http://mmg.tversu.ru ISSN 2311-1275

ММГ

Математическое моделирование и геометрия

Том 8, № 3, стр. 1 – 14 (2020) дои: 10.26456/ммг/2020-831

# Базисный формализм Паули в квантовых вычислениях

В.В. Никонов[а] и А.Н. Цирулев[б]

Математический факультет Тверского государственного университета, Садовый пер. 35, Тверь, Россия

электронная почта:[а]nikonov.vv@tversu.ru [б]tsirulev.an@tversu.ru

*Поступила 1 декабря 2020 г., в окончательном виде 28 декабря. Опубликовано 30 декабря 2020 г.*

Абстрактный.В данной статье рассматриваются квантовые вычисления в базисе Паули, элементы которого обычно отождествляются со струнами Паули. Этот подход позволяет нам представлять квантовые состояния, наблюдаемые и унитарные операторы в унифицированной форме линейной комбинации струн Паули, так что все операции можно свести к композициям струн. Тем не менее формальное обоснование базиса Паули для квантовых вычислений должно основываться на сильных результатах комплексной линейной алгебры и теории гильбертовых пространств. Кратко рассмотрены основные свойства струн Паули для квантовых состояний и унитарных операторов, а также ключевые операции с ними, включая алгоритм композиции струн и алгоритм преобразования из стандартного базиса в базис Паули.

Ключевые слова:квантовые вычисления, базис Паули

Номера МСК:81П16, 81П68

## 1.Введение

Теория квантовых вычислений остается в поле большого внимания на протяжении последних двух десятилетий. Различные типы и подтипы квантовых вычислений адаптированы для разных технологий и аппаратных архитектур, но их математические структуры построены с использованием одних и тех же основных понятий гильбертова пространства, квантовой наблюдаемой, унитарного оператора и квантового состояния. В данной статье мы рассматриваем взаимодействующую составную квантовую систему, состоящую из $н$ идентичных двухуровневых подсистем (кубитов), так что размерность соответствующего гильбертова пространства равна $2^{н}$. Квантовые вычисления в чистом состоянии с числом вентилей, полиномиально зависящим от числа кубитов, могут быть эффективно смоделированы классически. Поскольку универсальный квантовый компьютер, демонстрирующий квантовое превосходство, должен иметь большое количество кубитов, скажем $н \geq 1000$, количество базисных состояний $2^{н} > 10^{300}$. Квантовые компьютеры с небольшим количеством кубитов ($н \sim 100$), которые будут доступны в ближайшем будущем, должны использоваться вместе с классическим компьютером. В обоих случаях многокубитные квантовые вычисления очень чувствительны к выбору вычислительного базиса. 1,2,3].

Есть две общие возможности выбора базиса, и какая из них более эффективна, зависит как от данного алгоритма, так и от конкретного типа квантового компьютера. Во-первых, мы можем использовать стандартный ортонормированный базис в базисном гильбертовом пространстве, а затем построить подходящий базис в алгебре линейных операторов. Однако такой подход оказывается неудобным и неестественным при рассмотрении задач, связанных со смешанными состояниями, графовыми состояниями [4], исправления ошибок [3,5,6], тензорные сети [7,8,9] и вообще ко всем проблемам, где измерения не являются проективными [10,11,12]. Вторая возможность связана непосредственно с базисом в операторной алгебре, и в этом случае базисные элементы обычно не могут быть разделены на тензорное произведение некоторых кет- и бра-векторов; базис Паули считается лучшим выбором, потому что он эрмитов, ортонормирован (по отношению к скалярному произведению Гильберта-Шмидта) и составляет ортонормированный базис в алгебре Ли соответствующей унитарной группы. Группа Клиффорда, имеющая множество приложений в квантовых вычислениях, проще всего описывается в терминах базиса Паули [1].10,14].

Основная цель этой статьи — дать систематический алгебраический обзор многокубитных систем в базисе Паули. Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит некоторые необходимые математические предварительные сведения. В разделе 3 мы даем краткое описание квантовых состояний для $н$-кубитовая квантовая система в базисе Паули. Раздел 4 посвящен изучению некоторых вычислительных свойств струн Паули. В разделе 5 мы рассматриваем вычислительные алгоритмы, предназначенные для перехода от стандартного базиса к базису Паули.

На протяжении всей этой статьи мы используем натуральные единицы с ~ =$c$"="1. Для удобства чтения некоторые обозначения сделаны контекстно-зависимыми: строчные буквы латинского алфавита в двоичных строках (например, в символах bra и ket) принимают значения 0 и 1, а в строках и индексах Паули — от 0 до 3.

## 2.Основные черты базиса Паули

Мы будем рассматривать квантовую систему$н$различимые кубиты, где кубит связан с двумерным пространством Hi(lber)t$ЧАС$и его двойственное (эрмитово сопряженное) космос$ЧАС_†$. Позволять$ЧАС_н$"="$ЧАС_{⊗н}$и $ЧАС_†\ \ _н$"="$ЧАС_{†\ ⊗н}$— гильбертово пространство системы и его двойственный соответственно, и пусть$л$($ЧАС_н$"="$ЧАС_н⊗Ч_†\ \ _н$— пространство линейных операторов действующий на$ЧАС$и$ЧАС_†$левым и правым сокращениями соответственно. Затем

$$тусклыйс\ ЧАС_н"="тусклыйс\ ЧАС_†\ \ _н"="2_н, тусклыйс\ л(ЧАС_н) = 2_{2н}.$$

Будем также считать, что пространство$л$($ЧАС_н$) снабжен внутренним произведением Гильберта-Шмидта,

$$\langle \hat{A}, \hat{B}\rangle "="тр(\hat{A}_†\hat{B}), B, \hat{B}ел(ЧАС_н), \tag{1}$$

который является естественным продолжением внутреннего продукта в$ЧАС_н$. Вещественное линейное пространство эрмитовых операторов далее обозначается как$ЧАС$($ЧАС_н$).

Позволять$\{|0\rangle , |1\rangle \}$быть ортонормированным базисом в некотором однокубитном Единица пространстве$ЧАС$. матрица и матрицы Паули,

$$σ_0"="\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, σ_1"="\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, σ_2"="\begin{pmatrix} 0 & -я \\ я & 0 \end{pmatrix}, σ_3"="\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

определить четыре оператора Паули

$$\hat{σ_0}"="|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|, \qquad \hat{σ_1}"="|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|,$$

$$\hat{σ_2}"="-я|0\rangle\langle 1|+я|1\rangle\langle 0|, \qquad \hat{σ_3}"="|0\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1|,$$

которые эрмитовы и унитарны одновременно, и которые составляют основу в$л$($ЧАС$). Обратное преобразование дается выражением

$$|0\rangle\langle 0|"="\frac{\hat{σ_0}+\hat{σ_3}}{2}, |0\rangle\langle 1|"="\frac{\hat{σ_1}+i\hat{σ_2}}{2}, |1\rangle\langle 0|"="\frac{\hat{σ_1}-i\hat{σ_2}}{2}, |1\rangle\langle 1|"="\frac{\hat{σ_0}-\hat{σ_3}}{2}.$$

Напомним, что для$к, л, м\in\{1,2,3\}$у нас есть тр$\hat{σ_к}$"="0, $\hat{σ_к}^2$"="$\hat{σ_0}$, и

$$\hat{σ_к}\hat{σ_л}"="-\hat{σ_л}\hat{σ_к}, \hat{σ_к}\hat{σ_л}"="я знак(π)\hat{σ_м}, (клм"="π(123), \tag{2}$$

где$π$(123) является перестановкой$\{1,2,3\}$.

Есть*стандартный*[1]бинарный базис в$ЧАС_н$порожденные ортонормированными базисами $\{|0\rangle , |1\rangle \}$в соответствующих однокубитных пространствах. Математически положение в тензорном произведении отличает кубиты друг от друга. Поэтому для фиксированного$н$, элемент этого базиса и соответствующий ему элемент двойственного базиса удобно записать в виде

$$|к\rangle "="|к_1...к_н\rangle "="|к_1\rangle ⊗...⊗|к_н\rangle , \langle к|"=" \langle к_1...к_н|"=" \langle к_1|⊗...⊗ \langle к_н|,$$

[1]Мы не используем обычный термин «вычислительный», потому что это может привести к путанице. Базис Паули и стандартный базис являются вычислительными в одном и том же смысле.

относительно строк$к_1 . . . к_н$($к_1, . . . , к_н \in \{0,1\}$) как двоичное число и обозначая его десятичным представлением$к$. Например, $|101\rangle$ "=" $|5\rangle$ и $|00110\rangle$ "=" $|6\rangle$

В стандартной основе,

$$|у\rangle "=" \sum_{к=0}^{2^н-1} ты_к |к\rangle , \qquad \hat{A} "=" \sum_{к,\, л=0}^{2^н-1} а_{кл} |к\rangle \langle л|,$$

где $|ты\rangle \in Н_н$ и $\hat{A} ел$( $ЧАС_н$).

The *базис Паули* $п$( $ЧАС_н$) в $л$( $ЧАС_н$) определяется

$$\{\hat{\sigma}_{к_1 \dots к_н}\}_{к_1,\dots,к_н \in \{0,1,2,3\}}, \qquad \hat{\sigma}_{к_1 \dots к_н} "=" \hat{\sigma}_{к_1} \otimes . . . \otimes \hat{\sigma}_{к_н}, \tag{3}$$

где $\hat{\sigma}_{0\dots0}$ является тождественным оператором. элементы. Мы будем Очевидно, что $п$( $ЧАС_н$) состоит из $4^н$ использовать компактные обозначения, такие как

$$\hat{\sigma}_К "=" \hat{\sigma}_{к_1 \dots к_н},$$

обозначая *Струна Паули* $к_1 . . . к_н$, где $к_1, . . . , к_н \in \{0,1,2,3\}$, соответствующей заглавной буквой $К$. При этом мы часто будем рассматривать $К$ как число, то есть как десятичное представление строки; понятно что $0 6 К 6 4^н-1$. Обратите внимание, что струна Паули $К$ и элемент $\hat{\sigma}_К$ базиса Паули полностью определяются друг другом и, следовательно, могут быть отождествлены. Например, элементы стандартного базиса выражены в терминах базиса Паули в Приложении А1 на стр.12.

Полезно сравнить $п$( $ЧАС_н$) со стандартным основанием. У нас есть

$$\hat{\sigma}_{к_1 \dots к_н} \hat{\sigma}_{к_1 \dots к_н} "=" \hat{\sigma}_{0 \dots 0}, тр\, \hat{\sigma}_{0 \dots 0} "=" 2^н, тр\, \hat{\sigma}_{к_1 \dots к_н} \Big|_{к_1 \dots к_н 6 =0 \dots 0} = 0. \tag{4}$$

Базис Паули эрмитов, унитарный и ортогональный относительно скалярного произведения (1). Обратите внимание, что оператор $|к\rangle \langle л|$ стандартного базиса не унитарна и не эрмитова, если $к 6 "=" л$. Стандартный базис не содержит тождественного оператора, имеющего вид

$$\sum_{к=0}^{2^н-1} |к\rangle \langle к|$$

в той основе. В базисе Паули любой оператор $\hat{U}$ из унитарной группы $U$( $ЧАС_н$) (то есть, $\hat{U}^\dagger \hat{U} "=" \hat{\sigma}_{0\dots0}$) имеет разложение вида

$$\hat{U} "=" \sum_{я_1,\dots,я_н \in \{0,1,2,3\}} U_{я_1 \dots я_н} \hat{\sigma}_{я_1 \dots я_н}, \qquad \hat{U}^\dagger "=" \sum_{я_1,\dots,я_н \in \{0,1,2,3\}} \overline{U}_{я_1 \dots я_н} \hat{\sigma}_{я_1 \dots я_н},$$

где

$$\sum_{я_1,\dots,я_н \in \{0,1,2,3\}} \overline{U}_{я_1 \dots я_н} U_{я_1 \dots я_н} "=" 1, \qquad \sum_{\substack{я_1,\dots,в,\, Дж_1,\dots,jn \in \{0,1,2,3\} \\ (я_1,\dots,в) 6 "=" Дж_1,\dots,jn)}} \overline{U}_{я_1 \dots я_н} U_{Дж_1 \dots к_н} "=" 0.$$

Обратите внимание, что буквенное условие может быть очевидно разложено на $2^{2п-1}(2^н-1)$ независимые условия.

## 3.Квантовые состояния в базисе Паули

Квантовое состояние (оператор плотности) является эрмитовым, положительно полуопределенным (или положительным[1], короче) оператор вида

$$\hat{\rho}"=" \frac{1}{2^{н}} \sum_{к_1,\dots,к_н\in\{0,1,2,3\}} а_{к_1\dots к_н}\hat{\sigma}_{к_1\dots к_н} \equiv \frac{1}{2^{н}} \sum_{К=0}^{4^{н}-1} а_К\hat{\sigma}_К, \tag{5}$$

где $а_{к_1\dots к_н}$ ери

$$а_{0\dots0}"="1, \quad /а_{к_1\dots к_н}/61, \quad \sum_{к_1,\dots,к_н\in\{0,1,2,3\}} (а_{к_1\dots к_н})^{2} 62^{н}. \tag{6}$$

Условия (6) гарантировать, что $\hat{\rho}^{\dagger}"="\hat{\rho}$, тр$\hat{\rho}"="1$ и тр$\hat{\rho}^{2}61$. Для квантовых вычислений важно, чтобы все коэффициенты в состоянии (5) действительны и каждое из них, кроме $а_{0\dots0}$, является в точности r (результатом) локального измерения с одним из базисных операторов (3), $а_К\equiv а_{к_1\dots к_н}"="$тр$\hat{\rho}\hat{\sigma}_{к_1\dots к_н}$.Все квантовые (чистые и смешанные) состояния составляют выпуклое множество (замкнутое многообразие, поскольку оно является прообразом 1 при отображении tr : $ЧАС$( $ЧАС_н$)→Р)реального измерения $4^{н}-1$ в вещественном линейном многообразии $С_н\subset$Охватывать $\{П(ЧАС_н)\}"="ЧАС(ЧАС_н)$, а чистые состояния располагаются на границе $С_н$и составить вещественное подмногообразие размерности $2^{н+1}-2$.

Каждый элемент $п(ЧАС_н)$ является идемпотентным ($\hat{\sigma}_К\hat{\sigma}_К"="\hat{\sigma}_{0\dots0}$), так что операторы

$$\hat{П}^{\pm}_{К}"=" \frac{\hat{\sigma}_{0\dots0}\pm\hat{\sigma}_К}{2}$$

это проекторы. Таким образом, наблюдаемая $\hat{\sigma}_К"="\hat{П}^{+}_{К}-\hat{П}^{-}_{К}$естественным образом сводится к проективные измерения. Использование операторов $\hat{П}^{\pm}_{К}$,теперь мы можем доказать следующее практически важное положение, которое, по-видимому, не рассматривалось, по крайней мере, в современной литературе.

**Предложение 1**.*Состояние* $/а_{к_1\dots к_н}/61$ *в*(6)*следует из положительной определенности оператора плотности*(5)*и первое условие в*(6).

Обратите внимание, что эрмитовы проекторы $\hat{П}^{\pm}_{К}"="\hat{П}^{\pm}_{К}\hat{П}^{\pm}_{К}"="\left(\hat{П}^{\pm}_{К}\right)^{\dagger}\hat{П}^{\pm}_{К}$положительные операторы из-за очевидных неравенств

$$\langle u/\hat{П}^{\pm}_{К}/ты\rangle"="\langle ты/\left(\hat{П}^{\pm}_{К}\right)^{\dagger}\hat{П}^{\pm}_{К}/ты\rangle>0.$$

В общем случае эрмитов оператор $\hat{А}\in л(ЧАС_н)$ положителен тогда и только тогда, когда существует некоторый оператор $\hat{В}\in л(ЧАС_н)$ такой, что $\hat{А}"="\hat{В}\hat{В}^{\dagger}$; более того, $\hat{В}$можно выбрать эрмитовым [15]. Это, в свою очередь, означает, что ($\hat{А}$и $\hat{\rho}$положительные)

$$тр\left(\hat{А}\hat{\rho}\right)= тр\left(\hat{В}\hat{В}^{\dagger}\hat{\rho}\right)"="тр\left(\hat{В}^{\dagger}\hat{\rho}\hat{В}\right)>0,$$

---

[1] Для нашей цели в этой статье нам не нужно различать положительно полуопределенные и положительно определенные операторы.

с $\hat{B}^{\dagger}\hat{\rho}\hat{B}$ явно положительный. Таким образом,

$$\text{тр}\left(\hat{П}_{к}\hat{\rho}\right) "=" \frac{1 \pm a_{к}}{2} > 0, \tag{7}$$

так что $-16 a_{к} 61$. Доказательство завершено. -

В качестве примера запишем одно из практически полезных состояний в стандартном базисе и в базисе Паули, а именно трехкубитное состояние Гринбергера-Хорна-Цайлингера состояние. Использование оператора $CNOT$ и оператор Адамара $\hat{U}_{+2}$, которые определены по отношениям (13) и (14) в приложении А2 можно записать унитарное преобразование начального состояния $/000\rangle$ до ГГц$_3$ состояние в форме

$$\hat{U}_{ГГц_3} "=" \left(\hat{\sigma}_0 \otimes CNOT\right) \circ \left(CNOT \otimes \hat{\sigma}_0\right) \circ \left(\hat{U}_{\frac{+}{2}} \otimes \hat{\sigma}_{00}\right),$$

из которого легко найти

$$\hat{\rho}_{ГГц_3} = \frac{1}{2}\left( /000\rangle\ \langle 000/ + /000\rangle\ \langle 111/ + /111\rangle\ \langle 000/ + /111\rangle\ \langle 111/ \right)$$
$$"=" \frac{1}{8}\left( \hat{\sigma}_{000} + \hat{\sigma}_{111} - \hat{\sigma}_{122} - \hat{\sigma}_{212} - \hat{\sigma}_{221} + \hat{\sigma}_{033} + \hat{\sigma}_{303} + \hat{\sigma}_{330}. \right)$$

## 4.Операции со струнами Паули

Нам понадобится несколько фактов и определений, связанных с базисом Паули и множеством $н$ струны Паули длины,

$$\text{ул.}_{н} "=" \{K "=" к_1 \ldots к_н\}_{к_1,\ldots,к_н \in \{0,1,2,3\}}.$$

Сначала рассмотрим множество $Ф_4 "=" \{0,1,2,3\}$ как четырехгруппа Клейна с правилами умножения

$$0 * к "=" к,\ к * к "=" 0,\ к * л "=" м,$$

где $к, л, м \in \{1,2,3\}$ и $клм$ есть любая перестановка числа 123. Во-вторых, пусть функция $c: Ф_4 \times Ф_4 \to \{1, я, -я\}$ определяться его значениями

$$c(0,0) = c(0, к "=" c(к,0) = c(к, к) = 1,\ к "=" 1,2,3,$$

$$c(1,2) = c(2,3) = c(3,1) = является(2,1) = c(3,2) = c(1,3) = -я.$$

Далее, пусть функция $C: \text{ул.}_{н} \times \text{ул.}_{н} \to \{1,-1, я, -я\}$, $(K, Л) \mapsto C_{КЛ}$, определяется как произведение

$$C_{КЛ} "=" c(к_1, л_1)\, c(к_2, л_2) \ldots c(к_н, л_н),\ K "=" к_1 к_2 \ldots к_н,\ Л "=" л_1 л_2 \ldots л_н.$$

Функция $C$ симметричен или антисимметричен в зависимости от количества пар $(к_р, л_р)$ ($р$ это позиция в строках $K$ и $Л$) такой, что $к_р, л_р \in \{1,2,3\}$ и $к_р б "=" л_р$, а также в зависимости от относительного порядка в них. Позволять $ж_{+}\ КЛ$ и $ж_{-}\ КЛ$ быть количество пар форм (1,2),(2,3),(3,1) и форм (2,1),(3,2),(1,3) соответственно, и пусть $ж_{кл} = ж^{+}_{кл} + ж^{-}_{кл}$. Затем

$$С_{кл} = я^{ж_{кл}}(-1)^{ж^{-}_{кл}}, \quad С_{(кл)} = \frac{С_{кл}}{2}\left(1 + (-1)^{ж_{кл}}\right), \quad С_{[кл]} = \frac{С_{кл}}{2}\left(1 - (-1)^{ж_{кл}}\right), \quad (8)$$

где круглые и квадратные скобки обозначают симметризацию и антисимметризацию соответственно. значения $С_{кл}$, $С_{(кл)}$, и $С_{[кл]}$ приведены в таблице 2.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $ж_{кл}$ мод 4 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| $ж_{кл}$ мод 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $С_{кл}$ | 1 | 1 | −1 | −1 | $я$ | $я$ | $-я$ | $-я$ |
| $С_{(кл)}$ | 1 | 1 | −1 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $С_{[кл]}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $я$ | $я$ | $-я$ | $-я$ |

Таблица 1: Факторы до $\hat{\sigma}_М$ в (9) для $\hat{\sigma}_к\hat{\sigma}_л$, $\{\hat{\sigma}_к, \hat{\sigma}_л\}$, и $[i\hat{\sigma}_к, i\hat{\sigma}_л]$.

Теперь композицию двух базисных элементов Паули и их антикоммутатора и коммутатора можно записать в виде компактных выражений, удобных для классического компьютерного программирования:

$$\hat{\sigma}_к\hat{\sigma}_л = С_{кл}\hat{\sigma}_М, \ \{\hat{\sigma}_к, \hat{\sigma}_л\} = С_{(кл)}\hat{\sigma}_М, [i\hat{\sigma}_к, i\hat{\sigma}_л] = -С_{[кл]}\hat{\sigma}_М, \qquad (9)$$

где

$$\hat{\sigma}_М = \hat{\sigma}_{м_1 \ldots м_н}, \ м_1 = к_1 * л_1, \ldots, м_н = к_н * л_н. \qquad (10)$$

Обратите внимание, что две строки Паули длины $н$ могут коммутировать, даже если они имеют разные ненулевые записи в одних и тех же местах. Например, три оператора $\hat{\sigma}_{11}$, $\hat{\sigma}_{22}$, и $\hat{\sigma}_{33}$ взаимно коммутировать. Также легко видеть, что унитарная матрица перехода, преобразующая стандартный базис $|я_1 \ldots я_н\rangle\langle Дж_1 \ldots Дж_н|$ в базис Паули, состоит только из элементов 0,±1 и $\pm я$. В частности,

$$|00\ldots0\rangle\langle 00\ldots0| \to \frac{1}{2^н}\sum_{я_1,\ldots,я_н \in \{0,3\}} \hat{\sigma}_{я_1 \ldots я_н}.$$

В более общем виде стандартные ортогональные проекторы могут быть выражены как

$$|я_1 \ldots я_н\rangle\langle я_1 \ldots я_н|_{я_1,\ldots,я_н \in \{0,1\}} = \frac{1}{2^н}\sum_{к_1,\ldots,к_н \in \{0,3\}} х^{я_1}_{к_1} \cdots х^{я_н}_{к_н}\hat{\sigma}_{к_1 \ldots к_н},$$

где

$$х^0_0 = х^0_3 = х^1_0 = 1, \qquad х^1_3 = -1.$$

Некоторые важные операторы базиса Паули описаны в Приложении A2 на стр. 14.

Выражения (9) показать, во-первых, что множество $\{i\hat{\sigma}\}_{н\,к=0}^{4}$ составляет ортонормированный основа всу($н$). И, во-вторых, набор

$$П(ЧАС_н) = \{\varepsilon\hat{\sigma}_К \mid К еул._н,\ е\in\{\pm1, \pm я\}\},$$

который состоит из $4^{н+1}$ элементы, это группа; это называется (($н$-кубит) группа Паули. нормализатор группы Паули,

$$С(ЧАС_н) = \{\hat{U} е U(ЧАС_н) \mid \hat{U}\hat{\sigma}_К\hat{U}^{\dagger} еп(\tilde{Ч}АС_н),\ \hat{\sigma}_К \in P(ЧАС_н)\},$$

называется группой Клиффорда. У нас есть от 2, 4, и 10 следующее предложение:

Предложение 2. *Взаимные унитарные преобразования базисных операторов Паули подчиняются соотношениям $\hat{\sigma}_{я_1\dots я_н}\hat{\sigma}_{к_1\dots к_н}\hat{\sigma}_{я_1\dots я_н} = \pm\hat{\sigma}_{я_1\dots я_н}$, где знак плюс стоит тогда и только тогда, когда количество троек $(я_м к_м я_м)_{м\in\{1,\dots,n\}}$, удовлетворяющие условиям $я_м б = к_м$, $я_м б = 0$, и $к_м б = 0$, даже.*

## 5. Алгоритмы перехода к базису Паули

В стандартном базисе и в базисе Паули можно выразить оператор $\hat{А} ел(ЧАС_н)$ (например, унитарное преобразование, наблюдаемая или оператор плотности) как

$$\hat{A} = \sum_{я_0,\dots,я_{п-1},j_0,\dots,j_{п-1}\in\{0,1\}} а_{я_{п-1}\dots я_0 Дж_{п-1}\dots к_0} \left|я_{п-1}\dots я_0\right\rangle \left\langle Дж_{п-1}\dots Дж_0\right| = \frac{1}{2^н}\sum_{я_0,\dots,я_{п-1}\in\{0,1,2,3\}} С_{я_{п-1}\dots я_0}\hat{\sigma}_{я_{п-1}\dots я_0},$$

или, короче,

$$\hat{A} = \sum_{я=0}^{2_н-1}\sum_{Дж=0}^{2^{н}-1} а_{ij}\left|я\right\rangle\left\langle j\right| = \frac{1}{2_н}\sum_{я=0}^{4^{н}-1} С_я\hat{о}_я. \tag{11}$$

Таким образом, мы имеем дело с задачей вычисления коэффициентов $С_я$ когда коэффициенты $а_{я}$ дано; такой алгоритм недавно был предложен [13]. Наш подход основан на следующем наблюдении: все коэффициенты $а_{ij}$ с двоичными строками $я = я_{п-1}\dots я_0$ и $Дж = Дж_{п-1}\dots Дж_0$, которые имеют одинаковую сумму

$$к = к_{п-1}\dots к_0)_2 = я_{п-1}\dots я_0)_2 \oplus (Дж_{п-1}\dots Дж_0)_2,$$

дают ненулевые вклады только в члены вида $С_{(я\oplus Дж)}\hat{\sigma}_л$, где $л$ это двоичная строка $л_{п-1}\dots я_0$, $0 б л б 2_н-1$, а операторы $\hat{\sigma}_л$ необходимо пересчитать к форме (11). Несложно (но громоздко) доказать, что строки $я = я(к, л = [я_0^{(к)}, \dots, я_{2^н-1}^{(к)}]$, $к_4 = я \oplus дж$, в $\hat{\sigma}_я$ определяются

$$я = л\bar{\wedge}к + 2л\wedge к\ (\ )(\ ) + 3л\wedge \bar{к},\tag{12}$$

где черта над буквой обозначает инверсию 0↔1 для каждой цифры соответствующей двоичной строки и $\wedge$ обозначает логическую операцию *ИЛИ*. С правой стороны в (12), мы рассматриваем полученные двоичные строки как числа с основанием 4. Для заданных двоичных строк *я* и *Дж*, псевдокод этой процедуры написан на алгоритме 1.

Например, слагаемые

$$a_{010,001}|010\rangle\langle 001| = \frac{a_{21}}{2^3}\left(\hat{\sigma}_{011} + i\hat{\sigma}_{012} - i\hat{\sigma}_{021} + \hat{\sigma}_{022} + \hat{\sigma}_{311} + i\hat{\sigma}_{312} - i\hat{\sigma}_{321} + \hat{\sigma}_{322}\right),$$

$$a_{001,010}|001\rangle\langle 010| = \frac{a_{12}}{2^3}\left(\hat{\sigma}_{011} - i\hat{\sigma}_{012} + i\hat{\sigma}_{021} + \hat{\sigma}_{022} + \hat{\sigma}_{311} - i\hat{\sigma}_{312} + i\hat{\sigma}_{321} + \hat{\sigma}_{322}\right),$$

$$a_{101,110}|101\rangle\langle 110| = \frac{a_{56}}{2^3}\left(\hat{\sigma}_{011} - i\hat{\sigma}_{012} + i\hat{\sigma}_{021} + \hat{\sigma}_{022} - \hat{\sigma}_{311} + i\hat{\sigma}_{312} - i\hat{\sigma}_{321} - \hat{\sigma}_{322}\right),$$

$$a_{111,100}|111\rangle\langle 100| = \frac{a_{74}}{2^3}\left(\hat{\sigma}_{011} - i\hat{\sigma}_{012} - i\hat{\sigma}_{021} - \hat{\sigma}_{022} - \hat{\sigma}_{311} + i\hat{\sigma}_{312} + i\hat{\sigma}_{321} + \hat{\sigma}_{322}\right)$$

будет способствовать линейной комбинации $\hat{\sigma}_{011}, \hat{\sigma}_{012}, \hat{\sigma}_{021}, \hat{\sigma}_{022}, \hat{\sigma}_{311}, \hat{\sigma}_{312}, \hat{\sigma}_{321},$ и $\hat{\sigma}_{322}$ с

$$к = 010 \oplus 001 = 001 \oplus 010 = 101 \oplus 110 = 111 \oplus 100 = 011.$$

Элементы базиса Паули, возникающие в (12) из этих слагаемых показаны в табл. 2. Например, если $л = 5 = (101)_2$, то в соответствии с (12),

$$я_{(3)}[5] = \left[(010)_2 \wedge (011)_2\right]_4 + 2\left[(101)_2 \wedge (011)_2\right]_4 + 3\left[(101)_2 \wedge (100)_2\right]_4 = \left[010\right]_4 + 2\left[001\right]_4 + 3\left[100\right]_4 = 312.$$

Далее, например, слагаемое $a_{101,110}|101\rangle\langle 110| = a_{56}|5\rangle\langle 6|$ способствует $я_{56}/2^3$ в $C_{(3)}[5]$, так как существуют тройки $(л_0 я_0 Дж_0) = (110)_2$, $(л_1 я_1 Дж_1) = (001)_2$, и $(л_2 я_2 Дж_2) = (111)_2$ в алгоритме 1 (строки 17 – 26); поэтому, *знак* = 1, *c* = 1.

| $л$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $л_2л_1л_0$ | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
| $к_2к_1к_0$ | 011 | 011 | 011 | 011 | 011 | 011 | 011 | 011 |
| $\bar{л} \wedge к$ | 011 | 010 | 001 | 000 | 011 | 010 | 001 | 000 |
| $л \wedge к$ | 000 | 001 | 010 | 011 | 000 | 001 | 010 | 011 |
| $л \wedge \bar{к}$ | 000 | 000 | 000 | 000 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| $\hat{\sigma}_я$ | $\hat{\sigma}_{011}$ | $\hat{\sigma}_{012}$ | $\hat{\sigma}_{021}$ | $\hat{\sigma}_{022}$ | $\hat{\sigma}_{311}$ | $\hat{\sigma}_{312}$ | $\hat{\sigma}_{321}$ | $\hat{\sigma}_{322}$ |

Таблица 2: Элементы базиса Паули, возникающие для $к = 011$.

**Алгоритм 1**Преобразование к базису Паули.

```
Входколичество кубитовн
Входструныя"="я_{п-1}. . .я_0иДж"="Дж_{п-1}. . .Дж_0,я_с, Дж_с∈ {0,1}
Входкомплексное числоa_{ij}—фактор вa_{ij} |я〉 〈j|
//Составьте номер строкик"="я⊕Дж
Инициализироватьнитьк"="нулевой
дляя_с"="я_0, . . . , я_{п-1}делать
    дляДж_с"="Дж_0, . . . , Дж_{п-1}делать
        к_с"="я_с⊕Дж_с
    конец для
конец для
Конвертировать (к_{п-1}. . .к_0)_2в целое (к)_{10}
//Для номерак,фил в два ряда
ИнициализироватьC_{(к)}на ноль 2_н-длинный вектор комплексного типа данных
Инициализироватья_{(к)}нулем 2_н-длинный вектор типа строковых данных
Инициализироватьинтцентризнак∈ {1, −1, я, -я}по произвольным значениям
длял"="0к2_н−1делать
    Конвертировать (л)_{10}к (л_{п-1}. . .л_0)_2
    центр"="0 изнак"="1 для
    л_с"="л_0, . . . , л_{п-1}делать
        еслил_с==1затем
            если (я_с, Дж_с) == (1,1)затемзнак"="−знак если (я_с,
            Дж_с) == (0,1)затемцентр"="центр+1 если (я_с, Дж_с)
            == (1,0)затемзнак"="−знак, конец, если            центр"="центр+1

    конец для
    я_{(к)}[л"="(л̄∧к+2л∧к) + 3(л∧ к̄)
    интс"="центр(мод4),C_{(к)}[л] +=я_с·знак·a_{ij}
конец для
Возвращатьсяряды C_{(к)}ия_{(к)}.
```

## 6.Заключение

В этой статье мы описали базовую технику работы с базисом Паули. Показано, что этот прием может сделать более удобными и алгоритмичными некоторые манипуляции с математическими выражениями, относящимися к квантовым схемам с большим числом кубитов. Представлен новый эффективный алгоритм полиномиальной сложности перехода от стандартного базиса к базису Паули.

## р.ссылки


[1] Б. Дирксе, М. Помпили, Р. Хэнсон, М. Уолтер, С. Венер*Свидетельство запутанности в экспериментах с произвольным шумом*Квантовая наука и технологии5,035007, 2020 (arxiv:1909.09119)

[2] И. Хамамура и Т. Имамичи.*Эффективная оценка квантовых наблюдаемых с использованием запутанных измерений*npj Квантовая информация6,56, 2020 ( arxiv:1909.09119)

[3] О. Кроуфорд, Б. ван Страатен, Д. Ван, Т. Паркс, Э. Кэмпбелл, С. Брайерли *Эффективное квантовое измерение операторов Паули при наличии конечной ошибки дискретизации*квант5,385–404, 2021 г. (архив: 1908.06942)

[4] В. Клобус и др.*Запутанность более высокого измерения без корреляций.*Евро. физ. Дж. Д.73,29, 2019 (архив: 1808.10201)

[5] Т. Дж. О'Коннор, Ю. Ю., Б. Хелоу, Р. Лафламм.*Надежность дистилляции магического состояния от ошибок в воротах Клиффорда*Квантовая информация и вычисления 13,361–378, 2013 г. (архив: 1205.6715)

[6] К. А. Риофрио, Д. Гросс, С. Т. Фламмиа, Т. Монц, Д. Нигг, Р. Блатт, Дж. Эйсерт. *Экспериментальное квантово-сжатое зондирование для семикубитной системы* Связь с природой8,15305, 2017 (архив: 1608.02263)

[7] С.С. Джахроми, Р. Орус.*Универсальный тензорный сетевой алгоритм для любой бесконечной решетки*физ. Преподобный Д99,195105, 2019 (архив: 1808.00680)

[8] А.Н. Цирулев.*Геометрический взгляд на квантовые тензорные сети*европ. физ. J. Сеть конференций226,№ 4, 2020 г. (https://doi.org/10.1051/epjconf/202022602022)

[9] И.М. Поташов, А.Н. Цирулев.*Вычислительный алгоритм для разложения ковариантных рядов в общей теории относительности*европ. физ. J. Сеть конференций173, 03021, 2018 (https://doi.org/10.1051/epjconf/201817303021)

[10] С. Бравый, А. Китаев.*Универсальное квантовое вычисление с идеальными вентилями Клиффорда и шумными помощниками*физ. Преп. А71,022316, 2005 (arXiv: квант-ph/ 0403025)

[11] В. Данос и Э. Кашефи.*Детерминизм в односторонней модели*физ. Преподобный А. 74,052310, 2006 (arXiv: квант-ph/0506062)

[12] В. Данос и Э. Кашефи.*Измерения Паули универсальны*Электронные заметки по теоретической информатике170,95–100, 2007 г. (https://doi.org/ 10.1016/j.entcs.2006.12.013)

[13] Д. Ганлике, М. С. Паленик и С. А. Фишер.*Эффективный алгоритм генерации координат Паули для произвольного линейного оператора*2020 (архив: 2011.08942)

[14] С. Бравый, Д. Маслов.*Схемы без Адамара раскрывают структуру группы Клиффорда.*2020 (архив: 2003.09412)

[15] И. Бенгтссон, К. Жычковский.*Геометрия квантовых состояний: введение в квантовую запутанность.*Издательство Кембриджского университета, Кембридж, 2 006

[16] Шенде В.В., Марков И.Л., Буллок С.С.*Минимальные универсальные двухкубитные схемы на основе управляемого НЕ*физ. Преподобный А,69,062321, 2004 (arXiv: квант-ph/0308033)

## Приложение

## A1. Базис Паули для*н*"="2

Для справки приведем здесь выражения элементов стандартного базиса в $ЧАС_2$ в терминах элементов базиса Паули. Напомним, что такие выражения в $ЧАС_1$ иметь форма

$$/0\rangle\ \langle 0\,/"=" \frac{\hat\sigma_0+\ \hat\sigma_3}{2},\ /0\rangle\ \langle 1\,/"=" \frac{\hat\sigma_1+\ i\hat\sigma_2}{2},\ /1\rangle\ \langle 0\,/"=" \frac{\hat\sigma_1\ -\ i\hat\sigma_2}{2},\ /1\rangle\ \langle 1\,/"=" \frac{\hat\sigma_0-\hat\sigma_3}{2}.$$

$$/00\rangle\ \langle 00\,/"=" \frac{\hat\sigma_{00}+\ \hat\sigma_{03}+\hat\sigma_{30}+\hat{}\ \ \sigma_{33}}{4},\qquad /01\rangle\ \langle 00\,/"=" \frac{\hat\sigma_{01}-i\hat\sigma_{02}+\hat\sigma_{31}-\hat{Я}_{32},\ о}{4}$$

$$/10\rangle\ \langle 00\,/"=" \frac{\hat\sigma_{10}+\hat\sigma_{13}-i\hat\sigma_{20}-\hat{Я}_{23}\ \ о}{4},\qquad /11\rangle\ \langle 00\,/"=" \frac{\hat\sigma_{11}-i\hat\sigma_{12}-i\hat\sigma_{21}-\hat{}_{22},\ \ о}{4}$$

$$/00\rangle\ \langle 01\,/"=" \frac{\hat\sigma_{01}+i\hat\sigma_{02}+\hat\sigma_{31}+\hat{Я}_{32}\ \ о}{4},\qquad /01\rangle\ \langle 01\,/"=" \frac{\hat\sigma_{00}-\ \hat\sigma_{03}+\hat\sigma_{30}-\ \hat\sigma_{33},}{4}$$

$$/10\rangle\ \langle 01\,/"=" \frac{\hat\sigma_{11}+\ i\hat\sigma_{12}-i\hat\sigma_{21}+\hat\sigma_{22}}{4},\qquad /11\rangle\ \langle 01\,/"=" \frac{\hat\sigma_{10}\ -\ \hat\sigma_{13}-i\hat\sigma_{20}+i\hat\sigma_{23},\ 4}{}$$

$$/00\rangle\ \langle 10\,/"=" \frac{\hat\sigma_{10}+\ \ \hat\sigma_{13}+i\hat\sigma_{20}+i\hat\sigma_{23}}{4},\qquad /01\rangle\ \langle 10\,/"=" \frac{\hat\sigma_{11}\ -\ i\hat\sigma_{12}+i\hat\sigma_{21}+\hat\sigma_{22},\ 4}{}$$

$$/10\rangle\ \langle 10\,/"=" \frac{\hat\sigma_{00}+\ \ \hat\sigma_{03}-\ \hat\sigma_{30}-\ \hat\sigma_{33},\ 4}{},\qquad /11\rangle\ \langle 10\,/"=" \frac{\hat\sigma_{01}-Я_{02}\hat\sigma\ \hat\sigma_{31}+i\hat\sigma_{32},}{4}$$

---

$$|00\rangle\langle 11| "=" \frac{\hat{\sigma}_{11} + i\hat{\sigma}_{12} + i\hat{\sigma}_{21} - \hat{\sigma}_{22},}{4} \qquad |01\rangle\langle 11| "=" \frac{\hat{\sigma}_{10} - \hat{\sigma}_{13} + i\hat{\sigma}_{20} - i\hat{\sigma}_{23},}{4}$$

$$|10\rangle\langle 11| "=" \frac{\hat{\sigma}_{01} + i\hat{\sigma}_{02} - \hat{\sigma}_{31} - i\hat{\sigma}_{32},}{4} \qquad |11\rangle\langle 11| "=" \frac{\hat{\sigma}_{00} - \hat{\sigma}_{03} - \hat{\sigma}_{30} + \hat{\sigma}_{33}.}{4}$$

## A2. Некоторые унитарные операторы в базисе Паули

Оператор контролируемого НЕ:

$$CNOT "=" \frac{\hat{\sigma}_{00} + \hat{\sigma}_{01} + \hat{\sigma}_{30} - \hat{\sigma}_{31}}{2} "=" |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|, \tag{13}$$

Оператор управляемой фазы:

$$Чехия "=" \frac{\hat{\sigma}_{00} + \hat{\sigma}_{03} + \hat{\sigma}_{30} - \hat{\sigma}_{33}}{2} "=" |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |11\rangle\langle 11|.$$

Хорошо известно, что $CNOT$ и $Чехия$ принадлежат к группе Клиффорд $C(ЧАС_2)$. Известны также некоторые наборы образующих и канонические формы для операторов группы $C(ЧАС_н)$ (см., например, [14]), но количество элементов в этих группах растет экспоненциально (на самом деле чуть быстрее) с ростом $н$: например, $C(ЧАС_1)$ имеет порядок 24, и $C(ЧАС_2)$ имеет порядок 11520. Поэтому возникает проблема нахождения практически подходящего [16] набор унитарных операторов для построения групп Клиффорда и соответствующий формализм стабилизатора. Здесь мы вводим однокубитный

Оператор Адамара $\hat{U}_{+2}$ и псевдоадамаровы операторы $\hat{U}_{-2}, \hat{U}_{\pm 1}$ и $\hat{U}_{\pm 3}$, повиноваться отношения $\left(\hat{U}_{\pm 1}\right)^2 "=" \left(\hat{U}_{\pm 2}\right)^2 "=" \left(\hat{U}_{\pm 3}\right)^2 "=" \hat{\sigma}_0$. Они унитарны и эрмитовы, и определяются

$$\hat{U}_{\pm 1} "=" \frac{\hat{\sigma}_2 \pm \hat{\sigma}_3}{\sqrt{2}} "=" \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm|0\rangle\langle 0| - я|0\rangle\langle 1| + я|1\rangle\langle 0| \mp |1\rangle\langle 1|\right),$$

$$\hat{U}_{\pm 2} "=" \frac{\hat{\sigma}_1 \pm \hat{\sigma}_3}{\sqrt{2}} "=" \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \mp |1\rangle\langle 1|\right), \tag{14}$$

$$\hat{U}_{\pm 3} "=" \frac{\hat{\sigma}_1 \pm \hat{\sigma}_2}{\sqrt{2}} "=" e^{\mp i\pi/4}|0\rangle\langle 1| \pm e^{\pm i\pi/4}|1\rangle\langle 0|.$$

Их можно использовать для построения унитарных преобразований $\hat{\sigma}_я \leftrightarrow \pm\hat{\sigma}_{Дж}$ ($я \neq Дж$) и $\hat{\sigma}_я \to -\hat{\sigma}_я$ ($я "=" 1,2,3$):

$$\hat{U}_{\pm к}\hat{\sigma}_я\hat{U}_{\pm к} "=" \pm\hat{\sigma}_{Дж}, \qquad \hat{U}_{\pm я}\hat{\sigma}_к\hat{U}_{\pm я} "=" -\hat{\sigma}_к, \qquad я \neq Дж \neq к,\ я,\ Дж,\ к \in \{1,2,3\},$$

или, более подробно,

$$\hat{U}_{1\pm}\hat{\sigma}_2\hat{U}_{1\pm} "=" \pm\hat{\sigma}_3, \quad \hat{U}_{1\pm}\hat{\sigma}_3\hat{U}_1^{\pm} "=" \pm\hat{\sigma}_2, \quad \hat{U}_{1\pm}\hat{\sigma}_1\hat{U}_1^{\pm} "=" -\hat{\sigma}_1,$$

$$\hat{U}_{2\pm}\hat{\sigma}_1 U_{2\pm} "=" \pm\hat{\sigma}_3, \quad \hat{U}_2\hat{\sigma}^{\pm}_3 U_{2\pm} "=" \pm\hat{\sigma}_1, \quad \hat{U}_2^{\pm}\hat{\sigma}_2 U_{2\pm} "=" -\hat{\sigma}_2,$$

$$\hat{U}_{3\pm}\hat{\sigma}_1\hat{U}_3^{\pm} "=" \pm\hat{\sigma}_2, \quad \hat{U}_3\hat{\sigma}_2\hat{U}_{\pm 3} "=" \pm\hat{\sigma}_1, \quad \hat{U}_{3\pm}\hat{\sigma}_3\hat{U}_3^{\pm} "=" -\hat{\sigma}_3.$$

Далее для единообразия обозначим $\hat{\sigma}_0$ к $\hat{U}_0$. Так, например, мы можем выбрать полный набор генераторов для $C(ЧАС_1)$ в виде ($\hat{U}_я \equiv \hat{U}_{+я}, я "=" 1,2,3$)

$$\left\{ \hat{U}_0, \hat{У}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3 \right\}.$$

В общем случае $П(ЧАС_н)$, аполный набор генераторов для группы $C(ЧАС_н)$ составляют операторы вида

$$\left\{ \hat{U}_{я_1 \dots я_н} "=" \hat{U}_{я_1} \otimes \dots \otimes \hat{U}_{я_н} \right\}_{я_1, \dots, я_н \in \{0,1,2,3\}}.$$