

---

## 图论及其应用：第三次作业

---

请回答任意五题，将答案于六月二十七日前发送至2160853158@qq.com，邮件题目请注明姓名学号。

题一 最多可以将地球分成几个区域，使任何两个区域都相邻。

题二 证明有 10 个顶点的 5 正则图不是平面图。

题三 考察图  $G \triangleq (V, E)$ ，记  $\chi(G)$  为  $G$  的点色数，证明：

- 如果  $\forall v \in V : \chi(G - v) = \chi(G) - 1$ ， $G$  连通；
- 如果  $\forall x, y \in V : \chi(G - x - y) = \chi(G) - 2$ ， $G$  是完全图。

题四 图  $G$  有  $n$  个顶点，记  $\bar{G}$  为  $G$  的补图，证明：

- $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$ ；
- $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$ 。

题五 3 正则图  $G$  的边色数为 4，证明  $G$  不是  $H$  图。

题六 给定一个点色数为  $k$  的简单图  $G$  以及  $G$  的一个  $k$  染色方案  $\pi$ ，证明对  $k$  种颜色中任何一种颜色  $c$ ， $\pi$  中均存在  $c$  颜色的顶点，其邻居包含所有其他颜色。

题七 给定  $n$  个顶点， $m$  条边的图  $G$ ，证明  $G$  包含一个偶子图  $H$ ，其边的数目至少为  $\frac{2\lfloor n^2/4 \rfloor m}{n(n-1)}$ 。

题八 证明任何平面图最少有 4 个度数小于 6 的顶点。

题九 对  $p = 1/n$  的随机图  $G_{n,p}$ ，证明  $\forall \epsilon > 0$ ，大概率不存在多于  $(1 + \epsilon)n/2$  个顶点的连通分支。