本次课程提纲：随机图

- 随机图概念
- 随机图性质

随机图定义

- 给定 N 与 p，对任意一对顶点，以概率 p 连边，产生随机图记为 G_{np}
- $\bar{M} = p \cdot \binom{N}{2} = pN(N-1)/2$
- 平均度数 $\bar{k} = 2\bar{M}/N = (N-1)p$

度的分布

- $P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$
- $\bar{k} = 2\bar{M}/N = (N-1)p$，$\sigma_k^2 = (N-1)p(1-p)$，$\dfrac{\sigma_k}{\bar{k}} \simeq \dfrac{1}{\sqrt{N}}$

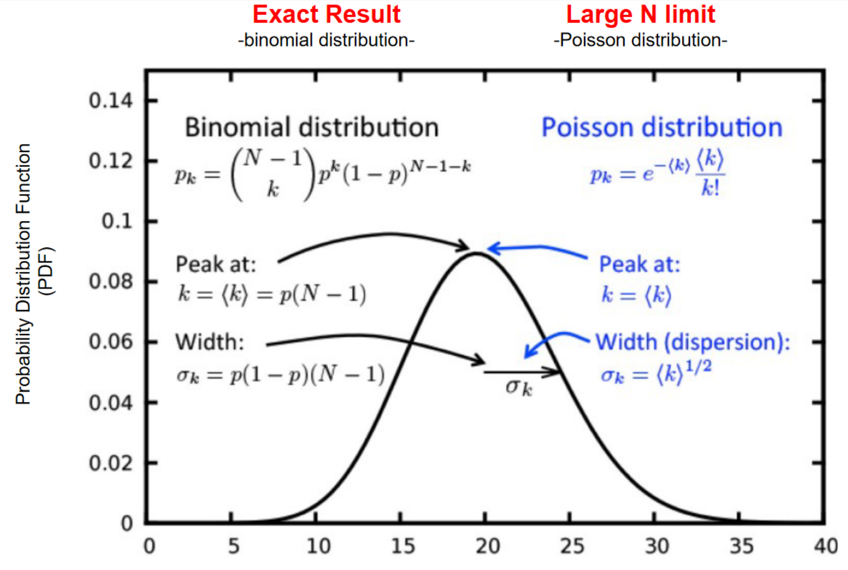
定理

$k \ll N$ 时，$P(k)$ 近似于 Poisson 分布

证明

- $\binom{N-1}{k} = (N-1)(N-2)\cdots(N-k+1)/k! \simeq (N-1)^k/k!$
- $(1-p)^{N-1-k} \simeq \left[1 - \dfrac{\bar{k}}{N-1}\right]^{N-1-k} \simeq \exp(-\bar{k})$
- $P(k) \simeq \dfrac{\bar{k}^k \exp(-\bar{k})}{k!}$

度的分布



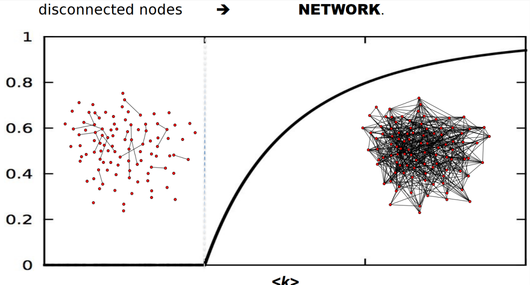
Exact Result
-binomial distribution-
Large N limit
-Poisson distribution-
Binomial distribution
$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$
Poisson distribution
$p_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$
Peak at:
$k = \langle k \rangle = p(N-1)$
Width:
$\sigma_k = p(1-p)(N-1)$
Peak at:
$k = \langle k \rangle$
Width (dispersion):
$\sigma_k = \langle k \rangle^{1/2}$
σ_k
Probability Distribution Function
(PDF)
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40

连通分支

定理

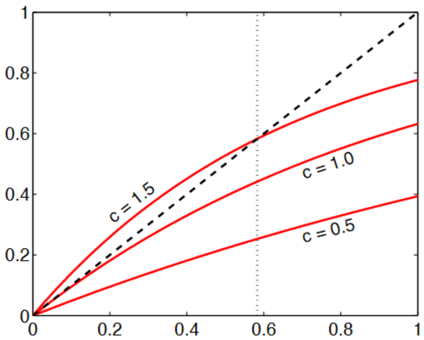
记 N_G 为 G_{Np} 最大连通分支的顶点个数

- 当 $\bar{k} = Np < 1$ 时，$N_G = O(\ln N)$
- 当 $\bar{k} = 1$ 时，$N_G = O(N^{2/3})$
- 当 $1 < \bar{k} < \ln N$ 时，巨连通分支存在
- 当 $\bar{k} > \ln N$ 时，$N_G = N$，即 G 是连通图



连通分支：临界点

- 记 $u = 1 - N_G/N$ 为不在最大连通分支顶点比例，也是顶点不在最大连通分支的概率
- $u = (1-p+pu)^{N-1} \simeq [1-p(1-u)]^N = [1-(1-u)\bar{k}/N]^N \simeq \exp[-(1-u)\bar{k}]$
- 令 $s = 1-u$，有 $1-s = \exp(-\bar{k}s)$
- $\bar{k} \leq 1$ 时，有唯一解 $s = 0$
- $\bar{k} > 1$ 时，除了 0 之外还有解 $s \in (0,1)$，对应巨连通分支



连通分支：临界点

- 考察第二个临界点 $\bar{k} = \ln N$
- 假设仅有一个顶点不在最大连通分支里：$s = 1 - 1/N$
- 由 $1 - s = \exp[-\bar{k}s]$，有 $1/N = 1 - s = \exp[-\bar{k}s] \simeq \exp[-\bar{k}]$
- $\bar{k} = \ln N$ 为第二个临界点，对应全连通

六度分离

- 考察全连通的情况 $\bar{k} > \ln N$
- 对任意顶点，有 $\bar{k}^d$ 个距离为 d 的顶点
- $\sum_{d=0}^{d_{max}} \bar{k}^d \leq N$，$d_{max} = O(\ln N / \ln \bar{k})$
- 假定有 70 亿人，每人认识 100 人，任意两人距离 $\ln(7 * 10^9)/\ln 100 \simeq 5$