선형대수학 강의노트 (Chapter 1 Preview)

Knowledge Lupin

February 25, 2026

Contents

I 연립방정식과 행렬 **1**

1 연립일차방정식과 Gauss 소거법 **3**

1.1 선형시스템과 증강행렬 3
1.2 기본 행연산과 해집합 보존 4
1.3 기약행 사다리꼴과 피벗 5
1.4 동차/비동차 해공간과 매개화 7
1.5 Gauss–Jordan 알고리즘 8
1.6 응용 9

Part I

연립방정식과 행렬

Chapter 1

연립일차방정식과 Gauss 소거법

장 도입

이 장에서는 연립일차방정식을 행렬 언어로 바꾸고, 소거법이 왜 정당한지부터 차근차근 정리하겠습니다. 계산 절차만 외우기보다, 각 단계가 해집합을 보존한다는 사실을 함께 확인해 주시면 이후 장을 훨씬 안정적으로 따라가실 수 있습니다.

장 학습목표

1. 연립일차방정식을 증강행렬로 표준화할 수 있다.
2. 기본 행연산이 해집합을 보존함을 설명할 수 있다.
3. RREF를 통해 해를 매개화하고 구조를 해석할 수 있다.

1.1 선형시스템과 증강행렬

도입 설명

선형시스템은 미지수에 대한 조건을 모은 것입니다. 이를 증강행렬로 바꾸면 계산 규칙이 통일되어 이후 모든 장에서 같은 언어를 사용할 수 있습니다.

학습목표

1. 선형시스템의 표준형을 쓸 수 있습니다.
2. 계수행렬과 증강행렬을 구분할 수 있습니다.
3. 동차/비동차 시스템을 분류할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 연립일차방정식
- 행렬의 기본 표기

핵심 내용

정의 1.1.1. *K를 체라 하자. m개의 방정식과 n개의 미지수로 이루어진 식*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (1 \le i \le m)$$

을 K 위의 연립일차방정식*이라 한다.*

정의 1.1.2. *위 시스템에 대해 $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, $\mathbf{b} = (b_i) \in K^m$ 를 두면*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

로 쓸 수 있다. 이때 $(A \mid \mathbf{b})$ 를 증강행렬이라 한다.

예제 1.1.3. *다음 시스템*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

의 증강행렬은

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

입니다.

주의

주의 1.1.4. *증강행렬의 마지막 열은 상수항 열입니다. 계수행렬과 섞어서 행연산을 기록하면 계산은 맞아도 해석이 틀리기 쉽습니다.*

주의 1.1.5. *동차시스템($\mathbf{b} = \mathbf{0}$)과 비동차시스템($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$)은 해집합의 구조가 다릅니다. 이 구분을 처음부터 유지해야 합니다.*

자가진단퀴즈

1. 임의의 3×4 계수행렬과 $\mathbf{b} \in K^3$ 를 잡아 증강행렬을 쓰십시오.
2. 왜 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 표기가 계산과 이론을 동시에 단순화하는지 설명해 보십시오.
3. 동차시스템의 해집합이 항상 공집합이 아님을 증명하십시오.

1.2 기본 행연산과 해집합 보존

도입 설명

소거법은 세 가지 기본 행연산으로 이루어집니다. 핵심은 이 연산들이 시스템을 동치인 시스템으로 바꾼다는 점입니다.

학습목표

1. 세 가지 기본 행연산을 정확히 정의할 수 있습니다.
2. 각 행연산이 해집합을 보존함을 설명할 수 있습니다.
3. 행렬의 행동치(row equivalence)를 이해할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 등식의 동치 변형
- 선형결합

핵심 내용

정의 1.2.1. *다음 세 연산을 기본 행연산이라 한다.*

(a) *한 행에 0이 아닌 스칼라를 곱한다.*

(b) *한 행에 다른 행의 스칼라배를 더한다.*

(c) *두 행을 맞바꾼다.*

증명 전략. 해집합 보존을 보이려면, 각 행연산이 원래 방정식들의 선형결합으로 새 방정식을 만들며, 역연산도 같은 종류의 행연산임을 확인하면 됩니다.

정리 1.2.2 (행연산의 해집합 보존)**.** *증강행렬에 기본 행연산을 한 번 적용해 얻은 새 시스템은 원래 시스템과 같은 해집합을 갖는다.*

Proof. (1) 한 행에 $c \neq 0$을 곱하는 연산은 해당 방정식의 양변에 c를 곱하는 것과 같으므로 동치다. (2) i번째 행에 j번째 행의 c배를 더하는 연산은 i번째 방정식을 i번째 방정식과 j번째 방정식의 선형결합으로 바꾸는 것이므로 동치다. (3) 두 행을 바꾸는 연산은 방정식의 나열 순서만 바꾸므로 해집합이 바뀌지 않는다. 세 연산의 역연산도 각각 같은 종류의 기본 행연산이다. 따라서 유한 번의 기본 행연산으로 얻은 시스템은 항상 원래 시스템과 동치다. □

의미 해석. 이 정리 덕분에 우리는 ”같은 문제를 더 계산하기 쉬운 형태로 바꿀 권리”를 얻습니다. 소거법의 정당성은 바로 여기서 출발합니다.

예제 1.2.3. *다음 증강행렬에 $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$를 적용하면*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

이고 두 시스템의 해집합은 같습니다.

주의

주의 1.2.4. *열연산은 일반적으로 해집합을 보존하지 않습니다. 연립방정식 해법에서는 행연산만 사용해야 합니다.*

주의 1.2.5. *$R_i \leftarrow 0 \cdot R_i$는 기본 행연산이 아닙니다. 0배를 허용하면 정보가 소실되어 동치성이 깨집니다.*

자가진단퀴즈

1. 각 기본 행연산의 역연산을 적어 보십시오.
2. 왜 열교환은 미지수 순서를 바꾼 것으로 해석해야 하는지 설명해 보십시오.
3. 두 행의 스칼라배가 같은 경우 시스템 해의 구조가 어떻게 바뀌는지 예를 들어 설명하십시오.

1.3 기약행 사다리꼴과 피벗

도입 설명

RREF는 해를 읽기 가장 쉬운 표준형입니다. 피벗과 자유변수를 구분하면 해집합의 차원을 바로 파악할 수 있습니다.

학습목표

1. RREF 조건을 정확히 말할 수 있습니다.
2. 피벗열과 자유열을 구분할 수 있습니다.
3. 해를 매개변수 형태로 표현할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 기본 행연산
- 동치 시스템

핵심 내용

정의 1.3.1. *행렬 R 이 다음을 만족하면 기약행 사다리꼴(RREF)이라 한다.*

(i) 각 영이 아닌 행의 첫 비영원소는 1 이다.

(ii) 피벗이 있는 열에서 그 피벗을 제외한 나머지 원소는 모두 0 이다.

(iii) 아래 행으로 갈수록 피벗의 위치가 오른쪽으로 이동한다.

(iv) 모든 영행은 아래쪽에 모인다.

증명 전략. RREF 존재는 소거 알고리즘으로, 유일성은 같은 행공간을 갖는 두 RREF를 비교하는 방식으로 보입니다.

정리 1.3.2 (RREF의 존재와 유일성). *모든 행렬은 어떤 RREF와 행동치이며, 그 RREF는 유일하다.*

Proof. 존재성은 Gauss–Jordan 소거 절차를 수행하면 얻어진다. 유일성은 표준적인 사실로, 같은 행공간을 갖는 두 RREF의 피벗 위치가 일치하고 각 피벗열이 동일하게 정규화됨을 보이면 된다. 따라서 RREF는 유일하다. □

의미 해석. 유일성은 계산 검산의 기준을 제공합니다. 서로 다른 경로로 소거해도 마지막 RREF는 같아야 합니다.

예제 1.3.3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

여기서 피벗변수는 x_1, x_3, 자유변수는 x_2 입니다.

주의

주의 1.3.4. *피벗 개수와 미지수 개수를 혼동하면 해의 자유도를 잘못 계산하게 됩니다. 자유도는 $n - \mathrm{rank}(A)$ 입니다.*

주의 1.3.5. *비동차 시스템에서 모순행($[0 \ \cdots \ 0 \mid 1]$)이 나타나면 해가 없다는 뜻입니다.*

자가진단퀴즈

1. 주어진 RREF에서 피벗열과 자유열을 찾으십시오.
2. 왜 RREF 유일성이 알고리즘 검산에 중요한지 설명하십시오.
3. 동차시스템에서 자유변수가 하나 이상이면 비자명해가 존재함을 증명하십시오.

1.4 동차/비동차 해공간과 매개화

도입 설명

해를 단순히 ”구했다”에서 끝내지 않고, 해집합의 구조를 벡터공간 관점으로 정리합니다.

학습목표

1. 동차해의 부분공간 성질을 설명할 수 있습니다.
2. 비동차해를 특수해와 동차해의 합으로 표현할 수 있습니다.
3. 해를 매개변수 형태로 기술할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 벡터공간 기초
- RREF 해석

핵심 내용

증명 전략. 동차해집합은 선형사상 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$의 kernel로 보고, 비동차해는 한 특수해를 기준으로 kernel의 평행이동으로 해석합니다.

정리 1.4.1. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 해집합은 K^n의 부분공간이다. 또한 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$가 해를 가지면, 그 해집합은*

$$\mathbf{x}_p + \ker A$$

꼴이다($\mathbf{x}_p$는 임의의 특수해).

Proof. 첫 문장은 $\ker A = \{\mathbf{x} \in K^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ 정의에서 바로 따라온다. 둘째 문장을 위해 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$의 해 $\mathbf{x}$를 하나 잡으면

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

이므로 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in \ker A$다. 역으로 $\mathbf{x}_p + \mathbf{z}$에 대해

$$A(\mathbf{x}_p + \mathbf{z}) = A\mathbf{x}_p + A\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

이므로 성립한다. □

의미 해석. 비동차 문제를 ”특수해 하나 + 동차 문제”로 분리하면 계산과 이론이 동시에 단순해집니다. 이 관점은 이후 선형사상 이론 전체의 표준 관점이 됩니다.

예제 1.4.2. *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$의 한 해가 $\mathbf{x}_p = (1, 0, 2)^T$이고*

$$\ker A = \operatorname{span}\{(1, -1, 0)^T, (0, 2, 1)^T\}$$

이면 전체 해는

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + s(1, -1, 0)^T + t(0, 2, 1)^T$$

입니다.

주의

주의 1.4.3. *동차해의 기저를 구하지 않고 특수해만 제시하면 전체 해집합을 놓치게 됩니다.*

주의 1.4.4. *특수해는 유일하지 않습니다. 서로 다른 특수해의 차는 항상 동차해입니다.*

자가진단퀴즈

1. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 해집합이 왜 부분공간인지 공리로 확인해 보십시오.
2. 특수해 두 개의 차가 kernel에 속함을 보이십시오.
3. 자유변수 2개인 시스템의 일반해를 매개변수로 작성해 보십시오.

1.5 Gauss–Jordan 알고리즘

도입 설명

알고리즘을 재현 가능한 절차로 고정하면, 독학에서도 계산 실수를 크게 줄일 수 있습니다.

학습목표

1. Gauss 소거와 Gauss–Jordan 소거를 구분할 수 있습니다.
2. 알고리즘 단계를 스스로 실행할 수 있습니다.
3. 계산 검산 체크리스트를 적용할 수 있습니다.

선수개념 체크

- RREF
- 기본 행연산

핵심 내용

정의 1.5.1. Gauss 소거법*은 사다리꼴을 만드는 절차이고,* Gauss–Jordan 소거법*은 추가 소거로 RREF 까지 만드는 절차이다.*

예제 1.5.2. *다음 증강행렬을 Gauss–Jordan으로 소거하면*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

따라서 해는 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ *입니다.*

주의

주의 1.5.3. *분수 계산을 늦추려고 무리하게 정수 연산만 고집하면 중간 수가 비대해져 오히려 실수가 늘 수 있습니다.*

주의 1.5.4. *피벗 선택을 매 단계 기록하지 않으면 역추적에서 오답이 자주 발생합니다.*

자가진단퀴즈

1. 임의의 3×3 시스템을 직접 만들어 Gauss와 Gauss–Jordan을 각각 실행해 보십시오.
2. 두 소거법의 계산량 차이를 질적으로 설명해 보십시오.
3. RREF 결과를 원래 식에 대입해 검산하는 습관이 왜 중요한지 쓰십시오.

1.6 응용

응용 1.6.1. *회로 해석의 선형시스템(키르히호프 방정식)을 증강행렬로 세우고, Gauss–Jordan 소거로 해를 구해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상