Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Вычислительные комплексы

Отчёт по заданию №5

Работу выполнил:
Д. А. Козлов
Группа:
3630102/70201
Преподаватель:
А. Н. Баженов

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1. Постановка задачи

1.1. Задача 1

Решить пример из лекции с треугольной матрицей и неправильными интервалами в правой части с помощью субдифференциального метода Ньютона:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & [0.1, 0.2] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [4.1, 3.9] \\ [0.1, 0.4] \end{pmatrix}$$

1.2. Задача 2

Даны 2 матрицы, полученные в результате компьютерной малоракурсной томографии, обе построены с одинаковой геометрией: детектор 16×16 пикселей, разбиение по радиусу и по высоте на 6 частей, в первомслучае плазма также разбита на $n_\phi = 6$ частей по углу.

Для них верно, что для каждой строки сумма элементов в первой матрице должна совпадать с суммой элементов во второй. А также должно быть верно более сильное свойство (отвечающее за разбиение по углу): для каждой строки, i-й элемент второй матрицы равен сумме последовательных шести элементов первой матрицы с $n_\phi i$ по $n_\phi i + 1$ Сегменты пронумерованы следующим образом: сегменты, находящиеся на одной высоте z, пронумерованы по спирали от центра по увеличению радиуса, затем такие спирали сложены последовательно по увеличению высоты. Таким образом, сегменты плазмы, разбитой по углу, которые вместе складываются в один сегмент тороидально симметричной плазмы, лежат последовательно подряд по n_ϕ штук.

Сгенерировать пробное значение x, получить правую часть ИСЛАУ, сделать её интервальной. Полученные ИСЛАУ решить в полной интервальной арифметике. Так как матрицы прямоугольные, убрать избыточное число уравнений.

2. Теория

Отображение $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}(y) = \text{sti}\ (\mathbf{C}\text{sti}\ ^{-1}(y) \ominus \mathbf{d}) =$$
$$= \text{sti}\ (\mathbf{C}\text{sti}\ ^{-1}(y)) - \text{sti}\ (\mathbf{d})$$

Переход в алгоритме SubDiff2 описывается следующим оборазом:

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1}\mathcal{G}(x^{(k-1)})$$

Здесь τ - релаксационный параметр от 0 до 1. Чем он больше, тем быстрее сходимоть, но если выбрать его меньшим, то область сходимости метода становится больше.

Чтобы найти начальное приближение, достаточно решить 'среднюю систему':

$$\text{mid}\mathbf{C}\ \dot{x}^{(0)} = \text{sti}\mathbf{d}$$

3. Пример с лекции

Рассмотрим следующий пример из лекции:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & [0.1, 0.2] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [4.1, 3.9] \\ [0.1, 0.4] \end{pmatrix}$$

Сначала поставим релаксационный параметр равным $\tau = 0.9$. Будем искать решение с точностью $\epsilon = 1e^{-8}$.

За 10 итераций алгоритм находит решение:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [3.1, 1.9] \\ [1.0, 2.0] \end{pmatrix}$$

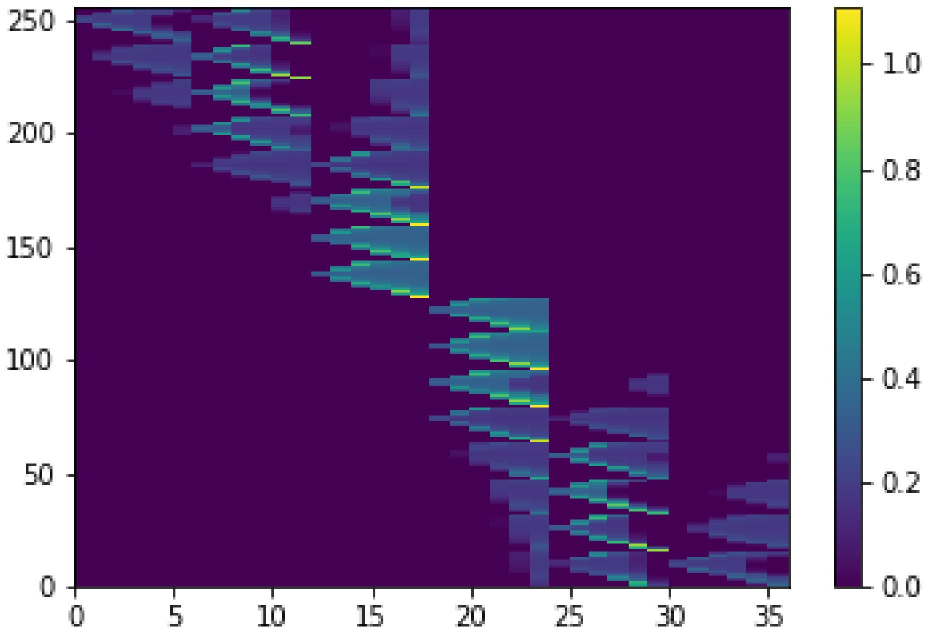
Это решение верное.

4. Прямоугольные матрицы

4.1. Матрица 1

Исходная матрица имеет следующий вид

Рисунок 4.1. Исходная матрица

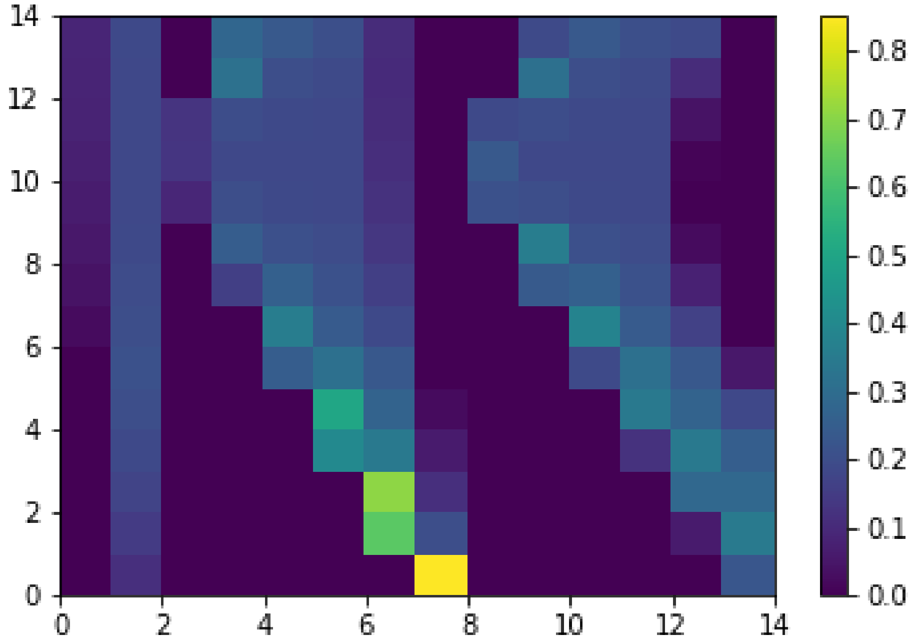


Для прямоугольных матриц применение субдифференциального метода Ньютона невозможно. Сначала нужно преобразовать матрицу.

Будем делать следующее. Обрежем матрицу до квадратной, уберем нулевые столбцы, а затем в полученной матрице найдем максимальную неособенную.

После проведения описанной процедуры получаем следующую матрицу:

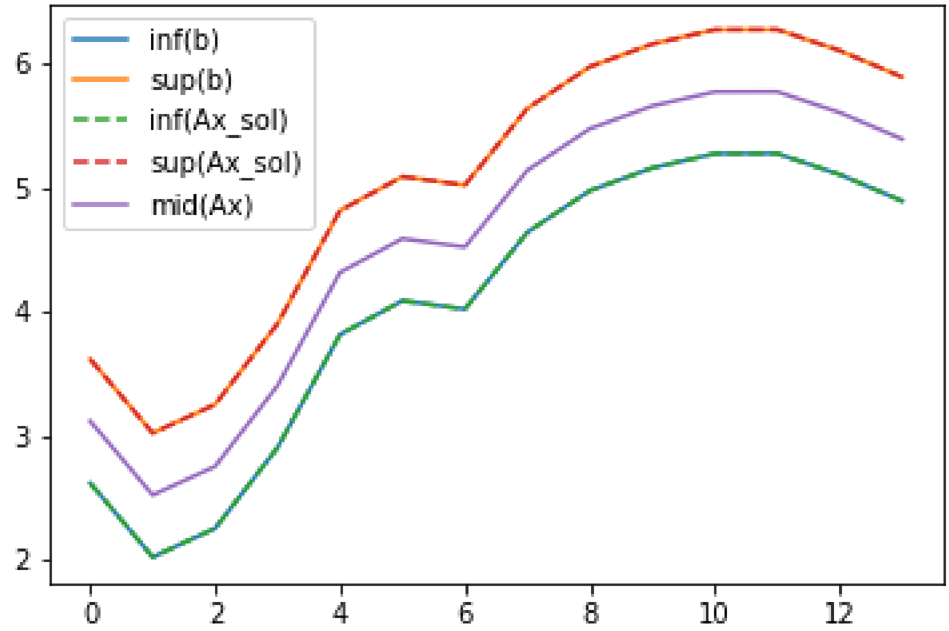
Рисунок 4.2. Получившаяся матрица



Сгенерируем x и найдем по нему вектор правых частей b. После сделаем вектор $\mathbf{b}$ интервальным, положив все радиусы равными 0.5. После чего решим полученную систему субдифференциальным методом Ньютона.

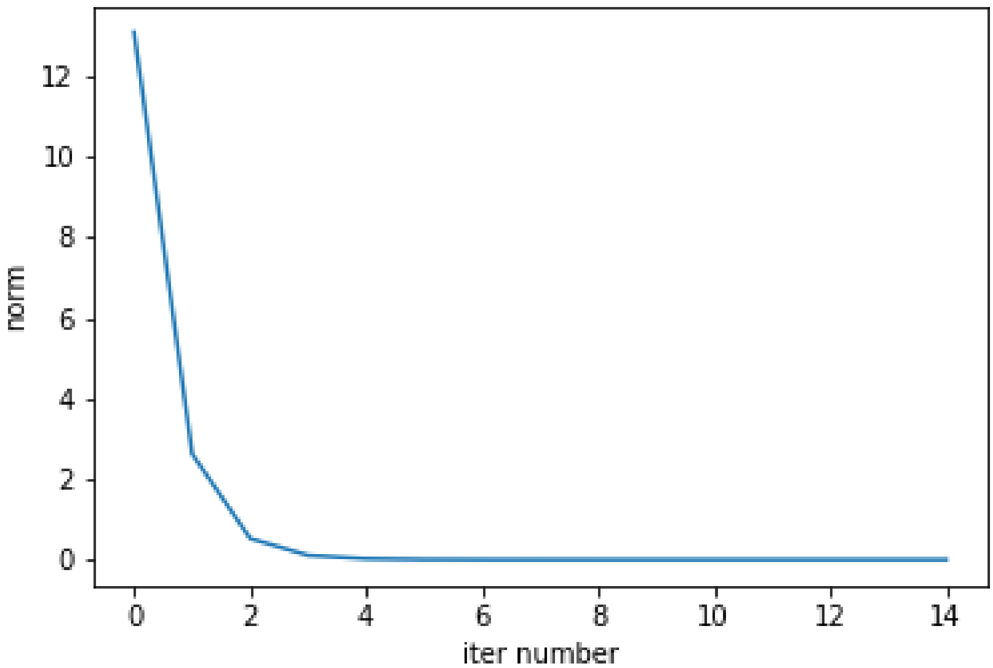
Получаем следующее решение:

Рисунок 4.3. Полученное решение



Так же построим график сходимости метода.

Рисунок 4.4. Сходимость

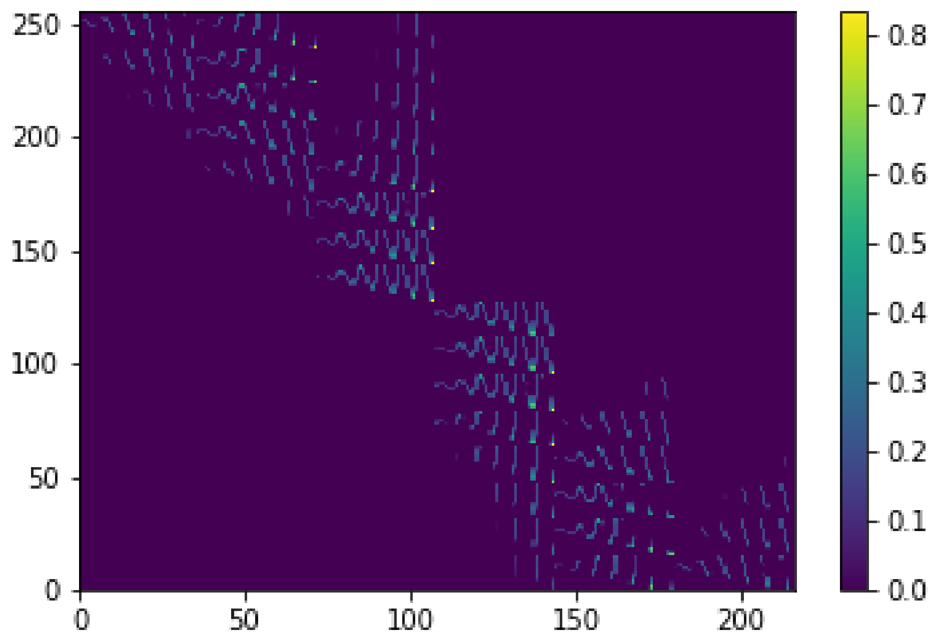


4.2. Матрица 2

Все тоже самое проведем для второй матрицы

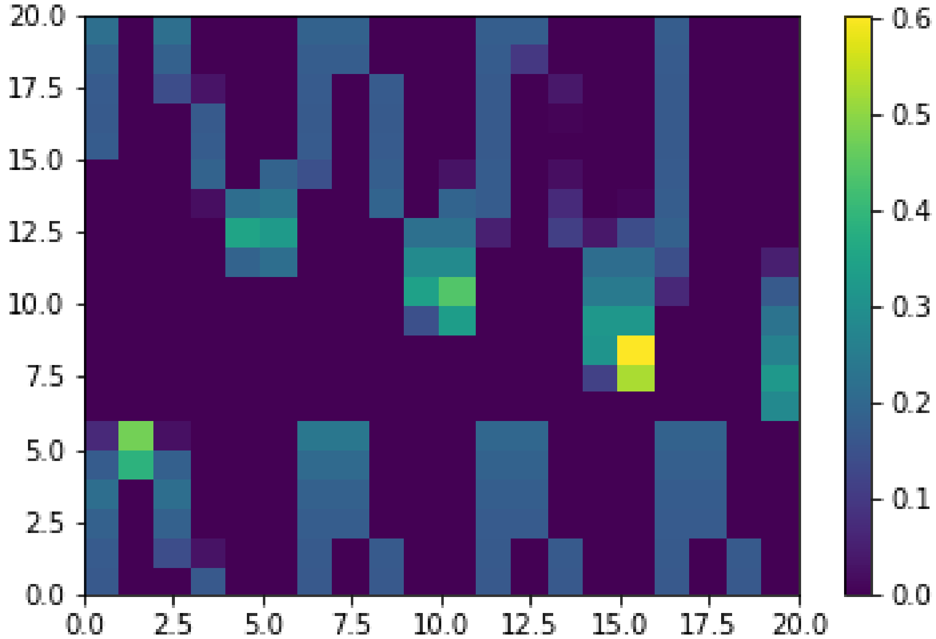
Исходная матрица

Рисунок 4.5. Исходная матрица



Полученная подматрица:

Рисунок 4.6. Получившаяся матрица



Решение:

Рисунок 4.7. Полученное решение

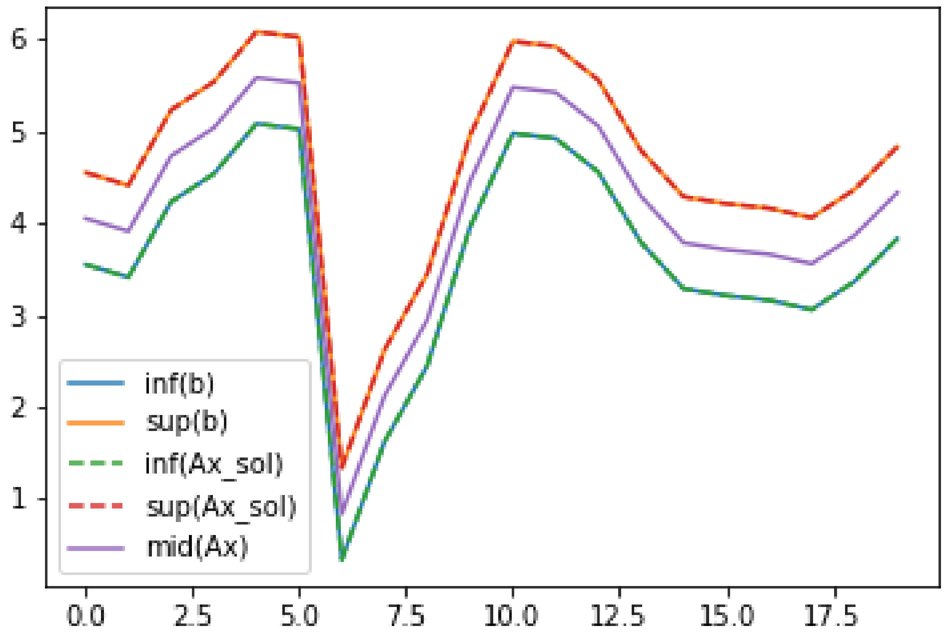
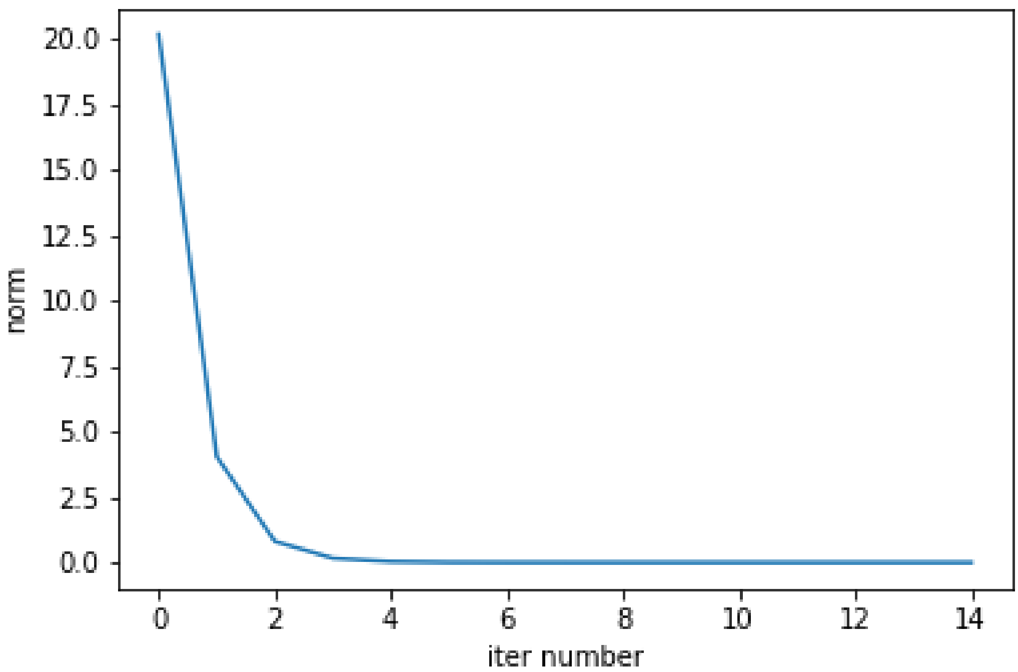


График сходимости метода:

Рисунок 4.8. Сходимость



5. Обсуждения

1. Субдифференциальный метод Ньютона работает корректно и в случае ИСЛАУ с 'неправильными' интервалами
2. Метод сходится быстро даже для задач большой размерности [рис. 4.4] [рис. 4.8]
3. Во всех случаях решение было найдено корректно [рис. 4.3] [рис. 4.7]

6. Литература

Лекции по вычислительным комплексам А.Н. Баженов

7. Приложение

Репозиторий с кодом: https://github.com/KoDim97/Computer-Systems/tree/lab5