Задача 46

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{10000\cdot\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{10000\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{10000\cdot 0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

Задача 47

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1}=$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

Задача 48

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n!}{n+1}=\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\sin n!}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\sin n!}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{0\cdot\sin n!}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

Так как при любом х верно условие: $-1\leq\sin x\leq 1$, поэтому $\sin n!\in[-1,1]$

Задача 49

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}}{0+1}=\frac{1}{3}$$

Задача 50

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}\qquad\text{При } |a|<1,\ |b|<1$$

Сумма геометрической прогрессии $1+a+a^2+\cdots+a^n=\dfrac{a_1(1-a^n)}{1-a}=\dfrac{(1-a^n)}{1-a}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-a^n}{1-a}\cdot\frac{1-b}{1-b^n}\right)=\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}a^n}{1-a}\cdot\frac{1-b}{1-\lim\limits_{n\to\infty}b^n}=\frac{1-b}{1-a}$$

Задача 51

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n-1}{n^2}$$

Сумма аифметической прогрессии: $1+2+\cdots+n-1=\dfrac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)=\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}\cdot(\frac{n}{n}-\frac{1}{n})}{2\cdot\frac{n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2}=\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2}=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$$

Задача 52

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\dots+\frac{(-1)^n\cdot n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3+\dots+(-1)^n\cdot n}{n}$$

$$1-2+3+\dots+(-1)^n\cdot n=(1+3+\dots+(-1)^{2k-2}\cdot(2k+1)-(2+4+\dots+(-1)^{2k-1}\cdot 2k)=$$

$$1+3+\dots+2k+1-2(1+2+3+\dots+k)=\frac{1+2k+1}{2}\cdot(k+1)-2\frac{1+k}{2}\cdot k=(k+1)^2-k^2-k=$$

$$k^2+2k+1-k^2-k=k+1$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{2k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{k}}{2}=\frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k}}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

Задача 53

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\dots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{6}\qquad\text{(верно из задачи 2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{6}=\frac{(1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})(2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})}{6}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-0)(2-0)}{6}=\frac{1\cdot 2}{6}=\frac{1}{3}$$

Задача 54

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\dots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2}{n^3}$$

$$1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2=1^2+2^2+\dots+(2n-1)^2-(2^2+4^2+\dots+(2n)^2)=$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{6}\qquad\text{(верно из задачи 2)}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+(2n-2^2)+(2n-1)^2-4(1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2+n^2)=$$

$$\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n(2n+1)(4n+1)-4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{2n(2n+1)(4n+1-2(n+1))}{6}=\frac{2n(2n+1)(4n+1-2n-2)}{6}=\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(4n^2-1)}{3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n^2}}{3}=\frac{4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3}=\frac{4+0}{3}=\frac{4}{3}$$