3)+3}{4} = \frac{4x}{4} = x = id_x.$ ✓
Somit ist die Abbildung f injektiv.

f ist surjektiv, falls eine Abbildung g existiert, sodass $f \circ g = id_x$.
Sei $g : X \to X, x \mapsto \frac{x+3}{4}$ gegeben. So ist
$f \circ g = f(g(x) = 4(\frac{x+3}{4}) - 3 = x + 3 - 3 = x = id_x.$ ✓
Somit ist die Abbildung f surjektiv.

Insgesamt ist die Abbildung f bijektiv, da sie sowohl injektiv, als auch surjektiv ist und besitzt eine Inverse in g mit $g : x \to x, x \mapsto \frac{x+3}{4}$.