

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Вычислительные комплексы

Отчёт по заданию №3

Работу

выполнил:

Д. А. Козлов

Группа:

3630102/70201

Преподаватель:

А. Н. Баженов

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1. Постановка задачи	3
2. Теория	4
3. Недоопределённая ИСЛАУ	5
3.1. Оценка меры вариабельности ive	5
3.2. Допусковое множество решений	5
3.3. Анализ решения	6
4. Переопределённая ИСЛАУ	8
4.1. Оценка меры вариабельности ive	8
4.2. Допусковое множество решений	9
4.3. График распознающего функционала	9
5. Ссылки	10
Перечень использованных источников	11

1. Постановка задачи

Решить недоопределённую интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) с матрицей (2×3) и переопределённую ИСЛАУ с матрицей (3×2) . Используемые матрицы должны совпадать с точностью до транспонирования.

2. Теория

- Для исследования разрешимости ИСЛАУ используем распознающий функционал:

$$\text{Tol}(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \left(\text{rad } b_i - \left| \min b_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} * x_j \right| \right)$$

- Допусковое множество задаётся условием: $\text{Tol}(x) \geq 0$
- Формула для меры вариабельности ive:

$$\text{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \sqrt{n} \left(\min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond } A \right) \cdot \|\arg \max \text{Tol}\| \cdot \frac{\max \text{Tol}}{\|\mathbf{b}\|}$$

- Формула для расчета бруса :

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\arg \max \text{Tol} - \text{ive}, \arg \max \text{Tol} + \text{ive}]$$

3. Недоопределённая ИСЛАУ

В качестве исходной матрицы и решения выберем:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдём вектор b :

$$b = A * x = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Положим величины радиусов следующими:

$$\text{rad } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rad } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Имеем ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [2; 4] & [3; 7] & [6; 8] \\ [3; 5] & [1; 5] & [0; 6] \end{pmatrix} * x = \begin{pmatrix} [4; 10] \\ [1; 7] \end{pmatrix}$$

Решение с помощью `tolsolvty [5]`: максимум распознающего функционала `maxTol` и значение аргумента, где этот максимум достигается:

$$\text{max Tol} = 0.667$$

$$\text{arg max Tol} = \begin{pmatrix} 0.5556 \\ 0 \\ 0.5923 \end{pmatrix}$$

3.1. Оценка меры вариабельности `ive`

Минимальное число обусловленности матрицы ИСЛАУ `min condA`:

$$\min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond } A = 2.5206$$

Оценка меры вариабельности `ive`

$$\text{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \sqrt{3} * 2.5206 * 0.667 * \frac{0.812}{8.0623} = 0.2932$$

Брус оценки:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} [0.5556 - 0.2932; 0.5556 + 0.2932] \\ [-0.2932; 0.2932] \\ [0.5923 - 0.2932; 0.5923 + 0.2932] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.2623; 0.8488] \\ [-0.2932; 0.2932] \\ [0.2993; 0.8858] \end{pmatrix}$$

3.2. Допусковое множество решений

Построим допусковое множество решений для этой задачи с помощью функции `IntLinIncR3`.
[4]

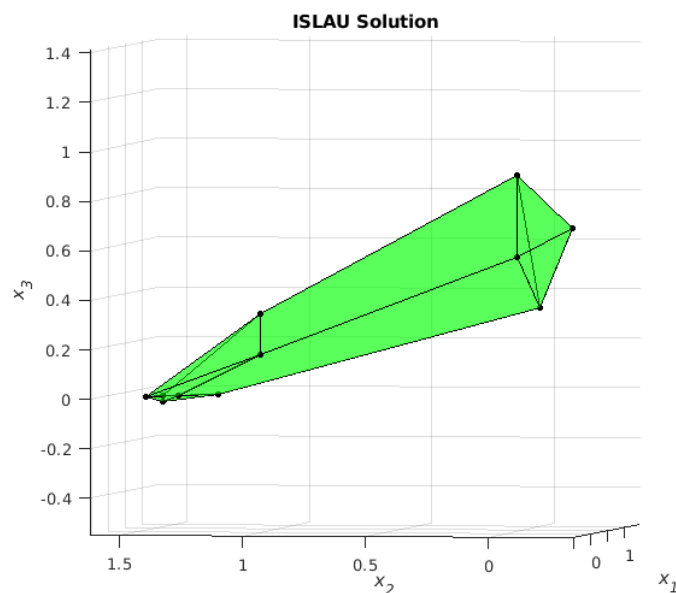


Рисунок 3.1. Допусковое множество решений недоопределённой ИСЛАУ

3.3. Анализ решения

Построим брус оценки на том же графике, что и допустовое множество решений. Розовой звёздочкой отмечено решение, найденное с помощью алгоритма, и оно лежит внутри допустового множества.

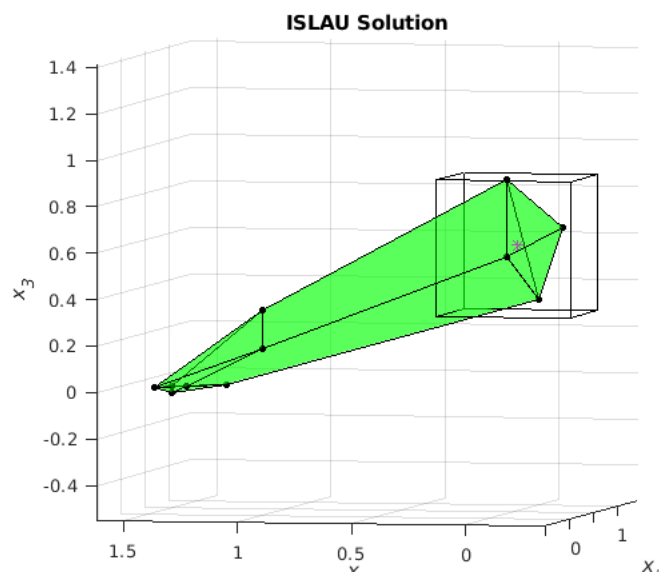


Рисунок 3.2. Допусковое множество решений недоопределённой ИСЛАУ и брус оценки решения

Также, можно заметить, что в этом случае $\arg \max \text{Tol} \approx 0$ для переменной x_2 , таким образом, можно рассмотреть брус 2D-проекции на плоскость $x_1 O x_3$:

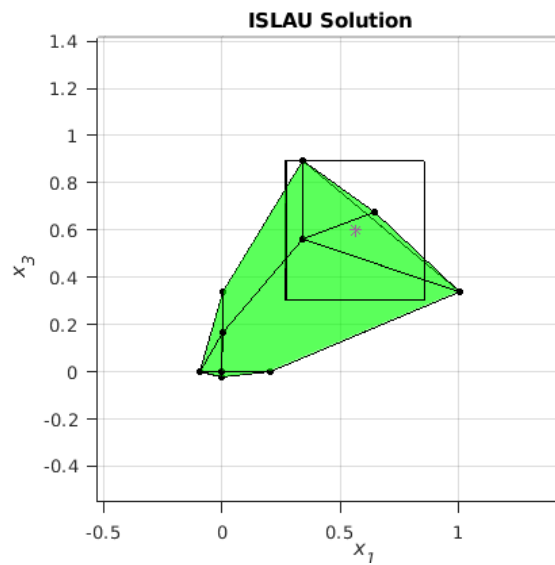


Рисунок 3.3. 2D-проекция допустового множества решений недоопределённой ИСЛАУ и бруса оценки решения

Следует отметить расположение точки $\arg \max \text{Tol}$ на стыке ортантов. В связи с этим, брус не покрывает всего допустового множества, вычисленного программой EqnTolR3, входящей в пакет IntLinIncR3.

4. Переопределённая ИСЛАУ

Для переопределённой ИСЛАУ транспонируем матрицу A и будем использовать только первые 2 компоненты вектора x .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Найдём вектор b :

$$b = A * x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Положим величины радиусов такими же:

$$\text{rad } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rad } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Имеем ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [2; 4] & [3; 5] \\ [3; 7] & [1; 5] \\ [6; 8] & [0; 6] \end{pmatrix} * x = \begin{pmatrix} [-4; 2] \\ [-1; 5] \\ [1; 7] \end{pmatrix}$$

Решение с помощью `tolsolvty` [5]: максимум распознающего функционала `maxTol` и значение аргумента, где этот максимум достигается:

$$\text{max Tol} = 0.7999$$

$$\text{arg max Tol} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1. Оценка меры вариабельности `ive`

При транспонировании число обусловленности остаётся таким же:

$$\min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond } A = 2.5206$$

Теперь подставим в формулу:

$$\text{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \sqrt{2} * 2.5206 * 0.7999 * \frac{0.3}{4.5826} = 0.1867$$

Брус оценки:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} [0.3 - 0.1867; 0.3 + 0.1867] \\ [-0.1867; 0.1867] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.1133; 0.4867] \\ [-0.1867; 0.1867] \end{pmatrix}$$

4.2. Допусковое множество решений

Построим допустовое множество решений для этой задачи с помощью функции IntLinIncR2.
[3]

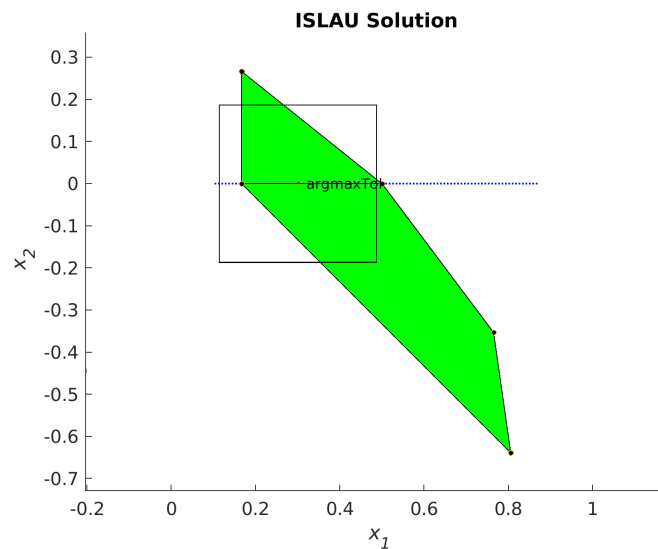


Рисунок 4.1. Допусковое множество решений переопределённой ИСЛАУ

На графике отмечен брус решения. Отметим, что найденное решение лежит на стыке ортантов и поэтому брус решения не покрывает всё допустовое множество целиком.

4.3. График распознающего функционала

Построим график распознающего функционала $\text{Tol}(x_1, x_2)$.

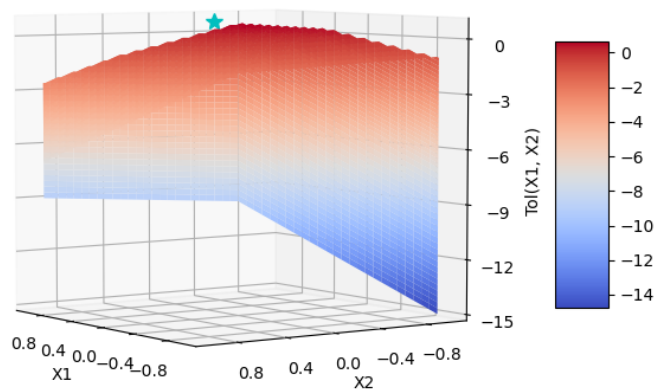


Рисунок 4.2. График распознающего функционала

На графике звёздочкой отмечена точка, где достигается максимум.

5. Ссылки

- Репозиторий с кодом программы и кодом отчёта: <https://github.com/KoDim97/Computer-Systems/tree/lab3>
- Презентации с лекций по вычислительным комплексам. [2]
- Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. Баженов А. Н. [1]

Перечень использованных источников

1. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. Баженов А. Н. — URL: <https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info>.
2. Презентации с лекций. — URL: <https://cloud.mail.ru/public/5CaW/TsKmuYmp3/topic3.pdf>.
3. Реализация и документация программы IntLinIncR2 для визуализации допускового множества. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/IntLinIncR2.pdf>.
4. Реализация и документация программы IntLinIncR3 для визуализации допускового множества. — URL: <http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/IntLinIncR3.pdf>.
5. Реализация функции tolsolvty на Python. Максим Смольский. — URL: <https://github.com/MaximSmolskiy/tolsolvty>.