Recapitular: Fsica Cuntica

Dirk Hornung

2 de febrero de 2016

Índice general

Capítulo 1

Los postulados de la mecnica cuntica

1.1. Estados Puros

Definition 1. A la mecnica cuantica un estado es un vector $\psi\rangle$ (**vector estado** o **ket**) normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$) en un espacio Hilbert $\mathcal{H}$ comlejo, completo, unitario y separable.

1.2. Observables

Definition 2. Cada observable **A** de un systema fsico se representa en la mecnica cuantica mediante un operador **hermtico** $\tilde{A}$.

1.3.

Capítulo 2

Oscilador Armnico Cuntico

2.1. Problemas

1. Ecuentra las expressiones del los observables x y p en trminos de los operadores a y $a^\dagger$ que permiten escribir l'hamiltoniano armnico unidimensional como $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$. Conviene que utilizas argumentos d'hermitinidad y dimensional.

   Solucion:
   Los operadores escalera estan definida por

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \end{aligned}$$

   As aadiendo y sustraiendo los operadores escalar danos

$$\begin{aligned} a + a^\dagger &= a\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \hat{x}) \Rightarrow \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \\ a - a^\dagger &= a\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{i}{m\omega}\hat{p} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) a \Rightarrow \quad \hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)(a - a^\dagger) \end{aligned}$$

   Ahora vamos a comprobar la dimensionalidad. En general los unidades utilizados para los operadores escalares estan

$$m = kg \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{s} \quad h = \frac{kg \cdot m^2}{s},$$

   porque $h = J \cdot s = N \cdot m \cdot s$ y $k = N/m = kg/s$. As que la comproba de $\hat{x}$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{h}{m\omega}} = \sqrt{\frac{kg \cdot m^2}{s} \cdot kg^{-1} \cdot s} = m$$

y de $\hat{p}$

$$\hat{p} \,=\, \sqrt{hm\omega} \,=\, \sqrt{\frac{kg \cdot m^2}{s} \cdot kg \cdot s^{-1}} \,=\, \frac{kg \cdot m}{s}$$

donde hemos mirado solo trminos importantes, estan hecho facilmente.

2. Utilza los operadores escalar a y $a^\dagger$ para calcular los valores esperados $\langle x\rangle_n$, $\langle p\rangle_n$, $\langle x^2\rangle_n$, $\langle p^2\rangle_n$, $\langle K\rangle_n$, $\langle V\rangle_n$ y los indeterminacines $\langle(\Delta x)^2\rangle_n$, $\langle(\Delta p)^2\rangle_n$ y $\langle(\Delta H)^2\rangle_n$ de el estado estacionario $|n\rangle$ de l'oscilador armnico unidimensional.

   Solucion:
   Recuerdando que los vectores del estado estan orthogonales

$$\langle n|n'\rangle \,=\, \delta_{nn'}$$

   nos podemos calcular $\langle\hat{x}\rangle_n$ y $\langle\hat{p}\rangle_n$ facilmente

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle_n a = \langle n|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|a^\dagger + a|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle n|a^\dagger|\rangle + \langle n|a|n\rangle) \\
a = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle + \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle) = 0, \\
\langle\hat{p}\rangle_n a = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(-i)\langle n|(a - a^\dagger)|n\rangle = 0.
\end{aligned}$$

   Utilizando el operador nmero $N = a^\dagger a$ y el commutador de los operadores escalar

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad\Rightarrow\qquad aa^\dagger = a^\dagger a + 1 = \hat{N} + 1$$

   danos las valores esperados de $\langle\hat{x}^2\rangle_n$ y $\langle\hat{p}^2\rangle_n$

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}^2\rangle_n a = \langle n|\hat{x}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(\langle n|\cancel{a^\dagger a^\dagger} + \underbrace{a^\dagger a}_{\hat{N}} + \underbrace{aa^\dagger}_{\hat{N}+1} + \cancel{aa}|n\rangle \\
a = \frac{\hbar}{2m\omega}(\langle n|2\hat{N}+1|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
\langle\hat{p}^2\rangle_n a = -\frac{\hbar m\omega}{2}[-(2n+1] = \frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1) = \hbar m\omega(n + \frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

   Los valores esperados kintetico $\langle K\rangle_n$ y potencial $\langle V\rangle_n$ estan compuesto de los valores esperados calculado antes, por lo tanto nos podemos escribir

$$\begin{aligned}
\langle K\rangle_n a = \frac{1}{2m}\langle\hat{p}^2\rangle_n \frac{\hbar\omega}{2}\left(n\frac{1}{2}\right) \\
\langle V\rangle_n a = \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle_n = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Por esto $\langle H\rangle_n$ esta dado por

$$\langle H\rangle_n = \langle K\rangle_n + \langle V\rangle_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Por los indeterminaviones nos recuerdamos de la relacin de indeterminacin

$$\Delta A \equiv A - \langle A\rangle \quad \Rightarrow \qquad \langle(\Delta A)^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$$

As los indeterminaciones estan dado por

$$\langle(\Delta x)^2\rangle_n a = \langle x^2\rangle_n - \underbrace{\langle x\rangle_n}_{0} = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\langle(\Delta p)^2\rangle_n a = \langle p^2\rangle_n - \underbrace{\langle p\rangle_n}_{0} = \hbar m\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\langle(\Delta H)^2\rangle_n = \langle H^2\rangle_n - \langle H\rangle_n^2 = 0$$

El ultimo realcin esta verdad porque dando un Hamiltoniano armnico

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \Rightarrow \qquad H^2 = \frac{1}{4m^2}\underbrace{p^4}_{(a-a^\dagger)^4} + \frac{1}{4}m^2\omega^2\underbrace{x^4}_{(a+a^\dagger)^4}$$

as considerado solo x^4

$$\langle x^4\rangle_n = \langle n|(a+a^\dagger)^4|n\rangle = \langle n|(\cancel{aa}+aa^\dagger+a^\dagger a+\cancel{a^\dagger a^\dagger})^2|n\rangle = \langle n|(aa^\dagger+a^\dagger a)^2|n\rangle = \langle n|(aa^\dagger+a^\dagger a)|n\rangle^2$$

repitiendo el mismo processo por p^4 danos como resultado

$$\langle H^2\rangle_n = \langle H\rangle_n^2$$

por lo tanto vemos que la indeterminacion del Hamiltoniano esta cero.

3. Dada la function d'onda de l'estado fundamental del oscilador armnico unidimenional

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

ecuentre l'expresion de $\phi_2(x)$.