

Задача 2

Доказать: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Шаг 1: Докажем, что данное равенство верно для $n=1$:

$$1^2 = 1$$

$$\frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Отсюда получаем тождество $1 = 1$

Шаг 2: Предположим что верно для $n = k$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}$$

Шаг 3: Докажем для $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1) \cdot \left(\frac{k \cdot (2k+1)}{6} + k+1 \right) = \\ (k+1) \cdot \frac{k \cdot (2k+1) + 6k+6}{6} &= \frac{(k+1) \cdot (2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \end{aligned}$$

$$D(2k^2 + 7k + 6) = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 - 48 = 1$$

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{D}}{4} = \frac{-7 + 1}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \quad x_2 = \frac{-7 - \sqrt{D}}{4} = \frac{-7 - 1}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\frac{(k+1) \cdot 2 \cdot (k + \frac{3}{2})(k+2)}{6} = \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

Доказано