1 Неделя LaTeX

Математика в LaTeX

26 июня 2020

1 Теоретико-множественные понятия

$\aleph_0$ - обозначение мощности множества натуральных чисел $\mathbb{N}$:

$$\operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0,$$

где для произольного множества A $cardA$ – есть мощность A (от англ. cardinality – мощность). Например, мощность пустого множества равна нулю:

$$\operatorname{card}\emptyset = 0.$$

Ещё примеры:

$$\operatorname{card}(\mathbb{N} \cup \mathbb{N}) = \aleph_0,$$

$$\operatorname{card}(\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}) = \operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0,$$

где $\mathbb{Q}$ - множество всех рациональных чисел.

А обозначение $2^{\aleph_0}$ используется для обозначения мощности множества всех подмножеств натуральных чисел и называется мощностью континуума. Часто вместо $2^{\aleph_0}$ пишут $\mathfrak{c}$. Что интересно, мощность множества действительных чисел в точности равна $\mathfrak{c}$:

$$\operatorname{card}\mathbb{R} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

2 Математические формулы

Как думаете, чему равен предел такой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right), \tag{1}$$

или, в эквивалентной форме:

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}$$

Он, на самом деле, как мы увилем в разделе 4, равен $\dfrac{\pi}{4}$.

3 Математика в физике

Известный закон Фика для диффузии лёгкой примеси в «тяжёлом» относительно примеси фоне записывается следующим образом («одномерный случай»):

$$j = -D\frac{\partial n}{\partial x}, \tag{2}$$

где j – плотность потока примеси $[\text{м}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}]$.

Аналогичным образом выглядит закон Фурье для теплопроводности («одномерный случай»):

$$q = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3}$$

где q – плотность потока тепла $[\text{Дж м}^{-3}]$.

Из уравнения (3) легко получается уравнение теплопроводности:

$$\rho C_v^{(m)}\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{4}$$

где $C_v^{(m)}$ – удельная теплоёмкость вещества при постоянном объёме.

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi\frac{\partial T}{\partial x},$$

χ называется температуропроводностью и имеет размерность коэффициента диффузии, что показывает родство процессов переноса (для вязкости можно ввести кинематическую вязкость с той же самой размерностью).

Рассмотрим систему уравнений Максвеллав в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{out} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{out} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

4 Интегралы

Рассмотрим функцию Римана:

$$f_R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{if } x = \dfrac{p}{q} \text{ where } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{if } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Эта функция интересна тем, что $f_R \in R(\mathbb{R})$, то есть интегрируема по Риману на всей числовой прямой. Этот факт можно доказать с помощью критерия Лебега интегрируемости по Риману (как упражнение покажите, что лебегова мера точек разрыва этой функции равна нулю).

Давайте объясним формулу (1), которая нам встретилась на странице 2.

5 Матрицы

Смотри, матрица!!!!!

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{Vmatrix}$$

Представим, что у нас есть отображение $\varphi \in L(V, \tilde{V})$, которое в паре базисов e и f имеет матрицу A. Рассмторим частный случай линейного отображения, а именно линейное преобразование ($\tilde{V} = V$). Пусть $\dim V = 3$ и φ в паре базисов e и e имеет матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Каков же геометрический смысл данного преобразования? Вспомним смысл матрицы линейного преобразования: в столбцах стоят координаты базисных векторов новом (хотя в нашем случае он же и старый) базасе. То есть одномерное подпространство $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ отобразилось в нуль, $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ перешло в $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$, а $\langle \mathbf{e}_3 \rangle$ в $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$. Так мы можем с помощью геометрических представлений понять каково ядро и образ нашего преобразования φ:

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \langle \mathbf{e}_1 \rangle, \\ \operatorname{Im} \varphi &= \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Хороший способ вывода матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$