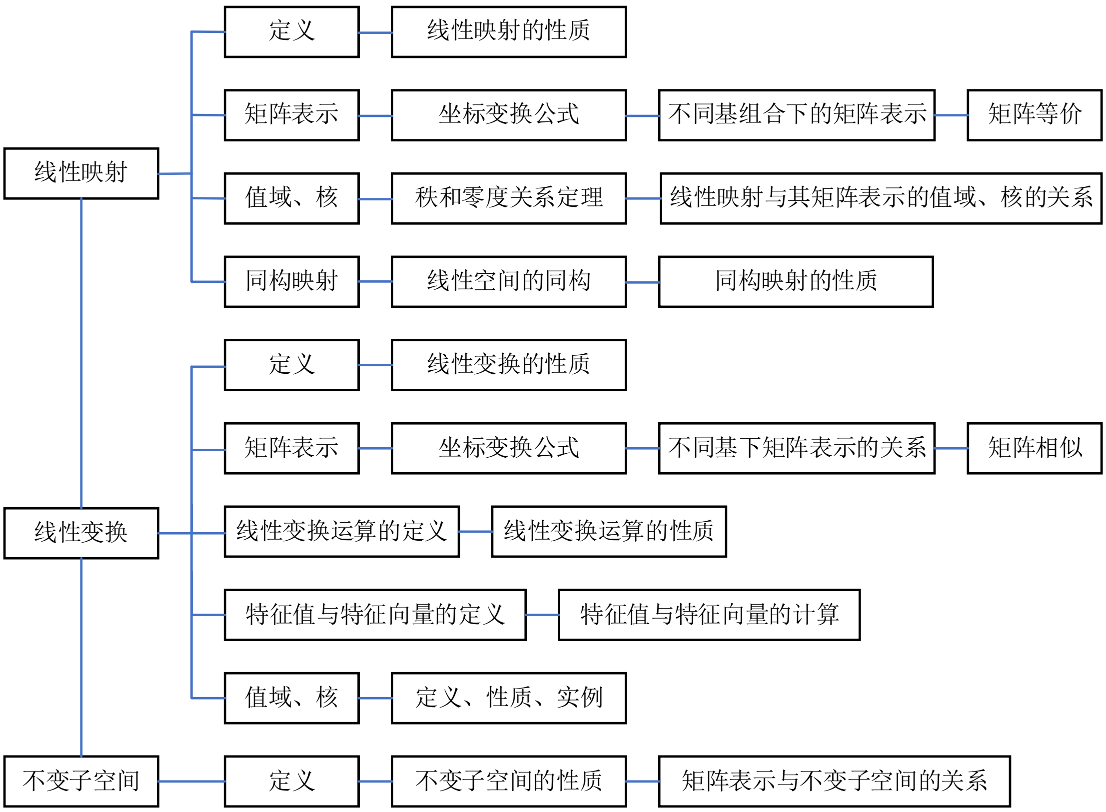
第 2 章　线性变换

第 1 章给出了同一个线性空间中元素之间的关系，本章继续研究两个或多个线性空间中元素之间的关系，为此引入线性映射和线性变换的概念．如同线性空间是具体的非空集合的抽象一样，线性变换也是从几何空间的旋转变换、反射变换等具体变换中抽象出来、并通过提炼其本质属性而定义的重要概念，其理论和方法可应用于一些类似问题的处理和解决．

本章首先从线性映射这一更具一般性的概念开始，理论分析表明：给定映射空间各自的基之后，线性映射与其矩阵表示是一一对应的，可以用其矩阵表示唯一地代表．线性变换是线性映射的特例，在线性映射理论的基础上，介绍线性变换的概念及其矩阵表示、线性变换的特征值与特征向量、线性变换的不变子空间等内容，这些内容是学习矩阵理论所需的基础知识．

本章的知识网络框图：



2.1 线性映射

2.1.1 线性映射的定义及性质

定义 2.1.1 设V_1和V_2是数域$\mathbb{F}$上的两个线性空间，σ是从V_1到V_2的映射，如果对于任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1$和任意数$\lambda\in\mathbb{F}$，都有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),$$
$$\sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1)=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),$$

则称映射σ是从V_1到V_2的**线性映射**. 称V_1为**定义域**，V_2为**值域**或**像集**；称$\boldsymbol{\alpha}$为$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$的**原像**，$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$为$\boldsymbol{\alpha}$的**像**.

例 2.1.1 设映射$\sigma: V\to V$由

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha},\quad \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$$

确定，称之为**恒等映射**，试证：σ是线性映射.

证： 由该映射定义，有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,$$
$$\sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\lambda\in\mathbb{F},$$

因此恒等映射是线性映射. ■

例 2.1.2 设映射$\sigma: V_1\to V_2$由

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\quad \forall\boldsymbol{\alpha}\in V_1$$

确定，称之为**零映射**，试证：σ是线性映射.

证： 由该映射定义，有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1,$$
$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}=k\mathbf{0}=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V_1,k\in\mathbb{F},$$

因此零映射是线性映射. ■

例 2.1.3 设$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)$是$m\times n$实矩阵，若映射$\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$由

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha},\qquad \forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$$

确定，易证：σ是线性映射.

例 2.1.3 中的向量$\boldsymbol{\alpha}$是列向量. 与线性代数的惯例一样，如果不特别申明，向

量指的是列向量.

例 2.1.4　设映射$\sigma: \mathbb{R}[x]_{n+1} \to \mathbb{R}[x]_n$由下式确定:

$$\sigma\big(f(x)\big) = \tfrac{d}{dx} f(x),\ \ \forall f(x) \in \mathbb{R}[x]_{n+1},$$

其中, $\mathbb{R}[x]_n$表示次数小于 n 的变量 x 的实系数多项式$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$的集合, 不难验证, σ是线性映射.

例 2.1.5　设映射$S: \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n+1}$由下式确定:

$$S\big(f(x)\big) = \int_0^x f(t)dt, \qquad f(x) \in \mathbb{R}[x]_n,$$

不难验证, S是线性映射.

线性映射具有如下性质:

(1) $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

(2) $\sigma(-\boldsymbol{\alpha}) = -\sigma(\boldsymbol{\alpha})$;

(3) $\sigma(\sum_{i=1}^{s} k_i \boldsymbol{\alpha}_i) = \sum_{i=1}^{s} k_i \sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)$, 其中$\boldsymbol{\alpha}_i \in V, k_i \in \mathbb{F}$;

(4) 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \in V_1$且线性相关, 则$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$也线性相关.

证: (1) $\sigma(\mathbf{0}) = \sigma(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \sigma(\mathbf{0}) + \sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{2}\sigma(\mathbf{0}) \Rightarrow \sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(2) $\sigma(-\boldsymbol{\alpha}) = \sigma((-1)\boldsymbol{\alpha}) = (-1)\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = -\sigma(\boldsymbol{\alpha})$.

(3) $\sigma(\sum_{i=1}^{s} k_i \boldsymbol{\alpha}_i) = \sum_{i=1}^{s} \sigma(k_i \boldsymbol{\alpha}_i) = \sum_{i=1}^{s} k_i \sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)$.

(4) 由于$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关, 不失一般性, 设

$$\boldsymbol{\alpha}_s = k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + k_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_{s-1} \boldsymbol{\alpha}_{s-1},$$

由(3)的结论, 有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s) = k_1 \sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2 \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_{s-1} \sigma(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}),$$

因此, $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$也线性相关. ■

但是, 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \in V_1$线性无关, 则$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$不一定线性无关, 详见下述例题.

例 2.1.6　设线性映射$P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$由下式确定:

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \to P(\boldsymbol{\alpha}) = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2,$$

容易验证: $\mathbb{R}^3$中的三个线性无关向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

的像

$$P(\boldsymbol{\alpha}_1) = (1,1)^{\mathrm{T}}, P(\boldsymbol{\alpha}_2) = (1,1)^{\mathrm{T}}, P(\boldsymbol{\alpha}_3) = (1,0)^{\mathrm{T}}$$

是线性相关的.

2.1.2 线性映射的矩阵表示

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V_1$的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$是$V_2$的一组基，$\sigma$是$V_1\to V_2$的一个线性映射，则

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{\beta}_i \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

上式可写成

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)&=\big(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\big)\\&=\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\boldsymbol{\beta}_i,\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\boldsymbol{\beta}_i,\cdots,\sum_{i=1}^{m} a_{in}\boldsymbol{\beta}_i\right)\\&=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},$$

将其代入式(2.1.1)，得

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}.$$

定义 2.1.2　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V_1$的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$是$V_2$的一组基，$\sigma$是$V_1\to V_2$的线性映射，若

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A},$$

则矩阵$\boldsymbol{A}$称为线性映射σ在基$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$与基$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$下的**矩阵表示**.

定义 2.1.2 中，在确定的一对基下的矩阵表示$\boldsymbol{A}$是唯一的(为什么?)，在不同对基下的矩阵表示是不同的.

有了线性映射σ在一对基下的矩阵表示$\boldsymbol{A}$之后，可以得到定义域V_1中向量$\boldsymbol{\alpha}$的坐标与它在像空间V_2中的像$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$的坐标之间的关系.

设$\boldsymbol{\alpha}\in V_1$，故

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},$$

它的像$\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in V_2$可以写为

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{j=1}^{m} y_j\boldsymbol{\beta}_j=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}.$$

又

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\ \text{(为何可先对基映射再乘以坐标向量?)}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},$$

由$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$坐标的唯一性，可得

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}. \tag{2.1.2}$$

式(2.1.2)称为线性映射σ在给定基$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$与$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$下的向量坐标变换公式．该公式给出了原像$\boldsymbol{\alpha}$的坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$与像$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$的坐标$(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$之间的关系，也揭示了$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$确立了$\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$的一个线性映射，它与从 n 维线性空间至 m 维线性空间的线性映射$\sigma: V_n\to V_m$是对应的.

线性映射σ在给定基下的矩阵表示$\boldsymbol{A}$是唯一的，它的逆命题就是下述定理.

定理 2.1.1 设V_1的基为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，$V_2$的基为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，给定$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，则存在唯一的线性映射$\sigma$，它在这两个基下的矩阵表示为$\boldsymbol{A}$.

证： 令变换 $\sigma: V_1\to V_2$，它由下式确定:

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}.$$

对任意$\boldsymbol{\alpha}\in V_1$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

对任意$\boldsymbol{\beta} \in V_2$，取

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

由于

$$\begin{aligned} \sigma(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}') &= (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ \vdots \\ x_n + x_n' \end{bmatrix} \\ &= (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \\ &= \sigma(\boldsymbol{\alpha}) + \sigma(\boldsymbol{\alpha}'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha}) &= (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \end{aligned}$$

所以σ是$V_1 \to V_2$的线性映射.

又因为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \cdots,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) &= \big(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\big) \\ &= (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

因此，给定$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$，则存在线性映射σ，它的矩阵表示为$\boldsymbol{A}$.

再证唯一性. 若还有另一线性映射$\sigma_1: V_1 \to V_2$，且

$$\sigma_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A},$$

于是

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \sigma_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n).$$

因为$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V_1$，有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sigma_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sigma_1(\boldsymbol{\alpha}),$$

所以$\sigma = \sigma_1$. ■

上述定理表明：在给定映射空间的一对基以后，线性映射σ与其矩阵表示$\boldsymbol{A}$是一一对应的，线性映射σ可以用其矩阵表示$\boldsymbol{A}$唯一地代表.

例 2.1.7 设$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，映射$\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$由下式确定：

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha},\ \ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2,$$

试求：σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$与基$\boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$下的矩阵表示$\boldsymbol{A}$.

解： 根据题意，有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) = (1,1,0)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) = (2,1,1)^{\mathrm{T}} = 2\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3.$$

由矩阵表示定义，有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = \big(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)\big) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{A},$$

因此，所求的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 2.1.8 恒等映射的矩阵表示是单位矩阵，零映射的矩阵表示是零矩阵，其矩阵的阶数是线性空间的维数.

例 2.1.9 线性映射$\sigma: \mathbb{R}[x]_{n+1} \to \mathbb{R}[x]_n$由下式确定：

$$\sigma\big(f(x)\big) = \tfrac{d}{dx} f(x),\ \ \forall f(x) \in \mathbb{R}[x]_{n+1},$$

求线性映射σ在基$1,x,x^2,\cdots,x^n$与基$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$下的矩阵表示$\boldsymbol{D}$.

解: 由于

$$\sigma(1)=0,\ \sigma(x)=1,\ \sigma(x^2)=2x,\ \cdots\ ,\ \sigma(x^n)=nx^{n-1},$$

于是，所求矩阵表示为

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{bmatrix}_{n\times(n+1)}.$$

2.1.3 两个线性空间不同基组合下的矩阵表示

线性映射在两个线性空间不同基组合下的矩阵表示之间的关系是什么？下述定理回答了这一问题.

定理 2.1.2 设σ是$V_1\to V_2$的一个线性映射，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n'$是$V_1$的两组基，由$\boldsymbol{\alpha}_i$到$\boldsymbol{\alpha}_i'(i=1,2,\cdots,n)$的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$. 设$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$与$\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\cdots,\boldsymbol{\beta}_m'$是$V_2$的两组基，由$\boldsymbol{\beta}_j$到$\boldsymbol{\beta}_j'(j=1,2,\cdots,m)$的过渡矩阵为$\boldsymbol{Q}$. 线性映射$\sigma$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$下的矩阵表示为$\boldsymbol{A}$，在基$\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n'$与$\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\cdots,\boldsymbol{\beta}_m'$下的矩阵表示为$\boldsymbol{B}$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}. \tag{2.1.3}$$

证: 由已知条件，线性映射和过渡矩阵，矩阵表示的关系示意图为:

$$\begin{array}{cccc}V_1&\{\boldsymbol{\alpha}_i\}&\xrightarrow{\boldsymbol{P}}&\{\boldsymbol{\alpha}_i'\}\\\sigma\downarrow&\boldsymbol{A}\downarrow&&\downarrow\boldsymbol{B}\\V_2&\{\boldsymbol{\beta}_i\}&\xrightarrow{\boldsymbol{Q}}&\{\boldsymbol{\beta}_i'\}\end{array}$$

因此，有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}, \tag{1}$$

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n')=(\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\cdots,\boldsymbol{\beta}_m')\boldsymbol{B}, \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n')=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}, \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\cdots,\boldsymbol{\beta}_m')=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{Q}. \tag{4}$$

将式(3)与式(4)代入式(2)，得

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}. \tag{5}$$

将式(1)代入式(5)，得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{QB}.$$

故

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)(\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{QB})=\boldsymbol{0}.$$

又$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关，故

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{QB},$$

由于$\boldsymbol{Q}$可逆，所以

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AP}. \qquad \blacksquare$$

注意：在本定理中，同一线性空间的两组基的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$都是方阵，而线性映射在两个线性空间不同基组合下的矩阵表示$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是$m\times n$矩阵.

定义 2.1.3 设矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{F}^{m\times n}$，若存在可逆矩阵$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{F}^{m\times m}$和$\boldsymbol{P}\in\mathbb{F}^{n\times n}$，满足

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{QAP},$$

则称矩阵$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$**等价**.

一个线性映射$\sigma:V_n\to V_m$有一系列的$m\times n$矩阵表示：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$. 由定理 2.1.2 和定义 2.1.3 可知，这些矩阵表示之间是互相等价的.

2.1.4 线性映射的值域、核

定义 2.1.4 设σ是线性空间V_1到V_2的线性映射，令

$$\sigma(V_1)=\{\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in V_2\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_1\},$$

容易证明：$\sigma(V_1)$是V_2的线性子空间，称$\sigma(V_1)$是线性映射σ的**值域**，记为$R(\sigma)$. 称 $\dim R(\sigma)$为σ的**秩**，记为$\operatorname{rank}\sigma$.

定理 2.1.3 设σ是线性空间V_1到V_2的线性映射，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V_1$的基，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$是$V_2$的基，$\sigma$在该对基下的矩阵表示为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则

(1) $R(\sigma)=\operatorname{span}\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\}$;

(2) $\operatorname{rank}\sigma=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$.

证：(1) $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V_1$，$\exists\boldsymbol{\beta}\in R(\sigma)$，使

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})&=\sigma(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=x_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_n\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n),\end{aligned}$$

所以

$$R(\sigma) = \text{span}\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\}.$$

(2) 由于

$$\begin{aligned}\big(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\big) &= \sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ &= (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

于是

$$R(\sigma) = \text{span}\left\{\sum_{j=1}^{m} a_{j1}\boldsymbol{\beta}_j, \sum_{j=1}^{m} a_{j2}\boldsymbol{\beta}_j, \cdots, \sum_{j=1}^{m} a_{jn}\boldsymbol{\beta}_j\right\},$$

而向量组$\sum_{j=1}^{m} a_{j1}\boldsymbol{\beta}_j, \sum_{j=1}^{m} a_{j2}\boldsymbol{\beta}_j, \cdots, \sum_{j=1}^{m} a_{jn}\boldsymbol{\beta}_j$的秩等于$\boldsymbol{A}$的秩，因此

$$\text{rank}\sigma = \dim R(\sigma) = \text{rank}\boldsymbol{A}. \qquad \blacksquare$$

定义 2.1.5 设σ是线性空间V_1到V_2的线性映射，令

$$N(\sigma) = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha} \in V_1\},$$

容易证明：$N(\sigma)$是V_1的线性子空间，称$N(\sigma)$是线性映射σ的**核子空间**. 核子空间可简称为**核**，其维数 $\dim N(\sigma)$称为σ的**零度**.

定理 2.1.4 设σ是 n 维线性空间V_1到 m 维线性空间V_2的线性映射，则

$$\dim N(\sigma) + \dim R(\sigma) = n.$$

证： 设 $\dim N(\sigma) = r$，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是$N(\sigma)$的基，把它扩充成V_1的基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，则有

$$\begin{aligned}R(\sigma) &= \text{span}\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_r), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\} \\ &= \text{span}\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\} \\ &= \text{span}\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\}.\end{aligned}$$

现证$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$线性无关.

设

$$\sum_{i=r+1}^{n} k_i\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i) = \mathbf{0},$$

即

$$\sigma\left(\sum_{i=r+1}^{n} k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right) = \mathbf{0},$$

故

$$\sum_{i=r+1}^{n} k_i\boldsymbol{\alpha}_i \in N(\sigma),$$

因此

$$\sum_{i=r+1}^{n} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{r} l_j\boldsymbol{\alpha}_j.$$

根据$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，可得

$$k_i=0 \quad (i=r+1,r+2,\cdots,n),$$

$$l_j=0 \quad (j=1,2,\cdots,r),$$

因此$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$线性无关，于是

$$\dim R(\sigma)=n-r,$$

又因为 $\dim N(\sigma)=r$，所以

$$\dim N(\sigma)+\dim R(\sigma)=n. \qquad \blacksquare$$

2.1.5　线性映射与其矩阵表示的值域、核的关系

下面研究线性映射σ与其矩阵表示$\boldsymbol{A}$的值域、核的关系.

1. 线性映射$\boldsymbol{\sigma}$与其矩阵表示$\boldsymbol{A}$的值域的关系

设σ是 n 维线性空间V_1到 m 维线性空间V_2的线性映射，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V_1$的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$是$V_2$的一组基，线性映射$\sigma$在这组基下的矩阵表示是$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n)$，其中$\boldsymbol{A}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{F}^m$，$i=1,2,\cdots,n$.

于是

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A},$$

故

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

因此σ的值域

$$\begin{aligned}R(\sigma)&=\mathrm{span}\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\}\\&=\mathrm{span}\{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}_1,\cdots,(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}_n\}.\end{aligned}$$

又由于矩阵$\boldsymbol{A}$的值域

$$R(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}^{\boldsymbol{n}}\},$$

若取$\boldsymbol{x}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$（第 i 分量是 1），则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{A}_i,\ \ i=1,2,\cdots,n.$$

又$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{x}_n$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{x}_n)\\&=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n\\&=k_1\boldsymbol{A}_1+k_2\boldsymbol{A}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{A}_n\end{aligned}$$

$$= \text{span}\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n\},$$

也即

$$R(\boldsymbol{A}) = \text{span}\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n\}.$$

由上述$R(\sigma)$与$R(\boldsymbol{A})$的表达式可见：线性映射σ的值域$R(\sigma)$与其矩阵表示$\boldsymbol{A}$的值域$R(\boldsymbol{A})$是一一对应的，只需将$R(\boldsymbol{A})$引入基$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$，就与$R(\sigma)$完全相同.

2. 线性映射$\boldsymbol{\sigma}$与其矩阵表示$\boldsymbol{A}$的核的关系

设$\boldsymbol{x} \in V_1$，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，其中$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$是$V_1$中向量$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标向量.

$N(\sigma)$中向量$\boldsymbol{x}$必须满足

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{0},$$

此即

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

由于$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$线性无关，可得

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{0},$$

根据矩阵$\boldsymbol{A}$的核的定义知，它就是$\boldsymbol{A}$的核$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$所满足的方程式.

由上述分析可知，σ的核$N(\sigma)$中向量$\boldsymbol{x}$的坐标向量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$满足矩阵$\boldsymbol{A}$的核向量所满足的方程. 因此，线性映射$\sigma$的核$N(\sigma)$与其矩阵表示$\boldsymbol{A}$的核$N(\boldsymbol{A})$是一一对应的，只需将$N(\boldsymbol{A})$引入基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，就与$N(\sigma)$完全相同.

2.1.6 同构映射

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是 n 维线性空间 V 的一组基，则 V 中的任一向量$\boldsymbol{\alpha}$可以表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},$$

其中，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$是坐标向量. 线性空间 V 中的向量$\boldsymbol{\alpha}$对应列向量空间$\mathbb{F}^n$中的向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，且由于$\boldsymbol{\alpha}$的坐标是唯一的，这样就存在空间 V 到空间$\mathbb{F}^n$的一一映射：

$$\boldsymbol{\alpha}\longleftrightarrow(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}.$$

设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，$\lambda\in\mathbb{F}$且$\boldsymbol{\alpha}\longleftrightarrow(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}\longleftrightarrow(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，因为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+y_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_n+y_n)\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda x_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda x_n)\boldsymbol{\alpha}_n,$$

所以有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\longleftrightarrow(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}},$$
$$\lambda\boldsymbol{\alpha}\longleftrightarrow(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)^{\mathrm{T}},$$

即空间 V 中的向量$\boldsymbol{\alpha}$与空间$\mathbb{F}^n$中的列向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$之间存在一一映射关系，且 V 中向量的和与数乘对应$\mathbb{F}^n$中向量的和与数乘，将这种映射关系抽象化，就得到了同构映射的概念.

定义 2.1.6 若线性空间V_1和V_2之间存在V_1到V_2的一一映射σ，且该一一映射又是线性映射，即对任意向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1$和数$\lambda\in\mathbb{F}$都有

(1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$;

(2) $\sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha})$.

则称此一一映射σ为V_1到V_2的**同构映射**，称线性空间V_1与V_2是**同构**的.

例 2.1.10 在 n 维线性空间 V 中取定一组基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，则 V 中向量$\boldsymbol{\alpha}$和它的坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$之间的一一映射是空间 V 到空间$\mathbb{F}^n$的一个同构映射，于是数域$\mathbb{F}$上的所有 n 维线性空间都与 n 维坐标向量空间$\mathbb{F}^n$同构.

同构映射σ具有如下性质：

(1) $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}$;

(2) $\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha})$;

(3) $\sigma(\sum_{i=1}^{s} k_i\boldsymbol{\alpha}_i)=\sum_{i=1}^{s} k_i\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_i\in V,k_i\in\mathbb{F}$;

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in V_1$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关（无关），则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$也线性相关(无关)，反之亦然.

由于同构映射也是线性映射，因此性质(1)~(3)显然满足，但性质(4)与线性映射的对应性质有所区别，其中，线性相关部分的证明与线性映射的证明相同，以下仅证明线性无关部分.

证：(4) **充分性** 设$k_1, k_2, \cdots, k_s \in \mathbb{F}$，使

$$k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_s\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s) = \mathbf{0},$$

由于σ是线性映射，可得

$$\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s) = \mathbf{0},$$

由$\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$且$\sigma$是一一映射，所以

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

而$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，所以

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0,$$

即$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$线性无关.

必要性 设$k_1, k_2, \cdots, k_s \in \mathbb{F}$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

对上式两端同时作线性映射σ，得

$$k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_s\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s) = \mathbf{0},$$

而$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$线性无关，所以

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0,$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性无关. ■

2.2 线性变换及其矩阵

2.2.1 线性变换及其矩阵表示

线性变换是线性映射的特例，即线性空间V_1和V_2是同一空间的情况.

定义 2.2.1 设V是数域$\mathbb{F}$上的线性空间，σ是V到V的线性映射，称σ为线性空间V的**线性变换**.

由于线性变换是线性空间V到它自身的映射，所以只需取V的一组基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$即可.

设σ是线性空间V的线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一组基，若

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i \qquad (j = 1,2,\cdots,n),$$

则

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}, \tag{2.2.1}$$

即σ在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵表示$\boldsymbol{A}$是 n 阶方阵.

设$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in V$，若

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

则经简单推导可知原像$\boldsymbol{\alpha}$与像$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$的坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.2.2}$$

注意，式(2.2.2)与式(2.1.2)是一致的.

例 2.2.1 设线性空间$\mathbb{R}^3$中的线性变换f将基

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

变为基

$$\boldsymbol{\alpha}_1{}' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2{}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3{}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

(1) 求f在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵表示$\boldsymbol{A}$;

(2) 求向量$\boldsymbol{\xi} = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$及$f(\boldsymbol{\xi})$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标;

(3) 求向量$\boldsymbol{\xi}$及$f(\boldsymbol{\xi})$在基$\boldsymbol{\alpha}_1{}',\boldsymbol{\alpha}_2{}',\boldsymbol{\alpha}_3{}'$下的坐标.

解： (1) 不难求得

$$f(\boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\alpha}_1{}' = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$f(\boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\alpha}_2{}' = -\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$f(\boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{\alpha}_3{}' = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,$$

因此，f在$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) 设$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$，即

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix},$$

解之得

$$k_1 = 10,\ k_2 = -4,\ k_3 = -9,$$

所以$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$(10, -4, -9)^{\mathrm{T}}$.

$f(\boldsymbol{\xi})$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$下坐标可由式(2.2.2)求得

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -32 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1{}', \boldsymbol{\alpha}_2{}', \boldsymbol{\alpha}_3{}'$下的坐标为

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -15 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$f(\boldsymbol{\xi})$在基$\boldsymbol{\alpha}_1{}', \boldsymbol{\alpha}_2{}', \boldsymbol{\alpha}_3{}'$下的坐标为

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix} 23 \\ -32 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23 \\ -32 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

请读者思考本例中(3)的解法如何得来，还有其他解法?

与定理 2.1.2 相对应，当σ是线性变换的情况下，有定理 2.2.1.

定理 2.2.1 设σ是线性空间V到V的线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n'$是$V$的两组基. 由$\boldsymbol{\alpha}_i$到$\boldsymbol{\alpha}_i'(i = 1,2, \cdots, n)$的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$，线性变换$\sigma$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵表示为$\boldsymbol{A}$，在基$\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n'$下的矩阵表示为$\boldsymbol{B}$，则有

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}. \tag{2.2.3}$$

该定理是定理 2.1.2 的特例，即线性空间$V_1 = V_2$且矩阵表示$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}$的情况.

与矩阵等价的概念相对应，下面给出矩阵相似的概念.

定义 2.2.2 设矩阵$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$，若存在可逆矩阵$\boldsymbol{P} \in \mathbb{F}^{n\times n}$，满足

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},$$

则称矩阵$\boldsymbol{B}$与矩阵$\boldsymbol{A}$相似，记为$\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$.

矩阵的相似具有如下性质：

(1) 自反性：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$;

(2) 对称性：若$\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$;

(3) 传递性：若$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

2.2.2 线性变换的运算

定义 2.2.3 设σ, τ是线性空间 V 的两个线性变换，对于任意$\boldsymbol{\alpha} \in V$，有如下线性变换运算的定义：

(1) 定义线性变换的乘积$\sigma\tau$为

$$\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha}) = \sigma(\tau(\boldsymbol{\alpha})).$$

(2) 定义线性变换的加法$(\sigma + \tau)$为

$$(\sigma + \tau)(\boldsymbol{\alpha}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}) + \tau(\boldsymbol{\alpha}).$$

(3) 定义线性变换的数乘$k\sigma$为

$$(k\sigma)(\boldsymbol{\alpha}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

(4) V 的变换σ称为可逆的，如果有 V 的变换τ存在，且满足

$$\sigma\tau = \tau\sigma = E,$$

其中，E是恒等变换，这时变换τ称为σ的逆变换，记为σ^{-1}.

不难验证，上述定义的$\sigma\tau, (\sigma + \tau)$，$k\sigma$与$\sigma^{-1}$都是线性变换.

定理 2.2.2 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$是 n 维线性空间 V 的一组基，在这组基下，线性变换σ对应一个 n 阶矩阵$\boldsymbol{A}$，线性变换τ对应一个 n 阶矩阵$\boldsymbol{B}$，则有：

(1) 线性变换σ与τ的和$\sigma + \tau$对应于矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的和$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

(2) 线性变换σ的数乘$k\sigma$对应于矩阵$\boldsymbol{A}$的数乘$k\boldsymbol{A}$.

(3) 线性变换σ与τ的积$\sigma\tau$对应于矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的积$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

(4) 若线性变换σ可逆，则σ对应的矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，且σ^{-1}对应$\boldsymbol{A}^{-1}$.

证：由已知条件知

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

$$\tau(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}.$$

(1) $(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

$$=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)+\tau(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}).$$

(2) $(k\sigma)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

$$=k[\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)]=k(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)(k\boldsymbol{A}).$$

(3) $(\sigma\tau)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

$$=\sigma[\tau(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)]=\sigma[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}]$$

$$=[\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)]\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$$

(4) 设$\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}$,

$$\sigma\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

又

$$\sigma\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)=E(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$ ■

定理 2.2.2 表明: 在 n 维线性空间中取定一组基后, 其上的线性变换就与 n 阶矩阵一一对应, 且这个对应在线性变换的运算上仍然保持.

2.2.3 线性变换的特征值与特征向量

定义 2.2.4 设σ是数域$\mathbb{F}$上的 n 维线性空间 V 的线性变换, 如果在 V 中存在非零向量$\boldsymbol{\alpha}$使得

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0\boldsymbol{\alpha},\quad \lambda_0\in\mathbb{F}, \tag{2.2.4}$$

则称λ_0是线性变换σ的一个**特征值**, 称$\boldsymbol{\alpha}$是σ的属于(对应于)特征值λ_0的**特征向量**.

特征值也称为**本征值**, 特征向量也称为**本征向量**.

定义 2.2.5 矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值的全体称为$\boldsymbol{A}$的**谱**, 记为$\lambda(\boldsymbol{A})$.

若特征值$\lambda_0\in\mathbb{R}$, 从几何上看, 变换前后的向量共线, 或者方向不变($\lambda_0>0$), 或者方向相反($\lambda_0<0$), 或者变为零向量($\lambda_0=0$). 因此, 线性变换σ对非零向量$\boldsymbol{\alpha}$的作用是将$\boldsymbol{\alpha}$拉长或缩短λ_0倍, 这个伸缩比例λ_0即为σ的一个特征值.

对于$\lambda_0\in\mathbb{F}$的一般情况, 对向量进行线性变换后得到的新向量在长度和方向

上都与原向量不同.

关于特征值与特征向量, 有如下基本事实:

(1) 若$\boldsymbol{\alpha}$是线性变换σ的属于特征值λ_0的特征向量, 则$\boldsymbol{\alpha}$的任一非零常数倍$k\boldsymbol{\alpha}$也是属于特征值λ_0的特征向量, 即一个特征值对应无穷多特征向量.

证: 对任意$k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 有

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = k\lambda_0\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0(k\boldsymbol{\alpha}), \quad \lambda_0 \in \mathbb{F}. \qquad \blacksquare$$

(2) 一个特征向量只能属于某个特征值.

证: 若特征向量$\boldsymbol{\alpha}$既属于特征值λ_0又属于特征值$\lambda_1(\lambda_0 \neq \lambda_1)$, 则$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_0\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}$, 从而$(\lambda_0 - \lambda_1)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 于是$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 这与$\boldsymbol{\alpha}$是非零向量矛盾. $\blacksquare$

在线性代数中, 已经介绍了 n 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值、特征向量的计算, 给定线性空间 V 的一组基后, 线性变换σ就与其矩阵表示$\boldsymbol{A}$一一对应, 那么, 如何计算线性变换σ的特征值和特征向量?

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是 n 维线性空间 V 的一组基, 线性变换σ在这组基下的矩阵表示是$\boldsymbol{A}$, 设λ_0是σ的一个特征值, 它的一个特征向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标是$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 即

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.2.5}$$

将式(2.2.5)代入式(2.2.4), 得

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_0(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

此即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_0(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性无关, 整理上式可得

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_0\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.2.6}$$

式(2.2.6)是$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$满足的关系式, 坐标

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$是齐次线性方程组

$$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{2.2.7}$$

的非零解($\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$)，它有非零解的充要条件是行列式

$$|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0. \tag{2.2.8}$$

定义 2.2.6　设$\boldsymbol{A}$是 n 阶方阵，$\lambda\in\mathbb{F}$，矩阵$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$称为$\boldsymbol{A}$的**特征矩阵**，行列式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{\mathrm{ln}}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix} \tag{2.2.9}$$

称为$\boldsymbol{A}$的**特征多项式**．n次代数方程$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$称为$\boldsymbol{A}$的**特征方程**，它的根称为$\boldsymbol{A}$的**特征根**或**特征值**．以$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_0$代入方程组(2.2.7)所解得的非零解$\boldsymbol{X}$称为$\boldsymbol{A}$的属于(对应于)特征值$\lambda_0$的**特征向量**.

矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程在复数域内有 n 个根，因此一个 n 阶方阵有 n 个特征值(重根应算重数).

式(2.2.5)至(2.2.6)的推导表明:

(1) λ_0是线性变换σ的特征值 $\Leftrightarrow$ λ_0是σ的矩阵表示$\boldsymbol{A}$的特征值.

(2) $\boldsymbol{\alpha}$是σ的属于特征值λ_0的特征向量 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}$的坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_0$的特征向量.

因此，求线性变换σ的特征值与特征向量可转化为计算其在线性空间 V 的某一个基下的矩阵表示$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量．当然，需注意的是：由$\boldsymbol{A}$得到的特征向量是σ的特征向量在该基下的坐标向量.

但是，线性变换σ在不同基下的矩阵表示是不同的，采用某一个基下的矩阵表示$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\cdots$计算线性变换σ的特征值和特征向量时，计算结果是否具有唯一性?

首先，讨论特征值计算结果的唯一性.

定理 2.2.3　相似矩阵具有相同的特征值.

由定理 2.2.1 和定义 2.2.2，线性变换在不同基下的矩阵表示是相似矩阵，再由定理 2.2.3，线性变换σ的特征值可以通过σ的任意一个矩阵表示来计算，其计算结果都是相同的.

其次，讨论特征向量计算结果的唯一性.

若σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵表示为$\boldsymbol{A}$，在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的矩阵表示为$\boldsymbol{B}$，且两组基之间的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$，即$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$，由定理

2.2.1 可知

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}.$$

定理 2.2.4 若$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$是 n 阶方阵$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的特征向量，且有$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{B}$的属于特征值$\lambda$的特征向量.

$\boldsymbol{A}$的特征向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$是$\sigma$的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$的坐标向量，即

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

由定理 2.2.4 可知，$\boldsymbol{B}$的特征向量$\boldsymbol{P}^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$是$\sigma$的特征向量$\boldsymbol{\beta}$的坐标向量，且有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha},\end{aligned}$$

因此，线性变换σ的特征向量可以通过σ的任意一个矩阵表示的特征向量求得.

例 2.2.2 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$是线性空间$\mathbb{R}^3$的一组基，$\mathbb{R}^3$中线性变换$\sigma$满足

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=(2,5,-2)^{\mathrm{T}},$$
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=(4,7,-4)^{\mathrm{T}},$$
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=(-2,-3,6)^{\mathrm{T}},$$

试求线性变换σ的特征值和特征向量.

解： 由题意知

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)&=\big(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)\big)\\&=\begin{bmatrix}2&4&-2\\5&7&-3\\-2&-4&6\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}\\&=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

于是，σ在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵表示$\boldsymbol{A}$为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&4&-2\\5&7&-3\\-2&-4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式:

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda-6).$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值:

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=6.$$

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 2 的特征向量有两个，是线性无关的特征向量:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的特征向量是:

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}.$$

所以，σ的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=6.$

σ的属于特征值 2 的两个线性无关的特征向量是:

$$\boldsymbol{\eta}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,\ -1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2)^{\mathrm{T}}.$$

所以σ的属于特征值 2 的全部特征向量为$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$，其中，$k_1,k_2$是不同时为零的数.

σ的属于特征值 6 的特征向量是

$$\boldsymbol{\eta}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,\ -3,4)^{\mathrm{T}}.$$

所以σ的属于特征值 6 的全部特征向量为$k_3\boldsymbol{\eta}_3$，其中k_3为非零数.

2.2.4 线性变换的值域、核

线性变换的值域、核的概念可以从线性映射的值域、核的概念直接导出.

定义 2.2.7　设σ是线性空间 V 的线性变换，令

$$\sigma(V)=\{\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in V\mid\boldsymbol{\alpha}\in V\},$$

可以证明：$\sigma(V)$是V的线性子空间，称$\sigma(V)$是线性变换σ的**值域**，记为$R(\sigma)$. 称$\dim R(\sigma)$为σ的**秩**，记为$\mathrm{rank}\sigma$.

定义 2.2.8　设σ是线性空间 V 的线性变换，令

$$N(\sigma)=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}\in V\},$$

可以证明：$N(\sigma)$是 V 的线性子空间，称$N(\sigma)$是线性变换σ的**核子空间**，简称为**核**，其维数 $\dim N(\sigma)$称为σ的**零度**.

线性变换的值域和核的其他性质和结论均可从线性映射的一般性结论导出.

例 2.2.3　求线性空间$\mathbb{R}^3$上的投影变换

$$T(x,y,z)^{\mathrm{T}}=(x,y,0)^{\mathrm{T}},\qquad\forall(x,y,z)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3$$

的值域与核.

解：　由定义可得

$$R(T)=\{(x,y,0)^{\mathrm{T}}|x,y\in\mathbb{R}\},$$
$$N(T)=\{(0,0,z)^{\mathrm{T}}|z\in\mathbb{R}\}.$$

从几何上看，$\mathbb{R}^3$上的投影变换的值域$R(T)$就是 xOy 平面，核$N(T)$就是 z 轴.

2.3　线性变换的不变子空间

2.3.1　不变子空间的定义

下面介绍线性变换的不变子空间的概念，并给出若干实例.

定义 2.3.1　设σ是数域$\mathbb{F}$上的线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间，如果对于任意向量$\boldsymbol{\alpha}\in W$都有$\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in W$，则称 W 是线性变换σ的**不变子空间**.

例 2.3.1　线性空间 V 的任一子空间都是数乘变换的不变子空间，这是因为子空间对数乘运算是封闭的.

例 2.3.2　整个线性空间 V 和零子空间$\{\mathbf{0}\}$都是 V 的任一线性变换σ的不变子空间. 称 V 和$\{\mathbf{0}\}$为σ的**平凡不变子空间**.

例 2.3.3　线性空间 V 上的线性变换σ的值域$R(\sigma)$和核$N(\sigma)$都是σ的不变子空间.

证：　首先，线性变换σ的值域$R(\sigma)$和核$N(\sigma)$都是 V 的子空间. 任取$\boldsymbol{\alpha}\in R(\sigma)$，因为$\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in\sigma\big(R(\sigma)\big)\in\sigma(V)=R(\sigma)$，所以$R(\sigma)$是$\sigma$的不变子空间.

任取$\boldsymbol{\alpha}\in N(\sigma)$，因为$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\in N(\sigma)$，所以$N(\sigma)$是$\sigma$的不变子空间.

例 2.3.4　若 W 是线性变换σ的不变子空间，那么$\sigma(W)=\{\sigma(\boldsymbol{\alpha})|\boldsymbol{\alpha}\in W\}$也

是σ的不变子空间，且$\sigma(W) \subseteq W$.

2.3.2 不变子空间的性质

下面以定理的形式给出不变子空间的性质.

定理 2.3.1　线性空间 V 上的线性变换σ的不变子空间的和与交仍是σ的不变子空间.

证：　设$W_1, W_2, \cdots, W_s$是线性空间 V 上的线性变换σ的不变子空间，首先，和空间$\sum_{i=1}^{s} W_i$和交空间$\bigcap_{i=1}^{s} W_i$都是 V 的子空间.

① 在$\sum_{i=1}^{s} W_i$中任取向量$\sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{\alpha}_i$，其中，$\boldsymbol{\alpha}_i \in W_i, i = 1,2,\cdots,s$. 则

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{\alpha}_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \sigma(\boldsymbol{\alpha}_i),$$

由于$\forall i$，有$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i) \in W_i$，故

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{\alpha}_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \sigma(\boldsymbol{\alpha}_i) \in \sum_{i=1}^{s} W_i,$$

因此，和空间$\sum_{i=1}^{s} W_i$是σ的不变子空间.

② 任取向量$\boldsymbol{\alpha} \in \bigcap_{i=1}^{s} W_i$，则$\boldsymbol{\alpha} \in W_i, i = 1,2,\cdots,s$. 由于$\forall i$，有$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in W_i$，故

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in \bigcap_{i=1}^{s} W_i\,,\ i = 1,2,\cdots,s.$$

因此，交空间$\bigcap_{i=1}^{s} W_i$是σ的不变子空间. ■

下述定理给出了线性空间 V 的有限维子空间W是σ的不变子空间的判定法则.

定理 2.3.2　设线性空间 V 的子空间$W = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$，则 W 是σ的不变子空间的充要条件是$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i) \in W, 1 \le i \le m$.

证：　①必要性　由线性变换的不变子空间的定义，必要性显然.

②充分性

对任意$\boldsymbol{\xi} \in W$，都有

$$\boldsymbol{\xi} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m,\quad k_1, k_2, \cdots, k_m \in \mathbb{F},$$

于是

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) = k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_m\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m).$$

由于$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i) \in W\ (i = 1,2,\cdots,m)$，且由于线性空间对线性组合的封闭性，有

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) = k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_m\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m) \in W,$$

因此，W是σ的不变子空间. ■

2.3.3 矩阵表示与不变子空间的关系

下面讨论线性变换σ的矩阵表示与σ的不变子空间之间的关系.

1. 线性变换σ的矩阵表示是准三角形矩阵的情况

设 W 是 n 维线性空间 V 的线性变换σ的不变子空间, W 的一组基是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$, 而 V 的一组基是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 现求$\sigma$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵表示.

由于$\sigma(W)\subseteq W$, 故$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_r)$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的线性组合, 而$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+2}),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的线性组合, 即

$$
\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) &= a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{r1}\boldsymbol{\alpha}_r,\\
\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) &= a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{r2}\boldsymbol{\alpha}_r,\\
&\vdots\\
\sigma(\boldsymbol{\alpha}_r) &= a_{1r}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2r}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r,\\
\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}) &= a_{1\,r+1}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2\,r+1}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{r\,r+1}\boldsymbol{\alpha}_r + a_{r+1\,r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + a_{n\,r+1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\
&\vdots\\
\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{rn}\boldsymbol{\alpha}_r + a_{r+1\,n}\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.
\end{aligned}
$$

所以, σ在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵表示为

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2\,r+1} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn}\\
 & & & & a_{r+1\,r+1} & \cdots & a_{r+1\,n}\\
 & \mathbf{0} & & & \vdots & & \vdots\\
 & & & & a_{n\,r+1} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_3\end{bmatrix}. \tag{2.3.1}
$$

因此, 线性变换σ的矩阵表示是如式(2.3.1)所示的准三角形矩阵. 反之, 若σ在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵表示是如式(2.3.1)所示的准三角形矩阵, 则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$生成的子空间是$\sigma$的不变子空间.

2. 线性变换σ的矩阵表示是准对角形矩阵的情况

定理 2.3.3 设σ是线性空间 V 的线性变换, 则 V 可以分解为σ的不变子空间的直和$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$的充要条件是$\sigma$在某组基下的矩阵表示是准对角形矩阵$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$. 其中, $\boldsymbol{A}_i$为σ在W_i子空间相应基下的矩阵表示($i =$

$1,2,\cdots,m)$.

证：① 必要性

设$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_m$，令 $W_i=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i\,n_i}\}$，$i=1,2,\cdots,m$. 则

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i\,n_i})=(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i\,n_i})\boldsymbol{A}_i,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

其中，$\boldsymbol{A}_i$为n_i阶矩阵，$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$. 所以

$$\begin{aligned}&\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1n_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m\,n_m})\\&=(\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1n_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m\,n_m})\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_m\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

② 充分性

设σ在线性空间 V 的某组基$\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1n_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m\,n_m}$（$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$）下的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_m\end{bmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{A}_i$是n_i阶矩阵$(i=1,2,\cdots,m)$.

设$W_i=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i\,n_i}\}$，$i=1,2,\cdots,m$，那么

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i\,n_i})=(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i\,n_i})\boldsymbol{A}_i,$$

从而$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{ij})\in W_i$ $(j=1,2,\cdots,n_i)$，此即W_i是σ的不变子空间，且有

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_m. \qquad ■$$

定理 2.3.3 表明：线性空间 V 能否分解为线性变换的不变子空间的直和等价于该线性变换在某组基下的矩阵表示是否为分块对角形矩阵.

2.4 应用实例

2.4.1 同构映射的应用

线性空间 U 和 V 同构的含义是这两个空间的元素存在一一映射关系, 且这种映射关系保持加法与数乘的不变性, 即还是线性映射. 同构映射可以帮助我们解决线性空间中比较复杂的问题.

例 2.4.1 设$\mathbb{R}^+$是所有正实数的集合, 试证明映射$T: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

$$T(x) = \ln x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

是$\mathbb{R}^+$到$\mathbb{R}$的同构映射, 即$\mathbb{R}^+$与$\mathbb{R}$同构.

证: $\mathbb{R}$是一个实线性空间, $\mathbb{R}^+$对于如下定义的加法与数乘运算:

$$x \oplus y = xy, \qquad k \circ x = x^k \qquad (x, y \in \mathbb{R}^+,\ k \in \mathbb{R})$$

构成$\mathbb{R}$上的线性空间, 其证明如下.

对$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, 有$x \oplus y = xy \in \mathbb{R}^+$, 又$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}$, 有$k \circ x = x^k \in \mathbb{R}^+$, 即所定义的加法和数乘运算封闭于$\mathbb{R}^+$. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$, $k, l \in \mathbb{R}$, 有

(1) $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$;

(2) $(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = xyz = x(yz) = x \oplus (y \oplus z)$;

(3) $x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$, 所以 1 是零元;

(4) $x \oplus x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$, 所以$x^{-1}$是$x$的负元;

(5) $1 \circ x = x^1 = x$;

(6) $(kl) \circ x = x^{kl} = (x^k)^l = l \circ (x^k) = l \circ (k \circ x)$;

(7) $k \circ (x \oplus y) = k \circ (xy) = (xy)^k = x^k y^k = x^k \oplus y^k = (k \circ x) \oplus (k \circ y)$;

(8) $(k + l) \circ x = x^{k+l} = x^k x^l = x^k \oplus x^l = (k \circ x) \oplus (l \circ x)$.

所以$\mathbb{R}^+$对这样定义的加法和数乘运算构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

显然, $T(x) = \ln x$是$\mathbb{R}^+$到$\mathbb{R}$的一一映射, 下面再证明 T 是线性映射.

由这样定义的加法和数乘运算, 知$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $\forall k, l \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} T(k \circ x \oplus l \circ y) &= T(x^k y^l) = \ln(x^k y^l) = \ln x^k + \ln y^l \\ &= k\ln x + l\ln y = kT(x) + lT(y), \end{aligned}$$

所以 T 是$\mathbb{R}^+$到$\mathbb{R}$的线性映射.

综上, T 是$\mathbb{R}^+$到$\mathbb{R}$的同构映射, 即$\mathbb{R}^+$与$\mathbb{R}$同构.

例 2.4.2 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1&3\\1&0\end{bmatrix}$是线性空间$\mathbb{R}^{2\times2}$中的一组基, $\mathbb{R}^{2\times2}$中的线性变换σ满足

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},$$

求σ在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的矩阵表示.

分析: 利用同构的概念, 可将$\mathbb{R}^{2\times2}$中的矩阵看作$\mathbb{R}^4$中的向量.

解: 将$\mathbb{R}^{2\times2}$中的矩阵看作$\mathbb{R}^4$中的向量, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=(0,0,0,0)^{\mathrm{T}},\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_4)=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

由题意, 有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\big(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_4)\big)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&3\\1&1&0&1\\1&1&2&0\end{bmatrix}\boldsymbol{A}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&3\\1&1&0&1\\1&1&2&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4&0&3/8&-1\\-3/4&0&7/8&1\\1/4&0&-1/8&1\\1/2&0&-1/4&0\end{bmatrix}.$$

2.4.2 乘积矩阵的秩

关于乘积矩阵的秩, 在线性代数课程中已有结论: 两矩阵相乘得到的乘积矩阵的秩不大于其每个因子矩阵的秩, 即$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. 但上述关系不够精确, 应用线性映射理论, 可将上述关系精确化.

定理 2.4.1 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times l}$, 则

(1) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})-\dim[N(\boldsymbol{A})\cap R(\boldsymbol{B})]$;

(2) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})-\dim[N(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\cap R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})]$.

证: 定义一个线性映射$\sigma: R(\boldsymbol{B})\to R(\boldsymbol{A})$, $\forall\boldsymbol{x}\in R(\boldsymbol{B})\subset\mathbb{R}^n$, $\exists\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}\in R(\boldsymbol{A})\subset\mathbb{R}^m$.

首先证明$N(\sigma)=N(\boldsymbol{A})\cap R(\boldsymbol{B})$，$R(\sigma)=R(\boldsymbol{AB})$.

① $\forall\boldsymbol{x}\in N(\sigma)$，有$\boldsymbol{x}\in R(\boldsymbol{B})$且$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{A})\cap R(\boldsymbol{B})$；又$\forall\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{A})\cap R(\boldsymbol{B})$，有$\boldsymbol{x}\in R(\boldsymbol{B})$且$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{x}\in N(\sigma)$；因而$N(\sigma)=N(\boldsymbol{A})\cap R(\boldsymbol{B})$成立.

② $R(\sigma)=\boldsymbol{A}\big(R(\boldsymbol{B})\big)=\boldsymbol{A}\Big(\boldsymbol{B}(\mathbb{R}^l)\Big)=\boldsymbol{AB}(\mathbb{R}^l)=R(\boldsymbol{AB})$.

(1) 对映射σ应用定理 2.1.4，有

$$\dim R(\boldsymbol{B})=\dim N(\sigma)+\dim R(\sigma),$$

代入①和②，得

$$\dim R(\boldsymbol{B})=\dim[N(\boldsymbol{A})\cap R(\boldsymbol{B})]+\dim R(\boldsymbol{AB}),$$

也即

$$\dim R(\boldsymbol{AB})=\dim R(\boldsymbol{B})-\dim[N(\boldsymbol{A})\cap R(\boldsymbol{B})],$$

于是有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})-\dim[N(\boldsymbol{A})\cap R(\boldsymbol{B})].$$

(2) 由结论(1)及$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$，可得

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})&=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})-\dim[N(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\cap R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})]\\&=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})-\dim[N(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\cap R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})].\end{aligned}$$ ■

2.4.3 数字信号处理中的线性变换

在数字信号处理中，如果一个离散时间系统满足叠加原理，则称该系统为**线性系统**. 叠加原理包括可加性和齐次性两方面性质.

在数字信号处理系统中，离散时间信号称为序列，用$x(n)$表示第n个离散时间点的序列值. 设某系统的输入序列是$x_1(n)$和$x_2(n)$，对应的输出序列分别是$y_1(n)$和$y_2(n)$，用$T[\cdot]$描述系统的输入序列和输出序列的关系以刻画系统特征，则有$y_1(n)=T[x_1(n)]$，$y_2(n)=T[x_2(n)]$. 设a和b为比例常数，若$T[\cdot]$满足:

$$\begin{aligned}T[ax_1(n)+bx_2(n)]&=T[ax_1(n)]+T[bx_2(n)] &&\text{（可加性）}\\&=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] &&\text{（齐次性）}\\&=ay_1(n)+by_2(n).\end{aligned}$$

则称系统$T[\cdot]$是线性的. 上式是判定一个系统是否是线性系统的唯一判据，虽然推导中仅使用了两个输入信号，但对于多输入信号情况的数学表达，只需增加求和项和对应的比例常数项即可. 不满足可加性和齐次性的系统称为**非线性系统**.

从数学的角度看，$T[\cdot]$是一个线性变换.

例 2.4.3 判断下列系统是否为线性系统.

(1) $y(n) = nx(n)$;

(2) $y(n) = 3x(n) + 5$.

分析：判断一个系统是否为线性系统应检测其可加性和齐次性.

解： (1) $T[ax_1(n) + bx_2(n)] = n[ax_1(n) + bx_2(n)] = anx_1(n) + bnx_2(n)$

$$= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)],$$

所以该系统是线性系统.

(2) 由于$T[x_1(n)] = 3x_1(n) + 5$，$T[x_2(n)] = 3x_2(n) + 5$,

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = 3[ax_1(n) + bx_2(n)] + 5$$

而

$$aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = 3ax_1(n) + 5a + 3bx_2(n) + 5b$$

$$= 3[ax_1(n) + bx_2(n)] + 5(a + b),$$

由于$T[ax_1(n) + bx_2(n)] \neq aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$，所以该系统是非线性系统.

例 2.4.4 数字信号处理中序列$x(n)$的 z 变换定义为

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n},$$

可以证明 z 变换满足

$$Z[kx_1(n) + lx_2(n)] = kX_1(z) + lX_2(z),$$

因此，从数学角度看 z 变换也是一个线性变换.

本 章 小 结

本章介绍了线性映射和线性变换的概念和相关知识,将线性映射(线性变换)与矩阵联系起来，阐述了线性映射（线性变换）的矩阵表示、线性映射（线性变换）的值域和核等概念和相关性质，此外介绍了线性变换的特征值与特征向量、线性变换的不变子空间等内容.

本章所介绍的概念和相关知识是矩阵理论的基础，学习完本章内容后，应能达到如下基本要求：

1. 掌握线性映射的概念、线性映射的矩阵表示,理解两个线性空间不同基组合下的矩阵表示之间的关系. 能求线性映射的值域、核. 理解线性映射与其矩阵表示的值域、核的关系.

2. 掌握线性变换的概念、线性变换的矩阵表示、线性变换的运算性质、线性变换的特征值与特征向量的概念和性质.

3. 能求解线性变换的特征值与特征向量，能求解线性变换的值域、核.

4. 理解线性变换的不变子空间的概念与性质，理解线性变换的矩阵表示与线性变换的不变子空间的关系.

习题 2

2-1　线性映射$\sigma: \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n+1}$由下式确定:

$$\sigma(f(x)) = \int_0^x f(t)dt,\ \forall f(t) \in \mathbb{R}[x]_n,$$

求线性映射σ在基$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$与基$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, x^n$下的矩阵表示$\boldsymbol{D}$.

2-2　已知线性映射$\sigma: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$在基$\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$与基$\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (0,2)^{\mathrm{T}}$下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

试求:

(1) $N(\sigma)$的基与维数.

(2) $R(\sigma)$的基与维数.

2-3　试证明线性变换的坐标变换公式(2.2.2).

2-4　若σ是 n 维线性空间$\mathbb{R}^n$上的线性变换且存在逆变换σ^{-1}, 对任意向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 试证明:

(1)　$\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) + \sigma^{-1}(\boldsymbol{\beta})$;

(2)　$\sigma^{-1}(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$.

2-5　设$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$线性无关, 且

$$\boldsymbol{\xi}_i = a_{1i}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{2i}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{\beta}_m = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix},\ i = 1,2,\cdots,s.$$

试证: 向量组$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$的秩=矩阵$\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$的秩.

2-6　设σ是线性空间$\mathbb{R}^3$的线性变换, 它在$\mathbb{R}^3$中基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

(1) 求σ在基$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵表示.

(2) 求σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$下的核与值域.

2-7　设线性变换σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$下的矩阵表示是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix},$$

(1) 求σ的核与值域.

(2) 求σ在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$下的矩阵表示.

2-8　已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&6\\0&4&2\\1&2&6\end{bmatrix},$$

求矩阵$\boldsymbol{A}$的列空间$R(\boldsymbol{A})$与核空间$N(\boldsymbol{A})$.

2-9　已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-4\\-1&-4&5\\3&1&7\\6&5&-10\end{bmatrix},$$

求矩阵$\boldsymbol{A}$的列空间$R(\boldsymbol{A})$与核空间$N(\boldsymbol{A})$.

2-10　已知可逆矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量，试求$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值和特征向量.

2-11　设$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，试证：$\boldsymbol{A}$的特征值只能是+1 或-1.

2-12　设$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，试证：$\boldsymbol{A}$的特征值只能是 0 或 1.

2-13　求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

2-14　求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

2-15　求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

2-16　设线性空间 V 的子空间V_1和V_2都是线性变换σ的不变子空间，试证明：V_1+V_2及$V_1\cap V_2$也是线性变换σ的不变子空间.

2-17　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性空间$V$的一组基，$\sigma$是线性空间$V$的线性变换，$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\alpha}_3,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_2,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_1$，求线性变换$\sigma$的所有特征根及特征向量.

2-18　试判断以下变换中哪些是线性变换，哪些不是线性变换？为什么？

(1) 在$\mathbb{R}^3$上，定义σ:

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3,\qquad \sigma(\boldsymbol{\alpha})=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\0\end{bmatrix}.$$

(2) 在$\mathbb{F}^3$上，定义σ:

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\in\mathbb{F}^3,\quad \sigma(\boldsymbol{\alpha})=\begin{bmatrix}a_1^2\\a_2+a_3\\a_3\end{bmatrix}.$$

(3) 对线性空间V，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，定义$\sigma$: $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_0$，其中$\boldsymbol{\alpha}_0$为$V$中的一个固定向量.