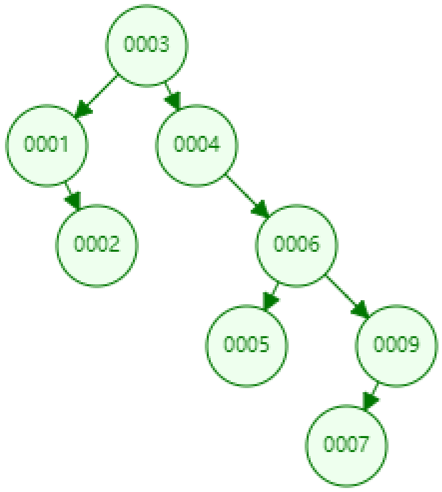
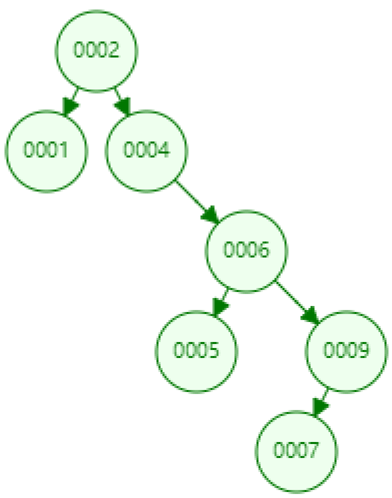
CH4 课后习题

4.9

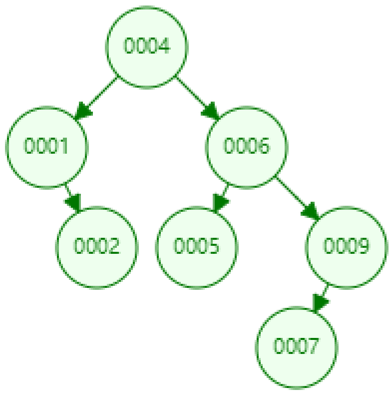
a. Answer



b. Answer



OR



4.10

a. Answer

$f(0)$ 与 $f(1)$ 的值均为 0

b. Answer

当存在有 N 个节点时 $(N>1)$:

根节点的左右子树中所含的节点个数共存在 N 种情况，令左子树的节点个数为 i，则右子树的节点个数便为 $N-i-1$，其中 $(0 \leq i \leq N-1)$

其中，唯有当左子树或右子树为空树的两种情况下根节点才不为满节点。于是有 :

$$f(N)=\frac{1}{N}[\sum_{i=0}^{N-1}(1+f(i)+f(N-i-1))-2]$$

$$=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} 1}{N}-\frac{2}{N}+\frac{\sum_{i=0}^{N-1}(f(i)+f(N-i-1))}{N}$$

$$=\frac{N-2}{N}+\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1}(f(i)+f(N-i-1))$$

证毕。

c. Answer

即证明 $f(N)=\frac{N-2}{3}=\frac{N-2}{N}+\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(f(i)+f(N-i-1))$ 对于 $N\geq 2$ 成立。

由（a），可知 $f(0)=f(1)=0$,

- 当 $N=2$ 时：

$$\frac{N-2}{3}=\frac{2-2}{3}=0$$

$$\begin{aligned}&\frac{N-2}{N}+\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(f(i)+f(N-i-1))\\=&\frac{2-2}{2}+\frac{1}{2}(f(0)+f(1)+f(1)+f(0))=0\end{aligned}$$

故 $N=2$ 时，等式成立。

- 当 $N>2$ 时：

假设对于所有 $2\leq k<N$，$f(k)=\frac{k-2}{3}$ 成立。

则有：

$$\sum_{i=0}^{N-1}(f(i)+f(N-i-1))$$

$$=2(f(0)+f(N-1)+f(1)+f(N-2))+\sum_{i=2}^{N-3}(\frac{i-2}{3}+\frac{N-i-1-2}{3})$$

$$=2(f(N-1)+f(N-2))+\sum_{i=2}^{N-3}(\frac{i-2+N-i-1-2}{3})$$

$$= 2(\frac{N-3}{3} + \frac{N-4}{3}) + \sum_{i=2}^{N-3}(\frac{N-5}{3})$$

$$= \frac{4N-14}{3} + \frac{(N-4)(N-5)}{3}$$

$$= \frac{N^2-5N+6}{3} = \frac{(N-2)(N-3)}{3}$$

故：

$$\frac{N-2}{N} + \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(f(i) + f(N-i-1))$$

$$= \frac{N-2}{N} + \frac{1}{N}\frac{(N-2)(N-3)}{3}$$

$$= \frac{N^2-5N+6+3N-6}{3N}$$

$$= \frac{N^2-2N}{3N} = \frac{N-2}{3}$$

根据数学归纳，得证。

d. Answer

令一棵二叉树的满节点个数为 N_2，度数为 1 的节点个数为 N_1，叶节点个数为 N_0，则有：

$$N_2 + N_1 + N_0 - 1 = 2N_2 + N_1$$

即：

$$N_0 = N_2 + 1$$

由（b）可知：

$$f(N) = \frac{N-2}{3}$$

故树叶的平均数为：

$$f_0(N) = f(N) + 1 = \frac{N-2}{3} + 1 = \frac{N+1}{3}$$

4.19

Answer