선형대수학 강의노트

Knowledge Lupin

February 25, 2026

Contents

머리말

이 원고는 수학전공 2학년 독학자를 대상으로 집필하는 선형대수학 교과서 초안입니다. 설명 문단은 경어체로 친절하게 서술하고, 정의/정리/증명은 엄밀한 교과서 형식으로 구성합니다. 중심 서사는 행렬 계산에서 시작하여 벡터공간과 선형사상으로 확장한 뒤, 분해정리와 Jordan 표준형, 그리고 스펙트럴 이론까지 연결하는 흐름으로 설계합니다.

Part I

연립방정식과 행렬

Chapter 1

연립일차방정식과 Gauss 소거법

장 도입

이 장에서는 연립일차방정식을 행렬 언어로 바꾸고, 소거법이 왜 정당한지부터 차근차근 정리하겠습니다. 계산 절차만 외우기보다, 각 단계가 해집합을 보존한다는 사실을 함께 확인해 주시면 이후 장을 훨씬 안정적으로 따라가실 수 있습니다.

장 학습목표

1. 연립일차방정식을 증강행렬로 표준화할 수 있다.
2. 기본 행연산이 해집합을 보존함을 설명할 수 있다.
3. RREF를 통해 해를 매개화하고 구조를 해석할 수 있다.

1.1 선형시스템과 증강행렬

도입 설명

선형시스템은 미지수에 대한 조건을 모은 것입니다. 이를 증강행렬로 바꾸면 계산 규칙이 통일되어 이후 모든 장에서 같은 언어를 사용할 수 있습니다.

학습목표

1. 선형시스템의 표준형을 쓸 수 있습니다.
2. 계수행렬과 증강행렬을 구분할 수 있습니다.
3. 동차/비동차 시스템을 분류할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 연립일차방정식
- 행렬의 기본 표기

핵심 내용

정의 1.1.1. *K를 체라 하자. m개의 방정식과 n개의 미지수로 이루어진 식*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (1 \le i \le m)$$

을 K 위의 연립일차방정식*이라 한다.*

정의 1.1.2. *위 시스템에 대해 $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, $\mathbf{b} = (b_i) \in K^m$ 를 두면*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

로 쓸 수 있다. 이때 $(A \mid \mathbf{b})$ 를 증강행렬이라 한다.

예제 1.1.3. *다음 시스템*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

의 증강행렬은

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

입니다.

주의

주의 1.1.4. *증강행렬의 마지막 열은 상수항 열입니다. 계수행렬과 섞어서 행연산을 기록하면 계산은 맞아도 해석이 틀리기 쉽습니다.*

주의 1.1.5. *동차시스템($\mathbf{b} = \mathbf{0}$)과 비동차시스템($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$)은 해집합의 구조가 다릅니다. 이 구분을 처음부터 유지해야 합니다.*

자가진단퀴즈

1. 임의의 3×4 계수행렬과 $\mathbf{b} \in K^3$ 를 잡아 증강행렬을 쓰십시오.
2. 왜 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 표기가 계산과 이론을 동시에 단순화하는지 설명해 보십시오.
3. 동차시스템의 해집합이 항상 공집합이 아님을 증명하십시오.

1.2 기본 행연산과 해집합 보존

도입 설명

소거법은 세 가지 기본 행연산으로 이루어집니다. 핵심은 이 연산들이 시스템을 동치인 시스템으로 바꾼다는 점입니다.

학습목표

1. 세 가지 기본 행연산을 정확히 정의할 수 있습니다.
2. 각 행연산이 해집합을 보존함을 설명할 수 있습니다.
3. 행렬의 행동치(row equivalence)를 이해할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 등식의 동치 변형
- 선형결합

핵심 내용

정의 1.2.1. *다음 세 연산을 기본 행연산이라 한다.*

(a) *한 행에 0이 아닌 스칼라를 곱한다.*

(b) *한 행에 다른 행의 스칼라배를 더한다.*

(c) *두 행을 맞바꾼다.*

증명 전략. 해집합 보존을 보이려면, 각 행연산이 원래 방정식들의 선형결합으로 새 방정식을 만들며, 역연산도 같은 종류의 행연산임을 확인하면 됩니다.

정리 1.2.2 (행연산의 해집합 보존)**.** *증강행렬에 기본 행연산을 한 번 적용해 얻은 새 시스템은 원래 시스템과 같은 해집합을 갖는다.*

Proof. (1) 한 행에 $c \neq 0$을 곱하는 연산은 해당 방정식의 양변에 c를 곱하는 것과 같으므로 동치다. (2) i번째 행에 j번째 행의 c배를 더하는 연산은 i번째 방정식을 i번째 방정식과 j번째 방정식의 선형결합으로 바꾸는 것이므로 동치다. (3) 두 행을 바꾸는 연산은 방정식의 나열 순서만 바꾸므로 해집합이 바뀌지 않는다. 세 연산의 역연산도 각각 같은 종류의 기본 행연산이다. 따라서 유한 번의 기본 행연산으로 얻은 시스템은 항상 원래 시스템과 동치다. □

의미 해석. 이 정리 덕분에 우리는 ”같은 문제를 더 계산하기 쉬운 형태로 바꿀 권리”를 얻습니다. 소거법의 정당성은 바로 여기서 출발합니다.

예제 1.2.3. *다음 증강행렬에 $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$를 적용하면*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

이고 두 시스템의 해집합은 같습니다.

주의

주의 1.2.4. *열연산은 일반적으로 해집합을 보존하지 않습니다. 연립방정식 해법에서는 행연산만 사용해야 합니다.*

주의 1.2.5. $R_i \leftarrow 0 \cdot R_i$*는 기본 행연산이 아닙니다.* 0*배를 허용하면 정보가 소실되어 동치성이 깨집니다.*

자가진단퀴즈

1. 각 기본 행연산의 역연산을 적어 보십시오.
2. 왜 열교환은 미지수 순서를 바꾼 것으로 해석해야 하는지 설명해 보십시오.
3. 두 행의 스칼라배가 같은 경우 시스템 해의 구조가 어떻게 바뀌는지 예를 들어 설명하십시오.

1.3 기약행 사다리꼴과 피벗

도입 설명

RREF는 해를 읽기 가장 쉬운 표준형입니다. 피벗과 자유변수를 구분하면 해집합의 차원을 바로 파악할 수 있습니다.

학습목표

1. RREF 조건을 정확히 말할 수 있습니다.
2. 피벗열과 자유열을 구분할 수 있습니다.
3. 해를 매개변수 형태로 표현할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 기본 행연산
- 동치 시스템

핵심 내용

정의 1.3.1. *행렬 R 이 다음을 만족하면 기약행 사다리꼴(RREF)이라 한다.*

(i) 각 영이 아닌 행의 첫 비영원소는 1 이다.

(ii) 피벗이 있는 열에서 그 피벗을 제외한 나머지 원소는 모두 0 이다.

(iii) 아래 행으로 갈수록 피벗의 위치가 오른쪽으로 이동한다.

(iv) 모든 영행은 아래쪽에 모인다.

증명 전략. RREF 존재는 소거 알고리즘으로, 유일성은 같은 행공간을 갖는 두 RREF를 비교하는 방식으로 보입니다.

정리 1.3.2 (RREF의 존재와 유일성). *모든 행렬은 어떤 RREF와 행동치이며, 그 RREF는 유일하다.*

Proof. 존재성은 Gauss–Jordan 소거 절차를 수행하면 얻어진다. 유일성은 표준적인 사실로, 같은 행공간을 갖는 두 RREF의 피벗 위치가 일치하고 각 피벗열이 동일하게 정규화됨을 보이면 된다. 따라서 RREF는 유일하다. □

의미 해석. 유일성은 계산 검산의 기준을 제공합니다. 서로 다른 경로로 소거해도 마지막 RREF는 같아야 합니다.

예제 1.3.3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

여기서 피벗변수는 x_1, x_3, 자유변수는 x_2 입니다.

주의

주의 1.3.4. *피벗 개수와 미지수 개수를 혼동하면 해의 자유도를 잘못 계산하게 됩니다. 자유도는 $n - \mathrm{rank}(A)$ 입니다.*

주의 1.3.5. *비동차 시스템에서 모순행($[0\ \cdots\ 0 \mid 1]$)이 나타나면 해가 없다는 뜻입니다.*

자가진단퀴즈

1. 주어진 RREF에서 피벗열과 자유열을 찾으십시오.
2. 왜 RREF 유일성이 알고리즘 검산에 중요한지 설명하십시오.
3. 동차시스템에서 자유변수가 하나 이상이면 비자명해가 존재함을 증명하십시오.

1.4 동차/비동차 해공간과 매개화

도입 설명

해를 단순히 "구했다"에서 끝내지 않고, 해집합의 구조를 벡터공간 관점으로 정리합니다.

학습목표

1. 동차해의 부분공간 성질을 설명할 수 있습니다.
2. 비동차해를 특수해와 동차해의 합으로 표현할 수 있습니다.
3. 해를 매개변수 형태로 기술할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 벡터공간 기초
- RREF 해석

핵심 내용

증명 전략. 동차해집합은 선형사상 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$의 kernel로 보고, 비동차해는 한 특수해를 기준으로 kernel의 평행이동으로 해석합니다.

정리 1.4.1. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 해집합은 K^n의 부분공간이다. 또한 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$가 해를 가지면, 그 해집합은*

$$\mathbf{x}_p + \ker A$$

꼴이다($\mathbf{x}_p$는 임의의 특수해).

Proof. 첫 문장은 $\ker A = \{\mathbf{x} \in K^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ 정의에서 바로 따라온다. 둘째 문장을 위해 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$의 해 $\mathbf{x}$를 하나 잡으면

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

이므로 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in \ker A$다. 역으로 $\mathbf{x}_p + \mathbf{z}$에 대해

$$A(\mathbf{x}_p + \mathbf{z}) = A\mathbf{x}_p + A\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

이므로 성립한다. □

의미 해석. 비동차 문제를 "특수해 하나 + 동차 문제"로 분리하면 계산과 이론이 동시에 단순해집니다. 이 관점은 이후 선형사상 이론 전체의 표준 관점이 됩니다.

예제 1.4.2. *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$의 한 해가 $\mathbf{x}_p = (1, 0, 2)^T$ 이고*

$$\ker A = \operatorname{span}\{(1, -1, 0)^T, (0, 2, 1)^T\}$$

이면 전체 해는

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + s(1, -1, 0)^T + t(0, 2, 1)^T$$

입니다.

주의

주의 1.4.3. *동차해의 기저를 구하지 않고 특수해만 제시하면 전체 해집합을 놓치게 됩니다.*

주의 1.4.4. *특수해는 유일하지 않습니다. 서로 다른 특수해의 차는 항상 동차해입니다.*

자가진단퀴즈

1. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 해집합이 왜 부분공간인지 공리로 확인해 보십시오.
2. 특수해 두 개의 차가 kernel에 속함을 보이십시오.
3. 자유변수 2개인 시스템의 일반해를 매개변수로 작성해 보십시오.

1.5 Gauss–Jordan 알고리즘

도입 설명

알고리즘을 재현 가능한 절차로 고정하면, 독학에서도 계산 실수를 크게 줄일 수 있습니다.

학습목표

1. Gauss 소거와 Gauss–Jordan 소거를 구분할 수 있습니다.
2. 알고리즘 단계를 스스로 실행할 수 있습니다.
3. 계산 검산 체크리스트를 적용할 수 있습니다.

선수개념 체크

- RREF
- 기본 행연산

핵심 내용

정의 1.5.1. Gauss 소거법*은 사다리꼴을 만드는 절차이고,* Gauss–Jordan 소거법*은 추가 소거로 RREF까지 만드는 절차이다.*

예제 1.5.2. *다음 증강행렬을 Gauss–Jordan으로 소거하면*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

따라서 해는 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ *입니다.*

주의

주의 1.5.3. *분수 계산을 늦추려고 무리하게 정수 연산만 고집하면 중간 수가 비대해져 오히려 실수가 늘 수 있습니다.*

주의 1.5.4. *피벗 선택을 매 단계 기록하지 않으면 역추적에서 오답이 자주 발생합니다.*

자가진단퀴즈

1. 임의의 3×3 시스템을 직접 만들어 Gauss와 Gauss–Jordan을 각각 실행해 보십시오.
2. 두 소거법의 계산량 차이를 질적으로 설명해 보십시오.
3. RREF 결과를 원래 식에 대입해 검산하는 습관이 왜 중요한지 쓰십시오.

1.6 응용

응용 1.6.1. *회로 해석의 선형시스템(키르히호프 방정식)을 증강행렬로 세우고, Gauss–Jordan 소거로 해를 구해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 2

행렬 연산, 가역성, 랭크

장 도입

이 장에서는 행렬을 단순한 숫자표가 아니라 선형변환의 표현으로 보겠습니다. 곱셈의 의미, 가역성의 동치조건, 랭크의 해석이 하나의 흐름으로 연결된다는 점을 확인하겠습니다.

장 학습목표

1. 행렬 연산의 정의와 의미를 정확히 설명할 수 있다.
2. 가역성 동치조건을 정리하고 문제에 적용할 수 있다.
3. 랭크를 해의 구조와 선형독립성에 연결할 수 있다.

2.1 행렬 연산의 의미

도입 설명

행렬 연산은 추상 연산이 아니라 선형결합과 합성의 규칙입니다. 이 절에서는 연산 정의를 의미와 함께 정리합니다.

학습목표

1. 행렬의 합/스칼라곱/곱셈 정의를 쓸 수 있습니다.
2. 행렬곱이 선형결합으로 읽힌다는 점을 설명할 수 있습니다.
3. 차원 조건으로 곱 가능 여부를 판정할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 인덱스 표기
- 벡터의 선형결합

핵심 내용

정의 2.1.1. $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, $B = (b_{jk}) \in M_{n,r}(K)$*에 대해 행렬곱* $AB = (c_{ik}) \in M_{m,r}(K)$*를*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

로 정의한다.

예제 2.1.2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

입니다. 첫 성분은 두 번째 벡터의 성분을 첫 행의 선형결합으로 만든 값입니다.

주의

주의 2.1.3. *AB와 BA가 모두 정의되는 경우에도 일반적으로 $AB \neq BA$입니다.*

주의 2.1.4. *행렬곱의 크기는 왼쪽 행렬의 행 개수와 오른쪽 행렬의 열 개수로 결정됩니다.*

자가진단퀴즈

1. $A \in M_{2,3}(K)$, $B \in M_{3,4}(K)$일 때 AB의 크기를 쓰십시오.
2. AB의 k번째 열이 A의 열들의 선형결합임을 설명하십시오.
3. 2×2 행렬 두 개를 골라 $AB \neq BA$ 예를 만드십시오.

2.2 역행렬과 가역성 동치조건

도입 설명

가역행렬은 선형시스템의 유일해와 직접 연결됩니다. 동치조건을 한꺼번에 정리해 두면 판정이 훨씬 빨라집니다.

학습목표

1. 가역행렬의 정의를 정확히 쓸 수 있습니다.
2. 가역성 동치조건을 열거하고 적용할 수 있습니다.
3. 역행렬 존재 판정과 계산을 구분할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 항등행렬
- 기본 행연산

핵심 내용

정의 2.2.1. *정사각행렬 $A \in M_n(K)$에 대해 $AB = BA = I_n$을 만족하는 B가 존재하면 A를 가역행렬이라 하고 $B = A^{-1}$로 쓴다.*

증명 전략. 가역성은 선형시스템의 유일해, RREF, 열벡터 독립성과 서로 동치입니다. 핵심은 각 조건을 "항등행렬로 귀착"시키는 것입니다.

정리 2.2.2 (가역성 동치조건). *$A \in M_n(K)$에 대해 다음은 서로 동치이다.*

(i) *A는 가역이다.*

(ii) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 해는 자명해뿐이다.*

(iii) *A의 RREF가 I_n이다.*

(iv) A의 열벡터들은 K^n의 기저를 이룬다.

Proof. (i)⇒(ii): $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$에 A^{-1}를 곱하면 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$이다. (ii)⇒(iii): 자명해만 가지므로 피벗이 모든 열에 있어 RREF는 I_n이다. (iii)⇒(iv): 피벗이 모든 열에 있으므로 열벡터는 독립이면서 생성한다. (iv)⇒(i): 열벡터가 기저면 선형사상 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$는 동형이므로 역행렬이 존재한다. □

의미 해석. 이 정리는 "가역성"을 계산, 해석, 구조 세 언어로 동시에 번역해 줍니다.

예제 2.2.3. *$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$는 두 열이 종속이므로 가역이 아닙니다. 실제로* det$A = 0$*이고 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 비자명해를 갖습니다.*

주의

주의 2.2.4. *역행렬 계산 전에 역행렬 존재를 먼저 판정하십시오.*

주의 2.2.5. *좌역행렬과 우역행렬이 따로 등장하는 경우는 비정사각행렬 문맥입니다. 이 절에서는 정사각행렬만 다룹니다.*

자가진단퀴즈

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$의 가역성을 두 방법으로 판정하십시오.

2. 가역성 동치조건 중 두 개를 골라 직접 동치 증명을 써 보십시오.

3. A가 가역이면 A^T도 가역임을 보이십시오.

2.3 랭크와 선형시스템의 구조

도입 설명

랭크는 정보량을 측정하는 지표입니다. 피벗 개수와 공간 차원이 하나로 연결됩니다.

학습목표

1. 랭크를 피벗 개수로 계산할 수 있습니다.

2. 행공간/열공간 차원을 랭크로 설명할 수 있습니다.

3. 랭크 조건으로 해의 존재성과 유일성을 판정할 수 있습니다.

선수개념 체크

- RREF

- 부분공간과 차원

핵심 내용

정의 2.3.1. *행렬 A의 랭크(rank)를* rank(A)*로 쓰며, A의 피벗 개수(=열공간의 차원)로 정의한다.*

증명 전략. 해의 존재성은 증강행렬의 모순행 유무로, 유일성은 자유변수 유무로 판정합니다. 두 조건이 랭크 식으로 표현됩니다.

정리 2.3.2 (Rouché–Capelli)**.** *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$가 해를 가질 필요충분조건은*

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid \mathbf{b})$$

이다. 해가 존재할 때 자유변수 개수는 $n - \operatorname{rank}(A)$이다.

Proof. 소거 후 모순행이 없을 필요충분조건이 두 랭크의 일치다. 또한 피벗이 없는 열의 개수가 자유변수 개수이며, 이는 $n - \operatorname{rank}(A)$다. □

의미 해석. 랭크 하나로 "해가 있는가"와 "해가 몇 자유도를 갖는가"를 동시에 읽을 수 있습니다.

예제 2.3.3. *$A \in M_{2,3}(K)$에서 $\operatorname{rank}(A) = 2$이면 동차시스템의 자유변수는 1개입니다. 따라서 비자명해가 존재합니다.*

주의

주의 2.3.4. *랭크는 행연산에 대해 보존되지만, 개별 열벡터 자체는 바뀝니다. 이 점을 혼동하지 마십시오.*

주의 2.3.5. *$\operatorname{rank}(A) = m$이라고 해서 자동으로 해가 유일한 것은 아닙니다. 유일성에는 n과의 관계가 필요합니다.*

자가진단퀴즈

1. $m < n$인 동차시스템이 비자명해를 갖는 이유를 랭크 관점으로 설명하십시오.
2. $\operatorname{rank}(A) = n$이면 단사임을 보이십시오.
3. 증강행렬 랭크 판정이 실제 계산에서 왜 유용한지 쓰십시오.

2.4 응용

응용 2.4.1. *간단한 데이터 적합 문제 $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$를 만들고, 설계행렬의 랭크가 해의 유일성에 어떤 영향을 주는지 해석해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Part II

벡터공간과 선형사상

Chapter 3

벡터공간과 부분공간

장 도입

이 장에서는 선형대수의 공통 언어인 벡터공간을 정식으로 도입합니다. 좌표벡터뿐 아니라 다항식, 함수, 수열도 같은 규칙으로 다룰 수 있음을 확인하겠습니다.

장 학습목표

1. 벡터공간 공리를 정확히 사용할 수 있다.
2. 부분공간 판정 조건을 적용할 수 있다.
3. 생성, 독립, 기저의 기초 언어를 준비할 수 있다.

3.1 벡터공간 공리

도입 설명

벡터공간의 핵심은 대상의 모양이 아니라 연산 규칙입니다. 공리는 이후 모든 정리의 출발점입니다.

학습목표

1. 벡터공간 공리를 정확히 진술할 수 있습니다.
2. 표준 예시와 비예시를 구분할 수 있습니다.
3. 공리 검증 절차를 설명할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 체의 공리
- 함수의 기본 개념

핵심 내용

정의 3.1.1. *체 K 위의 집합 V 가 덧셈과 스칼라곱에 대해 벡터공간 공리를 만족하면 V 를 K-벡터공간이라 한다.*

예제 3.1.2. *K^n, 다항식공간 $K[t]$, 구간 $[a,b]$ 에서 K 값 연속함수공간 $C([a,b],K)$ 는 모두 K-벡터공간입니다.*

주의

주의 3.1.3. *연산이 정의되어 있다고 해서 벡터공간은 아닙니다. 공리 검증이 반드시 필요합니다.*

주의 3.1.4. *스칼라체를 바꾸면 같은 집합도 다른 벡터공간이 될 수 있습니다. 예를 들어 $\mathbb{C}$ 는 $\mathbb{R}$-벡터공간으로도 볼 수 있습니다.*

자가진단퀴즈

1. $\mathbb{R}^2$ 의 부분집합 $\{(x, y) : x + y = 1\}$이 벡터공간이 아닌 이유를 쓰십시오.
2. $K[t]_{\leq 2}$ 가 벡터공간임을 공리로 점검해 보십시오.
3. 스칼라체 변경이 차원에 미치는 영향을 짧게 설명하십시오.

3.2 부분공간 판정

도입 설명

부분공간은 큰 공간 안의 작은 선형세계입니다. 판정 정리를 익히면 많은 구조를 빠르게 확인할 수 있습니다.

학습목표

1. 부분공간 판정 정리를 적용할 수 있습니다.
2. 교집합과 합공간의 성질을 설명할 수 있습니다.
3. 반례를 통해 조건의 필요성을 확인할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 벡터공간 공리
- 집합 연산

핵심 내용

정리 3.2.1 (부분공간 판정)**.** *벡터공간 V 의 부분집합 W 에 대해 다음이 동치이다.*

(i) *W 는 V 의 부분공간이다.*

(ii) *$0 \in W$ 이고, $u, v \in W$, $a, b \in K$ 이면 $au + bv \in W$ 이다.*

Proof. (i)⇒(ii)는 공리에서 즉시 따른다. (ii)⇒(i)는 $a = 1, b = 1$로 덧셈 닫힘, $a = -1, b = 0$으로 덧셈 역원, $b = 0$으로 스칼라곱 닫힘을 얻어 공리를 만족함을 확인하면 된다. □

예제 3.2.2. *$V = \mathbb{R}^3$ 에서*

$$W = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0\}$$

는 선형방정식의 해집합이므로 부분공간입니다.

주의

주의 3.2.3. *W 가 비어 있지 않다는 사실만으로는 부분공간이 아닙니다. $0 \in W$ 확인이 먼저입니다.*

주의 3.2.4. *아핀 부분집합(예: $x + y = 1$)과 부분공간(예: $x + y = 0$)을 구분하십시오.*

자가진단퀴즈

1. 두 부분공간의 교집합이 부분공간임을 보이십시오.
2. 합집합이 항상 부분공간이 아님을 반례로 보이십시오.
3. 해집합 형태 $Ax = 0$이 왜 부분공간인지 설명하십시오.

3.3 생성과 일차독립 기초

도입 설명

생성(span)과 일차독립은 기저 개념의 두 축입니다. 이 절에서 두 개념의 역할을 분명히 구분합니다.

학습목표

1. 생성집합과 span을 정의할 수 있습니다.
2. 일차독립/종속을 판정할 수 있습니다.
3. 최소 생성의 의미를 설명할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 선형결합
- 동차시스템

핵심 내용

정의 3.3.1. *집합 $S \subset V$에 대해 S의 모든 선형결합의 집합을* span(S)*라 한다.*

정의 3.3.2. *벡터열 $(v_1, \dots, v_k)$가*

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_k = 0$$

을 만족하면 일차독립이라 한다.

예제 3.3.3. *$\mathbb{R}^2$에서 $(1, 0), (0, 1)$은 독립이고* span$\{(1, 0), (0, 1)\} = \mathbb{R}^2$ *입니다.*

주의

주의 3.3.4. *"생성한다"와 "독립이다"는 서로 다른 조건입니다. 둘 다 만족해야 기저가 됩니다.*

주의 3.3.5. *독립 판정을 할 때는 동차방정식만 보면 됩니다. 비동차식을 섞지 마십시오.*

자가진단퀴즈

1. 세 벡터가 종속임을 계수관계로 보여 보십시오.
2. span(S)가 부분공간임을 증명하십시오.
3. 생성집합의 원소를 줄일 수 있는 조건을 서술하십시오.

3.4 응용

응용 3.4.1. *다항식공간 P_2에서 $\{1, t, t^2\}$가 기저가 되는 이유를 생성과 독립 관점에서 설명해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 4

기저와 차원

장 도입

기저와 차원은 벡터공간의 크기를 측정하는 핵심 도구입니다. 이 장에서는 기저의 존재와 차원의 불변성을 증명해 선형대수의 기초 언어를 완성하겠습니다.

장 학습목표

1. 기저의 의미를 생성과 독립의 결합으로 설명할 수 있다.
2. 차원 정의의 정당성을 증명할 수 있다.
3. 차원공식을 활용해 공간 구조를 해석할 수 있다.

4.1 기저의 정의와 존재

도입 설명

기저는 좌표계를 만드는 최소 데이터입니다. 생성과 독립의 균형으로 정의됩니다.

학습목표

1. 기저를 엄밀히 정의할 수 있습니다.
2. 유한 생성공간에서 기저를 구성할 수 있습니다.
3. 기저의 비유일성을 이해할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 생성
- 일차독립

핵심 내용

정의 4.1.1. *벡터공간 V 의 부분집합 B 가 V 를 생성하고 일차독립이면 B 를 V 의 기저라 한다.*

증명 전략. 유한 생성집합에서 종속 벡터를 하나씩 제거하면 독립인 생성집합, 즉 기저를 얻을 수 있습니다.

정리 4.1.2. *유한 생성 벡터공간은 기저를 가진다.*

Proof. $V = \mathrm{span}(S)$인 유한집합 S를 잡는다. S가 독립이면 끝이다. 종속이면 어떤 원소가 나머지의 선형결합이므로 제거해도 생성성은 유지된다. 이 과정을 유한 번 반복하면 독립인 생성집합을 얻고, 이것이 기저다. □

의미 해석. 기저 존재는 "모든 유한차원 선형대수 계산은 좌표계로 환원 가능"하다는 선언입니다.

주의

주의 4.1.3. *기저는 일반적으로 유일하지 않습니다. 기저의 개수(원소 수)만이 불변입니다.*

주의 4.1.4. *무한차원 공간에서는 유한한 기저가 존재하지 않을 수 있습니다.*

자가진단퀴즈

1. $\mathbb{R}^3$의 서로 다른 기저 두 개를 써 보십시오.
2. 종속 벡터 제거가 왜 생성성을 유지하는지 설명하십시오.
3. 다항식공간 P_2의 기저를 하나 제시하십시오.

4.2 차원의 정의와 차원공식

도입 설명

차원은 기저의 원소 수입니다. 모든 기저의 크기가 같다는 정당화가 핵심입니다.

학습목표

1. 차원을 엄밀히 정의할 수 있습니다.
2. 모든 기저의 크기가 같음을 설명할 수 있습니다.
3. 합공간 차원공식을 사용할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 기저 존재
- 독립/생성 비교

핵심 내용

증명 전략. 교체정리를 사용하면 독립집합 크기는 생성집합 크기를 넘지 못한다는 사실을 얻고, 이를 양방향으로 적용하면 기저 크기 불변성이 따라옵니다.

정리 4.2.1 (차원의 well-definedness)**.** *유한차원 벡터공간 V의 임의의 두 기저는 같은 원소 수를 가진다.*

Proof. 기저 B_1, B_2를 잡는다. B_1은 독립, B_2는 생성집합이므로 교체정리에 의해 $|B_1| \le |B_2|$이다. 반대로도 적용하면 $|B_2| \le |B_1|$이다. 따라서 $|B_1| = |B_2|$. □

의미 해석. 이 정리 덕분에 차원은 기저 선택과 무관한 공간의 고유량이 됩니다.

정리 4.2.2 (합공간 차원공식)**.** *부분공간 $U, W \le V$ 에 대해*

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

가 성립한다.

Proof. $U \cap W$ 의 기저를 $\{z_1, \ldots, z_k\}$로 잡고 이를 각각 U, W 의 기저로 확장한다. 확장된 기저들을 합치면 $U + W$ 의 기저가 되며, 원소 수를 세면 식이 나온다. □

예제 4.2.3. *$\mathbb{R}^3$ 에서 두 평면이 한 직선에서 만나면 $\dim(U \cap W) = 1$, 따라서 $\dim(U+W) = 2+2-1 = 3$ 입니다.*

주의

주의 4.2.4. *$\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ 는 일반적으로 거짓입니다. 교집합 차원을 반드시 빼야 합니다.*

주의 4.2.5. *직합 판정은 $U \cap W = \{0\}$ 조건을 확인해야 합니다.*

자가진단퀴즈

1. 차원공식을 이용해 두 부분공간의 교집합 차원을 계산해 보십시오.
2. 왜 기저 크기 불변성이 차원 정의의 핵심인지 설명하십시오.
3. $V = U \oplus W$ 일 때 $\dim V = \dim U + \dim W$ 를 증명하십시오.

4.3 응용

응용 4.3.1. *해공간과 열공간의 차원을 비교하여 연립방정식의 자유도를 차원공식으로 설명하는 예제를 구성해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 5

선형사상, Kernel, Image

장 도입

이 장부터는 벡터 그 자체보다 벡터 사이의 사상에 집중합니다. 선형사상을 중심에 두면 행렬 계산이 왜 구조를 보존하는지 자연스럽게 이해할 수 있습니다.

장 학습목표

1. 선형사상과 비선형사상을 구분할 수 있다.
2. kernel과 image를 계산하고 부분공간으로 해석할 수 있다.
3. rank-nullity 정리를 적용해 차원 관계를 해석할 수 있다.

5.1 선형사상의 정의와 예시

도입 설명

선형사상은 덧셈과 스칼라곱을 보존하는 함수입니다. 보존되는 연산이 무엇인지 분명히 확인해 주세요.

학습목표

1. 선형사상 정의를 정확히 쓸 수 있습니다.
2. 대표 예시를 제시할 수 있습니다.
3. 비선형 예시를 반례로 설명할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 벡터공간
- 함수의 합성

핵심 내용

정의 5.1.1. *벡터공간 V, W 사이의 함수 $T : V \to W$ 가*

$$T(u+v) = T(u) + T(v), \quad T(av) = aT(v)$$

를 만족하면 선형사상*이라 한다.*

예제 5.1.2. *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+2y, 3x-y)$는 선형사상입니다. 반면 $S(x,y) = (x^2, y)$는 선형이 아닙니다.*

주의

주의 5.1.3. *$T(0) = 0$은 선형성의 필요조건이지만 충분조건은 아닙니다.*

주의 5.1.4. *성분별로 비선형 함수가 끼어 있으면 선형성이 깨집니다.*

자가진단퀴즈

1. $T(x, y, z) = (x - y, 2y + z)$가 선형인지 판정하십시오.
2. 선형사상이면 왜 $T(-v) = -T(v)$인지 보이십시오.
3. $T(v + w) = T(v) + T(w)$만 만족할 때 실패하는 반례를 만드십시오.

5.2 Kernel, Image, Rank–Nullity

도입 설명

kernel과 image는 선형사상이 공간을 어떻게 접거나 펼치는지 보여주는 지표입니다.

학습목표

1. kernel/image를 계산할 수 있습니다.
2. 부분공간 성질을 증명할 수 있습니다.
3. rank-nullity 공식을 적용할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 차원
- 부분공간 판정

핵심 내용

정의 5.2.1. *선형사상 $T : V \to W$에 대해*

$$\ker T = \{v \in V : T(v) = 0\}, \quad \operatorname{im} T = \{T(v) : v \in V\}$$

로 둔다.

증명 전략. $\ker T$와 $\operatorname{im} T$가 부분공간임을 먼저 보인 뒤, $\ker T$의 기저를 V의 기저로 확장해 차원을 셉니다.

정리 5.2.2 (Rank–Nullity)**.** *유한차원 V에서 선형사상 $T : V \to W$에 대해*

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T$$

가 성립한다.

Proof. $\ker T$의 기저를 $\{u_1, \dots, u_k\}$로 잡고 V의 기저 $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r\}$로 확장한다. $T(v_1), \dots, T(v_r)$가 $\operatorname{im} T$의 기저가 됨을 보일 수 있으므로 $\dim \operatorname{im} T = r$이고 $\dim V = k + r$다. 따라서 식이 성립한다. □

의미 해석. rank-nullity는 "정보 손실의 차원 + 전달된 정보의 차원 = 원래 차원"이라는 보존식입니다.

예제 5.2.3. *$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$이면*

$$\ker T = \operatorname{span}\{(1, -1, 1)\}, \quad \dim \operatorname{im} T = 2$$

이므로 $3 = 1 + 2$입니다.

주의

주의 5.2.4. *kernel은 정의역의 부분공간이고 image는 공역의 부분공간입니다. 공간을 바꿔 쓰지 마십시오.*

주의 5.2.5. *단사 여부는 kernel, 전사 여부는 image로 판정합니다. 조건을 바꿔 쓰면 오류가 납니다.*

자가진단퀴즈

1. $\dim V = 5$, $\dim \ker T = 2$일 때 $\dim \operatorname{im} T$를 구하십시오.
2. $\ker T = \{0\}$이면 단사임을 증명하십시오.
3. $\operatorname{im} T = W$이면 전사임을 정의로 확인하십시오.

5.3 응용

응용 5.3.1. *미분연산자 $D : P_3 \to P_2$의 kernel과 image를 구하고 rank-nullity를 확인해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 6

행렬표현, 기저변환, Similarity

장 도입

같은 선형사상이라도 기저를 바꾸면 행렬표현이 달라집니다. 이 장에서는 "본질은 같고 표현만 다르다"는 관점을 수식으로 고정하겠습니다.

장 학습목표

1. 선형사상의 행렬표현을 구성할 수 있다.
2. 기저변환 공식을 유도하고 적용할 수 있다.
3. similarity와 불변량의 의미를 설명할 수 있다.

6.1 선형사상의 행렬표현

도입 설명

기저가 정해지면 선형사상은 행렬로 완전히 기술됩니다.

학습목표

1. 표현행렬을 구성할 수 있습니다.
2. 합성과 행렬곱의 대응을 설명할 수 있습니다.
3. 좌표벡터 관점을 사용할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 기저
- 선형사상

핵심 내용

정의 6.1.1. *기저 $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$가 주어졌을 때 $T : V \to W$의 표현행렬 $[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$는*

$$[T(v_j)]_{\mathcal{C}}$$

를 j번째 열로 갖는 행렬이다.

증명 전략. 벡터 x를 기저좌표로 쓰고 $T(x)$의 좌표를 비교하면 표현행렬이 선형사상 계산을 대체함을 보일 수 있습니다.

정리 6.1.2. *모든 $x \in V$에 대해*

$$[T(x)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$$

가 성립한다.

Proof. $x = \sum_j \alpha_j v_j$라 두면 선형성으로

$$T(x) = \sum_j \alpha_j T(v_j).$$

양변의 $\mathcal{C}$-좌표를 취하면 우변은 표현행렬의 열결합이므로 식이 성립한다. □

의미 해석. 선형사상 계산은 기저를 고정하면 행렬곱 계산으로 환원됩니다.

주의

주의 6.1.3. *$[T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$에서 출발 기저와 도착 기저의 순서를 바꾸면 전혀 다른 행렬이 됩니다.*

주의 6.1.4. *기저를 바꾸면 벡터 좌표와 사상 행렬이 동시에 변합니다.*

자가진단퀴즈

1. 주어진 기저에서 선형사상의 행렬표현을 계산해 보십시오.
2. 왜 열벡터가 $T(v_j)$의 좌표가 되는지 설명하십시오.
3. 합성사상 행렬공식을 증명하십시오.

6.2 기저변환과 Similarity

도입 설명

기저변환은 같은 사상의 다른 표현입니다. similarity는 이 관계를 정리한 등가관계입니다.

학습목표

1. 기저변환행렬을 구성할 수 있습니다.
2. similarity 공식을 유도할 수 있습니다.
3. similarity 불변량을 설명할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 역행렬
- 표현행렬

핵심 내용

증명 전략. 한 기저에서 다른 기저로 좌표를 옮기는 행렬 P를 도입하고, 좌표식 두 개를 합성해 $A' = P^{-1}AP$를 얻습니다.

정리 6.2.1. *같은 선형사상 $T : V \to V$의 두 표현행렬 A, A'에 대해 어떤 가역행렬 P가 존재하여*

$$A' = P^{-1}AP$$

를 만족한다.

Proof. 기저 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$에 대해 좌표변환이 $[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{B}'}$라 하자. 그러면

$$[T(x)]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T(x)]_{\mathcal{B}} = P^{-1}A[x]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP[x]_{\mathcal{B}'}.$$

또한 좌변은 $A'[x]_{\mathcal{B}'}$이므로 $A' = P^{-1}AP$. □

의미 해석. 행렬은 바뀌어도 선형사상의 본질은 바뀌지 않습니다. 고유값, 행렬식, 트레이스 같은 양이 불변량으로 남습니다.

주의

주의 6.2.2. *닮음(similarity)과 합동(congruence)은 다른 관계입니다. 문맥을 섞지 마십시오.*

주의 6.2.3. *$P^{-1}AP$ 순서를 PAP^{-1}로 바꾸면 일반적으로 틀립니다.*

자가진단퀴즈

1. 유사행렬이 같은 특성다항식을 가짐을 보이십시오.
2. $A' = P^{-1}AP$에서 $\det A' = \det A$를 확인하십시오.
3. 같은 사상인데 행렬이 다른 간단한 예를 하나 제시하십시오.

6.3 응용

응용 6.3.1. *좌표계가 다른 두 관측 프레임에서 같은 선형변환이 어떻게 다른 행렬로 기록되는지 계산해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 7

쌍대공간과 전치/쌍대사상

장 도입

쌍대공간은 벡터를 숫자로 보내는 선형함수들의 공간입니다. 추상적으로 보이지만, 좌표함수와 전치행렬을 통해 계산적으로 매우 유용합니다.

장 학습목표

1. 쌍대공간의 정의와 차원을 설명할 수 있다.
2. 쌍대기저를 구성할 수 있다.
3. 쌍대사상과 전치행렬의 대응을 증명할 수 있다.

7.1 쌍대공간과 쌍대기저

도입 설명

쌍대공간은 벡터공간을 측정하는 함수들의 공간입니다. 좌표를 뽑아내는 연산자로 이해하면 자연스럽습니다.

학습목표

1. 쌍대공간을 정의할 수 있습니다.
2. 쌍대기저를 구성할 수 있습니다.
3. 차원 관계를 설명할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 선형함수
- 기저와 좌표

핵심 내용

정의 7.1.1. *V 위의 모든 선형함수 $f : V \to K$ 의 집합을 V^* 로 쓰고* 쌍대공간*이라 한다.*

정리 7.1.2. *V 가 유한차원이고 기저 $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ 를 가지면, $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ 를 만족하는 함수열 $(f_1, \dots, f_n)$ 이 존재하며 V^* 의 기저를 이룬다.*

Proof. 각 $x = \sum_j a_j v_j$ 에 대해 $f_i(x) = a_i$ 로 정의하면 선형이며 $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ 다. 또한 임의의 $f \in V^*$ 에 대해

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i$$

가 되어 생성하고, 독립성은 $\sum c_i f_i = 0$ 에 v_j 를 대입하면 즉시 따른다. □

주의

주의 7.1.3. *V 와 V^* 는 일반적으로 같은 집합이 아닙니다. 유한차원에서만 동형일 뿐입니다.*

주의 7.1.4. *쌍대기저는 원래 기저가 바뀌면 함께 바뀝니다.*

자가진단퀴즈

1. $\mathbb{R}^2$ 의 표준기저에 대한 쌍대기저를 쓰십시오.
2. dim $V = 4$ 이면 dim V^* 를 구하십시오.
3. 쌍대기저의 유일성을 보이십시오.

7.2 Dual map과 전치행렬

도입 설명

선형사상은 쌍대공간 사이에 반대 방향 사상을 유도합니다. 이 대응이 전치행렬 공식의 본질입니다.

학습목표

1. dual map 정의를 쓸 수 있습니다.
2. 전치행렬 대응을 증명할 수 있습니다.
3. 합성에 대한 반대방향 성질을 설명할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 선형사상 합성
- 행렬표현

핵심 내용

정의 7.2.1. *$T : V \to W$ 가 선형사상일 때 $T^* : W^* \to V^*$ 를*

$$T^*(\varphi) = \varphi \circ T$$

로 정의하고 쌍대사상*이라 한다.*

정리 7.2.2. *유한차원에서 T 의 표현행렬이 A 이면 T^* 의 표현행렬은 A^T 이다.*

Proof. 기저와 쌍대기저를 잡고 $T(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$ 라 하자. 그러면 $T^*(w_i^*)(v_j) = w_i^*(T(v_j)) = a_{ij}$ 이고, 이는 T^* 의 행렬 성분이 A 의 전치 성분임을 뜻한다. □

주의

주의 7.2.3. *복소수 내적공간 문맥에서는 전치가 아니라 켤레전치가 등장합니다. 현재 절은 순수 쌍대공간 문맥입니다.*

주의 7.2.4. *T^* 는 T 의 역함수가 아닙니다. 방향과 정의역/공역을 먼저 확인하십시오.*

자가진단퀴즈

1. $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ 를 증명하십시오.
2. T 가 동형이면 T^* 도 동형임을 보이십시오.
3. 작은 예시에서 전치행렬 공식을 직접 확인하십시오.

7.3 응용

응용 7.3.1. *선형 제약식 $f(x) = 0$ 들의 집합을 annihilator 관점으로 해석하여 해공간과 쌍대공간의 관계를 설명해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 8

행렬식

장 도입

행렬식은 가역성 판정, 부피 변화, 고유값 이론을 잇는 핵심 함수입니다. 이 장에서는 계산 공식뿐 아니라 왜 그런 공식이 자연스러운지까지 확인하겠습니다.

장 학습목표

1. 행렬식을 교대 다중선형 함수로 정의할 수 있다.
2. 행렬식의 기본 성질을 증명과 함께 사용할 수 있다.
3. 가역성 및 기하학적 의미를 해석할 수 있다.

8.1 행렬식의 정의와 기본 성질

도입 설명

행렬식을 공리적으로 정의하면 여러 성질이 한 번에 정리됩니다.

학습목표

1. 행렬식의 정의를 정확히 쓸 수 있습니다.
2. 행연산이 행렬식에 미치는 영향을 설명할 수 있습니다.
3. 곱셈성의 의미를 해석할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 순열
- 다중선형성

핵심 내용

정의 8.1.1. det : $M_n(K) \to K$ *가 다음을 만족하면 행렬식이라 한다.*

(i) 각 행에 대해 선형이다.

(ii) 두 행이 같으면 값이 0 *이다(교대성).*

(iii) $\det(I_n) = 1$.

정리 8.1.2. *$A, B \in M_n(K)$에 대해*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

가 성립한다.

Proof. B를 고정하고 $f(A) = \det(AB)$를 두면 f는 A의 행들에 대해 교대 다중선형이며 $f(I) = \det(B)$이다. 행렬식의 유일성으로 $f(A) = \det(B)\det(A)$가 되어 결론이 따른다. □

주의

주의 8.1.3. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$*는 일반적으로 거짓입니다.*

주의 8.1.4. *행을 서로 바꾸면 행렬식 부호가 바뀝니다.*

자가진단퀴즈

1. 삼각행렬의 행렬식 공식을 쓰십시오.
2. A가 가역이면 $\det(A^{-1})$를 구하십시오.
3. 두 행이 비례하면 행렬식이 0임을 보이십시오.

8.2 가역성 판정과 기하학적 해석

도입 설명

행렬식의 값은 가역성과 부피 변화율을 동시에 담습니다.

학습목표

1. $\det(A) \neq 0$과 가역성의 동치를 설명할 수 있습니다.
2. 선형변환의 부피 배율을 해석할 수 있습니다.
3. 부호가 방향 보존/반전을 뜻함을 설명할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 가역성
- 선형변환의 기하적 직관

핵심 내용

정리 8.2.1. *정사각행렬 A에 대해 다음이 동치이다.*

(i) A*는 가역이다.*

(ii) $\det(A) \neq 0$.

(iii) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$*이 자명해만 갖는다.*

Proof. (i)⇒(ii)는 $1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$에서 따른다. (ii)⇒(iii)는 수반행렬 공식을 통해 A^{-1} 존재를 얻어 성립한다. (iii)⇒(i)는 가역성 동치조건에서 이미 보였다. □

예제 8.2.2. $A = \operatorname{diag}(2, -1, 3)$*이면* $\det(A) = -6$*이므로 부피는* 6*배가 되고 방향은 반전됩니다.*

주의

주의 8.2.3. *부피 배율은* $|\det(A)|$ *입니다. 부호를 절댓값 없이 해석하면 틀립니다.*

주의 8.2.4. *비정사각행렬에는 행렬식을 정의하지 않습니다.*

자가진단퀴즈

1. $\det(A) = 0$이면 왜 열벡터가 종속인지 설명하십시오.
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$를 증명하십시오.
3. 평면 선형변환 예에서 면적 변화율을 계산해 보십시오.

8.3 응용

응용 8.3.1. *평면 변환* $T(x, y) = (ax+by, cx+dy)$*의 면적 변화율이* $|ad-bc|$ *임을 예제로 확인해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Part III

다항식과 분해정리

Chapter 9

연산자 다항식, 최소/특성다항식, Cayley–Hamilton

장 도입

이 장에서는 선형연산자에 다항식을 대입하는 관점을 도입합니다. 이 관점이 있어야 분해정리와 Jordan 이론으로 자연스럽게 넘어갈 수 있습니다.

장 학습목표

1. 연산자 다항식의 정의와 계산을 이해한다.
2. 최소다항식과 특성다항식의 역할을 구분한다.
3. Cayley–Hamilton 정리를 적용할 수 있다.

9.1 연산자 다항식과 최소다항식

도입 설명

다항식을 연산자에 대입하면 연산자의 반복 작용을 하나의 식으로 요약할 수 있습니다.

학습목표

1. 연산자 다항식 정의를 쓸 수 있습니다.
2. 소멸다항식과 최소다항식을 구분할 수 있습니다.
3. 최소다항식의 기본 성질을 설명할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 다항식 나눗셈
- 선형연산자 합성

핵심 내용

정의 9.1.1. $T \in \mathrm{End}(V)$ 와 $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m \in K[t]$ 에 대해

$$p(T) = a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m$$

로 정의한다.

정의 9.1.2. *T 를 소멸시키는 단위 다항식 중 차수가 최소인 것을 T 의 최소다항식 $m_T(t)$ 라 한다.*

정리 9.1.3. *T 를 소멸시키는 임의의 다항식 $p(t)$ 는 $m_T(t)$ 로 나누어진다.*

Proof. 다항식 나눗셈으로 $p = qm_T + r$ ($\deg r < \deg m_T$)라 두면

$$0 = p(T) = q(T)m_T(T) + r(T) = r(T).$$

$r \neq 0$ 이면 최소성에 모순이므로 $r = 0$ 이고, 따라서 $m_T \mid p$. □

주의

주의 9.1.4. *최소다항식은 특성다항식과 같을 필요가 없습니다.*

주의 9.1.5. *최소다항식은 반드시 단위(mononic) 다항식으로 고정해야 유일합니다.*

자가진단퀴즈

1. $T = I$ 의 최소다항식을 구하십시오.
2. nilpotent 연산자의 최소다항식 모양을 써 보십시오.
3. 왜 최소다항식이 유일한지 설명하십시오.

9.2 특성다항식과 Cayley–Hamilton

도입 설명

특성다항식은 고유값 정보를 담고, Cayley–Hamilton 정리는 연산자가 자기 다항식을 만족함을 말합니다.

학습목표

1. 특성다항식을 정의할 수 있습니다.
2. Cayley–Hamilton 정리를 진술할 수 있습니다.
3. 정리를 계산 문제에 적용할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 행렬식
- 고유값 기초

핵심 내용

정의 9.2.1. *$A \in M_n(K)$ 에 대해*
$$\chi_A(t) = \det(tI - A)$$
를 A 의 특성다항식이라 한다.

정리 9.2.2 (Cayley–Hamilton)**.** *모든 $A \in M_n(K)$ 에 대해*
$$\chi_A(A) = 0$$
가 성립한다.

Proof. 수반행렬 공식을 사용하면
$$(tI - A)\,\mathrm{adj}(tI - A) = \chi_A(t)I.$$
여기서 t 를 A 로 대입하면 좌변 첫 인자가 $A - A = 0$ 가 되어 우변은 $\chi_A(A) = 0$ 이 된다. □

예제 9.2.3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ *이면 $\chi_A(t) = t^2 - 3t + 2$ 이고 Cayley–Hamilton으로*
$$A^2 - 3A + 2I = 0$$
를 얻습니다.

주의

주의 9.2.4. *$\chi_A(t) = 0$ 은 스칼라 변수 t 에 대한 식이고, $\chi_A(A) = 0$ 은 행렬식입니다. 두 식을 혼동하지 마십시오.*

주의 9.2.5. *대입 순서는 다항식 계산 규칙을 따릅니다. 항별로 A^k 를 계산해야 합니다.*

자가진단퀴즈

1. 2×2 행렬 하나를 택해 Cayley–Hamilton을 직접 확인하십시오.
2. A^{-1} 을 A 의 다항식으로 표현할 수 있는 조건을 쓰십시오.
3. 최소다항식이 특성다항식을 나눈다는 사실을 설명하십시오.

9.3 응용

응용 9.3.1. *점화식 $u_{k+2} = 3u_{k+1} - 2u_k$ 를 동반행렬로 표현하고 Cayley–Hamilton으로 일반항 구조를 설명해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 10

고유값, 고유공간, 대각화

장 도입

고유값 이론은 연산자의 작용을 가장 간결하게 읽는 방법입니다. 이 장에서는 대각화 가능성 판정과 계산 절차를 한 흐름으로 정리하겠습니다.

장 학습목표

1. 고유값과 고유공간을 계산할 수 있다.
2. 대각화 가능성 조건을 설명할 수 있다.
3. 대각화를 반복 작용 계산에 적용할 수 있다.

10.1 고유값과 고유공간

도입 설명

고유값은 연산자가 방향을 보존하면서 스케일만 바꾸는 축을 찾는 개념입니다.

학습목표

1. 고유값/고유벡터 정의를 쓸 수 있습니다.
2. 고유공간을 kernel로 계산할 수 있습니다.
3. 대수적/기하적 중복도를 구분할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 특성다항식
- kernel 계산

핵심 내용

정의 10.1.1. $T \in \mathrm{End}(V)$ *에 대해* $Tv = \lambda v$ *를 만족하는* $v \neq 0$ *가 존재하면* λ *를* T *의* 고유값*, 해당* v *를* 고유벡터*라 한다.*

정리 10.1.2. *서로 다른 고유값에 대응하는 고유벡터들은 일차독립이다.*

Proof. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$가 서로 다르고 v_i가 각 고유벡터라 하자. 선형결합 관계가 있다고 가정하고 $T - \lambda_k I$를 적용하면 마지막 항이 소거되어 귀납적으로 모든 계수가 0임을 얻는다. □

주의

주의 10.1.3. *고유벡터는 0 벡터가 될 수 없습니다.*

주의 10.1.4. *고유값의 개수와 대각화 가능성은 별개입니다. 중복도가 핵심입니다.*

자가진단퀴즈

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$의 고유값/고유공간을 구하십시오.
2. 서로 다른 고유값 고유벡터의 독립성을 $k = 2$에서 직접 증명하십시오.
3. 기하적 중복도와 대수적 중복도를 정의로 비교하십시오.

10.2 대각화 가능성 판정

도입 설명

대각화는 기저 선택의 문제입니다. 적절한 고유벡터 기저가 있으면 행렬이 대각형이 됩니다.

학습목표

1. 대각화의 정의를 쓸 수 있습니다.
2. 필요충분조건을 적용할 수 있습니다.
3. 대각화 알고리즘을 재현할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 기저
- similarity

핵심 내용

정리 10.2.1. *$A \in M_n(K)$가 대각화 가능할 필요충분조건은 K^n에 대한 고유벡터 기저가 존재하는 것이다.*

Proof. 대각화 가능하면 $A = PDP^{-1}$이고 P의 열벡터들이 고유벡터 기저다. 반대로 고유벡터 기저를 열로 모아 P를 만들면 $P^{-1}AP$가 대각행렬이 된다. □

예제 10.2.2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$*는 표준기저가 이미 고유벡터 기저이므로 대각화 가능합니다.*

주의

주의 10.2.3. *고유값이 서로 다르면 대각화 가능하지만, 역은 성립하지 않습니다.*

주의 10.2.4. *고유값 계산 오류가 나면 이후 모든 대각화 계산이 무너집니다. 특성다항식부터 검산하십시오.*

자가진단퀴즈

1. A^n 계산에 대각화가 왜 유리한지 설명하십시오.
2. 대각화 불가능한 2×2 예를 제시하십시오.
3. 최소다항식 관점에서 대각화 조건을 서술하십시오.

10.3 응용

응용 10.3.1. *상태전이행렬이 대각화되는 경우* A^n *을 빠르게 계산하여 장기 거동을 해석해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 11

불변부분공간과 삼각화

장 도입

Jordan 이론에 들어가기 전에, 연산자가 부분공간을 보존하는 메커니즘을 먼저 정리하겠습니다. 불변부분공간 관점은 분해정리의 핵심 연결고리입니다.

장 학습목표

1. 불변부분공간을 정의하고 판정할 수 있다.
2. 삼각화 가능성의 의미를 설명할 수 있다.
3. 일반화 고유벡터 도입의 필요성을 이해한다.

11.1 불변부분공간과 삼각화

도입 설명

불변부분공간은 연산자의 작용을 작은 블록으로 분리하게 해 줍니다.

학습목표

1. 불변부분공간 정의를 쓸 수 있습니다.
2. 삼각화 의미를 기저 관점으로 설명할 수 있습니다.
3. 블록표현과 연결할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 부분공간
- 기저변환

핵심 내용

정의 11.1.1. *$T : V \to V$ 와 부분공간 $W \le V$ 에 대해 $T(W) \subseteq W$ 이면 W 를 T-불변부분공간이라 한다.*

정리 11.1.2. *V 에 완전한 불변부분공간 사슬*

$$0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = V, \quad \dim W_i = i$$

이 존재하면 T 는 어떤 기저에서 상삼각행렬로 표현된다.

Proof. 각 W_i에서 벡터를 하나씩 골라 기저를 구성하면 T는 각 단계에서 이전 공간으로만 성분을 보내므로 하위 항이 소거되어 상삼각형태가 된다. □

주의

주의 11.1.3. *삼각화 가능과 대각화 가능은 다릅니다. 삼각화가 더 약한 조건입니다.*

주의 11.1.4. *불변부분공간은 임의 부분공간이 아닙니다. 반드시 T 작용에 대해 닫혀야 합니다.*

자가진단퀴즈

1. 특정 행렬의 고유공간이 왜 불변부분공간인지 설명하십시오.
2. 상삼각행렬에서 대각성분이 고유값이 되는 이유를 설명하십시오.
3. 삼각화가 가능한데 대각화는 불가능한 예를 쓰십시오.

11.2 Nilpotent와 일반화 고유벡터

도입 설명

대각화 실패를 다루기 위해 일반화 고유벡터를 사용합니다.

학습목표

1. nilpotent 정의를 쓸 수 있습니다.
2. 일반화 고유벡터를 정의할 수 있습니다.
3. Jordan 사슬의 직관을 설명할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 고유값
- kernel 사슬

핵심 내용

정의 11.2.1. *$N^m = 0$인 자연수 m이 존재하면 N을 nilpotent 연산자라 한다.*

정의 11.2.2. *$(T - \lambda I)^k v = 0$인 $v \neq 0$를 λ에 대한 일반화 고유벡터라 한다.*

예제 11.2.3. $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$*는 $N^2 = 0$이므로 nilpotent이고, e_2는 $\lambda = 0$에 대한 일반화 고유벡터입니다.*

주의

주의 11.2.4. *일반화 고유벡터는 항상 고유벡터는 아닙니다.*

주의 11.2.5. *지수 k의 최소성 여부를 확인하지 않으면 사슬 길이 해석이 흔들립니다.*

자가진단퀴즈

1. nilpotent 행렬의 고유값이 왜 0뿐인지 설명하십시오.
2. 일반화 고유공간이 불변부분공간임을 보이십시오.
3. Jordan 블록에서 일반화 고유벡터 사슬을 직접 써 보십시오.

11.3 응용

응용 11.3.1. *상삼각행렬 예제에서 일반화 고유벡터를 계산해 Jordan 형식 준비 정보를 뽑아 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 12

Primary/Cyclic Decomposition

장 도입

이 장은 구조정리의 중심부입니다. 최소다항식의 인수분해 정보를 이용해 공간을 큰 블록으로 나누고, 다시 cyclic 블록으로 세분화합니다.

장 학습목표

1. primary decomposition 정리를 진술하고 사용할 수 있다.
2. cyclic subspace 개념을 설명할 수 있다.
3. Jordan 형식으로의 연결고리를 정리할 수 있다.

12.1 Primary decomposition

도입 설명

서로소 인수로 나뉜 최소다항식은 공간 분해를 강제합니다.

학습목표

1. primary decomposition 정리를 말할 수 있습니다.
2. 불변부분공간 분해를 수행할 수 있습니다.
3. 분해의 유일성 범위를 설명할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 최소다항식 인수분해
- 불변부분공간

핵심 내용

정리 12.1.1 (Primary decomposition)**.** *$m_T(t) = p_1(t)^{e_1} \cdots p_r(t)^{e_r}$ 가 서로소 기약다항식 분해이면*

$$V = \ker p_1(T)^{e_1} \oplus \cdots \oplus \ker p_r(T)^{e_r}$$

가 성립한다.

Proof. 서로소 조건으로 Bezout 항등식을 만들고 이를 T에 대입하면 항등연산자가 각 kernel로 가는 사영들의 합으로 표현된다. 교집합이 자명함도 같은 방식으로 보이면 직합 분해가 얻어진다. □

주의

주의 12.1.2. *서로소 조건이 빠지면 위 직합 분해가 성립하지 않을 수 있습니다.*

주의 12.1.3. *각 항은* ker $p_i(T)^{e_i}$ *이지* ker $p_i(T)$ *가 아닙니다.*

자가진단퀴즈

1. $m_T = (t-1)^2(t+2)$ 일 때 분해 형태를 써 보십시오.
2. 왜 각 성분공간이 불변부분공간인지 설명하십시오.
3. 두 성분공간 교집합이 자명함을 확인하는 아이디어를 쓰십시오.

12.2 Cyclic decomposition과 Jordan 연결

도입 설명

primary 분해 이후에는 각 성분을 cyclic 구조로 쪼개어 Jordan 계산으로 연결합니다.

학습목표

1. cyclic subspace를 정의할 수 있습니다.
2. cyclic decomposition의 의미를 설명할 수 있습니다.
3. Jordan 형식 준비 데이터를 해석할 수 있습니다.

선수개념 체크

- annihilator
- companion matrix 직관

핵심 내용

정의 12.2.1. $v \in V$ *에 대해*

$$Z(v;T) = \text{span}\{v, Tv, T^2v, \dots\}$$

를 v *가 생성하는* T*-cyclic subspace라 한다.*

정리 12.2.2 (Cyclic decomposition)**.** *유한차원* V *는 적당한 벡터들* $v_1, \dots, v_s$ *에 대해*

$$V = Z(v_1;T) \oplus \cdots \oplus Z(v_s;T)$$

로 분해된다.

Proof. 차원을 하나씩 늘려 가는 최대성 논법으로 cyclic 부분공간을 순차적으로 선택한다. 남는 부분이 있으면 새 cyclic 공간을 추가하는 과정을 반복하면 유한차원성에 의해 종료되어 직합 분해를 얻는다. □

예제 12.2.3. *한 개의 cyclic 벡터만으로* V *전체가 생성되면* T *의 행렬은 companion matrix 형태로 표현됩니다.*

주의

주의 12.2.4. *cyclic 분해는 일반적으로 유일하지 않습니다. 불변인자 정보가 핵심입니다.*

주의 12.2.5. *Jordan 형식 계산에서 primary 정보와 cyclic 정보를 분리해 기록하지 않으면 오류가 누적됩니다.*

자가진단퀴즈

1. cyclic 벡터의 정의를 자신의 말로 다시 설명하십시오.
2. companion matrix가 어떤 경우에 등장하는지 쓰십시오.
3. primary 분해와 cyclic 분해의 역할 차이를 정리하십시오.

12.3 응용

응용 12.3.1. *주어진 4×4 행렬의 최소다항식 분해를 이용해 primary 성분과 cyclic 성분을 추적해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Part IV

정준형과 스펙트럴 이론

Chapter 13

Jordan Canonical Form

장 도입

이 장에서는 선형연산자의 구조를 Jordan 표준형으로 정리합니다. 존재성과 유일성을 엄밀히 확인한 뒤, 실제 계산 절차까지 연결하겠습니다.

장 학습목표

1. Jordan 블록과 사슬을 정의하고 계산할 수 있다.
2. Jordan 형식 존재/유일성 정리를 설명할 수 있다.
3. Jordan 형식을 반복작용 계산에 적용할 수 있다.

13.1 Jordan 블록, 존재성과 유일성

도입 설명

Jordan 형식은 대각화가 실패한 경우를 가장 표준적으로 기술하는 틀입니다.

학습목표

1. Jordan 블록을 정의할 수 있습니다.
2. 존재/유일성의 의미를 설명할 수 있습니다.
3. 블록 크기와 불변량의 연결을 말할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 일반화 고유벡터
- primary/cyclic decomposition

핵심 내용

정의 13.1.1. *$\lambda \in K$와 $k \in \mathbb{N}$에 대해*

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

를 Jordan 블록이라 한다.

정리 13.1.2 (Jordan 존재정리). *대수적으로 닫힌 체 위 유한차원 공간의 모든 선형연산자는 적절한 기저에서 Jordan 표준형으로 표현된다.*

Proof. primary decomposition으로 고유값별 성분으로 나눈 뒤, 각 성분에서 nilpotent 부분에 대해 cyclic decomposition을 적용하면 Jordan 사슬 기저를 얻는다. 이들을 합치면 Jordan 형식이 된다. □

정리 13.1.3 (유일성(블록 순서 제외)). *같은 연산자의 Jordan 형식은 블록 배열 순서를 제외하면 유일하다.*

Proof. dim ker$(T-\lambda I)^j$ 의 증가량이 블록 크기 분포를 결정한다. 이 값들은 similarity 불변량이므로 블록 분포가 유일하게 정해진다. □

주의

주의 13.1.4. *Jordan 형식의 유일성은 "행렬 그대로"가 아니라 "블록 다중집합"의 유일성입니다.*

주의 13.1.5. *체가 대수적으로 닫히지 않으면 Jordan 형식 대신 rational canonical form이 필요할 수 있습니다.*

자가진단퀴즈

1. $J_3(2)$의 최소다항식과 특성다항식을 구하십시오.
2. 블록 크기와 dim ker$(T-\lambda I)^j$ 의 관계를 설명하십시오.
3. 대각화 가능성과 Jordan 블록 크기의 관계를 서술하십시오.

13.2 Jordan 계산과 응용

도입 설명

실제 계산에서는 사슬을 어떻게 찾는지가 핵심입니다.

학습목표

1. Jordan 형식 계산 절차를 재현할 수 있습니다.
2. Jordan 기저를 구성할 수 있습니다.
3. A^n, e^{tA} 계산에 적용할 수 있습니다.

선수개념 체크

- kernel 사슬
- 행렬함수

핵심 내용

예제 13.2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = J_2(2)$$

이므로

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

입니다.

주의

주의 13.2.2. *Jordan 사슬 계산에서 벡터 선택을 임의로 바꾸면 이전 단계 조건이 깨질 수 있습니다. 단계별 조건을 기록하십시오.*

주의 13.2.3. *계산 중에 고유값별 블록을 섞으면 검산이 어려워집니다. 고유값별로 분리해 작업하십시오.*

자가진단퀴즈

1. 3×3 비대각화 행렬 하나를 택해 Jordan 형식을 구하십시오.
2. Jordan 형식으로 A^n 을 계산하는 절차를 써 보십시오.
3. $e^{tJ_k(\lambda)}$ 의 형태를 설명하십시오.

13.3 응용

응용 13.3.1. *Jordan 형식을 이용해 상수계수 선형미분방정식 $x'(t) = Ax(t)$ 의 해 형태를 분류해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 14

내적공간, 직교화, 직교투영

장 도입

이 장에서는 길이와 각도를 도입하여 선형대수를 기하적으로 확장합니다. 직교화와 투영은 계산과 이론 모두에서 매우 자주 쓰이는 핵심 도구입니다.

장 학습목표

1. 내적공간의 기본 성질을 엄밀히 다룰 수 있다.
2. Gram–Schmidt 직교화를 수행할 수 있다.
3. 직교투영과 최소제곱을 연결해 설명할 수 있다.

14.1 내적과 직교분해

도입 설명

내적은 선형대수에 길이와 각도를 부여합니다.

학습목표

1. 내적 공리를 정확히 쓸 수 있습니다.
2. 직교여공간을 정의할 수 있습니다.
3. 직교분해 정리를 적용할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 복소수 켤레
- 부분공간

핵심 내용

정의 14.1.1. *복소수 벡터공간 V 의 함수 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ 가 sesquilinear, 켤레대칭, 양의정부호를 만족하면 내적이라 한다.*

정리 14.1.2 (직교분해)**.** *유한차원 내적공간에서 부분공간 W 에 대해*

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

가 성립한다.

Proof. W 의 정규직교기저를 Gram–Schmidt로 구성하고, 임의의 v 를 기저 방향 성분과 나머지 성분으로 분해하면 나머지 성분이 $W^{\perp}$ 에 속함을 확인할 수 있다. 직합성은 교집합 자명성으로 따른다. □

주의

주의 14.1.3. *복소수 내적에서는 첫 변수와 둘째 변수 중 어느 쪽에 켤레선형을 둘지 약속을 고정해야 합니다.*

주의 14.1.4. $W^{\perp\perp} = W$ *는 유한차원에서 보장됩니다. 무한차원에서는 닫힘이 필요합니다.*

자가진단퀴즈

1. $\mathbb{R}^3$ 에서 한 평면의 직교여공간을 구하십시오.
2. 직교분해의 유일성을 증명하십시오.
3. Cauchy–Schwarz 부등식의 활용 예를 하나 쓰십시오.

14.2 Gram–Schmidt와 최소제곱

도입 설명

직교기저를 만들면 계산이 단순해지고, 최소제곱 문제의 해석도 명확해집니다.

학습목표

1. Gram–Schmidt 절차를 수행할 수 있습니다.
2. 직교투영을 계산할 수 있습니다.
3. 최소제곱해를 구하고 해석할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 내적
- 정규직교기저

핵심 내용

정리 14.2.1. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *가 열독립이면 최소제곱해* $\hat{x}$ *는*

$$A^T A\hat{x} = A^T b$$

를 만족하며 유일하다.

Proof. 잔차 $r = b - Ax$ 의 노름을 최소화하려면 $r \perp \mathrm{col}(A)$ 여야 한다. 이는

$$A^T(b - Ax) = 0$$

와 동치이며, 열독립이면 $A^T A$ 가 가역이므로 해가 유일하다. □

예제 14.2.2. *점* $(0,1), (1,2), (2,2)$ *에 대한 1차 회귀 직선은 정상방정식을 풀어 얻을 수 있습니다.*

주의

주의 14.2.3. *Gram–Schmidt 중간 벡터가 0이 되면 원래 벡터열이 종속이라는 신호입니다.*

주의 14.2.4. *최소제곱해는 원래 방정식의 정확한 해가 아닐 수 있습니다. "잔차 최소"가 목표입니다.*

자가진단퀴즈

1. 간단한 벡터열에 Gram–Schmidt를 적용해 보십시오.
2. 왜 A^TA가 대칭인지 확인하십시오.
3. 투영행렬 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$의 성질 두 가지를 쓰십시오.

14.3 응용

응용 14.3.1. *작은 데이터셋에 대해 최소제곱 직선 적합을 계산하고, 잔차 벡터가 열공간에 직교함을 확인해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Chapter 15

Adjoint, Normal/Self-adjoint/Unitary, Spectral Theorem

장 도입

이 장은 내적공간 이론의 핵심 결론을 다룹니다. adjoint를 중심으로 연산자를 분류하고, 스펙트럴 정리로 구조를 완성하겠습니다.

장 학습목표

1. adjoint의 정의와 성질을 사용할 수 있다.
2. normal/self-adjoint/unitary를 구분할 수 있다.
3. spectral theorem을 진술하고 적용할 수 있다.

15.1 Adjoint와 연산자 분류

도입 설명

adjoint는 내적과 선형사상을 연결하는 다리입니다.

학습목표

1. adjoint 정의를 정확히 쓸 수 있습니다.
2. self-adjoint, unitary, normal을 판정할 수 있습니다.
3. 켤레전치 표현을 사용할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 내적공간
- 전치행렬

핵심 내용

정의 15.1.1. *내적공간 V 의 선형사상 T 에 대해*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad (\forall x, y \in V)$$

를 만족하는 T^* 를 T 의 adjoint 라 한다.

정의 15.1.2. *$T^* = T$ 이면 self-adjoint, $T^*T = TT^* = I$ 이면 unitary, $T^*T = TT^*$ 이면 normal 이라 한다.*

예제 15.1.3. *실수 내적공간에서 self-adjoint 는 대칭행렬, unitary 는 직교행렬과 대응합니다.*

주의

주의 15.1.4. *self-adjoint 이면 normal 이지만, normal 이라고 해서 self-adjoint 인 것은 아닙니다.*

주의 15.1.5. *복소수 문맥에서는 전치가 아니라 켤레전치가 핵심입니다.*

자가진단퀴즈

1. 주어진 행렬이 normal인지 판정해 보십시오.
2. unitary 행렬의 열벡터 성질을 설명하십시오.
3. self-adjoint 행렬의 고유값이 실수임을 보이십시오.

15.2 Spectral Theorem

도입 설명

스펙트럴 정리는 normal 연산자의 구조를 완전히 분류하는 정리입니다.

학습목표

1. 복소수 경우 spectral theorem을 진술할 수 있습니다.
2. 실대칭 경우의 귀결을 설명할 수 있습니다.
3. 스펙트럴 분해를 계산에 적용할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 대각화
- 내적 직교기저

핵심 내용

정리 15.2.1 (Complex spectral theorem)**.** *유한차원 복소 내적공간에서 normal 연산자 T 는 어떤 정규 직교기저에 대해 대각행렬로 표현된다.*

Proof. Schur 분해로 유니터리 기저에서 상삼각표현을 얻는다. normal 조건을 상삼각행렬에 적용하면 비대각 원소가 모두 0이 되어 대각행렬이 된다. □

정리 15.2.2 (Real symmetric case)**.** *실수 내적공간에서 대칭연산자는 직교기저에 대해 대각화된다.*

Proof. 복소수 경우 정리를 적용한 뒤 고유값이 실수이고 고유공간이 실수기저를 가짐을 이용하면 실수 직교기저를 구성할 수 있다. □

예제 15.2.3. *대칭행렬 $A = Q\Lambda Q^T$ 에서*

$$f(A) = Qf(\Lambda)Q^T$$

형태로 행렬함수를 계산할 수 있습니다.

주의

주의 15.2.4. *대각화 기저는 일반 기저가 아니라* 정규직교기저*여야 스펙트럴 해석이 깔끔해집니다.*

주의 15.2.5. *실수 행렬이라도 normal 이면 반드시 직교대각화된다고 말할 수는 없습니다(복소수 대각화는 가능).*

자가진단퀴즈

1. Schur 분해에서 normal 조건이 비대각 성분을 없애는 이유를 설명하십시오.
2. 대칭행렬의 고유벡터 직교성을 증명하십시오.
3. 스펙트럴 분해를 이용해 A^n 계산 공식을 써 보십시오.

15.3 응용

응용 15.3.1. *공분산행렬의 스펙트럴 분해를 통해 주성분 축을 해석하는 간단한 예제를 구성해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Part V

쌍선형형식과 에르미트형식

Chapter 16

쌍선형형식과 에르미트형식

장 도입

마지막 장에서는 선형대수의 여러 장면에서 반복된 ”형식(form)” 관점을 정리합니다. 이후 추상대수, 기하, 해석으로 넘어가는 다리 역할을 하도록 구성하겠습니다.

장 학습목표

1. 쌍선형형식과 에르미트형식을 정의할 수 있다.
2. 형식의 행렬표현과 기저변환 공식을 설명할 수 있다.
3. 이차형식의 기본 해석을 수행할 수 있다.

16.1 쌍선형형식과 행렬표현

도입 설명

쌍선형형식은 두 벡터를 입력받아 스칼라를 내놓는 선형적 규칙입니다.

학습목표

1. 쌍선형형식을 정의할 수 있습니다.
2. 형식의 행렬표현을 구성할 수 있습니다.
3. 기저변환 시 변환 공식을 쓸 수 있습니다.

선수개념 체크

- 쌍대공간
- 행렬표현

핵심 내용

정의 16.1.1. *벡터공간 V 위 함수 $B : V \times V \to K$ 가 각 변수에 대해 선형이면 쌍선형형식이라 한다.*

정리 16.1.2. *기저를 고정하면 임의의 쌍선형형식 B 는 어떤 행렬 M 에 대해*

$$B(x, y) = x^T My$$

로 표현된다.

Proof. 기저 $\{e_i\}$에 대해 $m_{ij} = B(e_i, e_j)$로 두면 선형성으로

$$B\Big(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\Big) = \sum_{i,j} x_i m_{ij} y_j = x^T M y$$

가 된다. □

주의

주의 16.1.3. *형식의 행렬은 기저 의존적입니다. 형식 자체와 행렬을 동일시하지 마십시오.*

주의 16.1.4. *쌍선형형식과 내적은 다릅니다. 양의정부호와 대칭성이 추가되어야 내적입니다.*

자가진단퀴즈

1. 주어진 M으로 $B(x, y) = x^T M y$를 계산해 보십시오.
2. 기저변환 $x = P\tilde{x}$에서 새 행렬 공식을 유도하십시오.
3. 대칭형식과 반대칭형식의 정의를 써 보십시오.

16.2 에르미트형식과 이차형식 마무리

도입 설명

복소수 공간에서는 에르미트형식이 자연스러운 대칭 조건을 제공합니다.

학습목표

1. 에르미트형식을 정의할 수 있습니다.
2. 양의정부호 판정을 설명할 수 있습니다.
3. 이차형식과의 연결을 요약할 수 있습니다.

선수개념 체크

- 복소수 켤레
- adjoint

핵심 내용

정의 16.2.1. *복소수 벡터공간에서 $H : V \times V \to \mathbb{C}$가 첫 변수 선형, 둘째 변수 켤레선형이고*

$$H(y, x) = \overline{H(x, y)}$$

를 만족하면 에르미트형식*이라 한다.*

예제 16.2.2. *$H(x, y) = x^* A y$에서 $A = A^*$이면 H는 에르미트형식입니다.*

주의

주의 16.2.3. *실수 대칭형식의 공식과 복소수 에르미트형식의 공식을 그대로 혼용하면 켤레가 빠지는 오류가 생깁니다.*

주의 16.2.4. *이차형식 $q(x) = B(x, x)$만으로는 원래 B를 복원할 수 없는 경우가 있습니다(체의 특성 주의).*

자가진단퀴즈

1. $A = A^*$ 일 때 $x^*Ax \in \mathbb{R}$ 임을 보이십시오.
2. 양의정부호 행렬 판정 조건을 한 가지 쓰십시오.
3. 본서의 핵심 흐름을 선형사상 관점에서 5문장으로 요약해 보십시오.

16.3 응용

응용 16.3.1. *이차형식 $q(x) = x^T Ax$ 의 부호가 고유값 부호와 연결된다는 사실을 작은 예제로 확인해 보십시오.*

장 요약

- 핵심 정의 5개, 핵심 정리 5개, 연결 문장 5개를 작성합니다.
- 이 장에서 다음 장으로 넘어가기 위한 의존 개념을 명시합니다.

종합 연습문제

- 연습문제 A: 기초 확인 6문항 이상
- 연습문제 B: 개념 연결 4문항 이상
- 연습문제 C: 증명/종합 2문항 이상

Appendix A

집합, 함수, 동치관계 최소 복습

A.1 집합과 사상의 기본 용어

이 부록은 본문에서 필요한 최소한의 기초 개념을 빠르게 복습할 수 있도록 구성합니다.

A.2 함수, 전사/단사, 합성

필요한 정의와 예제를 정리하고, 본문에서 자주 쓰는 표기만 남깁니다.

A.3 동치관계와 몫집합

동치관계, 동치류, 몫집합의 정의를 복습하고 본문 연결점을 명시합니다.

Appendix B

필드와 복소수 기초

B.1 필드 공리와 기본 예시

유리수체, 실수체, 복소수체를 중심으로 필드 공리를 복습합니다.

B.2 복소수 연산과 켤레

복소수 사칙연산, 켤레, 절댓값을 내적공간 맥락과 연결해 정리합니다.

B.3 선형대수 본문과의 연결

초반 일반 field 전개와 후반 $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ 전개의 연결 이유를 요약합니다.

Appendix C

표기법 안내와 색인 사용법

C.1 기호 표준

벡터, 행렬, 공간, 사상 표기 규칙을 한 페이지 표로 정리합니다.

C.2 정리 번호 체계

정리 번호 장.절.번호 체계와 참조 규칙을 설명합니다.

C.3 학습 경로 가이드

독학자를 위한 권장 순서(A/B/C 문제 풀이 순서 포함)를 안내합니다.

집필 노트

버전: v0.2-plan-implemented