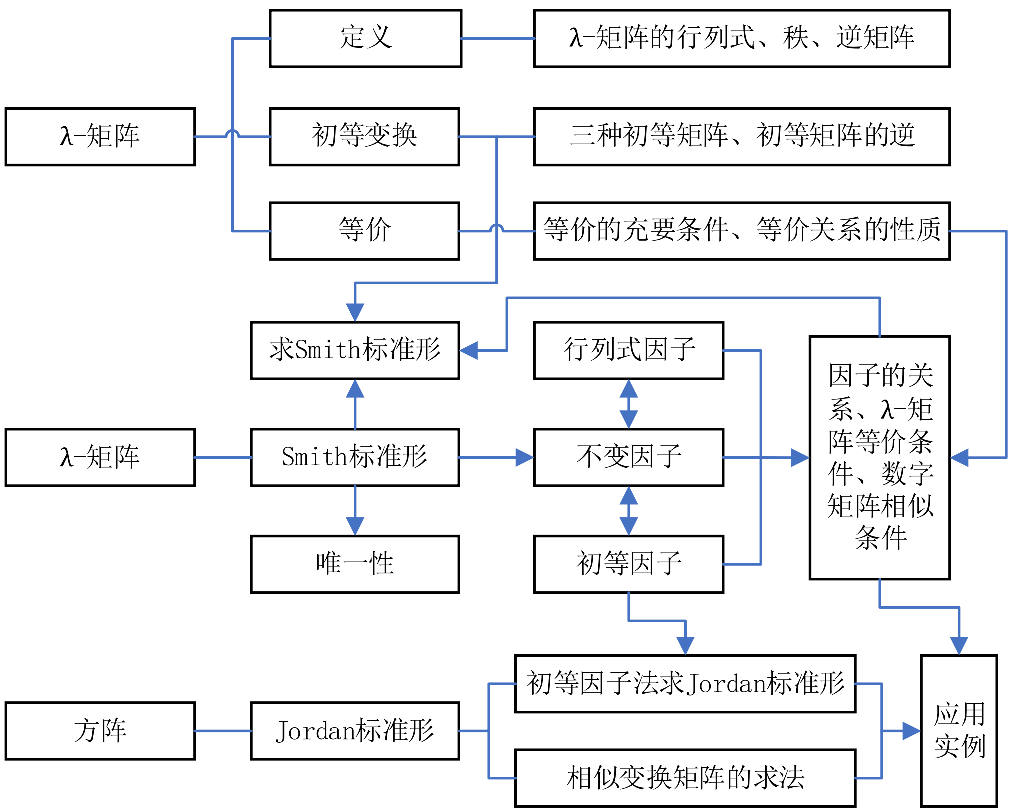
第 4 章　矩阵的相似标准形

在线性代数和第 3 章中已经讨论了可对角化方阵的相似标准形——对角形矩阵，本章继续讨论矩阵的相似标准形.

多项式矩阵（λ-矩阵）是数字矩阵的推广，同时λ-矩阵也是研究数字矩阵的重要工具. 例如 n 阶数字矩阵$\boldsymbol{A}$的特征矩阵$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$就是一种$\lambda$-矩阵，用$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可以研究数字矩阵$\boldsymbol{A}$的相似条件. 本章证明了非零$m\times n$阶$\lambda$-矩阵都等价于一个“对角形”矩阵，即其 Smith 标准形. 基于 Smith 标准形给出了不变因子、初等因子的概念，并介绍λ-矩阵等价的充要条件和数字矩阵相似的充要条件. 接下来介绍方阵的 Jordan 标准形，并讨论了方阵转化为 Jordan 标准形的方法及相似变换矩阵的求解方法. 本章最后给出了应用实例.

本章的知识网络框图：



4.1　λ-矩阵及其初等变换

4.1.1　λ-矩阵的定义

定义 4.1.1　设$a_{ij}(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$为数域$\mathbb{F}$上的多项式，称以$a_{ij}(\lambda)$为元素的$m\times n$矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

为**多项式矩阵**或**λ-矩阵**. 称多项式$a_{ij}(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$中最高的次数为$\boldsymbol{A}(\lambda)$的**次数**.

数字矩阵可看作次数为 0 的λ-矩阵，特征矩阵$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可看作次数为 1 的$\lambda$-矩阵，二者都是$\lambda$-矩阵的特例. 显然，$\lambda$-矩阵的加法、数乘、乘法运算、矩阵的转置均与数字矩阵相同，且有相同的运算规律.

n 阶λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$的行列式为：

$$\det\boldsymbol{A}(\lambda)=\sum_{j_1\cdots j_n\text{全排列}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}(\lambda)a_{2j_2}(\lambda)\cdots a_{nj_n}(\lambda),$$

其中，$\tau(j_1\cdots j_n)$是排列$j_1\cdots j_n$的逆序数，$\det\boldsymbol{A}(\lambda)$也记为$|\boldsymbol{A}(\lambda)|$.

一般$|\boldsymbol{A}(\lambda)|$是$\lambda$的多项式，$\lambda$-矩阵的行列式的性质与数字矩阵相同.

定义 4.1.2　如果λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$中有一个$r(r\geq 1)$阶子式不为零，而所有$r+1$阶子式(如果有的话)全为零，则称$\boldsymbol{A}(\lambda)$的**秩**为r，记为$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}(\lambda)=r$.

$\boldsymbol{A}(\lambda)$的行列式及一切子式都是λ的多项式，子行列式不为零代表组成向量线性无关，由定义 4.1.2 知，零矩阵的秩为 0，因为零矩阵的组成向量恒线性相关.

定义 4.1.3　对于一个 n 阶λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$，如果有一个 n 阶λ-矩阵$\boldsymbol{B}(\lambda)$满足

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{E},\tag{4.1.1}$$

则称λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$是**可逆**的，这里$\boldsymbol{E}$是 n 阶单位矩阵. $\boldsymbol{B}(\lambda)$称为$\boldsymbol{A}(\lambda)$的**逆矩阵**，记为$\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda)$.

定理 4.1.1　n 阶λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$可逆的充要条件是$\det\boldsymbol{A}(\lambda)$是一个非零常数.

证：①必要性　设$\boldsymbol{A}(\lambda)$可逆，在式(4.1.1)的两边求行列式得

$$|\boldsymbol{A}(\lambda)|\,|\boldsymbol{B}(\lambda)| = 1, \tag{4.1.2}$$

因为$|\boldsymbol{A}(\lambda)|$与$|\boldsymbol{B}(\lambda)|$都是$\lambda$的多项式，所以根据式(4.1.2)知，$|\boldsymbol{A}(\lambda)|$与$|\boldsymbol{B}(\lambda)|$都是零次多项式，即$|\boldsymbol{A}(\lambda)|$是非零常数.

②充分性　设$|\boldsymbol{A}(\lambda)|$是一个非零常数．矩阵

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}(\lambda)|}\boldsymbol{A}^*(\lambda)$$

是一个λ-矩阵，其中$\boldsymbol{A}^*(\lambda)$是$\boldsymbol{A}(\lambda)$的伴随矩阵，所以

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\frac{1}{|\boldsymbol{A}(\lambda)|}\boldsymbol{A}^*(\lambda) = \frac{1}{|\boldsymbol{A}(\lambda)|}\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{A}^*(\lambda) = \boldsymbol{E},$$

因此$\boldsymbol{A}(\lambda)$可逆，且它的逆矩阵是$\frac{1}{|\boldsymbol{A}(\lambda)|}\boldsymbol{A}^*(\lambda)$. ■

根据定理 4.1.1, n 阶λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$的秩为n并不等价于$\boldsymbol{A}(\lambda)$可逆，这是λ-矩阵与数字矩阵的不同之处．例如$\boldsymbol{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$的秩为 2，但是它不可逆，因为其行列式$|\boldsymbol{A}(\lambda)| = \lambda^2 - 1$，不是非零常数，即对于 n 阶λ-矩阵，可逆是比满秩更强的条件.

例 4.1.1　已知$\boldsymbol{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 \end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda)$.

解：　因为

$$|\boldsymbol{A}(\lambda)| = -1 \neq 0,$$

$$\boldsymbol{A}^*(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -\lambda \\ -\lambda & \lambda+1 \end{bmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda) = \frac{1}{|\boldsymbol{A}(\lambda)|}\boldsymbol{A}^*(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda+1 & \lambda \\ \lambda & -\lambda-1 \end{bmatrix}.$$

4.1.2　λ-矩阵的初等变换及等价

定义 4.1.4　下列几种类型的变换称为λ-矩阵的**初等变换**：

(1) 矩阵的任意二行（列）互换位置；

(2) 非零常数c乘以矩阵的某一行（列）；

(3) 矩阵的某一行（列）的$\varphi(\lambda)$倍加至另一行（列），其中$\varphi(\lambda)$是λ的多项式.

对单位矩阵施行一次上述三种类型的初等变换，便得到相应的三种λ-矩阵的**初等矩阵**$P(i,j), P(i(c)), P(i,j(\varphi))$，即

$$\boldsymbol{P}(i,j)=\left[\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \text{——}i\text{行}\\ \\ \text{——}j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\boldsymbol{P}(i(c))=\left[\begin{array}{ccccc}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&c&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \text{——}i\ \text{行}\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\boldsymbol{P}(i,j(\varphi))=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&\vdots&\ddots&&&\\&&\varphi(\lambda)&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \text{—}i\text{行}\\ \\ \text{—}j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccc}|&\qquad&|\\ i\text{列}&\qquad&j\text{列}\end{array}\end{array}$$

容易验证，初等矩阵都是可逆的，且有

$$\boldsymbol{P}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{P}(i,j);$$

$$\boldsymbol{P}(i(c))^{-1}=\boldsymbol{P}\left(i(c^{-1})\right);$$

$$\boldsymbol{P}(i,j(\varphi))^{-1}=\boldsymbol{P}(i,j(-\varphi)).$$

定理 4.1.2 对$m\times n$阶λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$作初等行变换相当于用相应的m阶初等矩阵左乘$\boldsymbol{A}(\lambda)$，对$\boldsymbol{A}(\lambda)$作初等列变换相当于用相应的n阶初等矩阵右乘$\boldsymbol{A}(\lambda)$.

定义 4.1.5 如果$\boldsymbol{A}(\lambda)$经过有限次初等变换后变成$\boldsymbol{B}(\lambda)$，则称$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$**等价**，记为 $\boldsymbol{A}(\lambda)\simeq\boldsymbol{B}(\lambda)$.

注意，在第 2 章已经给出过矩阵等价的概念，结合定理 4.1.2 和定义 4.1.5 可知，这里的λ-矩阵的等价与第 2 章给出的数字矩阵的等价是一致的，且λ-矩阵的等价是数字矩阵等价概念的普遍化.

定理 4.1.3 λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$等价的充要条件是存在两个可逆矩阵$\boldsymbol{P}(\lambda)$与$\boldsymbol{Q}(\lambda)$，使得$\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{Q}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{P}(\lambda)$.

λ-矩阵的等价关系满足：

(1) 自反性：$\boldsymbol{A}(\lambda)\simeq\boldsymbol{A}(\lambda)$.

(2) 对称性：若$\boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \boldsymbol{B}(\lambda)$，则$\boldsymbol{B}(\lambda) \simeq \boldsymbol{A}(\lambda)$.

(3) 传递性：若$\boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \boldsymbol{B}(\lambda)$，$\boldsymbol{B}(\lambda) \simeq \boldsymbol{C}(\lambda)$，则$\boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \boldsymbol{C}(\lambda)$.

4.2　λ-矩阵的 Smith 标准形

4.2.1　λ-矩阵的 Smith 标准形

引理 4.2.1　设λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$的左上角元素$a_{11}(\lambda) \neq 0$，且$\boldsymbol{A}(\lambda)$中至少有一个元素不能被它整除，则一定存在一个与$\boldsymbol{A}(\lambda)$等价的矩阵$\boldsymbol{B}(\lambda)$，它的左上角元素也不为零，且次数比$a_{11}(\lambda)$的次数低.

证：　根据$\boldsymbol{A}(\lambda)$中不能被$a_{11}(\lambda)$整除的元素所在的位置，分 3 种情况讨论.

① 若在$\boldsymbol{A}(\lambda)$的第一列中有一个元素$a_{i1}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$整除，即有

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)g(\lambda) + r(\lambda),$$

其中余式$r(\lambda) \neq 0$，且次数比$a_{11}(\lambda)$的次数低.

对$\boldsymbol{A}(\lambda)$作两次初等行变换，首先第一行乘以$-g(\lambda)$加到第i行，第i行第一列的元素成为$r(\lambda)$，然后把第一行和第i行互换得到新的λ-矩阵$\boldsymbol{B}(\lambda)$，$\boldsymbol{B}(\lambda)$左上角元素为$r(\lambda)$，且满足引理要求.

② 在$\boldsymbol{A}(\lambda)$的第一行中有一个元素$a_{1i}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$整除，证明与情况①类似.

③ $\boldsymbol{A}(\lambda)$的第一行与第一列中的元素都可以被$a_{11}(\lambda)$整除，但$\boldsymbol{A}(\lambda)$中有一个元素$a_{ij}(\lambda)(i > 1, j > 1)$不能被$a_{11}(\lambda)$整除.　设$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda)$，对$\boldsymbol{A}(\lambda)$作两次初等行变换，首先第一行乘以$-\varphi(\lambda)$加至第$i$行，第$i$行第一列的元素变为 0，第$i$行第$j$列的元素变为$a_{ij}(\lambda) - a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda)$；其次把第$i$行的元素乘以 1 加至第一行，第一行第一列的元素仍为$a_{11}(\lambda)$，第一行第j列的元素变为$a_{ij}(\lambda) + [1 - \varphi(\lambda)]a_{1j}(\lambda)$，它不能被$a_{11}(\lambda)$所整除，这就转化为情况②.　■

定理 4.2.1　任一非零的$m \times n$阶 λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$都等价于一个“对角形”矩阵，即

$$\boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}. \qquad (4.2.1)$$

其中$r \geq 1$，$d_i(\lambda)$是首项系数为 1 的多项式，且

$$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda) \qquad (i = 1,2,\cdots,r-1).$$

竖线记号表示整除，$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$表示$d_{i+1}(\lambda)$可以被$d_i(\lambda)$整除.

证： 设$a_{11}(\lambda) \neq 0$，否则总可以通过行列调整使$\boldsymbol{A}(\lambda)$的左上角元素不为零.

若$a_{11}(\lambda)$不能整除$\boldsymbol{A}(\lambda)$的所有元素，由引理 4.2.1，可以找到与$\boldsymbol{A}(\lambda)$等价的$\boldsymbol{B}_1(\lambda)$，他的左上角元素$b_1(\lambda) \neq 0$，且次数比$a_{11}(\lambda)$低. 如果$b_1(\lambda)$还不能整除$\boldsymbol{B}_1(\lambda)$的所有元素，由引理 4.2.1 又可以找到与$\boldsymbol{B}_1(\lambda)$等价的$\boldsymbol{B}_2(\lambda)$，它的左上角元素$b_2(\lambda) \neq 0$，且次数比$b_1(\lambda)$低，继续上述步骤，可得到一系列彼此等价的 λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda), \boldsymbol{B}_1(\lambda), \boldsymbol{B}_2(\lambda)\cdots$. 它们的左上角元素都不为零，且次数越来越低. 但是多项式的次数是非负整数，不可能无限降低，因此在有限步后，就会得到一个 λ-矩阵$\boldsymbol{B}_s(\lambda)$，它的左上角元素$b_s(\lambda) \neq 0$，且可以整除$\boldsymbol{B}_s(\lambda)$的全部元素$b_{ij}(\lambda)$，即

$$b_{ij}(\lambda) = b_s(\lambda)q_{ij}(\lambda).$$

显然，可对$\boldsymbol{B}_s(\lambda)$分别进行一系列初等行变换和初等列变换，使得第一行和第一列除左上角元素$b_s(\lambda)$外全为零，即

$$\boldsymbol{B}_s(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} b_s(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_1(\lambda) & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

因为$\boldsymbol{A}_1(\lambda)$的元素是$\boldsymbol{B}_s(\lambda)$元素的组合，而$\boldsymbol{B}_s(\lambda)$的$b_s(\lambda)$可以整除$\boldsymbol{B}_s(\lambda)$的所有元素，所以$b_s(\lambda)$可以整除$\boldsymbol{A}_1(\lambda)$的所有元素. 如果$\boldsymbol{A}_1(\lambda) \neq 0$，则对$\boldsymbol{A}_1(\lambda)$可重复上述过程，进而把矩阵化成

$$\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{A}_2(\lambda) & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix},$$

其中$d_1(\lambda)$与$d_2(\lambda)$都是首项系数为 1 的多项式($d_1(\lambda)$与$b_s(\lambda)$只差常数倍)，且

$d_2(\lambda)$能整除$\boldsymbol{A}_2(\lambda)$的所有元素. 继续上述步骤可将$\boldsymbol{A}(\lambda)$化为所要求形式. ■

定义 4.2.1 与$\boldsymbol{A}(\lambda)$等价的式(4.2.1)的右端矩阵称为$\boldsymbol{A}(\lambda)$的 Smith **标准形**, $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$称为$\boldsymbol{A}(\lambda)$的**不变因子**.

由于次数降低的极限是 0 次, 不变因子$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$中前几个也可能是 1, 例如当$\boldsymbol{A}(\lambda)$的所有元素没有公因子时, 有$d_1(\lambda) \equiv 1$.

4.2.2 用初等变换求 λ-矩阵的 Smith 标准形

本节介绍如何用初等变换求λ-矩阵的 Smith 标准形. 为清楚表示所用的初等行变换, 用r_i表示矩阵的第i行, 用$r_i \leftrightarrow r_j$表示互换矩阵的第i行与第j行, 用cr_i表示矩阵的第i行乘以常数c, 用$\varphi(\lambda)r_i + r_j$表示矩阵的第$i$行乘以$\varphi(\lambda)$加至第$j$行. 用$c_i$表示矩阵的第$i$列, 类似可得初等列变换的表示法.

在对$\boldsymbol{A}(\lambda)$用初等变换化为 Smith 标准形时, 根据$\boldsymbol{A}(\lambda)$的特点, 共有 3 种情况:

(1) $\boldsymbol{A}(\lambda)$无公因子但其元素中至少有一个非零常数;

(2) $\boldsymbol{A}(\lambda)$的元素有公因子;

(3) $\boldsymbol{A}(\lambda)$的所有元素既无非零常数又无公因子.

例 4.2.1 用初等变换把 λ-矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 2 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 + 2 & \lambda - \frac{1}{2} & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

化为 Smith 标准形.

分析: $\boldsymbol{A}(\lambda)$的元素中有非零常数 2, 可先用初等变换将常数 2 移至左上角.

解: $$\boldsymbol{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 2 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 + 2 & \lambda - \frac{1}{2} & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda & \lambda + 1 \end{bmatrix} \underset{\simeq}{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\lambda^2 + 2 \\ \lambda + 1 & \frac{1}{2}\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -\frac{\lambda}{2}c_1 + c_3 \\ -\frac{\lambda}{2}c_1 + c_2 \\ \simeq \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \lambda & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} & 2 \\ \lambda + 1 & -\frac{1}{2}\lambda^2 & -\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}-\frac{\lambda}{2}r_1+r_2\\ -\frac{\lambda+1}{2}r_1+r_3\\ \simeq\\ 2c_2,2c_3\end{array}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 & 4\\ 0 & -\lambda^2 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}c_2\leftrightarrow c_3\\ \simeq\\ \frac{1}{2}c_1\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -\lambda^2+2\lambda-1\\ 0 & -\lambda^2-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\frac{r_2}{4}(\lambda^2+\lambda)+r_3\\ \simeq\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -\lambda^2+2\lambda-1\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(-\lambda^4+\lambda^3-3\lambda^2-\lambda)\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\frac{c_2}{4}(\lambda^2-2\lambda+1)+c_3\\ \simeq\\ 4r_3\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^4+\lambda^3-3\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\frac{1}{4}c_2\\ \simeq\\ -c_3\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^4-\lambda^3+3\lambda^2+\lambda\end{bmatrix}.$$

本例题属于第 1 种情况，通过利用非零常数元素进行初等变换得到了其 Smith 标准形.

例 4.2.2 用初等变换把 λ-矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{bmatrix}$$

化为 Smith 标准形.

分析：$\boldsymbol{A}(\lambda)$的元素中有公因子 λ，所以可以用初等变换把左上角元素变成 λ.

解： $\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{bmatrix}\underset{\simeq}{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{bmatrix}2\lambda^2 & \lambda^3-\lambda\\ 3\lambda & \lambda^2+5\lambda\end{bmatrix}$

$$\underset{\simeq}{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}3\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ 2\lambda^2 & \lambda^3-\lambda\end{bmatrix}\underset{\simeq}{\frac{1}{3}c_1}\begin{bmatrix}\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ \frac{2\lambda^2}{3} & \lambda^3-\lambda\end{bmatrix}.$$

然后用初等变换把公因子λ所在的行、列的其余元素均化为零.

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\simeq\begin{bmatrix}\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ \frac{2\lambda^2}{3} & \lambda^3-\lambda\end{bmatrix}\underset{\simeq}{-\frac{2\lambda}{3}r_1+r_2}\begin{bmatrix}\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ 0 & \frac{\lambda}{3}(\lambda^2-10\lambda-3)\end{bmatrix}$$

$$\underset{\simeq}{-(\lambda+5)c_1+c_2}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda(\lambda^2-10\lambda-3)\end{bmatrix}.$$

本例题属于第 2 种情况，通过利用公因子进行初等变换得到了其 Smith 标准

形.

例 4. 2. 3　用初等变换把 λ-矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

化为 Smith 标准形.

分析：$\boldsymbol{A}(\lambda)$的元素无公因子，也无非零常数. 方法是用初等变换把矩阵的某个元素化为非零常数.

解：

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}\underset{\simeq}{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}-\lambda r_1+r_2\\ -（1+\lambda^2）r_1+r_3\\ \simeq\end{array}\begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda\\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\underset{\simeq}{-(\lambda^2+\lambda)\mathrm{c}_1+\mathrm{c}_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda\\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}.$$

剩下的右下角的二阶矩阵有公因子λ，有

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda\\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\underset{\simeq}{\mathrm{c}_2\leftrightarrow \mathrm{c}_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda\\ 0 & -\lambda^2 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\underset{\simeq}{-\lambda r_2+r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\underset{\simeq}{-(\lambda^2+\lambda-1)\mathrm{c}_2+\mathrm{c}_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}-r_2\\ -r_3\\ \simeq\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)\end{bmatrix}.$$

本例题属于第 3 种情况，通过初等变换将矩阵的某一元素化为常数再消元，得到了其 Smith 标准形.

4. 2. 3　Smith 标准形的唯一性、λ-矩阵等价的充要条件

定义 4. 2. 2　设λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$的秩为 r，对于$k\in\mathbb{Z}^+,1\le k\le r$，$\boldsymbol{A}(\lambda)$必有非零

的 k 阶子式，$\boldsymbol{A}(\lambda)$的全部 k 阶子式的首项系数为 1 的最大公因式$D_k(\lambda)$称为$\boldsymbol{A}(\lambda)$的 k 阶**行列式因子**.

由定义 4.2.2 可知，对于秩为 r 的λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$，行列式因子共有 r 个.

定理 4.2.2　等价矩阵有相同的各阶行列式因子，从而有相同的秩.

设λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$的 Smith 标准形为

$$\boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n},$$

其中，$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$是首项系数为 1 的多项式，且$d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda)$，$i = 1,2,\cdots,r-1$.

容易知道，k 阶行列式因子

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda). \tag{4.2.2}$$

定理 4.2.3　λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$的 Smith 标准形是唯一的.

证：　根据式(4.2.2)，$\boldsymbol{A}(\lambda)$的不变因子为

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda),$$
$$d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},$$
$$\vdots$$
$$d_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}.$$

这说明$\boldsymbol{A}(\lambda)$的不变因子由$\boldsymbol{A}(\lambda)$的行列式因子唯一确定，又等价矩阵有相同的各阶行列式因子，因此$\boldsymbol{A}(\lambda)$的 Smith 标准形是唯一的. ■

定理 4.2.4　λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$等价的充要条件是对于任何$k \in \mathbb{Z}^+$，它们的 k 阶行列式因子相同.

定理 4.2.5　λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$等价的充要条件是$\boldsymbol{A}(\lambda)$和$\boldsymbol{B}(\lambda)$的不变因子相同.

4.3　初等因子与相似条件

4.3.1　初等因子

行列式因子$D_k(\lambda)$和不变因子$d_k(\lambda)$都是λ的多项式，它们都是由$\boldsymbol{A}(\lambda)$的元素$a_{ij}(\lambda)$经过加、减、乘而得到的. 在复数域$\mathbb{C}$内，不变因子$d_k(\lambda)$总可以分解为互不相同的一次因式方幂的乘积，令

$$\begin{gathered}
d_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{1t}},\\
d_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{2t}},\\
\vdots\\
d_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{r2}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{rt}}.
\end{gathered}$$

因为$d_{k-1}(\lambda)|d_k(\lambda)$，$k=2,\cdots,r$，所以

$$k_{1j}\le k_{2j}\le\cdots\le k_{rj}\quad(j=1,2,\cdots,t).$$

这里的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$是$d_r(\lambda)$的全部相异零点，所以$k_{r1},k_{r2},\cdots,k_{rt}$无一为零. 但$k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{r-1,j}$中可能出现零$(j=1,2,\cdots,t)$.

若$k_{ij}=0\ (i=1,2,\cdots,r-1;\ j=1,2,\cdots,t)$，则必有

$$k_{1j}=k_{2j}=\cdots=k_{i-1,j}=0.$$

定义 4.3.1　将不变因子$d_k(\lambda)$因式分解得到的互不相同的一次因式方幂

$$\begin{cases}(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}},(\lambda-\lambda_2)^{k_{12}},\cdots,(\lambda-\lambda_t)^{k_{1t}}\\(\lambda-\lambda_1)^{k_{21}},(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}},\cdots,(\lambda-\lambda_t)^{k_{2t}}\\ \quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\(\lambda-\lambda_1)^{k_{r1}},(\lambda-\lambda_2)^{k_{r2}},\cdots,(\lambda-\lambda_t)^{k_{rt}}\end{cases}\tag{4.3.1}$$

中不是常数的因子全体叫做$\boldsymbol{A}(\lambda)$的**初等因子**.

例如，若λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$的不变因子为

$$1,\ 1,\ (\lambda-5)^2(\lambda-6)^3,\ (\lambda-5)^5(\lambda-6)^4(\lambda+1)$$

则它的初等因子为

$$(\lambda-5)^2,\ (\lambda-6)^3,\ (\lambda-5)^5,\ (\lambda-6)^4,\ (\lambda+1).$$

若两个λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$等价，根据定理 4.2.5，它们有相同的不变因子，因此它们的初等因子也相同.

但是，两个λ-矩阵的初等因子相同时，它们可能并不等价.

例如

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-4)^2 & 0\end{bmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-4)^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

这两个λ-矩阵的初等因子都是$\lambda-4,(\lambda-4)^2$，但它们的秩不相等，因此$A(\lambda)$与$B(\lambda)$并不等价.

定理 4.3.1 n 阶λ-矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的充要条件是它们的秩相等且有相同的初等因子.

证：①必要性　显然.

②充分性　设$A(\lambda)$与$B(\lambda)$的秩都为 r，并都有形如式(4.3.1)的初等因子，其中$k_{1j}\le k_{2j}\le\cdots\le k_{rj}(j=1,2,\cdots,t)$. 由初等因子定义知，$A(\lambda)$与$B(\lambda)$的 r 阶不变因子$d_r(\lambda)$与$d_r^*(\lambda)$相等，即

$$d_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{r2}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{rt}}=d_r^*(\lambda).$$

同样，对任意$k(1\le k<r)$阶不变因子，有

$$d_k(\lambda)=d_k^*(\lambda).$$

因此，由定理 4.2.5，可得$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$. ■

例 4.3.1 已知 5×6 λ-矩阵$A(\lambda)$的秩为 4，其初等因子为

$$\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda-1,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^3,(\lambda+2\mathrm{i})^3,(\lambda-2\mathrm{i})^3,$$

试求$A(\lambda)$的 Smith 标准形.

分析：因为矩阵$A(\lambda)$的秩为 4，所以待求的不变因子是$d_1(\lambda)$至$d_4(\lambda)$，求$d_4(\lambda)$应包含所有最高次幂初等因子，求$d_3(\lambda)$应能整除$d_4(\lambda)$，且能被$d_2(\lambda)$整除，以此类推.

解：由题意，$A(\lambda)$的不变因子为:

$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda+2\mathrm{i})^3(\lambda-2\mathrm{i})^3,$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2,$$

$$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1),$$

$$d_1(\lambda)=1.$$

故$A(\lambda)$的 Smith 标准形为

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda^2+4)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

例 4.3.2　求λ-矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-a & b_1 & & & \\ & \lambda-a & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & \lambda-a \end{bmatrix}$$

的行列式因子、不变因子和初等因子，其中，$b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$是不等于 0 的常数.

解：　$\boldsymbol{A}(\lambda)$的行列式因子为

$$D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = \cdots = D_{n-1}(\lambda) = 1, \quad D_n(\lambda) = (\lambda-a)^n,$$

于是$\boldsymbol{A}(\lambda)$的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1,\ d_n(\lambda) = (\lambda-a)^n.$$

初等因子只有一个：$(\lambda-a)^n$.

定理 4.3.2　设λ-矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}(\lambda) & \\ & \boldsymbol{C}(\lambda) \end{bmatrix}$$

为分块对角矩阵，则$\boldsymbol{B}(\lambda)$和$\boldsymbol{C}(\lambda)$的初等因子的全体是$\boldsymbol{A}(\lambda)$的全部初等因子.

定理 4.3.2 体现了初等因子的价值，对于分块对角矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}(\lambda) & \\ & \boldsymbol{C}(\lambda) \end{bmatrix},$$

不能从$\boldsymbol{B}(\lambda)$与$\boldsymbol{C}(\lambda)$的不变因子求得$\boldsymbol{A}(\lambda)$的不变因子，但可以从$\boldsymbol{B}(\lambda)$与$\boldsymbol{C}(\lambda)$的初等因子得到$\boldsymbol{A}(\lambda)$的初等因子.

定理 4.3.2 可推广为如下定理.

定理 4.3.3　若λ-矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1(\lambda) & & & \\ & \boldsymbol{A}_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_t(\lambda) \end{bmatrix},$$

则$\boldsymbol{A}_1(\lambda), \boldsymbol{A}_2(\lambda), \cdots, \boldsymbol{A}_t(\lambda)$的初等因子的全体是$\boldsymbol{A}(\lambda)$的全部初等因子.

例 4.3.3　求λ-矩阵

$$
\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & (\lambda+1)^2 & \lambda+1 \\ & & -2 & \lambda-2\end{bmatrix},
$$

的初等因子、不变因子和 Smith 标准形.

解: 记$\boldsymbol{A}_1(\lambda)=\lambda^2+\lambda$, $\boldsymbol{A}_2(\lambda)=\lambda$, $\boldsymbol{A}_3(\lambda)=\begin{bmatrix}(\lambda+1)^2 & \lambda+1 \\ -2 & \lambda-2\end{bmatrix}$, 则

$$
\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1(\lambda) & & \\ & \boldsymbol{A}_2(\lambda) & \\ & & \boldsymbol{A}_3(\lambda)\end{bmatrix}.
$$

对于$\boldsymbol{A}_3(\lambda)$, 其初等因子为$\lambda$, $\lambda-1$, $\lambda+1$, 由定理 4.3.3 可得$\boldsymbol{A}(\lambda)$的初等因子为λ, λ, λ, $\lambda-1$, $\lambda+1$, $\lambda+1$.

因$\boldsymbol{A}(\lambda)$的秩为 4, 可得$\boldsymbol{A}(\lambda)$的不变因子为

$d_4(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$, $d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$, $d_2(\lambda)=\lambda$, $d_1(\lambda)=1$.

故$\boldsymbol{A}(\lambda)$的 Smith 标准形为

$$
\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda(\lambda+1) & \\ & & & \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)\end{bmatrix}.
$$

对于一个数字矩阵$\boldsymbol{A}$, 可以简称$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$的不变因子为$\boldsymbol{A}$的不变因子, 简称$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$的初等因子为$\boldsymbol{A}$的初等因子.

例 4.3.4 已知$\boldsymbol{A}$的初等因子为$\lambda,\lambda,\lambda^2,(\lambda-1)^2,\lambda+1$, 求$\boldsymbol{A}$的阶数、$\boldsymbol{A}$的不变因子及 Smith 标准形.

分析: 若$\boldsymbol{A}$为 n 阶矩阵, 则$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$是首项系数为 1 的 n 次多项式. 由于$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$等价于其 Smith 标准形, 它们的各阶行列式因子相等, 其中第 n 阶行列式因子（也即第 n 阶行列式）也相等, 由 Smith 标准形计算第 n 阶行列式, 可得$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$等于不变因子之积, 也等于初等因子之积.

解: 因为$\boldsymbol{A}$的初等因子乘积 $\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda^2\cdot(\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1)$ 是 7 次多项式, 故$\boldsymbol{A}$是 7 阶的.

$\boldsymbol{A}$的不变因子为

$$
\underbrace{1,1,1,1}_{4\text{个}},\lambda,\lambda,\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1)
$$

因此, $\boldsymbol{A}$的 Smith 标准形是

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_4 & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{E}_4$是 4 阶单位矩阵.

例 4.3.5 数字矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)^2(\lambda-2)^3$，求$\boldsymbol{A}$的阶数、$\boldsymbol{A}$的初等因子和不变因子.

解： $\boldsymbol{A}$是 5 阶矩阵，有如下几种情况:

(1) $\boldsymbol{A}$的初等因子是 $\lambda+1,\lambda+1,\lambda-2,\lambda-2,\lambda-2.$

$\boldsymbol{A}$的不变因子是 $1,1,\lambda-2,(\lambda+1)(\lambda-2),(\lambda+1)(\lambda-2).$

(2) $\boldsymbol{A}$的初等因子是 $\lambda+1,\lambda+1,\lambda-2,(\lambda-2)^2.$

$\boldsymbol{A}$的不变因子是 $1,1,1,(\lambda+1)(\lambda-2),(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$

(3) $\boldsymbol{A}$的初等因子是 $\lambda+1,\lambda+1,(\lambda-2)^3.$

$\boldsymbol{A}$的不变因子是 $1,1,1,\lambda+1,(\lambda+1)(\lambda-2)^3.$

(4) $\boldsymbol{A}$的初等因子是 $(\lambda+1)^2,\lambda-2,\lambda-2,\lambda-2.$

$\boldsymbol{A}$的不变因子是 $1,1,\lambda-2,\lambda-2,(\lambda-2)(\lambda+1)^2.$

(5) $\boldsymbol{A}$的初等因子是 $(\lambda+1)^2,\lambda-2,(\lambda-2)^2.$

$\boldsymbol{A}$的不变因子是 $1,1,1,\lambda-2,(\lambda-2)^2(\lambda+1)^2.$

(6) $\boldsymbol{A}$的初等因子是 $(\lambda+1)^2,(\lambda-2)^3.$

$\boldsymbol{A}$的不变因子是 $1,1,1,1,(\lambda+1)^2(\lambda-2)^3.$

4.3.2 数字矩阵相似的充要条件

数字矩阵$\boldsymbol{A}$的特征矩阵$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$是研究数字矩阵$\boldsymbol{A}$的重要工具，通过特征矩阵可以判断数字矩阵是否相似.

引理 4.3.1 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个n阶数字矩阵，则$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$的充要条件是$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\sim(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$.

证： ①必要性 设$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则存在$\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}_n^{n\times n}$，满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},$$

故

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P},$$

即

$$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) \sim (\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}).$$

②充分性　设

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B},$$

故

$$\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B},$$

因此

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},$$

即$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. ■

定理 4.3.5　$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$的充要条件是$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) \simeq (\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$.

注意，等价比相似条件弱.

定理 4.3.5 表明：数字矩阵相似可以归结为它们的特征矩阵等价.

对于一个 n 阶数字矩阵$\boldsymbol{A}$，有$\operatorname{rank}(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$，即 n 阶特征矩阵的秩等于 n，于是由定理 4.3.5 与定理 4.3.1 可得定理 4.3.6.

定理 4.3.6　n 阶矩阵$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$的充要条件是$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$有相同的初等因子.

由定理 4.3.5 与定理 4.2.5 可得定理 4.3.7.

定理 4.3.7　n 阶矩阵$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$的充要条件是$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$有相同的不变因子.

使用线性代数课程中的方法判断数字矩阵是否相似较繁琐，定理 4.3.6 和 4.3.7 将λ-矩阵作为研究数字矩阵的工具，给出了判断数字矩阵是否相似的更简便的方法.

4.4　矩阵的 Jordan 标准形

4.4.1　Jordan 标准形的定义及求解

定义 4.4.1　称n_i阶矩阵

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$$

为 Jordan 块.

定义 4.4.2　设$\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_s$为 Jordan 块，称准对角矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{bmatrix}$$

为 Jordan 标准形.

在例 4.3.2 中已得到 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_i$ 的初等因子为$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$. (此处使用了简称，实际上是$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_i)$的初等因子)

根据定理 4.3.3, Jordan 标准形的初等因子为$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$. 因此，结合定理 4.3.6 可以得到下述定理.

定理 4.4.1　设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}$的初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

则$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{J}$.

这里

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}\qquad (i=1,2,\cdots,s),$$

称$\boldsymbol{J}$是矩阵$\boldsymbol{A}$的 **Jordan 标准形**.

若$n_i=1$，则$\boldsymbol{J}_i$是一阶 Jordan 块，当矩阵$\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形中的 Jordan 块全是一阶时，$\boldsymbol{J}$便是对角矩阵，因此可得如下定理.

定理 4.4.2　矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$可对角化的充要条件是$\boldsymbol{A}$的初等因子都是一次因式.

例 4.4.1　求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形.

分析：若求 Jordan 标准形，应先确定 Jordan 块，即要求出各个 Jordan 块的λ_i和n_i，这可以从求初等因子开始，这种方法可称为基于矩阵初等因子的方法.

解： 先求$\boldsymbol{A}$的初等因子. 对$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$运用初等变换可得

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)^2\end{bmatrix},$$

因此，$\boldsymbol{A}$的初等因子是

$$\lambda-1,(\lambda-1)^2,$$

故$\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形是

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \\ & \boldsymbol{J}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

注意, Jordan 标准形中的 Jordan 块的排列次序并不唯一，本例中的 Jordan 块$\boldsymbol{J}_1$和$\boldsymbol{J}_2$可以互换位置，因此所求得的 Jordan 标准形并不唯一.

4.4.2 相似变换矩阵的求法

由定理 4.4.1 可知，任何一个方阵$\boldsymbol{A}$都相似于其 Jordan 标准形$\boldsymbol{J}$，上一小节介绍了方阵$\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形$\boldsymbol{J}$的求法，但如何由方阵$\boldsymbol{A}$相似变换至$\boldsymbol{J}$，即求$\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}_n^{n\times n}$，使其满足$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$？下面通过例题介绍求相似变换矩阵$\boldsymbol{P}$的方法，相似变换矩阵可简称为变换矩阵.

例 4.4.2 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}17 & 0 & -25\\ 0 & 1 & 0\\ 9 & 0 & -13\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形，并求变换矩阵$\boldsymbol{P}$.

解： $\boldsymbol{A}$的特征矩阵

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\simeq\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2\end{bmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{bmatrix},$$

此即

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$AP = PJ, \tag{1}$$

令
$$P = (X_1, X_2, X_3), \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，得

$$A(X_1, X_2, X_3) = (X_1, X_2, X_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

比较式(3)两端，得

$$AX_1 = X_1,\ AX_2 = 2X_2,\ AX_3 = X_2 + 2X_3,$$

即

$$(E - A)X_1 = \mathbf{0},\quad (2E - A)X_2 = \mathbf{0},\quad (2E - A)X_3 = -X_2.$$

由齐次线性方程组$(E - A)X = \mathbf{0}$可求得

$$X_1 = (0,1,0)^{\mathrm{T}},$$

由齐次线性方程组$(2E - A)X = \mathbf{0}$可求得

$$X_2 = (5,0,3)^{\mathrm{T}},$$

将X_2代入$(2E - A)X = -X_2$可求得

$$X_3 = (2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

所以

$$P = (X_1, X_2, X_3) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 4. 4. 3 求变换例 4.4.1 中的矩阵A为 Jordan 标准形的变换矩阵P.

解: 由例 4.4.1 的计算结果可知

$$A \sim J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故存在矩阵$P \in \mathbb{C}_3^{3\times 3}$，满足

$$AP = PJ, \tag{1}$$

令
$$P = (X_1, X_2, X_3),$$

将P代入式(1)，得

$$(AX_1, AX_2, AX_3) = (X_1, X_2, X_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

比较式(2)两边，得

$$\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{X}_2,\ \boldsymbol{AX}_3=\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3,$$

即

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{0},\quad (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{0},\quad (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_3=-\boldsymbol{X}_2.$$

显然，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$是$\boldsymbol{A}$的特征值为 1 的两个线性无关的特征向量.

解方程组

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},$$

可求得两个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

若取$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{\xi}_2$，代入$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_3=-\boldsymbol{X}_2$，该方程组无解，但并不能因此认为变换矩阵$\boldsymbol{P}$不存在．因为$\boldsymbol{A}$的特征子空间（特征向量和零向量生成的子空间)是二维的，即$\boldsymbol{A}$的线性无关特征向量不仅是$\boldsymbol{\xi}_1$和$\boldsymbol{\xi}_2$．它们的线性组合也是该特征值对应的特征向量．取$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{\xi}_1+k\boldsymbol{\xi}_2\ (k\neq 0)$，则

$$\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{\xi}_1+k\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}3k-1\\1\\k\end{bmatrix},$$

代入$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_3=-\boldsymbol{X}_2$，解得

$$k=1,$$

$$x_1=-x_2+3x_3-1,\quad (x_2,x_3\text{为自由未知量})$$

则方程组有解

$$\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{X}_3=c_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\quad (c_2,c_3\text{为不同时为 0 的数})$$

取$\boldsymbol{X}_3$的一个解$\boldsymbol{X}_3=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$即可.

于是求得

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&2&2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

容易验证$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$.

综上, Jordan 标准形的相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的求解步骤为:

① 若$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{r\times r}$，由$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$，得$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PJ}$.

② 令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_r)$，得$(\boldsymbol{AX}_1,\boldsymbol{AX}_2,\cdots,\boldsymbol{AX}_r)=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_r)\boldsymbol{J}$，展开等式两端得一组方程组.

③ 在上述每个方程组中，只要依次各取一个解分别作为列向量$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_r$，构成矩阵$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_r)$即可.

4.5 应用实例

矩阵的相似标准形可应用于矩阵化简、矩阵计算、线性代数方程组数值解法、线性微分方程组求解等方面，在物理学、力学、工程技术等领域都有重要应用. 本节介绍 Jordan 标准形在微分方程组求解、矩阵计算方面的应用.

4.5.1 常系数线性微分方程组的求解

已知常系数线性微分方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{cases},\tag{4.5.1}$$

其中，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$均为常数.

将此方程写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{AX},\tag{4.5.2}$$

这里

$$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{C}^{n\times n},\ \boldsymbol{X}=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{T}}.$$

设$\boldsymbol{J}$是$\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形，则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}.\tag{4.5.3}$$

令

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY},\quad \boldsymbol{Y}=(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))^{\mathrm{T}},\tag{4.5.4}$$

将式(4.5.4)代入式(4.5.2)，得

$$\boldsymbol{P}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{APY}. \tag{4.5.5}$$

上式两端左乘$\boldsymbol{P}^{-1}$，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APY}=\boldsymbol{JY}. \tag{4.5.6}$$

为求原常系数线性微分方程组的解，可先通过式(4.5.6)求得$\boldsymbol{Y}$，再通过式(4.5.4)求得原方程的解$\boldsymbol{X}$.

例 4. 5. 1　求微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1-2x_2+6x_3\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_1+3x_3\\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=-x_1-x_2+4x_3\end{cases}$$

的解.

解：　令$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则方程组可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX},$$

根据例 4.4.3 的结果可知

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&2&2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&-2\\-1&-1&3\end{bmatrix}.$$

令$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，则由式(4.5.6)可得

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_1,\qquad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=y_2+y_3,\ \frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}=y_3,$$

不难求得

$$y_1=k_1\mathrm{e}^t,\ y_3=k_3\mathrm{e}^t,\ y_2=(k_3t+k_2)\mathrm{e}^t,$$

代入$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，得

$$x_1=-k_1\mathrm{e}^t+2k_3\mathrm{e}^t+2(k_3t+k_2)\mathrm{e}^t,$$

$$x_2=k_1\mathrm{e}^t+(k_3t+k_2)\mathrm{e}^t,$$

$$x_3=k_3\mathrm{e}^t+(k_3t+k_2)\mathrm{e}^t,$$

其中，k_1,k_2,k_3均为任意常数.

4.5.2 矩阵计算

矩阵$\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形$\boldsymbol{J}$是准对角形矩阵，便于进行高次幂运算，可将矩阵$\boldsymbol{A}$用$\boldsymbol{J}$表示后进行原运算，变换矩阵$\boldsymbol{P}$在运算过程中常可以互相抵消.

例 4.5.2 已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&1\\-1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{100}$.

解： 先求$\boldsymbol{A}$的初等因子，然后求$\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形$\boldsymbol{J}$.

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&1&\\&2&\\&&4\end{bmatrix}.$$

设$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，由于$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}$. 于是有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=4\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},$$
$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

解得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

故

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&1\\1&0&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&1\\1&0&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&\\&2&\\&&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{100}=\begin{bmatrix}0&-\dfrac{1}{2}&1\\1&0&0\\0&\dfrac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{100}&100\cdot2^{99}&\\&2^{100}&\\&&4^{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\\dfrac{1}{2}&0&\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2^{99} + 2^{199} & 0 & -2^{99} + 2^{199} \\ -100 \cdot 2^{99} & 2^{100} & 100 \cdot 2^{99} \\ -2^{99} + 2^{199} & 0 & 2^{99} + 2^{199} \end{bmatrix}.$$

本 章 小 结

本章首先介绍了多项式矩阵（λ-矩阵）的概念、λ-矩阵的初等变换及λ-矩阵的等价. 给出了一类常用的相似标准形——Smith 标准形. Smith 标准形是非零$m \times n$阶λ-矩阵的等价矩阵, 介绍了用初等变换求λ-矩阵的 Smith 标准形的方法, 基于 Smith 标准形阐述了不变因子、行列式因子、初等因子的概念，此外，给出了λ-矩阵等价的几个充要条件和矩阵相似的几个充要条件.

Jordan 标准形是方阵的相似矩阵, 给出了 Jordan 标准形的定义、求法和相似变换矩阵的求法, 并介绍了 Jordan 标准形的应用.

本章介绍的理论和方法可以应用于λ-矩阵和数字矩阵, 是重要的数学工具.

学习完本章内容后，应能达到如下基本要求：

1. 能求解λ-矩阵的 Smith 标准形、能求解λ-矩阵的不变因子、行列式因子和初等因子，理解这几类因子之间的关系.

2. 掌握λ-矩阵等价的几个充要条件、矩阵相似的几个充要条件.

3. 掌握矩阵的 Jordan 标准形的定义、能求解矩阵的 Jordan 标准形及其相似变换矩阵.

4. 了解 Jordan 标准形的应用.

习 题 4

4-1 用初等变换求下列λ-矩阵的 Smith 标准形.

(1) $\begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^3 \end{bmatrix}$

4-2 用初等变换求λ-矩阵$\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}$的 Smith 标准形.

4-3 已知方阵$\boldsymbol{A} \neq 0, \boldsymbol{A}^k = 0, k \geq 2$. 证明: $\boldsymbol{A}$不能与对角矩阵相似.

4-4 已知方阵$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{E}, k \in \mathbb{Z}^+$. 证明: $\boldsymbol{A}$可以与对角矩阵相似.

4-5 已知方阵$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. 证明: $\boldsymbol{A}$与对角矩阵$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$相似.

4-6 求λ-矩阵$\begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$的不变因子和行列式因子.

4-7 用初等变换将λ-矩阵$\begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$化为 Smith 标准形.

4-8 用初等变换将λ-矩阵$\begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & 1 & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda^3 & \lambda(\lambda-1) & \lambda^2 \end{bmatrix}$化为 Smith 标准形.

4-9 求下列矩阵的 Jordan 标准形.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

4-10 求下列矩阵的 Jordan 标准形.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$

4-11 求下列矩阵的 Jordan 标准形.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & \\ -4 & -1 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{bmatrix}$　　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

4-12　求下列矩阵的 Jordan 标准形及其变换矩阵$\boldsymbol{P}$.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$　　　(2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　　　(4) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

4-13　试写出 Jordan 标准形均为$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$的两个矩阵$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$.

4-14　已知矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{100}$.

4-15　已知n阶数字矩阵$\boldsymbol{A}$的初等因子为$\lambda, \lambda^3, (\lambda+1)^3$，试求$\boldsymbol{A}$的不变因子和$\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形.

4-16　已知n阶数字矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^2$，试求$\boldsymbol{A}$的不变因子、初等因子和$\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形.