现代密码学

Modern Cryptography

张方国

中山大学计算机学院

Office: Room 305, IM School Building

E-mail: isszhfg@mail.sysu.edu.cn

HomePage: https://cse.sysu.edu.cn/content/2460

第二十讲 DLP（三）

第6章 公钥密码学和离散对数

- 实际中的离散对数算法
- 离散对数的比特安全性
- ElGamal体制的安全性

实际中的离散对数算法

下列(G,α)情形中的离散对数问题是最为重要的：

- $G=(Z_p^*,\cdot)$，p是素数，α是模p的一个本原元。
- $G=(Z_p^*,\cdot)$，p,q是素数，$p\equiv 1 \mod q$，α是Z_p中的一个q阶元素。
- $G=(F_{2^n}^*,\cdot)$，α是$F_{2^n}^*$中的一个本原元素。
- $G=(E,+)$，其中E是模素数p的一个椭圆曲线，$\alpha\in E$是一个具有素数$q=\sharp E/h$阶的点，这里$h=1,2$或4。
- $G=(E,+)$，其中E是有限域F_{2^n}上的椭圆曲线，$\alpha\in E$是一个具有素数$q=\sharp E/h$阶的点，这里$h=2$或4。

对情形1、2和3，利用$(Z_p^*,\cdot)$或$(F_{2^n}^*,\cdot)$上的指数演算法的适当形式可能形成攻击。对于情形2、4和5，利用q阶子群中的Pollard ρ算法可能形成攻击。

实际中的离散对数算法

安全性结果 Lenstra和Verheul估计的相对安全性结果。

要使基于椭圆曲线离散对数的密码体制保持安全到2020年，对情形4，建议取$p \approx 2^{160}$(或者在情形5中取$n = 160$)。

而对于情形1和2，要达到相同程度的安全水平，p至少应取2^{1880}。

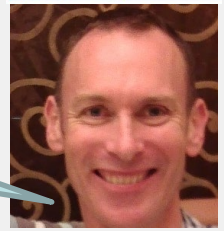
原因：主要是对椭圆曲线离散对数没有已知的指数演算法攻击。

Recent 10 years work on ECDLP

- Weil Descent+ Summation(Index calculus)

  A Joux, V Vitse(2012), 151ecdlp over GF(p^6);
  J.-C. Faugère et.al. EUROCRYPT 2012: Improving the Complexity of Index Calculus Algorithms Elliptic Curves over Binary Fields
  Semaev I.2015, New algorithm for ECDLP
  Huang-Kosters-Ye02015, **First or Last fall degree need more research!**
  Steven Galbraith-Pierrick Gaudry 2016

ECDLP is in time $2^{c\sqrt{n\ln n}}$!



We believe that elliptic curves over characteristic 2 fields of prime degree n are not threatened by such methods

- Improving Square Root Attacks

  Improved Baby-step Giant-step Algorithm :
  Bernstein-Lange grumpy giants(2013); Steven Galbraith, Ping Wang and Fangguo Zhang(2017) new speed up; Cheon J.H (2010) DLP with auxiliary inputs.
  Pollard rho Algorithm:
  Bernstein-Lange(2013); Hong J., Lee H.(2015) pre-computing; Fangguo Zhang and Ping Wang(2013) Point Halving.
  Fangguo Zhang and Shengli Liu(2019), List Decoding.

There is no practical attack on random curve on $GF(2^n)$ and GF(p)!
ECDLP on GF(p) is more secure than that on $GF(2^n)$!

ECDLP record

- 2009.07， EPFL, SECp-112

Joppe W. Bos, Marcelo E. Kaihara, Thorsten Kleinjung, Arjen K. Lenstra and Peter L. Montgomery, Solving a 112-bit Prime Elliptic Curve Discrete Logarithm Problem on Game Consoles using Sloppy Reduction, International Journal of Applied Cryptography, 2(3), 2012 , pp. 212-228

- SAC2014

Solving the Discrete Logarithm of a 113-bit Koblitz Curve with an FPGA Cluster

Erich Wenger and Paul Wolfger

Graz University of Technology
Institute for Applied Information Processing and Communications
Inffeldgasse 16a, 8010 Graz, Austria

Erich Wenger and Paul Wolfger: ECC2-113, https://eprint.iacr.org/2015/143

- ECDLP2-117(over $GF(2^{127})$):

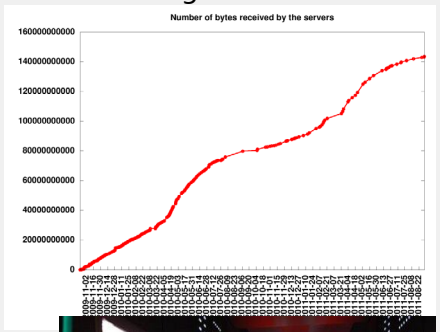
Bernstein, D. J., Engels, S., Lange, T., Niederhagen, R., Paar, C., Schwabe, P., Zimmermann, R.: Faster discrete logarithms on FPGAs. http://eprint.iacr.org/2016/382

- **Breaking ECC2K-130??**

From 2012 to now： http://ecc-challenge.info

ECC2K-130 on NVIDIA GPUs*Daniel J. Bernstein and Hsieh-Chung Chen and Chen-Mou Cheng and Tanja Lange and Ruben Niederhagen and Peter Schwabe and Bo-Yin Yang*

- **How about ECC2-131?**



Test1: 4582 DPs using 20 nodes(480 kers) in 51.45 hs overTianhe2

⇨ECC2-131 is in120 days using Tianhe2(17920 nodes)

Test2: 561 DPs using i7-7940X @3.10GHz CPU(14 kers) in 54.93 hs

⇨ ECC2-131 is in 93.5 days using 10000 such CPUs

关沛冬-罗玉琴-张方国-田海博， **ECC2-131 的并行 Pollard rho 算法实现分析，密码学报**

(O-9083.31)

密码理论与技术丛书

椭圆曲线离散对数问题

科学出版社互联网入口
科学数理分社：(010) 64019814　销售：(010) 64031535
E-mail：lijingke@mail.sciencep.com
销售分类建议：网络安全

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-076276-4

定 价：98.00 元

密码理论与技术丛书

椭圆曲线离散对数问题

科学出版社

“十四五”时期国家重点出版物出版专项规划项目

密码理论与技术丛书
丛书主编　冯登国

椭圆曲线离散对数问题

张方国　著

张方国，中山大学计算机学院教授。2001年12月在西安电子科技大学密码学专业获得工学博士学位。研究兴趣是密码学理论及其应用，在Asiacrypt，PKC，IEEE IT等国际重要会议和期刊发表论文200多篇，申请多项国内外发明专利，获得国际密码学会公钥密码会议（IACR-PKC）时间检验奖，教育部科技进步奖一等奖和广东省科技进步奖二等奖等奖励。担任《密码学报》《信息网络安全》等杂志编委，Asiacrypt 2023联合主席，2018年中国密码年会、Pairing 2013等会议的程序委员会主席。主持了国家重点研发计划课题、国家自然科学基金项目、广东省重大项目课题等多项科研项目。

科学出版社

Number/Function Field Sieve for DLP in GF(p^n)

Sub-exponential time: $q=p^n$, c is a constant,

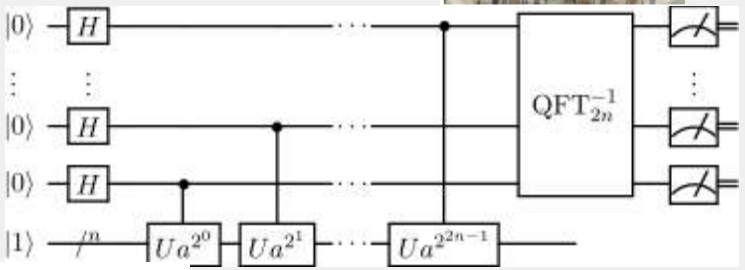
$$L_q[1/3,c] = \exp((c+o(1))(\log q)^{1/3}(\log\log q)^{2/3}).$$

- Practical Improvements on FFS [Joux-Lercier@ANTS2002]
- FFS in the medium prime case [Joux-Lercier@Eurocrypt2006]
- Antoine Joux，A new index calculus algorithm with complexity **L(1/4+o(1))** in very small characteristic [Eprint2013:95]
- BGJT: A **quasi-polynomial algorithm** for discrete logarithm in finite fields of small characteristic. CoRR, abs/1306.4244, 2013.
- Joux, 24/12/2012, GF(3355377^{47}); 06/01/2013, GF(33341353^{57});
- Joux et al., 21/05/2013, GF(2^{6168}); 01/2014 , GF(3^{5*479}) ; 10/2014,GF(2^{1279}), (1279 is prime); 2016, GF(3^{6*509}) ; GF(2^{30750})(GKZ2019);
- ….

1) Small characteristic finite fields are not recommended for DLP cryptosystem；
2) Bilinear pairings over finite fields with characteristic 2,3 or small and medium prime are not safe!

Quantum computing on ECDLP

- Shor 94: Quantum computers can
  - Factor integers
  - Calculate DLP (in any group)
- **This breaks two PKCs: RSA, ECC**



ECDLP in $E(\mathbb{F}_p)$ simulation results					Factoring of RSA modulus N interpolation from [21]		
$\lceil \log_2(p) \rceil$ bits	#Qubits	#Toffoli gates	Toffoli depth	Sim time sec	$\lceil \log_2(N) \rceil$ bits	#Qubits	#Toffoli gates
110	1014	$9.44 \cdot 10^9$	$8.66 \cdot 10^9$	273	512	1026	$6.41 \cdot 10^{10}$
160	1466	$2.97 \cdot 10^{10}$	$2.73 \cdot 10^{10}$	711	1024	2050	$5.81 \cdot 10^{11}$
192	1754	$5.30 \cdot 10^{10}$	$4.86 \cdot 10^{10}$	1 149	–	–	–
224	2042	$8.43 \cdot 10^{10}$	$7.73 \cdot 10^{10}$	1 881	2048	4098	$5.20 \cdot 10^{12}$
256	2330	$1.26 \cdot 10^{11}$	$1.16 \cdot 10^{11}$	3 848	3072	6146	$1.86 \cdot 10^{13}$
384	3484	$4.52 \cdot 10^{11}$	$4.15 \cdot 10^{11}$	17 003	7680	15362	$3.30 \cdot 10^{14}$
521	4719	$1.14 \cdot 10^{12}$	$1.05 \cdot 10^{12}$	42 888	15360	30722	$2.87 \cdot 10^{15}$

Table 2: Resource estimates of Shor's algorithm for computing elliptic curve discrete logarithms in $E(\mathbb{F}_p)$ versus Shor's algorithm for factoring an RSA modulus N.

Martin Roetteler, Michael Naehrig, Krysta M. Svore, and Kristin Lauter, **Quantum Resource Estimates for Computing Elliptic Curve Discrete Logarithms**, ASIACRYPT 2017, Part II, LNCS 10625, pp. 241–270, 2017.

比特安全性或硬核比特

- f: $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$ (**one-way function**)
- h: $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ is a hard-core predicate for f if given y=f(x) it is hard to guess h(x) with probability significantly higher than **½**.
- A case: ***h(x)***: any bit of binary representation of x

Bit security of DLP in any group

- G is a group with **prime order** and <g>=G, given (g, g^x), if an adversary can compute certain bits of $x=x_{n-1}2^{n-1}+\ldots+x_1 2+x_0$?
- Blum and Micali :"finding some bits (aka. hard-core bits) is as hard as computing discrete log in any group G"
- DL-LSB ⇔ DLP **(Divide and Square-root method)**

离散对数的比特安全性

问题6.2 离散对数第i比特问题

实例： $I=(p,\alpha,\beta,i)$，其中p是素数，$\alpha\in Z_p^*$是一个本原元，$\beta\in Z_p^*$，i是一个整数，满足$1\le i\le\lceil lb(p-1)\rceil$。

计算： 计算$L_i(\beta)$，这是$\log_\alpha\beta$二进制表示的第i个比特。

计算一个离散对数的最低比特是容易的。即如果$i=1$，离散对数的第1比特问题可以有效地计算。主要是利用模p二次剩余的Euler准则，p是素数。

在Z_p^*中，恰有一半的元素是平方剩余，一半不是。

假设α是Z_p的一个本原元。那么如果a是偶数则$\alpha^a \in QR(p)$。因为$(p-1)/2$个元素$\alpha^0 \mod p$，$\alpha^2 \mod p$，...，$\alpha^{p-3} \mod p$互不相同，因此

$$QR(p)=\{\alpha^{2i} \mod p : 0 \le i \le (p-3)/2\}$$

所以，β是二次剩余当且仅当$\log_\alpha \beta$是偶数，即当且仅当$L_1(\beta)=0$。

由Euler准则可知，β是一个二次剩余，当且仅当

$$\beta^{(p-1)/2} \equiv 1(\mod p)$$

所以有下列计算公式计算$L_1(\beta)$：

$$L_1(\beta)=\begin{cases} 0 & \beta^{(p-1)/2} \equiv 1(\mod p) \\ 1 & others \end{cases}$$

离散对数的比特安全性

现在考虑如何计算i大于1时$L_1(\beta)$的值。假设$p-1=2^s t$，t是奇数。可以证明对$i \leq s$，容易计算$L_1(\beta)$。另一方面，计算$L_{s+1}(\beta)$或许是困难的，因为任何计算$L_{s+1}(\beta)$的假设算法都可以用于计算Z_p上的离散对数。

ElGamal体制的安全性

密码体制6.1所描述的基本的ElGamal密码体制不是语义安全的。

用Euler准则容易判定Z_p的元素是否是模p的二次剩余。由6.7.1知道，β是一个模p的二次剩余，当且仅当a是偶数。类似地，y_1是一个模p的二次剩余，当且仅当k是偶数。我们可以确定a和k的奇偶性来计算ak的奇偶性。所以我们可以确定是否$\beta^k(=\alpha^k)$是一个二次剩余。

假设要区分x_1的加密与x_2的加密，这里x_1是二次剩余，x_2不是模p的二次剩余。确定y_2的二次剩余性是很简单的事情，我们已经讨论了确定β^k的二次剩余性的判定方法。那么，(y_1,y_2)是x_1的加密，当且仅当β^k和y_2二者同为二次剩余或者同为非二次剩余。

如果β是一个二次剩余，每个明文x也要求均为二次剩余，上述攻击就失效了。

ElGamal体制的安全性

事实上，如果$p=2q+1$，q是素数，可以证明，限制β, y_1和x为二次剩余等价于在模p的二次剩余子群中实现ElGamal密码体制。如果在Z_p^*中离散对数问题是难解的，这个版本的ElGamal密码体制被猜测是语义安全的。

Let $\mathcal{G}$ be a polynomial-time algorithm that, on input 1^n, outputs a (description of a) cyclic group $\mathbb{G}$, its order q (with $\|q\| = n$), and a generator g. (As usual, we also require that the group operation in $\mathbb{G}$ can be computed in time polynomial in n). The El Gamal encryption scheme is defined as follows:

CONSTRUCTION 10.19

Let $\mathcal{G}$ be as in the text. Define a public-key encryption scheme as follows:

- $\mathsf{Gen}(1^n)$ runs $\mathcal{G}(1^n)$ to obtain $\mathbb{G}, q, g$, and then chooses a random $x \leftarrow \mathbb{Z}_q$. The public key is $\langle \mathbb{G}, q, g, g^x \rangle$ and the private key is $\langle \mathbb{G}, q, g, x \rangle$.
- To encrypt a message $m \in \mathbb{G}$ with respect to the public key $pk = \langle \mathbb{G}, q, g, h \rangle$, choose a random $y \leftarrow \mathbb{Z}_q$ and output the ciphertext

$$\langle g^y,\ h^y \cdot m \rangle.$$

- To decrypt a ciphertext $\langle c_1, c_2 \rangle$ using the private key $sk = \langle \mathbb{G}, q, g, x \rangle$, compute

$$m := c_2 / c_1^x.$$

ElGamal的安全性

- 引理 如果DDH问题是困难的，那么ElGamal加密体制在选择明文攻击下是多项式安全的。

证明：为了显示ElGamal是多项式安全的，我们首先假设存在一个能够攻破ElGamal多项式安全性的多项式时间算法*A*，然后我们给出一个使用算法*A*作为子程序的算法*B*来解决DDH问题。

我们首先来回忆多项式安全性的攻击游戏：

在寻找阶段，输入一个公钥，输出两个消息和一些状态信息。

在猜测阶段，输入一个挑战密文、一个公钥、两个消息和一些状态信息，猜测挑战密文对应的明文是哪个消息。

ElGamal密文为：

(*g*^*k*, *mh*^*k*)

其中*k*是一个随机整数，*h*是公钥。

给定*g*^*x*、*g*^*y*和*g*^*z*，解决DDH问题的算法*B*执行如下步骤：

①令*h*=*g*^*x*。

②（*m*0, *m*1, *s*）=*A*（寻找阶段, *h*）。

③设置*c*1=*g*^*y*。

④从{0,1}中随机选择一个数*b*。

⑤设置*c*2=*mbg*^*z*。

⑥*b*′=*A*（猜测阶段, (*c*1, *c*2), *h*, *m*0, *m*1, *s*）。

⑦如果*b* = *b*′，输出“TRUE”，否则输出“FALSE”。

CDHP与DDHP

问题**6.3** 计算Diffie-Hellman问题(CDH)

实例： 一个乘法群$(G,\cdot)$，一个n阶元素$\alpha \in G$，两个元素$\beta,\gamma \in <\alpha>$。

问题： 找出$\delta \in <\alpha>$，满足$\log_\alpha \delta \equiv \log_\alpha \beta \times \log_\alpha \gamma (\mod n)$（等价地，给定$\alpha^b$和$\alpha^c$，找出$\alpha^{bc}$）。

问题**6.4** 判定Diffie-Hellman问题(DDH)

实例： 一个乘法群$(G,\cdot)$，一个n阶元素$\alpha \in G$，三个元素$\beta,\gamma,\delta \in <\alpha>$。

问题： 是否有$\log_\alpha \delta \equiv \log_\alpha \beta \times \log_\alpha \gamma (\mod n)$?（等价地，给定$\alpha^b$、$\alpha^c$和$\alpha^d$，判定是否$d \equiv bc (\mod n)$）。

CDHP与DDHP

对于CDH和DDH，存在图灵归约

$$DDH \propto_T CDH$$

且

$$CDH \propto_T Discrete\ Logarithm$$

这些归约说明，假设DDH难解与假设CDH难解至少有相同的程度。假设CDH难解与假设离散对数难解至少有着相同的程度。

ElGamal密码体制的语义安全性等价于DDH的难解性；ElGamal解密等价于求解CDH。因此，要证明ElGamaml密码体制的安全性所必需的假设强于仅假设离散对数是难解的。

CDHP与ElGamal体制

任何解CDH的算法，都可以用于解密ElGamal密文，反之亦然。

证明：“⇒”假设OracleCDH是解CDH的一个算法，设(y_1,y_2)是ELGamal密码体制的密文，具有公钥α和β。计算$\delta = OracleCDH(\alpha,\beta,y_1)$然后定义$x = y_2\delta^{-1}$容易看出，$x$是密文$(y_1,y_2)$的解密。

“⇐”假设Oracle-Elgamal-Decrypt是解密ElGamal密文的一个算法。设α,β,γ如CDH中的假设给定。定义α和β是ElGamal密码体制的公钥。那么，定义$y_1 = \gamma$，令$y_2 \in <\alpha>$为随机取定。计算$x = Oracle - Elgamal - Decrypt(\alpha,\beta,(y_1,y_2))$，这是密文$(y_1,y_2)$的解密。最后，计算$\delta = y_2x^{-1}$是CDH给定实例的解。即

$$\delta = \alpha^{\log_\alpha \beta \log_\alpha \gamma}$$