Chapter 1

벡터공간

1.1 체(Field)와 벡터공간의 공리

선형대수의 문은 대개 계산으로 열린다. 우리는 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 같은 식 앞에 서서 해를 구하고, 행을 바꾸고, 소거하고, 다시 정리한다. 처음에는 이 모든 과정이 기법의 문제처럼 보인다. 그러나 계산을 조금 더 오래 붙들고 있으면, 기술보다 먼저 물어야 할 질문이 드러난다. 우리는 지금 어떤 대상에서, 어떤 규칙으로 계산하고 있는가.

독자는 이미 $\mathbb{R}^n$에서 벡터를 더하고 실수를 곱하는 연산에 익숙하다. 그런데 선형대수의 시야는 거기서 멈추지 않는다. 다항식도, 함수도, 수열도 같은 방식으로 다룰 수 있다면, 서로 다른 대상을 관통하는 공통의 틀이 있다는 뜻이다. 벡터공간은 바로 그 틀을 이름 붙인 개념이다. 모양이 아니라 구조를 본다는 것, 그것이 선형대수에서 말하는 추상화의 첫걸음이다.

이제 관심은 "무엇을 계산하느냐" 보다 "어떤 공리가 허용되느냐" 로 옮겨간다. 덧셈과 스칼라곱이 만족해야 할 최소한의 규칙만 정해두면, 대상이 달라져도 논리의 틀은 그대로 적용된다. 그래서 공리에서 출발한 증명은 특정 예시에 기대지 않고 구조 자체에 근거한다.

실제로 이 절에서 보게 되듯, 공리만으로도 영벡터와 역벡터의 유일성, 소거법칙, $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ 같은 기본 성질이 따라 나온다. 따라서, 이 절의 목표는 정의를 나열하는 데 있지 않다. 이후의 기저, 차원, 선형사상, 고유값 이론의 논리적 기반을 분명히 하는 데 있다.

정의 1.1.1 (체)**.** *집합 K와 연산 $+, \cdot$가 다음을 만족하면 K를* **체***라 한다.*

(1) $(K, +)$는 아벨군이다.

(2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$는 아벨군이다.

(3) 분배법칙 $a(b + c) = ab + ac$가 성립한다.

대표적인 예는 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$이며, $\mathbb{Z}$는 체가 아니다. 예를 들어 $2 \in \mathbb{Z}$의 곱셈 역원 $\frac{1}{2}$는 $\mathbb{Z}$에 속하지 않는다.

정의 1.1.2 (벡터공간)**.** *체 K 위의 집합 V에 대해*

- *벡터 덧셈 $V \times V \to V$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$,*
- *스칼라곱 $K \times V \to V$, $(a, \mathbf{v}) \mapsto a\mathbf{v}$*

가 정의되어 있고, 임의의 $a, b \in K$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$에 대해 다음 공리가 성립하면 V를 K 위의 **벡터공간***이라 한다.*

(VS1) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(VS2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(VS3) 영벡터 $\mathbf{0} \in V$가 존재하여 $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

(VS4) 각 $\mathbf{v} \in V$에 대해 $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$인 $-\mathbf{v}$가 존재

(VS5) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

(VS6) $(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

(VS7) $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$

(VS8) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

정리 1.1.3 (영벡터와 역벡터의 유일성)**.** *K 위의 벡터공간 V 에서 영벡터는 유일하고, 각 벡터의 덧셈 역벡터도 유일하다.*

Proof. 먼저 영벡터의 유일성을 보이자. $\mathbf{0}, \mathbf{0}'$ 가 모두 영벡터라고 가정하면,

$$\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' \quad \text{및} \quad \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$$

가 되어 $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$ 를 얻는다.

다음으로 역벡터의 유일성을 보이자. $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ 가 모두 $\mathbf{v}$의 역벡터라면 $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}' = \mathbf{0}$이고,

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}') = (\mathbf{w} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{w}' = \mathbf{0} + \mathbf{w}' = \mathbf{w}'$$

이므로 역벡터도 유일하다. □

정리 1.1.4 (소거법칙)**.** *K 위의 벡터공간 V 에서 임의의 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ 에 대해*

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

이면 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ 이다.

Proof. 가정한 식의 양변에 $-\mathbf{w}$를 더하면

$$(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w})$$

이고 결합법칙과 역벡터의 정의에 의해

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$$

을 얻는다. 따라서 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$이다. □

정리 1.1.5 (기본 계산 법칙)**.** *임의의 $a \in K$, $\mathbf{v} \in V$ 에 대해 다음이 성립한다.*

(1) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(2) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(3) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

(4) $(-a)\mathbf{v} = -(a\mathbf{v})$

Proof. (1) $(0+0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$인데 좌변은 $0\mathbf{v}$이므로 $0\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$. 양변에 $-(0\mathbf{v})$를 더하면 $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(2) $a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0}$에서 좌변이 $a\mathbf{0}$이므로 같은 방식으로 $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(3) $\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = (1 + (-1))\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 즉 $(-1)\mathbf{v}$는 $\mathbf{v}$의 역벡터이므로 $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

(4) $(-a)\mathbf{v} + a\mathbf{v} = ((-a) + a)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 따라서 $(-a)\mathbf{v}$는 $a\mathbf{v}$의 역벡터이므로 $(-a)\mathbf{v} = -(a\mathbf{v})$. □

예제 1.1.6 ($\mathbb{R}^n$ 의 표준 벡터공간)**.** *벡터를*

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

로 두고

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad a\mathbf{x} = (ax_1, \dots, ax_n)$$

로 정의하면 벡터공간 공리 8개가 모두 성립한다. 따라서 $\mathbb{R}^n$ 은 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이다.

예제 1.1.7 (다항식 공간 $P_n(\mathbb{R})$).

$$P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

는 차수가 n 이하인 실계수 다항식 전체의 집합이다. 다항식의 덧셈과 스칼라곱에 대해 닫혀 있으므로 $P_n(\mathbb{R})$ 도 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이다.

Remark. $\mathbb{R}^2$는 표준 연산으로는 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이다. 이때 스칼라곱이 실수배로 정의되어 있으므로, 같은 연산을 그대로 둔 채 스칼라 체만 $\mathbb{C}$로 바꾸는 것은 불가능하다.

Level 1. 기초 확인

연습문제 1.1.1. *$\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 중 체인 것을 모두 고르시오.*

힌트. 0이 아닌 원소의 곱셈 역원이 항상 존재하는지 확인하라.

연습문제 1.1.2. *벡터공간 공리 중 분배법칙에 해당하는 두 식을 정확히 쓰시오.*

힌트. 스칼라가 벡터합에 분배되는 식과, 스칼라합이 벡터에 분배되는 식을 구분하라.

Level 2. 표준 응용

연습문제 1.1.3. *$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$가 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간인지 판정하시오.*

힌트. 영벡터 포함, 덧셈 닫힘, 스칼라곱 닫힘의 세 조건을 점검하라.

연습문제 1.1.4. *정리의 항목 (2)인 $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$을 공리만으로 다시 증명하시오.*

힌트. $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$에서 시작하라.

Level 3. 연결 추론

연습문제 1.1.5. *벡터공간 V 에서*

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = a\mathbf{u} - a\mathbf{v}$$

를 증명하시오.

힌트. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$로 바꾸고 $(-a)\mathbf{v} = -(a\mathbf{v})$를 사용하라.

연습문제 1.1.6. $\mathbf{u} + \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{w}_2$ *이면* $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$ *임을 보여라.*

힌트. 양변에 $-\mathbf{v}$와 $-\mathbf{w}_1$을 순서대로 더하라.

Level 4. 도전 확장

연습문제 1.1.7. *$\mathbb{R}^2$ 에서 덧셈은 표준 덧셈으로 두고 스칼라곱을*

$$a \odot (x, y) = (ax, y)$$

로 정의하자. 이 구조가 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간인지 판정하시오.

힌트. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$ 또는 $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$를 대입해 보라.

연습문제 1.1.8. *체 공리에서 곱셈 교환법칙을 제거하면 어떤 대수 구조가 되는지 조사하고, 선형대수에서 어떤 주제로 확장되는지 간단히 정리하시오.*

힌트. division ring(또는 skew field) 키워드를 참고하라.

- 벡터공간의 스칼라는 체 K에서 온다.
- 벡터공간 공리는 덧셈 구조와 스칼라곱 호환성을 동시에 요구한다.
- 공리만으로도 $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ 같은 기본 법칙을 증명할 수 있다.
- $\mathbb{R}^n$, $P_n(\mathbb{R})$는 대표적인 벡터공간이다.
- 이후의 기저, 차원, 선형사상 이론은 이 공리 체계 위에서 전개된다.

1.2 부분공간과 생성부분공간

이 절은 원고 작성 예정입니다.

1.3 선형결합, 선형독립, 생성집합

이 절은 원고 작성 예정입니다.

1.4 기저(Basis)와 좌표표현

이 절은 원고 작성 예정입니다.

1.5 차원(Dimension)과 기저교환법

이 절은 원고 작성 예정입니다.

1.6 부분공간의 합, 교집합, 직합

이 절은 원고 작성 예정입니다.