Задача 3

Доказать:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Шаг 1: Докажем, что данное равенство верно для n=1:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = 1^3 = 1$$

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = (1)^2 = 1$$

Отсюда получаем тождество $1 = 1$

Шаг 2: Предположим что верно для n = k:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2$$

Шаг 3: Докажем для n = k + 1:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3$$

Используем равенство из задачи 1

$$\left(\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \cdot \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}$$

$$\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2$$

Еще раз используем равнство из задачи 1

$$\left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1)^2$$

Доказано