Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

# Вычислительные комплексы

Лабораторная работа №1

**Работу выполнил:**
Д. А. Козлов
Группа:
3630102/70201
**Преподаватель:**
А. Н. Баженов

Санкт-Петербург
2020

# Содержание

# 1. Постановка задачи

## 1.1. Задание 1

Имеем 2*2 - матрицу А.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть все элементы имеют радиус $\varepsilon$.

$$rada_{ij} = \varepsilon > 0$$

Получаем

$$A = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \end{pmatrix}$$

Определить, при каком $\varepsilon$ матрица содержит особенные матрицы.

## 1.2. Задание 2

Имеем n*n - матрицу А.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & [0,\varepsilon] & \cdots & [0,\varepsilon] \\ [0,\varepsilon] & 1 & \cdots & [0,\varepsilon] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0,\varepsilon] & [0,\varepsilon] & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Определить, при каком радиусе $\varepsilon$ матрица содержит особенные матрицы.

# 2. Решение

## 2.1. Задача 1

Посчитаем определитель матрицы А по правилам интервальной арифметики.

$$\det A = \begin{vmatrix} [1-\epsilon, 1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \\ [1.1-\epsilon, 1.1+\epsilon] & [1-\epsilon, 1+\epsilon] \end{vmatrix} = [(1-\epsilon)^2, (1+\epsilon)^2] - [(1.1-\epsilon)*(1-\epsilon), (1.1+\epsilon)*(1+\epsilon)] =$$

$$= [(1-\epsilon)^2 - (1+\epsilon)*(1.1+\epsilon), (1+\epsilon)^2 - (1-\epsilon)*(1.1-\epsilon)] = [-0.1 - 4.1*\epsilon, -0.1 + 4.1*\epsilon]$$

Определитель:

$$\det A = [-0.1 - 4.1\varepsilon, -0.1 + 4.1\varepsilon]$$

Левая часть $-0.1 - 4.1\varepsilon < 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Значит, чтобы интервальная матрица была особенной необходимо, чтобы правая граница была положительная:

$$\epsilon > \frac{1}{41}$$

.

## 2.2. Задача 2

**Теорема Адамара.** Интервальная матрица с диагональным преобладание является неособенной.

Понятно, что максимально возможная сумма элементов в вне диагонали равна $\varepsilon(n-1)$ в каждой строке. Для нарушения диагонального преобладания нужно, чтобы $\varepsilon > \frac{1}{n-1}$. Посмотрим, насколько хороша эта оценка.

Посчитаем определитель для различных $n$. Обозначим $[0, \varepsilon] = a$ и вычислим определитель таких матриц, используя SymPy.

```
n = 2 :  1 - a**2
n = 3 :  2*a**3 - 3*a**2 + 1
n = 4 :  -3*a**4 + 8*a**3 - 6*a**2 + 1
n = 5 :  4*a**5 - 15*a**4 + 20*a**3 - 10*a**2 + 1
n = 6 :  -5*a**6 + 24*a**5 - 45*a**4 + 40*a**3 - 15*a**2 + 1
n = 7 :  6*a**7 - 35*a**6 + 84*a**5 - 105*a**4 + 70*a**3 - 21*a**2 + 1
```

Посчитаем границы интервалов:

$$
\begin{array}{lll}
n=2 & [1-e^2; & 1] \\
n=3 & [1-3e^2; & 1+e^3] \\
n=4 & [-3e^4-6e^2+1; & 8e^3+1] \\
n=5 & [-15e^4-10e^2+1; & 4e^5+20e^3+1] \\
n=6 & [-5e^6-45e^4-15e^2+1; & 24e^5+40e^3+1] \\
n=7 & [-35e^6-105e^4-21e^2+1; & 6e^7+84e^5+70e^3+1]
\end{array}
$$

Понятно, что нас интересует только левая граница. Правая граница всегда получается положительной, так как мы имеем полиномы с положительными коэффициентами.

Найдем такие $\varepsilon$, при которых левая граница будет отрицательной. Сделаем это при помощи библиотеки Python mpmath. Получаем следующее:

| $n$ | $\frac{1}{(n-1)}$ | $\varepsilon^*$ |
|---|---|---|
| 2 | 1.0 | 1.0 |
| 3 | 0.5 | 0.577 |
| 4 | 0.333 | 0.393 |
| 5 | 0.25 | 0.297 |
| 6 | 0.2 | 0.238 |
| 7 | 0.167 | 0.199 |
| 8 | 0.143 | 0.171 |

Как видим, при увеличении $n$ разница значений между $\frac{1}{(n-1)}$ и значения, полученного в вычислительном эксперименте, уменьшается. Значит, за $\varepsilon$, при котором матрица становится особенной, можно использовать оценку $\varepsilon > \frac{1}{n-1}$

# 3. Приложение

https://github.com/KoDim97/Computer-Systems/tree/lab1