

3 Неделя L^AT_EX

Счётчики и макрокоманды L^AT_EX

30 июня 2020

I Некоторые теоремы из математики

\mathcal{I}, \mathcal{T}

Теорема I.1 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману). *Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда:*

- 1) f ограничена;
- 2) $\mathcal{L}_1(E) = 0$, где E - множество всех точек разрыва функции f на отрезке $[a, b]$.

Из теоремы I.1 вытекает следующее

Следствие I.1.1. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Решение. Очевидно, что $f(x)$ ограничена на $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$ единицей, т.е.:

$$|f(x)| \leq 1, \quad \forall a \leq b \in \mathbb{R}$$

Если $0 \notin [a, b]$, то, очевидно, $\mathcal{L}_1(E) = 0$ (т.к. $E = \emptyset$).

Иначе ($0 \in [a, b]$) $E = \{0\}$, но всё равно $\mathcal{L}_1(E) = 0$, т.к. лебегова мера не более чем счётного множества равна нулю.

Следствие I.1.2. Функция

$$f_R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{if } x = \frac{p}{q} \text{ where } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

интегрируема на любом $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Задача I.1.

Докажите это самостоятельно.

Теорема I.1 (на стр. 1) – мощный аппарат для исследования интегрируемости по Риману в собственном смысле, ведь она отвечает на вопрос: «Какие функции интегрируемы на отрезке по Риману, а какие нет?»

II Разнообразные задачи

Предложим читателю для размышления пару известных задачек.

Задача II.1.

Предположим, что $A \subset \mathbb{R}^n$. Известно, что A' – конечное множество.

Доказать, что $\text{card } A \leq \aleph_0$.

Напоминание: Для произвольного м-ва A из метрического пространства A' – «производное множество», т.е. мн-во всех предельных точек A .

Задача II.2.

Смешали две кислоты: Ac_1 и Ac_2 в соотношении 1:1. В результате превращения образовались в соотношении 2:1 вещества: серная кислота и газ G с $\mu(G) = 44$ г/моль.

Определить формулы кислот Ac_1 и Ac_2 и газа G .

III Задачи с ответами

Задача III.1.

См. химическую задачу из раздела II.

Задача III.2.

Приведите пример линейного преобразования $\varphi : \varphi^3 = 0$.

Задача III.1 (HEDM). Текст задачи.

Посмотрим внимательно на условие задачи III.1.