NO.
DATE

图论第二次理论作业

(二) 已知图中任何两条边的权值不相等，证明以下两个结论成立：
·任何割中最短的边在所有的最小生成树中
·任何圈的最长边不在任何一棵最小生成树中

解(1)：设一个割把图G分为(S,T)，边(u,v)是这个割中最短的边，且u∈S，则假设该边不在G的一棵最小生成树中，由生成树的定义可得，必定存在一点w∈S，(w,v)在生成树上且比(u,v)短，矛盾，边(u,v)在生成树上

解(2) 由最小生成树的定义，任何圈都至少会被删去一条边，假设生成树中包含一圈中的最长边，若将该边删去，添加该圈中另一条之前被删去的边，则所得的生成树权值更小，与最小生成树定义矛盾

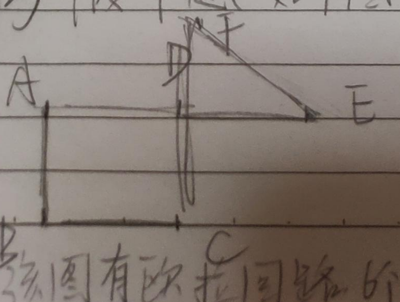
(三) 给定任一有偶数条边且每个顶点度数为偶数的连通图G，证明可以把每条边染成黑白两种颜色中的一种，对每个顶点，与之相连的黑边与白边一样多

证明：由G的定义可得出，G中含有欧拉回路，从任一起点走欧拉回路，在此过程中交替将边染为白色和黑色，因边为偶数，因此走过的第一条边与最后一条边颜色必然不同，而途中走入一个顶点与走出一个顶点，使该顶点增加的黑、白色边数相同，因而对起点(终点)来说，相连黑边与白边一样多，又欧拉图中的任意点都可作起(终)点，故得证

(四) $G=(V,E)$ 为简单Euler图，证明或推翻以下推断
·若G是偶图，则 $m=|E|$ 为偶数
·若 $n=|V|$ 是偶数，则m也是偶数
·e与f为关联的两条边，他们必然连续出现在某条Euler回路里

(1) 将偶图G分为两部分S和T，由偶图的定义可知，S和T内部的节点都没有直接相连的边。从一个S节点出发走欧拉回路，下一步一定是走到T中的顶点，再下一步一定到S，依此类推，并最终回到S中的起点，m显然为偶数

(2) 假命题，如下图



该图有欧拉回路，6个顶点，7条边

(3) 由(2)中图，AD与CD相关联，但他们在任意欧拉回路中都不连续出现

NO.

DATE

(五) 给定每边长度均为1的连通偶图G及顶点 $v \in V(G)$，证明对G中所有的边 $xy \in E(G)$，v到x的最短路不可能和v到y的最短路一样长

证明：由偶图的定义，可将图G分为两个部分S和T，S和T的内部节点没有直接相连的边，对于任意的边xy，不妨设 $x \in S$，$y \in T$，$v \in S$，由于偶图中的路径一定是交替从S到T和从T到S的，所以vx长度一定为偶数，vy长度一定为奇数，所以两者一定不一样长

(六) 证明Peterson图不是H图

证明：彼得森图中没有长度为3和4的回路。假设彼得森图包含10条边的而彼得森图中剩余的5条边分别连接该哈密顿回路中不相邻的点，因为彼得森图的图中每个点的度数为3，所以该哈密顿回路中的每个点均关联一条剩余边。每条剩余边的两个端点的距离至少为4，否则出现长度为3或4的回路。设v是哈密顿回路中与e的一个端点距离为5的点，则由v关联的剩余边和e可以找到长度为3或4的点，矛盾。

(七) 对 $n \geq 4$，如果n阶完全图 K_n 可以被划分成边不交的长度为4的圈，证明 $n = 1 \bmod 8$

证明：n阶完全图的边数 $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$，设该图可以划分为k个边不交的长度为4的圈，则有 $E = 4k$，所以有 $\frac{n(n-1)}{2} = 4k$，且该图为欧拉图，因此每个顶点度数均为偶数，有 $(n-1) \bmod 2 = 0$，得n为奇数，且 $\frac{n(n-1)}{8} = k$，所以 $(n-1) \bmod 8 = 0$，即 $n = 1 \bmod 8$