

Kombinatorische Spieltheorie

Yannik Höll

3. März, 2023

Einteilung

1 Einleitung

2 Nim

3 Poker-Nim

4 Hackenbush

5 Hackenbush-Hotchpotch

6 Quellen

Kombinatorische Spiele

Kombinatorische Spieltheorie beschäftigt sich mit Spielen die:

- 2 Spieler (Links, Rechts)
- endliche/abzählbare Positionen
- Spieler ziehen abwechselnd
- jeder Spieler hat vollständige Information
- kein Zufall
- Konvention: Keine Züge mehr \Rightarrow Verlierer (kein Unentschieden)

Kombinatorische Spiele

Kombinatorische Spieltheorie beschäftigt sich mit Spielen die:

- 2 Spieler (Links, Rechts)
- endliche/abzählbare Positionen
- Spieler ziehen abwechselnd
- jeder Spieler hat vollständige Information
- kein Zufall
- Konvention: Keine Züge mehr \Rightarrow Verlierer (kein Unentschieden)

Kombinatorische Spieltheorie ist:

- nicht wie gewöhnliche Spieltheorie
- eher mathematische Rätsel, Denkaufgaben

Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

- Schach (Unentschieden)

Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

- Schach (Unentschieden)
- Backgammon (Zufall)

Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

- Schach (Unentschieden)
- Backgammon (Zufall)
- Tennis, oder andere Sportarten (keine diskreten Zustände)

Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

- Schach (Unentschieden)
- Backgammon (Zufall)
- Tennis, oder andere Sportarten (keine diskreten Zustände)
- Schere-Stein-Papier (keine vollständige Information, nicht abwechselnd)

Kombinatorische Spiele

Nicht untersucht werden können Spiele wie:

- Schach (Unentschieden)
- Backgammon (Zufall)
- Tennis, oder andere Sportarten (keine diskreten Zustände)
- Schere-Stein-Papier (keine vollständige Information, nicht abwechselnd)

⇒ viele untersuchte Spiele eher unbekannt

⇒ Die meisten Spiele wurden wegen Theorie "erfunden"

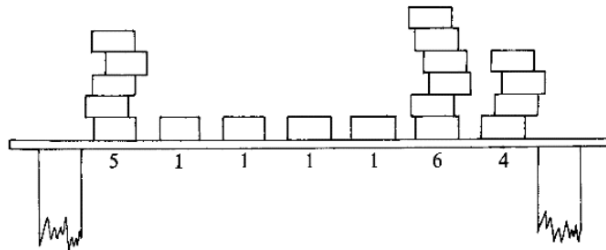
Kombinatorische Spieltheorie

Zentrale Frage: Gibt es eine Strategie, durch die einer der beiden Spieler sicher gewinnt?

Nim

Regeln:

- Stapel mit Münzen
- Spieler entfernen beliebig viele Münzen von beliebigem Stapel
- Keine Unterscheidung der Spieler

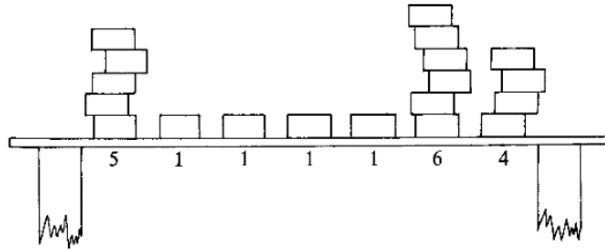


Eine Nim-Position [1]

Nim

Regeln:

- Stapel mit Münzen
- Spieler entfernen beliebig viele Münzen von beliebigem Stapel
- Keine Unterscheidung der Spieler
- Spiel heißt "Impartial"



Eine Nim-Position [1]

Nim

$n, k \in \mathbb{N}$:

- Position ohne Münze (N_0): Zweiter Spieler gewinnt

Nim

$n, k \in \mathbb{N}$:

- Position ohne Münze (N_0): Zweiter Spieler gewinnt
- Position mit einem Turm(N_k): Erster Spieler gewinnt
- Position mit mit 2 Türmen mit gleicher Anzahl an Münzen($N_{k,k}$):
Hypothese: 2. Spieler gewinnt immer, indem er den Gegner nachahmt

Nim

$n, k \in \mathbb{N}$:

- Position ohne Münze (N_0): Zweiter Spieler gewinnt
- Position mit einem Turm(N_k): Erster Spieler gewinnt
- Position mit mit 2 Türmen mit gleicher Anzahl an Münzen:
2. Spieler gewinnt immer, indem er den Gegner nachahmt

Nim

$n, k \in \mathbb{N}$:

- Position ohne Münze (N_0): Zweiter Spieler gewinnt
- Position mit einem Turm(N_k): Erster Spieler gewinnt
- Position mit mit 2 Türmen mit gleicher Anzahl an Münzen:
2. Spieler gewinnt immer, indem er den Gegner nachahmt
- Position mit mit 2 Türmen mit unterschiedlicher Anzahl an Münzen
($N_{n,k}, n > k$):
1. Spieler gewinnt immer, indem er $N_{n,k}$ nach $N_{k,k}$ überführt

Nimbers

- **Def:** 0 = Spiel, bei dem der 2. Spieler gewinnt

Nimbers

- **Def:** 0 = Spiel, bei dem der 2. Spieler gewinnt
- $*k$ = Nim-Turm mit $k \in \mathbb{N}$ Münzen

Nimbers

- **Def:** 0 = Spiel, bei dem der 2. Spieler gewinnt
- $*k$ = Nim-Turm mit $k \in \mathbb{N}$ Münzen
- $*k + *k = 0 \Rightarrow *k = -(*k)$

Nimbers

- **Def:** 0 = Spiel, bei dem der 2. Spieler gewinnt
- $*k$ = Nim-Turm mit $k \in \mathbb{N}$ Münzen
- $*k + *k = 0 \Rightarrow *k = -(*k)$
- $* + (*2) + (*3) = 0 \Rightarrow * + (*2) = *3$
- **Aber:** $* + (*3) = (*2)$, $(2*) + (*3) = *$
- Nim-Addition verhält sich nicht wie Addition in \mathbb{N}

Nimbers

- **Def:** 0 = Spiel, bei dem der 2. Spieler gewinnt
- $*k$ = Nim-Turm mit $k \in \mathbb{N}$ Münzen
- $*k + *k = 0 \Rightarrow *k = -(*k)$
- $* + (*2) + (*3) = 0 \Rightarrow * + (*2) = *3$
- **Aber:** $* + (*3) = (*2)$, $(2*) + (*3) = *$
- Nim-Addition verhält sich nicht wie Addition in \mathbb{N}
- Allgemeine Nim-Addition entspricht der vollständigen Nim-Theorie

Nim-Addition

Allgemeine Nim-Addition

$$*m + *n = *k: *k \neq *m' + *n \text{ und } *k \neq *m + *n' \\ \text{mit } n' < n \text{ und } m' < m$$

Nim-Addition

Allgemeine Nim-Addition

$$*m + *n = *k: *k \neq *m' + *n \text{ und } *k \neq *m + *n' \\ \text{mit } n' < n \text{ und } m' < m$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : n < 2^k \Rightarrow *2^k + *n = *(2^k + n)$$

Nim-Addition

Allgemeine Nim-Addition

$$*m + *n = *k: *k \neq *m' + *n \text{ und } *k \neq *m + *n' \\ \text{mit } n' < n \text{ und } m' < m$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : n < 2^k \Rightarrow *2^k + *n = *(2^k + n)$$

$$\Rightarrow \forall k, n \in \mathbb{N} : k \neq n : *2^k + *2^n = *(2^k + 2^n)$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : *2^k + *2^k = 0$$

Nim-Addition

Allgemeine Nim-Addition

$$*m + *n = *k: *k \neq *m' + *n \text{ und } *k \neq *m + *n' \\ \text{mit } n' < n \text{ und } m' < m$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : n < 2^k \Rightarrow *2^k + *n = *(2^k + n)$$

$$\Rightarrow \forall k, n \in \mathbb{N} : k \neq n : *2^k + *2^n = *(2^k + 2^n)$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : *2^k + *2^k = 0$$

Die allgemeine Nim-Addition verhält sich wie eine bitweise XOR-Operation.

Nim-Addition - Beispiel

$$5 \overset{*}{+} 3 = (4 + 1) \overset{*}{+} (2 + 1) = 4 \overset{*}{+} 2 = 4 + 2 = 6$$

Nim-Addition - Beispiel

$$5 \overset{*}{+} 3 = (4 + 1) \overset{*}{+} (2 + 1) = 4 \overset{*}{+} 2 = 4 + 2 = 6$$

$$11 \overset{*}{+} 22 \overset{*}{+} 33 = (8 + 2 + 1) \overset{*}{+} (16 + 4 + 2) \overset{*}{+} (32 + 1) = 8 + 16 + 4 + 32 = 60$$

Spiel - Abstrakte Definition

Kombinatorisches Spiel

$$G = \{a, b, c, \dots \mid d, e, f, \dots\}$$

wobei a, b, c, d, e, f Kombinatorische Spiele sind. a, b, c sind die Optionen des ersten Spielers (Links); d, e, f , die des 2. Spielers (Rechts).

$G = \{G^L \mid G^R\}$, falls es eine beste Optionen G^L für Links und G^R für rechts gibt.
 G^L ist beste Option $\iff \forall G_i^L \neq G^L : G^L > G_i^L$

Spiel - Abstrakte Definition

Addition von Kombinatorischen Spielen

$G = \{G^L \mid G^R\}, H = \{H^L \mid H^R\}$ Kombinatorische Spiele:

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}$$

Inverse von Kombinatorischen Spielen

$G = \{G^L \mid G^R\}$ Kombinatorische Spiele:

$$-G = \{-G^R \mid -G^L\}$$

Spiel - Abstrakte Definition

$$-G = \{-G^R \mid -G^L\}$$

$$\begin{aligned} G + (-G) &= \{G^L \mid G^R\} + \{-G^R \mid -G^L\} \\ &= \{G^L + -G, G + (-G)^L \mid G^R + -G, G + (-G)^R\} \\ &= \{G^L + (-G), G + (-G^R) \mid G^R + (-G), G + (-G^L)\} \\ &\Rightarrow G^L + (-G); \quad G + (-G^R) \quad G^R + (-G); \quad G + (-G^L) \end{aligned}$$

Spiel - Abstrakte Definition

Vergleich von Spielen

G, H Kombinatorische Spiele:

$$G > H \iff G + (-H) > 0$$

$$G \geq H \iff G + (-H) \geq 0$$

$$G < H \iff G + (-H) < 0$$

$$G \leq H \iff G + (-H) \leq 0$$

Spiel - Abstrakte Definition

Umkehrbare Züge

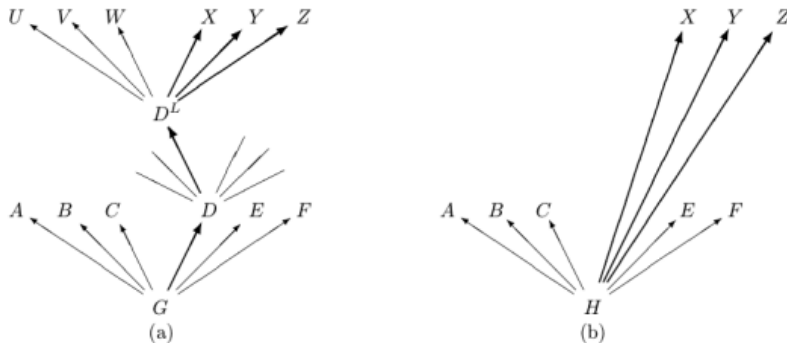
$$G = \{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\}, D^L = \{U, V, W, \dots \mid X, Y, Z, \dots\}$$

Kombinatorische Spiele:

$$\exists D^L \geq G \iff D \text{ ist umkehrbarer Zug}$$

$$\Rightarrow G = \{A, B, C, \dots \mid D, E, F, \dots\} = \{A, B, C, \dots \mid \textcolor{red}{X}, \textcolor{red}{Y}, \textcolor{red}{Z}, \dots, E, F, \dots\} = H$$

Spiel - Abstrakte Definition



Schematische Darstellung - Umkehrbarer Zug [1]

Beispiel Nim

- $0 = \{|\}$
- $* = \{0|0\}$
- $*2 = \{0, *|0, *\}$
- $*k = \{0, *, *2, \dots, *(k-1)|0, *, *2, \dots, *(k-1)\}$

Poker-Nim

Regeln:

- Alles wie bei Nim
- Münzen, die ein Spieler von Stapel wegnimmt, behält der Spieler
- statt eine/mehrere Münzen von Stapel zu nehmen, kann Spieler auch Münzen aus seinem "Lager" hinzufügen

Poker-Nim

Regeln:

- Alles wie bei Nim
- Münzen, die ein Spieler von Stapel wegnimmt, behält der Spieler
- statt eine/mehrere Münzen von Stapel zu nehmen, kann Spieler auch Münzen aus seinem "Lager" hinzufügen

Was ist hier eine Gewinnstrategie?

Poker-Nim

Regeln:

- Alles wie bei Nim
- Münzen, die ein Spieler von Stapel wegnimmt, behält der Spieler
- statt eine/mehrere Münzen von Stapel zu nehmen, kann Spieler auch Münzen aus seinem "Lager" hinzufügen

Was ist hier eine Gewinnstrategie?

Bei perfektem Spiel ist Poker-Nim äquivalent zu Nim, da alle nicht-nim Züge umkehrbar sind.

- [1] Elwyn R Berlekamp, John H Conway, and Richard K Guy.
Winning ways for your mathematical plays, volume 1.
AK Peters/CRC Press, 2001.