# Kombinatorische Spieltheorie

Yannik Höll

3. März, 2023

# Einteilung

# Kombinatorische Spiele

Kombinatorische Spieltheorie beschäftigt sich mit Spielen die:

- 2 Spieler (Links, Rechts)
- endliche/abzählbare Positionen
- Spieler ziehen abwechselnd
- jeder Spieler hat vollständige Information
- kein Zufall
- Konvention: Keine Züge mehr $\Rightarrow$ Verlierer (kein Unentschieden)

# Kombinatorische Spiele

Kombinatorische Spieltheorie beschäftigt sich mit Spielen die:

- 2 Spieler (Links, Rechts)
- endliche/abzählbare Positionen
- Spieler ziehen abwechselnd
- jeder Spieler hat vollständige Information
- kein Zufall
- Konvention: Keine Züge mehr $\Rightarrow$ Verlierer (kein Unentschieden)

Kombinatorische Spieltheorie ist:

- nicht wie gewöhnliche Spieltheorie
- eher mathematische Rätsel, Denkaufgaben

# Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

# Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

- Schach (Unentschieden)

# Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

- Schach (Unentschieden)
- Backgammon (Zufall)

# Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

- Schach (Unentschieden)
- Backgammon (Zufall)
- Tennis, oder andere Sportarten (keine diskreten Zustände)

# Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

- Schach (Unentschieden)
- Backgammon (Zufall)
- Tennis, oder andere Sportarten (keine diskreten Zustände)
- Schere-Stein-Papier (keine vollständige Information, nicht abwechselnd)

# Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

- Schach (Unentschieden)
- Backgammon (Zufall)
- Tennis, oder andere Sportarten (keine diskreten Zustände)
- Schere-Stein-Papier (keine vollständige Information, nicht abwechselnd)

$\Rightarrow$ viele untersuchte Spiele eher unbekannt

$\Rightarrow$ Die meisten Spiele wurden wegen Theorie "erfunden"

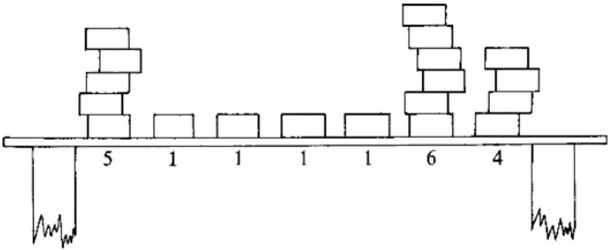
## Kombinatorische Spieltheorie

**Zentrale Frage:** Gibt es eine Strategie, durch die einer der beiden Spieler sicher gewinnt?

# Nim

**Regeln**:

- Stapel mit Münzen
- Spieler entfernen beliebig viele Münzen von beliebigem Stapel
- Keine Unterscheidung der Spieler

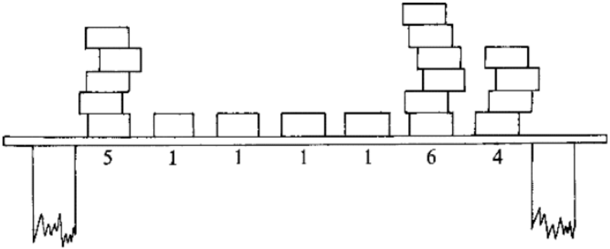



Eine Nim-Position [1]

# Nim

**Regeln**:

- Stapel mit Münzen
- Spieler entfernen beliebig viele Münzen von beliebigem Stapel
- Keine Unterscheidung der Spieler
- Spiel heißt "Impartial"




Eine Nim-Position [1]

# Nim

$n, k \in \mathbb{N}$:

- Position ohne Münze ($N_0$): Zweiter Spieler gewinnt

# Nim

$n, k \in \mathbb{N}$:

- Position ohne Münze ($N_0$): Zweiter Spieler gewinnt
- Position mit einem Turm($N_k$): Erster Spieler gewinnt
- Position mit mit 2 Türmen mit gleicher Anzahl an Münzen($N_{k,k}$):
  **Hypothese:** 2. Spieler gewinnt immer, indem er den Gegner nachahmt

# Nim

$n, k \in \mathbb{N}$:

- Position ohne Münze $(N_0)$: Zweiter Spieler gewinnt
- Position mit einem Turm$(N_k)$: Erster Spieler gewinnt
- Position mit mit 2 Türmen mit gleicher Anzahl an Münzen: 2. Spieler gewinnt immer, indem er den Gegner nachahmt

# Nim

$n, k \in \mathbb{N}$:

- Position ohne Münze $(N_0)$: Zweiter Spieler gewinnt
- Position mit einem Turm$(N_k)$: Erster Spieler gewinnt
- Position mit mit 2 Türmen mit gleicher Anzahl an Münzen:
  2. Spieler gewinnt immer, indem er den Gegner nachahmt
- Position mit mit 2 Türmen mit unterschiedlicher Anzahl an Münzen $(N_{n,k}, n > k)$:
  1. Spieler gewinnt immer, indem er $N_{n,k}$ nach $N_{k,k}$ überführt

# Nimbers

- **Def:** $0 =$ Spiel, bei dem der 2. Spieler gewinnt

# Nimbers

- **Def:** $0 =$ Spiel, bei dem der 2. Spieler gewinnt
- $*k =$ Nim-Turm mit $k \in \mathbb{N}$ Münzen

# Nimbers

- **Def:** $0 =$ Spiel, bei dem der 2. Spieler gewinnt
- $*k =$ Nim-Turm mit $k \in \mathbb{N}$ Münzen
- $*k + *k = 0 \Rightarrow *k = -(*k)$

# Nimbers

- **Def:** $0$ = Spiel, bei dem der 2. Spieler gewinnt
- $*k$ = Nim-Turm mit $k \in \mathbb{N}$ Münzen
- $*k + *k = 0 \Rightarrow *k = -(*k)$
- $* + (*2) + (*3) = 0 \Rightarrow * + (*2) = *3$
- **Aber**: $* + (*3) = (*2)$, $(2*) + (*3) = *$
- Nim-Addition verhält sich nicht wie Addition in $\mathbb{N}$

# Nimbers

- **Def:** $0 =$ Spiel, bei dem der 2. Spieler gewinnt
- $*k =$ Nim-Turm mit $k \in \mathbb{N}$ Münzen
- $*k + *k = 0 \Rightarrow *k = -(*k)$
- $* + (*2) + (*3) = 0 \Rightarrow * + (*2) = *3$
- **Aber**: $* + (*3) = (*2)$, $(2*) + (*3) = *$
- Nim-Addition verhält sich nicht wie Addition in $\mathbb{N}$
- Allgemeine Nim-Addition entspricht der vollständigen Nim-Theorie

# Nim-Addition

## Allgemeine Nim-Addition

$*m + *n = *k$: $*k \neq *m' + *n$ und $*k \neq *m + *n'$
mit $n' < n$ und $m' < m$

# Nim-Addition

## Allgemeine Nim-Addition

$$*m + *n = *k\colon\ *k \neq *m' + *n \text{ und } *k \neq *m + *n'$$
$$\text{mit } n' < n \text{ und } m' < m$$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : n < 2^k \Rightarrow *2^k + *n = *(2^k + n)$

# Nim-Addition

## Allgemeine Nim-Addition

$$*m + *n = *k\text{: } *k \neq *m' + *n \text{ und } *k \neq *m + *n'$$
$$\text{mit } n' < n \text{ und } m' < m$$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : n < 2^k \Rightarrow *2^k + *n = *(2^k + n)$
$\Rightarrow \forall k, n \in \mathbb{N} : k \neq n : *2^k + *2^n = *(2^k + 2^n)$
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : *2^k + *2^k = 0$

# Nim-Addition

## Allgemeine Nim-Addition

$*m + *n = *k$: $*k \neq *m' + *n$ und $*k \neq *m + *n'$
mit $n' < n$ und $m' < m$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : n < 2^k \Rightarrow *2^k + *n = *(2^k + n)$
$\Rightarrow \forall k, n \in \mathbb{N} : k \neq n : *2^k + *2^n = *(2^k + 2^n)$
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : *2^k + *2^k = 0$

Die allgemeine Nim-Addition verhält sich wie eine bitweise XOR-Operation.

# Nim-Addition - Beispiel

$$5 \overset{*}{+} 3 = (4+1) \overset{*}{+} (2+1) = 4 \overset{*}{+} 2 = 4 + 2 = 6$$

# Nim-Addition - Beispiel

$$5 \overset{*}{+} 3 = (4+1) \overset{*}{+} (2+1) = 4 \overset{*}{+} 2 = 4 + 2 = 6$$

$$11 \overset{*}{+} 22 \overset{*}{+} 33 = (8+2+1) \overset{*}{+} (16+4+2) \overset{*}{+} (32+1) = 8 + 16 + 4 + 32 = 60$$

# Spiel - Abstrakte Definition

## Kombinatorisches Spiel

$$G = \{a, b, c, \cdots \mid d, e, f, \cdots\}$$

wobei $a, b, c, d, e, f$ Kombinatorische Spiele sind. $a, b, c$ sind die Optionen des ersten Spielers (Links); $d, e, f$, die des 2. Spielers (Rechts).

$G = \{G^L \mid G^R\}$, falls es eine beste Optionen $G^L$ für Links und $G^R$ für rechts gibt.
$G^L$ ist beste Option $\iff \forall G_i^L \neq G^L : G^L > G_i^L$

# Spiel - Abstrakte Definition

## Addition von Kombinatorischen Spielen

$G = \{G^L | \, G^R\}, H = \{H^L | \, H^R\}$ Kombinatorische Spiele:

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L | \, G^R + H, G + H^R\}$$

## Inverse von Kombinatorischen Spielen

$G = \{G^L | \, G^R\}$ Kombinatorische Spiele:

$$-G = \{-G^R | \, -G^L\}$$

# Spiel - Abstrakte Definition

$$-G = \{-G^R \mid -G^L\}$$

$$\begin{aligned} G + (-G) &= \{G^L \mid G^R\} + \{-G^R \mid -G^L\} \\ &= \{G^L + -G, G + (-G)^L \mid G^R + -G, G + (-G)^R\} \\ &= \{G^L + (-G), G + (-G^R) \mid G^R + (-G), G + (-G^L)\} \\ &\Rightarrow G^L + (-G);\ \ G + (-G^R) \quad G^R + (-G);\ \ G + (-G^L) \end{aligned}$$

# Spiel - Abstrakte Definition

## Vergleich von Spielen

$G, H$ Kombinatorische Spiele:

$$
\begin{aligned}
G > H &\iff G + (-H) > 0 \\
G \geq H &\iff G + (-H) \geq 0 \\
G < H &\iff G + (-H) > 0 \\
G \leq H &\iff G + (-H) \leq 0
\end{aligned}
$$

# Spiel - Abstrakte Definition

## Umkehrbare Züge

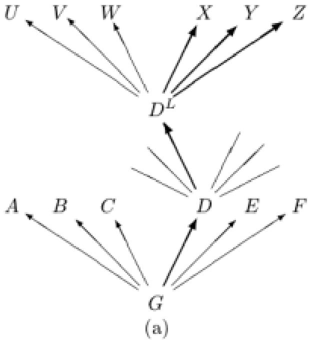
$G = \{A, B, C, \cdots \mid D, E, F, \cdots\}, D^L = \{U, V, W \cdots \mid X, Y, Z, \cdots\}$

Kombinatorische Spiele:

$$\exists D^L \geq G \iff \text{D ist umkehrbarer Zug}$$

$\Rightarrow G = \{A, B, C, \cdots | D, E, F, \cdots\} = \{A, B, C, \cdots \mid X, Y, Z, \cdots, E, F \cdots\} = H$

# Spiel - Abstrakte Definition




Schematische Darstellung - Umkehrbarer Zug [1]

# Beispiel Nim

- $0 = \{|\}$
- $* = \{0|0\}$
- $*2 = \{0, *|0, *\}$
- $*k = \{0, *, *2, \cdots, *(k-1)|0, *, *2, \cdots, *(k-1)\}$

# Poker-Nim

**Regeln**:

- Alles wie bei Nim
- Münzen, die ein Spieler von Stapel wegnimmt, behält der Spieler
- statt eine/mehrere Münzen von Stapel zu nehmen, kann Spieler auch Münzen aus seinem "Lager" hinzufügen

# Poker-Nim

**Regeln**:

- Alles wie bei Nim
- Münzen, die ein Spieler von Stapel wegnimmt, behält der Spieler
- statt eine/mehrere Münzen von Stapel zu nehmen, kann Spieler auch Münzen aus seinem "Lager" hinzufügen

Was ist hier eine Gewinnstrategie?

# Poker-Nim

**Regeln**:

- Alles wie bei Nim
- Münzen, die ein Spieler von Stapel wegnimmt, behält der Spieler
- statt eine/mehrere Münzen von Stapel zu nehmen, kann Spieler auch Münzen aus seinem "Lager" hinzufügen

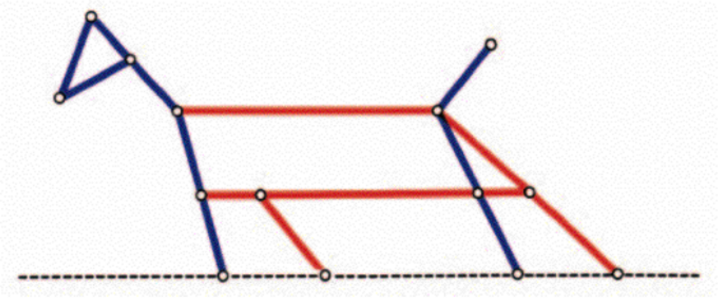
Was ist hier eine Gewinnstrategie?
Bei perfektem Spiel ist Poker-Nim äquivalent zu Nim, da alle nicht-nim Züge umkehrbar sind.

# Hackenbush

**Regeln**:

- Graphenstruktur mit Kanten in 2 Farben (rot, blau)
- Kanten können mit speziellem Knoten, der "Boden" heißt, verbunden sein
- Spieler löschen Kanten ihrer Farbe (Links löscht bLau, Rechts löscht Rot)
- wenn Teilgraph nicht mit Boden verbunden, löschen
- abwechselndes Ziehen
- wer als erstes in seinem Zug keine Kanten mehr löschen kann, verliert

# Hackenbush



Hackenbush-Position - Hund [1]

# Einfache Hackenbush Positionen

- $\{|\} = 0$

# Einfache Hackenbush Positionen

- $\{|\} = 0$
- $\{0|\} = 1$

# Einfache Hackenbush Positionen

- $\{|\} = 0$
- $\{0|\} = 1$
- $\{1|\} = 2$

# Einfache Hackenbush Positionen

- $\{|\} = 0$
- $\{0|\} = 1$
- $\{1|\} = 2$
- $\{n-1|\} = n, \forall n \in \mathbb{N}$

# Einfache Hackenbush Positionen

- $\{|\} = 0$
- $\{0|\} = 1$
- $\{1|\} = 2$
- $\{n-1|\} = n, \forall n \in \mathbb{N}$
- Analog: $\{|-n+1\} = -n, \forall n \in \mathbb{N}^+$

# Einfache Hackenbush Positionen

- $\{|\} = 0$
- $\{0|\} = 1$
- $\{1|\} = 2$
- $\{n-1|\} = n, \forall n \in \mathbb{N}$
- Analog: $\{|-n+1\} = -n, \forall n \in \mathbb{N}^+$

$$\Rightarrow -(-n) = -\{|-n+1\} = \{n-1|\} = n$$

# Hackenbush

Der Wert jeder Hackenbush-Position, bei der blaue und rote Kanten getrennt vorkommen, kann durch aufsummieren der Anzahlen von blauen und roten Kanten bestimmt werden.

# Hackenbush - Gebrochene Zahlen

- $\{0|1\} = \frac{1}{2}$

# Hackenbush - Gebrochene Zahlen

- $\{0|1\} = \frac{1}{2}$
- $\{0|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$

# Hackenbush - Gebrochene Zahlen

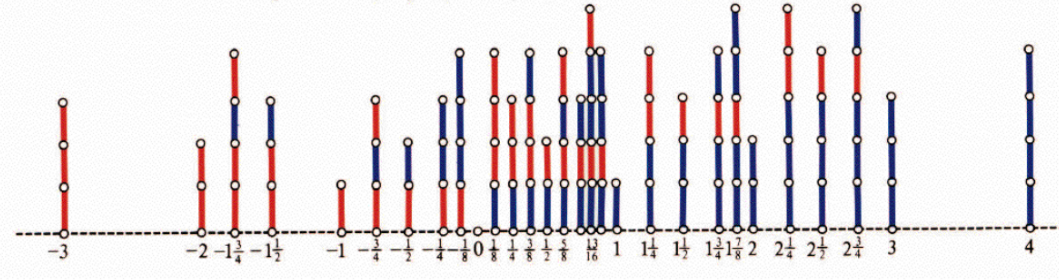
- $\{0|1\} = \frac{1}{2}$
- $\{0|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$
- $\{0|\frac{1}{2^n}\} = \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$

# Hackenbush - Gebrochene Zahlen

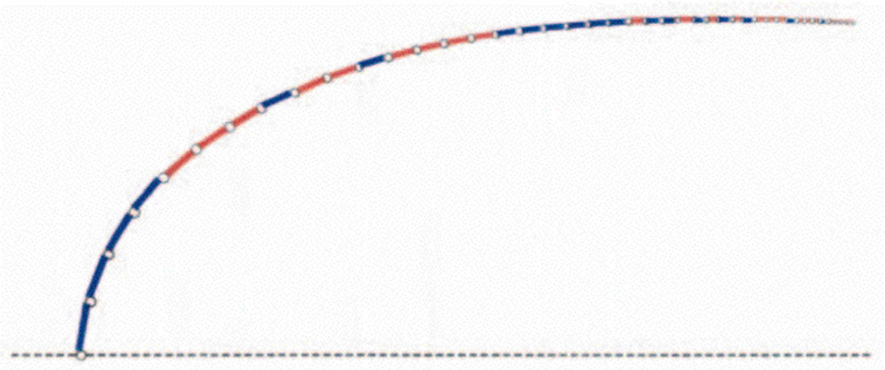
- $\{0|1\} = \frac{1}{2}$
- $\{0|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$
- $\{0|\frac{1}{2^n}\} = \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{-\frac{1}{2^n}|0\} = -\frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$

# Hackenbush - Gebrochene Zahlen

- $\{0|1\} = \frac{1}{2}$
- $\{0|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$
- $\{0|\frac{1}{2^n}\} = \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{-\frac{1}{2^n}|0\} = -\frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{\frac{p}{2^q}|\frac{p+1}{2^q}\} = \frac{2p+1}{2^{q+1}}$




Hackenbush-Position mit zugehörigen Werten [1]



Hackenbush-Position mit dem Wert $\pi$ ($\pi = 3,0010010000111111011\cdots$) [1]

# Hackenbush - Berlekamp's Algorithmus

- Wenn Zahl positiv, dann mit blauem Ast starten, sonst mit Rotem
- $n$ Äste für ganzaligen Anteil $n$ (blau) oder $-n$ (rot)
- Dezimaltrenner wird ersetzt durch Blau, Rot (wenn positiv) oder Rot, Blau (wenn negativ)
- Nachkommastellenanteil in binäre Darstellung umwandeln und für jede 1 einen blauen Ast und für jede 0 einen roten Ast hinzufügen in richtiger Reihenfolge
- wenn binäre Darstellung endlich $\Rightarrow$ letzte 1 auslassen

# Hackenbush-Hotchpotch

**Regeln**:

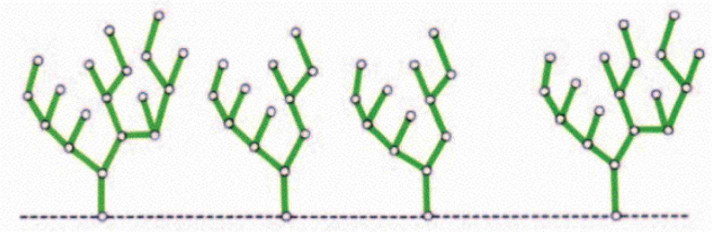
- Graphenstruktur mit Kanten in 3 Farben (rot, blau, grün)
- Kanten können mit speziellem Knoten, der "Boden" heißt, verbunden sein
- Spieler löschen Kanten ihrer Farbe (Links löscht bLau, Rechts löscht Rot)
- grüne Kanten können von beiden Spielern gelöscht werden
- wenn Teilgraph nicht mit Boden verbunden, löschen
- abwechselndes Ziehen
- wer als erstes in seinem Zug keine Kanten mehr löschen kann, verliert

# Only-Green Hackenbush

- Entspricht Nim, solange die Graphen keine *Verzweigung* besitzen

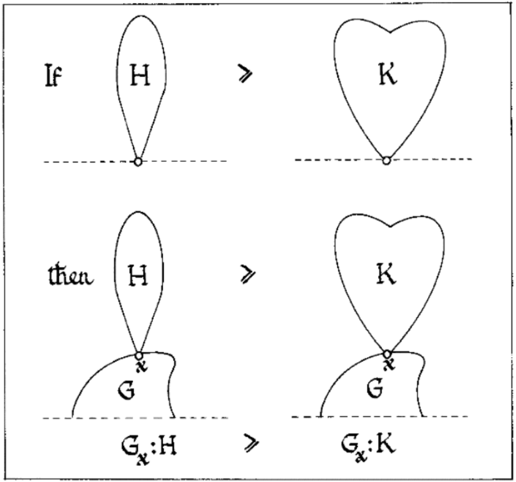
# Only-Green Hackenbush

- Entspricht Nim, solange die Graphen keine *Verzweigung* besitzen
- Wenn 2 identische Teilgraphen existieren $\Rightarrow$ Kopier-Strategie



Grüner Wald [1]

# Only-Green Hackenbush - Colon Principle




Colon Principle [1]

# Only-Green Hackenbush

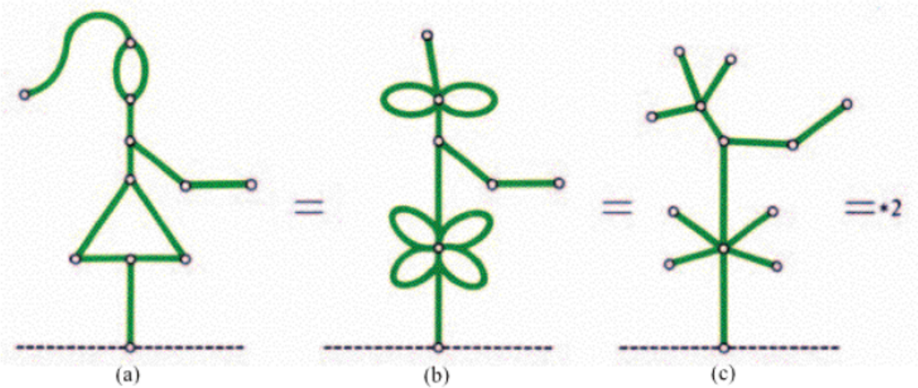
- Bei Verzweigungen:
  - alle Verzweigungen markieren
  - Werte ab Verzweigung ausrechnen und addieren
  - unverzweigten Weg mit selben Wert wie Summe an Verzweigungsknoten anfügen

# Only-Green Hackenbush

- Bei Verzweigungen:
  - alle Verzweigungen markieren
  - Werte ab Verzweigung ausrechnen und addieren
  - unverzweigten Weg mit selben Wert wie Summe an Verzweigungsknoten anfügen
- Bei Zyklen (Kreise) $\Rightarrow$ Fusion-Rule anwenden

## Fusion-Rule

Jeder Zyklus in einem Only-Green Hackenbush-Graphen kann fusioniert werden, ohne den Wert des gesamten Graphen zu ändern




Fusion-Rule angewandt auf Position [1]

# Hackenbush-Hotchpotch

- $* < 1/2^n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ * > -1/2^n, \forall n \in \mathbb{N},\ * \neq 0$

# Hackenbush-Hotchpotch

- $* < 1/2^n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ * > -1/2^n, \forall n \in \mathbb{N},\ * \neq 0$
- $* \mid\mid 0$, "Start confused with 0", Stern ist ununterscheidbar von 0

# Hackenbush-Hotchpotch

- $* < 1/2^n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ * > -1/2^n, \forall n \in \mathbb{N},\ * \neq 0$
- $* \mid\mid 0$, "Start confused with 0", Stern ist ununterscheidbar von 0
- $\uparrow = \{0, *|0\},\ \uparrow\ \mid\mid *$
- $\uparrow + \uparrow = \Uparrow$

# Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

[1] Elwyn R Berlekamp, John H Conway, and Richard K Guy.
*Winning ways for your mathematical plays, volume 1*.
AK Peters/CRC Press, 2001.