

DISKRETE STRUKTUREN

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 23

Es sei eine Menge X gegeben.

a

Es seien eine Menge I und eine Familie $(c_i)_{i \in I}$ von Äquivalenzrelation auf X gegeben. Für $x, y \in X$ gelte genau dann $x c y$, wenn für $i \in I$ stets $x c_i y$ gilt. Zeigen Sie, dass c eine Äquivalenzrelation auf X ist.

c_i ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn die Reflexivität, Transitivität und Symmetrie von c gilt.

c ist genau dann reflexiv, wenn $x c x$ gilt. c_i sei Äquivalenzrelation auf x , dann gilt $x c_i x$ für alle $i \in I$, da für alle $x \in X$ $x c x$ gilt. ✓

c ist genau dann transitiv, wenn aus $x c y$ und $y c z$ $x c z$ folgt. c_i sei eine Äquivalenzrelation, dann folgt aus $x c_i y$ und $y c_i z$ $x c_i z$, da für alle $x, y, z \in X$ aus $x c y$ und $y c z$ $x c z$ folgt. ✓

c ist genau dann symmetrisch, wenn $x c y$ und $y c x$ gilt. c_i sei eine Äquivalenzrelation, dann gilt dann gilt $x c_i y$ und $y c_i x$ für $i \in I$, da $x c y$ und $y c x$ für $x, y \in X$ gilt. ✓

Da Reflexivität, Transitivität und Symmetrie von c_i soeben bewiesen wurde, ist c_i eine Äquivalenzrelation. □

b

c ist genau dann reflexiv, wenn $x c x$ gilt.

Es existiert ein d aus C so, dass $x d x$ gilt. Da $x d x$ gilt, gilt auch $x c x$ □

c ist genau dann transitiv, wenn aus $x c y$ und $y c z$ $x c z$ folgt.

Es existiert ein d aus C so, dass aus $x d y$ und $y d z$ $x d z$ folgt. Da aus $x d y$ und $y d z$ $x d z$ folgt, folgt auch aus $x c y$ und $y c z$ $x c z$. □

c ist genau dann symmetrisch, wenn $x c y$ und $y c x$ gilt. Es existiert ein d aus C so, dass $x d y$ und $y d x$ gilt. Da $x d y$ und $y d x$ gilt, gilt auch $x c y$ und $y c x$. □

Für jede Äquivalenzrelation d auf X derart, dass für $x, y \in X$ aus $x r y$ stets $x d y$ folgt, folgt für $x, y \in X$ auch aus $x c y$ $x d y$.

Somit gilt $x c y$, wenn $x d y$ gilt. Ebenso gilt $y c z$, wenn $y d z$ gilt. Weil d eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus $x d z$ und $y d z$ $x d z$. Gemäß Definition der Transitivität (4.3a) ist c transitiv und die zweite Bedingung erfüllt. ✓

Aufgabe 24

a

Es sei eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gegeben.

(i) Es sei eine Äquivalenzrelation c auf Y gegeben. Für $x, \tilde{x} \in X$ gelte $x c_f \tilde{x}$ genau dann, wenn $f(x) c f(\tilde{x})$ gilt. Zeigen Sie, dass c_f eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(ii) Folgern Sie, dass $=_f$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

Zur Bedingung (i): Es sei eine Äquivalenzrelation c auf Y gegeben. Für $x, \tilde{x} \in X$ gelte $x c_f \tilde{x}$ genau dann, wenn $f(x) c f(\tilde{x})$ gilt.

$x c_f x$ gilt, wenn $f(x) c f(x)$ gilt. Da c eine Äquivalenzrelation ist, ist dies erfüllt und somit ist c_f reflexiv. ✓

Aus $x c_f y$ und $y c_f z$ folgt $x c_f z$, wenn aus $f(x) c f(y)$ und $f(y) c f(z)$ $f(x) c f(z)$ folgt. Da c eine Äquivalenzrelation ist, ist dies erfüllt und somit ist c_f transitiv. ✓

Aus $x c_f y$ folgt $y c_f x$, wenn aus $f(x) c f(y)$ auch $f(y) c f(x)$ folgt. Da c eine Äquivalenzrelation ist, ist dies erfüllt und somit ist c_f symmetrisch. ✓
 c_f ist also eine Äquivalenzrelation, weil sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. □

Zur Bedingung (ii): Für $x, \tilde{x} \in X$ gilt $x =_f \tilde{x}$, wenn $f(x) = f(\tilde{x})$.

Ersetzen wir nun c und c_f aus a entsprechend mit $=$ und $=_f$, heißt dass es $x =_f \tilde{x}$, wenn $f(x) = f(\tilde{x})$ gilt. Die Äquivalenzrelation $=_f$ ist aber eine konkrete Relation für c_f aus a), wobei '=' eine Äquivalenzrelation, wie c , ist.

b

$T : AF \rightarrow B$

Zur Bildgleichheit: Für $a, b \in AF$ gilt $a =_{\bar{T}} b$, wenn $T(a) = T(b)$ gilt.

Das bedeutet, dass zwei aussagenlogische Formeln in dieser Relation stehen, wenn die potentiellen Wahrheitstabellen beider gleich sind, also die aussagenlogischen Formeln logisch äquivalent sind.

Zum Homomorphiesatz: Es gibt eine induzierte Abbildung $\bar{T} : AF / =_T \rightarrow B$, $[a] \mapsto f(a)$, welche $T = \bar{T} \circ \text{quo}$ erfüllt.

Also gilt für $a, b \in AF$ $a =_T b$, wenn ihre Wahrheitstabellen gleich sind, also die aussagenlogischen Formeln logisch äquivalent sind. Eine Äquivalenzrelation bezüglich $=_T$ entspricht der Gesamtheit der logisch äquivalenten

aussagenlogischen Formeln, wobei die Quotientenmenge $AF / =_T$ die Einteilung in Gruppen von logisch äquivalenten aussagenlogischen Formeln widerspricht. Die Quotientenabbildung $quo : AF \rightarrow AF / =_T$ kann als Zuordnung von aussagenlogischen Formeln zu ihrer Klasse von logisch äquivalenten aussagenlogischen Formeln aufgefasst werden, wobei diesen Klassen durch die induzierte Abbildung $\bar{T} : AF / =_T \rightarrow B$ die entsprechenden Wahrheitstabellen zugeordnet werden.