

Recapitular: Física Cuántica

Dirk Hornung

4 de febrero de 2016

Índice general

1. Los postulados de la mecánica cuántica	2
1.1. Estados Puros	2
1.2. Observables	2
1.3.	2
2. Oscilador Armónico Cuántico	3
2.1. Problemas	3

Capítulo 1

Los postulados de la mecánica cuántica

1.1. Estados Puros

Definition 1. A la mecánica cuántica un estado es un vector $|\psi\rangle$ (**vector estado** o **ket**) normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$) en un espacio Hilbert \mathcal{H} complejo, completo, unitario y separable.

1.2. Observables

Definition 2. Cada observable A de un sistema físico se representa en la mecánica cuántica mediante un operador **hermítico** \hat{A} .

1.3.

Capítulo 2

Oscilador Armónico Cuántico

2.1. Problemas

1. Encuentra las expresiones de los observables x y p en términos de los operadores a y a^\dagger que permiten escribir el hamiltoniano armónico unidimensional como $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$. Conviene que utilices argumentos de hermiticidad y dimensionalidad.

Solución:

Los operadores escalera están definidos por

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$
$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$

Al sumando y restando los operadores escalera tenemos

$$a + a^\dagger = a \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{x} + \hat{x}) \Rightarrow \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger)$$
$$a - a^\dagger = a \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\frac{i}{m\omega} \hat{p} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) a \Rightarrow \hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (-i)(a - a^\dagger)$$

Ahora vamos a comprobar la dimensionalidad. En general las unidades utilizadas para los operadores escalares están

$$m = \text{kg} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{s} \quad \hbar = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{s},$$

porque $\hbar = J \cdot s = N \cdot m \cdot s$ y $k = N/m = \text{kg}/s$. Así que la comprobación de \hat{x}

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot s} = m$$

y de \hat{p}

$$\hat{p} = \sqrt{\hbar m \omega} = \sqrt{\frac{kg \cdot m^2}{s} \cdot kg \cdot s^{-1}} = \frac{kg \cdot m}{s}$$

donde hemos mirado solo trminos importantes, estan hecho facilmente.

2. Utilza los operadores escalar a y a^\dagger para calcular los valores esperados $\langle x \rangle_n$, $\langle p \rangle_n$, $\langle x^2 \rangle_n$, $\langle p^2 \rangle_n$, $\langle K \rangle_n$, $\langle V \rangle_n$ y los indeterminaciones $\langle (\Delta x)^2 \rangle_n$, $\langle (\Delta p)^2 \rangle_n$ y $\langle (\Delta H)^2 \rangle_n$ de el estado estacionario $|n\rangle$ de l'oscilador armnico unidimensional.

Solucion:

Recordando que los vectores del estado estan orthogonales

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$$

nos podemos calcular $\langle \hat{x} \rangle_n$ y $\langle \hat{p} \rangle_n$ facilmente

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle_n a &= \langle n | \hat{x} | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n | a^\dagger + a | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\langle n | a^\dagger | \rangle + \langle n | a | n \rangle) \\ a &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n+1} \langle n | n+1 \rangle + \sqrt{n} \langle n | n-1 \rangle) = 0, \\ \langle \hat{p} \rangle_n a &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (-i) \langle n | (a - a^\dagger) | n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Utilizando el operador nmero $N = a^\dagger a$ y el commutador de los operadores escalar

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad \Rightarrow \quad aa^\dagger = a^\dagger a + 1 = \hat{N} + 1$$

danos las valores esperados de $\langle \hat{x}^2 \rangle_n$ y $\langle \hat{p}^2 \rangle_n$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle_n a &= \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (\langle n | \cancel{a^\dagger a^\dagger} + \underbrace{a^\dagger a}_{\hat{N}} + \underbrace{aa^\dagger}_{\hat{N}+1} + \cancel{aa} | n \rangle) \\ a &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\langle n | 2\hat{N} + 1 | n \rangle) = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n + 1) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \langle \hat{p}^2 \rangle_n a &= -\frac{\hbar m \omega}{2} [-(2n + 1)] = \frac{\hbar m \omega}{2} (2n + 1) = \hbar m \omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Los valores esperados kintetico $\langle K \rangle_n$ y potencial $\langle V \rangle_n$ estan compuesto de los valores esperados calculado antes, por lo tanto nos podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle K \rangle_n a &= \frac{1}{2m} \langle \hat{p}^2 \rangle_n \frac{\hbar \omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \langle V \rangle_n a &= \frac{1}{2} m \omega^2 \langle x^2 \rangle_n = \frac{1}{2} \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Por esto $\langle H \rangle_n$ esta dado por

$$\langle H \rangle_n = \langle K \rangle_n + \langle V \rangle_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Por los indeterminaciones nos recordamos de la relacion de indeterminacion

$$\Delta A \equiv A - \langle A \rangle \Rightarrow \langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

As los indeterminaciones estan dado por

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x)^2 \rangle_n a &= \langle x^2 \rangle_n - \underbrace{\langle x \rangle_n}_0 = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \langle (\Delta p)^2 \rangle_n a &= \langle p^2 \rangle_n - \underbrace{\langle p \rangle_n}_0 = \hbar m\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \langle (\Delta H)^2 \rangle_n &= \langle H^2 \rangle_n - \langle H \rangle_n^2 = 0 \end{aligned}$$

El ultimo realcin esta verdad porque dando un Hamiltoniano armnico

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Rightarrow H^2 = \frac{1}{4m^2} \underbrace{p^4}_{(a-a^\dagger)^4} + \frac{1}{4}m^2\omega^2 \underbrace{x^4}_{(a+a^\dagger)^4}$$

as considerado solo x^4

$$\langle x^4 \rangle_n = \langle n | (a+a^\dagger)^4 | n \rangle = \langle n | (\cancel{aa} + aa^\dagger + a^\dagger a + \cancel{a^\dagger a^\dagger})^2 | n \rangle = \langle n | (aa^\dagger + a^\dagger a)^2 | n \rangle = \langle n | (aa^\dagger + a^\dagger a) | n \rangle^2$$

repitiendo el mismo processo por p^4 danos como resultado

$$\langle H^2 \rangle_n = \langle H \rangle_n^2$$

por lo tanto vemos que la indeterminacion del Hamiltoniano esta cero.

3. por el estado no estacionario inicial (y sencillo) $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ y cualquier instant de tiempo t.

Solucion:

Primero tenemos que evaluar la evolucin del tiempo del estado no estacionario inicial. Por lo tanto deberiamos calcular la energia del oscilador armnico del estado fundamental y primero estado

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}.$$

As utilizando

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_n \alpha_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle$$

danos la evolucion temporal de $|\psi(t=0)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3i\omega t}{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left(|0\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}}|2\rangle\right)$$

Logicamente por los valores esperados nos tenemos

$$\begin{aligned}\langle\hat{x}\rangle_{\psi(t)} &= \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{i\omega t}{2}}e^{\frac{i\omega t}{2}}\frac{\hbar}{2m\omega}(\langle 0| + e^{i\omega t}\langle 1|)(a + a^\dagger)(e^{i\omega t}|1\rangle + |0\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{-i\omega t}\langle 0|a|1\rangle + e^{i\omega t}\langle 1|a^\dagger|0\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\omega t\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle\hat{p}\rangle_{\psi(t)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)(\langle 0| + e^{i\omega t}\langle 1|)(a - a^\dagger)(e^{-i\omega t}|1\rangle + |0\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)(e^{-i\omega t}\langle 0|a|1\rangle - e^{i\omega t}\langle 1|a^\dagger|0\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{1}{2i}(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) \\ &= -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sin\omega t\end{aligned}$$

4. Dada la function d'onda del estado fundamental del oscilador armnico unidimensional

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

ecuentre l'expresion de $\phi_2(x)$.

Solucion:

Nos podemos escribir el operador escalar a^\dagger en la siguiente forma

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}) \quad \text{con} \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

As

$$(a^\dagger)^2|0\rangle = \sqrt{1}a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \quad \Rightarrow \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger)^2|0\rangle$$

y por lo tanto $\phi_2(x)$ esta dado por

$$|2\rangle = \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0.$$

Empezando con el operador escalar cuadrado

$$(a^\dagger)^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega} (m\omega\hat{x} - i\hat{p})^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega} \left(m\omega\hat{x} - \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega} \left(m^2\omega^2 x^2 + \hbar \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2m\omega\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

donde hemos utilizado el operador momento $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$. Antes de continuar queremos calcular la segunda derivada de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m\omega}{\hbar} x \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2} = \left(-\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2 \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}$$

Por lo tanto ϕ_2 esta dado por

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\hbar m\omega} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left(m^2\omega^2 x^2 + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2m\omega\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\hbar m\omega} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} (m^2\omega^2 x^2 + 2m^2\omega^2 x^2 - m\omega\hbar + m\omega\hbar + m^2\omega^2 x^2) e^{\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2} \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{\sqrt{8}} + \sqrt{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \right) e^{\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2} \end{aligned}$$

5. En la mecánica matricial, ¿cuál es el ket $|x=0\rangle$ que represente un oscilador situada exactamente al origen $x=0$? Distingue entre componentes pares y impares. Compara con los resultados de mecánica ondulatoria.
6. Un estado coherente a $t=0$ está dado por el ket

$$|\alpha_0\rangle e^{\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Encuentre el ket $|\alpha(t)\rangle$ que da su evolución temporal y comprueba que satisfar la ecuación de Schrödinger dependiendo de t .

Solucion:

Empezando por la evolución temporal nos sabemos que los estados del oscilador armónico están dados por

$$|n\rangle \xrightarrow{t} e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle \Rightarrow |n\rangle \xrightarrow{t} e^{i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle$$

Así la evolución temporal de $|\alpha_0\rangle$ está dado por

$$|\alpha_0\rangle \xrightarrow{t} |\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{i\omega n t} |n\rangle.$$

Para comprobar la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle$$

necesitamos de recordarnos de el operador de nmero

$$\hat{N}|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt}|\alpha(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} |n\rangle \right) \\ &= \underbrace{\frac{\hbar\omega}{2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} |n\rangle}_{|\alpha(t)\rangle} + \underbrace{\hbar\omega e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}_{\hat{N}|\alpha(t)\rangle} \\ &= \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) |\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle \end{aligned}$$