Recapitular: Fsica Cuntica

Dirk Hornung

5 de febrero de 2016

Índice general

Capítulo 1

Los postulados de la mecnica cuntica

1.1. Estados Puros

Definition 1. A la mecnica cuantica un estado es un vector $\psi\rangle$ (**vector estado** o **ket**) normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$) en un espacio Hilbert $\mathcal{H}$ comlejo, completo, unitario y separable.

1.2. Observables

Definition 2. Cada observable **A** de un systema fsico se representa en la mecnica cuantica mediante un operador **hermtico** $\tilde{A}$.

1.3.

Capítulo 2

Oscilador Armnico Cuntico

2.1. Problemas

1. Ecuentra las expressiones del los observables x y p en trminos de los operadores a y $a^\dagger$ que permiten escribir l'hamiltoniano armnico unidimensional como $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$. Conviene que utilizas argumentos d'hermitinidad y dimensional.

   Solucion:
   Los operadores escalera estan definida por

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \end{aligned}$$

   As aadiendo y sustraiendo los operadores escalar danos

$$a + a^\dagger = a\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \hat{x}) \Rightarrow \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$$

$$a - a^\dagger = a\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{i}{m\omega}\hat{p} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) a \Rightarrow \quad \hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)(a - a^\dagger)$$

   Ahora vamos a comprobar la dimensionalidad. En general los unidades utilizados para los operadores escalares estan

$$m = kg \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{s} \quad h = \frac{kg \cdot m^2}{s},$$

   porque $h = J \cdot s = N \cdot m \cdot s$ y $k = N/m = kg/s$. As que la comproba de $\hat{x}$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{h}{m\omega}} = \sqrt{\frac{kg \cdot m^2}{s} \cdot kg^{-1} \cdot s} = m$$

y de $\hat{p}$

$$\hat{p} = \sqrt{hm\omega} = \sqrt{\frac{kg \cdot m^2}{s} \cdot kg \cdot s^{-1}} = \frac{kg \cdot m}{s}$$

donde hemos mirado solo trminos importantes, estan hecho facilmente.

2. Utilza los operadores escalar a y $a^\dagger$ para calcular los valores esperados $\langle x\rangle_n$, $\langle p\rangle_n$, $\langle x^2\rangle_n$, $\langle p^2\rangle_n$, $\langle K\rangle_n$, $\langle V\rangle_n$ y los indeterminacines $\langle(\Delta x)^2\rangle_n$, $\langle(\Delta p)^2\rangle_n$ y $\langle(\Delta H)^2\rangle_n$ de el estado estacionario $|n\rangle$ de l'oscilador armnico unidimensional.

   Solucion:
   Recuerdando que los vectores del estado estan orthogonales

   $$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$$

   nos podemos calcular $\langle\hat{x}\rangle_n$ y $\langle\hat{p}\rangle_n$ facilmente

   $$\begin{aligned}\langle\hat{x}\rangle_n a = \langle n|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|a^\dagger + a|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle n|a^\dagger|\rangle + \langle n|a|n\rangle) \\ a = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle + \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle) = 0, \\ \langle\hat{p}\rangle_n a = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(-i)\langle n|(a-a^\dagger)|n\rangle = 0.\end{aligned}$$

   Utilizando el operador nmero $N = a^\dagger a$ y el commutador de los operadores escalar

   $$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad \Rightarrow \quad aa^\dagger = a^\dagger a + 1 = \hat{N} + 1$$

   danos las valores esperados de $\langle\hat{x}^2\rangle_n$ y $\langle\hat{p}^2\rangle_n$

   $$\begin{aligned}\langle\hat{x}^2\rangle_n a = \langle n|\hat{x}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(\langle n|\cancel{a^\dagger a^\dagger} + \underbrace{a^\dagger a}_{\hat{N}} + \underbrace{aa^\dagger}_{\hat{N}+1} + \cancel{aa}|n\rangle \\ a = \frac{\hbar}{2m\omega}(\langle n|2\hat{N}+1|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ \langle\hat{p}^2\rangle_n a = -\frac{\hbar m\omega}{2}[-(2n+1] = \frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1) = \hbar m\omega(n + \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

   Los valores esperados kintetico $\langle K\rangle_n$ y potencial $\langle V\rangle_n$ estan compuesto de los valores esperados calculado antes, por lo tanto nos podemos escribir

   $$\begin{aligned}\langle K\rangle_n a = \frac{1}{2m}\langle\hat{p}^2\rangle_n \frac{\hbar\omega}{2}\left(n\frac{1}{2}\right) \\ \langle V\rangle_n a = \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle_n = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Por esto $\langle H \rangle_n$ esta dado por

$$\langle H \rangle_n = \langle K \rangle_n + \langle V \rangle_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Por los indeterminaviones nos recuerdamos de la relacin de indeterminacin

$$\Delta A \equiv A - \langle A \rangle \quad \Rightarrow \qquad \langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

As los indeterminaciones estan dado por

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle_n a = \langle x^2 \rangle_n - \underbrace{\langle x \rangle_n}_{0} = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle_n a = \langle p^2 \rangle_n - \underbrace{\langle p \rangle_n}_{0} = \hbar m\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\langle (\Delta H)^2 \rangle_n = \langle H^2 \rangle_n - \langle H \rangle_n^2 = 0$$

El ultimo realcin esta verdad porque dando un Hamiltoniano armnico

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad \Rightarrow \qquad H^2 = \frac{1}{4m^2} \underbrace{p^4}_{(a-a^\dagger)^4} + \frac{1}{4} m^2\omega^2 \underbrace{x^4}_{(a+a^\dagger)^4}$$

as considerado solo x^4

$$\langle x^4 \rangle_n = \langle n|(a+a^\dagger)^4|n\rangle = \langle n|(\cancel{aa}+aa^\dagger+a^\dagger a+\cancel{a^\dagger a^\dagger})^2|n\rangle = \langle n|(aa^\dagger+a^\dagger a)^2|n\rangle = \langle n|(aa^\dagger+a^\dagger a)|n\rangle^2$$

repitiendo el mismo processo por p^4 danos como resultado

$$\langle H^2 \rangle_n = \langle H \rangle_n^2$$

por lo tanto vemos que la indeterminacion del Hamiltoniano esta cero.

3. por el estado no estacionario inicial (y sencillo) $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ y cualquier instant de tiempo t.

   Solucion:
   Primero tenemos que evaluar la evolucin del tiempo del estado no esacionario inicial. Por lo tanto deberiamos calcular la energa del oscillador armnico del estado fundamental y primero estado

   $$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}.$$

   As utilizando

   $$|\alpha(t)\rangle = \sum_n \alpha_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|n\rangle$$

danos la evolucin temporal de $|\psi(t=0)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega}{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3i\omega t}{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left(|0\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}}|2\rangle\right)$$

Logicamente por los valores eseperados nos tenemos

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle_{\psi(t)} &= \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\cancel{e^{\frac{-i\omega t}{2}}e^{\frac{i\omega t}{2}}}\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle 0| + e^{i\omega t}\langle 1|\right)(a+a^\dagger)\left(e^{i\omega t}|1\rangle + |0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(e^{-i\omega t}\langle 0|a|1\rangle + e^{i\omega t}\langle 1|a^\dagger|0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\omega t
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle\hat{p}\rangle_{\psi(t)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)\left(\langle 0| + e^{i\omega t}\langle 1|\right)(a-a^\dagger)\left(e^{-i\omega t}|1\rangle + |0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)\left(e^{-i\omega t}\langle 0|a|1\rangle - e^{i\omega t}\langle 1|a^\dagger|0\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{1}{2i}\left(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}\right) \\
&= -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sin\omega t
\end{aligned}$$

4. Dada la function d'onda del estado fundamental del oscilador armnico unidimenional
$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$
ecuentre l'expresion de $\phi_2(x)$.

Solucion:
Nos podemos escribir el operador escalar $a^\dagger$ en la siguiente forma

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}) \quad \text{con} \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

As

$$(a^\dagger)^2|0\rangle = \sqrt{1}a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \quad \Rightarrow \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger)^2|0\rangle$$

y por lo tanto $\phi_2(x)$ esta dado por

$$|2\rangle = \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0.$$

Empezando con el operador escalar cuadrado

$$(a^\dagger)^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega}(m\omega\hat{x} - i\hat{p})^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(m\omega\hat{x} - \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(m^2\omega^2 x^2 + \hbar\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2m\omega\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

donde hemos utilizado el operador momento $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$. Antes de continuar queremos caclular la segunda derivada de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\omega}{\hbar}x\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} = \left(-\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

Por lo tanto ϕ_2 esta dado por

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(m^2\omega^2x^2 + \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2m\omega\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(m^2\omega^2x^2 + 2m^2\omega^2x^2 - m\omega\hbar + m\omega\hbar + m^2\omega^2x^2\right)e^{\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{\sqrt{8}} + \sqrt{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)e^{\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}
\end{aligned}$$

5. En la mecnica matricial, qual es el ket $|x = 0\rangle$ que represente un oscilador situada exactamente al origen $x = 0$? Distinguie entre componentes pares y impares. Compara con los resultados de mecnica ondulatria.

6. Un estado coherente a $t = 0$ esta dado por el ket

$$|\alpha_0\rangle e^{\frac{1}{2}|\alpha_0|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

Ecuentre el ket $|\alpha(t)\rangle$ que da su evolucin temporal y comproba que satisfar la equacin de Schrdingerdependiendo de t.

Solucion:
Empezando por lo evolucin temporal nos sabemos que los estados del oscilador armnico esta dado por

$$|n\rangle \xrightarrow{t} e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|n\rangle \quad \Rightarrow \quad |n\rangle \xrightarrow{t} e^{i\omega(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle$$

As el evolucin temporal de $|\alpha_0\rangle$ esta dado por

$$|\alpha_0\rangle \xrightarrow{t} |\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}e^{i\omega nt}|n\rangle.$$

Para comprobar el ecuacin de Schrdinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle$$

necesitamos de recuerdarnos de el operador de nmero

$$\hat{N}|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d}{dt}|\alpha(t)\rangle &= i\hbar\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\omega nt}|n\rangle\right) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}\underbrace{e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2}e^{-i\frac{i\omega t}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\omega nt}|n\rangle}_{|\alpha(t)\rangle} + \underbrace{\hbar\omega e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle}_{\hat{N}|\alpha(t)\rangle} \\
&= \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+a^\dagger a\right)|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle
\end{aligned}$$

7. Ultilza la regla de commutacin $[a, a^\dagger] = 1$, comprobar que

$$[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1} \quad \text{y} \quad [a^n, a^\dagger] = na^{n-1}.$$

Ademas con los primeros resultatos justifica los relacines

$$[a, f(a^\dagger)] = \frac{df(a\dagger)}{da^\dagger} \quad \text{y} \quad [f(a), a^\dagger] = \frac{df(a)}{da}$$

Solucion:
Para derivar la premiero relacin tenemos que utilizar la inducin mathematica. Empezando por la **iniciacin de la induccin**

Demostración.

$$[a, (a^\dagger)^n] \overset{n\equiv 1}{=} [a, a^\dagger] = 1 \cdot (a^\dagger)^0 = 1$$

Ahora por demonstar el **paso inductive** utilizamos como **hiptesis inductiva** la siguinte relacion

$$[a, (a^\dagger)^k] = k(a^\dagger)^{k-1}.$$

Por lo tanto tenemos que comprobar que

$$[a, (a^\dagger)^{k+1}] \overset{!}{=} (k+1)(a^\dagger)^{(k)}$$

As, utilizando la hiptesis inductiva,

$$\begin{aligned}
[a, a^\dagger(a^\dagger)^k] &= [a, a^\dagger](a^\dagger)^k + a^\dagger[a, (a^\dagger)^k] \\
&= (a^\dagger)^k + a^\dagger k(a^\dagger)^{k-1} \\
&= (k+1)(a^\dagger)^k
\end{aligned}$$

□

Demostración. Por la segunda relacin vamos a utilizar el mismo conzepto de inducin

$$[a^n, a^\dagger] \overset{!}{=} na^{n-1}$$

mathematica. As la **iniciacin de la induccin** esta dado por

$$[a^1, a^\dagger] = 1 \cdot a^0 = 1$$

y aplicar la **hitesis inductiva**

$$[a^k, a^\dagger] = ka^{k-1}$$

danos la comporbacin

$$\begin{aligned}
[a^{k+1}, a^\dagger] &\overset{!}{=} (k+1)a^k \\
[a^{k+1}, a^\dagger] &= [a^k a, a^\dagger] \\
&= a^k \underbrace{[a, a^\dagger]}_{1} + \underbrace{[a^k, a^\dagger]}_{ka^{k-1}} a \\
&= (k+1)a^k
\end{aligned}$$ □

Demostración. Por la tercera relacin

$$[a, f(a^\dagger)] \overset{!}{=} \frac{df(a\dagger)}{da^\dagger}$$

tenemos que haver uso de **serie de Taylor**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^(n)}{n!}(x-a)^n$$

Por esto evaluando la funcion del operador $f(a^\dagger)$ a la posicin $a = 0$ danos

$$f(a^\dagger) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{d^n f(a^\dagger)}{d(a^\dagger)^n} \frac{1}{n!}}_{k_n} (a^\dagger)^n \quad \text{y} \qquad \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^{n-1}$$

As que

$$[a, f(a^\dagger)] = [a, \sum_{n=0}^{\infty} k_n (a^\dagger)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n [a, (a^\dagger)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^{n-1} \quad \square$$

Demostración. Despus de todo por la ultima relacin

$$[f(a), a^\dagger] \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{d^n f(a)}{da^n} \frac{1}{n!}}_{k_n} a^n \quad \text{y} \qquad \frac{df(a)}{da} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n a^{n-1}$$

$$[f(a), a^\dagger] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n [a^n, a^\dagger] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n a^{n-1} = \frac{df(a)}{da} \quad \square$$

8. Encuentre los commutatores

$$[\hat{N}, (a^\dagger)^k] \quad \text{y} \qquad [\hat{N}, a^]$$

Ademas justificar el resultado

$$[\hat{N}, f(a^\dagger)] = a^\dagger \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}$$

Solucion:
Usando los resultados del ejercicio anterior esta facil calculando los resultados de ese problema. En chronologia

$$[\hat{N}, (a^\dagger)^k] = [a^\dagger a, (a^\dagger)^k] = a^\dagger \underbrace{[a, (a^\dagger)^k]}_{k(a^\dagger)^{n-1}} + \underbrace{[a^\dagger, (a^\dagger)^k]}_{0} a = k(a^\dagger)^k$$

$$[\hat{N}, a^k] = [a^\dagger a, a^k] = a^\dagger \underbrace{[a, a^k]}_{0} + \underbrace{[a^\dagger, a^k]a}_{ka^k} = ka^k$$

Y por la relacin de la funcin del operador

$$[\hat{N}, f(a^\dagger)] \stackrel{!}{=} a^\dagger \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}$$

$$f(a^\dagger) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n (a^\dagger)^n \quad \text{y} \qquad \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^{n-1}$$

$$[\hat{N}, f(a^\dagger)] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n [\hat{N}, (a^\dagger)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^n = a^\dagger \frac{df(a^\dagger)}{d(a^\dagger)}$$