WS 2016/17 Simon Kaiser, 354692
Gruppe $\boxed{3}$ Johannes Salentin, 367543

Diskrete Strukturen

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 53

Es sei $R = \mathbb{Z}$ oder $R = K[X]$ für einen Körper K. Ferner seien $m, a, b \in R$ gegeben.

a

Zeigen Sie, dass es genau dann ein $x \in R$ mit $xa \equiv_m b$ gibt, wenn $gcd(a, m)|b$ gilt.
Zu zeigen: Es gibt genau dann ein $x \in R$ mit $xa \equiv_m b$, wenn $gcd(a, m)|b$.

$$xa \equiv_m b \iff xa = b + ym \iff xa + ym = b.$$

Nach 10.26a besitzt diese Gleichung eine Lösung, wenn $gcd(a, m)|b$ ist. Somit ist die Aussage gezeigt. $\square$

b

Es seien $p, q, r \in R$ mit $a = p \cdot gcd(a, m)$, $m = q \cdot gcd(a, m)$, $b = r \cdot gcd(a, m)$ sowie $x' \in R$ mit $x'p \equiv_q 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\{x \in R | xa \equiv_m b\} = \begin{cases} R, & \text{falls } (a, m) = (0, 0), \\ rx' = Rq, & \text{falls } (a, m) \neq (0, 0) \end{cases}$$

ist.
$x' \in R$ mit $x'p \equiv_q 1$. $xa \equiv_m b \iff xa - ym = b.$
Nach 10.26b gilt:

$$\{(x, y) \in R \times R | xa - ym = b\} = \begin{cases} R \ \times R, & \text{falls } (a, m) = (0, 0), \\ (rx' + zq, ry' - zp), & \text{falls } (a, m) \neq (0, 0) \end{cases}$$

für $z \ \in R$

$$\rightarrow \{x \in R | xa - ym = b\} = \begin{cases} R, & \text{falls } (a, m) = (0, 0), \\ rx' + zq & \text{falls } (a, m) \neq (0, 0) \end{cases}$$

für $z \in R$

$$\implies \{x \in R | xa \equiv_m b\} = \begin{cases} R, & \text{falls } (a, m) = (0, 0), \\ rx' + Rq, & \text{falls } (a, m) \neq (0, 0). \square \end{cases}$$

Damit ist die Aussage gezeigt.

Aufgabe 54

a

Bestimmen Sie einen Restklassenkörper von $\mathbb{F}_2[X]$ mit 16 Elementen. $K[X]/f = \{[r]|K[X]_{< \, deg \, f}\}$ ist eine Transversale gemäß 11.16.
Gesucht ist ein Körper mit $|K|^{deg \, f}$ Elementen, wobei f irreduzibel ist, also keine Nullstellen besitzt.
$F_2[X]/_{X^4+X+1} = \{a + b[X] + c[X]^2 + d[X]^3|a, b, c, d \in F_2\} \implies 2^4 = 16$ Elemente.
$0^4 + 0 + 1 = 1, 1^4 + 1 + 1 = 3 = 1 \implies$ Keine Nullstelle in F_2. Also ist $F_2[X]/_{X^4+X+1}$ ein Körper.

b

Bestimmen Sie einen Restklassenkörper von $\mathbb{F}_4[X]$ mit 16 Elementen.
$F_4[X]/X^2 + 1 = \{a + b[X]|a, b \in \mathbb{F}_4\} \implies 4^2 = 16$ Elemente.
$0^2 + 1 = 1, 1^2 + 1 = 2, 2^2 + 1 = 5 = 1, 3^2 + 1 = 10 = 2, 4^2 + 1 = 15 = 3 \implies$ Keine Nullstelle in $F_4[X]/X^2 + 1$, also liegt ein Körper vor.