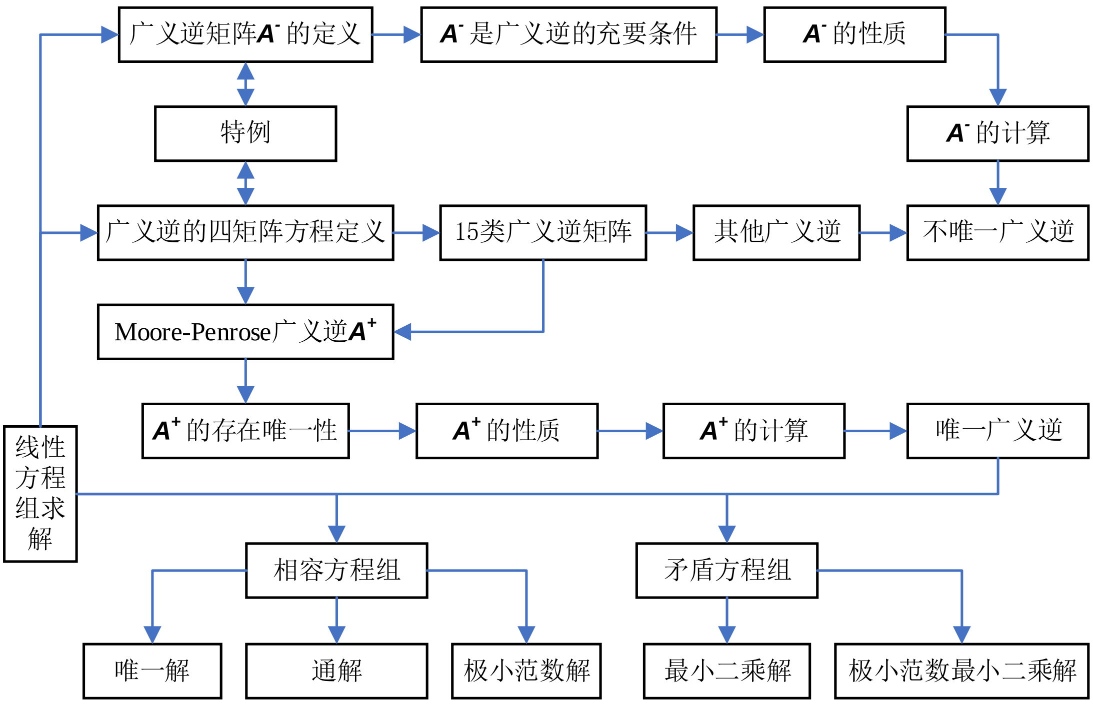
第 7 章　广义逆矩阵

线性代数的古典理论表明：只有非奇异方阵才存在逆矩阵，非方阵不可逆，奇异方阵（如零方阵）也不可逆．但是，在线性方程组的求解等实际问题中，遇到的矩阵不一定是方阵，即使是方阵也不一定非奇异，这就需要研究可否将逆矩阵的概念进一步推广，使得在某种意义下可以求得其逆矩阵，并研究推广后的广义逆矩阵应满足的条件和性质．

为推广逆矩阵的概念并使之应用于各类具体问题，人们已经做了大量工作，广义逆矩阵的相关知识已经成为矩阵理论的重要内容之一．

本章介绍广义逆矩阵的定义、性质及计算，着重介绍减号逆（$\boldsymbol{A}^-$）和加号逆（$\boldsymbol{A}^+$），最后介绍广义逆矩阵在线性方程组求解中的应用．

本章的知识网络框图：



7.1　广义逆矩阵

7.1.1　广义逆矩阵的定义

若$\boldsymbol{A}$为可逆方阵，则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解，其解为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. 若$\boldsymbol{A}$不是可逆方阵，即$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，当$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n,\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^m$且$\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$时，线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解，这时能否用某个矩阵$\boldsymbol{G}\in\mathbb{C}^{n\times m}$将线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解统一地表示成$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Gb}$的形式?

由于线性方程组的求解存在这种实际需求，即对任意一个矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，希望能在某种意义下求得其逆矩阵$\boldsymbol{G}\in\mathbb{C}^{n\times m}$，这就需要将逆矩阵的概念进行推广，提出广义逆矩阵的概念.

定义 7.1.1　设线性方程组为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中，系数矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，未知向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$，列向量$\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^m$已知，对于任意$\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$，若存在$\boldsymbol{A}^-\in\mathbb{C}^{n\times m}$，使得解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b}$成立，就称$\boldsymbol{A}^-$是$\boldsymbol{A}$的**广义逆矩阵**.

定理 7.1.1　对于矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，矩阵$\boldsymbol{A}^-\in\mathbb{C}^{n\times m}$是$\boldsymbol{A}$的广义逆矩阵的充要条件是

$$\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\tag{7.1.1}$$

证：①必要性　设线性方程组为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n},\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n,\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^m$，若$\boldsymbol{A}^-\in\mathbb{C}^{n\times m}$是$\boldsymbol{A}$的广义逆矩阵，则当$\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$时，有$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b}$，也即有$\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$. 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，取$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$，于是有

$$\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

所以$\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

②充分性　若$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，且存在$\boldsymbol{A}^-\in\mathbb{C}^{n\times m}$使

$$\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},$$

将$\boldsymbol{x}$右乘上式两端，得$\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{Ax}$，即$\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，这意味着$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，即$\boldsymbol{A}^-\in\mathbb{C}^{n\times m}$是$\boldsymbol{A}$的广义逆矩阵. ■

当矩阵$\boldsymbol{A}$的常义逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$存在时，显然$\boldsymbol{A}^{-1}$满足式(7.1.1)，所以广义逆矩阵$\boldsymbol{A}^-$是常义逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$的推广.

推论　$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}\le\mathrm{rank}\boldsymbol{A}^-$.

证: $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})\le\mathrm{rank}\boldsymbol{A}^{-}$. ■

根据定理 7.1.1, 也可将式(7.1.1)作为广义逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-}$的定义式, 按定义 7.1.1 或式(7.1.1)定义的广义逆也称为$\boldsymbol{A}$的**减号逆**.

7.1.2 减号逆$\boldsymbol{A}^{-}$的性质

以下通过几个定理给出减号逆$\boldsymbol{A}^{-}$的性质.

定理 7.1.2 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 若$\boldsymbol{A}^{-}$为$\boldsymbol{A}$的减号逆, 则$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-}=(\boldsymbol{A}^{-})^{\mathrm{T}}$, $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{-}=(\boldsymbol{A}^{-})^{\mathrm{H}}$.

证: 已知$\boldsymbol{A}^{-}$为$\boldsymbol{A}$的减号逆, 则由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$得$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

可见$(\boldsymbol{A}^{-})^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的减号逆.

同理可证$(\boldsymbol{A}^{-})^{\mathrm{H}}$为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$的减号逆, 即$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{-}=(\boldsymbol{A}^{-})^{\mathrm{H}}$. ■

定理 7.1.3 若$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_n^{n\times n}$且存在逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$, 则$\boldsymbol{A}^{-}=\boldsymbol{A}^{-1}$, 且$\boldsymbol{A}^{-}$唯一.

证: 因为$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-}$. ■

定理 7.1.4 若$\lambda\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$且$\boldsymbol{A}^{-}$为$\boldsymbol{A}$的减号逆, 则$(\lambda\boldsymbol{A})^{-}=\mu\boldsymbol{A}^{-}$, 其中

$$\mu=\begin{cases}\frac{1}{\lambda} & \text{当 }\lambda\ne 0\text{ 时}\\ 0 & \text{当 }\lambda=0\text{ 时}\end{cases}.$$

证: 当$\lambda=0$时, 公式显然成立. 当$\lambda\ne 0$时, 有

$$(\lambda\boldsymbol{A})(\mu\boldsymbol{A}^{-})(\lambda\boldsymbol{A})=(\lambda\boldsymbol{A})\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-}\right)(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A},$$

故$(\lambda\boldsymbol{A})^{-}=\mu\boldsymbol{A}^{-}$. ■

定理 7.1.5 若矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}_m^{m\times m}$, $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{C}_n^{n\times n}$, 且$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$, 若$\boldsymbol{A}$的减号逆为$\boldsymbol{A}^{-}$, 则$\boldsymbol{B}$的减号逆为$\boldsymbol{B}^{-}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{P}^{-1}$.

证: 因为

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q},$$

所以$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^{-}=\boldsymbol{B}^{-}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{P}^{-1}$. ■

定理 7.1.5 表明: 若已知等价变换前的矩阵的减号逆, 则可以求出等价变换后的矩阵的减号逆.

定理 7.1.6 若矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}_m^{m\times m}$, $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{C}_n^{n\times n}$, 且$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$, 若$\boldsymbol{B}$的减号逆为$\boldsymbol{B}^{-}$, 则$\boldsymbol{A}$的减号逆为$\boldsymbol{A}^{-}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{-}\boldsymbol{P}$.

证: 由于$\boldsymbol{B}$的减号逆为$\boldsymbol{B}^-$, 故

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B},$$

即

$$(\boldsymbol{PAQ})\boldsymbol{B}^-(\boldsymbol{PAQ})=\boldsymbol{PAQ}.$$

因为$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$都是满秩方阵, 所以

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^-\boldsymbol{P})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},$$

因此有

$$\boldsymbol{A}^-=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^-\boldsymbol{P}. \qquad \blacksquare$$

定理 7.1.6 表明: 若已知等价变换后的矩阵的减号逆, 则可以求出等价变换前的矩阵的减号逆.

定理 7.1.7 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 若$\boldsymbol{A}^-$为$\boldsymbol{A}$的减号逆, 则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$与$\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$都是幂等矩阵, 且$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$.

证: 因为

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-,$$

$$(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A},$$

故$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$, $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$都是幂等矩阵.

又

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)\le\operatorname{rank}\boldsymbol{A},$$

于是

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-.$$

类似可得

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}. \qquad \blacksquare$$

7.1.3 减号逆$\boldsymbol{A}^-$的计算

由线性代数知识, 对于任意一个$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$, 总存在$\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}_m^{m\times m},\boldsymbol{Q}\in\mathbb{C}_n^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}. \tag{7.1.2}$$

其中, $\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$都不唯一. 式(7.1.2)等号右边的矩阵是矩阵$\boldsymbol{A}$的等价标准形. 下述定理揭示: 任意矩阵的减号逆都可以利用其等价标准形的减号逆来求解.

定理 7.1.8 若$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}_{m\times n}$，则$\boldsymbol{B}^{-}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & *\\ * & *\end{bmatrix}_{n\times m}$，其中$*$是任意矩阵.

证: 因为对$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & *\\ * & *\end{bmatrix}_{n\times m}$，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}_{m\times n}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & *\\ * & *\end{bmatrix}_{n\times m}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}_{m\times n},$$

所以

$$\boldsymbol{B}^{-}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & *\\ * & *\end{bmatrix}_{n\times m}. \qquad \blacksquare$$

定理 7.1.8 表明: 标准形$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}_{m\times n}$的减号逆存在且不唯一.

定理 7.1.9 若矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，且存在$\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}_m^{m\times m}$，$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{C}_n^{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}_{m\times n},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & *\\ * & *\end{bmatrix}_{n\times m}\boldsymbol{P},$$

其中$*$是任意矩阵.

证: 由定理 7.1.6 知

$$\boldsymbol{A}^{-}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}_{m\times n}^{-}\boldsymbol{P},$$

又由定理 7.1.8 知

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}_{m\times n}^{-}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & *\\ * & *\end{bmatrix}_{n\times m},$$

其中$*$是任意矩阵.

所以有

$$\boldsymbol{A}^{-}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & *\\ * & *\end{bmatrix}_{n\times m}\boldsymbol{P}. \qquad \blacksquare$$

例 7.1.1 已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 3 & 0\\ 2 & -4 & 1 & 5\\ -4 & 5 & 7 & -10\end{bmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^{-}$.

分析: 将$\boldsymbol{A}$通过初等变换化为等价标准形，从而求出$\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{Q}$.

解: 构造分块矩阵，在$\boldsymbol{A}$的右边放一个单位矩阵$\boldsymbol{E}_3$，在$\boldsymbol{A}$的下方放一个单位矩阵$\boldsymbol{E}_4$，将$\boldsymbol{A}$通过初等变换化为等价标准形的同时，$\boldsymbol{E}_3$将化为$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{E}_4$将化为$\boldsymbol{Q}$.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_3 \\ \boldsymbol{E}_4 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 11/2 & -5/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z} \end{bmatrix}\boldsymbol{P},$$

其中, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{2\times1}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{2\times2}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{C}^{2\times1}$.

7.2 M-P 广义逆矩阵

7.2.1 M-P 广义逆矩阵的定义

1920 年, 数学家 E. H. Moore 首先提出了广义逆矩阵的概念, 但由于定义形式复杂, 该研究成果并未得到重视. 直到 1955 年, 另一位数学家 R. Penrose 以四个矩阵方程的形式给出了广义逆矩阵的更简明的定义后, 广义逆矩阵的研究才进入了一个新阶段, 其理论和应用得到了迅速发展.

定义 7.2.1 对任意矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在矩阵$\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 且$\boldsymbol{G}$满足如下四个 Penrose 方程:

(1) $\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}$;

(2) $\boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}$;

(3) $(\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}$;

(4) $(\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GA}$.

中的某几个或全部，则称$\boldsymbol{G}$为$\boldsymbol{A}$的一个**广义逆矩阵**. 满足全部四个矩阵方程的广义逆矩阵称为$\boldsymbol{A}$的 **Moore-Penrose 逆**，简称 **M-P 逆**. M-P 逆也记为$\boldsymbol{A}^{+}$，称为$\boldsymbol{A}$的**加号逆**.

当矩阵$\boldsymbol{A}$的常义逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$存在时，显然$\boldsymbol{A}^{-1}$满足全部四个矩阵方程，所以 M-P 广义逆是常义逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$的推广.

对任意给定的矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$，其 M-P 广义逆$\boldsymbol{A}^{+}$是否存在？若存在又是否唯一？以下定理回答了这一问题.

定理 7.2.1　设矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$，则其 M-P 广义逆$\boldsymbol{A}^{+}$存在且唯一.

证：　①存在性　设$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = r$，若$r = 0$，则$\boldsymbol{A}$是$m \times n$零矩阵，显然$n \times m$零矩阵满足四个 Penrose 方程.

若$r > 0$，由矩阵的奇异值分解定理可知，存在m阶酉矩阵$\boldsymbol{U}$和n阶酉矩阵$\boldsymbol{V}$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}},$$

其中，$\boldsymbol{\Delta} = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)$，$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r$是$\boldsymbol{A}$的奇异值.

令

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}},$$

可验证矩阵$\boldsymbol{G}$满足四个 Penrose 方程，故$\boldsymbol{A}$的 M-P 广义逆$\boldsymbol{A}^{+}$存在.

②唯一性　设矩阵$\boldsymbol{G}$和$\boldsymbol{F}$都满足四个 Penrose 方程，则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} &= \boldsymbol{G}((\boldsymbol{AFA})\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AF})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GAGAF} \\ &= \boldsymbol{GAF} = \boldsymbol{GA}(\boldsymbol{FAF}) = (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{FA})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{FAGA})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F} \\ &= (\boldsymbol{FA})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{FAF} = \boldsymbol{F}. \end{aligned}$$

故$\boldsymbol{A}$的 M-P 广义逆$\boldsymbol{A}^{+}$是唯一的.　■

定义 7.2.2　对矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$，若存在矩阵$\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$满足 Penrose 方程中的第(i), (j), ⋯, (k)方程，则称$\boldsymbol{G}$为$\boldsymbol{A}$的$\{i, j, \cdots, k\}$逆，其全体记为$\boldsymbol{A}\{i, j, \cdots, k\}$.

由定义 7.2.1 和定义 7.2.2 可知：按满足 1~4 个 Penrose 方程来分类，$\boldsymbol{A}$的广义逆矩阵共有$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$类.

这 15 类广义逆矩阵中，应用较多的是：

(1) $\boldsymbol{A}\{1\}$：其中任意一个确定的广义逆称为**减号逆**，记为$\boldsymbol{A}^{-}$；

(2) $\boldsymbol{A}\{1,2\}$：其中任意一个确定的广义逆称为**自反减号逆**，记为$\boldsymbol{A}_r^{-}$；

(3) $\boldsymbol{A}\{1,3\}$: 其中任意一个确定的广义逆称为**最小范数广义逆**, 记为$\boldsymbol{A}_m^-$;

(4) $\boldsymbol{A}\{1,4\}$: 其中任意一个确定的广义逆称为**最小二乘广义逆**, 记为$\boldsymbol{A}_1^-$;

(5) $\boldsymbol{A}\{1,2,3,4\}$: 该广义逆唯一, 称为 **Moore-Penrose 逆或加号逆**, 记为$\boldsymbol{A}^+$.

定理 7.2.1 表明: $\boldsymbol{A}$的 M-P 广义逆$\boldsymbol{A}^+$存在且唯一, 从而上述 15 类广义逆矩阵都是存在的. 需要指出的是, 只要$\boldsymbol{A}$不是可逆矩阵, 则除$\boldsymbol{A}$的 M-P 广义逆以外的其他 14 类广义逆矩阵都是不唯一的.

在 15 类广义逆矩阵中, $\boldsymbol{A}^-$是最基本的, 而$\boldsymbol{A}^+$唯一且同时包含于 15 类广义逆矩阵的集合中, 所以$\boldsymbol{A}^-$和$\boldsymbol{A}^+$在广义逆矩阵中十分重要. 7.1 节已经详细讨论了$\boldsymbol{A}^-$的定义、性质和计算, 7.2.1 节已经讨论了$\boldsymbol{A}^+$的定义, 后续将继续讨论$\boldsymbol{A}^+$的性质和计算.

7.2.2 $\boldsymbol{A}^+$的性质

由定义 7.2.1 知, $\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$都是 Hermite 矩阵. 此外, 由于$\boldsymbol{A}^+$的唯一性, 它所具有的性质与常义逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$的性质相仿, 定理 7.2.2 归纳了$\boldsymbol{A}^+$的性质.

定理 7.2.2　设$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

(1) $(\boldsymbol{A}^+)^+ = \boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+ = (\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{H}}$;

(3) $(a\boldsymbol{A})^+ = \frac{1}{a}\boldsymbol{A}^+ \quad (a \neq 0)$;

(4) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^+ = \boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+ = \boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{H}}$; $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+ = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^+$;

(5) $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+ = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^+\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$;

(6) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)$.

证: 式(1)~(3)直接按定义 7.2.1 验证满足四个 Penrose 方程即可, 下面证明(4)~(6).

(4) 令$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+$, 证$\boldsymbol{B}^+ = \boldsymbol{G}$即可. 由于

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+ = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A},$$

验证四个 Penrose 方程:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+ = \boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^+ = \boldsymbol{G},$$

$$(\boldsymbol{BG})^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BG},$$
$$(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GB},$$
所以$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}=\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}=\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{H}}$.

令$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，则$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$，故$(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{+}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}})^{+}\boldsymbol{C}^{+}=(\boldsymbol{C}^{+})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{+}$，也即
$$(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})^{+}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}\boldsymbol{A}^{+}=(\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{+}.$$
(5) 由(4)的结果，有
$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AA}^{+}=(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})^{+},$$
$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AA}^{+}=\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{AA}^{+})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}.$$
(6) 因为
$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})&=\mathrm{rank}(\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{A})\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{+})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AA}^{+})\\&\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{AA}^{+})\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}),\end{aligned}$$
所以有
$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{+})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{AA}^{+}).$$ ■

7.2.3 加号逆$\boldsymbol{A}^{+}$的计算

定理 7.2.3 若 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{C}$，则 $\boldsymbol{A}^{+}=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，其中
$$\mu_i=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_i} & \text{当}\lambda_i\neq0\text{ 时}\\ 0 & \text{当}\lambda_i=0\text{ 时}\end{cases}\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$
证: 不失一般性，令
$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\neq0,\quad\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0,$$
则令
$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1}&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\frac{1}{\lambda_r}&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix},$$
易证$\boldsymbol{G}$满足定义 7.2.1 中的四个 Penrose 方程，所以$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{G}$. ■

推论 若 n 阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$, 则$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{A}$.

定理 7.2.4 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$, 且$\boldsymbol{A}$的一个满秩分解是$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$ ($\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}_r^{m\times r}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}_r^{r\times n}$), 则

$$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}.$$

证: 由于$\mathrm{rank}(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=r$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=r$, 所以$\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}}$和$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}$都是 r 阶可逆矩阵. 记$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$, 易证$\boldsymbol{G}$满足定义 7.2.1 中的四个 Penrose 方程. ■

推论 1 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_r^{m\times r}$, 则$\boldsymbol{A}^+=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$.

证: 因为$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_r^{m\times r}$, 有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AE}_r$, 由定理 7.2.4 可证. ■

推论 2 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_r^{r\times n}$, 则$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})^{-1}$.

证: 因为$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_r^{r\times n}$, 有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_r\boldsymbol{A}$, 由定理7.2.4可证. ■

定理 7.2.4 及其推论给出了复矩阵$\boldsymbol{A}$的 M-P 广义逆$\boldsymbol{A}^+$的计算方法:

(1) 若$\boldsymbol{A}$为满秩方阵, 则$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 若$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{C}$, 则$\boldsymbol{A}^+=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$, 其中

$$\mu_i=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_i} & 当\lambda_i\neq 0 时\\ 0 & 当\lambda_i=0 时\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(3) 若$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_r^{m\times r}$(列满秩矩阵), 则有$\boldsymbol{A}^+=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$.

(4) 若$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_r^{r\times n}$(行满秩矩阵), 则有$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})^{-1}$.

(5) 若$\boldsymbol{A}$为降秩矩阵, 且$\boldsymbol{A}$的满秩分解为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$, 其中$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}_r^{m\times r}$(列满秩矩阵), $\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}_r^{r\times n}$(行满秩矩阵), 则

$$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}.$$

注: 若矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 若$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})<\min(m,n)$, 则称$\boldsymbol{A}$是降秩矩阵.

例 7.2.1 求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ -1 & -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$的 Moore-Penrose 逆.

解: 先对$\boldsymbol{A}$进行初等变换

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

故$\boldsymbol{A}$的满秩分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6 & 3\\ 3 & 6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{33}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 2 & -2\\ 1 & -5 & -6\\ 1 & 6 & 5\end{bmatrix}.$$

例 7.2.2 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 4\\ -1 & -1 & -1 & -2\\ 3 & 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{+}$.

解： 对$\boldsymbol{A}$进行满秩分解，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{CC}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}11 & 9\\ 9 & 9\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{180}\begin{bmatrix}-45 & 0 & 45\\ -45 & 0 & 45\\ 26 & -4 & -10\\ 52 & -8 & -20\end{bmatrix}.$$

7.3 应用实例

7.3.1 相容方程组和矛盾方程组

设系数矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，未知向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^{n}$，已知列向量$\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^{m}$，则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的求解情况有:

(1) 若$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解，这时称$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$是**相容方程组**.

(2) 若$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\neq\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$无解，这时称$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$是**矛盾方程组**.

矛盾方程组的来源有:

(1) 未知量之间虽然满足线性关系，但由于系数和常数项是观测值，难免存在误差，这就使得相容方程组变成了矛盾方程组.

(2) 未知量之间不满足线性关系，但经过人为处理将其近似为线性关系，使得变量之间不能精确地满足某个线性方程组.

矛盾方程组是无解的，即不存在通常意义下的解. 但是，矛盾方程组也是对客观现实的一种数学建模，人们希望从最小二乘等数据拟合的角度求出矛盾方程组的解.

7.3.2 相容方程组的求解

相容方程组的解有以下可能情形:

(1) 唯一解. 若$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$且非奇异，即$\det\boldsymbol{A}\neq 0$或$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=n$，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解，其解为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

(2) 通解和极小范数解. 若$\boldsymbol{A}$是奇异方阵或长方矩阵，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，此时可以求方程组的通解. 在无穷多解中，方程组的极小范数解在实际应用中是十分有用的，且可以证明极小范数解是唯一的，可以进一步求极小范数解.

定义 7.3.1 设系数矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，未知向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^{n}$，列向量$\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^{m}$已知，称相容线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的所有解$\boldsymbol{x}$中，2-范数最小的解是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的**最小范数解**或**极小范数解**，即$\|\boldsymbol{x}_0\|_2=\min\limits_{\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}}\|\boldsymbol{x}\|_2$.

定理 7.3.1 设系数矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，未知向量$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^{n}$，列向量$\boldsymbol{0}\in\mathbb{C}^{m}$，则齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{z},$$

其中，$\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^{n}$是任意的$n$维列向量.

证: ①充分性

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}.$$

②必要性

若$\boldsymbol{x}$满足方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}.$$ ■

定理 7.3.2　设系数矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$，未知向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$，列向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$已知，则非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$相容的充要条件为

$$\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

证：①充分性

若$\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$是方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的解，即方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$相容.

②必要性

若方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$相容，则$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b}$. ■

定理 7.3.3　设系数矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$，未知向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$，列向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$已知，非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$是相容的，则

(1) 其通解可以表示为$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}$，其中$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$是任意的$n$维列向量.

(2) 其唯一的极小范数解是$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$.

证：(1) 由定理 7.3.1，只需证$\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的特解即可.

因为$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$是相容的，因此$\exists \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$，满足$\boldsymbol{Ax}_0 = \boldsymbol{b}$，所以

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{AA}^+\cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{Ax}_0 = \boldsymbol{Ax}_0 = \boldsymbol{b}.$$

(2) 首先证明$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的极小范数解. 因为对于$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$，$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}, (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}[\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}]\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}[\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}]\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^+ - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{AA}^+)\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{0},\end{aligned}$$

因而$\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}$，又因为

$$\|\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}\|^2 = \|\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}\|^2 + \|(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}\|^2 \geq \|\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}\|^2,$$

所以$\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的极小范数解.

再证唯一性.

假设$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}^*$，且$\|\boldsymbol{x}^*\| = \|\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}\|$，则由

$$\|\boldsymbol{x}^*\|^2 = \|\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}^*\|^2 = \|\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}\|^2 + \|(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}^*\|^2 = \|\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}\|^2,$$

可得

$$\|(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}^*\|^2 = 0,$$

因而$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$. ■

例 7.3.1　求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}.$$

解：　令

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

则原方程可表示为$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，且因为$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$，所以方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$是相容的，对$\boldsymbol{A}$进行满秩分解：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{BC},$$

可求得

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -6 & -7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & -7 & -6 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

故方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的通解是

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{z},$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} z_1 + z_2 - z_3 \\ z_1 + z_2 - z_3 \\ -(z_1 + z_2 - z_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - c \\ -c \\ c \end{bmatrix},$$

其中，$c = \frac{1}{3}(1 - z_1 - z_2 + z_3)$为任意常数.

7.3.3　矛盾方程组的求解

矛盾方程组的解有以下可能情形:

(1) 最小二乘解. 虽然矛盾方程组不存在常义解，但在实际问题中，可以求出矛盾方程组的最小二乘解.

(2) 求极小范数最小二乘解. 一般来说，矛盾方程组的最小二乘解是不唯一的，可以求解矛盾方程组的极小范数最小二乘解（最佳逼近解），可以证明: 矛盾方程组的极小范数最小二乘解是唯一的.

定义 7.3.2 设系数矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$，未知向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$，列向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$已知，对于线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，若 n 维向量$\boldsymbol{x}_0$满足对于任何一个 n 维向量$\boldsymbol{x}$，都有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{b}\|_2 = \min_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2,$$

则称$\boldsymbol{x}_0$是线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的**最小二乘解**.

定义 7.3.3 若矛盾方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的全部最小二乘解构成的集合为 L，若$\boldsymbol{x}_0 \in L$，且

$$\|\boldsymbol{x}_0\|_2 = \min_{\boldsymbol{x}\in L} \|\boldsymbol{x}\|_2$$

则称$\boldsymbol{x}_0$是矛盾方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的**极小范数最小二乘解**或**最佳逼近解**.

引理 7.3.1 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$是矛盾方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解的充要条件是$\boldsymbol{x}_0$是方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b}$的解.

注意，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b}$是相容的，这是因为取$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}$，下式成立:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b}.$$

引理 7.3.1 的意义是将矛盾方程组最小二乘解的求解问题转化为相容方程组的求解问题.

定理 7.3.4 设系数矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$，未知向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$，列向量$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$已知，非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$是矛盾方程组，则

(1) 其最小二乘解的通解可以表示为$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}$，其中$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$是任意$n$维列向量.

(2) 其唯一的极小范数最小二乘解是$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}$.

证: (1) 由引理 7.3.1，非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解就是方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b}$的解，而由定理 7.3.3 可知，方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b}$的通解是

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}))\boldsymbol{z},$$

其中$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$是任意$n$维列向量. 因为$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{+}$，所以

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{z},$$

因而，矛盾方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解的通解可以表示为$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}$.

(2) 证明$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的唯一的极小范数最小二乘解类似于定理 7.3.3 中(2)的证明，略. ■

例 7.3.2 判断线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$$

是否有解？如果有解，求通解和极小范数解；如果无解，求最小二乘解的通解和最佳逼近解.

解：　由方程组知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix},$$

可求得

$$\boldsymbol{A}^{+} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -6 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix},$$

由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} = (11,5,-6)^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{b},$$

所以方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$无解，其最小二乘解的通解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 9 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}.$$

其唯一的最佳逼近解是

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} = (1,2,\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3})^{\mathrm{T}}.$$

本 章 小 结

本章从线性方程组求解存在的实际需求出发，提出了广义逆矩阵的概念. 广义逆矩阵对于奇异方阵和长方矩阵都存在，且具有通常逆矩阵的一些性质，当矩阵是非奇异方阵时，它还原到通常意义下的逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$.

本章着重介绍了两类广义逆矩阵，即减号逆$\boldsymbol{A}^{-}$和加号逆$\boldsymbol{A}^{+}$，其中，$\boldsymbol{A}^{+}$是$\boldsymbol{A}^{-}$的特例，$\boldsymbol{A}^{-}$是不唯一的，而$\boldsymbol{A}^{+}$具有唯一性，因而更有实用价值.

广义逆矩阵理论能把相容线性方程组的通解、极小范数解以及矛盾方程组的最小二乘解、极小范数最小二乘解全部统一起来，从而以古典线性代数理论所不曾有的姿态解决了一般线性方程组的求解问题.

学习完本章内容后，应能达到如下基本要求：

1. 掌握减号逆$\boldsymbol{A}^{-}$的定义、性质和计算.
2. 掌握加号逆$\boldsymbol{A}^{+}$的定义、性质和计算.
3. 掌握相容方程组的求解方法.
4. 掌握矛盾方程组的求解方法.

习题 7

7-1　已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^-$.

7-2　已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^-$.

7-3　已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^-$.

7-4　已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2i & i & 0\\ 0 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^-$.

7-5　设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$零矩阵，试求$\boldsymbol{A}^-$.

7-6　设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，证明：总存在可逆的$\boldsymbol{A}^-$.

7-7　设$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$除了第 i 行第 j 列元素为 1 外，其他元素均为 0，试求$\boldsymbol{A}^-$.

7-8　证明：设$\boldsymbol{A}^-$是$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$的一个广义逆矩阵，$\boldsymbol{V}\in\mathbb{C}^{n\times m}$为任意矩阵，则

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^-+\boldsymbol{V}-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$$

是$\boldsymbol{A}$的广义逆矩阵.

7-9　设$\boldsymbol{A}^-$是$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$的一个广义逆矩阵，则对任意的$\boldsymbol{V}\in\mathbb{C}^{n\times m}$与$\boldsymbol{W}\in\mathbb{C}^{m\times m}$，$n\times m$矩阵

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^-+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)+(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}$$

是$\boldsymbol{A}$的广义逆矩阵.

7-10　已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^+$.

7-11　已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^+$.

7-12　已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^+$.

7-13　已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^+$.

7-14　设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{Q}$分别是 m 阶与 n 阶酉矩阵．试证：$(\boldsymbol{PAQ})^+=\boldsymbol{Q}^+\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{P}^+$.

7-15　试证明下列等式:

(1)　$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+} = \boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}\boldsymbol{A}$.

(2)　$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}$.

7-16　如果$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$, 试证明: $(\boldsymbol{A}^2)^{+} = (\boldsymbol{A}^{+})^2$.

7-17　求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}$$

的通解.

7-18　用广义逆矩阵验证线性方程组有解, 并求通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 14 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 22 \end{cases}.$$

7-19　用广义逆矩阵验证线性方程组有解, 并求通解.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0.5 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}.$$

7-20　用广义逆矩阵$\boldsymbol{A}^{+}$验证线性方程组无解, 并求出极小范数最小二乘解:

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

7-21　用广义逆矩阵$\boldsymbol{A}^{+}$验证线性方程组无解, 并求出最佳逼近解:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0.5 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -2 \end{cases}.$$

7-22　判断线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

是否有解？如果有解, 求通解和极小范数解; 如果无解, 求最小二乘解的通解和最佳逼近解.