

**МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГорова***

К.С. КИРЯКИН*

Рассмотрен метод Монте-Карло для решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. На примере одномерной задачи исследована точность данного алгоритма при изменении параметров алгоритма (шага по времени, размера области, где ищется решение, количества реализаций случайных процессов). Проведено сравнение с разностным методом.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим случайный процесс, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) Ито

$$dX(t) = F(X(t), t)dt + G(X(t), t)dw(t), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

где $X(t)$ – n -вектор состояния; $F(x, t)$ – нелинейная вектор-функция размерности n ; $G(x, t)$ – матричная функция размерности $n \times r$; $w(t)$ – винеровский процесс размерности r , исходящий из нуля интенсивности $Q(t)$, $Q(t) \geq 0$. Будем полагать, что плотность распределения вектора $X(t_0)$ задана: $\varphi_0(x)$.

Для случайного процесса, заданного уравнением (1), эволюция плотности распределения вектора $X(t)$, $t \geq t_0$ описывается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [a_i(x, t)f(x, t)]}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 [b_{ij}(x, t)f(x, t)]}{\partial x_i \partial x_j}, \quad f(x, t_0) = \varphi_0(x).$$

Коэффициенты $a(x, t) = (a_1(x, t), \dots, a_n(x, t))^T$ и $B(x, t) = [b_{ij}(x, t)]_{i,j=1}^n$ – вектор дрейфа и матрица диффузии соответственно – связаны с коэффициентами исходного стохастического уравнения (1) соотношениями $a(x, t) = F(x, t)$, $B(x, t) = G(x, t)Q(t)G^T(x, t)$.

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта РНП.2.1.2.43)

* Магистр факультета прикладной математики, аспирант кафедры прикладной математики

Решение уравнения ФПК представляет большой интерес, поскольку плотность распределения дает важную информацию о случайном процессе. Поскольку уравнение ФПК относится к уравнениям параболического типа и аналитические методы их решения применимы лишь в частных случаях и не охватывают всего множества задач, мы будем изучать численные методы решения уравнения ФПК, среди которых можно выделить метод конечных элементов (МКЭ) и конечно-разностный метод [1]. Недостатками данных методов являются практическая невозможность решения уравнений больших размерностей (>3) ввиду значительных вычислительных затрат. Также для использования указанных методов необходимо обязательно задавать условия на границах области, т. е. исходная задача на бесконечной области по x заменяется краевой задачей. При неудачном выборе области поиска решения это может привести к некоторому искажению решения.

В связи с недостатками отмеченных выше методов перспективно исследовать метод Монте-Карло. Следуя [2], рассмотрим его применение для поставленной задачи.

1. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Перепишем уравнение ФПК так, чтобы под знаком производных осталась только искомая функция $f(x, t)$, применим к ним обычную формулу дифференцирования произведения функций, после чего получим

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \lambda(x, t)f(x, t) + \sum_{i=1}^n \beta_i(x, t) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2)$$

где

$$\lambda(x, t) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(x, t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 b_{ij}(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \beta_i(x, t) = -a_i(x, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_{ij}(x, t)}{\partial x_j}.$$

Тогда решение уравнения (2) в момент времени $T \geq t_0$ можно представить в виде [2]

$$f(x, T) = E \left[\Lambda(T) \varphi_0(X(t_0)) \mid X(T) = x \right], \quad \Lambda(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t \lambda(X(s), s) ds \right) \quad (3)$$

при условии, что процесс $X(\tau)$ описывается СДУ в обратном времени

$$dX(\tau) = \beta(X(\tau), \tau) d\tau + \sigma(X, \tau) d\omega(\tau). \quad (4)$$

Здесь $\tau = T - t$, $\omega(\tau)$ – стандартный винеровский процесс, $\sigma(x, t)$ – нижняя треугольная матрица диффузии, определяемая разложением Холецкого $\sigma(x, t) \sigma^T(x, t) = B(x, t)$.

Численная аппроксимация математического ожидания в (3) даёт простую формулу для оценивания решения

$$f(x, T) = N^{-1} \sum_{i=1}^N \left\{ \Lambda(T) \varphi_0 \left(X^{(i)}(t_0) \right) \right\}, \quad (5)$$

где $X^{(i)}$ – i -я реализация случайного процесса (4).

Таким образом, получаем следующий алгоритм решения.

1. Выбираем область поиска решения $\Omega \in \mathbb{R}^n$.
2. Создаем в выбранной области сетку.
3. Для каждой точки x_l сетки, $l \in 1 \dots M$, M – количество узлов в сетке:
 - а) N раз запускаем случайный процесс (4) на отрезке $[T, t_0]$,
 - б) проводим усреднение по формуле (5).

Поскольку поиск решения для каждой точки происходит независимо от других точек, то результат решения в ней не зависит ни от числа точек в области, ни от их расположения.

Также следует отметить, что для моделирования пучка процессов, исходящих из разных точек, следует брать одинаковый набор случайных величин. В этом случае не только затраты на моделирование уменьшаются в M раз, но и получается более гладкая функция искомого решения.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА НА ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим тестовую задачу, имеющую точное решение.

Уравнение ФПК для СДУ $dX(t) = -1.1Xdt + dw$, $Q = 1$ имеет вид

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(-1.1xf(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}.$$

Зададим плотность начального распределения в виде нормального распределения с параметрами $\mu_0 = 1$, $\sigma_0 = 1$. Решение будем искать в точке $T = 1$.

Сравним решение по методу Монте-Карло с аналитическим

$$f(x, t) = (\sqrt{2\pi}\sigma(t))^{-1} \exp(-(x - \mu(t))^2 / 2\sigma(t)^2),$$

где $\mu(t) = \exp(-1.1t)$,

$$\sigma^2(t) = \frac{5}{11} + \frac{6}{11} \exp(-2.2t),$$

т. е. $\mu(1) \approx 0.33287108$, $\sigma^2(1) \approx 0.51498354$.

В приведенном тесте для моделирования процесса, заданного СДУ в обратном времени (4), использовался явный метод Эйлера

$$X(t_{j-1}) = X(t_j) + \beta(X(t_j), t_j) \Delta t + \sigma(X(t_j), t_j) \sqrt{\Delta t} \zeta_j, \quad X_i(T) = x, \quad j = n, \dots, 1.$$

где ζ_j – стандартный нормальный случайный вектор.

Для получения нормальных случайных величин применялся метод обратных функций [3]. Для генерации последовательности равномерных псевдослучайных величин α_n , требуемых для метода обратных функций, использовался мультипликативный датчик $\alpha_n = k_n 2^{-m}$; $k_n = k_{n-1} 5^{2p+1} \pmod{2^m}$, $k_0 = 1$ с параметрами $m = 40$, $p = 8$, рекомендуемыми в [3].

Заметим, что в нашем частном случае линейной динамической системы $\lambda(x, t) = \text{const}$ и $\int_{t_0}^t \lambda(X(s), s) ds$ вычисляется аналитически.

Количество точек по x выберем равным 51. Отрезок поиска решения $[-5.0, 5.0]$, шаг по x равен 0.2.

Подсчитаем норму разности между найденным и точным решением

$$\varepsilon(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^M (f_{\text{exact}}(x_i, t) - f_{\text{numerical}}(x_i, t))^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^M f_{\text{exact}}^2(x_i, t)}.$$

В дальнейшем будем считать ее погрешностью численного решения.

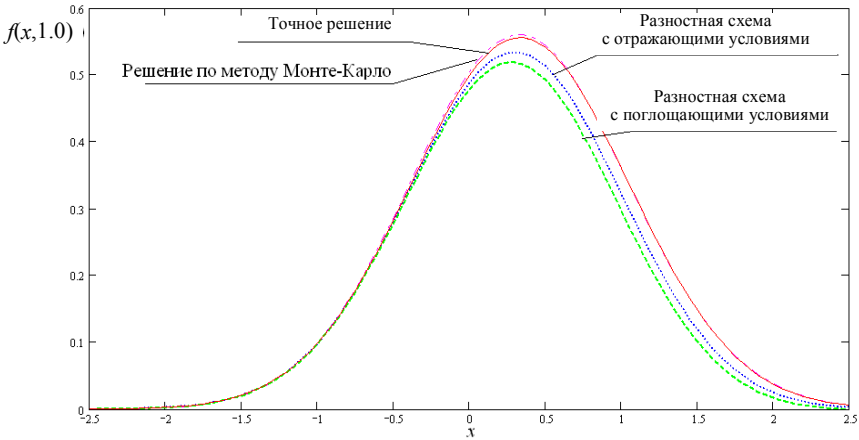
Погрешность для некоторых значений шага по времени и числа реализаций приведены в табл. 1. Из таблицы видно, что погрешность при увеличении числа реализаций и уменьшении шага по времени, как правило, уменьшается. Исключения наблюдаются лишь в случаях либо слишком малого количества реализаций, либо крупного шага по времени (указанные ячейки выделены курсивом). В случае $h_t = 0.04$, $N = 20\,000$ дальнейшее увеличение числа реализаций не приводит к увеличению точности, так как здесь погрешность определяется в основном неточностью аппроксимации по времени.

Таблица 1

Погрешность найденного решения относительно точного решения

Число реализаций	Шаг по времени, h_t			
	0.005	0.01	0.02	0.04
40 000	0.0036609494	0.008513723	0.0159504077	<i>0.0276544527</i>
20 000	0.0058026990	0.009570771	0.0164612903	<i>0.0260095033</i>
10 000	0.0092041712	0.011138539	0.0190859445	0.0315025384
5000	0.0116581762	0.018734445	0.0253315425	0.0329358308
2500	0.0144973742	0.031919318	<i>0.0400570411</i>	0.0444763373
1250	0.0263188789	0.055277895	<i>0.0396834676</i>	0.0615840458

Сравним решения, полученные методом Монте-Карло при $N = 40\,000$ и неявной разностной схемой (для аппроксимации первой производной по x использовалась центральная разность), с отражающими и поглощающими граничными условиями [1]. Зададим шаг по x равным 0.05 , шаг по времени 0.01 . Графики решений в момент времени $T = 1$ на отрезке $[-2.5, 2.5]$ даны на рисунке. Погрешности для разных отрезков приведены в табл. 2.



Решения, найденные различными методами на отрезке $[-2.5, 2.5]$

Как видно из рисунка и табл. 2, в случае «большой» области метод Монте-Карло проигрывает по точности разностной схеме. В случае же «малой» области точность разностной схемы заметно снижается, особенно при поглощающих граничных условиях.

Таблица 2

Норма разности между найденным и точным решением при разных областях

Область	Метод		
	Монте-Карло	разностный с отражающими граничными условиями	разностный с поглощающими граничными условиями
$[-2.5, 2.5]$	0.00856575	0.06629264	0.11053835
$[-3.0, 3.0]$	0.0085701	0.02227932	0.03764701
$[-3.5, 3.5]$	0.00857011	0.00592494	0.01015836
$[-5.0, 5.0]$	0.00857011	0.00120059	0.00120164

Отметим также, что на одномерных задачах для достижения одинаковой точности метод Монте-Карло работает на три-четыре порядка медленнее, чем разностная схема.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несомненным достоинством метода Монте-Карло является перспектива его использования для решения задач большой размерности (>3), что для разностного метода привело бы к большим вычислительным затратам. Однако применение метода в одномерном случае приводит к заметному увеличению вычислительных затрат.

Следующее достоинство метода Монте-Карло состоит в том, что, в отличие от разностного метода и метода конечных элементов, при поиске решения уравнения ФПК на бесконечной области не нужно искусственно задавать краевые условия, которые, как было показано, при неудачном выборе области заметно влияют на результат расчетов. Таким образом, выбор области никак не отразится на решении внутри области. Также на решение в искомым точках не влияет мелкость сетки по пространству.

Поскольку решение в каждой точке ищется независимо от других точек, предоставляется простая возможность распараллеливания вычислений.

Считаем целесообразным использовать метод Монте-Карло для более сложного интегродифференциального уравнения Стратоновича, решение которого представляет собой апостериорную плотность распределения оценки процесса для непрерывной задачи фильтрации.

[1] *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977.

[2] *Carlsson J.* A backward Monte-Carlo method for solving parabolic partial differential equations, <http://arxiv.org/abs/math/0010118>

[3] *Михайлов Г.А., Войтишек А.В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: учеб. пособие для студ. вузов. – М.: Изд. центр «Академия», 2006.