Эндогенность, GMM, асимптотика оценок

20–22 июня 2017 г.

Курс лекций «Макроэконометрика»

Оглавление

- Обобщенный метод моментов (GMM)
- Моментные ограничения
- Точная идентификация и излишняя идентификация
- Состоятельность оценки. Асимптотическое распределение
- Эффективная GMM
- Тестирование гипотез: Wald, Distance Difference, Lagrange multiplier
- Примеры

Обобщенный метод моментов (GMM)

- Обобщенный метод моментов появился в работе (Hansen, Singleton 1982).
- Идея заключается в том, чтобы приравнять к нулю выборочные аналоги популяционных моментов
- Есть метод моментов в статистике

МНК как метод моментов

- В популяциях $\mathrm{E}\, X(Y - X'\beta) = 0$
- Выборочный аналог $\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - X_i'\beta) = 0$

2МНК как метод моментов

- Для случая, когда число инструментов и регрессоров совпадает
- В популяциях $\mathrm{E}\, Z(Y - X'\beta) = 0$ (это верно и если не совпадает)
- Выборочный аналог $\sum_{i=1}^{n} Z_i(Y_i - X_i'\beta) = 0$

Максимальное правдоподобие как метод моментов

- В популяциях $\mathrm{E}\,\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$
- Выборочный аналог $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \ln f(X_i, \theta)}{\partial \theta} = 0$

Пример из (Hansen, Singleton 1982)

- Задача потребителя
- Максимизировать $\mathrm{E}_t\left(\sum_{s=0}^{\infty}\delta^s U(C_{t+s})\right)$
- При условиях $C_{t+s}+q_{t+s}=w_{t+s}+(1+r_{t+s})q_{t+s-1}$
- C_t – потребление, q_t – накопления, w_t – зарплата, r_t – процентная ставка
- $U(C)=\dfrac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ – функция полезности

Пример из (Hansen, Singleton 1982)

- Условие первого порядка $E_t(\delta U'(C_{t+1})(1+r_{t+1})) = U'(C_t)$
- Можно переписать как

$$E_t\left(\frac{\delta U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}(1+r_{t+1}) - 1\right) = 0$$

- И так (причем для любой переменной z_t, известной в момент t):

$$E\left(\left(\frac{\delta U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}(1+r_{t+1}) - 1\right) z_t\right) = 0$$

Пример из (Hansen, Singleton 1982)

Окончательно получаем моментные условия:

$$E\left(\left(\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}(1+r_{t+1})-1\right)z_t\right)=0$$

Моментные ограничения

- В общем виде: $\mathrm{E}(f(w_t, z_t, \theta)) = 0$
- Пример (МНК): $\mathrm{E}(X_t(Y_t - X_t'\beta)) = 0$
- Пример (2МНК): $\mathrm{E}(Z_t(Y_t - X_t'\beta)) = 0$

Выборочные аналоги моментных ограничений

- В общем виде: $g_T(\theta) \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(w_t, z_t, \theta) = 0$
- Пример (МНК): $\sum_{t=1}^{T}(X_t(Y_t - X_t'\beta)) = 0$
- Пример (2МНК): $\sum_{t=1}^{T}(Z_t(Y_t - X_t'\beta)) = 0$

Точная идентификация и излишняя идентификация

- Если число моментных соотношений равно числу неизвестных параметров, это *точная идентификация*
- Если число моментных соотношений больше числа неизвестных параметров, это *излишняя идентификация*
- Меньше быть не должно — недостаточная идентификация не позволяет сосчитать оценки параметров

Оценивание

Для случая точной идентификации решаем систему уравнений

$$g_T(\theta) \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(w_t, z_t, \theta) = 0$$

Для случая излишней идентификации

$$Q_T(\theta) = g_T(\theta)' W_T g_T(\theta) \to \min_{\theta}$$

где W_T некоторая положительно определенная матрица (обычно и для точной тоже минимизация, так проще технически)

Состоятельность оценки

Что нужно для состоятельности оценки $\widehat{\theta}_{GMM}$? Только лишь чтобы исходные моментные соотношения

$$\mathrm{E} f(w_t, z_t, \theta) = 0$$

выполнялись только при истинном значении θ (*глобальная идентификация*). Плюс еще некоторые технические требования.

Асимптотическое распределение

Оценки $\widehat{\theta}_{GMM}$ являются асимптотически нормальными.

$$\sqrt{T}(\widehat{\theta}_{GMM} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V)$$

Матрица V зависит от матрицы весов W_T.

Про гетероскедастичность переживать не нужно.

Асимптотическое распределение, эффективная GMM

Существует матрица весов W_T, при которой оценки $\widehat{\theta}_{GMM}$ являются асимптотически эффективными среди GMM-оценок с заданными моментными соотношениями.

$$W^{opt} = \left(\mathrm{E}(f(w_t, z_t, \theta)f(w_t, z_t, \theta)')\right)^{-1}$$

Эта матрица зависит от неизвестных параметров θ, поэтому применяют двухшаговую процедуру:

1. Оценивается $\widehat{\theta}_1$ методом GMM с произвольной матрицей W_T (обычно $W_T = I$)
2. Оценивается $\widehat{\theta}_{GMM}$ с матрицей

$$W_T^{opt} = \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(w_t, z_t, \widehat{\theta}_1)f(w_t, z_t\widehat{\theta}_1)'\right)^{-1}$$

Тестирование моментных условий, J-тест

Если выполняется условие *точной идентифицируемости*, то проверить, действительно ли выполняются моментные условия, нельзя.

Если выполняется условие *излишней идентифицируемости*, то в случае, когда моментные соотношения справедливы,

$$J = TQ_T(\widehat{\theta}_{GMM}) = Tg_T(\widehat{\theta}_{GMM})' W_T^{opt} g_T(\widehat{\theta}_{GMM}) \sim \chi^2(m-k)$$

где m – число моментных соотношений, k – число параметров (размерность θ).

Тестирование моментных условий, J-тест

Особенности J-теста:

- В тесте проверяется также и спецификация модели (она входит в моментные соотношения)
- Нельзя гарантировать, что мощность теста высокая
- Для выборок небольшого размера тест слишком часто отвергает нулевую гипотезу (асимптотика работает плохо)
- Если глобальной идентификации нет, то тест не работает вообще

Распространенный частный случай: инструменты

Часто бывает, что модель устроена так:

$$Y_t = f(X_t, \theta) + u_t, \quad \mathrm{E}(u_t \mid Z_t) = 0$$

Тогда в качестве моментных соотношений берут

$$\mathrm{E}(u_t Z_t) = \mathrm{E}((Y_t - f(X_t, \theta)) Z_t) = 0$$

Получается нечто очень похожее на 2МНК.

Сколько моментов взять?

Все что есть или ограничиться каким-нибудь подмножеством?

- «Все что есть» эквивалентны «взять подмножество, и остальные с нулевым весом»
- Это вряд ли оптимальная весовая матрица, поэтому «все что есть», вообще говоря, лучше
- Для небольших выборок это неверно (растет смещение)

Тестирование гипотез: t-статистики

Как обычно, для тестирования гипотез про одиночные коэффициенты применяются t-статистики:

$$t = \frac{\widehat{\theta}_j - \theta_{j0}}{SE(\widehat{\theta}_j)} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

Тестирование гипотез

Хотим проверить гипотезу $g(\theta) = 0$ против альтернативы $g(\theta) \neq 0$

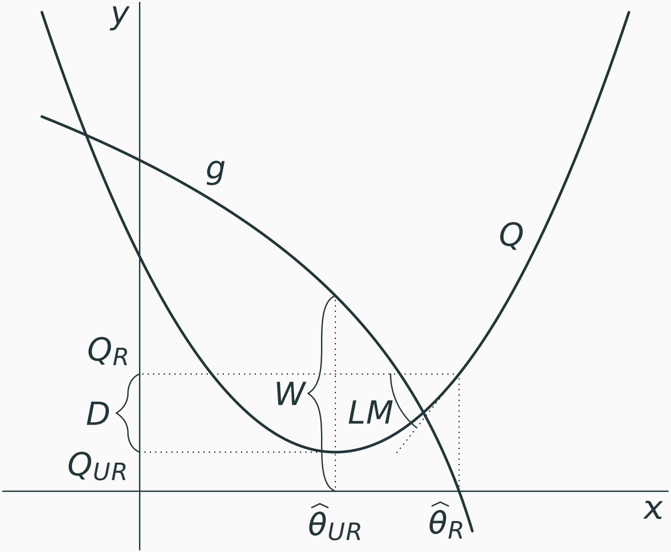
- Тест Вальда (W)
- Тест разности расстояний (D)
- Тест множителей Лагранжа (LM)

Тестирование гипотез

Обозначения:

- $\widehat{\theta}_{UR} = \widehat{\theta}_{ML}$ (оценка без ограничения)
- $\widehat{\theta}_R$ – решение задачи минимизации $Q_T(\theta)$ при условии $g(\theta) = 0$ и с той же весовой матрицей, что и без ограничения (оценка с ограничением)
- $Q_{UR} = Q_T(\widehat{\theta}_{UR})$
- $Q_R = Q_T(\widehat{\theta}_R)$

Тестирование гипотез



Тестирование гипотез: Wald

Тест Вальда основан на распределении величины $g(\widehat{\theta}_{UR})$ при нулевой гипотезе. Статистика

$$W \sim \chi^2(q)$$

где q — число ограничений

Тестирование гипотез: Distance Difference

Тест разности расстояний основан на распределении величины $T(Q_T(\widehat{\theta}_R) - Q_T(\widehat{\theta}_{UR}))$ при нулевой гипотезе. Статистика

$$D \sim \chi^2(q)$$

где q – число ограничений.

Тест похож на LR-тест в методе максимального правдоподобия

Тестирование гипотез: Lagrange multiplier

Тест множителей Лагранжа основан на распределении величины $\frac{\partial Q_T(\widehat{\theta}_R)}{\partial \theta}$ при нулевой гипотезе. Статистика

$$LM \sim \chi^2(q)$$

где q — число ограничений

Пример: кривая Филлипса

Статья (Galí, Gertler 1999)

- Есть ли инерция в инфляции?
- В какой степени связаны инфляция и выпуск?

Пример: кривая Филлипса

Уравнение модели

$$\pi_t = \gamma_b \pi_{t-1} + \gamma_f \operatorname{E}_t \pi_{t+1} + \kappa(y_t - \overline{y}_t) + e_t$$

где π_t – инфляция, y_t – ВВП, $\overline{y}_t$ – потенциальный ВВП

Пример: кривая Филлипса

На самом деле вместо разрыва выпуска должны стоять реальные предельные издержки фирм, но их тоже сложно наблюдать.

Но если рассматривать производственную функцию Кобба–Дугласа $Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$, то $MPL = (1-\alpha)Y/L$ и реальные предельные издержки равны $w/MPL = wL/((1-\alpha)Y)$, то есть пропорциональны доле дохода, связанной с трудом S_t:

$$\pi_t = \gamma_b \pi_{t-1} + \gamma_f \operatorname{E}_t \pi_{t+1} + \lambda S_t + e_t$$

Пример: кривая Филлипса

Как оценить? Положим $\pi_{t+1} = \mathrm{E}_t\, \pi_{t+1} + u_{t+1}$

$$\pi_t = \gamma_b \pi_{t-1} + \gamma_f \pi_{t+1} + \lambda S_t + e_t - \gamma_f u_{t+1}$$

Пример: кривая Филлипса

Нужны инструменты, нескоррелированные с e_t и u_{t+1}.

Лаги инфляции (в разных секторах), процентных ставок, labor share.

Пример: кривая Филлипса

Моментные соотношения

$$\mathrm{E}\left((\pi_t - \gamma_b \pi_{t-1} - \gamma_f \pi_{t+1} - \lambda S_t) z_t\right) = 0$$

где z_t инструменты.

Пример: кривая Филлипса

Оценки (по квартальным данным для США с 1960 по 1997)

$$\widehat{\pi}_t = \underset{(0.020)}{0.378}\ \pi_{t-1} + \underset{(0.016)}{0.591}\ \mathrm{E}_t\, \pi_{t+1} + \underset{(0.004)}{0.015}\ S_t$$

Проблемы с GMM

- Как и в двухшаговом МНК главная проблема — слабые инструменты.
- Если модель линейная, то действуем так же, как и с 2МНК — F-статистика на 1-м шаге
- Для нелинейных моделей нет пока способа проверить слабость инструментов

Литература

- Jordi Galí, Mark Gertler. “Inflation dynamics: A structural econometric analysis”. В: *Journal of monetary Economics* 44.2 (1999), с. 195—222.
- L. P. Hansen, K. J. Singleton. “Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models”. В: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1982), с. 1269—1286.
- F. Hayashi. *Econometrics*. Princeton University Press, 2000.
- М. Вербик. *Путеводитель по современной эконометрике*. М.: Научная книга, 2008.