NO.

DATE

图论第三次理论作业

一、最多可以将地球分成几个区域，使任何两个区域都相邻.

解：将每个区域都看成一个点，如果两个区域相邻，则这两个点之间有边，因任意两个区域相邻，所以该图为完全图，同时是平面图。

因 $n \geq 3$ 时，平面图满足 $m \leq 3n-6$，即有 $\frac{n(n-1)}{2} \leq 3n-6$.

解得 $3 \leq n \leq 4$，故 $n_{max}=4$

二、证明有10个顶点的5正则图不是平面图：

证：记 $G=(n,m)$

由题：$2m=\sum_{v\in V} d(v)=50$，即 $m=25$ 且 $3n-6=24$.

$\therefore m>3n-6$，故 G 不是平面图.

三、考察图 $G \triangleq (V,E)$，记 $\chi(G)$ 为 G 的点色数，证明：

1. 如果 $\forall v\in V: \chi(G-v)=\chi(G)-1$，$G$ 连通
2. 如果 $\forall x,y\in V: \chi(G-x-y)=\chi(G)-2$，$G$ 是完全图.

(1) 反证法：假设 G 不连通，不妨设 G 有连通分支 G_1，G_2.

设 $\chi(G_1)=\chi(G)$，$\chi(G_2)\leq\chi(G)$，则若删去 G_2 中的点，

则 G_1 点色数不变，即 $\chi(G)=\max\{\chi(G_1),\chi(G_2)\}=\chi(G)\neq\chi(G)-1$

矛盾。所以 G 是完全图

(2) 反证法：假设 G 不是完全图，则存在至少两个点 u，v，并且 u，v 之间没有边，则 u，v 可着相同颜色，则删去这两个点，

$\chi(G-u-v)=\chi(G)-1\neq\chi(G)-2$，矛盾，所以 G 是完全图。

NO.

DATE

五：3正则图G的边色数为4，证明G不是H图

反证：因为G为3正则图，所以G的顶点数应该是偶数
假设G是H图，则存在哈密顿回路，则哈密顿回路的长度为偶数。使用两种颜色交替染色，对于每个顶点，还剩下一条边，使用第三种颜色将第三条边进行染色，这样就得到了一种染色方案，只需要三种颜色，与边色数为4矛盾，所以G不是H图

六：给定一个点色数为K的简单图G以及G的一个K染色方案π，证明对K种颜色中任何一种颜色c，π种均存在c颜色的顶点，其邻居包含所有其它颜色

反证：如果对某一种颜色c，对所有c颜色的顶点，邻居都不包含所有其他颜色，则可以分别将这个c颜色的顶点改为邻居缺少的那种颜色，这样就可以以K-1种颜色完成染色，与点色数为K产生矛盾