

Recapitular: Física Cuántica

Dirk Hornung

15 de febrero de 2016

Índice general

Capítulo 1

Los postulados de la mecánica cuántica

1.1. Estados Puros

Definition 1. A la mecánica cuántica un estado es un vector $|\psi\rangle$ (**vector estado** o **ket**) normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$) en un espacio Hilbert \mathcal{H} complejo, completo, unitario y separable.

1.2. Observables

Definition 2. Cada observable \mathbf{A} de un sistema físico se representa en la mecánica cuántica mediante un operador **hermítico** \hat{A} .

1.3.

Capítulo 2

Oscilador Armónico Cuántico

2.1. Problemas

Full1: 1 Encuentra las expresiones de los observables x y p en términos de los operadores a y a^\dagger que permiten escribir el hamiltoniano armónico unidimensional como $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$. Conviene que utilices argumentos de hermiticidad y dimensional.

Solucin:

Los operadores escalera están definidos por

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$
$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$

Al sumando y restando los operadores escalera danos

$$a + a^\dagger = a \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{x} + \hat{x}) \Rightarrow \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger)$$
$$a - a^\dagger = a \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\frac{i}{m\omega} \hat{p} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) a \Rightarrow \hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (-i)(a - a^\dagger)$$

Ahora vamos a comprobar la dimensionalidad. En general las unidades utilizadas para los operadores escalares están

$$m = \text{kg} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{s} \quad \hbar = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{s},$$

porque $\hbar = J \cdot s = N \cdot m \cdot s$ y $k = N/m = \text{kg}/s$. Así que la comprobación de \hat{x}

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{s}} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot s = m$$

y de \hat{p}

$$\hat{p} = \sqrt{\hbar m \omega} = \sqrt{\frac{kg \cdot m^2}{s} \cdot kg \cdot s^{-1}} = \frac{kg \cdot m}{s}$$

donde hemos mirado solo trminos importantes, estan hecho facilmente.

Full1: 2 Utilza los operadores escalar a y a^\dagger para calcular los valores esperados $\langle x \rangle_n$, $\langle p \rangle_n$, $\langle x^2 \rangle_n$, $\langle p^2 \rangle_n$, $\langle K \rangle_n$, $\langle V \rangle_n$ y los indeterminaciones $\langle (\Delta x)^2 \rangle_n$, $\langle (\Delta p)^2 \rangle_n$ y $\langle (\Delta H)^2 \rangle_n$ de el estado estacionario $|n\rangle$ de l'oscilador armnico unidimensional.

Solucin:

Recordando que los vectores del estado estan orthogonales

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$$

nos podemos calcular $\langle \hat{x} \rangle_n$ y $\langle \hat{p} \rangle_n$ facilmente

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle_n a &= \langle n | \hat{x} | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n | a^\dagger + a | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\langle n | a^\dagger | \rangle + \langle n | a | n \rangle) \\ a &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n+1} \langle n | n+1 \rangle + \sqrt{n} \langle n | n-1 \rangle) = 0, \\ \langle \hat{p} \rangle_n a &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (-i) \langle n | (a - a^\dagger) | n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Utilizando el operador nmero $N = a^\dagger a$ y el commutador de los operadores escalar

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad \Rightarrow \quad aa^\dagger = a^\dagger a + 1 = \hat{N} + 1$$

danos las valores esperados de $\langle \hat{x}^2 \rangle_n$ y $\langle \hat{p}^2 \rangle_n$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle_n a &= \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (\langle n | \underbrace{a^\dagger a^\dagger}_{\hat{N}} + \underbrace{a^\dagger a}_{\hat{N}+1} + \underbrace{aa^\dagger}_{\hat{N}+1} + \underbrace{aa}_{\hat{N}} | n \rangle) \\ a &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\langle n | 2\hat{N} + 1 | n \rangle) = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n + 1) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \langle \hat{p}^2 \rangle_n a &= -\frac{\hbar m \omega}{2} [-(2n + 1)] = \frac{\hbar m \omega}{2} (2n + 1) = \hbar m \omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Los valores esperados kintetico $\langle K \rangle_n$ y potencial $\langle V \rangle_n$ estan compuesto de los valores esperados calculado antes, por lo tanto nos podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle K \rangle_n a &= \frac{1}{2m} \langle \hat{p}^2 \rangle_n \frac{\hbar \omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \langle V \rangle_n a &= \frac{1}{2} m \omega^2 \langle \hat{x}^2 \rangle_n = \frac{1}{2} \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Por esto $\langle H \rangle_n$ esta dado por

$$\langle H \rangle_n = \langle K \rangle_n + \langle V \rangle_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Por los indeterminaciones nos recordamos de la relacion de indeterminacion

$$\Delta A \equiv A - \langle A \rangle \Rightarrow \langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

As los indeterminaciones estan dado por

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x)^2 \rangle_n &= \langle x^2 \rangle_n - \underbrace{\langle x \rangle_n}_0 = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \langle (\Delta p)^2 \rangle_n &= \langle p^2 \rangle_n - \underbrace{\langle p \rangle_n}_0 = \hbar m\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \langle (\Delta H)^2 \rangle_n &= \langle H^2 \rangle_n - \langle H \rangle_n^2 = 0 \end{aligned}$$

El ultimo realcin esta verdad porque dando un Hamiltoniano armnico

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Rightarrow H^2 = \frac{1}{4m^2} \underbrace{p^4}_{(a-a^\dagger)^4} + \frac{1}{4}m^2\omega^2 \underbrace{x^4}_{(a+a^\dagger)^4}$$

as considerado solo x^4

$$\langle x^4 \rangle_n = \langle n | (a+a^\dagger)^4 | n \rangle = \langle n | (\cancel{aa} + aa^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger \cancel{a^\dagger})^2 | n \rangle = \langle n | (aa^\dagger + a^\dagger a)^2 | n \rangle = \langle n | (aa^\dagger + a^\dagger a) | n \rangle^2$$

repetiendo el mismo processo por p^4 danos como resultado

$$\langle H^2 \rangle_n = \langle H \rangle_n^2$$

por lo tanto vemos que la indeterminacion del Hamiltoniano esta cero. _____

Full1: 3 Por el estado no estacionario inicial (y sencillo) $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ y cualquier instant de tiempo t.

Solucin:

Primero tenemos que evaluar la evolucion del tiempo del estado no estacionario inicial. Por lo tanto deberiamos calcular la energia del oscilador armnico del estado fundamental y primero estado

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}.$$

As utilizando

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_n \alpha_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle$$

danos la evolucion temporal de $|\psi(t=0)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3i\omega t}{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left(|0\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}}|2\rangle\right)$$

Logicamente por los valores esperados nos tenemos

$$\begin{aligned}\langle\hat{x}\rangle_{\psi(t)} &= \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{i\omega t}{2}}e^{\frac{i\omega t}{2}}\frac{\hbar}{2m\omega}(\langle 0| + e^{i\omega t}\langle 1|)(a + a^\dagger)(e^{i\omega t}|1\rangle + |0\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{-i\omega t}\langle 0|a|1\rangle + e^{i\omega t}\langle 1|a^\dagger|0\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\omega t\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle\hat{p}\rangle_{\psi(t)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)(\langle 0| + e^{i\omega t}\langle 1|)(a - a^\dagger)(e^{-i\omega t}|1\rangle + |0\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)(e^{-i\omega t}\langle 0|a|1\rangle - e^{i\omega t}\langle 1|a^\dagger|0\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{1}{2i}(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) \\ &= -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sin\omega t\end{aligned}$$

Full1: 4 Dada la function d'onda del estado fundamental del oscilador armnico unidimensional

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

ecuentre l'expresion de $\phi_2(x)$.

Solucin:

Nos podemos escribir el operador escalar a^\dagger en la siguiente forma

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}) \quad \text{con} \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

As

$$(a^\dagger)^2|0\rangle = \sqrt{1}a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \quad \Rightarrow \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger)^2|0\rangle$$

y por lo tanto $\phi_2(x)$ esta dado por

$$|2\rangle = \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0.$$

Empezando con el operador escalar cuadrado

$$(a^\dagger)^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega}(m\omega\hat{x}-i\hat{p})^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(m\omega\hat{x}-\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(m^2\omega^2x^2+\hbar\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2m\omega\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

donde hemos utilizado el operador momento $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$. Antes de continuar queremos caclular la segunda derivada de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\omega}{\hbar}x\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} = \left(-\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

Por lo tanto ϕ_2 esta dado por

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(m^2\omega^2x^2+\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2m\omega\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(m^2\omega^2x^2+2m^2\omega^2x^2-m\omega\hbar+m\omega\hbar+m^2\omega^2x^2\right)e^{\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{\sqrt{8}}+\sqrt{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)e^{\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\end{aligned}$$

Full1: 7 En la mecánica matricial, ¿cuál es el ket $|x=0\rangle$ que represente un oscilador situada exactamente al origen $x=0$? Distingue entre componentes pares e impares. Compara con los resultados de mecánica ondulatoria.

Aplicar el operador \hat{x} al eigenket $|x=0\rangle$ lógicamente danos

$$\hat{x}|x=0\rangle \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x}|x=0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)|x=0\rangle = 0$$

En la forma del matrix podemos escribir los operadores escalar como

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la suma esta dado por

$$(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|x=0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

Ya tenemos un systema de ecuaciones que podemos resolver por los coeficientes c_n

$$c_1 = 0, \quad c_0 + \sqrt{2}c_2 = 0, \quad \sqrt{2}c_2 + c_3 = 0, \quad \sqrt{3}c_2 + \sqrt{4}c_4 = 0$$

en consecuencia todo los c_n con un index impar estan zero

$$c_{n+1} = 0 \quad \text{con} \quad n \in 1, 2, 3, \dots$$

De hecho el systema de ecuaciones danos por los c_n con un index par

$$c_2 = \frac{-c_0}{\sqrt{2}}, \quad c_4 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}c_2 = \frac{3}{8}c_0, \quad c_6 = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{48}}c_0, \quad \dots$$

Ademas, para encontrar la solution que obadece la mecanica cuantica, tenemos que normalizar el eigenket con la introducin de un factor der normalizacin N . Como podemos ver todos los coeficientes c_n con un index par dependen de c_0 entonces solo tenemos que normalizarlo

$$\frac{c_0}{N} = 1$$

y el resto esta dado por

$$\langle x=0|x=0\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |x=0\rangle = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\right) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

El eigenket $|x=0\rangle$ corresponde a una serie dado por

$$\frac{1}{N}C_{2n} = (-)^n \sqrt{\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}}$$

normalization problem

Full1: 10 Un estado coherente a $t = 0$ esta dado por el ket

$$|\alpha_0\rangle e^{\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Ecuentre el ket $|\alpha(t)\rangle$ que da su evolucion temporal y compraba que satisfacer la ecuacin de Schrödinger dependiendo de t .

Empezando por lo evolucion temporal nos sabemos que los estados del oscilador armónico esta dado por

$$|n\rangle \xrightarrow{t} e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle \Rightarrow |n\rangle \xrightarrow{t} e^{i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle$$

As el evolucion temporal de $|\alpha_0\rangle$ esta dado por

$$|\alpha_0\rangle \xrightarrow{t} |\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{i\omega n t} |n\rangle.$$

Para comprobar el ecuacin de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle$$

necesitamos de recordarnos de el operador de número

$$\hat{N}|n\rangle = a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} |n\rangle \right) \\ &= \underbrace{\frac{\hbar\omega}{2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} |n\rangle}_{|\alpha(t)\rangle} + \underbrace{\hbar\omega e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}_{\hat{N}|\alpha(t)\rangle} \\ &= \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) |\alpha(t)\rangle = H |\alpha(t)\rangle \end{aligned}$$

Full1bis: 1 Utiliza la regla de conmutacin $[a, a^\dagger] = 1$, comprobar que

$$[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1} \quad \text{y} \quad [a^n, a^\dagger] = n a^{n-1}.$$

Ademas con los primeros resultados justifica las relaciones

$$[a, f(a^\dagger)] = \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} \quad \text{y} \quad [f(a), a^\dagger] = \frac{df(a)}{da}$$

Solucin:

Para derivar la primera relacion tenemos que utilizar la induccion mathematica. Empezando por la **iniciacion de la induccion**

Demostración.

$$[a, (a^\dagger)^n] \stackrel{n=1}{=} [a, a^\dagger] = 1 \cdot (a^\dagger)^0 = 1$$

Ahora por demostrar el **paso inductivo** utilizamos como **hipotesis inductiva** la siguiente relacion

$$[a, (a^\dagger)^k] = k(a^\dagger)^{k-1}.$$

Por lo tanto tenemos que comprobar que

$$[a, (a^\dagger)^{k+1}] \stackrel{!}{=} (k+1)(a^\dagger)^k$$

As, utilizando la hipotesis inductiva,

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger (a^\dagger)^k] &= [a, a^\dagger] (a^\dagger)^k + a^\dagger [a, (a^\dagger)^k] \\ &= (a^\dagger)^k + a^\dagger k (a^\dagger)^{k-1} \\ &= (k+1)(a^\dagger)^k \end{aligned} \quad \square$$

Demostración. Por la segunda relacion vamos a utilizar el mismo concepto de induccion

$$[a^n, a^\dagger] \stackrel{!}{=} n a^{n-1}$$

mathematica. As la **iniciacion de la induccion** esta dado por

$$[a^1, a^\dagger] = 1 \cdot a^0 = 1$$

y aplicar la **hipotesis inductiva**

$$[a^k, a^\dagger] = k a^{k-1}$$

demostramos la comprobacion

$$\begin{aligned} [a^{k+1}, a^\dagger] &\stackrel{!}{=} (k+1)a^k \\ [a^{k+1}, a^\dagger] &= [a^k a, a^\dagger] \\ &= a^k \underbrace{[a, a^\dagger]}_1 + \underbrace{[a^k, a^\dagger]}_{k a^{k-1}} a \\ &= (k+1)a^k \end{aligned} \quad \square$$

Demostración. Por la tercera relacion

$$[a, f(a^\dagger)] \stackrel{!}{=} \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}$$

tenemos que haber usado de **serie de Taylor**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Por esto evaluando la funcion del operador $f(a^\dagger)$ a la posicin $a = 0$ danos

$$f(a^\dagger) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{d^n f(a^\dagger)}{d(a^\dagger)^n} \frac{1}{n!}}_{k_n} (a^\dagger)^n \quad \text{y} \quad \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^{n-1}$$

As que

$$[a, f(a^\dagger)] = [a, \sum_{n=0}^{\infty} k_n (a^\dagger)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n [a, (a^\dagger)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^{n-1} \quad \square$$

Demostración. Despues de todo por la ultima relacin

$$[f(a), a^\dagger] \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{d^n f(a)}{da^n} \frac{1}{n!}}_{k_n} a^n \quad \text{y} \quad \frac{df(a)}{da} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n a^{n-1}$$

$$[f(a), a^\dagger] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n [a^n, a^\dagger] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n a^{n-1} = \frac{df(a)}{da} \quad \square$$

Full1bis: 2

Encuentre los commutadores

$$[\hat{N}, (a^\dagger)^k] \quad \text{y} \quad [\hat{N}, a]$$

Ademas justificar el resultado

$$[\hat{N}, f(a^\dagger)] = a^\dagger \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}$$

Solucin:

Usando los resultados del ejercicio anterior esta facil calculando los resultados de ese problema. En chronologia

$$[\hat{N}, (a^\dagger)^k] = [a^\dagger a, (a^\dagger)^k] = a^\dagger \underbrace{[a, (a^\dagger)^k]}_{k(a^\dagger)^{k-1}} + \underbrace{[a^\dagger, (a^\dagger)^k]}_0 a = k(a^\dagger)^k$$

$$[\hat{N}, a^k] = [a^\dagger a, a^k] = a^\dagger \underbrace{[a, a^k]}_0 + \underbrace{[a^\dagger, a^k]}_{ka^k} a = ka^k$$

Y por la relacin de la funcin del operador

$$[\hat{N}, f(a^\dagger)] \stackrel{!}{=} a^\dagger \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}$$

$$f(a^\dagger) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n (a^\dagger)^n \quad \text{y} \quad \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^{n-1}$$

$$[\hat{N}, f(a^\dagger)] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n [\hat{N}, (a^\dagger)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^{n-1} = a^\dagger \frac{df(a^\dagger)}{d(a^\dagger)}$$

Fullbis 4: Un estado coherente es definida por el operador de subida actuando on un estado propio de α

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Escribiendo este estado en la base propia de los energias

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

encuentre la relacin de recurrencia que cumplen los coeficients c_n . Observa que estan todos fijados excepte el pimer c_0 que fija la normalizacin.

Solucin:

Combinando los dos relacines

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle \sum_{n=n+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \stackrel{!}{=} \sum_n \alpha c_n |n\rangle$$

donde hemos utilizado la ecuacin del estado coharente otra vez en el ultimo trmino. Logicamente nos da la relacin

$$c_{n+1} \sqrt{n+1} = \alpha c_n \quad \Rightarrow \quad c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n.$$

Ahora tenemos la relacon de recurrencia que cumplen los coeficientes c_n . Pues tambien queremos que calcular el estado $|\alpha\rangle$ para quien nos necesitamos una relacin por c_n . Escribiendo unas ejemplos de la relacin de recurrencia

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0 \\ c_2 &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} c_1 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1 \cdot 2}} c_0 \\ c_3 &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}} c_2 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2 \cdot 3}} c_1 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3}} c_0 \\ &\vdots \\ c_n &\stackrel{!}{=} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \end{aligned}$$

Logicamente todos los coeficientes c_n estan fijados excepte el primer c_0 con que vamos a fijar la normalizacin luego. Para comprobar la relacin de c_n vamos a usar la induccin mathematica otra vez. Por $n = 1$ lo sabemos que esta ciert y con la **hiptesis inductiva**

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

podemos facilmente comprobar que la presuncin para c_n esta cierto tambien

$$c_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n+1}!} c_0 \quad \square$$

donde hemos facilmente usado la hiptesis inductiva. As por nuestro estado $|\alpha\rangle$ podemos escribir

$$|\alpha\rangle c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}!} |n\rangle.$$

Ahora vamos a normalizarlo para encontrar el valor de c_0

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} n! \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad |c_0| = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

donde hemos usado la serie de la funcin exponencial, dado por

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}!}.$$

Pues por final tenemos

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}!} |n\rangle.$$

Full1bis: 9 Escribe el estado coherente $|\alpha\rangle$ como el estado $f(a^\dagger)|0\rangle$ (por simplicidad suponemos que $\alpha \in \mathcal{R}$). Utilizad el resultado del problema 1, demuestra que la funcin $f(a^\dagger)$ cumple la equacin

$$\frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} - \alpha f(a^\dagger) = 0$$

Integradla y encontrad la constant de normalizacin por econtrar que un estado coherent se puede escribir como

$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle$$

Solucin:

El ejercicio nos dice que el ket $|\alpha\rangle$ esta dado por

$$|\alpha\rangle = f(a^\dagger)|0\rangle$$

Ahora queremos que comprobar la siguiente relacin

$$\underbrace{\frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}}_{[a, f(a^\dagger)]} - \alpha f(a^\dagger) \stackrel{!}{=} 0$$

donde hemos utilizado el resultado del ejercicio *Full1bis* : 1. Para comprobarlo multiplicamos la relación con $|0\rangle$ de la derecha

$$a \underbrace{f(a^\dagger)|0\rangle}_\alpha - f(a^\dagger) \underbrace{a|0\rangle}_0 - \alpha \underbrace{f(a^\dagger)|0\rangle}_{|\alpha\rangle} = a|\alpha\rangle - \alpha|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle - \alpha|\alpha\rangle = 0 \quad \square$$

donde hemos utilizado que $|\alpha\rangle$ es un estado coherente.

Por el segundo parte del ejercicio queremos integrar la ecuación diferencial

$$\frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} = \alpha f(a^\dagger) \Rightarrow f(a^\dagger) = C e^{\alpha a^\dagger}$$

Para conseguir el valor de C vamos a normalizar el estado $|\alpha\rangle$ dado por

$$|\alpha\rangle = f(a^\dagger)|0\rangle = C e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle \quad \text{y} \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1$$

Por lo tanto la normalización está dado por

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = C^2 \langle 0| e^{\alpha a} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle$$

Aquí queremos que introduzcamos la fórmula de **Baker-Campbell-Hausdorff** dado por

$$e^A e^B = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B])$$

Por eso podemos escribir

$$e^{\alpha a} e^{\alpha a^\dagger} = \exp(\alpha a + \alpha a^\dagger + \underbrace{\frac{\alpha^2}{2}[a, a^\dagger]}_1) = \exp(\alpha a + \alpha a^\dagger) \exp(\frac{\alpha^2}{2})$$

$$e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha a} = \exp(\alpha a^\dagger + \alpha a + \underbrace{\frac{\alpha}{2}[a^\dagger, a]}_{-1}) = \exp(\alpha a^\dagger + \alpha a) \exp(-\frac{\alpha^2}{2}).$$

Nota que podemos cambiar el orden de los operadores escalares en las funciones exponenciales a las derechas. Así podemos escribir

$$e^{\alpha a} e^{\alpha a^\dagger} = e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha a} e^{\alpha^2}$$

que tiene los operadores a a la derecha. El orden de los operadores escalares va a ser importante por los siguientes pasos. Por lo tanto podemos continuar con la normalización

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\alpha\rangle &= C^2 \langle 0| e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \\ &= C^2 \langle 0| e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha a} e^{\alpha^2} |0\rangle \\ &= C^2 e^{\alpha^2} \langle 0| e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha a} |0\rangle \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que

$$\langle 0| e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha a} |0\rangle = 1$$

Para comprobar la relacion arriba expandemos las funcines exponenciales

$$e^{\alpha a} = 1 + \alpha a + \frac{\alpha^2 a^2}{2} + \dots e^{\alpha a^\dagger} = 1 + \alpha a^\dagger + \frac{\alpha^2 (\alpha^\dagger)^2}{2} + \dots$$

Asi podemos escribir el bracket como

$$\begin{aligned}\langle 0|e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha a}|0\rangle &= \langle 0|(1 + \alpha a^\dagger + \dots)(1 + \alpha a + \dots)|0\rangle \\ &= \langle 0|0\rangle + \cancel{\langle 0|\alpha a|0\rangle} + \cancel{\langle 0|\alpha a^\dagger|0\rangle} + \cancel{\langle 0|\alpha^2 a^\dagger a|0\rangle} + \dots \\ &= \langle 0|0\rangle = 1\end{aligned}$$

porque los operadores a siempre estan al lado directo y en consecuencia el valor esperado desaparece. Despues de todo tenemos el valor

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = 1 = C^2 e^{\alpha^2} \Rightarrow C = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

por C y asi tambien el valor

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle$$

Full1bis: 9 Calcula $\langle 0|e^{ik\hat{x}}|0\rangle$ y comprueba que podemos escribirlo como $e^{-\frac{k^2}{2}} \langle 0|\hat{x}^2|0\rangle$. A partir de esta relacin encuentra el valor de $\langle 0|\hat{x}^{2n}|0\rangle$.

Aqui queremos empezar con la segunda parte de ese ejercicio. En general queremos comprobar la siguiente relacin

$$\langle 0|\hat{x}^{2n}|0\rangle \stackrel{!}{=} (2n-1)!! \langle 0|\hat{x}^2|0\rangle^n$$

Nota que tenemos una falcultad doble que esta en general dado por

$$n!! \equiv \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 & n > 0(\text{par}) \\ n \cdot (n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 & n > 0(\text{impar}) \\ 1 & n = -1, 0 \end{cases}$$

Admas vamos a utilizar la teorema fundamental del del clculo, en la forma siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-cx^{2n}} = \left(-\frac{d}{dc}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^{2n}}.$$

Antes de hacer la comprobacin evaluamos la siguiente relacion

$$\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \langle 0|\hat{x}^2|x\rangle \langle x|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\langle 0|x\rangle|^2$$

Aqui podemos ver la funcion de onda de oscilador armnico en el estado fundamental esta dado por

$$\langle x|0\rangle = \phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$|\langle x|0\rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}_{\sqrt{c}} \exp\left(-\frac{1}{2} \underbrace{\frac{m\omega}{\hbar}}_c x^2\right)$$

Asi tenemos

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle &= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-cx^2} \\ &= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{d}{dc}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} \\ &= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{d}{dc}\right) \sqrt{\frac{\pi}{c}} = \frac{\sqrt{c}}{2} \frac{1}{c^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2c}\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el integral de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

Es valor tambien danos

$$\langle 0|x^2|0\rangle^n = \frac{1}{2^n c^n}$$

que vamos a necesitar en poco tiempo. Ahora queremos comprobar la relacion inicial. Por eso encontramos una serie para $\langle 0|x^{2n}|0\rangle$

$$\begin{aligned}\langle 0|x^{2n}|0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\langle 0|\hat{x}^{2n}|x\rangle}_{\phi_0(x)} \underbrace{\langle x|0\rangle}_{\phi_0(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} \underbrace{|\langle x|0\rangle|^2}_{\phi_0(x)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left(-\frac{d}{dc}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-cx^2} \\ &= \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left(-\frac{d}{dc}\right)^n \sqrt{\frac{\pi}{c}} = \sqrt{c} \left(-\frac{d}{dc}\right)^n \frac{1}{\sqrt{c}}\end{aligned}$$

Ahora queremos calcular el ultimo termino por diferentes n

$$\frac{n : \left| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{c} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ \frac{3}{4} \frac{1}{c^2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 3 \\ \frac{15}{8} \frac{1}{c^3} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 4 \\ \frac{105}{16} \frac{1}{c^4} \end{array} \right| \left\} \Rightarrow \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n} \frac{1}{c^n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n c^n}$$

Asi con el valor de $\langle 0|\hat{x}|0\rangle$ podemos comprobar que

$$\langle 0|\hat{x}^{2n}|0\rangle = (2n-1)!! \frac{1}{2^n c^n} = (2n-1)!! \langle 0|\hat{x}^2|0\rangle^n$$

Por el primer parte del ejercicio ahora podemos comprobar que

$$\langle 0|e^{ik\hat{x}}|0\rangle = e^{-\frac{k^2}{2}} \langle 0|\hat{x}^2|0\rangle$$

Por el valor esperado podemos expandir como

$$\langle 0|e^{ik\hat{x}}|0\rangle = \langle 0|1 - \frac{k^2\hat{x}^2}{2!} + \frac{k^4\hat{x}^4}{4!} - \frac{k^6\hat{x}^6}{6!} + \frac{k^8\hat{x}^8}{8!} + \dots |0\rangle,$$

donde hemos utilizado que cada valor espereado que tiene un operador \hat{x} par esta zero

$$\langle 0|\hat{x}^{(2n+1)}|0\rangle = 0$$

As podemos escribir

$$\begin{aligned}\langle 0|e^{ik\hat{x}}|0\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{k^{2n}}{(2n)!} \underbrace{\langle 0|\hat{x}^{2n}|0\rangle}_{(2n-1)!! \langle 0|\hat{x}^2|0\rangle^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} (-)^n k^{2n} \langle 0|x^2|0\rangle^n\end{aligned}$$

Aqui queremos encontrar una otra forma para escribir el facultat doble

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} = \frac{(2n)^{\underline{n}}}{2^n (2n)!} = \frac{n!}{2^n (2n)!} \underbrace{\frac{(2n)^{\underline{n}}}{n!}}_{\binom{2n}{n}} = \frac{\cancel{n!}}{2^n \cancel{(2n)!} \cancel{n!}} = \frac{1}{2^n n!}$$

donde hemos utilizado el binomial

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)!}{k!(n-k)!}$$

,la siguiente relacion por un impar facultat doble

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)^{\underline{n}}}{2^n}.$$

Mirandolo todo el resultado esta dado por

$$\begin{aligned}\langle 0|e^{ik\hat{x}}|0\rangle &= \frac{1}{2^n n!} (-)^n k^{2n} \langle 0|x^2|0\rangle^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{k^2}{2} \langle 0|x^2|0\rangle \right]^n \\ &= e^{-\frac{k^2}{2} \langle 0|x^2|0\rangle}\end{aligned}$$

Sea $H = t(a^\dagger)^2 a^2$ el Hamiltonio. Comproba que $[H, \hat{N}] = 0$. Ecuentre los vectores y valores propias. Hay un unico estado fundamental?

Solucin:

Empezamos con el commutador. El Hamiltoniano tambien podemos escribir como

$$H = (a^\dagger)^2 a^2 = a^\dagger a^\dagger a a = a^\dagger \hat{N} a = \hat{N} a^\dagger a + \underbrace{[a^\dagger, \hat{N}]}_{-[\hat{N}, a^\dagger]} a = \hat{N} \hat{N} - a^\dagger a = \hat{N}(\hat{N} - 1)$$

donde hemos utilizado el commutator

$$[a^\dagger, \hat{N}] = a^\dagger N - N a^\dagger \Rightarrow a^\dagger \hat{N} = N a^\dagger + [a^\dagger, \hat{N}]$$

y el commutador que hemos calculado en el ejercicio Full1bis: 2

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger$$

. En consecuencia el commutador del Hamiltoniano y el operador de nmero esta dado por

$$[H, \hat{N}] = [\hat{N}^2 - \hat{N}, \hat{N}] = \underbrace{[\hat{N}^2, \hat{N}]}_0 - \underbrace{[\hat{N}, \hat{N}]}_0 = 0 \quad \square$$

Si el Hamiltoniano H commuta con el operador de nmero \hat{N} significa que podemos encontrar una propia base por los dos! Logicamente los vectores propios estan $|n\rangle$ y sus valores propios n y se hay un unico estat fonamental $|0\rangle$ que no esta degenerado!
