Задача 821

Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \lg x$, если x изменяеется от 1 до 1000.

Из условия задачи $x = 1$, $x_1 = 1000$

$x_1 = x + \Delta x \quad \longleftrightarrow \quad \Delta x = x_1 - x = 1000 - 1 = 999$

$\Delta y = \lg(x_1) - \lg(x) = \lg \dfrac{x_1}{x} = \lg \dfrac{x + \Delta x}{x} = \lg \dfrac{1000}{1} = \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$

Ответ: $\Delta x = 999$, $\Delta y = 3$

Задача 822

Опеделить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \frac{1}{x^2}$, если x изменяется от 0.01 до 0.001.

Из условия задачи $x = 0.01$, $x_1 = 0.001$

$x_1 = x + \Delta x \quad \longleftrightarrow \quad \Delta x = x_1 - x = 0.001 - 0.01 = -0.009$

$\Delta y = \dfrac{1}{x_1^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(0.1^3)^2} - \dfrac{1}{(0.1^2)^2} = \dfrac{1}{0.1^6} - \dfrac{1}{0.1^4} = 10^6 - 10^4 = 990000$

Ответ: $\Delta x = -0.009$, $\Delta y = 990000$

Задача 823

а) $y = ax + b = f(x)$

$\Delta y = f(x_1) - f(x) = ax_1 + b - ax - b = a(x + \Delta x) - ax = ax + a\Delta x - ax = a\Delta x$

Ответ: $a\Delta x$

б) $y = ax^2 + bx + c$

$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = ax_1^2 + bx_1 + c - ax^2 - bx - c =$
$a(x_1^2 - x^2) + b(x_1 - x) = a((x + \Delta x)^2 - x^2) + b(x + \Delta x - x) = a(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) + b\Delta x =$
$a(2x\Delta x + (\Delta x)^2) + b\Delta x = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2$

Ответ: $(2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2$

в) $y = a^x$

$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$

Ответ: $a^x(a^{x+\Delta x} - 1)$

Задача 827

Закон движения точки от оси Ox дается формулой

$$x = 10t + 5t^2$$

где, t - время в секундах и x - расстояние в метрах. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ и произвести численный расчет, если

а) $\Delta t = 1$

$\Delta y = 10(t + \Delta t) + 5(t + \Delta t)^2 - 10t - 5t^2 = 10(t + \Delta t - t) + 5((t + \Delta t)^2 - t^2) = 10(20 + 1 - 20) + 5(21^2 - 20^2) = 10 + 5(21 - 20)(21 + 20) = 5 \cdot 41 + 10 = 205 + 10 = 215$

б) $\Delta t = 0.1$

$\Delta y = 5(t_1^2 - t^2) + 10(t_1 - t) = 5((20.1)^2 - 20^2) + 10 \cdot 0.1 = 5 \cdot 0.1 \cdot 40.1 + 1 =$

Задача 828

Исходя из определения производной, непосредственно найти производные следующих функций:

$a) x^2 = 2x$

$b) x^3 = 3x^2$

$c) \frac{1}{x} = x^{-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$d) \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$e) \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$f) \operatorname{tg} x = \frac{1}{cos^2 x}$

Задача 829

Найти $f'(1), f'(2)f'(3)$ если

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$$

$f'(x) = ((x-1)(x-2)^2(x-3)^3) = ((x-1)(x-2)^2)'(x-3)^3 + (x-1)(x-2)^2((x-3)^3) = ((x-2)^2 + 2(x-2)(x-1))(x-3)^3 + (x-1)(x-2)^2 3(x-3)^2 = (x-2)(1+2x-2)(x-3)^3 + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 = (x-2)(x-3)^2((2x-1)(x-3) + 3(x-1)(x-2)) = (x-2)(x-3)^2(2x^2 - 7x + 3 + 3z^2 - 9x + 6) = (x-2)(x-3)^2(5x^2 - 16x + 9)$

$f'(1) = (1-2)(1-3)^2(5 - 16 + 9) = -1 \cdot 4 \cdot (14 - 16) = -4 \cdot (-2) = 8$

$f'(2) = (2-2)(...) = 0$

$f'(3) = (2-3)(3-3)(...) = 0$

Задача 830

Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2 \sin(x-2)$

$(x^2 \sin(x-2))' = 2x \cdot \sin(x-2) + \cos(x-2) \cdot x^2$

$f'(2) = 2 \cdot 2 \cdot \sin(2-2) + \cos(2-2) \cdot 2^2 = 4 \cdot (\sin 0 + \cos 0) = 4 \cdot 1 = 4$

Задача 831

Найти $f'(1)$, если

$f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

$\left(x + (x-1) \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)' = 1 + \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + (x-1) \left(\arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)' = 1 + \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} +$
$(x-1)\sqrt{x+1} \cdot \dfrac{\frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = 1 + \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \dfrac{1}{2}(x-1) \cdot \dfrac{(x+1)\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{x+1} = 1 + \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} +$
$\dfrac{(x-1)(x+1-x)}{2(x+1)\sqrt{x}} = 1 + \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \dfrac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}$

$f'(1) = 1 + \arcsin \sqrt{\dfrac{1}{1+1}} + \dfrac{0}{4} = 1 + \arcsin \sqrt{\dfrac{1}{2}} = 1 + \dfrac{\pi}{4}$

Задача 834

$y = 2 + x - x^2$

$y' = (2 + x - x^2)' = 1 - 2x$

$y'(0) = 1 - 2 \cdot 0 = 1$

$y'(\frac{1}{2} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}) = 1 - 1 = 0$

$y'(1) = 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$y'(-10) = 1 - 2 \cdot (-10) = 1 + 20 = 21$

Задача 835

$y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$

$y' = \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x\right)' = x^2 + x - 2$

1) $x^2 + x - 2 = 0 \qquad D = 1 + 4 \cdot 2 = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \qquad x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

2) $x^2+x-2=-2 \quad \longleftrightarrow \quad x^2+x=0 \quad \longleftrightarrow \quad x(x+1)=0$

$x_1=0 \qquad x_2=-1$

3) $x^2+x-2=10 \quad \longleftrightarrow \quad x^2+x-12=0$

$D=1+12\cdot 4=1+48=49=7^2$

$x_1=\dfrac{-1+7}{2}=\dfrac{6}{2}= \qquad x_2=\dfrac{-1-7}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4$

836: $y'=(a^5+5a^3x^2-x^5)'=10a^3x-5x^4$

837: $y'=\left(\dfrac{ax+b}{a+b}\right)'=\left(\dfrac{ax}{a+b}\right)'+\left(\dfrac{b}{a+b}\right)'=\dfrac{a}{a+b}$

838: $y'=((x-a)(x-b))'=(x-a)'(x-b)+(x-a)(x-b)'=x-b+x-a=2x-a-b$

839:

Из задачи 829: $y'=((x+1)(x+2)^2(x+3)^3)'=((x^3+5x^2+8x+4)(x+3)^3)'=(3x^2+10x+8)(x+3)^3+3(x+3)^2(x^3+5x^2+8x+4)=(x+3)^2((3x^2+10x+8)(x+3)+3(x^3+5x^2+8x+4)=(x+3)^2(3x^3+19x^2+38x+24+3x^3+15x^2+24x+12)=(x+3)^2(6x^3+34x^2+62x+36)=2(x+3)^2(3x^3+17x^2+31x+18)=2(x+3)^2(3x^3+6x^2+11x^2+22x+9x+18)=2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$

840:

$y'=((x\sin a+\cos a)(x\cos a-\sin a))'=(x^2\sin a\cos a+x\cos^2 a-x\sin^2 a-\sin a\cos a)'=2x\sin a\cos a+\cos^2 a-\sin^2 a$

841:

$y'=((1+nx^m)(1+mx^n))'=(1+nx^m+mx^n+nmx^{n+m})'=nmx^{m-1}+nmx^{n-1}+nm(n+m)x^{n+m-1}=nm(x^{m-1}+x^{n-1}+(n+m)x^{n+m-1})$

842:

$y'=((1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3)'=((x-1)(x^2-1)(x^3-1))'=$
$((x-1)(x^4-2x^2+1)(x^3-1)^3)'=((x^5-x^4-2x^2+3x-1)(x^3-1)^3)'=$
$(5x^4-4x^3-4x+1)(x^3-1)^3+3(x^3-1)^2(x^5-x^4-2x^2+3x-1)=$
$(x^3-1)^2((x-1)(5x^4-4x^3-4x+1)+3(x^5-x^4-2x^2+3x-1))=$
$(x^3-1)^2(5x^5-4x^4-4x^2+x-5x^4+4x^3+4x-1+3x^5-3x^4-6x^2+9x-3)=$
$(x^3-1)^2(8x^5-12x^4+4x^3-10x^2+14x-4)=2(x^3-1)^2(4x^5-6x^4+2x^3-5x^2+7x-2)=$
$2(x^3-1)^2(4x^5-4x^4-2x^4+2x^3-5x^2+5x+2x-2)=2(x^3-1)^2(x-1)(4x^4-2x^3-5x+2)=$

842.1:

$y' = ((5+2x)^{10}(3-4x)^{20})' = 10(5+2x)^9 \cdot 2(3-4x)^{20} + 20(3-4x)^{19} \cdot (-4)(5+2x)^{10} = 20(5+2x)^9(3-4x)^{20} - 80(5+2x)^{10}(3-4x)^{19} = 20(5+2x)^9(3-4x)^{19}(3-4x-20-8x) = -20(5+2x)^9(3-4x)^{19}(17+12x)$

843: $y' = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)' = (x^{-1} + 2x^{-2} + 3x^{-3})' = -x^{-2} - 4x^{-3} - 9x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$

845: $y' = \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{(2x)'(1-x^2) - (1-x^2)'(2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1-x^2) - (-2x)(2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$

846:

$y' = \left(\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}\right)' = \frac{(1-2x)(1-x+x^2) - (2x-1)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{(1-2x)(1-x+x^2+1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$

847:

$y' = \left(\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}\right)' = \frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x \cdot ((1-x)^2(1+x)^3)'}{(1-x)^4(1+x)^6}$

$((1-x)^2(1+x)^3)' = 2(1-x)(-1)(1+x)^3 + 3(1+x)^2(1-x)^2 = 2(x-1)(x+1)^3 + + 3(x+1)^2(x-1)^2 = (x-1)(x+1)^2(2(x+1)+3(x-1)) = (x-1)(x+1)^2(5x-1)$

$\frac{(x-1)^2(x+1)^3 - x(x-1)(x+1)^2(5x-1)}{(1-x)^4(1+x)^6} = \frac{(x-1)(x+1)^2(x^2-1-5x^2+x)}{(1-x)^4(1+x)^6} = \frac{x-1-4x^2}{(x-1)^3(1+x)^4} = \frac{1+4x^2-x}{(1-x)^3(1+x)4}$

848:

$y' = \left(\frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}\right)' = \left(\frac{(x^2-2)(x^3-2)}{(x-1)^2}\right)' = \frac{((x^2-2)(x^3-2))'(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2)(x^3-2)}{(x-1)^4}$

$((x^2-2)(x^3-2))' = 2x(x^3-2) + 3x^2(x^2-2) = 2x^4 - 4x + 3x^4 - 6x^2 = 5x^4 - 6x^2 - 4x$

$\frac{(5x^4-6x^2-4x)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2)(x^3-2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(5x^4-6x^2-4x) - 2(x^2-2)(x^3-2)}{(x-1)^3} = \frac{5x^5-6x^3-4x^2-5x^4+6x^2+4x-2(x^5-2x^2-2x^3+4)}{(x-1)^3} = \frac{5x^5-6x^3+2x^2+4x-2x^5+4x^2+2x^3-8}{(x-1)^3} = \frac{5x^5-6x^3-4x^2-5x^4+6x^2+4x-2x^5+4x^2+4x^3-8}{(x-1)^3} = \frac{3x^5-5x^4-2x^3+6x^2+4x-8}{(x-1)^3}$

849:

$y' = \left(\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}\right)' = \frac{p(1-x)^{p-1}(1+x)^q - q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}} = \frac{p(1-x)^{p-1}(1+x) - q(1-x)^p}{(1+x)^{q+1}} = = \frac{(1-x)^{p-1}(p(1+x) - q(1-x)}{(1+x)^{q+1}}$

850:

$y' = \left(\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}\right)' = \frac{(x^p(1-x)^q)'(1+x) - x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$

$(x^p(1-x)^q)' = px^{p-1}(1-x)^q + q(1-x)^{q-1}x^p = x^{p-1}(1-x)^{q-1}(p(1-x)+qx) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}(p-x(p-q))$

$$\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}(p-x(p-q))(1+x)-x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}=$$
$$\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(x+1)^2}\cdot(p-px-px^2+qx+qx^2-x+x^2)$$

851: $y'=(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})=(x+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

852: $y'=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=(x^{-1}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})'=-x^{-2}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}$

853: $y'=\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'=(x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{2}})'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+2\cdot\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$

854: $y'=(x\sqrt{1+x^2})'=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2})}$