Домашнее задание 9. Ступакевич Иван (номер 20 в списке группы)

- Методом Данилевского вычислить характеристический многочлен и все собственные значения матрицы. Используя матрицу преобразований S, вычислите все собственные векторы указанной выше матрицы (если это возможно).

$$A = \begin{bmatrix} -18.0 & 0 & 19.0 \\ 19.0 & 1.00 & -19.0 \\ -38.0 & 0 & 39.0 \end{bmatrix}$$

Решение

Найдём матрицу подобия S, а также приведём матрицу A к форме Фробениуса.

<u>1-я итерация</u>

Т.к. $a_{32} = 0$, то получим нерегулярный случай. Воспользуемся матрицой перестановок $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A' = P_1 A P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 19 & -19 \\ 0 & -18 & 19 \\ 0 & -38 & 39 \end{bmatrix}$$

Теперь получим матрицы M_2, M_2^{-1}

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{32}} & \frac{1}{a_{32}} & -\frac{a_{33}}{a_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{38} & \frac{39}{38} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -38 & 39 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Получим :

$$A_1 = M_2^{-1} A' M_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 21 & -20 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>2-я итерация</u>

Получим 2-й нерегулярный случай, откуда $\Phi_1 = \begin{bmatrix} 21 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, откуда следует, что $|A - \lambda I| = |B - \lambda I||\Phi_1 - \lambda I|$

$$|A - \lambda I| = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 21\lambda + 20) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1, k_1 = 2 \\ \lambda_2 = 20, k_2 = 1 \end{array} \right.$$

Собственные векторы найдём, решая систему $(A - \lambda I)x = 0$, т.к. встретился 2-й нерегулярный случай метода Данилевского. Получим :

$$L_{\lambda_1} : \left[\begin{array}{ccc|c} -19 & 0 & 19 & 0 \\ 19 & 0 & -19 & 0 \\ -38 & 0 & 38 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_{\lambda_1} = L(x_1) + L(x_2)$$

$$L_{\lambda_2} : \left[\begin{array}{ccc|c} -38 & 0 & 19 & 0 \\ 19 & -19 & -19 & 0 \\ -38 & 0 & 19 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow L_{\lambda_2} = L(x_3)$$

Получим собственное пространство, как $L = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3) = L(x_1, x_2, x_3)$

Ответ :

ХМ : $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 21\lambda + 20)$

СЗ : $\lambda_1 = 1, k_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 20, k_2 = 1$

СВ : $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

- Методом Крылова вычислить характеристический многочлен, все собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 42 & 104 & 41 \\ -41 & -103 & -41 \\ 60 & 142 & 61 \end{bmatrix}$$

Решение

Пусть

$$c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = Ac_0 = \begin{bmatrix} 42 \\ -41 \\ 60 \end{bmatrix} \Rightarrow c_2 = Ac_1 = \begin{bmatrix} -40 \\ 41 \\ 358 \end{bmatrix} \Rightarrow c_3 = Ac_2 = \begin{bmatrix} 17262 \\ -17261 \\ 25260 \end{bmatrix}$$

Теперь решим систему :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -40 & 42 & 1 & 17262 \\ 41 & -41 & 0 & -17261 \\ 358 & 60 & 0 & 25260 \end{array}\right]$$

Решая методом Гаусса получим вектор ответов : $q = \begin{bmatrix} 0 \\ 421 \\ -420 \end{bmatrix}$

Тогда получим ХМ матрицы A, равный $|A - \lambda I| = \lambda^3 - 421\lambda + 420 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 = -21 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 20 \end{bmatrix}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - СЗ матрицы A.

Найдём СВ матрицы A.

$$\beta_{i1} = 1,\ \beta_{i2} = \lambda_i - 0,\ \beta_{i3} = \lambda_i^2 - 421$$

Тогда будем находить векторы, являющиеся собственными, вида $x^i = \beta_{i1}c_2 + \beta_{i2}c_1 + \beta_{i3}c_0$

Получим, что

$$x^1 = \begin{bmatrix} -40 \\ 41 \\ 358 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -882 \\ 861 \\ -1260 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -902 \\ 902 \\ -902 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} -40 \\ 41 \\ 358 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42 \\ -41 \\ 60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -420 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -418 \\ 0 \\ 418 \end{bmatrix}$$

$$x^3 = \begin{bmatrix} -40 \\ 41 \\ 358 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 840 \\ -820 \\ 1200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 779 \\ -779 \\ 1558 \end{bmatrix}$$

Получим соотв. собственные подпространства, а также собственные векторы

$$L_{\lambda_1} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right), L_{\lambda_2} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), L_{\lambda_3} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

Ответ :

ХМ : $\lambda^3 - 421\lambda + 420$

СЗ : $\lambda_1 = -21,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 20$

СВ : $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$