Recapitular: Fsica Cuntica

Dirk Hornung

16 de febrero de 2016

Índice general

Capítulo 1

Los postulados de la mecnica cuntica

1.1. Estados Puros

Definition 1. A la mecnica cuantica un estado es un vector $\psi\rangle$ (**vector estado** o **ket**) normalizado ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$) en un espacio Hilbert $\mathcal{H}$ comlejo, completo, unitario y separable.

1.2. Observables

Definition 2. Cada observable **A** de un systema fsico se representa en la mecnica cuantica mediante un operador **hermtico** $\tilde{A}$.

1.3.

Capítulo 2

Oscilador Armnico Cuntico

2.1. Problemas

Full1: 1 Ecuentra las expressiones del los observables x y p en trminos de los operadores a y $a^\dagger$ que permiten escribir l'hamiltoniano armnico unidimensional como $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$. Conviene que utilizas argumentos d'hermitinidad y dimensional.

Solucin:
Los operadores escalera estan definida por

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$
$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

As aadiendo y sustraiendo los operadores escalar danos

$$a + a^\dagger = a\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \hat{x}) \Rightarrow \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$$
$$a - a^\dagger = a\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{i}{m\omega}\hat{p} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) a \Rightarrow \quad \hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)(a - a^\dagger)$$

Ahora vamos a comprobar la dimensionalidad. En general los unidades utilizados para los operadores escalares estan

$$m = kg \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{s} \quad h = \frac{kg \cdot m^2}{s},$$

porque $h = J \cdot s = N \cdot m \cdot s$ y $k = N/m = kg/s$. As que la comproba de $\hat{x}$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{h}{m\omega}} = \sqrt{\frac{kg \cdot m^2}{s} \cdot kg^{-1} \cdot s} = m$$

y de $\hat{p}$

$$\hat{p} = \sqrt{hm\omega} = \sqrt{\frac{kg \cdot m^2}{s} \cdot kg \cdot s^{-1}} = \frac{kg \cdot m}{s}$$

donde hemos mirado solo trminos importantes, estan hecho facilmente.

> **Full1: 2** Utilza los operadores escalar a y $a^\dagger$ para calcular los valores esperados $\langle x\rangle_n$, $\langle p\rangle_n$, $\langle x^2\rangle_n$, $\langle p^2\rangle_n$, $\langle K\rangle_n$, $\langle V\rangle_n$ y los indeterminacines $\langle(\Delta x)^2\rangle_n$, $\langle(\Delta p)^2\rangle_n$ y $\langle(\Delta H)^2\rangle_n$ de el estado estacionario $|n\rangle$ de l'oscilador armnico unidimensional.

Solucin:
Recuerdando que los vectores del estado estan orthogonales

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$$

nos podemos calcular $\langle\hat{x}\rangle_n$ y $\langle\hat{p}\rangle_n$ facilmente

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle_n a = \langle n|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|a^\dagger + a|n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle n|a^\dagger|\rangle + \langle n|a|n\rangle) \\
a = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle + \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle) &= 0, \\
\langle\hat{p}\rangle_n a = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(-i)\langle n|(a-a^\dagger)|n\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Utilizando el operador nmero $N = a^\dagger a$ y el commutador de los operadores escalar

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad \Rightarrow \quad aa^\dagger = a^\dagger a + 1 = \hat{N} + 1$$

danos las valores esperados de $\langle\hat{x}^2\rangle_n$ y $\langle\hat{p}^2\rangle_n$

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}^2\rangle_n a = \langle n|\hat{x}^2|n\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}((\langle n|\cancel{a^\dagger a^\dagger} + \underbrace{a^\dagger a}_{\hat{N}} + \underbrace{aa^\dagger}_{\hat{N}+1} + \cancel{aa}|n\rangle \\
a = \frac{\hbar}{2m\omega}((\langle n|2\hat{N}+1|n\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
\langle\hat{p}^2\rangle_n a = -\frac{\hbar m\omega}{2}[-(2n+1] &= \frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1) = \hbar m\omega(n + \frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Los valores esperados kintetico $\langle K\rangle_n$ y potencial $\langle V\rangle_n$ estan compuesto de los valores esperados calculado antes, por lo tanto nos podemos escribir

$$\begin{aligned}
\langle K\rangle_n a &= \frac{1}{2m}\langle\hat{p}^2\rangle_n \frac{\hbar\omega}{2}\left(n\frac{1}{2}\right) \\
\langle V\rangle_n a &= \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle_n = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Por esto $\langle H \rangle_n$ esta dado por

$$\langle H \rangle_n = \langle K \rangle_n + \langle V \rangle_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Por los indeterminaviones nos recuerdamos de la relacin de indeterminacin

$$\Delta A \equiv A - \langle A \rangle \quad \Rightarrow \qquad \langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

As los indeterminaciones estan dado por

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle_n a = \langle x^2 \rangle_n - \underbrace{\langle x \rangle_n}_{0} = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle_n a = \langle p^2 \rangle_n - \underbrace{\langle p \rangle_n}_{0} = \hbar m\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\langle (\Delta H)^2 \rangle_n = \langle H^2 \rangle_n - \langle H \rangle_n^2 = 0$$

El ultimo realcin esta verdad porque dando un Hamiltoniano armnico

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad \Rightarrow \qquad H^2 = \frac{1}{4m^2} \underbrace{p^4}_{(a-a^\dagger)^4} + \frac{1}{4} m^2 \omega^2 \underbrace{x^4}_{(a+a^\dagger)^4}$$

as considerado solo x^4

$$\langle x^4 \rangle_n = \langle n | (a+a^\dagger)^4 | n \rangle = \langle n | (\cancel{aa} + aa^\dagger + a^\dagger a + \cancel{a^\dagger a^\dagger})^2 | n \rangle = \langle n | (aa^\dagger + a^\dagger a)^2 | n \rangle = \langle n | (aa^\dagger + a^\dagger a) | n \rangle^2$$

repitiendo el mismo processo por p^4 danos como resultado

$$\langle H^2 \rangle_n = \langle H \rangle_n^2$$

por lo tanto vemos que la indeterminacion del Hamiltoniano esta cero.

Full1: 3 Por el estado no estacionario inicial (y sencillo) $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ y cualquier instant de tiempo t.

Solucin:
Primero tenemos que evaluar la evolucin del tiempo del estado no esacionario inicial. Por lo tanto deberiamos calcular la energa del oscillador armnico del estado fundamental y primero estado

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}.$$

As utilizando

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_n \alpha_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |n\rangle$$

danos la evolucin temporal de $|\psi(t=0)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\omega}{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3i\omega t}{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \left(|0\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}}|2\rangle\right)$$

Logicamente por los valores eseperados nos tenemos

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle_{\psi(t)} &= \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{2}\cancel{e^{\frac{-i\omega t}{2}} e^{\frac{i\omega t}{2}}} \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\langle 0| + e^{i\omega t}\langle 1|\right)\left(a + a^{\dagger}\right)\left(e^{i\omega t}|1\rangle + |0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(e^{-i\omega t}\langle 0|a|1\rangle + e^{i\omega t}\langle 1|a^{\dagger}|0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos\omega t
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle\hat{p}\rangle_{\psi(t)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)\left(\langle 0| + e^{i\omega t}\langle 1|\right)\left(a - a^{\dagger}\right)\left(e^{-i\omega t}|1\rangle + |0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(-i)\left(e^{-i\omega t}\langle 0|a|1\rangle - e^{i\omega t}\langle 1|a^{\dagger}|0\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{1}{2i}\left(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}\right) \\
&= -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \sin\omega t
\end{aligned}$$

Full1: 4 Dada la function d'onda del estado fundamental del oscilador armnico unidimenional

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

ecuentre l'expresion de $\phi_2(x)$.

Solucin:
Nos podemos escribir el operador escalar $a^{\dagger}$ en la siguiente forma

$$a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}) \quad \text{con} \quad a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

As

$$(a^{\dagger})^2|0\rangle = \sqrt{1}a^{\dagger}|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \quad \Rightarrow \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^{\dagger})^2|0\rangle$$

y por lo tanto $\phi_2(x)$ esta dado por

$$|2\rangle = \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0.$$

Empezando con el operador escalar cuadrado

$$(a^\dagger)^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega}(m\omega\hat{x}-i\hat{p})^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(m\omega\hat{x} - \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left(m^2\omega^2x^2 + \hbar\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2m\omega\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

donde hemos utilizado el operador momento $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$. Antes de continuar queremos caclular la segunda derivada de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\omega}{\hbar}x\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} = \left(-\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

Por lo tanto ϕ_2 esta dado por

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(m^2\omega^2x^2 + \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2m\omega\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\hbar m\omega}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(m^2\omega^2x^2 + 2m^2\omega^2x^2 - m\omega\hbar + m\omega\hbar + m^2\omega^2x^2\right)e^{\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{\sqrt{8}} + \sqrt{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)e^{\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}
\end{aligned}$$

Full1: 7 En la mecnica matricial, qual es el ket $|x = 0\rangle$ que represente un oscilador situada exactamente al origen $x = 0$? Distinguie entre componentes pares y impares. Compara con los resultados de mecnica ondulatria.

Aplicar el operador $\hat{x}$ al eigenket $|x = 0\rangle$ logigamente danos

$$\hat{|}x = 0\rangle \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \qquad \hat{x}|x = 0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|x = 0\rangle = 0$$

En la forma del matrix podemos escribir los operadores escalar como

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la suma esta dado por

$$(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)|x=0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

Ya tenemos un systema de ecuacines que podemos resolvar por los coeficientes c_n

$$c_1 = 0, \quad c_0 + \sqrt{2}c_2 = 0, \quad \sqrt{2}c_2 + c_3 = 0, \quad \sqrt{3}c_2 + \sqrt{4}c_4 = 0$$

en consecuencia todo los c_n con un index impar estan zero

$$c_{n+1} = 0 \quad \text{con} \qquad n \in 1, 2, 3, \cdots$$

De hecho el systema de ecuacines danos por los c_n con un index par

$$c_2 = \frac{-c_0}{\sqrt{2}}, \quad c_4 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}c_2 = \frac{3}{8}c_0, \quad c_6 = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{48}}c_0, \quad \cdots$$

Ademas, para encontrar la solution que obadece la mecanica cuantica, tenemos que normalizar el eigenket con la introducin de un factor der normalizacin N. Como podemos ver todos los coeficientes c_n con un index par dependen de c_0 entonces solo tenemos que normalizarlo

$$\frac{c_0}{N} = 1$$

y el resto esta dado por

$$\langle x=0|x=0\rangle = 1 \quad \Rightarrow \qquad |x=0\rangle = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\right) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

El eigenket $|x=0\rangle$ corresponde a una serie dado por

$$\frac{1}{N}C_2 n = (-)^n \sqrt{\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}}$$

normalization problem

Full1: 10 Un estado coherente a $t = 0$ esta dado por el ket

$$|\alpha_0\rangle e^{\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Ecuentre el ket $|\alpha(t)\rangle$ que da su evolucin temporal y comproba que satisfar la equacin de Schrdingerdependiendo de t.

Empezando por lo evolucin temporal nos sabemos que los estados del oscilador armnico esta dado por

$$|n\rangle \xrightarrow{t} e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|n\rangle \quad \Rightarrow \quad |n\rangle \xrightarrow{t} e^{i\omega(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle$$

As el evolucin temporal de $|\alpha_0\rangle$ esta dado por

$$|\alpha_0\rangle \xrightarrow{t} |\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{i\omega n t}|n\rangle.$$

Para comprobar el ecuacin de Schrdinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle$$

necesitamos de recuerdarnos de el operador de nmero

$$\hat{N}|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt}|\alpha(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t}|n\rangle \right) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} e^{-i\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t}|n\rangle}_{|\alpha(t)\rangle} + \underbrace{\hbar\omega e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle}_{\hat{N}|\alpha(t)\rangle} \\
&= \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) |\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle
\end{aligned}$$

Full1bis: 1 Ultilza la regla de commutacin $[a, a^\dagger] = 1$, comprobar que

$$[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1} \quad \text{y} \quad [a^n, a^\dagger] = na^{n-1}.$$

Ademas con los primeros resultatos justifica los relacines

$$[a, f(a^\dagger)] = \frac{df(a\dagger)}{da^\dagger} \quad \text{y} \quad [f(a), a^\dagger] = \frac{df(a)}{da}$$

Solucin:
Para derivar la premiero relacin tenemos que utilizar la inducin mathematica. Empezando por la **iniciacin de la induccin**

Demostración.

$$[a,(a^\dagger)^n] \overset{n=1}{=} [a,a^\dagger] = 1\cdot(a^\dagger)^0 = 1$$

Ahora por demonstar el **paso inductive** utilizamos como **hiptesis inductiva** la siguinte relacion

$$[a,(a^\dagger)^k] = k(a^\dagger)^{k-1}.$$

Por lo tanto tenemos que comprobar que

$$[a,(a^\dagger)^{k+1}] \overset{!}{=} (k+1)(a^\dagger)^{(k)}$$

As, utilizando la hiptesis inductiva,

$$\begin{aligned}[a,a^\dagger(a^\dagger)^k] &= [a,a^\dagger](a^\dagger)^k + a^\dagger[a,(a^\dagger)^k]\\ &= (a^\dagger)^k + a^\dagger k(a^\dagger)^{k-1}\\ &= (k+1)(a^\dagger)^k\end{aligned}$$

□

Demostración. Por la segunda relacin vamos a utilizar el mismo conzepto de inducin

$$[a^n,a^\dagger] \overset{!}{=} na^{n-1}$$

mathematica. As la **iniciacin de la induccin** esta dado por

$$[a^1,a^\dagger] = 1\cdot a^0 = 1$$

y aplicar la **hitesis inductiva**

$$[a^k,a^\dagger] = ka^{k-1}$$

danos la comporbacin

$$\begin{aligned}[a^{k+1},a^\dagger] &\overset{!}{=} (k+1)a^k\\ [a^{k+1},a^\dagger] &= [a^k a,a^\dagger]\\ &= a^k\underbrace{[a,a^\dagger]}_{1} + \underbrace{[a^k,a^\dagger]}_{ka^{k-1}}a\\ &= (k+1)a^k\end{aligned}$$

□

Demostración. Por la tercera relacin

$$[a,f(a^\dagger)] \overset{!}{=} \frac{df(a\dagger)}{da^\dagger}$$

tenemos que haver uso de **serie de Taylor**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^(n)}{n!}(x-a)^n$$

Por esto evaluando la funcion del operador $f(a^\dagger)$ a la posicin $a=0$ danos

$$f(a^\dagger) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{d^n f(a^\dagger)}{d(a^\dagger)^n} \frac{1}{n!}}_{k_n} (a^\dagger)^n \quad \text{y} \qquad \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^{n-1}$$

As que

$$[a, f(a^\dagger)] = [a, \sum_{n=0}^{\infty} k_n (a^\dagger)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n [a, (a^\dagger)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^{n-1} \quad \square$$

Demostración. Despus de todo por la ultima relacin

$$[f(a), a^\dagger] \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{d^n f(a)}{da^n} \frac{1}{n!}}_{k_n} a^n \quad \text{y} \qquad \frac{df(a)}{da} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n a^{n-1}$$

$$[f(a), a^\dagger] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n [a^n, a^\dagger] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n a^{n-1} = \frac{df(a)}{da} \quad \square$$

Full1bis: 2
Encuentre los commutatores

$$[\hat{N}, (a^\dagger)^k] \quad \text{y} \qquad [\hat{N}, a^]$$

Ademas justificar el resultado

$$[\hat{N}, f(a^\dagger)] = a^\dagger \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}$$

Solucin:
Usando los resultados del ejercicio anterior esta facil calculando los resultados de ese problema. En chronologia

$$[\hat{N}, (a^\dagger)^k] = [a^\dagger a, (a^\dagger)^k] = a^\dagger \underbrace{[a, (a^\dagger)^k]}_{k(a^\dagger)^{n-1}} + \underbrace{[a^\dagger, (a^\dagger)^k]}_{0} a = k(a^\dagger)^k$$

$$[\hat{N}, a^k] = [a^\dagger a, a^k] = a^\dagger \underbrace{[a, a^k]}_{0} + \underbrace{[a^\dagger, a^k] a}_{ka^k} = ka^k$$

Y por la relacin de la funcin del operador

$$[\hat{N}, f(a^\dagger)] \stackrel{!}{=} a^\dagger \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}$$

$$f(a^\dagger) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n (a^\dagger)^n \quad \text{y} \qquad \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^{n-1}$$

$$[\hat{N}, f(a^\dagger)] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n[\hat{N}, (a^\dagger)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n n (a^\dagger)^n = a^\dagger \frac{df(a^\dagger)}{d(a^\dagger)}$$

Fullbis 4: Un estado coherente es definida por el operador de subida actuando on un estado propio de α

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Escribiendo este estado en la base propia de los energias

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$$

encuentre la relcain de recurrencia que cumplen los coeficients c_n. Observa que estan todos fijados excepte el pimer c_0 que fija la normalizacin.

Solucin:
Combinando los dos relacines

$$\hat{a}|\alpha\rangle = a\sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\sqrt{n}|n-1\rangle \overset{n=n+1}{\sum}{}^{\infty}{}_{n=0} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\sqrt{n+1}|n+1\rangle \overset{!}{=} \sum_{n}^{\infty} \alpha c_n|n\rangle$$

donde hemos utilizado la ecuacin del estado coharente otra vez en el ultimo trmino. Locigamente nos da la relacin

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha c_n \quad \Rightarrow \qquad c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n.$$

Ahora tenemos la relacon de recurrencia que cumplen los coefficientes c_n. Pues tambin queremos que calcular el estado $|\alpha\rangle$ para quien nos necesitamos una relacin por c_n. Escribiendo unas ejemplos de la relacin de recurrencia

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0 \\
c_2 &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} c_2 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1\cdot 2}} c_0 \\
c_3 &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2\cdot 3}} c_1 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{1\cdot 2\cdot 3}} c_0 \\
\vdots &= \vdots \\
c_n &\overset{!}{=} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0
\end{aligned}$$

Logicamente todos los coeficientes c_n estan fijados excepte el primer c_0 con que vamos a fijar la normalizacin luego. Para comprobar la relacin de c_n vamos a usar la induccin mathematica otra vez. Por $n = 1$ lo sabemos que esta ciert y con la **hiptesis inductiva**

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

podemos facilmente comprobar que la presuncin para c_n esta cierto tambin

$$c_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n+1!}} c_0 \quad \square$$

donde hemos facilmente usado la hiptesis inductiva. As por nuestro estado $|\alpha\rangle$ podemos escribir

$$|\alpha\rangle c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Ahora vamos a normalizarlo para encontrar el valor de c_0

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{|\alpha|^{2n}} n! \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \qquad |c_0| = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

donde hemos usado la serie de la funcin exponential, dado por

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}.$$

Pues por final tenemos

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Full1bis: 9 Escribe el estado coherente $|\alpha\rangle$ como el estado $f(a^\dagger)|0\rangle$ (por simplicidad suponemos que $\alpha \in \mathcal{R}$). Utilizad el resultado del problema 1, demostra que la funcin $f(a^\dagger)$ cumple la equacin

$$\frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} - \alpha f(a^\dagger) = 0$$

Integradla y encontrad la constant de normalizacin por econtrar que un estado coherent se puede escribir como

$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle$$

Solucin:
El ejercicio nos dice que el ket $|\alpha\rangle$ esta dado por

$$|\alpha\rangle = f(a^\dagger)|0\rangle$$

Ahora queremos que comprobar la siguiente relacin

$$\underbrace{\frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}}_{[a, f(a^\dagger)]} - \alpha f(a^\dagger) \stackrel{!}{=} 0$$

donde hemos utilizado el resultado del ejercicio $Full1bis:1$. Para comprobarlo multiplicamos la ralacin con $|0\rangle$ de la deracha

$$a\underbrace{f(a^\dagger)|0\rangle}_{\alpha} - f(a^\dagger)\underbrace{a|0\rangle}_{0} - \alpha\underbrace{f(a^\dagger)|0\rangle}_{|\alpha\rangle} = a|\alpha\rangle - \alpha|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle - \alpha|\alpha\rangle = 0 \quad \square$$

donde hemos ultilizado que $|\alpha\rangle$ es un estadao coherente.
Por el segundo parte del ejercicio queremos integrar la ecuacin diferential

$$\frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger} = \alpha f(a^\dagger) \quad \Rightarrow \quad f(a^\dagger) = Ce^{\alpha a^\dagger}$$

Para consequir el valor de C vamos a normalzar el estado $|\alpha\rangle$ dado por

$$|\alpha\rangle = f(a^\dagger)|0\rangle = Ce^{\alpha a^\dagger}|0\rangle \quad \text{y} \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1$$

Por lo tanto la normalizacin esta dado por

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = C^2\langle 0|e^{\alpha a}e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$$

Aqui queremos que introducir la forumla de **Baker-Campbell-Hausdorf** dado por

$$e^A e^B = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A,B])$$

Por eso podemos escribir

$$e^{\alpha a}e^{\alpha a^\dagger} = \exp(\alpha a + \alpha a^\dagger + \frac{\alpha^2}{2}\underbrace{[a,a^\dagger]}_{1} = \exp(\alpha a + \alpha a^\dagger)\exp(\frac{\alpha^2}{2})$$
$$e^{\alpha a^\dagger}e^{\alpha a} = \exp(\alpha a^\dagger + \alpha a + \frac{\alpha}{2}\underbrace{[a^\dagger,a]}_{-1}) = \exp(\alpha a^\dagger + \alpha a)\exp(-\frac{\alpha^2}{2}).$$

Nota que podemos cambiar el order de los operadoes escalares en las funcionas exponetiales a las derechas. Asi podemos escribir

$$e^{\alpha a}e^{\alpha a^\dagger} = e^{\alpha a^\dagger}e^{\alpha a}e^{\alpha^2}$$

que tiene los operadores a a la derecha. El order de los operadores escalares va a ser importante por los siguientes pasos. Por lo tanto podemos continuar con la normalizacin

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\alpha\rangle &= C^2\langle 0|e^{\alpha a^\dagger}e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle\\ &= C^2\langle 0|e^{\alpha a^\dagger}e^{\alpha a}e^{\alpha^2}|0\rangle\\ &= C^2 e^{\alpha^2}\langle 0|e^{\alpha a^\dagger}e^{\alpha a}|0\rangle\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que

$$\langle 0|e^{\alpha a^\dagger}e^{\alpha a}|0\rangle = 1$$

Para comprobar la relacion arriba expandemos las funcines exponentiales

$$e^{\alpha a} = 1 + \alpha a + \frac{\alpha^2 a^2}{2} + \cdots e^{\alpha a^\dagger} \qquad = 1 + \alpha a^\dagger + \frac{\alpha^2 (\alpha^\dagger)^2}{2} + \cdots$$

Asi podemos escribir el bracket como

$$\begin{aligned}
\langle 0| e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha a} |0\rangle &= \langle 0|(1 + \alpha a^\dagger + \cdots)(1 + \alpha a + \cdots)|0\rangle \\
&= \langle 0|0\rangle + \cancel{\langle 0|\alpha a|0\rangle} + \cancel{\langle 0|\alpha a^\dagger|0\rangle} + \cancel{\langle 0|\alpha^2 a^\dagger a|0\rangle} + \cdots \\
&= \langle 0|0\rangle = 1
\end{aligned}$$

porque los operadores a siempre estan al lado directo y en consequencia el valor esperado desaparece. Despues de todo tenemos el valor

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = 1 = C^2 e^{\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad C = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

por C y asi tambien el valor

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle$$

Full1bis: 9 Calcula $\langle 0|e^{ik\hat{x}}|0\rangle$ y comproba que podemos escribirlo como $e^{-\frac{k^2}{2}\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle}$. A partir de esta relacin encuentra el valor de $\langle 0|\hat{x}^{2n}|0\rangle$.

Aqui queremos empezar con la segunda parte de ese ejercicio. En general queremos comprobar la siguiente relacin

$$\langle 0|\hat{x}^{2n}|0\rangle \stackrel{!}{=} (2n-1)!!\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle^n$$

Nota que tenomos una falcultad doble que esta en general dado por

$$n!! \equiv \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 & n > 0(\text{par}) \\ n \cdot (n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 & n > 0(\text{impar}) \\ & 1 n = -1, 0 \end{cases}$$

Admas vamos a utilizar la teorema fundamental del del clculo, en la forma siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-cx^{2n}} = \left(-\frac{d}{dc}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^{2n}}.$$

Antes de hacer la comprobacin evaluamos la siguiente relacion

$$\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \langle 0|\hat{x}^2|x\rangle\langle x|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\langle 0|x\rangle^2$$

Aqui podemos ver la funcion de onda de oscillador armnico en el estado fundamental esta dado por

$$\langle x|0\rangle = \phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$|\langle x|0\rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}_{\sqrt{c}} \exp\left(-\frac{1}{2} \underbrace{\frac{m\omega}{\hbar}}_{c} x^2 \right)$$

Asi tenemos

$$\begin{aligned}
\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle &= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-cx^2} \\
&= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{d}{dc}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} \\
&= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{d}{dc}\right) \sqrt{\frac{\pi}{c}} = \frac{\sqrt{c}}{2} \frac{1}{c^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2c}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el integral de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

Es valor tambin danos

$$\langle 0|x^2|0\rangle^n = \frac{1}{2^n c^n}$$

que vamos a necesitar en poco tiempo. Ahora queremos comprobar la relacion inicial. Por eso econtramos una serie para $\langle 0|x^{2n}|0\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle 0|x^{2n}|0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle 0|\hat{x}^{2n}|x\rangle \underbrace{\langle x|0\rangle}_{\phi_0(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} \underbrace{|\langle x|0\rangle|^2}_{\phi_0(x)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left(-\frac{d}{dc}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-cx^2} \\
&= \sqrt{\frac{c}{\cancel{\pi}}} \left(-\frac{d}{dc}\right)^n \sqrt{\frac{\cancel{\pi}}{c}} = \sqrt{c} \left(-\frac{d}{dc}\right)^n \frac{1}{\sqrt{c}}
\end{aligned}$$

Ahora queremos calcular el ultimo trmino por diferentes n

$$\left.\begin{array}{l|c|c|c|c}
n: & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
valor: & \frac{1}{2}\frac{1}{c} & \frac{3}{4}\frac{1}{c^2} & \frac{15}{8}\frac{1}{c^3} & \frac{105}{16}\frac{1}{c^4}
\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n} \frac{1}{c^n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n c^n}$$

Asi con el valor de $\langle 0|\hat{x}|\rangle$ podemos comprobar que

$$\langle 0|\hat{x}^{2n}|0\rangle = (2n-1)!! \frac{1}{2^n c^n} = (2n-1)!! \langle 0|\hat{x}^2|0\rangle^n$$

Por el primer parte del ejercicio ahora podemos comprobar que

$$\langle 0|e^{ik\hat{x}}|0\rangle = e^{-\frac{k^2}{2}} \langle 0|\hat{x}^2|0\rangle$$

Por el valor esperado podemos expander como

$$\langle 0|e^{ik\hat{x}}|0\rangle = \langle 0|1 - \frac{k^2\hat{x}^2}{2!} + \frac{k^4\hat{x}^4}{4!} - \frac{k^6\hat{x}^6}{6!} + \frac{k^8\hat{x}^8}{8!} + \cdots () \, |0\rangle,$$

donde hemos utlizado que cada valor espaerado que tiene un operador $\hat{x}$ par esta zero

$$\langle 0|\hat{x}^(2n+1)|0\rangle = 0$$

As podemos escribir

$$\begin{aligned}\langle 0|e^{ik\hat{x}}|0\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n \frac{k^{2n}}{(2n)!} \underbrace{\langle 0|\hat{x}^{2n}|0\rangle}_{(2n-1)!!\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}(-)^n - k^{2n}\langle 0|x^2|0\rangle^n\end{aligned}$$

Aqui queremos encontrar una otra forma para escribir el facultat doble

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} = \frac{(2n)^{\underline{n}}}{2^n(2n)!} = \frac{n!}{2^n(2n)!}\underbrace{\frac{(2n)^{\underline{n}}}{n!}}_{\binom{2n}{n}} = \frac{\cancel{n!}}{2^n\cancel{(2n)!}}\frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!}n!} = \frac{1}{2^n n!}$$

donde hemos utilizado el binomial

$$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)!}{k!(k-n)!}$$

,la siguiente relacion por un impar facultad doble

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)^{\underline{n}}}{2^n}.$$

Mirandolo todo el resultado esta dado por

$$\begin{aligned}\langle 0|e^{ik\hat{x}}|0\rangle &= \frac{1}{2^n n!}(-)^n k^{2n}\langle 0|x^2|0\rangle^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[-\frac{k^2}{2}\langle 0|x^2|0\rangle\right]^n \\ &= e^{-\frac{k^2}{2}\langle 0|x^2|0\rangle}\end{aligned}$$

Full1b: 10 Sea $H = t(a^\dagger)^2 a^2$ el Hamiltonio. Comproba que $[H, \hat{N}] = 0$. Ecuentre los vectores y valores porpias. Hay un unico estado fundamental?

Solucin:

Empezamos con el commutador. El Hamiltoniano tambin podemos escribir como

$$H = (a^\dagger)^2 a^2 = a^\dagger a^\dagger a a = a^\dagger \hat{N} a = \hat{N} a^\dagger a + \underbrace{[a^\dagger, \hat{N}]}_{-[\hat{N}, a^\dagger]} a = \hat{N}\hat{N} - a^\dagger a = \hat{N}(\hat{N} - 1)$$

donde hemos ultilizado el commutator

$$[a^\dagger, \hat{N}] = a^\dagger N - N a^\dagger \quad \Rightarrow \qquad a^\dagger \hat{N} = N a^\dagger + [a^\dagger, \hat{N}]$$

y el commutador que hemos calculado en el ejercicio Full1bis: 2

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger$$

. En consequencia el commutador del Hamiltoniano y el operador de nmero esta dado por

$$[H, \hat{N}] = [\hat{N}^2 - \hat{N}, \hat{N}] = \underbrace{[\hat{N}^2, \hat{N}]}_{0} - \underbrace{[\hat{N}, \hat{N}]}_{0} = 0 \quad \square$$

Si el Hamiltoniano H commuta con el operador de nmero $\hat{N}$ significa que podemos econtrar una propia base por los dos! Logicamente los vectores porpiis estan $|n\rangle$ y sus valores propiis n y se hay un unic estat fonamental $|0\rangle$ que no esta degenerado!

Full1: 13 Determinad la direccin θ ϕ en la que apunta el espn de un electron e^- del que conocemos

$$\langle S_x \rangle = 0; \quad \langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{4}; \quad \langle S_z \rangle \leq 0$$

Solucin:
Para ese ejercicio tenemos que saber los coordenadas sfericas θ y ϕ Por eso los valores esperados de los spines nos dan

$$\langle S_x \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2} \text{o} \phi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\langle S_z \rangle > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \theta < \pi$$

Ya hemos encontrado ϕ y por el valor de θ vamos a utilizar el valor esperado del spin en la direccion y. El electron es un particular con el spin 1/2 con que podemos utilizar los matrices de pauli σ, de que nos conocemos el valor esperado dado por

$$\langle \sigma_y \rangle = \sin\theta \sin\phi$$

As tenemos

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2}\langle \sigma_y \rangle = \sin\theta \sin\phi \stackrel{!}{=} \frac{\hbar}{4}$$

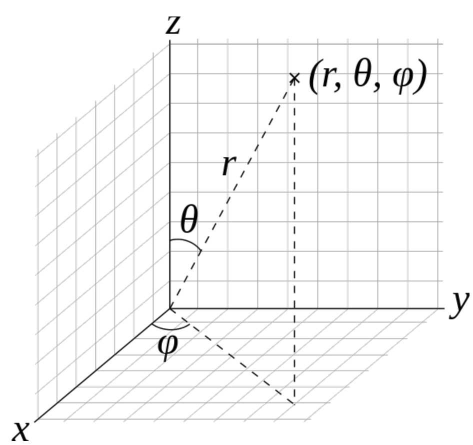

Figura 2.1: Coordenadas sfericas

Lo conocemos el valor de ϕ y podemos resolver la ecuacion como

$$2 \sin\theta \sin\frac{\phi}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6} = 30$$

Igualmente ϕ esta dado por

$$\phi = \frac{\pi}{2} = 90$$

.

Capítulo 3

Momentum Angular

Full1: 15 Encontrad los valors propios de el operador L_+L_-. Ecuentradlos tambien por el operador L_-L_+.

Solucin:
Los operadores L_+ y L_- estan dado por

$$L_+ = (L_x + iL_y) \quad \text{y} \qquad L_i = (L_x - iL_y)$$

con el commutador y la relacion siguiente

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad \text{y} \quad L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

explain quantization! Por eso podemos evaluar el operador L_+L_-

$$L_+L_- = (L_x+iL_y)(L_x-iL_y) = L_x^2+L_y^2 \underbrace{+iL_xL_y - iL_yL_x}_{-i[L_x,L_y]} = L^2-L_z^2+\hbar L_z = \hbar^2((l+1)-m^2+m)$$

y el operador L_-L_+

$$L_-L_+ = (L_x-iL_y)(L_x+iL_y) = L_x^2+L_y^2+\underbrace{iL_xL_y - iL_yL_x}_{i[L_x,L_y]} = L^2-L_z^2-\hbar L_z = \hbar^2((l+1)-m^2-m)$$

Full1: 18,19

- Calculad $(\mathbf{n} \cdot \sigma)^2 \equiv \sigma^2$, done $\mathbf{n}$ es un vector unitario del espacio geometric y σ son los matrices de Pauli.
- Con el resultado de la primera parte comprobad la igualdad $e^{i\alpha(\mathbf{n}\cdot\sigma} \equiv e^{i\alpha\sigma_{\mathbf{n}}} = \cos\alpha + i\sigma_{\mathbf{n}} \sin\alpha$.

Solucin:

- Por ese ejercicio conocemos las realciones de los matrices de Pauli que estan dado por

$$\sigma_i, \sigma_j = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 0 \quad \text{y} \sigma_i^2 = \mathbb{1}$$

Ahora podemos empazor con la calculacion del primer producto escalar

$$\sigma_{\mathbf{n}}^2 = (\mathbf{n}\sigma)^2 = \sum_{i,j=0}^{3} n_i n_j \sigma_i \sigma_j = \sum_{i,j=1}^{3}$$

Considerando solo la suma de los matrices de Pauli nos da

$$\sigma_{i,j=1}^{3} \sigma_i \sigma_j = \underbrace{\sigma_1\sigma_1 + \sigma_2\sigma_2 + \sigma_3\sigma_3}_{\mathbb{1}} + \underbrace{\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1}_{0} + \underbrace{\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1}_{0} + \underbrace{\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2}_{0}$$

Por lo tanto el resultado esta dado por

$$\sigma_{\mathbf{n}}^2 = (\mathbf{n} \cdot \sigma)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} n_i n_j \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

Que ademas significa los importantes relacines por la segunda parte

$$\sigma_{\mathbf{n}}^{2n} = \mathbb{1} \quad \text{y} \qquad \sigma_{\mathbf{n}}^{2n+1} = \sigma_n$$

- Por la segunda parte desarollamos la funcin exponential y vemos que podemos dividirla en un parte par y en un parte impar. El exponential desarollado esta dado por

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha\sigma_{\mathbf{n}}} &= 1 + i\alpha\sigma_{\mathbf{n}} - \frac{\alpha^2\sigma_{\mathbf{n}}^2}{2!} + \frac{i\alpha^3\sigma_{\mathbf{n}}^3}{3!} - \frac{\alpha^4\sigma_{\mathbf{n}}^4}{4!} + \cdots \\
&= 1 + i\alpha\sigma_{\mathbf{n}} - \frac{\alpha^2\mathbb{1}}{2!} + \frac{i\alpha^3\sigma_{\mathbf{n}}}{3!} - \frac{\alpha^4\mathbb{1}}{4!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\alpha^{2n+1}\sigma_{\mathbf{n}}^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\alpha^{2n}\sigma_{\mathbf{n}}^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sin\alpha + i\sigma_{\mathbf{n}} \sin(\alpha) \quad \square
\end{aligned}$$

donde hemos utliziado la relacion del primer ejercicio por $\sigma_{\mathbf{n}}$ par y impar y los desarollos del sin y cos

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$