ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Направление 02.04.01 Математика и Компьютерные науки
Профиль «Математическое и компьютерное моделирование»

Ильина Кристина Дмитриевна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ СКАЛЯРНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ КОНФИГУРАЦИЙ

Научный руководитель: д. ф.-м. н. А. Н. Цирулёв

Тверь 2023

Цели и задачи

Цель — сравнить формы и параметры орбит в окрестности черных дыр и голых сингулярностей.
В данной работе описано различие в поведении замкнутых орбит вокруг скалярных голых сингулярностей и скалярных черных дыр - в первой главе. Во второй главе с помощью численных моделирований показано поведение орбит, которые имеют схожие радиусы перицентра и апоцентра и сравнимое количество колебаний, но которые или находятся в разный пространствах временах или имеют разные параметры.

Редукция уравнений и квадратуры

$$ds^2 = Adt^2 - \frac{dr^2}{f} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \text{— метрика.} \tag{1}$$

$$\Phi(r) = -\int_r^\infty \phi'^2 r dr\,, \quad \xi(r) = r + \int_r^\infty \left(1 - \mathrm{e}^{\Phi}\right) dr\,, \tag{2}$$

$$A(r) = 2r^2 \int_r^\infty \frac{\xi - 3m}{r^4}\, \mathrm{e}^{\Phi} dr\,, \quad f(r) = \mathrm{e}^{-2\Phi} A\,, \tag{3}$$

$$\widetilde{V}(r) = \frac{1}{2r^2}\left(1 - 3f + r^2\phi'^2 f + 2\,\mathrm{e}^{-\Phi}\, \frac{\xi - 3m}{r}\right), \tag{4}$$

где параметр m является Шварцшильдовской массой.

Для данного ненулевого скалярного поля $\phi(r)$, из (2) следует, что $\xi' = \mathrm{e}^{\Phi} > 0$ для всех $r > 0$ и $\xi(0) > 0$, так что метрическая функция A, заданная квадратурой (3), проходит через ноль и становится отрицательной при $r \to 0$ тогда и только тогда, когда $3m > \xi(0)$. Другими словами,

$$0 < 3m < \xi(0) \quad \text{(голая сингулярность)} \tag{5}$$

или

$$3m > \xi(0) \quad \text{(черная дыра).} \tag{6}$$

Интегралы движения и эффективный потенциал

Первый интеграл движения

$$\left(U^0\right)^2 - \left(U^1\right)^2 - \left(U^3\right)^2 = \mathrm{k}\,, \quad \mathrm{k} = -1\,,\, 0\,,\, 1, \tag{7}$$

где $\mathrm{k} = -1$, $\mathrm{k} = 0$, и $\mathrm{k} = 1$ для пространственноподобной, изотропной и времениподобной геодезической соответственно.

$$U^3 C \;=\; J, \quad \text{или} \quad C^2 \frac{d\varphi}{ds} = J, \quad (J = \mathrm{const}) \tag{8}$$

— удельный угловой момент пробной частицы.

$$U^0 A \;=\; E, \quad \text{или} \quad A^2 \frac{dt}{ds} \;=\; E \quad (E = \mathrm{const}) \tag{9}$$

— удельная энергия пробной частицы.

$$V_{eff} = A^2 \left(\mathrm{k} + \frac{J^2}{C^2}\right) \text{— эффективный потенциал.} \tag{10}$$

$$V'_{eff} = 0\,, \quad E^2 = A^2 \left(\mathrm{k} + \frac{J^2}{C^2}\right)\,, \quad U^0 = \frac{E}{A}\,, \quad U^3 = \frac{J}{C}\,. \tag{11}$$

— уравнения, определяющие круговые орбиты.

Формы орбит

Левый график показывает функцию $\xi(r)$ заданную уравнением (1); скалярные голые сингулярности и скалярные черные дыры имеют массы на интервалах $(0, \xi(0))$ и $(\xi(0), \infty)$, соответственно. Правый график показывает метрические функции $A(r)$ для скалярных голых сингулярностей с $a = 3$ и для Шварцшильдовского решения схожей массы $m = 1$. Для этого Шварцшильдовского пространства времени форма орбиты с параметрами $J = 5.12$, $E = 0.97$, $r_{min} = 14.35$, $r_{max} = 50.33$, и $\Delta\varphi = +1.05 \approx \pi/3$ показано на нижнем графике.
$\xi = \sqrt{r^2 + 2ar + 5a^2} - a, \quad \mathrm{e}^{\Phi} = \frac{r+a}{\sqrt{r^2+2ar+5a^2}}(1)$

Формы орбит

Левый график: $a = 3$, $J = 0.094$, $E = 0.9606$, $r_{min} = 0.37$, $r_{max} = 50.37$, $\Delta\varphi = -5.495 \approx -7\pi/4$.
Центральный график: $a = 10$, $J = 0.5$, $E = 0.966$, $r_{min} = 14.31$, $r_{max} = 50.26$, $\Delta\varphi = -5.71 \approx -20\pi/11$.
Правый график: $a = 10$, $J = 1.445$, $E = 0.9667$, $r_{min} = 15.95$, $r_{max} = 50.27$, $\Delta\varphi = -4.71 \approx -3\pi/2$.

Формы орбит

Левый график: $a = 2.5$, $J = 2.856$, $E = 0.9635$, $r_{min} = 4.07$, $r_{max} = 50.25$, $\Delta\varphi = 0$ (скалярная голая сингулярность), $J = 3.88$, $E = 0.966$, $r_{min} = 4.70$, $r_{max} = 50.25$, $\Delta\varphi = +2\pi$ (ространство-время Шварцшильда).
Центральный график: орбита вокруг скалярной голой сингулярности с параметрами $a = 50$, $J = 5.66$, $E = 0.9998$, $r_{min} = 191.1$, $r_{max} = 9978.7$, $\Delta\varphi = -4.71 = -3\pi/2$.
Правый график: орбита вокруг Шварцшильдовской черной дыры $(m_{Sch} = 1)$ с параметрами $J = 4.72$, $E = 0.9998$, $r_{min} = 8.54$, $r_{max} = 9988.4$, $\Delta\varphi = +\pi/2$.

Заключение

В данной работе получены следующие основные результаты:

1. Разработаны и реализованы в системе Maple методы математического моделирования геодезического движения вблизи сферически-симметричных статических гравитирующих конфигураций скалярного поля на основе квадратурных формул для метрических функций.
2. Проведено численное исследование параметров и визуализация орбит пробных частиц. вблизи горизонта скалярной черной дыры и черной дыры Шварцшильда.
3. Выявлены критические различия в динамике и форме траекторий: у скалярных черных дыр угол прецессии перицентра отрицателен и может быть близок к -2π; у скалярных голых сингулярностей существует аналог последней устойчивой орбиты, на которой частицы покоятся.