WS 2016/17 Simon Kaiser, 354692
Gruppe $\boxed{3}$ Johannes Salentin, 367543

Diskrete Strukturen
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 36

a

Es seien ein kommutativer Ring $R, a \in R^{\mathbb{N}}, c \in R^{\mathbb{N}_0}$ und $x \in R^{\mathbb{N}_0}$ mit

$$x_k = \begin{cases} c_0, & \text{für } k = 0, \\ a_k x_{k-1} + c_k, & \text{für } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Formel für x.
Definiert man nun $\sum_0^{-1} := 0$, so lautet eine geschlossene Formel für x:
$\sum_{i=0}^{k-1}[(\prod_{n=l+1}^{k} a_n) \cdot c_l] + c_k$.
Beweis durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$. $x_k = a_k x_{k-1} + ck$.
I.A.
$k = 0 : \sum_{i=0}^{0-1}[(\prod_{n=l+1}^{0} a_n) \cdot c_l] + c_0 = c_0.\checkmark$
$k = 1 : \sum_{i=0}^{1-1}[(\prod_{n=l+1}^{1} a_n) \cdot c_l] + c_1 = a_1 \cdot c_0 + c_1.\checkmark$
I.S.
Für $k \ \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 2$ und $x_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1}[(\prod_{n=l+1}^{k-1} a_n) \cdot c_l] + c_{k-1}$ gilt:

$x_k = a_k xk - 1 + c_k = a_k(\sum_{l=0}^{k-2}[(\prod_{n=l-1}^{k-1} a_n) \cdot c_l] + c_{k-1}) + c_k$
$= \sum_{l=0}^{k-2}[(\prod_{n=l+1}^{k-1} a_n) \cdot c_l \cdot a_k] + c_{k-1} \cdot a_k + c_k$
$= \sum_{l=0}^{k-2}[(\prod_{n=l+1}^{k-1} a_n) \cdot c_l] + c_k$
$= \sum_{l=0}^{k-1}[(\prod_{n=l+1}^{k-1} a_n) \cdot c_l] + c_k$
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die ausgegebene Formel eine geschlossene Formel für x. $\square$

b

Es seien ein kommutativer Ring R, $a \in R$, $c \in R^{\mathbb{N}_0}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $x \in R^{\mathbb{N}_0}$ mit

$$x_k = \begin{cases} c_0, & \text{für } k = 0, \\ ax_{\lfloor k/n \rfloor} + c_k, & \text{für } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ist nun also $x_{n^l} = ax_{n^{l-1}} + c_{n^l}$, so ist $x_{n^l} = \sum_{i=0}^{l}[(\prod_{m=i}^{l} a \cdot c_{\lfloor n^{i-1} \rfloor}] + c_{n^l}$ eine geschlossene Formel für $(x_{n^l})_{l \in \mathbb{N}_0}$.
Beweis per vollständiger Induktion nach $l \in \mathbb{N}_0$.

I.A.

$$\begin{aligned} l = 0 : x_{n^0} &= \sum_{i=0}^{0}[(\prod_{m=i}^{0} a \cdot c_{\lfloor n^{i-1} \rfloor}] + c_{n^0} \\ &= a \cdot c_0 + c_{n^0}. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l = 1 : x_{n^1} &= \sum_{i=0}^{1}[(\prod_{m=i}^{1} a \cdot c_{\lfloor n^{i-1} \rfloor}] + c_{n^1} \\ &= a^2 \cdot c_0 + a \cdot c_{n^0} + c_{n^1}. \checkmark \end{aligned}$$

I.S.
Für $l \geq 2$ und $x_{n^{l-1}} = \sum_{i=0}^{l-1}[(\prod_{m=i}^{l-1} a \cdot c_{\lfloor n^{i-1} \rfloor}] + c_{n^{l-1}}$ gilt

$$\begin{aligned} x_{n^l} = ax_{n^{l-1}} + c_{n^l} = ax_{n^{l-1}} &= \sum_{i=0}^{l-1}[(\prod_{m=i}^{l-1} a \cdot c_{\lfloor n^{i-1} \rfloor}] + c_{n^{l-1}}) + c_{n^l} \\ = x_{n^{l-1}} &= \sum_{i=0}^{l-1}[(\prod_{m=i}^{l-1} a \cdot a \cdot c_{\lfloor n^{i-1} \rfloor}] + a \cdot c_{n^{l-1}} + c_{n^l} \\ = x_{n^l} &= \sum_{i=0}^{l}[(\prod_{m=i}^{l} a \cdot c_{\lfloor n^{i-1} \rfloor}] + c_{n^l}. \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage bewiesen. $\square$

c

Aufgabe 37

Es seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ gegeben durch
$f = 2X^5 - 5X^4 - 11X^3 + 4X2 + 6X - 2$,
$g = 2X^3 - 5X^2 - 9X - 2$.

Es gilt $gcd(f, g) = gcd(g, f \ mod \ g)$.
$(2X^5 - 5X^4 - 11X^3 + 4X2 + 6X - 2)/(2X^3 - 5X^2 - 9X - 2) = X^2 - 1$.
Daraus folgt $2X^5 - 5X^4 - 11X^3 + 4X2 + 6X - 2 = (X^2 - 1)(2X^2 - 5X^2 - 9X - 2) + (X^2 - 3X - 4)$.
$(2X^3 - 5X^2 - 9X - 2)/(X^2 - 3X - 4) = 2X + 1$.
Daraus folgt $2X^3 - 5X^2 - 9X - 2 = (2X + 1)(X^2 - 3X4) + 2X + 2$.

$(X^2 - 3X - 4)/(2X + 2) = 0.5X - 2.$
Daraus folgt $X^2 - 3X - 4 = (2X + 2)(0.5X - 2) + 0.$
Da der Rest der Polynomdivision gleich Null ist, ist $gcd(f, g) = 2X + 2.$

$x_0 := 1,\ x_1 := 0,$
$x_2 := 1,\ \ x_3 := -2X - 1.$
$y_0 := 0,\ \ y_1 := 1,\ \ y_2 := -X^2 + 1,$
$y_3 := 1 - (2X + 1)(-X^2 + 1) = 2X^3 + X^2 - 2X.$
$r_0 := 2X^5 - 5X^4 - 11X^3 + 4X^2 + 6X - 2,$
$r_1 := 2X^3 - 5X^2 - 9X - 2,$
$r_2 := X^2 - 3X - 4,\ \ r_3 := 2X - 2.$

Es folgt also
$2X + 2 = r_3 =$
$(-2X - 1)(2X^5 - 5X^4 - 11X^3 + 4X^2 + 6X - 2) + (2X^3 + X^2 + 2X)(2X^3 - 5X^2 - 9X - 2).$
$\iff X+1 = (-X-0.5)(2X^5-5X^4-11^3+4X^2+6X-2)+(X^3+0.5X^2-X)(2X^3-5X^2-9X-2).$

Also ist $h = x + 1$ und $k = X^3 + 0.5X^2 - X$, wobei $h, k \in \mathbb{Q}[X]$ und $gcd(f, g) = hf + kg$ gilt.