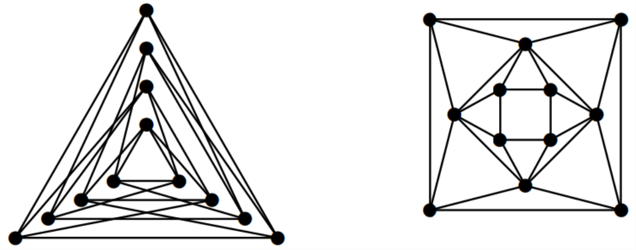
本次课程提纲：平面图

- 平面图概念
- 平面图性质
- 平面图判定

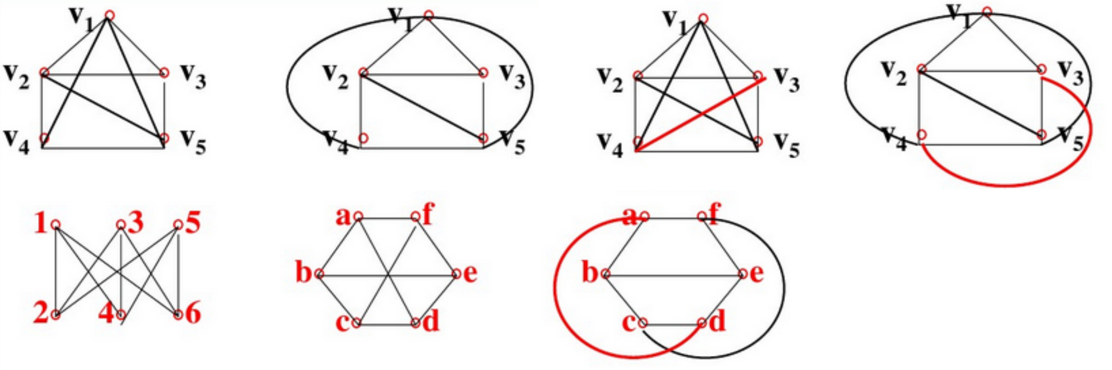
平面图定义

- 如果能把图 G 画在平面上，使得除顶点外，边与边之间没有交叉，称 G 可以嵌入平面，或称 G 是可平面图
- G 的边不交叉的一种画法，称为 G 的一种平面嵌入
- G 的平面嵌入表示的图称为平面图



- 应用：公路规划、集成电路设计

非平面图例子：K_5 与 $K_{3,3}$



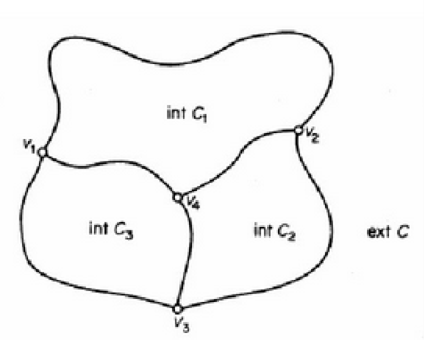
Jordan 曲线

平面上的自身不相交的封闭曲线称为 Jordan 曲线

Jordan 曲线定理

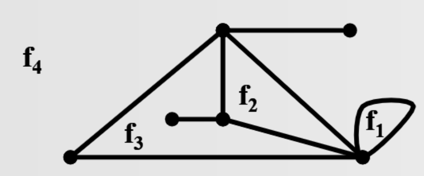
Jordan 曲线把平面分成内外 2 部分，连接两部分的任意曲线必然与 Jordan 曲线相交

可以用来证明 K_5 不是平面图



平面图的面

- 平面图 G 把平面分成若干连通片，称为 G 的区域，或面，其集合记为 Φ
- 面积有限的面称为内部面，否则称为外部面
- 顶点和边都与某个面关联的子图，称为该面的边界
- 面 f 的边界中含有的边数称为 f 的次数，记为 $deg(f)$
    - 割边计算 2 次



f_1, f_2, f_3, f_4 的次数分别为 $1, 3, 6, 6$

平面图性质

平面图的次数

设 $G=(n,m)$ 是平面图，$\sum_{f\in\Phi} deg(f)=2m$。

证明

考察 G 的每条边 e

- 如果 e 是某面割边，由面的次数定义，e 给总次数贡献 2
- 否则，它必是两个面的公共边，也给总次数贡献 2

平面图 Euler 公式

平面图 Euler 公式

设 $G = (n, m)$ 是有 ϕ 个面的连通平面图，$n - m + \phi = 2$。

证明

- 如果 G 是树，$m = n - 1$，$\phi = 1$，定理成立，以下假设 G 不是树
- 若等式不成立。则存在一个含有最少边数的连通平面图 G，不满足 Euler 公式。设 $G = (n, m)$，面数为 ϕ，$n - m + \phi \neq 2$
- 因为 G 不是树，所以存在非割边 e，$G - e$ 是 $(n, m - 1)$ 连通平面图，面数为 $\phi - 1$
- 由最少性假设，$G - e$ 满足 Euler 等式：$n - (m - 1) + (\phi - 1) = 2$
- 即 $n - m + \phi = 2$，矛盾

Euler 公式推论

推论

平面图 G 有 k 个连通分支，$n - m + \phi = k + 1$

证明

对每个分支用 Euler 公式

推论

若连通平面图 G 每个面 f 满足 $deg(f) \geq l \geq 3$，则 $m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-2)$

证明

- 一方面，由次数公式得 $2m = \sum_{f \in \Phi} deg(f) \geq l\phi$，$\phi \leq 2m/l$
- 另一方面，由 Euler 公式得 $n - m + \phi = 2$
- 综合有 $\phi = 2 - n + m \leq 2m/l$，即 $m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-2)$

Euler 公式推论

习题

$K_{3,3}$ 不是平面图

证明

$K_{3,3}$ 是偶图，不存在奇圈，所以，即 $l \geq 4$，由推论可证

Euler 公式推论

推论

对任何简单平面图 G，有 $m \le 3n - 6$

证明

- 若 G 连通，有 $l \ge 3$，由推论得 $m \le 3n - 6$
- 若 G 不连通，含有 k 个连通分支，由 Euler 公式，$n - m + \phi = k + 1$
- 由次数公式，$\phi \le 2m/3$
- $m \le 3n - 3(k + 1) \le 3n - 6$

习题

K_5 不是平面图

证明

K_5 是简单图，$m = 10$，$n = 5$，$3n - 6 = 9$

Euler 公式推论

推论

对任意简单平面图，有 $\delta \leq 5$

证明

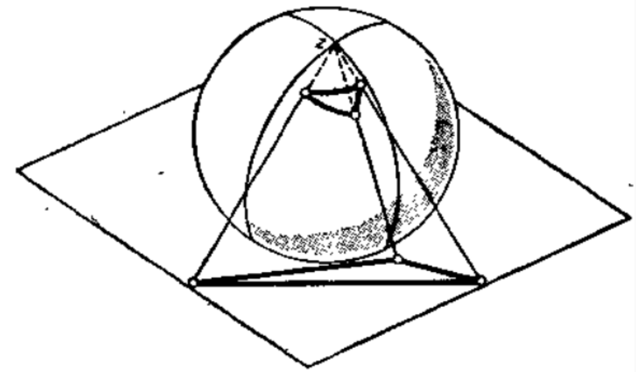
若 $\delta \geq 6$，由握手定理，$6n \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$，$m \geq 3n$，矛盾

该性质是 5 色定理的出发点

图的嵌入性

定理

G 可球面嵌入当且仅当 G 可平面嵌入

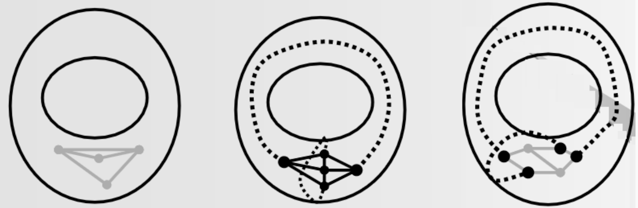


图的嵌入性

环面的形状像一个轮胎的表面

例题

将 $K_4, K_5, K_{3,3}$ 嵌入到环面上



图的嵌入性

定理

所有图均可嵌入 R^3 中

证明

作 R^3 中曲线 $l: x = t, y = t^2, z = t^3$，可以证明把 G 的顶点放在该曲线的不同位置，G 的任意两条边不相交

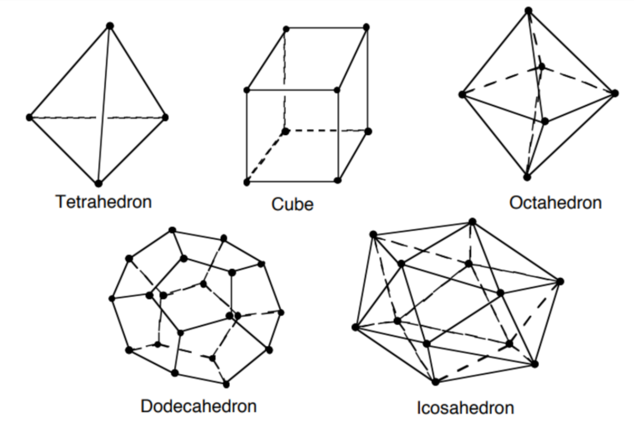
- 对 l 上任意不同的 4 个顶点 (t_i, t_i^2, t_i^3)

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

- 所以 4 点不共面

凸多面体与平面图

- 一个多面体，如果在体上任取两点，其连线均在体上，称为凸多面体
- 凸多面体的一维骨架：把凸多面体压缩在平面上，得到的平面图，称为该凸多面体的一维骨架



正凸多面体

定理

存在且只存在 5 种正多面体（plato 立体）：正四、六、八、十二、二十面体

证明一

利用如下性质

- 任何顶点至少和三个面相邻
- 一个顶点上的面，所有内角之和必须小于 2π

分情况讨论，每个顶点邻接的面数记为 k

- 面为正三角形：$3 \le k < 6$，$k = 3, 4, 5$，分别对应正四、八、十二面体
- 面为正方形：$3 \le k < 4$，$k = 3$，对应正六面体，即立方体
- 面为正五边形：$3 \le k < 3.33$，$k = 3$，对应正十二面体
- 面为正 x 边形（$x \ge 6$）：$3 \le k < 3$，不存在

正凸多面体

证明二

每个顶点连接 k 个正 l 边形

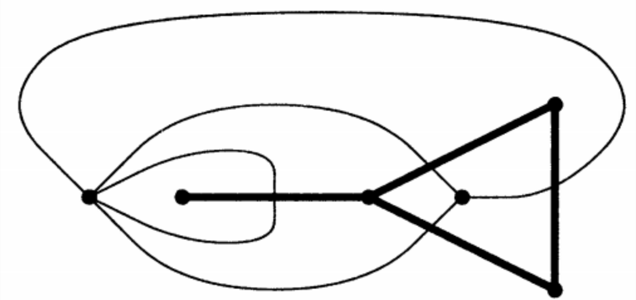
- 由 Euler 定理：$n + \phi - m = 2$
- 每个顶点连接相同数量的边：$m = kn/2$
- 每个面都是 l 边形：$m = l\phi/2$

故 $\dfrac{2m}{k} + \dfrac{2m}{l} - m = 2$，$\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}$，枚举可解

平面图的对偶图

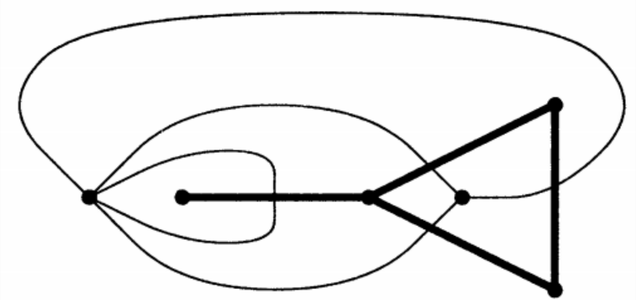
G 的对偶图 G^* 构造如下

- 在 G 的每个面 f_i 内取一个点 v_i^* 作为 G^* 的一个顶点
- 对 G 的一条边 e, 若 e 是面 f_i 与 f_j 的公共边，连接 v_i^* 与 v_j^*，若 e 是面 f_i 中的割边，以 v_i 为顶点作环



对偶图性质

- G^* 的顶点数等于 G 的面数
- G^* 的边数等于 G 的边数
- G^* 的面数等于 G 的顶点数
- $d(v^*) = \deg(f)$



对偶图性质

定理

平面图 G 的对偶图 G^* 连通

证明

在 G^* 中任意取两点 v_i^* 与 v_j^*，我们证明他们连通

- 用一条曲线 l 把 v_i^* 与 v_j^* 连接起来
- l 从 v_i^* 到 v_j^* 经过的面边序列，对应从 v_i^* 到 v_j^* 的点边序列，该点边序列就是 v_i^* 到 v_j^* 的通路

对偶图性质

定理

对平面图 G，$(G^*)^* \simeq G$ 当且仅当 G 连通。

证明

必要性

- G 是平面图，故 G^* 连通
- 故 G^* 是连通平面图，故 $(G^*)^* \simeq G$ 连通

充分性

- 由对偶图的定义，G 与 G^* 嵌入在同一平面上
- G 连通，故 G^* 的无界面中仅含 G 的唯一顶点 v
- 除 v 外，G 中其它顶点均与 G^* 的有限面一一对应
- 故 G 中顶点和 $(G^*)^*$ 顶点一一对应，且对应顶点间邻接关系一致

对偶图性质

同构的平面图可以有不同构的对偶图

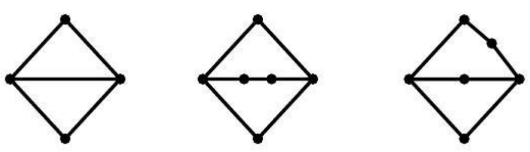
G_2 中有次数是 1 的面，而 G_1 中没有，所以，它们的对偶图不同构

平面图的初步判定

- 对简单图 G，若 $m > 3n - 6$，则 G 不是平面图
- 对简单图 G，若 $m > l(n-2)/(l-2)$，则 G 不是平面图

同胚

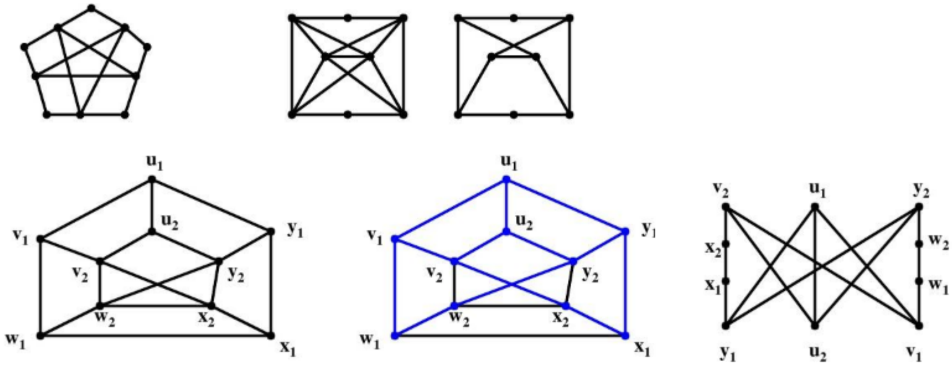
- 在图的边上插入一个 2 度顶点，使一条边分成两条边，称将图在 2 度顶点内扩充
- 去掉一个图的 2 度顶点，使关联它们的两条边合并成一条边，称将图 G 在 2 度顶点内收缩
- 如 G_1 与 G_2 通过反复 2 度顶点内扩充和收缩后变成同构，称它们同胚
- 图的平面性在同胚意义下不变



Kuratowski 定理

Kuratowski 定理

G 是平面图，当且仅当它不含 K_5 和 $K_{3,3}$ 同胚的子图



推论

G 是非平面图，当且仅当它含有与 K_5 和 $K_{3,3}$ 同胚的子图

基础简单图

去掉 G 中的环，用单边代替平行边而得到的图称为 G 的基础简单图

定理

- 图 G 是平面图，当且仅当它的基础简单图是平面图
- 图 G 是平面图，当且仅当它的每个块是平面图

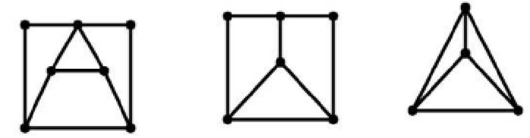
证明

(1) 与 (2) 的必要性由平面图的定义立得，下证 (2) 的充分性

- 不失一般性，假设 G 连通。对 G 的块数 n 作数学归纳
- $n = 1$ 时显然，设 $n < k$ 时成立，考察 $n = k$
- 设 v 是 G 的割点
- 按归纳假设，G_1 与 G_2 都是平面图
- 把它们在 v 处对接后，得到 G 的平面嵌入，故 G 是可平面图

Wangner 判定定理

设 uv 是简单图 G 的一条边，去掉该边，重合其端点，再删去由此产生的环和平行边，这一过程称为 G 的初等收缩或边收缩



Wangner 定理

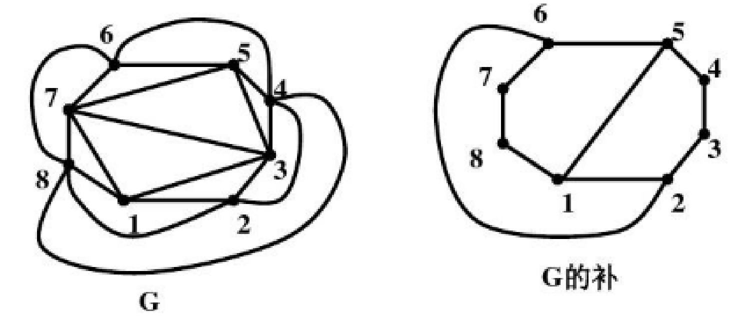
简单图 G 是平面图，当且仅当它不含可收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图

Peterson 图不是平面图

平面图判定

定理

至少有 9 个顶点的简单平面图的补图不是平面图，9 为顶点数的下界



平面图判定

习题

G 是至少有 11 个顶点的简单图，G 与 G 的补图至少有一个不是平面图

证明

设 G 是平面图

- 有 $m \le 3n - 6$，故 $\bar{m} \ge n(n-1)/2 - (3n-6)$
- 可以证明，$n \ge 11$ 时，$\bar{m} > 3n - 6$
- G 的补图不是平面图

平面图判定

习题

证明：若 G_1 与 G_2 同胚，$n_1 + m_2 = n_2 + m_1$

证明

设 G_1 经过 p_1 次 2 度顶点扩充，p_2 次 2 度顶点收缩得到 H_1，G_2 经过 q_1 次 2 度顶点扩充，q_2 次 2 度顶点收缩得到 H_2，H_1 与 H_2 同构

- $n_1 + m_2 = n + m - p_1 + p_2 q_1 + q_2 = n_2 + m_1$