计算机图形学

阴影与全局光照

陶钧

taoj23@mail.sysu.edu.cn

中山大学 计算机学院

国家超级计算广州中心

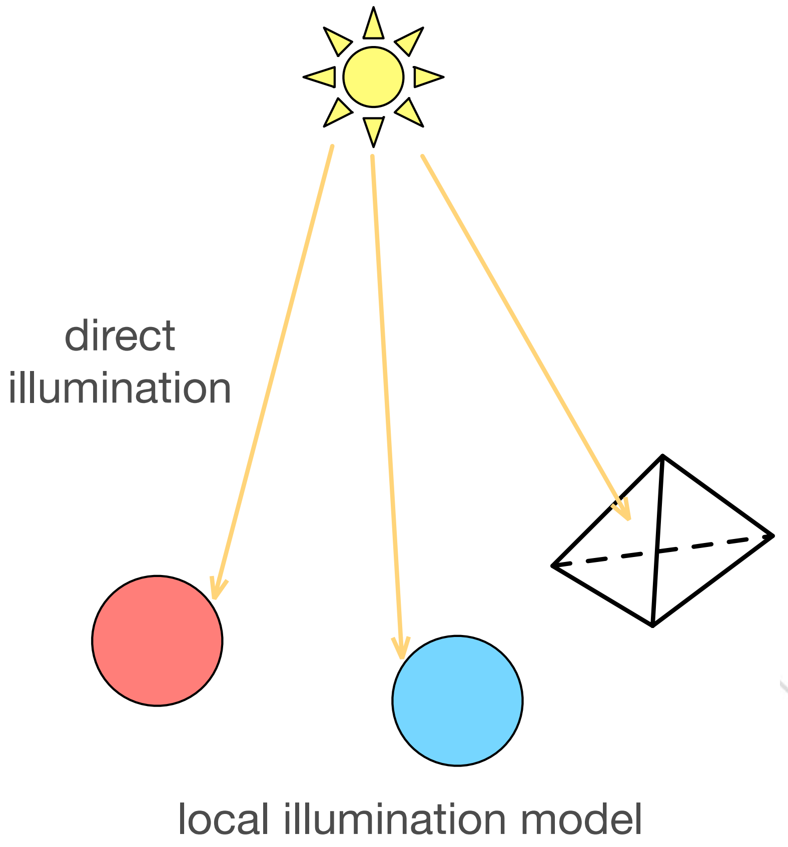
概要

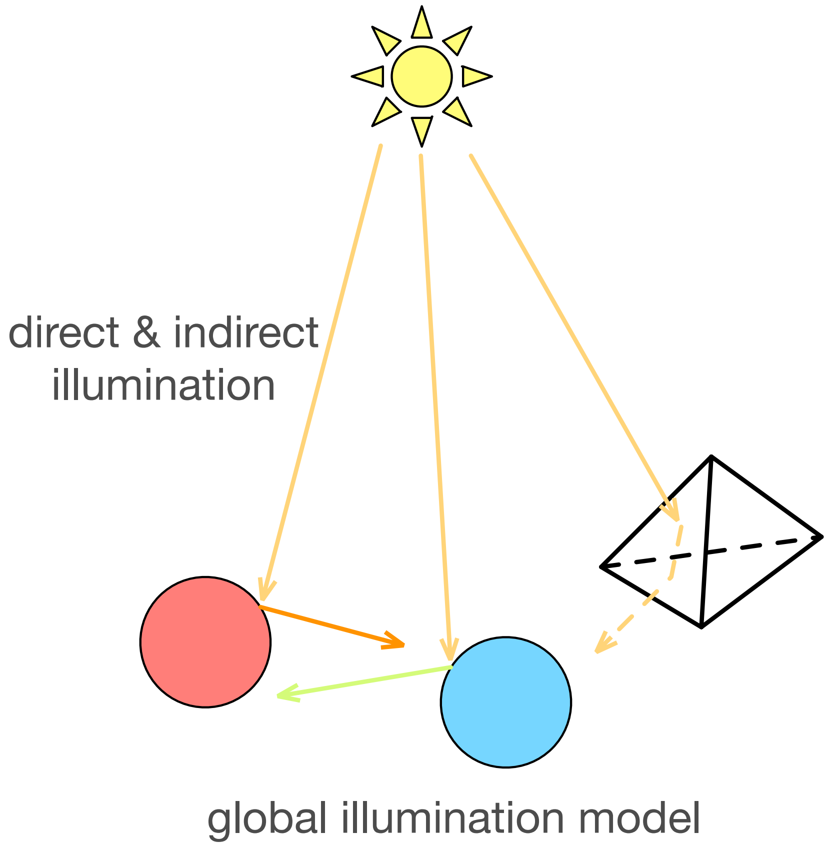
- 局部光照模型下的阴影产生
- 全局光照
  - – Ray tracing
  - – Radiosity
- 射线与物体求交

局部 vs 全局光照

光照模型

- 局部光照模型：只考虑由光源直接发出的光
- 全局光照模型：考虑通过别的物体/自身对光的透射和反射

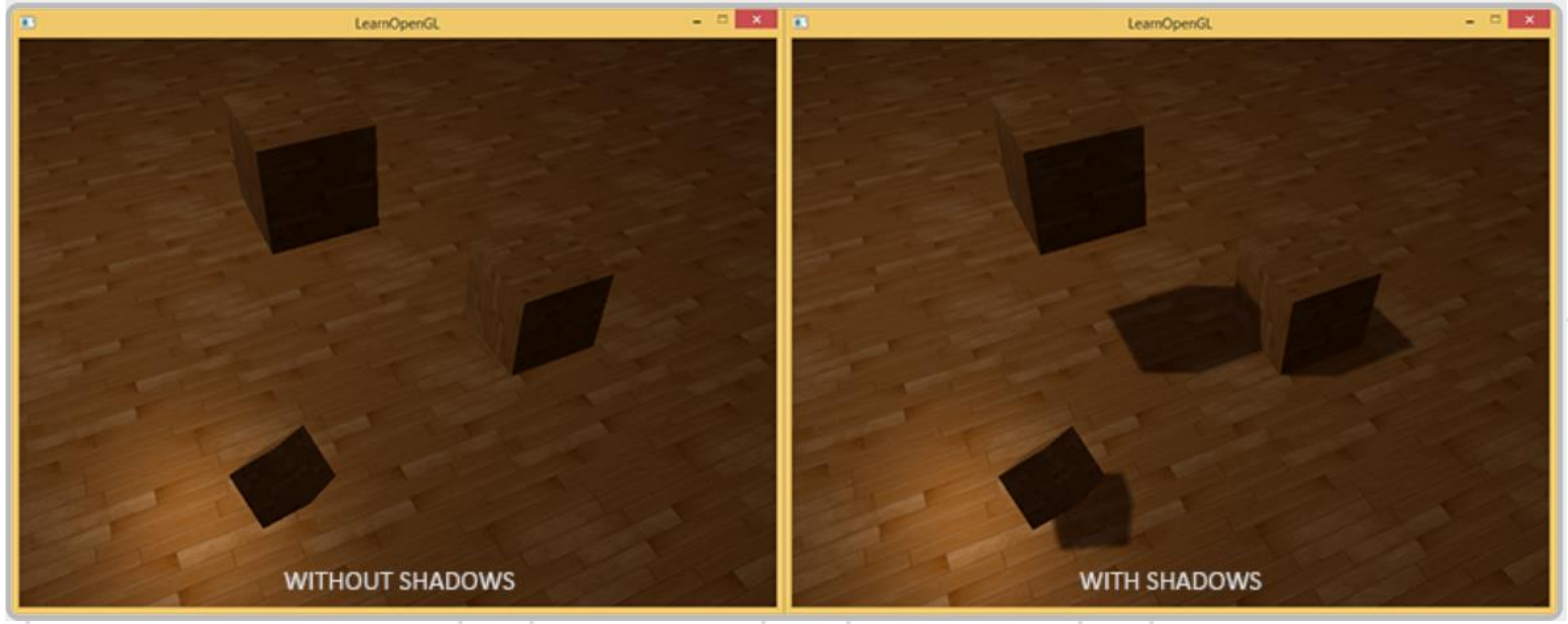




产生阴影

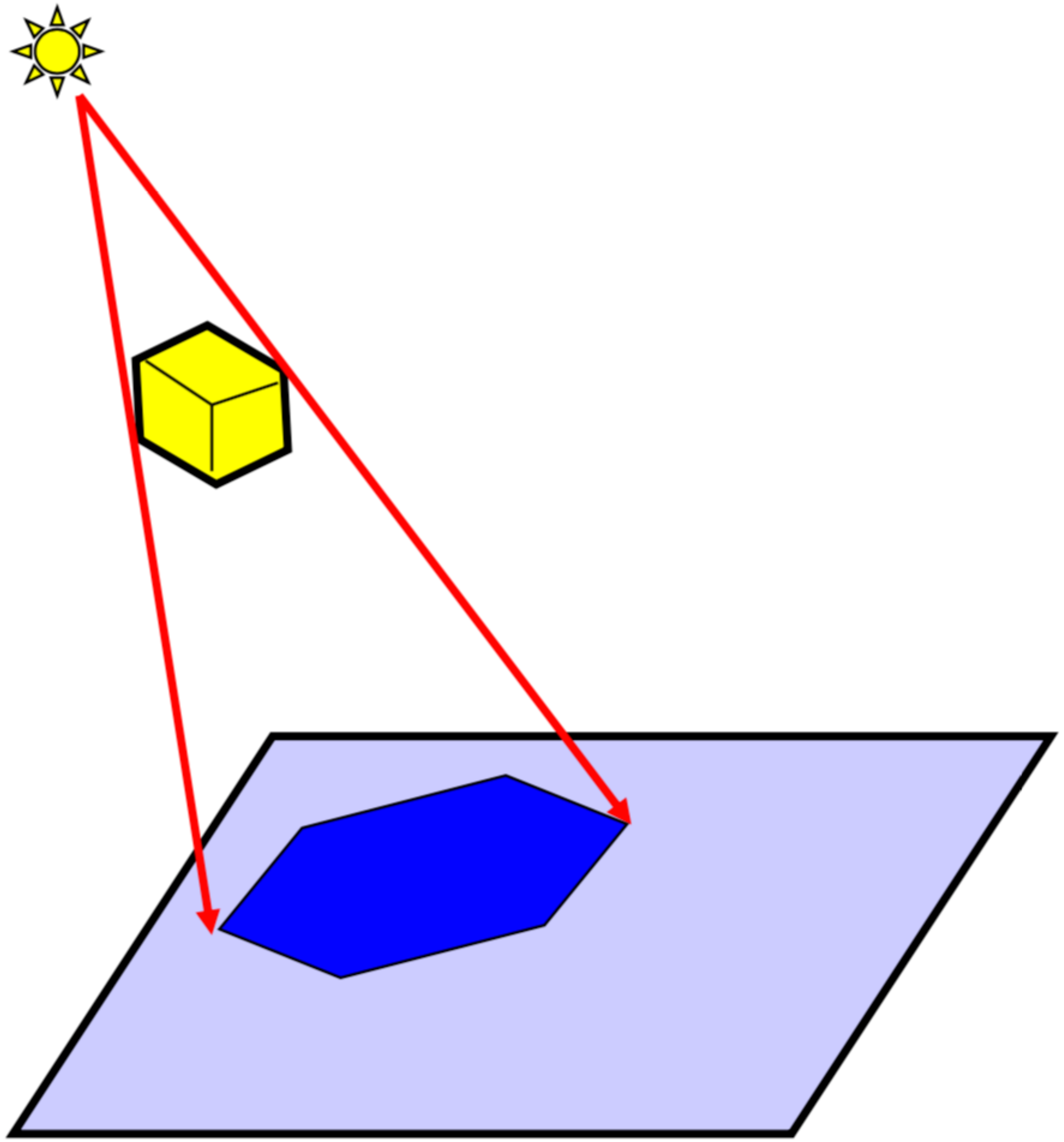
全局与局部照明

- 全局照明在计算过程中考虑光的实际传播过程，因此能产生阴影
- 局部照明每个点的颜色仅由该点的法向量，光照位置，观察者位置决定，因此难以产生阴影
- 是否能在局部照明的模型下产生阴影？是否能使用OpenGL实现？
  - 能，但有一定限制



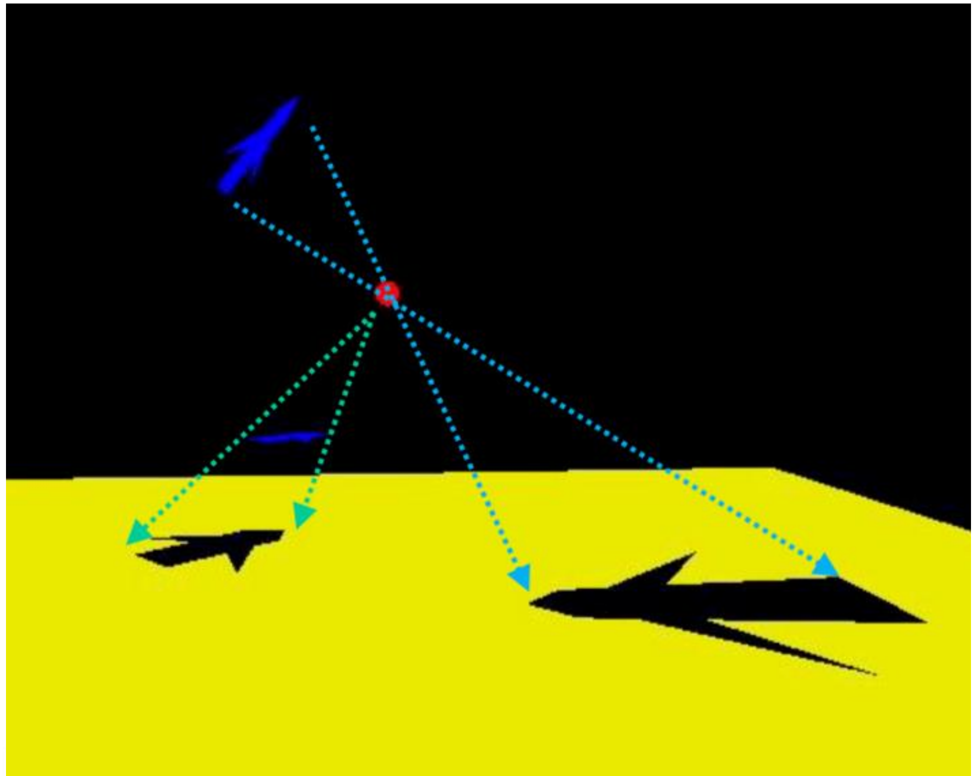
使用OpenGL产生阴影

- 阴影产生过程
  - 本质是投影！
    - 应该使用哪种视椎体？
  - 将物体沿光照方向投影至被阴影覆盖的平面
    - 对物体上的每个顶点，将其沿光线方向投影至场景
    - 光线方向与光源类型相关
  - 使用黑色绘制投影对象
  - 如何高效地计算投影对象？



使用OpenGL产生阴影

- 构建投影矩阵shadowMat[][]
  - 此处为简化版本
    - 光源位于z轴上（$O=(0,0,c)$）
    - 投影平面为xy平面（z = 0）
    - 物体上的一个顶点为$A=(x,y,z)$
  - 求射线OA与xy平面的交点P
    - $P=O+t(A-O)=\left(tx,ty,c+t(z-c)\right)$
    - $t=\frac{c}{c-z}$
    - 写成矩阵表示形式
      - $P=\begin{bmatrix}u\\v\\0\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&0&0&0\\0&c&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$

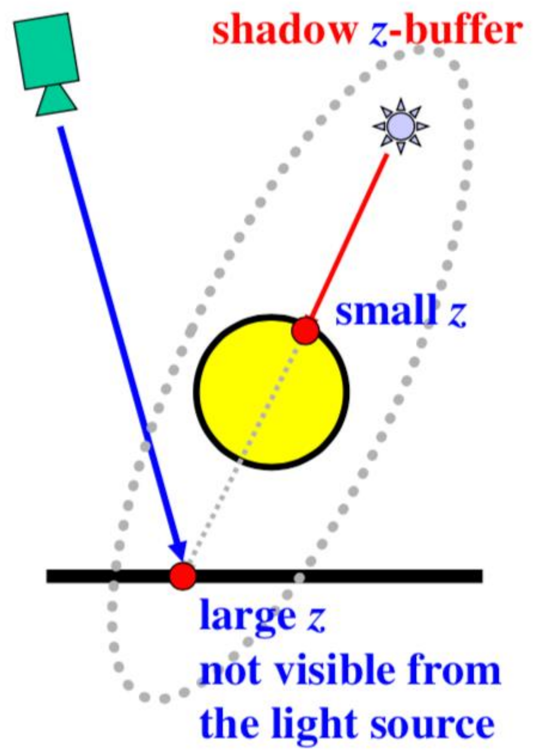


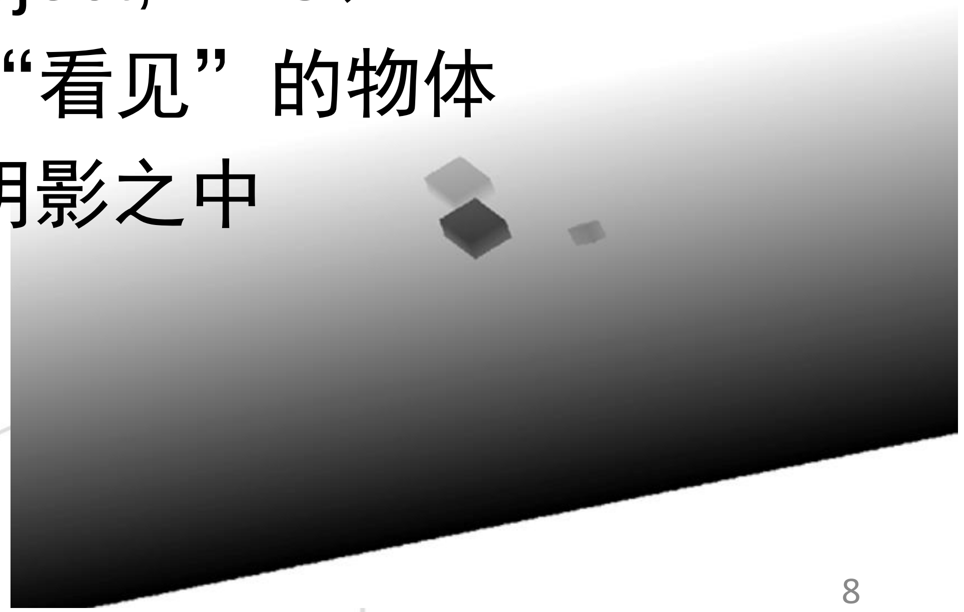
使用OpenGL产生阴影

- 使用投影变换进行绘制
  - 将变换矩阵入栈
  - 绘制物体
  - 将变换矩阵出栈
  - 将变换矩阵入栈
  - 自行构建投影矩阵shadowMat[][]
  - 将栈顶矩阵乘shadowMat[][]
  - 绘制物体（此时物体根据shadowMat[][]进行变换）
  - 出栈

使用OpenGL产生阴影

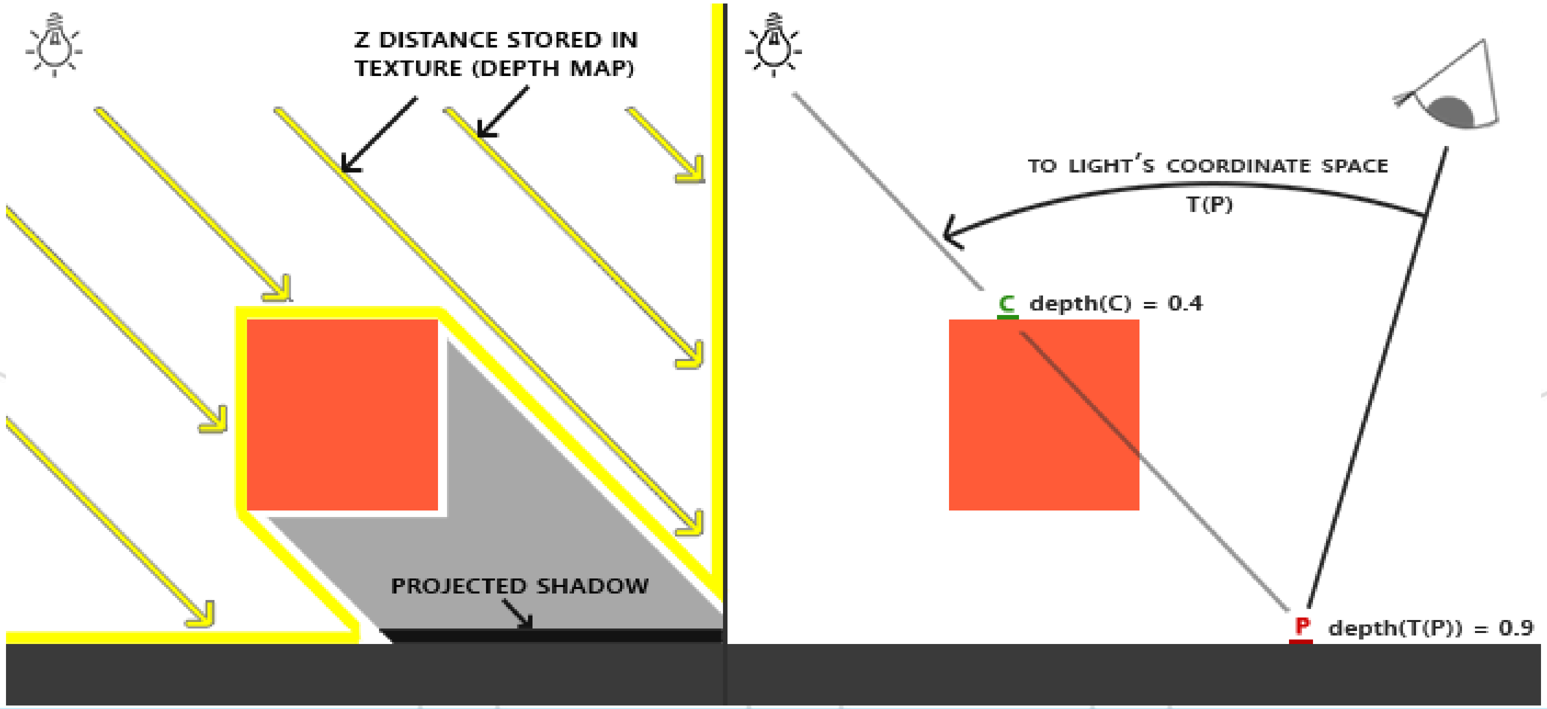
- 使用OpenGL观察与纹理
  - https://learnopengl.com/Advanced-Lighting/Shadows/Shadow-Mapping
  - 阴影的本质
    - 从光源发射的射线在到达某个点前，先遇到其他交点
    - 与camera类似！
  - 设置视角为光源视角
    - 将深度缓冲绘制为帧缓冲对象（frame buffer object, FBO）
    - 如此，则该FBO表明了以光源为视角时，所能“看见”的物体
    - 利用该FBO，就能知道一个fragment是否处于阴影之中





使用OpenGL产生阴影

- 使用OpenGL观察与纹理
  - 设置视角为光源视角，以FBO为对象绘制深度缓冲
  - 可根据该深度缓冲判断fragment是否处于阴影中
    - 将fragment对应的点P变换至以光源的坐标系统中：$\mathrm{T}(P)$
    - 获得$\mathrm{T}(P)$的深度，及其在深度缓冲中对应的像素C
    - 对比$\mathrm{T}(P)$及C的深度



使用OpenGL产生阴影

- 使用OpenGL观察与纹理
  - 创建FBO

```
unsigned int depthMapFBO;
glGenFramebuffers(1, &depthMapFBO);
```

  - 创建纹理

```
const unsigned int SHADOW_WIDTH = 1024, SHADOW_HEIGHT = 1024;
unsigned int depthMap;
glGenTextures(1, &depthMap);
glBindTexture(GL_TEXTURE_2D, depthMap);
glTexImage2D(GL_TEXTURE_2D, 0, 1, SHADOW_WIDTH, SHADOW_HEIGHT, 0,
        GL_DEPTH_COMPONENT, GL_FLOAT, NULL);
glTexParameteri(GL_TEXTURE_2D, GL_TEXTURE_MIN_FILTER, GL_NEAREST);
glTexParameteri(GL_TEXTURE_2D, GL_TEXTURE_MAG_FILTER, GL_NEAREST);
glTexParameteri(GL_TEXTURE_2D, GL_TEXTURE_WRAP_S, GL_REPEAT);
glTexParameteri(GL_TEXTURE_2D, GL_TEXTURE_WRAP_T, GL_REPEAT);
```

使用OpenGL产生阴影

- 使用OpenGL观察与纹理
  - 将纹理attach到FBO上

```
glBindFramebuffer(GL_FRAMEBUFFER, depthMapFBO);
glFramebufferTexture2D(GL_FRAMEBUFFER, GL_DEPTH_ATTACHMENT,
                       GL_TEXTURE_2D, depthMap, 0);
glDrawBuffer(GL_NONE);
glReadBuffer(GL_NONE);
glBindFramebuffer(GL_FRAMEBUFFER, 0);
```

使用OpenGL产生阴影

- 使用OpenGL观察与纹理
  - 绘制depth buffer

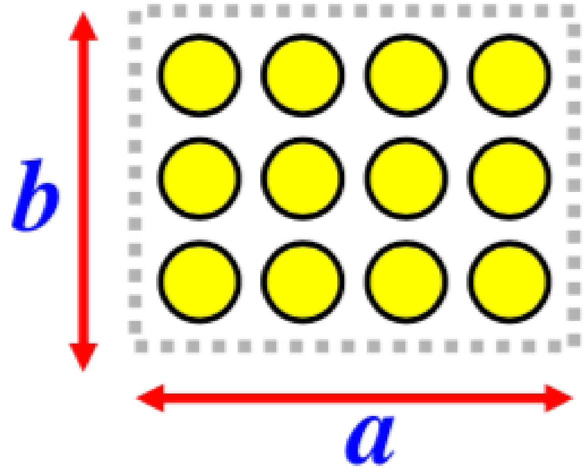
```
glViewport(0, 0, SHADOW_WIDTH, SHADOW_HEIGHT);
glBindFramebuffer(GL_FRAMEBUFFER, depthMapFBO);
glClear(GL_DEPTH_BUFFER_BIT);
ConfigureShaderAndMatrices();
RenderScene();
glBindFramebuffer(GL_FRAMEBUFFER, 0);
```

  - 绘制实际场景

```
glViewport(0, 0, SCR_WIDTH, SCR_HEIGHT);
glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT);
ConfigureShaderAndMatrices();
glBindTexture(GL_TEXTURE_2D, depthMap);
RenderScene();
```

Soft shadow

- 产生具有真实感的阴影
  - 光线追踪产生的阴影具有清晰的边界（hard shadow）
    - 这节课介绍的投影方法本质上为光线追踪
  - Radiosity与photo-mapping产生soft shadow
  - 如何使用现有算法产生soft shadow？
    - 使用多个光源模拟区域光源！

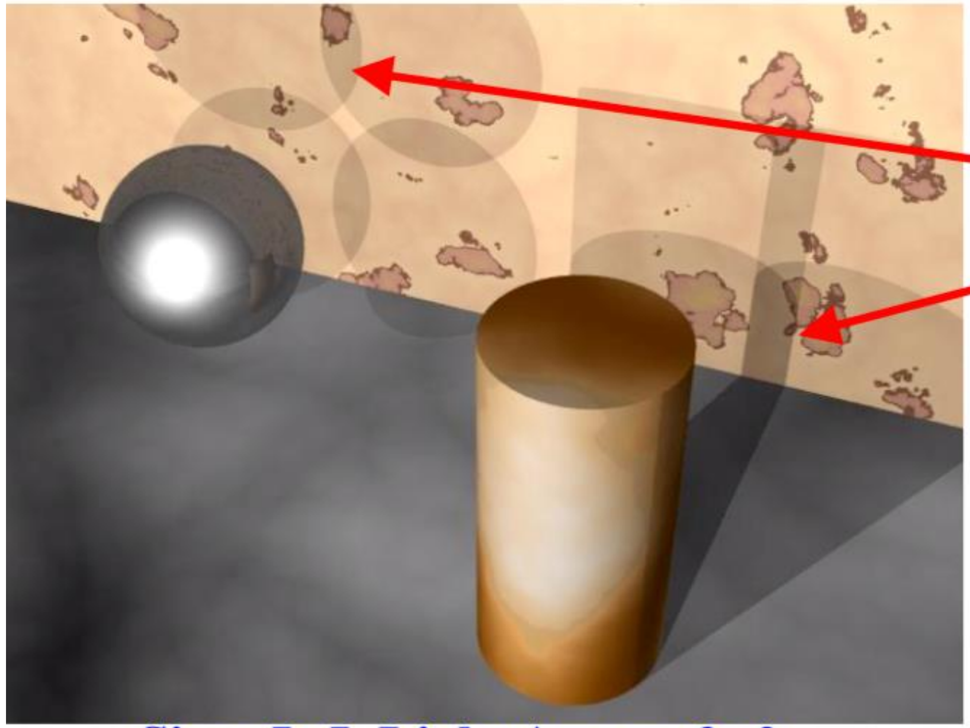


size: $a \times b$

array: 4×3

Soft shadow

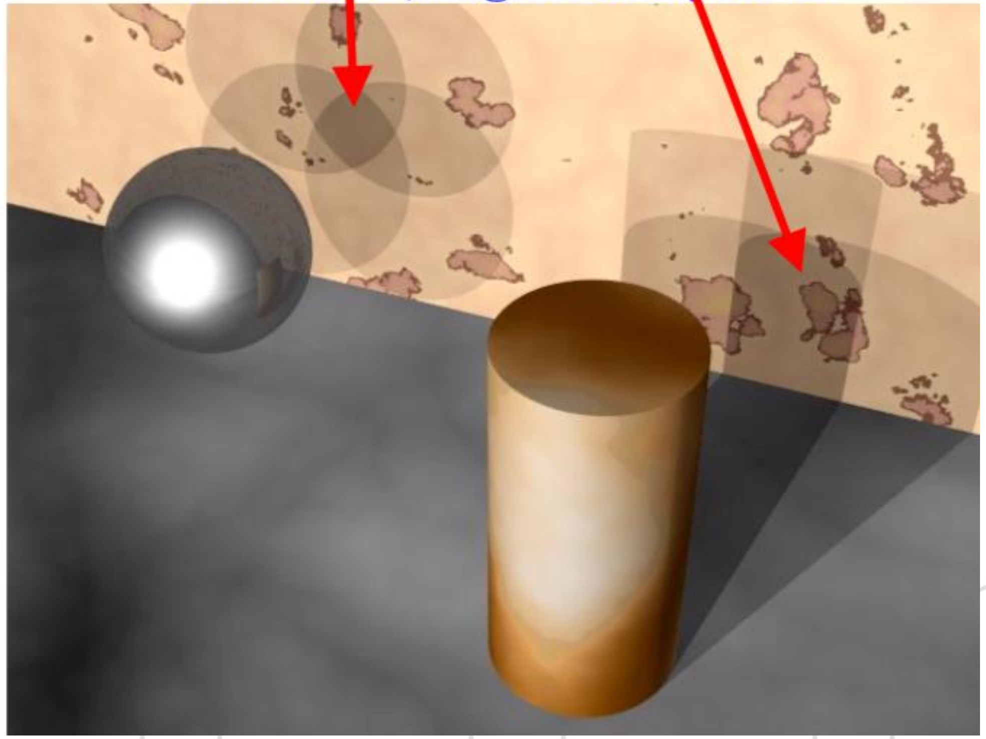
- 产生具有真实感的阴影

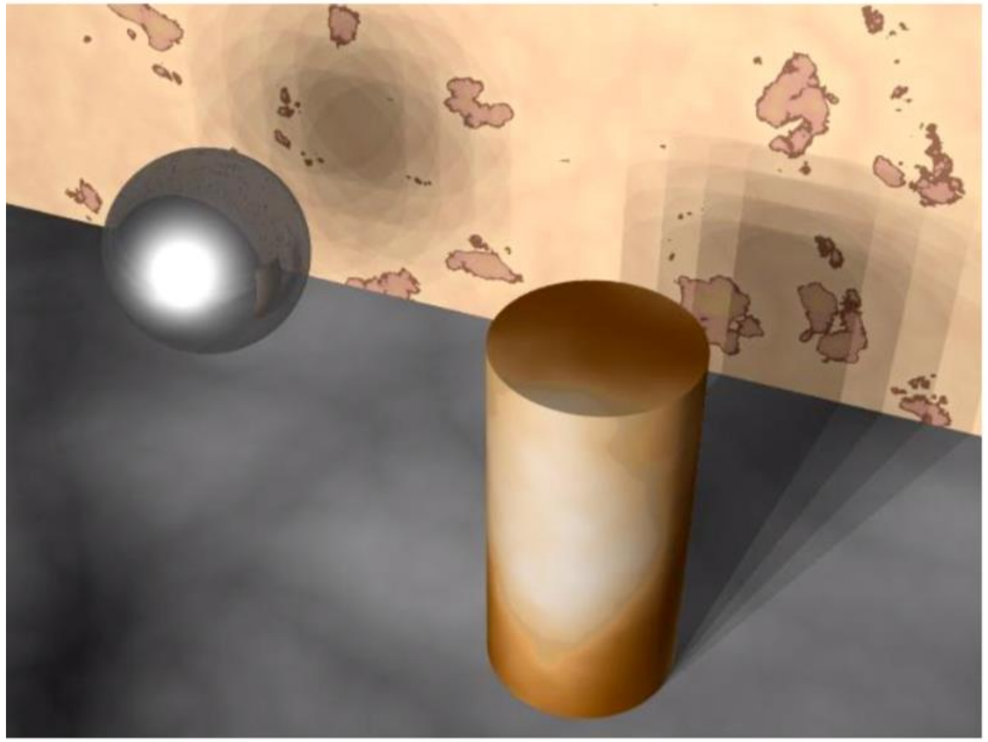


Size: 5×5, Light Array: 2×2

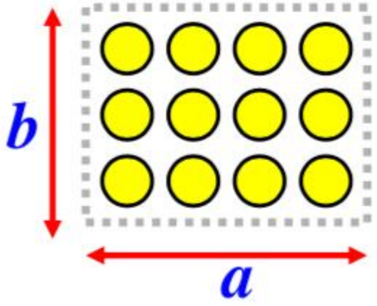
check the overlapping shadows

Size: 3×3, Light Array: 2×2





Size 3×3, Light Array: 5×5

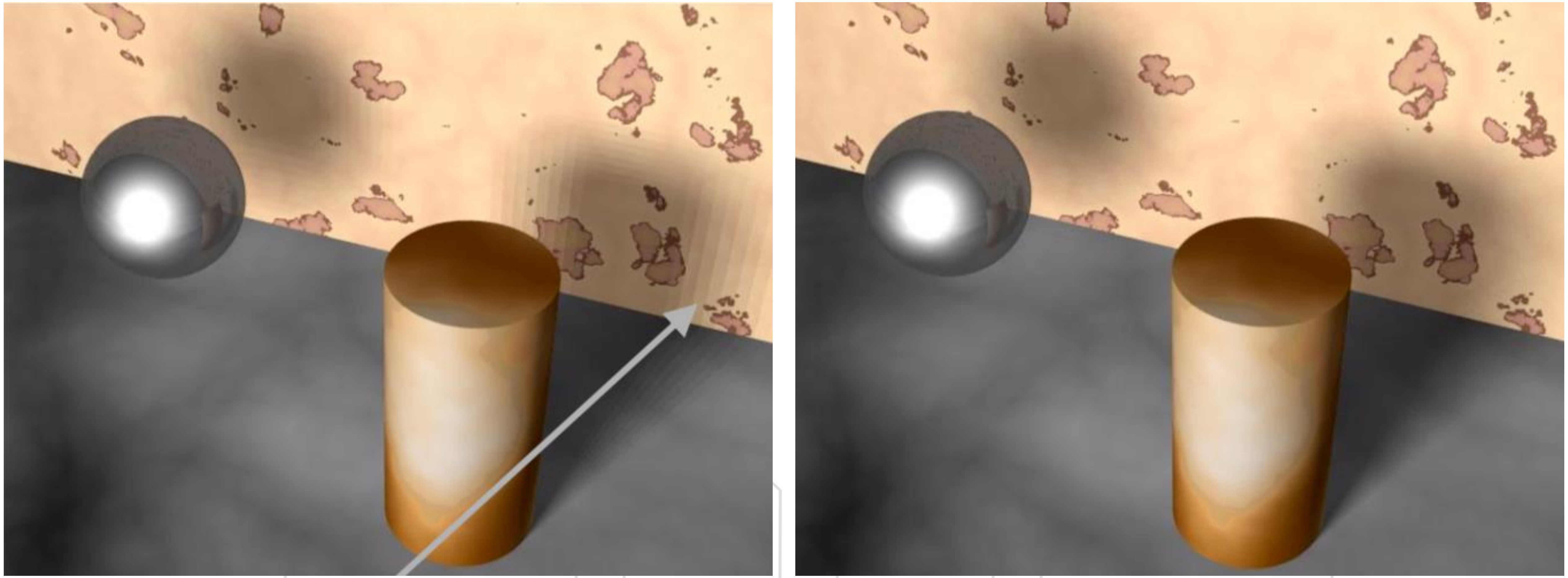


size: $a \times b$

array: 4×3

Soft shadow

- 产生具有真实感的阴影
  - 增加光源的数量可以提高阴影的分辨率，从而产生更真实的效果
    - 但整齐排列的光源产生的阴影仍然具有颗粒感
  - 使用jitter给光源排列加入微小抖动让阴影过渡更自然

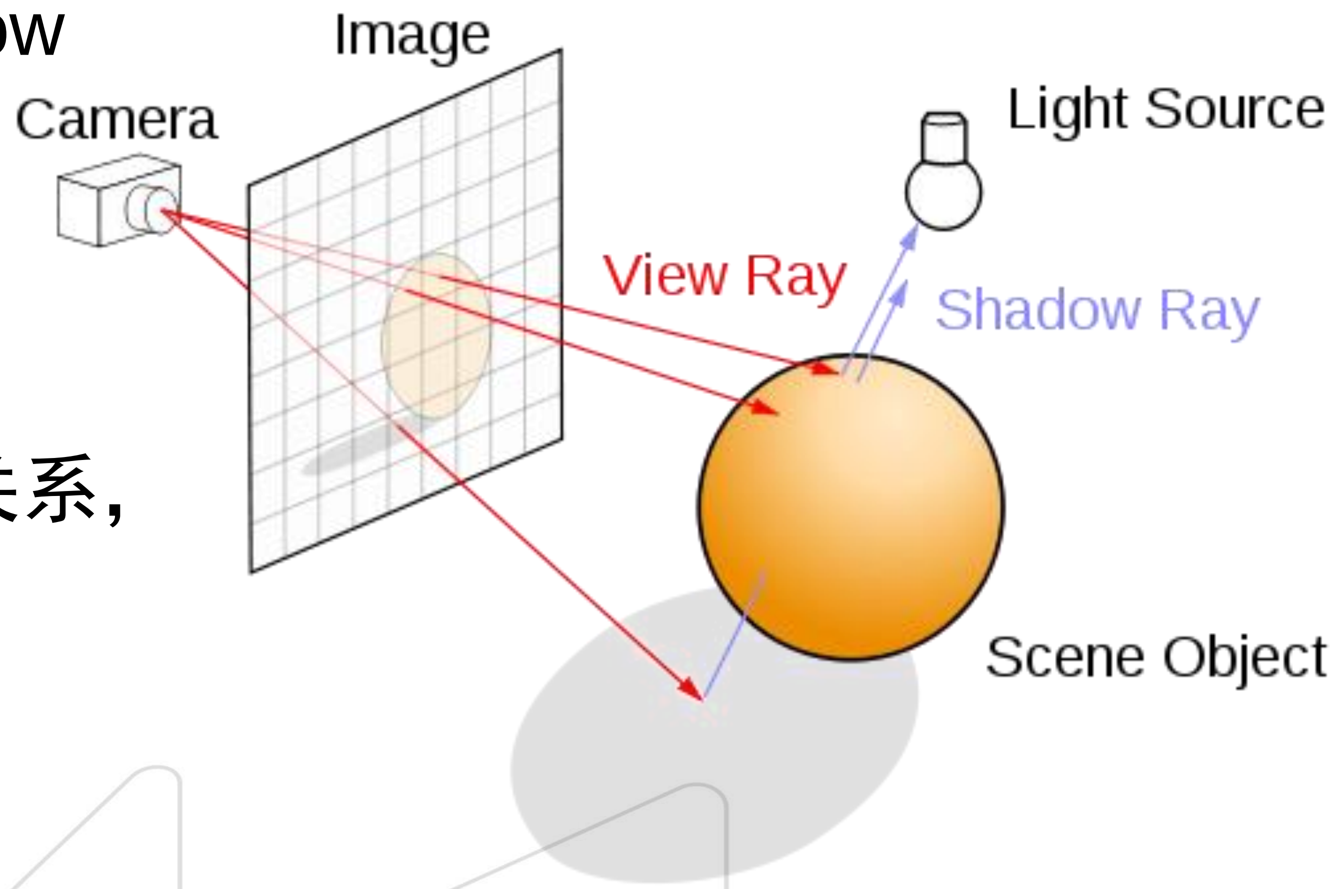


概要

- 局部光照与全局光照简要回顾
- 全局光照
  - Ray tracing
  - Radiosity
- 射线与物体求交

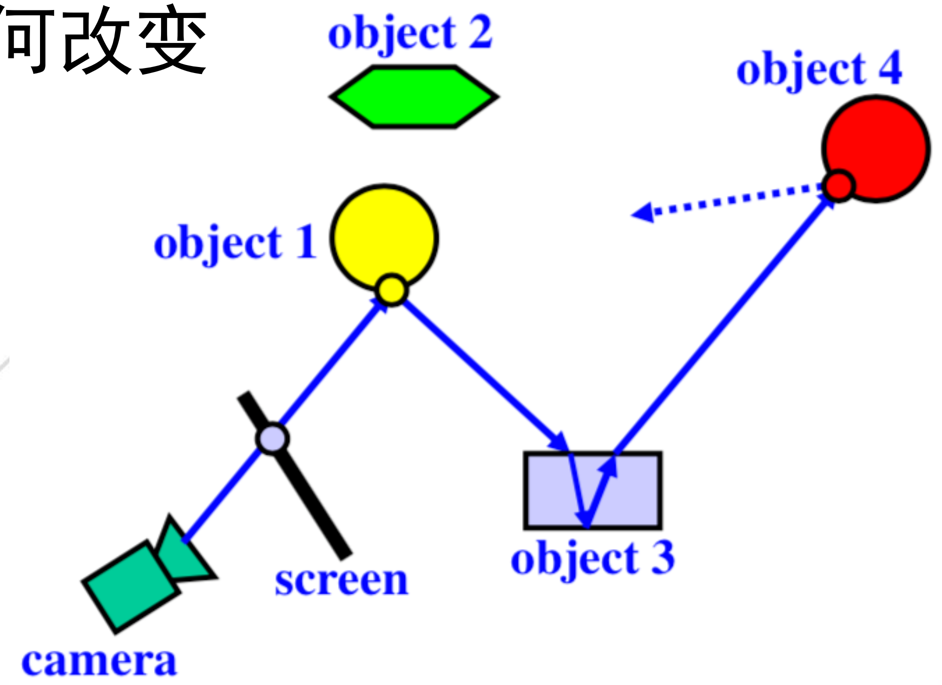
全局光照模型

- 局部光照模型无法产生具有真实感的光照细节
  - 间接光照, color bleeding, soft shadow
- 产生全局光照的基本思路
  - Ray tracing：从视角出发追踪光线
  - Photon mapping：从光源出发追踪
  - Radiosity：计算表面上小块之间的关系，求解每个小块的亮度



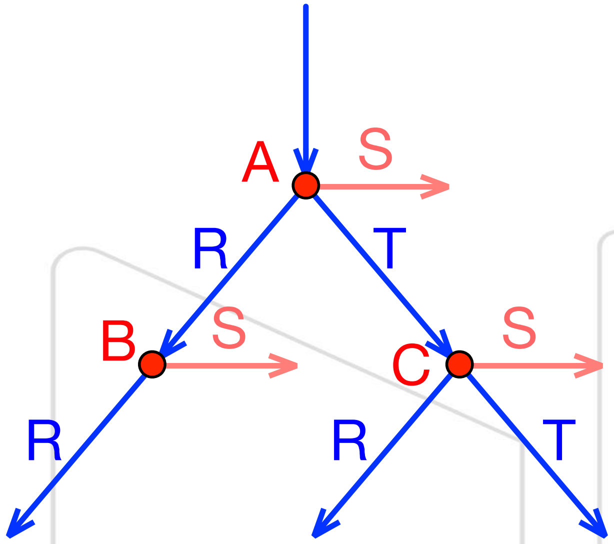
全局光照

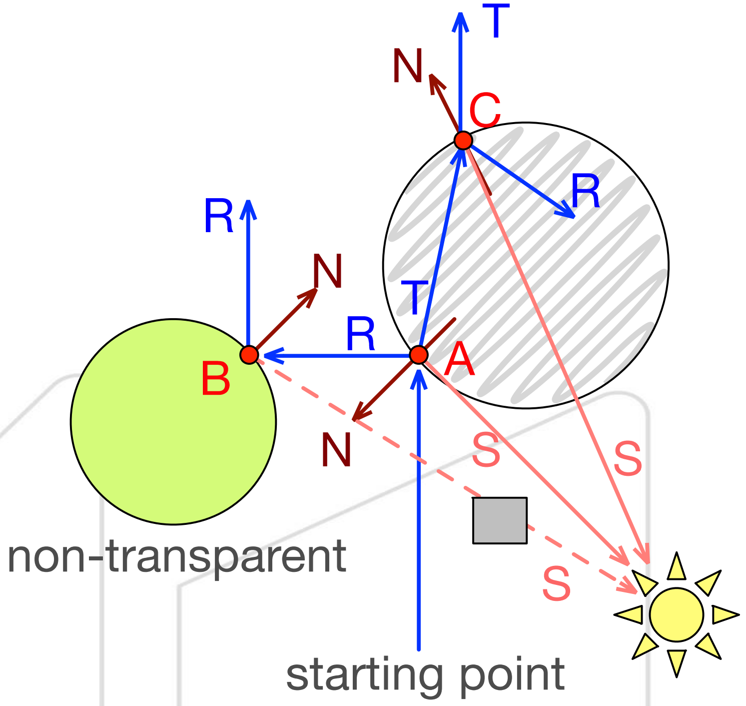
- Ray tracing
  - 光线追踪又称为递归光线追踪（recursive ray tracing）
  - 从观察视角出发递归地追踪光线来源
    - 在碰到物体时会产生反射与折射
    - 当光线打在某个物体上时，光线会带上该物体的颜色
    - 如果所追踪的光线没有碰到任何物体，则该视线上没有任何物体，因此该点的像素颜色（底色）也不会发生任何改变



全局光照

- Ray tracing
  - 初始化时产生与图像像素相同数目的光线数目进行追踪
    - 当光线打在物体上时，产生三道光线进行进一步追踪
      - 反射光R：在物体表面照射点反射
      - 透射光T：在物体表面照射点发生折射，穿过物体内部
      - 阴影射线S：从物体表面照射点指向光源，如果S被其他物体遮挡，则该点无法从光源接收光照





全局光照

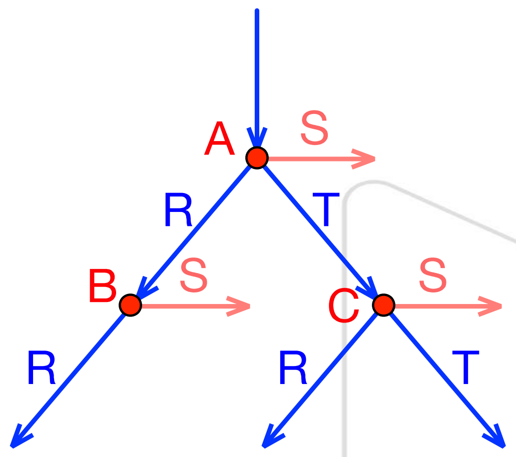
Ray tracing

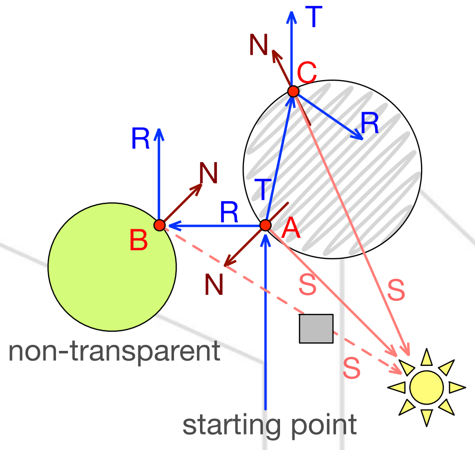
– 在Phong反射模型中，物体最终呈现出的颜色为

- $\boldsymbol{I} = k_a \boldsymbol{L}_a + \sum_i \left(k_d \boldsymbol{L}_d (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l}_i) + k_s \boldsymbol{L}_s \cdot \max\left((\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h}_i)^{\alpha}, 0 \right) \right)$

– 而在光线追踪算法中，由于引入反射光，折射光与阴影射线，对光照的反射模型也许要随之变化

- $\boldsymbol{I} = k_a \boldsymbol{L}_a + \sum_i S_i \left(k_d \boldsymbol{L}_d (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l}_i) + k_s \boldsymbol{L}_s \cdot \max\left((\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h}_i)^{\alpha}, 0 \right) \right) + k_r \boldsymbol{I}_r + k_t \boldsymbol{I}_t$





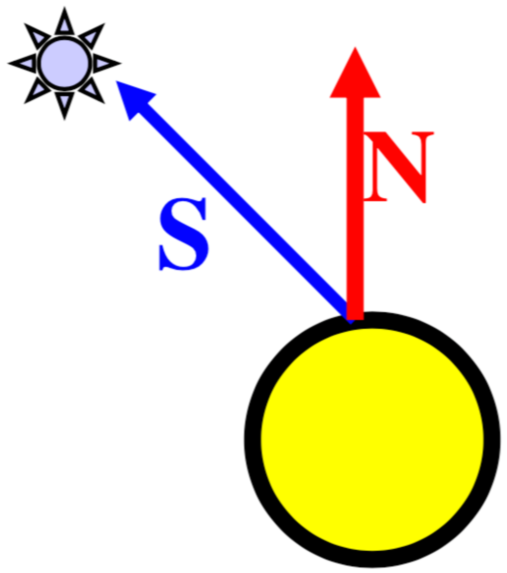
Ray tracing

```
for each scan line do
    for each pixel on this scan line {
        ray := the ray from camera through the pixel;
        pixel-color = RayTrace(ray, 1);
    }

function RayTrace(ray, depth)
{
    if ray hits an object {
        compute intersection point P and its normal vector N;
        RayTrace := Shading(object-hit, ray, P, N, depth);
    } else {
        RayTrace := background color;
    }
}
```

tracing depth

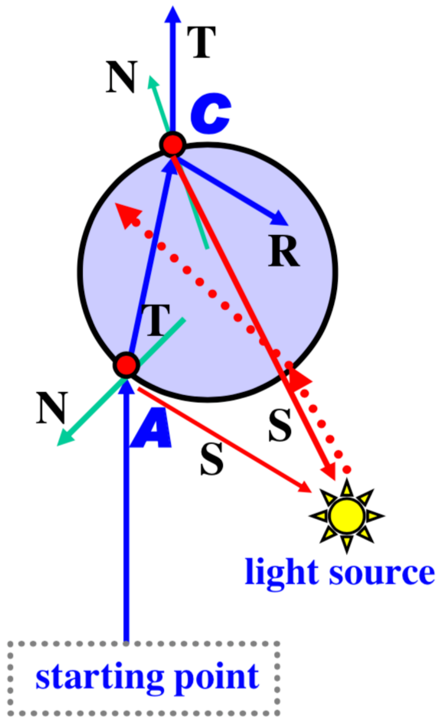
- Ray tracing

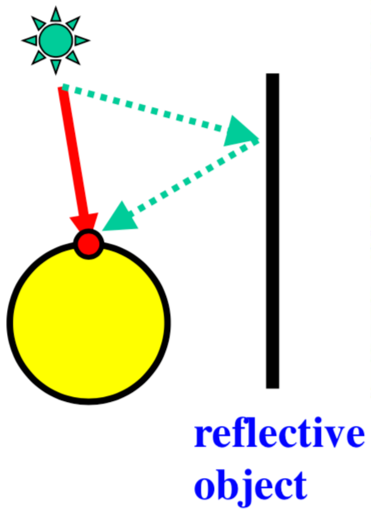


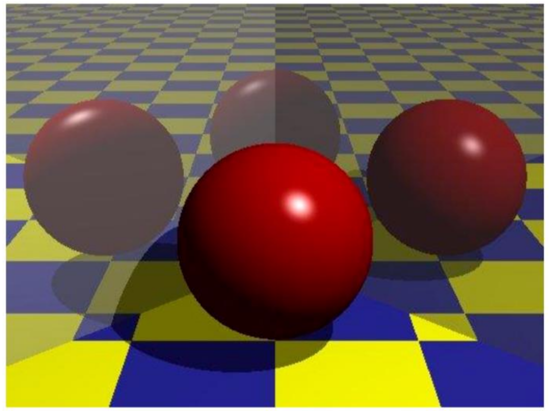

```
function Shading(Obj, iRay, P, N, Depth) {
    color := ambient color;
    for each light source {
        S := shadow ray to that light source
        if (S.N > 0) // a front point!
            determine shadow, diffuse, specular terms of color;
    }
    if Depth < MaxDepth {
        if Obj is reflective {
            R := reflection ray direction;
            NewColor := RayTrace(R, Depth+1);
            scale NewColor by reflection coefficient kr and add to color;
        }
        if Obj is transparent {
            T := transmitting ray direction;
            if not total internal reflection {
                NewColor := RayTrace(T, Depth+1);
                scale NewColor by transmission coefficient kt and add to color;
            }
        }
        Shading := color;
}
```

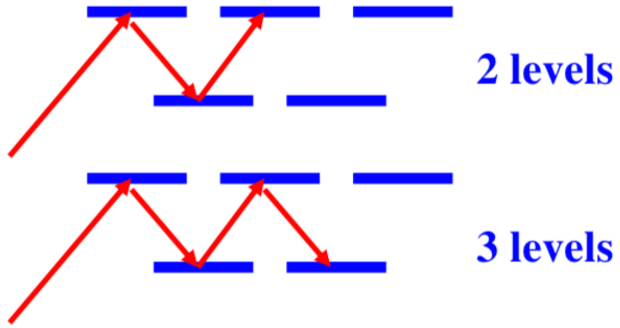
全局光照

- Ray tracing
  - 存在问题
    - 阴影射线在发生折射时计算可能不正确
      - 右图中光源并非通过阴影射线S照射点C，而是折射后的路径
      - 因此，传统光线追踪难以产生真实的焦散（caustic）效果
    - 阴影射线没考虑间接光照
      - 只考虑照射点与光源之间的关系
      - 图中缺少了镜子反射光所产生的阴影
    - 追踪深度限制
      - 增加深度带来的开销可能呈几何增长









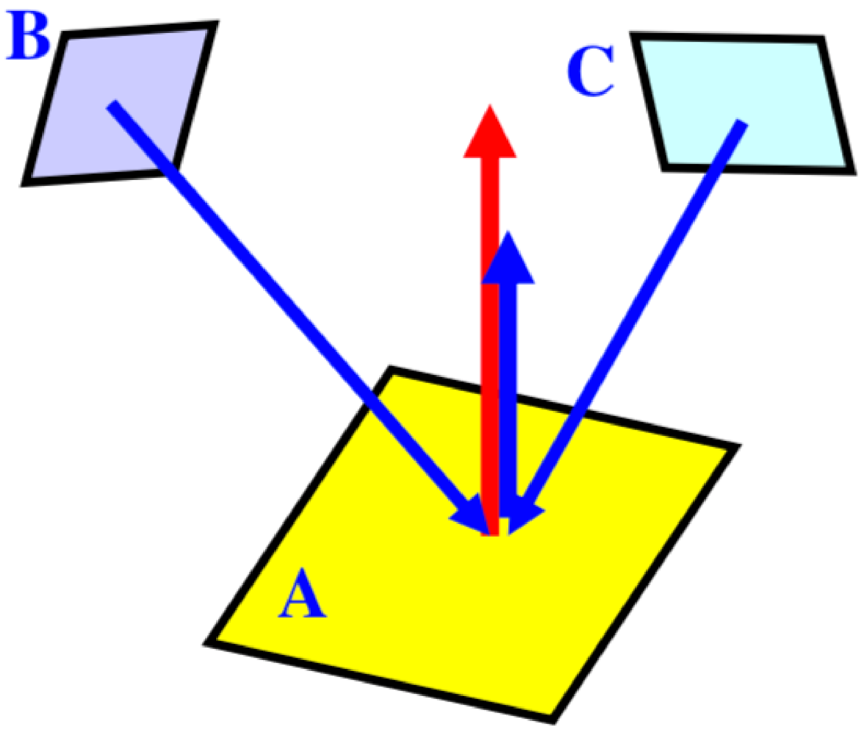
概要

- 局部光照与全局光照简要回顾
- 全局光照
  - Ray tracing
  - Radiosity
- 射线与物体求交

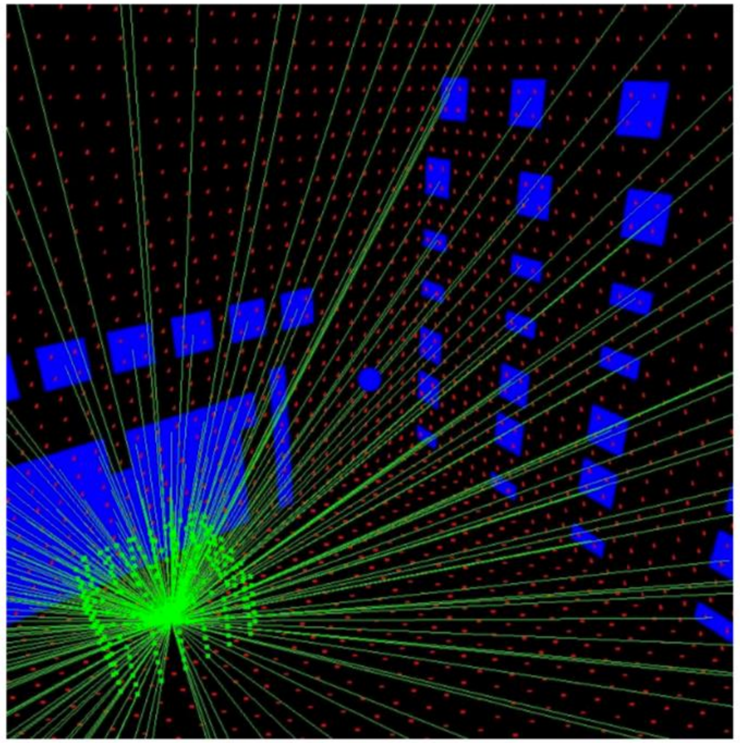
全局光照

Radiosity

- 传统ray tracing将所有追踪产生的间接光照外的全局照明都表示为无方向的环境光
- Radiosity（辐射度算法）则是以能量传播为基础构建的模型
  - 考虑所有物体表面上发射，反射，吸收的能量，及其相互之间的关系
  - 离开物体表面的能量称为radiosity
    - 自身发射能量及反射或透射其他物体表面传递过来的能量之和
    - 如图所示，A自身发射的红光及反射B和C的蓝光能量之和为A的radiosity



全局光照



Radiosity：能量方程

– $B_i(\Delta A_i) = E_i(\Delta A_i) + \rho_i \int_j B_j(\Delta A_j) F_{\Delta A_j \to \Delta A_i}$
  - B_i: patch i当前的radiosity
  - E_i: patch i所发射的能量
  - ΔA_i: patch i上的一个极小的区域
  - ρ_i: patch i反射能量的比率
  - $F_{\Delta A_j \to \Delta A_i}$: 离开$\Delta A_j$的能量中到达$\Delta A_i$的比率，称为form factor

– 将场景离散化为n个平面小块
  - 假设radiosity在每个小块上都是均匀分布（小块之间radiosity不同）
  - 能量方程可重写为$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_j A_j F_{ji}$
    – 此处，F_{ji}表示从小块j到小块i的form factor

Radiosity：能量方程

- 由于能量在两个小块间的交换取决于小块之间的相对位置，因此$F_{ij}A_i = F_{ji}A_j$（即从小块i到j传输的能量等于从小块j到i的能量）
  - $B_iA_i = E_iA_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_jA_jF_{ji} = E_iA_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_jA_iF_{ij}$
  - 等式两边同时除以A_i，可得

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_jF_{ij}$$

  - 移项将B与E分别置于等式两边，可得

$$B_i - \rho_i \sum_{j=1}^{n} B_jF_{ij} = E_i$$

  - 合并两个B_i项，可得

$$(1 - \rho_iF_{ii})B_i - \rho_i \sum_{j \neq i} B_jF_{ij} = E_i$$

全局光照

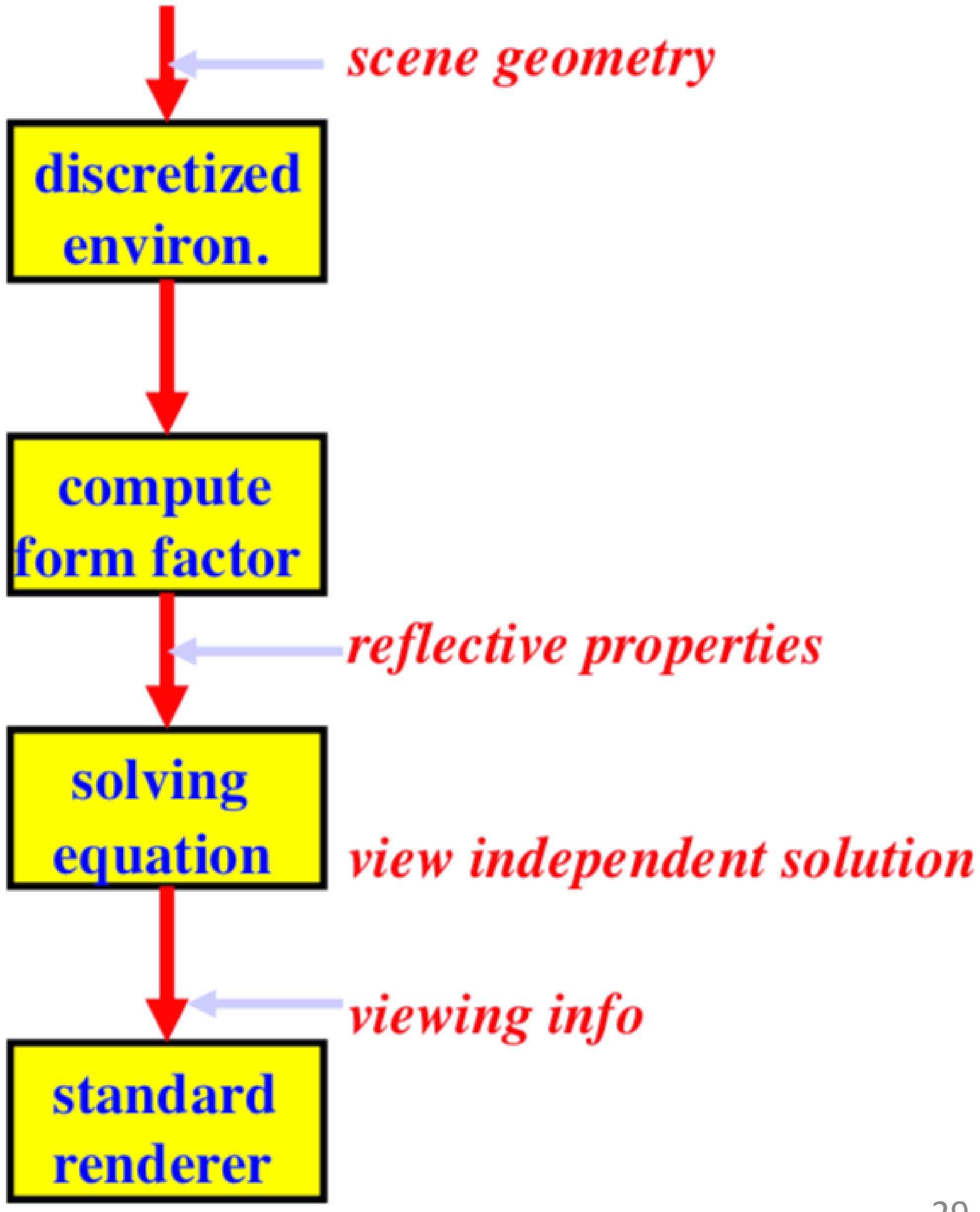
- Radiosity：能量方程
  - 将等式$(1-\rho_i F_{ii})B_i-\rho_i\sum_{j\neq i}B_jF_{ij}=E_i$写成矩阵形式，则有
    - $$\begin{bmatrix} 1-\rho_1F_{11} & -\rho_1F_{12} & \cdots & -\rho_1F_{1n} \\ -\rho_2F_{21} & 1-\rho_2F_{22} & \cdots & -\rho_2F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_nF_{n1} & -\rho_nF_{n2} & \cdots & 1-\rho_nF_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$
  - 每个小块发射的能量E_i及其反射能量的比率ρ_i均为给定参数
  - Form factors F_{ij}通过对小块之间的几何位置计算得到
    - 对于convex表面，由于离开小块i的能量不会打在i本身，因此$F_{ii}=0$
  - 场景中每个小块的能量（颜色）B_i可由求解以上线性方程组得到
    - 注意，此过程中没有引入任何与观察视角相关的信息，因此，radiosity是一个视角无关（view independent）的算法

全局光照

Radiosity：计算步骤

- 1. 将场景离散化为平面小块
- 2. 计算小块间能量传输的比例，即 form factors F_{ij}
- 3. 设置小块属性：发射能量E_i及反射能量比例ρ_i
- 4. 求解线性方程组，得到每个小块的呈现出来的能量B_i
- 5. 使用B_i渲染场景
  - 实际渲染中，常加入环境光

$$B_i^{display} = B_i + \rho_i B_{ambient}$$



全局光照

- Radiosity：求解方程组（Gauss-Seidel Relaxation）
  - 由于radiosity方程组对应的矩阵很大，通常使用迭代方法求解
    - 此处我们介绍Gauss-Seidel relaxation方法
    - 假设方程组$Ax = b$中第i个等式为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

    - 将除$a_{ii}x_i$外的所有项移至等式右边

$$a_{ii}x_i = b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j$$

    - 等式两边同时除以a_{ii}

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

全局光照

- Radiosity：求解方程组（Gauss-Seidel Relaxation）
  - 于是，我们有了通过迭代更新x_i的方程

$$x_i^* = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

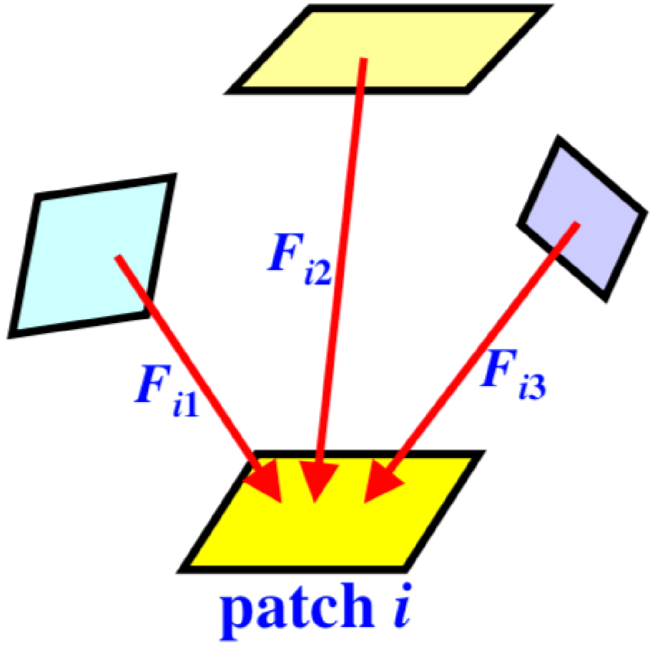
  - 从一个初始状态$X^0 = [x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0]$出发，不断迭代更新$X$
  - 在第t次迭代，通过X^{t-1}计算X^t
  - 不断进行迭代，直到系统收敛（X不再变化）
  - 对于radiosity而言，其能量初始状态为每个小块自身发射的能量

$$B^0 = [E_1, E_2, \cdots, E_n]$$

Radiosity：求解方程组（Gauss-Seidel Relaxation）

– 使用Gauss-Seidel方法求解方程组在radiosity中的直观解释为

- 在每次迭代中，小块i呈现出的能量为其自身发射的能量，及从其他所有小块中得到的能量之和
- 在不断的能量交换迭代中，系统最终收敛至一个稳定状态：每个小块接收和发射的能量处于平衡状态，因此呈现的能量保持不变
- 使用Gauss-Seidel方法求radiosity的过程为收集能量的过程



$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{E_i}{1-\rho_i F_{ii}} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & & & \\ \dfrac{-\rho_i F_{i1}}{1-\rho_i F_{ii}} & \dfrac{-\rho_i F_{i2}}{1-\rho_i F_{ii}} & \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{-\rho_i F_{in}}{1-\rho_i F_{ii}} \\ & & & & & \end{bmatrix} \cdot \boxed{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}}$$

Radiosity：求解方程组（Gauss-Seidel Relaxation）

- 实际计算中，为了加快收敛速度，常使用改进的Gauss-Seidel方法（Southwell relaxation）
  - 每次迭代中选择residual（即estimation error）最大的等式进行更新
  - 注意，等式i为$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$，即$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$，其residual为

$$e_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

  - 迭代方程可写为

$$x_i^* = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right) = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) + x_i = \frac{e_i}{a_{ii}} + x_i$$

Radiosity：求解方程组（Gauss-Seidel Relaxation）

– 迭代后$x_i^* = \frac{e_i}{a_{ii}} + x_i$，$e_i^* = 0$，同时可更新其他等式的residual

$$
\begin{aligned}
e_k^* &= b_k - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{kj}x_j - a_{ij}x_i^* \\
&= b_k - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{kj}x_j - a_{ki}\left(x_i + \frac{e_i}{a_{ii}}\right) \\
&= \left(b_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\right) - \frac{a_{ki}}{a_{ii}}e_i \\
&= e_k - \frac{a_{ki}}{a_{ii}}e_i
\end{aligned}
$$

Radiosity：求解方程组（Gauss-Seidel Relaxation）

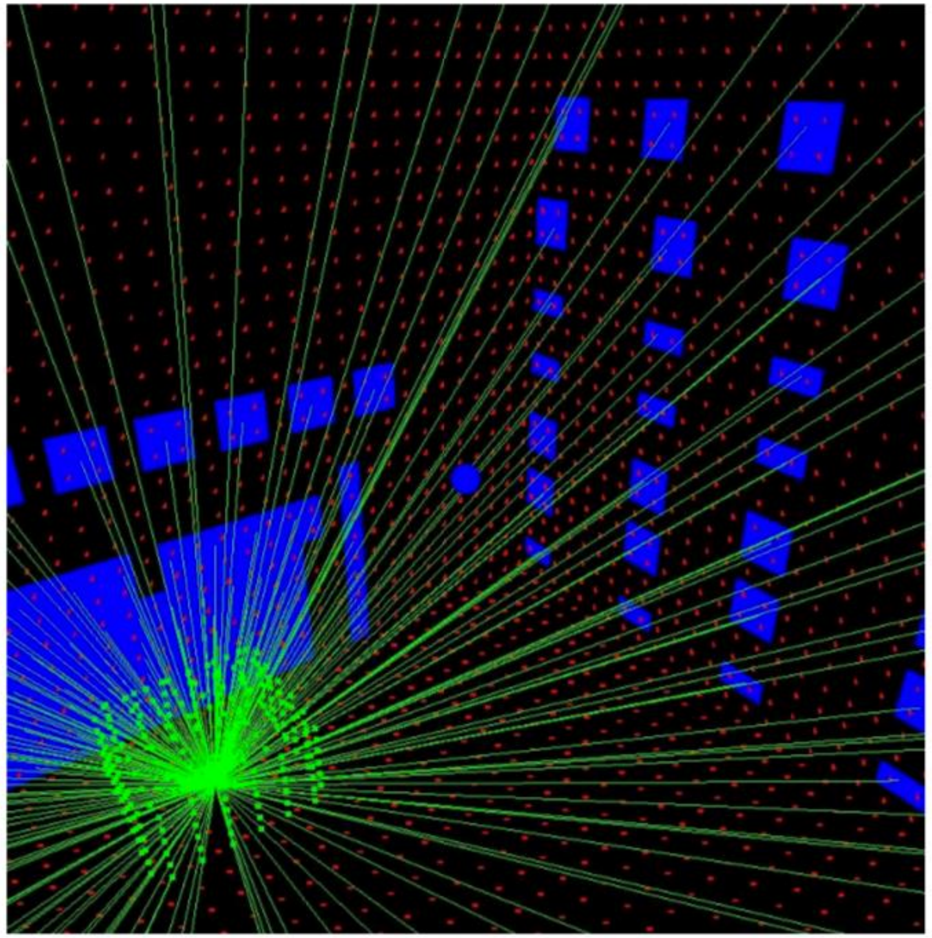
– 使用Southwell relaxation求解方程组伪码

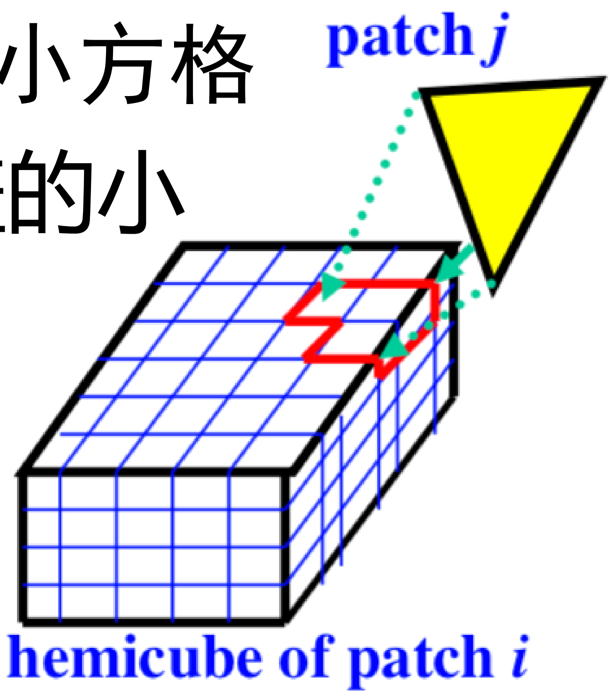
```
for (i = 1; i ≤ n; i++) {// initialization
    B_i = 0; e_i = E_i;
}
while (not converge) {
    find the i such that |e_i| is the largest;
    B_i = B_i + e_i/(1-ρ_i F_ii);      // update B_i
    temp = e_i;                        // save e_i for later use
    for (k = 1; k ≤ n; k++) // update residuals
        e_k = e_k + ρ_k F_ki /(1-ρ_i F_ii)*temp;
}
```

Radiosity：求解方程组（Gauss-Seidel Relaxation）

- 使用Southwell relaxation求解方程组的在radiosity中的直观解释
  - 等式i的residual e_i可视为小块i上尚未发射的能量
  - 在每次迭代，我们找到尚未发射能量最多的小块，并将其发出
    - 迭代后，小块i上尚未发射能量为0（$e_i = 0$）
  - 不断重复此过程，直到没有能量可发射
  - Southwell relaxation求解方程组为发射能量的过程

- Radiosity: 计算form factors
  - 假设每个小块都向覆盖在其上的一个半球（hemisphere）均匀发射能量
    - 实现中常用hemicube代替半球（Cohen and Greenberg方法）
  - 将小块i的hemicube划分成小方格
  - F_{ij}由小块j在i的投影所覆盖的小方格数量决定



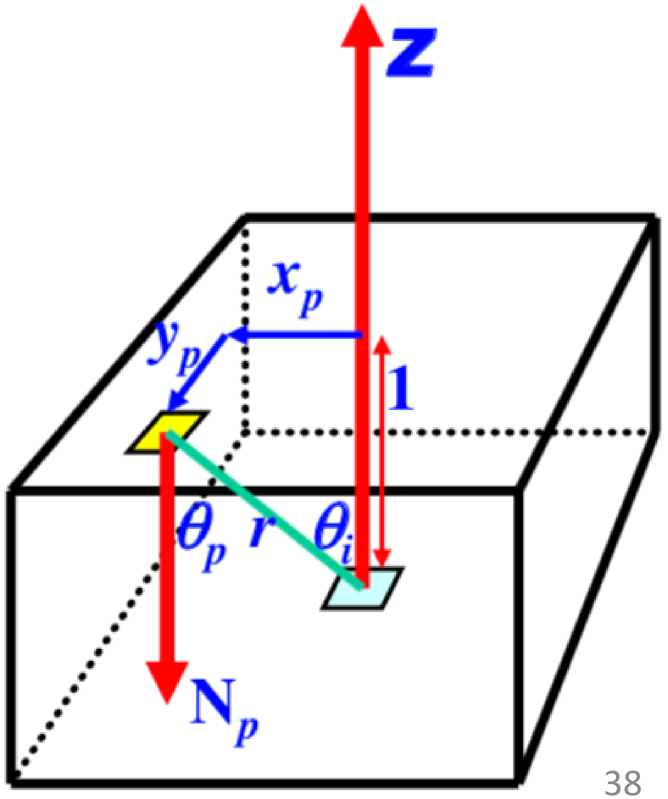


全局光照

- Radiosity: 计算form factors
  - 实现中，并不计算从j到i的hemicube的投影，而是从i 出发向hemicube上小格发出射线，求该射线与其他平面的交点（假设该射线将i的能量传输至j）
  - 由于小格与i之间存在夹角，需要计算每个小格对应的form factor
    - 正对i的小格接收到来自i的能量较多
    - 使用余弦计算投影后的强度$\Delta F_p = \frac{\cos\theta_i \cos\theta_p}{\pi r^2}\Delta A$
    - 当i的法向量方向沿z轴方向（顶部）时

$$r = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + 1}, \cos\theta_i = \cos\theta_p = \frac{1}{r}$$

    - 因此，$\Delta F_p = \frac{1}{\pi\left(x_p^2+y_p^2+1\right)^2}\Delta A$

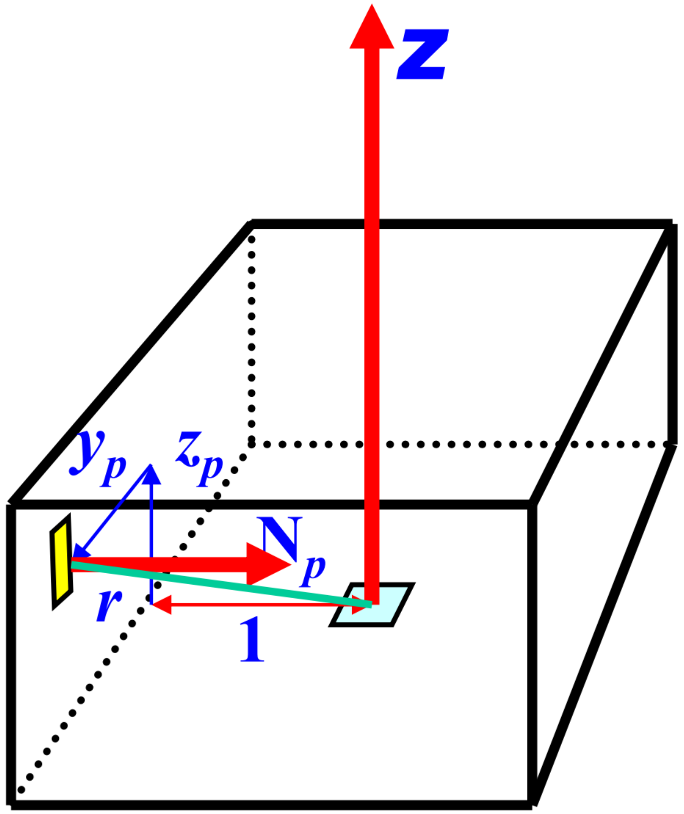


Radiosity: 计算form factors

– 由于小格与i之间存在夹角，需要计算每个小格对应的form factor
  - 正对i的小格接收到来自i的能量较多
  - 使用余弦计算投影后的强度$\Delta F_p = \frac{\cos\theta_i \cos\theta_p}{\pi r^2}\Delta A$
  - 当i的法向量方向沿x/y轴方向（侧面）时

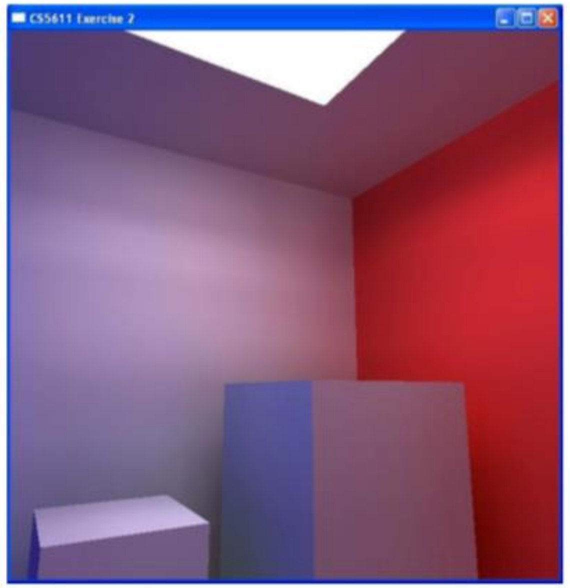
$$r = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + 1}, \cos\theta_i = \frac{z_p}{r}, \cos\theta_p = \frac{1}{r}$$

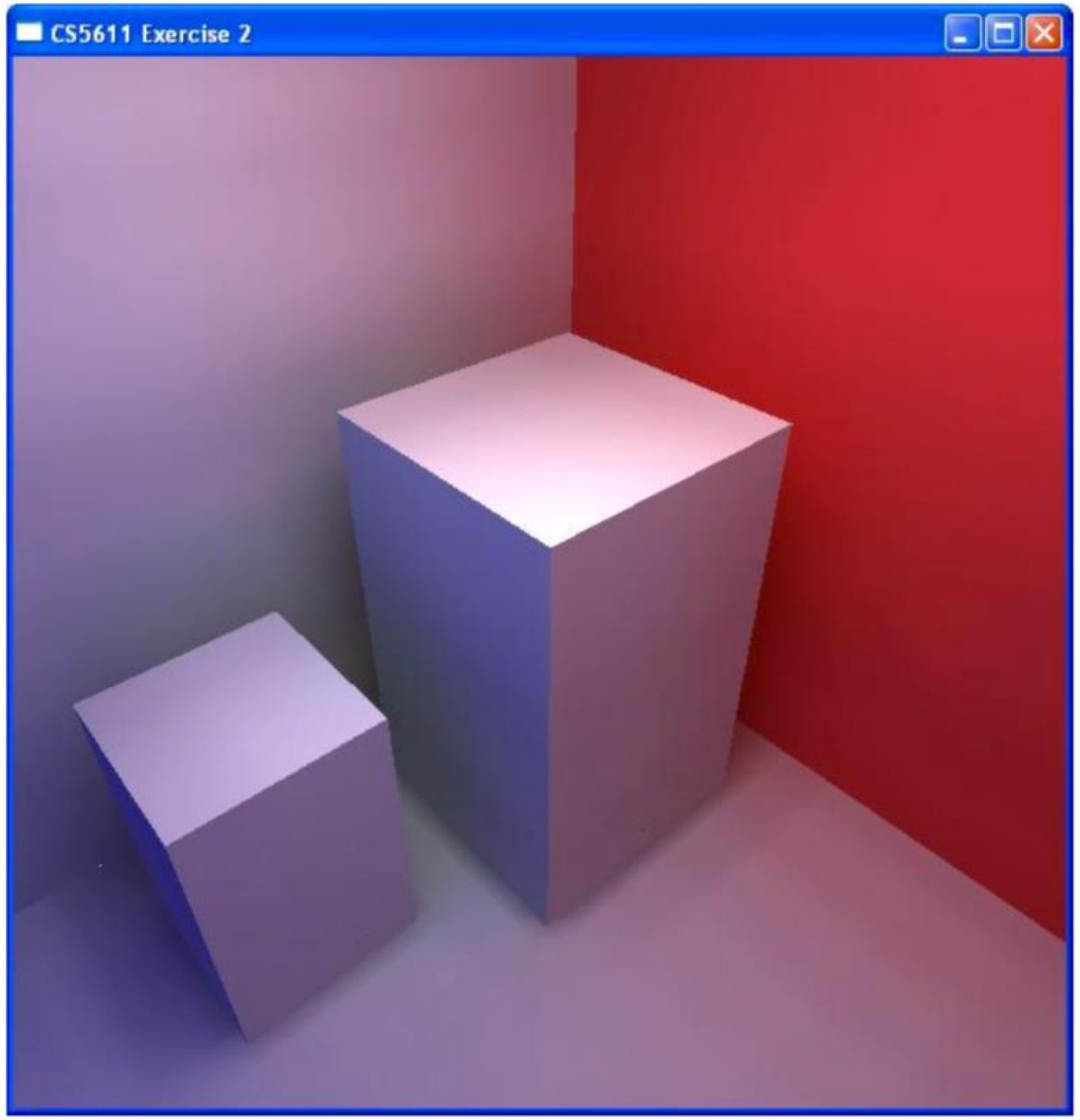
  - 因此，$\Delta F_p = \frac{z_p}{\pi\left(x_p^2+y_p^2+1\right)^2}\Delta A$

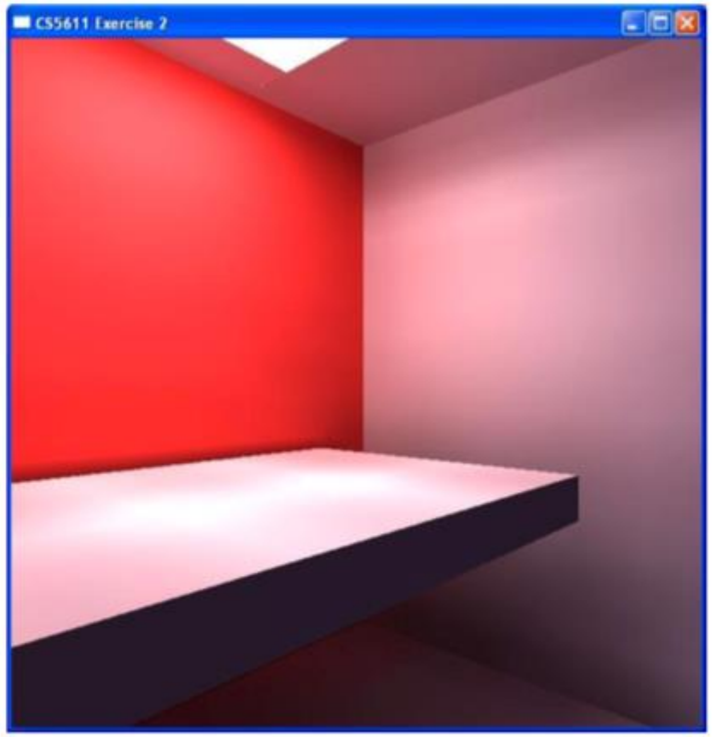


全局光照

- Radiosity：效果
  - – Color bleeding, soft light and shadow, indirect illumination







我在2009年刚接触图形学时所写的最为基础的radiosity渲染程序的绘制效果，程序包含2个场景，共计不到500行代码

概要

- 局部光照与全局光照简要回顾
- 全局光照
  – Ray tracing
  – Radiosity
- 射线与物体求交
  – 射线与平面，三角形，及球面求交
  – 加速算法

计算交点

射线与物体相交的通用情况

- 设射线为$P+tD$，其中P为射线的出发点， D为射线方向
- 设物体对应的曲面为$f(x,y,z)=0$
- 需要求的点为射线与曲面相交的点中，离P最近的点
  - 令t^*为$f\left(P_x+tD_x,P_y+tD_y,P_z+tD_z\right)=0$所有$t\geq 0$的实数解中最小的一个
  - 则$P_x+t^*D_x,P_y+t^*D_y,P_z+t^*D_z$为所求的最近交点
  - 若无$t^*\geq 0$的实数解，则射线与曲面f无交点
- 例，$P=(1,1,0)$，$D=(2,1,1)$，曲面为$x^2+y^2+z^2=2^2$
  - 则需求解$(1+2t)^2+(1+t)^2+t^2=3t^2+3t-1=0$
  - 解得$t=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$，其中唯一的正值解为$t=\frac{-3+\sqrt{21}}{6}$
  - 交点为$(1+2t,1+t,t)=(\frac{\sqrt{21}}{3},\frac{3+\sqrt{21}}{6},\frac{-3+\sqrt{21}}{6})$

计算交点

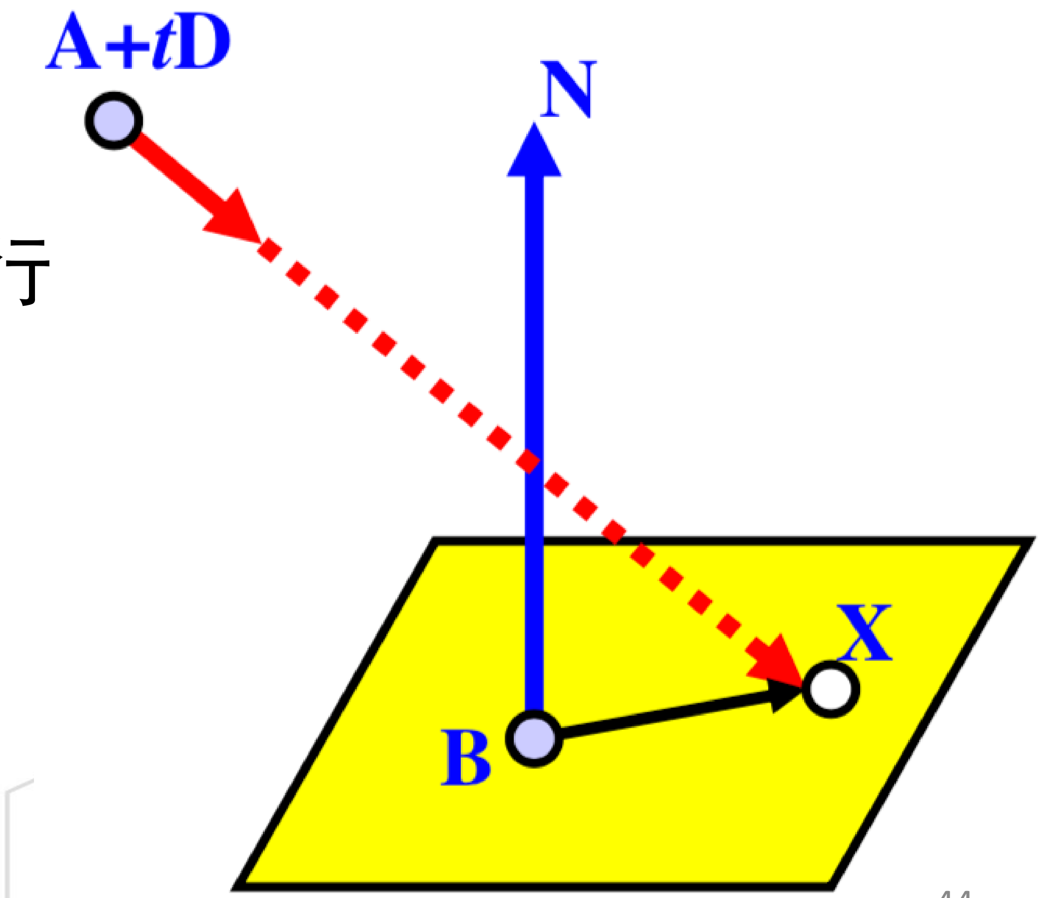
射线与物体相交的通用情况

- 然而，Abel与Galois都曾独立证明，高于4次的多项式方程，无法通过四则运算$(+,-,*,\div)$与开方求解
  - 参考Galois theory及Abel-Ruffini theorem
- 因此，当曲面$f(x,y,z)$为通用的高于4次的多项式方程时，我们只能通过近似方法求解（如牛顿方法），但在此情况下，我们很难确定最小的正解
  - 可用Sturm's method确定方程是否在某个区间内有解
- 即便对于低次多项式，精度损失也常造成不正确的解

计算交点

射线与平面相交

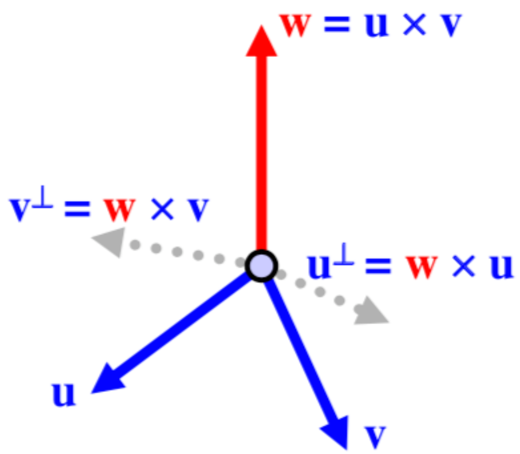
- 设射线为$A+tD$，平面上一点为B，法向量为N
- 若$A+tD$与平面交于点X，则有$X-B\perp N$，因此$[(A+tD)-B]\cdot N=0$
- 解得$t=\frac{(A-B)\cdot N}{D\cdot N}$
  - 当$D\cdot N=0$（即$D\perp N$）时，射线与平面平行
- 可基于此计算射线与三角形、四边形、网格的交点

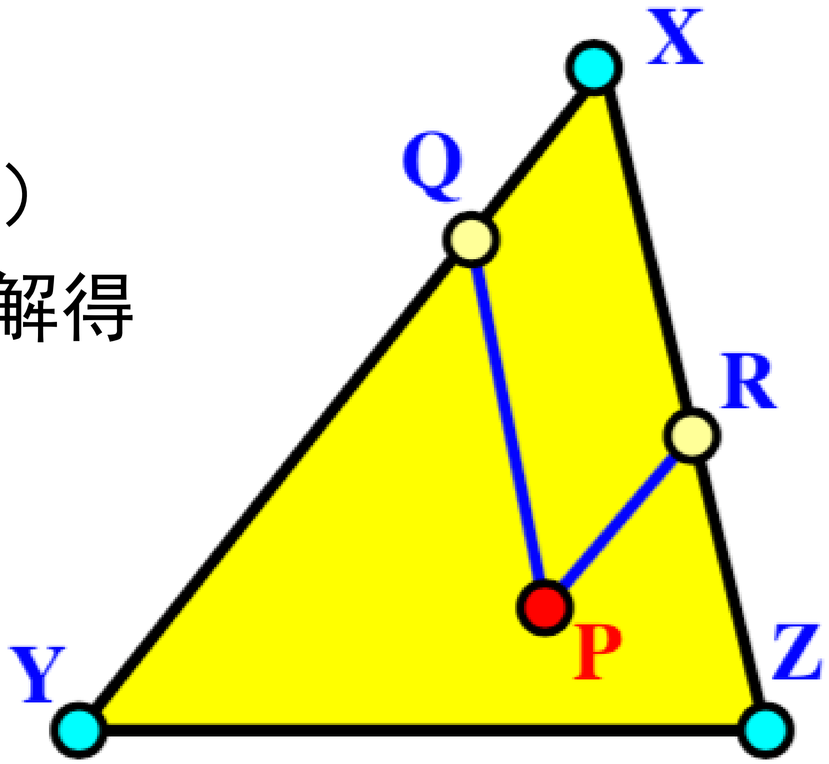


计算交点

射线与三角形的交点

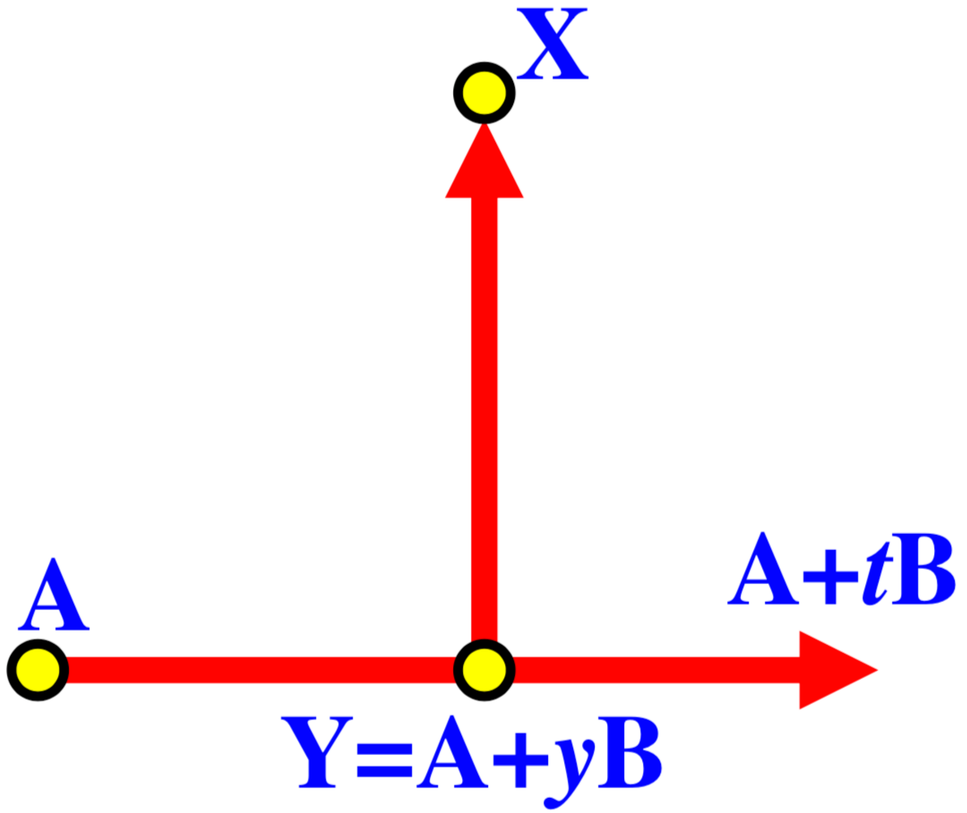
- 在求得射线与平面的交点P后，只需判断P是否在三角形内部即可
- 三角形内任意一点可写作$X+\alpha\cdot u+\beta\cdot v$（barycentric坐标）
  - X为三角形的一个顶点，u,v为从X出发指向另两个顶点的向量
  - $0\le\alpha\le 1,\ 0\le\beta\le 1,\ \alpha+\beta\le 1$
- 求解barycentric坐标(α,β)
  - 设$u^{\perp},v^{\perp}$为垂直于u,v的两个向量（即$u^{\perp}\perp u, v^{\perp}\perp v$）
  - 由$(P-X)\cdot u^{\perp}=(\alpha\cdot u+\beta\cdot v)\cdot u^{\perp}=\beta\cdot(v\cdot u^{\perp})$可解得
    - $\beta=\frac{(P-X)\cdot u^{\perp}}{v\cdot u^{\perp}}$
  - 同理$\alpha=\frac{(P-X)\cdot v^{\perp}}{u\cdot v^{\perp}}$





计算交点

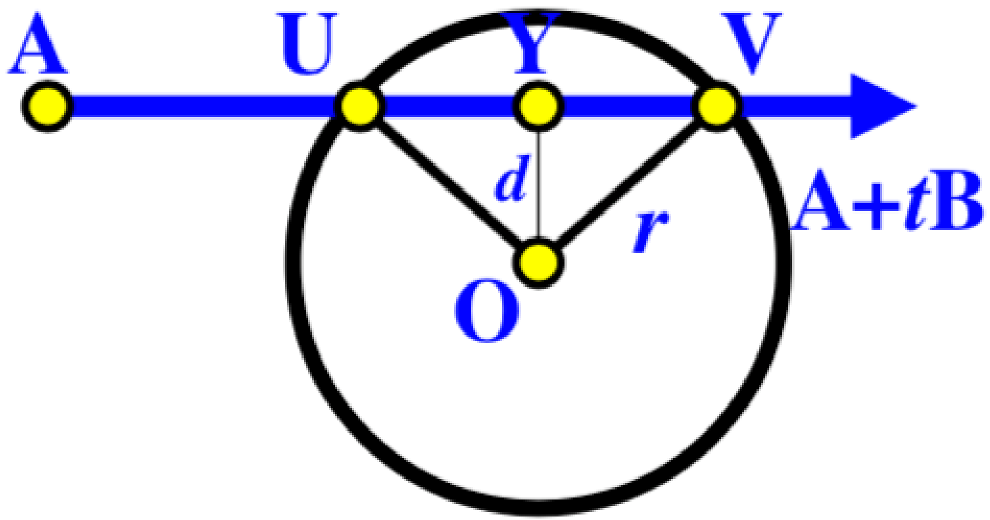
- 点与射线的距离
  - 设射线$A + tB$上离点X最近的点为Y，则XY间连线与B垂直
  - 因此有$(X - Y) \cdot B = 0$即$X \cdot B - (A + tB) \cdot B = 0$
  - 解得$t = \frac{(X-A)\cdot B}{|B|^2}$
  - 将t代入可求得Y
  - 点到直线的距离即为$|X - Y|$



计算交点

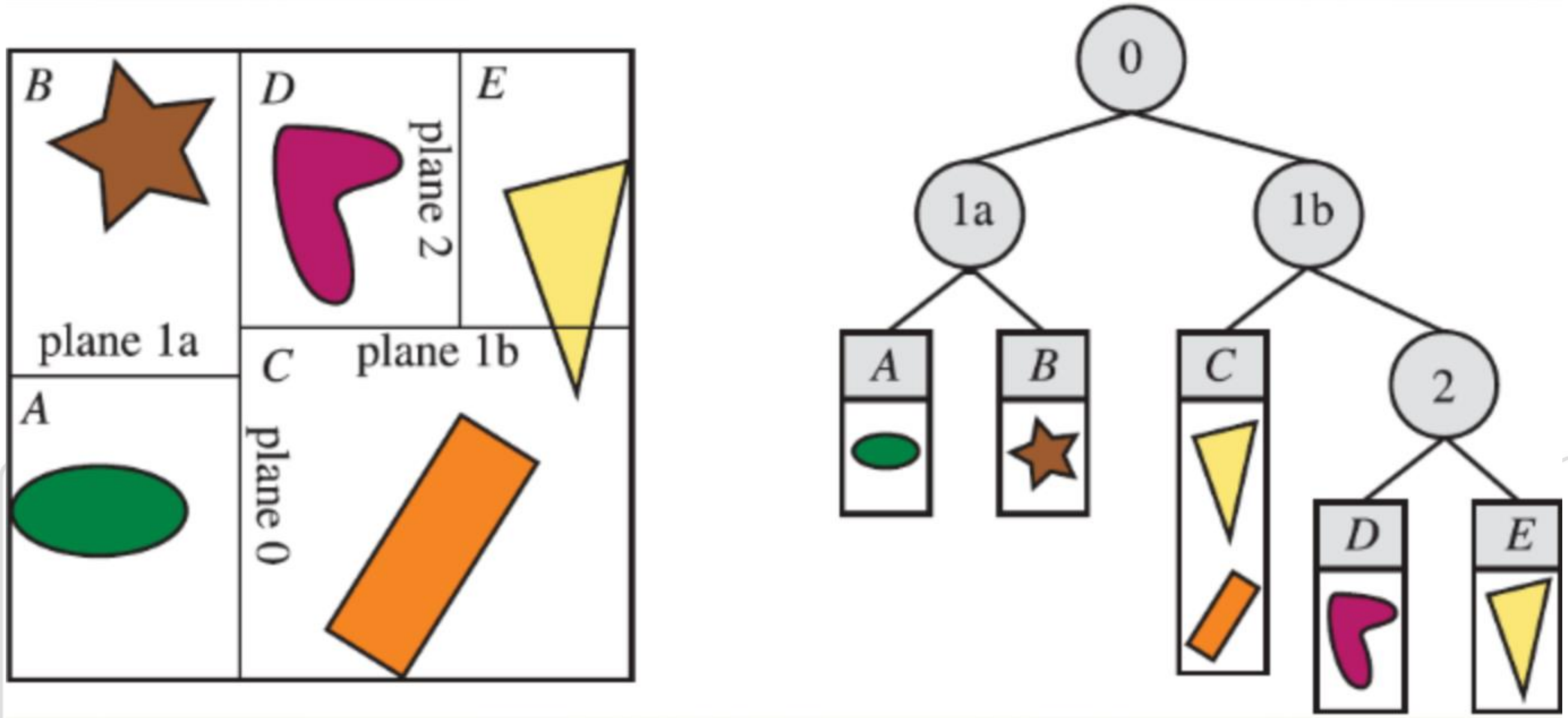
射线与球面的交点

- 设球心为O，球面半径为r，射线为$A+tB$
- 计算$A+tB$与O的距离d
  - 当$d>r$时，射线与球面无交点
  - 当$d=r$时，射线与球面有一个交点（相切）
  - 当$d<r$时，射线与球面有两个交点
- 令点Y为$A+tB$与O最近的点，则两个交点U,V到Y的距离为$k=\sqrt{r^2-d^2}$，即U,V为$Y\pm kB/|B|$



减少交点计算

- Bounding volume hierarchies与space subdivision
- Space subdivision举例：kd-tree
  - 八叉树（octree）的高维扩展
  - 每次沿一个新的方向将数据切分成两半

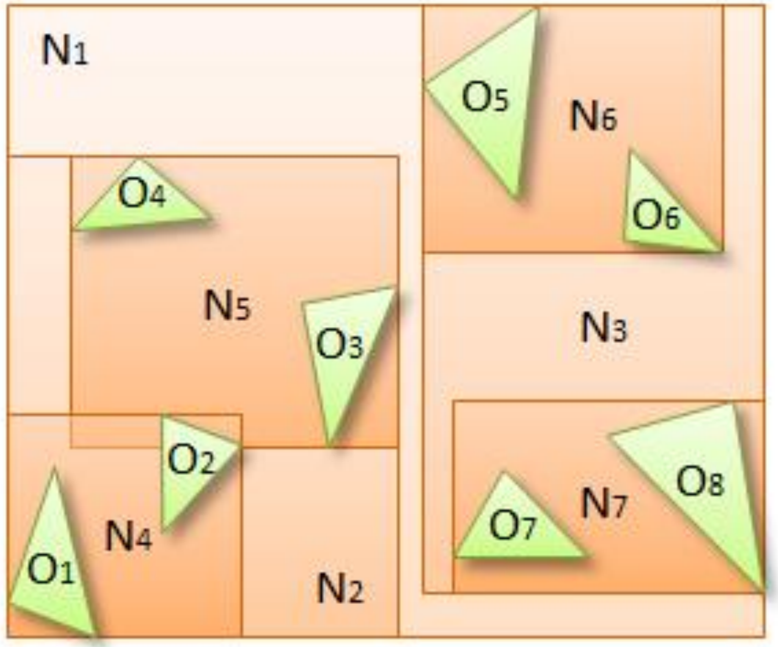


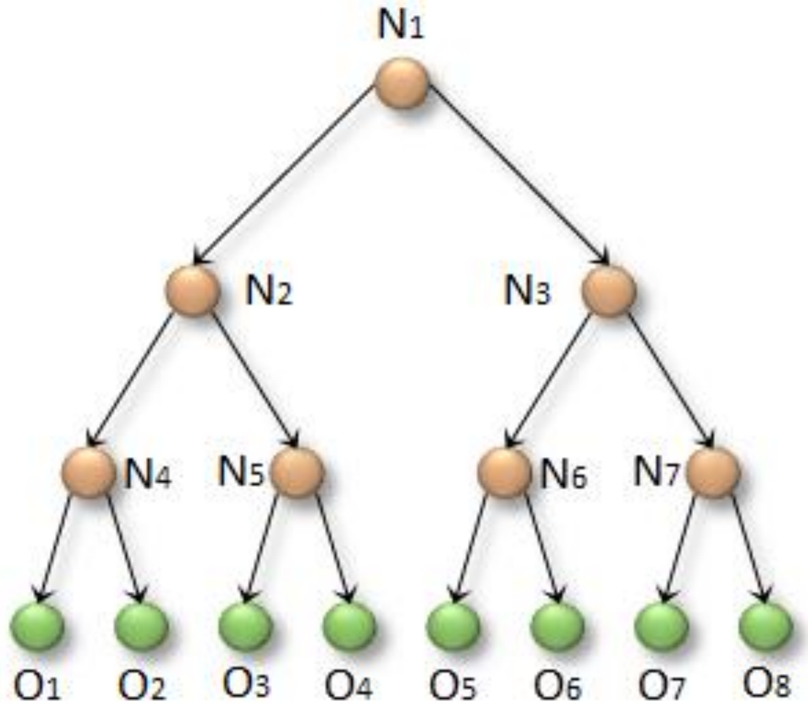
图片来自 https://www.cs.utexas.edu/~ckm/teaching/cs354_f11/lectures/Lecture21.pdf

加速光线追踪

减少交点计算

– bounding volume hierarchy (BVH)-tree
  - NVIDIA最新显卡中硬件加速ray tracing即基于此算法
  - 使用包围盒（bounding volume）将物体分配到树的节点中
  - 在查找最近邻时，先判断与包围盒的距离

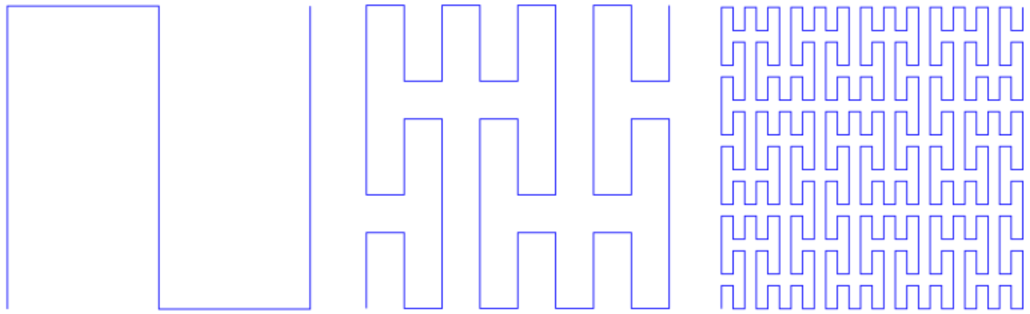




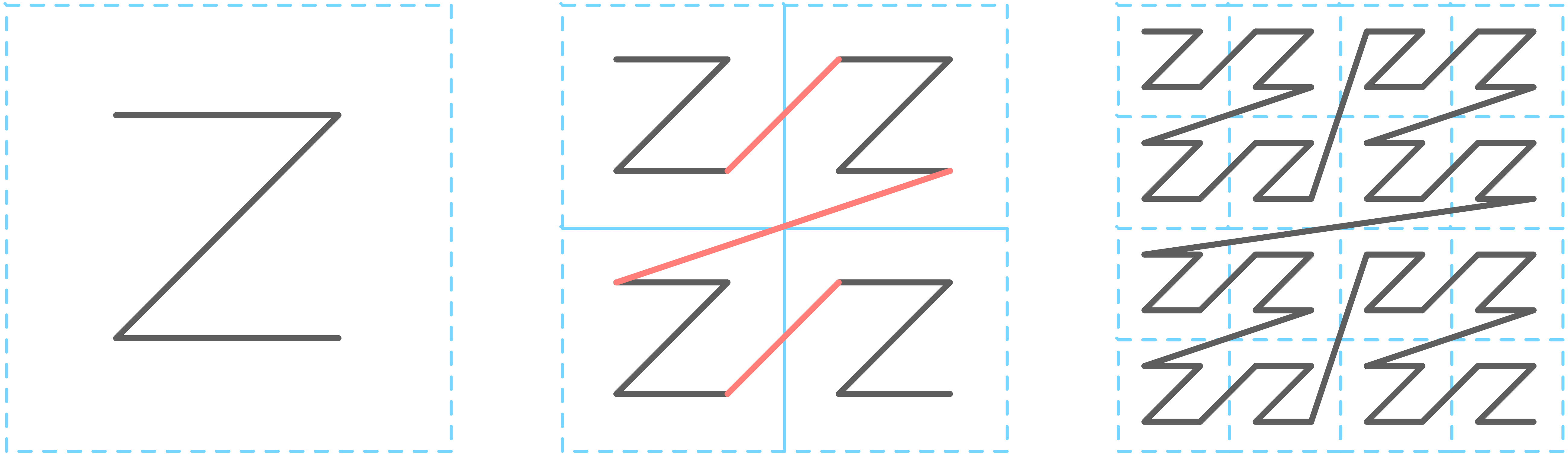
图片来自 https://devblogs.nvidia.com/thinking-parallel-part-ii-tree-traversal-gpu/

加速光线追踪

- 构建BVH-tree（Karra’s algorithm)
  - 1. 将所有几何体沿空间填充曲线排列
    - 沿 Z-order curve 排列
    - 使用一维曲线填充高维空间
    - 源于分形几何

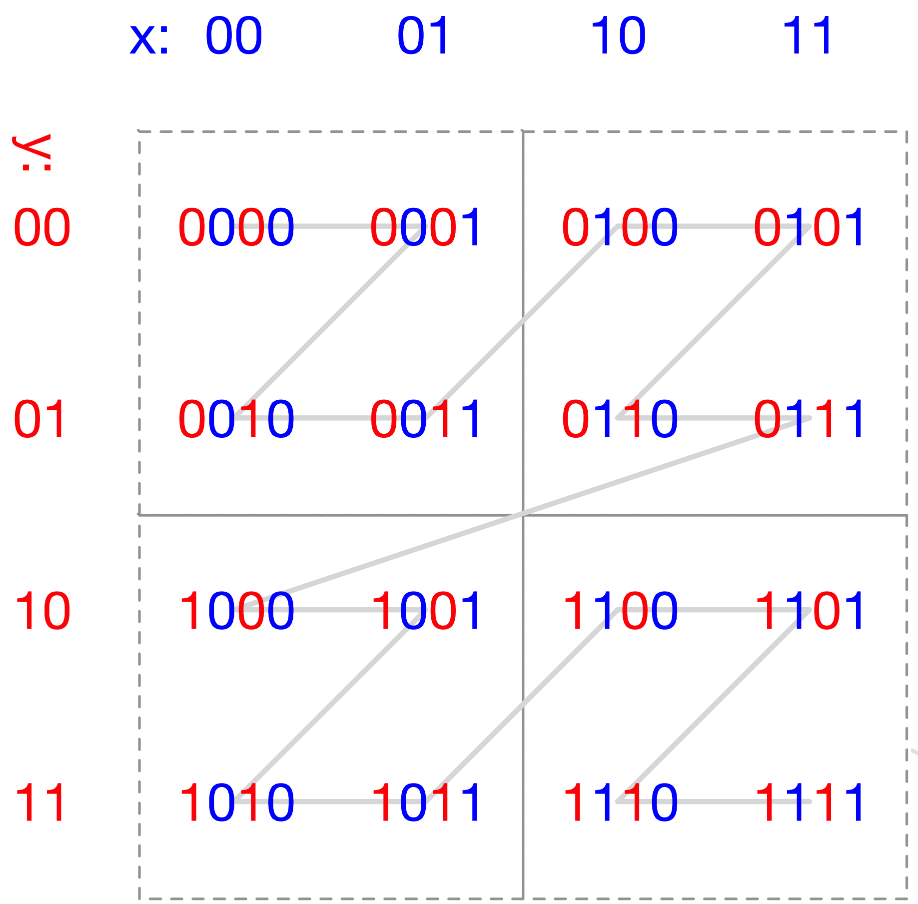


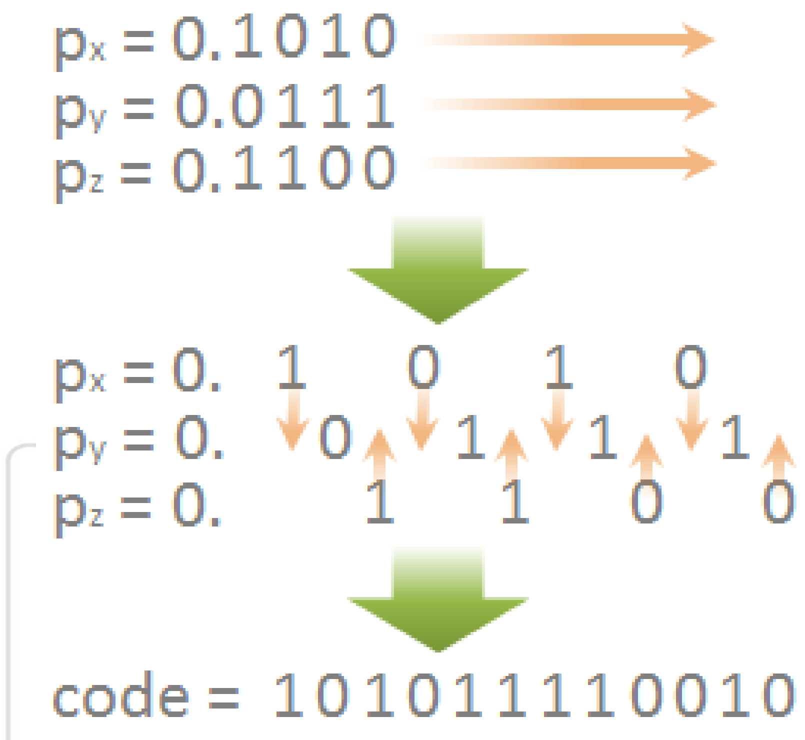
Peano Curve. 图片来自Wikipedia.

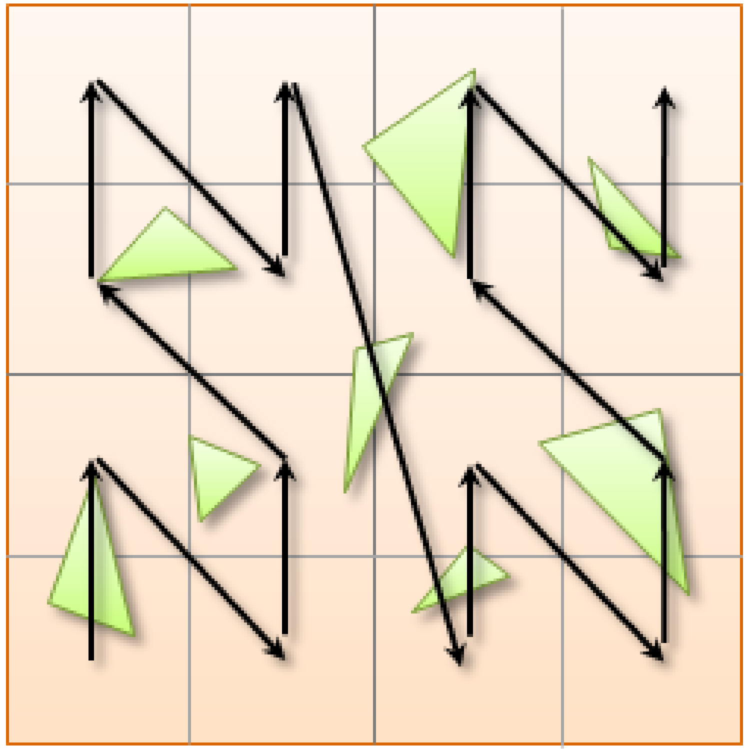


加速光线追踪

- 构建BVH-tree（Karra’s algorithm)
  - 1. 将所有几何体沿 Z-order curve 排列
    - 将三维坐标转为Morton codes
    - 将几何体按其Morton codes排序 （radix sort）

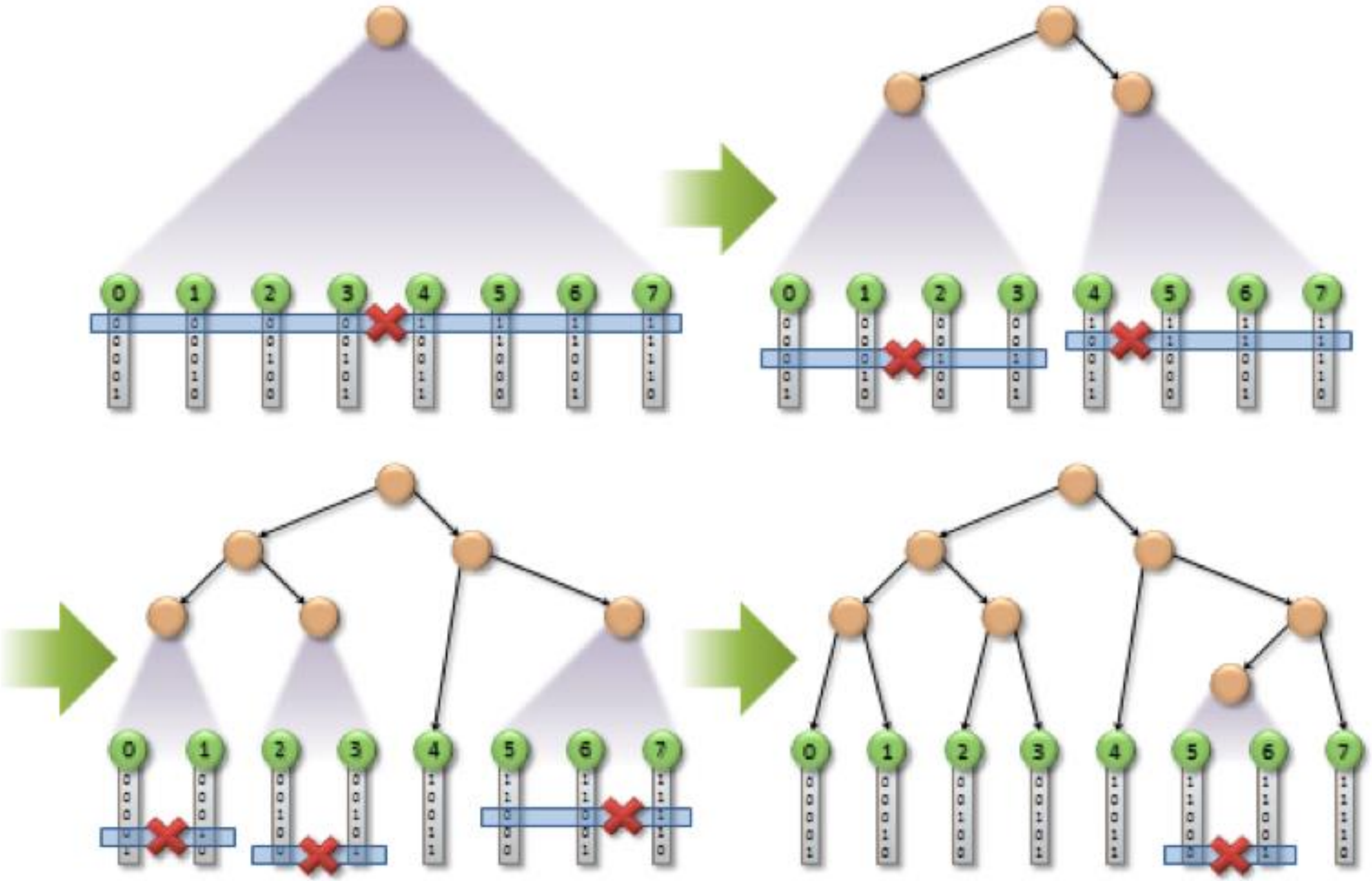






图片来自 https://devblogs.nvidia.com/thinking-parallel-part-iii-tree-traversal-gpu/

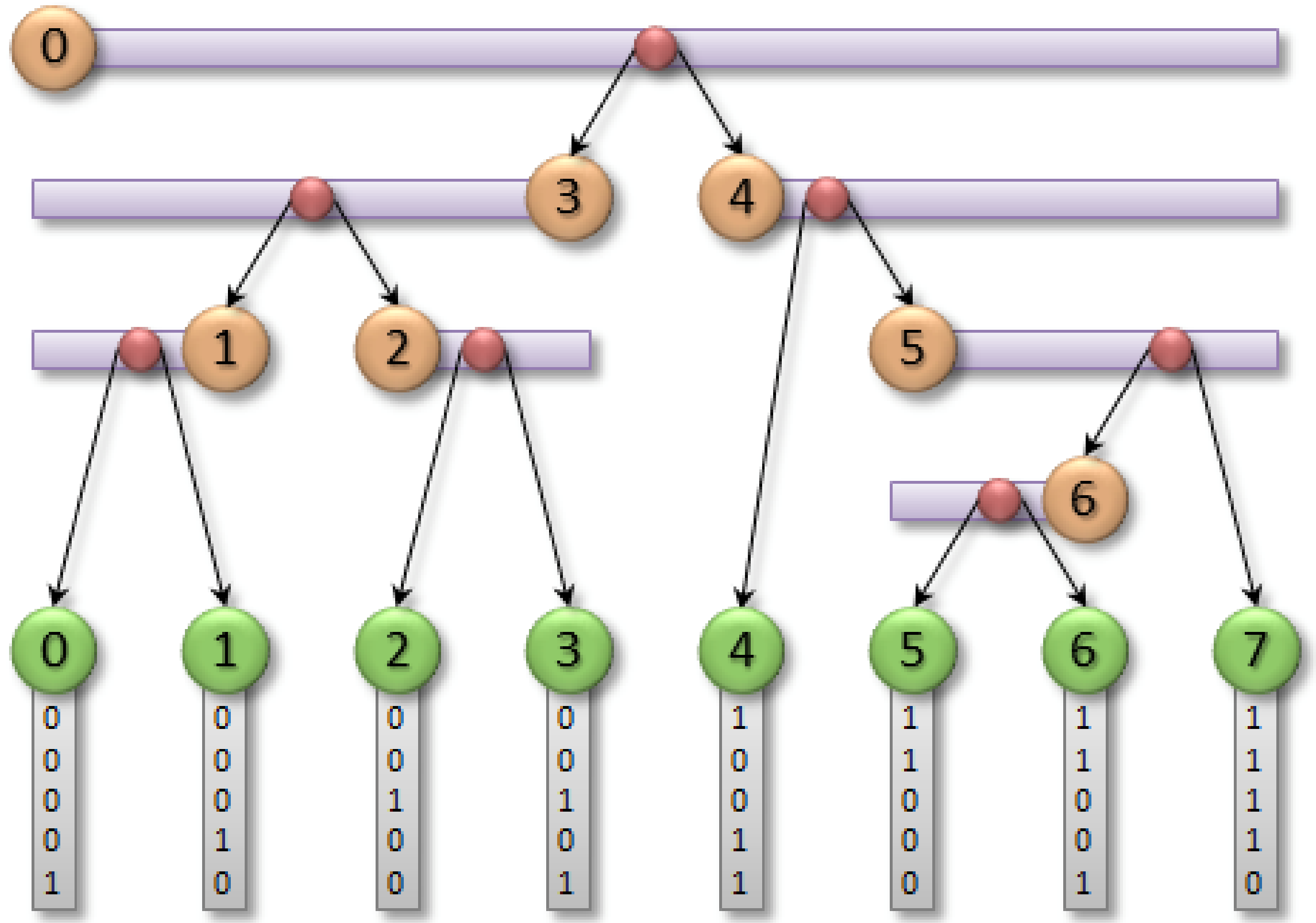
- 构建BVH-tree（Karra’s algorithm)
  - 2. 将排列好的几何体分段
    - 根据Morton codes最高不同位分段（可并行）



图片来自 https://devblogs.nvidia.com/thinking-parallel-part-iii-tree-traversal-gpu/

加速光线追踪

- 构建BVH-tree（Karra’s algorithm)
  - 2. 将排列好的几何体分段
    - 将几何体放入相应的range中



图片来自 https://devblogs.nvidia.com/thinking-parallel-part-iii-tree-traversal-gpu/

小结

- 局部光照下产生阴影
  - OpenGL模型本身不产生阴影
  - 以光源为视角在需要产生阴影的平面上绘制黑色物体（阴影）
  - 无法产生间接照明导致的阴影或复杂形状上的阴影
- 全局光照
  - Ray tracing从视角出发递归追踪光线来源及反射光线的物体，从而计算每一道视线最终捕获的颜色
  - Radiosity将物体切分成小块，并将小块间能量传递组织成线性方程组，从而计算每一个小块最终呈现的颜色
- 线与物体求交
  - 活用射线与物体的向量表现形式；使用空间切割算法减少计算

Questions?