Уравнение Фоккера-Планка для плотности функции распределения вероятностей $f = f(t, x)$ с постоянными коэффициентом переноса k и коэффициентом диффузии D имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -k \frac{\partial f}{\partial x} + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Преобразованием переменных

$$t = \frac{D}{k^2}\tilde{t}, \qquad x = \frac{D}{k}\tilde{x}$$

уравнение (1) приводится к стандартной форме

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tilde{x}^2}, \qquad \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}) = f(t(\tilde{t}), x(\tilde{x})). \tag{2}$$

Фундаментальное решение для (2), т. е. решение начально-краевой задачи с условиями

$$\tilde{f}(0, \tilde{x}) = \delta(\tilde{x}), \qquad \tilde{f}(\tilde{t}, -\infty) = 0, \qquad \tilde{f}(\tilde{t}, +\infty) = 0,$$

дается формулой [1]

$$\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{t}}} \exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{4t}\right\}.$$

После перехода к исходным переменным, решение уравнения (1) с начально-краевыми условиями

$$f(0, x) = \delta(x), \qquad f(t, -\infty) = 0, \qquad f(t, +\infty) = 0,$$

примет вид

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(x-kt)^2}{4Dt}\right\}. \tag{3}$$

Прямым интегрированием можно проверить, что условие нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) = 1$$

выполнено.

Список литературы

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*// Изд-во МГУ, 6-е изд., 1999.