

선형대수학 강의노트 (Chapter 1 Preview)

Knowledge Lupin

February 25, 2026

Contents

I	기초 선형대수	1
1	벡터공간	3
1.1	체(Field)와 벡터공간의 공리	3
1.2	부분공간과 생성부분공간	5
1.3	선형결합, 선형독립, 생성집합	6
1.4	기저(Basis)와 좌표표현	6
1.5	차원(Dimension)과 기저교환법	7
1.6	부분공간의 합, 교집합, 직합	7

Part I

기초 선형대수

Chapter 1

벡터공간

1.1 체(Field)와 벡터공간의 공리

동기

선형대수에서 우리가 반복하는 기본 연산은 두 가지다.

1. 벡터를 더한다.
2. 벡터를 스칼라(숫자)로 늘리거나 줄인다.

이 연산이 항상 일관되게 작동하려면, 스칼라의 구조와 벡터 연산 규칙을 먼저 엄밀히 고정해야 한다. 이 절은 이후의 기저, 차원, 선형사상, 고유값 이론 전체를 지탱하는 출발점이다.

정의

정의 1.1.1 (체). 집합 K 와 연산 $+$, \cdot 가 다음을 만족하면 K 를 체라 한다.

(1) $(K, +)$ 는 아벨군이다.

(2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ 는 아벨군이다.

(3) 분배법칙 $a(b + c) = ab + ac$ 가 성립한다.

대표적인 예는 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 이며, \mathbb{Z} 는 체가 아니다. 예를 들어 $2 \in \mathbb{Z}$ 의 곱셈 역원 $\frac{1}{2}$ 는 \mathbb{Z} 에 속하지 않는다.

정의 1.1.2 (벡터공간). 체 K 위의 집합 \mathcal{V} 에 대해

- 벡터 덧셈 $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$,
- 스칼라곱 $K \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, (a, \mathbf{v}) \mapsto a\mathbf{v}$

가 정의되어 있고, 임의의 $a, b \in K, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ 에 대해 다음 공리가 성립하면 \mathcal{V} 를 K 위의 벡터공간이라 한다.

$$(VS1) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$(VS2) \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(VS3) \quad \text{영 벡터 } \mathbf{0} \in \mathcal{V} \text{ 가 존재하여 } \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

$$(VS4) \quad \text{각 } \mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{에 대해 } \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0} \text{ 인 } -\mathbf{v} \text{ 가 존재}$$

$$(VS5) \quad a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$

$$(VS6) \quad (a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

$$(VS7) \quad (ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$$

$$(VS8) \quad 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

정리와 증명

정리 1.1.3 (영벡터와 역벡터의 유일성). K 위의 벡터공간 \mathcal{V} 에서 영벡터는 유일하고, 각 벡터의 덧셈 역벡터도 유일하다.

Proof. 먼저 영벡터의 유일성을 보이자. $\mathbf{0}, \mathbf{0}'$ 가 모두 영벡터라고 가정하면,

$$\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' \quad \text{및} \quad \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$$

가되어 $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$ 를 얻는다.

다음으로 역벡터의 유일성을 보이자. \mathbf{w}, \mathbf{w}' 가 모두 \mathbf{v} 의 역벡터라면 $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}, \mathbf{v} + \mathbf{w}' = \mathbf{0}$ 이고,

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}') = (\mathbf{w} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{w}' = \mathbf{0} + \mathbf{w}' = \mathbf{w}'$$

이므로 역벡터도 유일하다. \square

정리 1.1.4 (기본 계산 법칙). 임의의 $a \in K, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$(1) \quad 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$(2) \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$(3) \quad (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

$$(4) \quad (-a)\mathbf{v} = -(a\mathbf{v})$$

Proof. (1) $(0+0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v}+0\mathbf{v}$ 인데 좌변은 $0\mathbf{v}$ 이므로 $0\mathbf{v} = 0\mathbf{v}+0\mathbf{v}$. 양변에 $-(0\mathbf{v})$ 를 더하면 $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$$(2) \quad a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0} \text{에서 좌변이 } a\mathbf{0} \text{ 이므로 같은 방식으로 } a\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$$(3) \quad \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = (1 + (-1))\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}. \text{ 즉 } (-1)\mathbf{v} \text{는 } \mathbf{v} \text{의 역벡터이므로 } (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

$$(4) \quad (-a)\mathbf{v} + a\mathbf{v} = ((-a) + a)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}. \text{ 따라서 } (-a)\mathbf{v} \text{는 } a\mathbf{v} \text{의 역벡터이므로 } (-a)\mathbf{v} = -(a\mathbf{v}). \quad \square$$

예제

예제 1.1.5 (기초: \mathbb{R}^n). 벡터를

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

로 두고

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad a\mathbf{x} = (ax_1, \dots, ax_n)$$

로 정의하면 벡터공간 공리 8개가 모두 성립한다. 따라서 \mathbb{R}^n 은 \mathbb{R} 위의 벡터공간이다.

예제 1.1.6 (연결: 다항식 공간 $P_n(\mathbb{R})$).

$$P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

는 차수가 n 이하인 실계수 다항식 전체의 집합이다. 다항식의 덧셈과 스칼라곱에 대해 닫혀 있으므로 $P_n(\mathbb{R})$ 도 \mathbb{R} 위의 벡터공간이다.

Remark. \mathbb{R}^2 는 표준 연산으로는 \mathbb{R} 위의 벡터공간이다. 이때 스칼라곱이 실수배로 정의되어 있으므로, 같은 연산을 그대로 둔 채 스칼라체만 \mathbb{C} 로 바꾸는 것은 불가능하다.

연습문제 (4단계 + 힌트)

Level 1. 기초 확인

연습문제 1.1.7. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 중 체인 것을 모두 고르시오.

힌트. 0이 아닌 원소의 곱셈 역원이 항상 존재하는지 확인하라.

연습문제 1.1.8. 벡터공간 공리 중 분배법칙에 해당하는 두 식을 정확히 쓰시오.

힌트. 스칼라가 벡터합에 분배되는 식과, 스칼라합이 벡터에 분배되는 식을 구분하라.

Level 2. 표준 응용

연습문제 1.1.9. $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ 가 \mathbb{R}^3 의 부분공간인지 판정하시오.

힌트. 영벡터 포함, 덧셈 닫힘, 스칼라곱 닫힘의 세 조건을 점검하라.

연습문제 1.1.10. 정리의 항목 (2)인 $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ 을 공리만으로 다시 증명하시오.

힌트. $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ 에서 시작하라.

Level 3. 연결 추론

연습문제 1.1.11. 벡터공간 \mathcal{V} 에서

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = a\mathbf{u} - a\mathbf{v}$$

를 증명하시오.

힌트. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ 로 바꾸고 $(-a)\mathbf{v} = -(a\mathbf{v})$ 를 사용하라.

연습문제 1.1.12. $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ 이면 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ 임을 보여라.

힌트. 양변에 $-\mathbf{w}$ 를 더하라.

Level 4. 도전 확장

연습문제 1.1.13. \mathbb{R}^2 에서 덧셈은 표준 덧셈으로 두고 스칼라곱을

$$a \odot (x, y) = (ax, y)$$

로 정의하자. 이 구조가 \mathbb{R} 위의 벡터공간인지 판정하시오.

힌트. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$ 또는 $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ 를 대입해 보라.

연습문제 1.1.14. 체 공리에서 곱셈 교환법칙을 제거하면 어떤 대수 구조가 되는지 조사하고, 선형대수에서 어떤 주제로 확장되는지 간단히 정리하시오.

힌트. division ring(또는 skew field) 키워드를 참고하라.

요약

- 벡터공간의 스칼라는 체 K 에서 온다.
- 벡터공간 공리는 덧셈 구조와 스칼라곱 호환성을 동시에 요구한다.
- 공리만으로도 $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ 같은 기본 법칙을 증명할 수 있다.
- \mathbb{R}^n , $P_n(\mathbb{R})$ 는 대표적인 벡터공간이다.
- 이후의 기저, 차원, 선형사상 이론은 이 공리 체계 위에서 전개된다.

1.2 부분공간과 생성부분공간**동기**

이 절은 작성 예정입니다.

정의

핵심 정의를 작성 예정입니다.

정리와 증명

핵심 정리와 증명을 작성 예정입니다.

예제

기초 예제와 연결 예제를 작성 예정입니다.

연습문제 (4단계 + 힌트)

Level 1–4 문제와 힌트를 작성 예정입니다.

요약

핵심 요약 5줄을 작성 예정입니다.

1.3 선형결합, 선형독립, 생성집합

동기

이 절은 작성 예정입니다.

정의

핵심 정의를 작성 예정입니다.

정리와 증명

핵심 정리와 증명을 작성 예정입니다.

예제

기초 예제와 연결 예제를 작성 예정입니다.

연습문제 (4단계 + 힌트)

Level 1–4 문제와 힌트를 작성 예정입니다.

요약

핵심 요약 5줄을 작성 예정입니다.

1.4 기저(Basis)와 좌표표현

동기

이 절은 작성 예정입니다.

정의

핵심 정의를 작성 예정입니다.

정리와 증명

핵심 정리와 증명을 작성 예정입니다.

예제

기초 예제와 연결 예제를 작성 예정입니다.

연습문제 (4단계 + 힌트)

Level 1~4 문제와 힌트를 작성 예정입니다.

요약

핵심 요약 5줄을 작성 예정입니다.

1.5 차원(Dimension)과 기저교환법

동기

이 절은 작성 예정입니다.

정의

핵심 정의를 작성 예정입니다.

정리와 증명

핵심 정리와 증명을 작성 예정입니다.

예제

기초 예제와 연결 예제를 작성 예정입니다.

연습문제 (4단계 + 힌트)

Level 1~4 문제와 힌트를 작성 예정입니다.

요약

핵심 요약 5줄을 작성 예정입니다.

1.6 부분공간의 합, 교집합, 직합

동기

이 절은 작성 예정입니다.

정의

핵심 정의를 작성 예정입니다.

정리와 증명

핵심 정리와 증명을 작성 예정입니다.

예제

기초 예제와 연결 예제를 작성 예정입니다.

연습문제 (4단계 + 힌트)

Level 1~4 문제와 힌트를 작성 예정입니다.

요약

핵심 요약 5줄을 작성 예정입니다.