参 考 答 案

第 1 章 线性空间

1-1

（1）不是，对数乘运算不封闭；

（2）是

（3）不是，对加法运算或对数乘运算不封闭；

（4）是

（5）是

1-2　$(2,3,-1,-1)^T$

1-3　$[3,-3,2,-1]^T$

1-4　坐标$x_1 = b + c + d - 2a$；$x_2 = a - c$；$x_3 = a - d$；$x_4 = a - b$

1-5　$[3,6,6,2]^T$.

1-6

（1）$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 & -1/2 & -2 \\ 3/2 & 1 & 5/2 & 4 \\ 1/2 & 2 & 9/2 & 5 \\ 3/2 & 2 & 11/2 & 8 \end{bmatrix}$

（2）　$(\frac{4}{9}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_3 - \frac{11}{9}x_4, \frac{1}{27}x_1 + \frac{4}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{23}{27}x_4，\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4，-\frac{7}{27}x_1 - \frac{1}{9}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{26}{27}x_4\ )^T$

1-7

（1）和空间的维数是 3，基为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1$

（2）交空间的维数是 1，基为 $[-5,2,3,4]^T$

1-8

（1）　空间 V_1 的基：$\boldsymbol{\xi}_1 = [2,1,0,0]^T$,　　　$\boldsymbol{\xi}_2 = [2,0,1,1]^T$, dim($V_1$)=2。

空间 V_2 的基：$\boldsymbol{\xi}_3 = [1,1,0,0]^T$,　$\boldsymbol{\xi}_4 = [-1,0,1,0]^T$,　$\boldsymbol{\xi}_5 = [-2,0,0,1]^T$, dim($V_2$)=3

（2）$V_1 \cap V_2$的基为$(-8,-5,1,1)^T, \dim(V_1 \cap V_2) = 1$

（3）基为$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_4$，$\dim(V_1 + V_2) = 4$

1-9　基是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，　维数是 3.

1-10

（1）$V_1 \cap V_2$的基为$(-1,1,-3,1)^{\mathrm{T}}$，维数是 1.

（2）基为$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1$(也可以是其他组合)，$\dim(V_1 + V_2) = 3$.

1-11

（1）V_1 的基为$\alpha_1,\alpha_2,\dim(V_1)=2$; V_2 的基为$\boldsymbol{\beta}_1,\dim(V_2)=1$

（2）$V_1\cap V_2$只有零向量,维数为 0

（3）$\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2$的基是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$,　$\dim(V_1+V_2)=3$

1-14

证： 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，可得

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$$

显然，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$

$$(k\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}((k\boldsymbol{A})^T\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})=k\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})=\mathrm{tr}((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T\boldsymbol{C})=\mathrm{tr}((\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{C})$$

$$=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$$

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\geq 0$ 等号成立当且仅当$a_{ij}=0,\forall i,j=1,2,\cdots,n$，即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$

综上，$\mathbb{R}^{n\times n}$是欧氏空间.

1-17　$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)^{\mathrm{T}}$,　$(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0)^{\mathrm{T}},(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{3}{2\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$

1-18　$(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0)^{\mathrm{T}}$,　$(\frac{2}{\sqrt{30}},-\frac{1}{\sqrt{30}},-\frac{4}{\sqrt{30}},\frac{3}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$

1-19　$[0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0,0]^T,[-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{5},0]^T,[\frac{7}{\sqrt{315}},-\frac{6}{\sqrt{315}},\frac{6}{\sqrt{315}},\frac{13}{\sqrt{315}},\frac{5}{\sqrt{315}}]^T$

注：部分习题的答案并不唯一，如空间的基、标准正交基不唯一.

第 2 章 线性变换

2-1　$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{n}\end{bmatrix}_{(n+1)\times n}$$

2-2

（1）$N(\sigma)$的基是$(-5,4,4)^{\mathrm{T}}$，$\dim N(\sigma)=1$

（2）$R(\sigma)=\mathbb{R}^2$，基是$(1,0)^{\mathrm{T}},(0,1)^{\mathrm{T}}$，$\dim R(\sigma)=2$

2-6

（1） $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & -6 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

（2）线性变换σ的核是零空间. 线性变换σ的值域是线性空间$\mathbb{R}^3$.

2-7

（1）$N(\sigma)=\mathrm{span}\{(-2,2,3)^T\}$；$R(A)=\mathrm{span}\{(0,0,1)^T,(1,2,0)^T\}$

（2）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2-8　$\mathrm{R(A)}=\mathrm{span}\{(1,0,1)^\mathrm{T},(1,4,2)^\mathrm{T},(6,2,6)^\mathrm{T}\}$；N(A)=$\{\mathbf{0}\}$.

2-9　$\mathrm{R(A)}=\mathrm{span}\{(0,-1,3,6)^\mathrm{T},(2,-4,1,5)^\mathrm{T},(-4,5,7,-10)^\mathrm{T}\}$；N(A)=$\{\mathbf{0}\}$.

2-10　$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值为λ^{-1}, 对应的特征向量是$\boldsymbol{\alpha}$.

2-13　$\boldsymbol{A}$的特征值：　$\lambda_1=\lambda_2=-1$,　$\lambda_3=2$;

对应于$\lambda=-1$的特征向量：　$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T$；$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^T$；对应于$\lambda=-1$的全部特征向量为：$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，其中，$k_1$，$k_2$是不同时为零的常数.

对应于$\lambda=2$的特征向量：$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^T$；对应于$\lambda=2$的全部特征向量为：$k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中$k_3$是不为零的常数.

2-14　$\boldsymbol{A}$的特征值：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$；

对应于$\lambda=2$的线性无关的特征向量：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^\mathrm{T}$；$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^\mathrm{T}$

对应于$\lambda=2$的全部特征向量为：$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，其中，$k_1$，$k_2$是不同时为零的常数.

2-15　$\boldsymbol{A}$的特征值：　$\lambda_1=\lambda_2=1$,　$\lambda_3=-1$

对应于$\lambda=-1$的线性无关的特征向量：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^T$;

对应于$\lambda=-1$的全部特征向量为：$k_1\boldsymbol{\alpha}_1$，其中k_1是不为零的任意常数.

对应于$\lambda=1$的线性无关的特征向量：$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$；$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^T$

对应于$\lambda=1$的全部特征向量为：$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中，$k_2$，$k_3$是不同时为零的任意常数.

2-17　σ的特征根为：　$\lambda_1=\lambda_2=1$,　$\lambda_3=-1$;

① 当$\lambda=-1$时，$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$的基础解系：$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,-1)^T$；所以$\sigma$对应特征根$\lambda=-1$的全部特征向量为：$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{\xi}_1=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)$ ，其中k_1是不为零的任意常数.

② 当$\lambda=1$时，$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$的基础解系：$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^T$；$\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,0)^T$

所以σ对应特征根$\lambda=1$的全部特征向量为：

$$k_2(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{\xi}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{\xi}_3=k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3\boldsymbol{\alpha}_2$$

其中，k_2，k_3是不同时为零的任意常数.

2-18

(1) 是;

(2) 不是, 不满足可加性;

(3) 当$\boldsymbol{\alpha_0} = \mathbf{0}$时是; 当$\boldsymbol{\alpha_0} \neq \mathbf{0}$时不是.

注：部分习题答案的表达形式并不唯一.