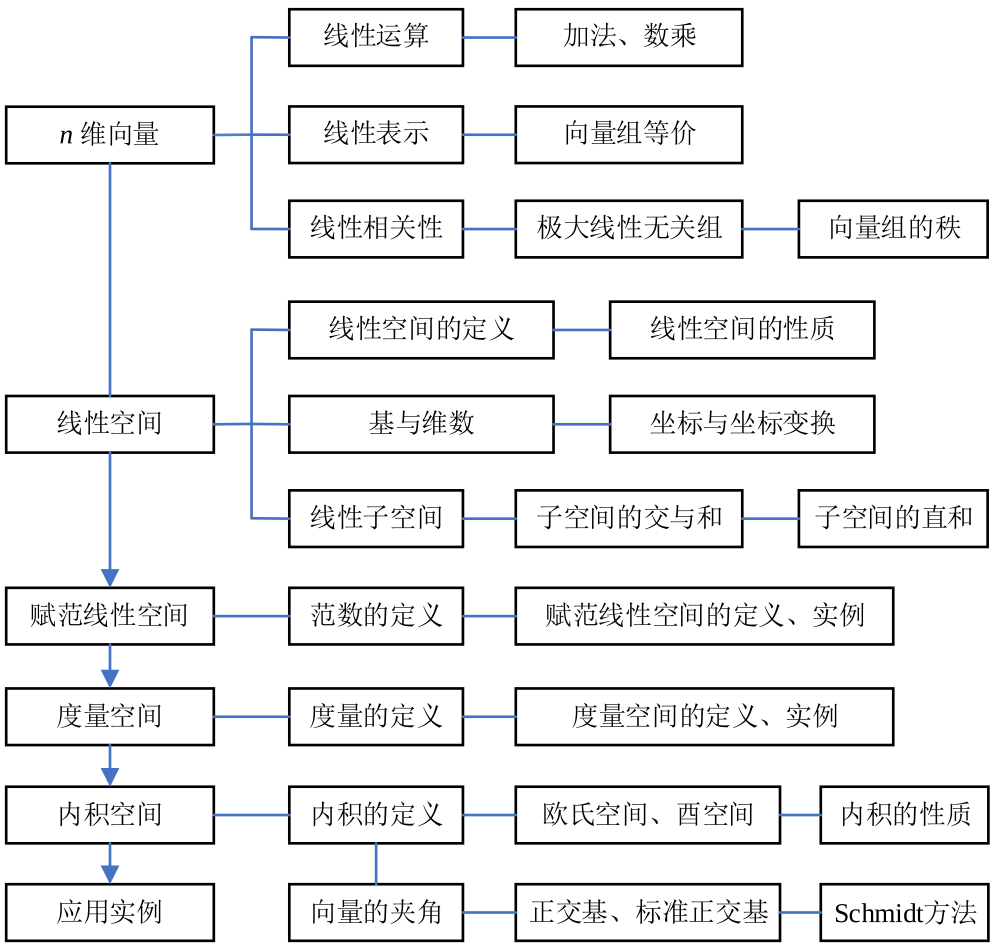
第 1 章　线性空间

在线性代数中，将几何空间中的三维向量概念扩展到由 n 个数构成的有序数组，得到 n 维向量的概念，对 n 维向量定义加法和数乘两种线性运算，得到了实数域$\mathbb{R}$上的 n 维向量空间$\mathbb{R}^n$. 将向量空间$\mathbb{R}^n$的概念进一步概括、拓展，将得出更加抽象的线性空间的概念. 简单地讲，线性空间是定义了加法和数乘两种线性运算及相关运算规则的非空集合，且集合的元素类型更加多样.

线性空间的概念及相关理论是线性代数知识的进一步深化，是学习矩阵理论的基础. 本章首先介绍线性空间、线性空间的子空间的概念，然后分别通过定义范数、度量、内积，将几何空间中的长度、距离、角度的概念推广到一般的线性空间，进而逐步阐述赋范线性空间、度量空间、内积空间以及这些空间的性质.

本章的知识网络框图：



1.1 线性空间

1.1.1 线性空间的定义和性质

定义 1.1.1 设$\mathbb{P}$是一个由复数组成的集合，且$\mathbb{P}$包含数 0 和 1，若集合$\mathbb{P}$对数的加、减、乘、除运算封闭，即对任意的$a, b \in \mathbb{P}$，均有

$$a+b \in \mathbb{P}, a-b \in \mathbb{P}, ab \in \mathbb{P}, \frac{a}{b} \in \mathbb{P}\ (b \neq 0),$$

则称$\mathbb{P}$是一个**数域**.

常见数域有：①全体复数组成的集合称为**复数域**,记为$\mathbb{C}$. ②全体实数组成的集合称为**实数域**，记为$\mathbb{R}$. ③全体有理数组成的集合称为**有理数域**,记为$\mathbb{Q}$.

线性空间理论所考虑的数域是实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$，二者统称为数域，记为$\mathbb{F}$.

定义 1.1.2 设 V 是一个非空集合，$\mathbb{F}$是一个数域，在集合 V 的元素之间定义**加法**运算. 即对 V 中任意两个元素$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$，在 V 中都有唯一的元素$\boldsymbol{\xi}$与之对应，$\boldsymbol{\xi}$称为$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的和，记为$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 且加法运算满足以下法则:

(1) 交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

(2) 结合律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$.

(3) 零元素: V 中存在零元素 $\mathbf{0}$，$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，都有$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$.

(4) 负元素: $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，都有$\boldsymbol{\alpha}$的负元素$\boldsymbol{\beta} \in V$，使得$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 可用$-\boldsymbol{\alpha}$表示$\boldsymbol{\alpha}$的负元素.

在集合 V 的元素与数域$\mathbb{F}$的元素之间定义**数乘**运算，即对 V 中任一元素$\boldsymbol{\alpha}$与$\mathbb{F}$中的任一数 k，在 V 中都有唯一的元素$\boldsymbol{\eta}$与之对应，称为 k 与$\boldsymbol{\alpha}$的数乘，记为$\boldsymbol{\eta}=k \cdot \boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$，且数乘运算满足以下法则:

(5) $1 \cdot \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$.

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

其中, k, l 是数域$\mathbb{F}$中的任意数，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$是 V 中的任意元素.

称满足上述 8 个条件的集合 V 是数域$\mathbb{F}$上的**线性空间**. V 中所定义的加法和数乘运算统称为**线性运算**，当$\mathbb{F}$为实数域$\mathbb{R}$时，称 V 为**实线性空间**，当$\mathbb{F}$为复数域

$\mathbb{C}$时，称 V 为**复线性空间**.

下面给出几个实线性空间的例子.

例 1.1.1 实数域$\mathbb{R}$作为集合，对通常的数的加法和乘法(作为数乘)运算，构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间.

例 1.1.2 n 维实向量集合$\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \cdots\}$有实向量加法和数乘向量运算，因此该集合构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间.

例 1.1.3 n 阶实方阵集合$\mathbb{R}^{n\times n} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots\}$有实矩阵加法和数乘矩阵运算，因此该集合构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间.

例 1.1.4 以实数域$\mathbb{R}$上的元素为系数的多项式称为实数域$\mathbb{R}$上的多项式，实数域$\mathbb{R}$上的以 x 为变量的全体多项式的集合记为$\mathbb{R}[x]$，其中，次数小于 n 的全体实系数多项式$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$的集合记为$\mathbb{R}[x]_n$，可以证明$\mathbb{R}[x]_n$对多项式加法和多项式数乘运算构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间.

下面再给出几个复线性空间的例子.

例 1.1.5 复数域$\mathbb{C}$作为集合，对通常的复数的加法和复数乘法(作为数乘)运算，构成复数域$\mathbb{C}$上的线性空间.

例 1.1.6 n 维复向量集合$\mathbb{C}^n = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \cdots\}$有复向量加法和数乘向量运算，因此该集合构成复数域$\mathbb{C}$上的线性空间.

例 1.1.7 n阶复方阵集合$\mathbb{C}^{n\times n} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots\}$有复矩阵加法和数乘矩阵运算，因此该集合构成复数域$\mathbb{C}$上的线性空间.

例 1.1.8 以复数域$\mathbb{C}$上的元素为系数的多项式称为复数域$\mathbb{C}$上的多项式，复数域$\mathbb{C}$上的以 x 为变量的全体多项式的集合记为$\mathbb{C}[x]$，其中，次数小于 n 的全体复系数多项式$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$的集合记为$\mathbb{C}[x]_n$，可以证明$\mathbb{C}[x]_n$对多项式加法和多项式数乘运算构成复数域$\mathbb{C}$上的线性空间.

定理 1.1.1 设集合 V 是数域$\mathbb{F}$上的线性空间，$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，$\forall k \in \mathbb{F}$，有

(1) V 的零元素唯一.

(2) V 的任一元素的负元素唯一.

(3) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$，$0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，$(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$.

(4) 若$k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，则$k = 0$或$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

证: (1) 设 V 有两个零元素$\mathbf{0}_1$和$\mathbf{0}_2$，则$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，有$\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0}_1 = \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0}_2$，$\therefore$ $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

(2) 设$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$有两个负元素$\boldsymbol{\beta}_1$和$\boldsymbol{\beta}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，则

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}_1+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1)+\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}+\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_2$.

(3) $k\boldsymbol{\alpha}=k(\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha})=k\mathbf{0}+k\boldsymbol{\alpha}$，$\therefore\ k\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

$k\boldsymbol{\alpha}=(k+0)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+0\boldsymbol{\alpha}$，$\therefore\ 0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

$(-1)\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}=(-1)\boldsymbol{\alpha}+1\boldsymbol{\alpha}=(-1+1)\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，$\therefore\ (-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$.

(4)的证明留给读者作为练习，注意区分零元素$\mathbf{0}$和数0. ■

1.1.2 向量组的线性相关性

在线性代数中，已经讨论了 n 维实向量的性质，包括线性相关、线性无关、等价性等，更一般的定义于数域$\mathbb{F}$上的线性空间 V 也有类似定义和性质.

线性空间 V 中的元素称为**向量**，常用粗体小写字母表示，矩阵理论中的向量比线性代数中的 n 维向量$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$的含义更广泛，比如向量就包括了矩阵这种情况.

定义 1.1.3 设 V 是数域$\mathbb{F}$上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\geq 1)$是 V 中的一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_r$是数域$\mathbb{F}$中的数，如果 V 中向量$\boldsymbol{\alpha}$可以表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

则称向量$\boldsymbol{\alpha}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$**线性表示**，或称向量$\boldsymbol{\alpha}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的**线性组合**，$k_1,k_2,\cdots,k_r$称为这个线性组合的系数.

定义 1.1.4 设 V 是数域$\mathbb{F}$上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\geq 1)$是 V 中的一组向量，如果在数域$\mathbb{F}$中存在 r 个不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}, \tag{1.1.1}$$

则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$**线性相关**.

如果对于一组向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，只有当$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$时有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$**线性无关**.

由以上定义可知，一组向量要么线性相关，要么线性无关，非此即彼. 考察一组向量是否线性相关，关键看满足式(1.1.1)的$k_1,k_2,\cdots,k_r$是否只能全为零. 若只能全为零，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，否则向量组线性相关.

定义 1.1.4 要求$r\geq 1$，当$r=1$时，向量组只含有一个向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，由定义 1.1.4,

当$\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$时向量组是线性相关的，当$\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$时向量组是线性无关的.

线性相关性是描述向量组内在关系的概念，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关表明向量组中至少有一个向量能由其余$r-1$个向量线性表示. 这是因为如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则有不全为 0 的数$k_1, k_2, \cdots, k_r$使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$，不妨设$k_1 \neq 0$，于是有

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -\frac{1}{k_1}(k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r),$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示.

例 1.1.9 试证：$\mathbb{R}^{2\times 2}$中的一组向量

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性无关的.

证： 若

$$k_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

即

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

所以$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

因此满足$k_1\boldsymbol{E}_1 + k_2\boldsymbol{E}_2 + k_3\boldsymbol{E}_3 + k_4\boldsymbol{E}_4 = \mathbf{0}$的$k_1, k_2, k_3, k_4$只能全为零，于是$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_4$线性无关.

例 1.1.10 试证：$\mathbb{R}^{2\times 2}$中的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性相关的.

证： 容易验证等式

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

定义 1.1.5 设 V 是数域$\mathbb{F}$上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$和$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$是 V 中的两个向量组，其中$r \geq 1$且$s \geq 1$，如果$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$中的每个向量都可以由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$线性表示，则称$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$可以由$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$线性表示；如果$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$和$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$可以相互线性表示，则称$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$和$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$是**等价**的.

容易证明向量组之间的等价具有如下性质:

(1) 自反性: 每一个向量组都与其自身等价.

(2) 对称性: 如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$等价, 那么$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$等价.

(3) 传递性: 如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$等价, 且$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$与$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$等价, 则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$等价.

定义 1.1.6 设V是数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是$V$中的一个向量组, 其中$s\geq 1$, 如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中存在 r 个线性无关的向量$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},1\leq i_j\leq s,j=1,2,\cdots,r$, 并且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任何一个向量都可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示, 则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个**极大线性无关组**(可简称**极大无关组**), 称非负整数 r 为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的**秩**, 记为$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$.

只含零向量的向量组由于恒线性相关, 所以没有极大无关组, 规定它的秩为0. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关, 则其自身就是它的极大无关组, 其秩就是它所含的向量的个数.

向量组的极大无关组一般情况下并不唯一. 在一般的讨论中, 向量组限于只含有限个向量的情况, 如果去掉这一限制, 即向量组可含无限多个向量时, 其极大无关组可能有无限多个.

向量组与其每一个极大无关组都等价, 这是因为极大无关组是向量组的一个部分组, 故总能由向量组线性表示, 又向量组可由其极大无关组线性表示, 故向量组与其极大无关组等价. 由等价的传递性可知, 一个向量组的任意两个极大无关组等价, 且任意两个等价向量组的极大无关组也等价.

由线性代数课程中向量组的线性相关性的相关定理可知, 一个向量组的所有极大线性无关组的秩是相等的, 因此等价的向量组具有相同的秩.

定理 1.1.2 设线性空间 V 中向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关, 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$线性相关, 则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示, 且表示式是唯一的.

证: 记$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta})$, 有$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\leq\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$, 因向量组$\boldsymbol{A}$线性无关, 故$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$, 因向量组$\boldsymbol{B}$线性相关, 故$\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})<r+1$,

所以有$r \leq \mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) < r+1$，故$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) = r$.

由于$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) = r$，方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$有唯一解，即$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，且表示式是唯一的. ■

1.1.3 线性空间的基与维数

定义 1.1.7 设 V 是数域$\mathbb{F}$上的线性空间，如果 V 中存在 n 个线性无关向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，且 V 中任何一个向量$\boldsymbol{\alpha}$都可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，即存在$k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{F}$，使得

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n, \tag{1.1.2}$$

则称$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是 V 的一组**基**，$(k_1, k_2, \cdots, k_n)^T$为$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的**坐标**. 基的向量的个数称为线性空间 V 的**维数**，记为 $\dim V = n$. 若$\dim V < +\infty$，称 V 是**有限维线性空间**，否则，称 V 是**无限维线性空间**.

例如，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标分别为 $(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}_i = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{——第}i\text{行} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

再例如，n 维线性空间$\mathbb{R}^{n \times n}$中的向量组$\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$是$\mathbb{R}^{n \times n}$的一组基，其中 n 阶矩阵$\boldsymbol{E}_{ij}$是第 i 行、第 j 列处的元素为 1，而其余元素全为零的矩阵.

根据定理 1.1.2 可知，向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标$(k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$是唯一的. 将式(1.1.2)改写为

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}, \tag{1.1.3}$$

式中$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$是$1 \times n$分块矩阵，元素$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是列向量.

例 1.1.11 在$\mathbb{R}^4$中，求向量$\boldsymbol{\alpha} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$在基

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

下的坐标.

解： 设$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$在所给基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的坐标是$k_1,k_2,k_3,k_4$，故

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4,$$

即

$$\begin{aligned}(1,2,1,1)^{\mathrm{T}}&=k_1(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_2(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}+k_3(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}\\&\quad+k_4(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}\\&=(k_1+k_2+k_3+k_4,\ k_1+k_2-k_3-k_4,\ k_1-k_2+k_3-k_4,\ k_1-k_2-k_3+k_4)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=1\\k_1+k_2-k_3-k_4=2\\k_1-k_2+k_3-k_4=1\\k_1-k_2-k_3+k_4=1\end{cases},$$

解之得

$$k_1=\frac{5}{4},k_2=\frac{1}{4},k_3=-\frac{1}{4},k_4=-\frac{1}{4}.$$

所以$\boldsymbol{\alpha}$在所给基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的坐标为$(\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})^{\mathrm{T}}$.

例 1.1.12 在$\mathbb{R}^{2\times2}$中，求$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}$在基$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$下的坐标.

解： 设

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}&=k_1\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}k_1+k_2+k_3+k_4&k_1+k_2+k_3\\k_1+k_2+k_4&k_1+k_3+k_4\end{bmatrix},\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=1\\k_1+k_2\qquad\ \ +k_4=1\\k_1+k_2+k_3\qquad\ \ =2\\k_1\qquad\ \ +k_3+k_4=0\end{cases},$$

解之得

$$k_1=1,k_2=1,k_3=0,k_4=-1.$$

所以$\boldsymbol{A}$在所给基下的坐标为$(1,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

定理 1.1.3　n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量均可构成一组基.

证：　设$\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \cdots, \boldsymbol{\omega}_n$是 V 的一组基，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是 V 中的一个线性无关的向量组，为证明$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是一组基，只需证明 V 中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}$都可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示.

由于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$和向量$\boldsymbol{\alpha}$都可由$\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \cdots, \boldsymbol{\omega}_n$线性表示，这是$n+1$个向量被 n 个向量线性表示的情况，因此向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$和向量$\boldsymbol{\alpha}$线性相关，由定理 1.1.2 可知，向量$\boldsymbol{\alpha}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，且表示唯一.　■

1.1.4　线性空间的坐标与坐标变换

定义 1.1.8　设 V 是数域$\mathbb{F}$上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$是$V$的两组基，它们之间的关系是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_i &= a_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{\alpha}_n \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}, \qquad (i = 1,2,\cdots,n),\end{aligned}$$

将这 n 个关系式表示为矩阵形式:

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.1.4}$$

称 n 阶方阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

是由基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$的**过渡矩阵**.

根据过渡矩阵的定义，式(1.1.4)可以写为

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}. \tag{1.1.5}$$

定理 1.1.4　过渡矩阵$\boldsymbol{P}$是可逆的.

证：　设$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$和$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$是线性空间 V 的两组基，且有

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P},$$

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{Q},$$

其中，$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$为过渡矩阵．则有$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$，所以，$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$．同理，$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$, 所以, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$. 综上, $\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{Q}$互为逆矩阵, $\boldsymbol{P}$可逆. ■

下面推导 V 中任意向量在不同的基下的坐标间的关系, 即坐标变换公式.

设 $\boldsymbol{\xi}\in V$，若 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$与$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，即若

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix},$$

则有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}.$$

将式(1.1.5)代入上式右端, 得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}.$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性无关的, 由线性无关定义, 对上式移项并整理, 有

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}\tag{1.1.6}$$

或

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.\tag{1.1.7}$$

式(1.1.6)与式(1.1.7)称为**坐标变换公式**.

在实际应用中, 当已知由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$, 且已知某一向量在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标时, 可以由式(1.1.7)计算该向量在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标.

例 1.1.13　在$\mathbb{R}^4$中, 求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵, 其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,1,1)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_4=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}\end{cases},\quad \begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,0,1)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,2,2)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_3=(-2,1,1,2)^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_4=(1,3,1,2)^{\mathrm{T}}\end{cases},$$

并求向量$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$在$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标.

解: 将矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4 \mid \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]$作初等行变换，得

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4 \mid \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]\\ &=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&-1&-1&2&0&-2&1\\2&-1&2&-1&1&1&1&3\\-1&1&1&0&0&2&1&1\\0&1&1&1&1&2&2&2\end{array}\right]\\ &\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right].\end{aligned}$$

上式表明由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的关系为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

所以由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

设$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标为$y_1,y_2,y_3,y_4$，即

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{bmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix},$$

于是有

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{6}{13} & -\frac{8}{13} & \frac{11}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{8}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{8}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{6}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{13}x_1 - \frac{6}{13}x_2 - \frac{8}{13}x_3 + \frac{11}{13}x_4 \\ \frac{2}{13}x_1 - \frac{3}{13}x_2 + \frac{9}{13}x_3 - \frac{1}{13}x_4 \\ -\frac{3}{13}x_1 - \frac{2}{13}x_2 - \frac{7}{13}x_3 + \frac{8}{13}x_4 \\ -\frac{1}{13}x_1 + \frac{8}{13}x_2 + \frac{2}{13}x_3 - \frac{6}{13}x_4 \end{bmatrix}.$$

对于例 1.1.13 的求解方法，再分析如下:

(1) 求过渡矩阵$\boldsymbol{P}$使用了初等行变换方法．因为$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$，所以$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\beta}$，构造分块矩阵$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$，作初等行变换，将$\boldsymbol{\alpha}$化为单位矩阵$\boldsymbol{E}$的初等行变换等价于左乘以$\boldsymbol{\alpha}^{-1}$，因此由分块矩阵的运算法则，有$\boldsymbol{\alpha}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\beta})$，即将$\boldsymbol{\alpha}$化为单位矩阵$\boldsymbol{E}$的同时，将$\boldsymbol{\beta}$化为了$\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\beta}$，即过渡矩阵$\boldsymbol{P}$.

(2) 题目所给的$\boldsymbol{\xi} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$并非在基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标，因此不能使用公式(1.1.7).

(3) 在解题中，也可以省略 n 维单位坐标向量组的相关推导，直接由

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

得出

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

1.2 线性空间的子空间

1.2.1 线性子空间

在三维几何空间中, 过原点的共面向量集按几何向量的加法与数乘运算构成一个向量空间. 类似地, 过原点的共线向量集也可构成一个向量空间. 这些向量空间都可看成三维几何空间的子空间, 在 n 维线性空间中, 也可以引入子空间的概念.

定义 1.2.1　设W是数域$\mathbb{F}$上的 n 维线性空间 V 的子集, 若W中的元素满足:

（1）若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$, 则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$;

（2）若$\boldsymbol{\alpha}\in W,\lambda\in\mathbb{F}$, 则$\lambda\boldsymbol{\alpha}\in W$.

则容易证明: W也构成数域$\mathbb{F}$上的线性空间, 称W是线性空间 V 的一个**线性子空间**, 简称**子空间**.

线性子空间本身也是一个线性空间, 因此也有维数, 基和坐标等概念.

由于子空间W不可能有比 V 更多的线性无关的向量, 所以子空间W的维数不能超过空间 V 的维数, 即$\dim W\leq\dim V$. 注意, 这里讨论的维数是指空间的维数, 而非向量的维数(事实上, 由于线性空间中的向量的类型很多, 向量不一定具有维数的概念).

定义 1.2.2　在线性空间 V 中, 由单个零向量构成的集合是一个线性子空间, 称为 V 的**零子空间**. 此外, 在线性空间 V 中, V 本身也可以看成一个线性子空间, 这两个子空间称为 V 的**平凡子空间**.

由于零子空间不含线性无关向量, 因此它没有基, 规定零子空间的维数为 0.

下面讨论线性子空间的生成问题.

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是线性空间 V 中的一组向量, 则其所有可能的线性组合的集合

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s|\forall k_i\in\mathbb{F},i=1,2,\cdots,s\}$$

是非空集合. 可以证明$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$是 V 的线性子空间.

定义 1.2.3　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是线性空间 V 中的一组向量, 非空子集

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s|\forall k_i\in\mathbb{F},i=1,2,\cdots,s\}$$

是由向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$生成的子空间, 称为**生成子空间**.

定理 1.2.1 维数 $\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的任一极大线性无关组均可作为$\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$的一个基.

定理 1.2.2 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 都是 n 维向量组，则 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$等价.

例 1.2.1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,-4,-3)^{\mathrm{T}}$. 求 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$的基与维数.

解: 不难验证$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$是线性无关的，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 的基，$\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=2$，显然 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$.

定义 1.2.4 设$\boldsymbol{A}$为实(复)$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{x}$为 n 维列向量，齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的所有解(包括零解)的集合构成实数域$\mathbb{R}$(或复数域$\mathbb{C}$)上的线性空间，这个空间为$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的**解空间**，也称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**核空间**或**零空间**，记为$N(\boldsymbol{A})$.

定义 1.2.5 设$\boldsymbol{A}$为实(复)$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量，则 m 维列向量集合

$$V=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)\,|\,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{C}^{m\times n}),\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$$

构成实数域$\mathbb{R}$(或复数域$\mathbb{C}$)上的线性空间，称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**值域**或**列空间**，记为$R(\boldsymbol{A})$.

1.2.2 子空间的交与和

子空间可以由线性空间的元素生成，也可以由子空间的交与和生成.

定义 1.2.6 设V_1和V_2是线性空间 V 的两个子空间，令

$$V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}\in V_1\text{ 且 }\boldsymbol{\alpha}\in V_2\},$$

可以验证：$V_1\cap V_2$构成 V 的线性子空间，称$V_1\cap V_2$为V_1与V_2的**交空间**.

令

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1\text{ 且 }\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2\},$$

可以验证：V_1+V_2构成 V 的线性子空间，称V_1+V_2为V_1与V_2的**和空间**.

例 1.2.2 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{p\times n}$，则$N(\boldsymbol{A})\cap N(\boldsymbol{B})$是方程组

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

的解空间.

例 1.2.3 在三维几何空间中, 用V_1表示过原点与某给定向量共线的向量集合, V_2表示过原点并与V_1垂直的共面向量集合, 则V_1+V_2是整个空间, 且$V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$.

可结合几何空间图示和向量坐标理解本例题的结论.

关于两个生成子空间的和空间有下述定理.

定理 1.2.3 设$V_1=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\},V_2=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$, 则$V_1+V_2=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$.

例 1.2.4 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-3,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(4,5,3,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,5,-3,1)^{\mathrm{T}},$$
$$V_1=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\},\ V_2=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}.$$

试求: (1) V_1+V_2的基和维数; (2) $V_1\cap V_2$的基和维数.

解: (1) 由定理 1.2.3 可知

$$V_1+V_2=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\},$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$的极大无关组, 故也是$V_1+V_2$的基, $\dim(V_1+V_2)=3$.

(2) 设$\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$, 即$\boldsymbol{\alpha}\in V_1$且$\boldsymbol{\alpha}\in V_2$, 于是

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=k_3\boldsymbol{\beta}_1+k_4\boldsymbol{\beta}_2,$$

将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$的坐标代入上式, 解之得

$$k_1=0,\ k_2=\tfrac{5}{3}k_4,k_3=-\tfrac{2}{3}k_4,$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=k_4\left(-\tfrac{5}{3},\tfrac{5}{3},-5,\tfrac{5}{3}\right)^{\mathrm{T}},$$

所以$V_1\cap V_2$的基为$\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3},-5,\frac{5}{3}\right)^{\mathrm{T}}$, 维数为 1.

另解: 交空间$V_1\cap V_2$的向量就是在V_2中向量$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$也能由$\boldsymbol{\alpha}_1$和$\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示的这部分, 即确定$k_1,k_2$使

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2),$$

此即

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 4k_1+k_2\\ 1 & 1 & 5k_1+5k_2\\ 3 & -3 & 3k_1-3k_2\\ 1 & 1 & -k_1+k_2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 5k_1+5k_2\\ 0 & 1 & 2k_1+3k_2\\ 0 & 0 & 3k_1+2k_2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

于是

$$3k_1+2k_2=0,\ \ k_1=-\tfrac{2}{3}k_2,$$

则有

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=k_2\left(-\tfrac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\right)=k_2\left(-\tfrac{5}{3},\tfrac{5}{3},-5,\tfrac{5}{3}\right)^{\mathrm{T}},$$

所以$V_1\cap V_2$的基为$\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3},-5,\frac{5}{3}\right)^{\mathrm{T}}$，$\dim(V_1\cap V_2)=1$.

例 1.2.5　已知V_1与V_2分别是方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)的解空间:

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0\end{cases}\qquad(\mathrm{I})$$

$$\begin{cases}4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0\end{cases}\qquad(\mathrm{II})$$

求$V_1\cap V_2$的基与维数.

解:　方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的交空间就是这两个方程组的所有公共解所构成的空间，即方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0\end{cases}$$

的解空间. 容易求得该方程组的基础解系为$(-1,1,1,0,0)^{\mathrm{T}},(12,0,-5,2,6)^{\mathrm{T}}$，这就是所求$V_1\cap V_2$的基，$\dim(V_1\cap V_2)=2$.

定理 1.2.4(维数公式)　设V_1与V_2是线性空间V的两个子空间，则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).\qquad(1.2.1)$$

证:　设$\dim V_1=n_1,\dim V_2=n_2,\dim(V_1\cap V_2)=m$. 取$V_1\cap V_2$的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,$$

它可以扩充成V_1的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m},$$

也可以扩充成V_2的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\cdots,\boldsymbol{\nu}_{n_2-m},$$

此即

$$V_1 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}\},$$

$$V_2 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \cdots, \boldsymbol{\nu}_{n_2-m}\},$$

所以

$$V_1 + V_2 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}, \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \cdots, \boldsymbol{\nu}_{n_2-m}\}.$$

设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} + \\ q_1\boldsymbol{\nu}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\nu}_{n_2-m} = \mathbf{0},$$

令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} &= k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \\ &= -q_1\boldsymbol{\nu}_1 - \cdots - q_{n_2-m}\boldsymbol{\nu}_{n_2-m},\end{aligned}$$

由第一个等式知$\boldsymbol{\xi} \in V_1$，由第二个等式知$\boldsymbol{\xi} \in V_2$，于是$\boldsymbol{\xi} \in V_1 \cap V_2$，故可令

$$\boldsymbol{\xi} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

因此

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m = -q_1\boldsymbol{\nu}_1 - \cdots - q_{n_2-m}\boldsymbol{\nu}_{n_2-m},$$

即

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m + q_1\boldsymbol{\nu}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\nu}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\nu}_1, \cdots, \boldsymbol{\nu}_{n_2-m}$线性无关，所以

$$l_1 = \cdots = l_m = q_1 = \cdots = q_{n_2-m} = 0,$$

因而$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$，从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} = \mathbf{0}.$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$线性无关，又得

$$k_1 = \cdots = k_m = p_1 = \cdots = p_{n_1-m} = 0.$$

这就证明了$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}, \boldsymbol{\nu}_1, \cdots, \boldsymbol{\nu}_{n_2-m}$线性无关，因而是$V_1 + V_2$的一组基，$V_1 + V_2$的维数为$n_1 + n_2 - m$. 故维数公式成立. ■

1.2.3　子空间的直和

定义 1.2.7　设V_1, V_2是线性空间V的两个子空间，若$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$，则称$V_1$与

V_2的和空间V_1+V_2是**直和**，并用记号$V_1\oplus V_2$表示.

以上定义使用了零子空间是平凡子空间的结论，由于V_1和V_2都是线性空间V的子空间，因此V_1和V_2的零向量相同.

定理 1.2.5 设V_1和V_2是线性空间V的两个子空间，则下列命题等价:

(1) V_1+V_2是直和.

(2) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

(3) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1}$是$V_1$的一组基，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}$是$V_2$的一组基，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}$是$V_1+V_2$的一组基.

证: (1) $\Leftrightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2=n_1+n_2$，由定理 1.2.3 知

$$V_1+V_2=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}\},$$

又由定理 1.2.1 知

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}\}=\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2,$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}$线性无关，它构成$V_1+V_2$的一组基.

(3) $\Rightarrow$ (2) 因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}$构成$V_1+V_2$的一组基，故

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2})=n_1+n_2,$$

于是

$$\dim(V_1+V_2)=\operatorname{dimspan}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n_1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_2}\}=n_1+n_2.$$

根据维数公式，得

$$\dim(V_1\cap V_2)=0,$$

由直和定义，V_1+V_2是直和. ■

1.3 赋范线性空间

1.3.1 范数的概念

范数是实数的大小或复数的模的概念的普遍化.

定义 1.3.1 设 X 是数域$\mathbb{F}$上的线性空间，若对每一个$\boldsymbol{x}\in X$，都对应一个实数$\|\boldsymbol{x}\|\in\mathbb{R}$，且满足

(1) $\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$，当且仅当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$时，$\|\boldsymbol{x}\|=0$ （非负性）；

(2) 对任意实数λ，有$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$ （绝对齐次性）；

(3) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$，其中$\boldsymbol{y}\in X$ （三角不等式）.

则$\|\boldsymbol{x}\|$称为 $\boldsymbol{x}$ 的**范数**.

由以上定义可知，范数$\|\boldsymbol{x}\|$是按一定规律与 $\boldsymbol{x}$ 对应的实数，这个实数的值的计算规则并没有给出，但只要满足定义中的 3 个条件，这个实数就是 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，因此也称定义中的 3 个条件为**范数公理**. 在第 6 章，将分别针对 $\boldsymbol{x}$ 是向量和矩阵的情况，介绍向量范数和矩阵范数.

1.3.2 赋范线性空间

在线性空间基础上，将长度或模的概念推广到更一般的范数，可建立赋范线性空间.

定义 1.3.2 设 X 是数域$\mathbb{F}$上的线性空间，若$\forall\boldsymbol{x}\in X$，都存在 $\boldsymbol{x}$ 的范数$\|\boldsymbol{x}\|$，则称 X 为数域$\mathbb{F}$上的**赋范线性空间**（normed linear space），记为$(X,\|\cdot\|)$.

当$\mathbb{F}=\mathbb{R}$时，称 X 为**实赋范线性空间**. 当$\mathbb{F}=\mathbb{C}$时，称 X 为**复赋范线性空间**. 赋范线性空间也可简称为赋范空间(normed space). 在范数不至于混淆的情况下，赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$也可简记为 X.

例 1.3.1 $\forall x\in\mathbb{R}$，定义

$$\|x\|=|x|,$$

则$(\mathbb{R},\|\cdot\|)$是赋范线性空间.

例 1.3.2 $\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leq p<\infty,$$

则$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p),1\leq p<\infty$是赋范线性空间.

例 1.3.3 $\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\leq k\leq n}|x_k|,$$

则$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$是赋范线性空间.

1.4　度量空间

1.4.1　向量的距离

在实数轴上，任一点 x 的绝对值$|x|$表示该点至原点的距离，任意两点x_1和x_2的绝对值$|x_1-x_2|$表示两点之间的距离. 在直角坐标系中，任意两点$a_1(x_1,y_1)$和$a_2(x_2,y_2)$的距离定义为$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. 以上距离的具体定义虽然不同，但可概括其本质属性，得出向量之间的距离(度量)的定义.

定义 1.4.1　设 X 是一个非空集合，d 是一个定义在$X\times X$上的实值函数，若存在映射$d: X\times X\to\mathbb{R}$，使得对于任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in X$，满足:

(1) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq 0, d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$当且仅当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$　（非负性）；

(2) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$　（对称性）；

(3) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$　（三角不等式）.

则称 d 是 X 上的**距离函数**或**度量**，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**距离**(**度量**).

由以上定义可知，距离$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是按一定规律与 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 对应的实数，这个实数的计算规则并没有给出，但只要满足定义中的 3 个条件，这个实数就是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的一种距离(度量)，因此也称定义中的 3 个条件为**度量公理**.

1.4.2　度量空间

度量空间是更广泛的一类空间，这类空间只考虑非空集合的两元素间的距离，而不要求相应的线性运算性质，赋范线性空间是度量空间的特例.

定义 1.4.2　设 X 是一个非空集合，d 是 X 上的度量，即对 X 中的任意两个元素 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，都对应距离$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，则称 X 是以 d 为距离的**度量空间**（metric space），记作(X,d).

在度量不至于混淆的情况下，度量空间(X,d)也可简记为 X. 度量空间也称为**距离空间**.

对于度量空间，需要注意以下几点:

(1) 度量空间是 n 维 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$的推广，它把 Euclid 空间中两点间的距离这一概念中的本质要求抽象出来，距离概念已经由现实世界中的意义引申到一般情

况, 从而在一般集合上建立起抽象的度量空间理论.

(2) 在同一个集合 X 上可以定义两个不同的距离函数d_1, d_2, 此时(X, d_1)和(X, d_2)是两个不同的度量空间.

(3) 度量空间 X 中所包含的元素可以不是任何几何意义上的点, 可以是函数或其他一些抽象的对象, 但由于赋予了度量(距离)这一几何概念, 习惯上仍称 X 中的元素为 X 中的点.

(4) 赋范线性空间是度量空间, 由范数导出的距离函数满足度量公理; 但并不是所有的度量空间都是赋范线性空间.

由例 1.3.1~例 1.3.3 的范数可以导出如下三种度量:

例 1.4.1 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 定义

$$d(x, y) = |x - y|,$$

则$(\mathbb{R}, d)$是度量空间.

例 1.4.2 $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

则$(\mathbb{R}^n, d_p), 1 \leq p < \infty$是度量空间. 其中, $(\mathbb{R}^n, d_2)$是 n 维 Euclid 空间.

例 1.4.3 $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|,$$

则$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$是度量空间.

下面再举一个是度量空间但不是赋范线性空间的例子.

例 1.4.4 设 X 是一个非空集合, 一个定义在$X \times X$上的实值函数 d 为

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \\ 1, & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \end{cases},$$

容易验证 d 是 X 上的度量, 称 d 是 X 上的**离散度量**(discrete metric). (X, d)是度量空间, 称为**离散度量空间**, 但该度量空间不是赋范线性空间.

1.5 内积空间

1.5.1 欧氏空间

前面将几何空间中的长度、距离概念进行了推广, 引出了范数、度量的概念,

那么角度概念是否也能推广呢？为此首先引出向量的内积这一重要概念，基于内积可引入向量的夹角和正交等概念. 因此，有必要将内积运算引入线性空间，从而建立一个更有应用价值的空间——内积空间.

定义 1.5.1 设 V 是实数域$\mathbb{R}$上的 n 维线性空间，对 V 中的任意两个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$按某一确定法则对应一个实数，这个实数称为**内积**，记为$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. 并且要求内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$运算满足下列四个条件:

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

(2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}), k$ 为任意实数;

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\nu})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu})$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$，当且仅当$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

这里$\boldsymbol{\nu}$是 V 中的任意向量. 称定义这样内积的 n 维线性空间 V 为 n 维 Euclid **空间**，音译为 n 维**欧几里得空间**，简称 n 维**欧氏空间**.

例 1.5.1 设$\mathbb{R}^n$是 n 维实向量空间，若

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}},$$

令

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

容易验证：所规定的$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$满足定义 1.5.1 中的四个条件. 因此在这样定义内积后$\mathbb{R}^n$成为 n 维欧氏空间.

例 1.5.1 中引进的内积可以表述为“两向量对应分量乘积之和”，这个内积定义在 n 维欧氏空间中得到广泛使用.

当然，对于同一个线性空间，也可以定义不同的内积，从而得到不同的欧氏空间，例 1.5.2~例 1.5.3 给出了不同内积定义下的欧氏空间的例子.

例 1.5.2 设在$\mathbb{R}^2$中对向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2)^{\mathrm{T}}$规定内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2,$$

试证：$\mathbb{R}^2$是欧氏空间.

证：只需按内积运算的定义，验证$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$满足内积的四个条件即可.

条件①:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})&=2b_1a_1+b_1a_2+b_2a_1+b_2a_2\\&=2a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).\end{aligned}$$

条件②:

$$(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 2ka_1b_1 + ka_1b_2 + ka_2b_1 + ka_2b_2$$

$$= k(2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2) = k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

条件③:

设$\boldsymbol{\nu} = (c_1, c_2)^T$，则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu}) &= 2(a_1+b_1)c_1 + (a_1+b_1)c_2 + (a_2+b_2)c_1 + (a_2+b_2)c_2 \\ &= 2a_1c_1 + 2b_1c_1 + a_1c_2 + b_1c_2 + a_2c_1 + b_2c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 \\ &= 2a_1c_1 + a_1c_2 + a_2c_1 + a_2c_2 + 2b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_2c_2 \\ &= (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu}).\end{aligned}$$

条件④:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) = 2a_1^2 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_2^2$$

$$= (a_1+a_2)^2 + a_1^2 \geq 0,$$

等式成立的充要条件是$a_1 = a_2 = 0$，即$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

综上，该内积定义满足内积的四个条件，因此该$\mathbb{R}^2$是欧氏空间. ■

例 1.5.3 用$C[a,b]$表示闭区间$[a,b]$上的所有实值连续函数构成的实线性空间，对任意$f(x)$，$g(x) \in C[a,b]$，规定

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)dx,$$

容易验证，这样规定的(f,g)是$C[a,b]$上的一个内积，从而$C[a,b]$成为一个欧氏空间.

由定义 1.5.1，可得欧氏空间中内积的性质:

(1) $(\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$

(3) $(k\boldsymbol{\alpha}, l\boldsymbol{\beta}) = kl(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

(4) $(\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^m k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta})$

(5) $\left(\boldsymbol{\alpha}, \sum_{j=1}^n l_j\boldsymbol{\beta}_j\right) = \sum_{j=1}^n l_j(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_j)$

(6) $\left(\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{j=1}^n l_j\boldsymbol{\beta}_j\right) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n k_il_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j)$

(7) $(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}) = (\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}) = 0$

1.5.2 酉空间

定义 1.5.2 设 V 是复数域$\mathbb{C}$上的 n 维线性空间, 对 V 中的任意两个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$按某一确定法则对应一个复数, 这个复数称为**内积**, 记为$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. 并且要求内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$运算满足下列四个条件:

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = (\overline{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}})$, 其中 $(\overline{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}})$是$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$ 的共轭复数;

(2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}), k$ 为任意复数;

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\nu})$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$为非负实数, 当且仅当$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$时, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

这里$\boldsymbol{\nu}$是 V 中的任意向量. 称定义这样内积的 n 维线性空间 V 为 n 维**复欧氏空间**, 也称 n 维**酉空间**(unitary space).

欧氏空间和酉空间统称为**内积空间**.

例 1.5.4 设$\mathbb{C}^n$是 n 维复向量空间, 若

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}},$$

令

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = (\overline{\boldsymbol{\beta}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \cdots + a_n\overline{b_n},$$

容易验证: 所规定的$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$满足定义 1.5.2 中的四个条件. 因此在这样定义内积后$\mathbb{C}^n$成为 n 维酉空间.

由定义 1.5.2, 可得酉空间中内积的性质:

(1) $(\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta}) = \bar{k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $(k\boldsymbol{\alpha}, l\boldsymbol{\beta}) = k\bar{l}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(4) $(\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^m k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta})$;

(5) $\left(\boldsymbol{\alpha}, \sum_{j=1}^n l_j\boldsymbol{\beta}_j\right) = \sum_{j=1}^n \bar{l}_j(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_j)$;

(6) $\left(\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{j=1}^n l_j\boldsymbol{\beta}_j\right) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n k_i\bar{l}_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j)$;

(7) $(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}) = (\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

1.5.3 向量的夹角

相对前述几类空间，内积空间的约束更强，除了定义长度和距离外，由内积运算还引入了向量间的夹角.

定义 1.5.3　设 V 是内积空间，向量$\boldsymbol{\alpha} \in V$的**长度**(也称为**模**)定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}.$$

例如，$\mathbb{C}^n$或$\mathbb{R}^n$上向量$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$的长度(模)可定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}.$$

注意：内积空间中向量长度的表示符号$\|\cdot\|$与赋范线性空间中范数的表示符号相同，向量的长度也就是向量的范数. 内积空间仅是在线性空间基础上定义了内积，而未单独定义范数和度量等其他概念，这是因为这些概念均可由内积导出，因此，内积空间中向量的长度也可称为由内积导出的范数. 后续将会看到，由内积还可以导出向量间的距离(度量)和夹角.

内积空间中向量的长度有如下性质：

(1) $\|\boldsymbol{\alpha}\| \geq 0$，当且仅当$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$时，$\|\boldsymbol{\alpha}\| = 0$　　（非负性）；

(2) $\|k\boldsymbol{\alpha}\| = |k|\|\boldsymbol{\alpha}\|$，$k \in \mathbb{F}$　(其中，$|k|$是数 k 的模)　　（齐次性）；

(3) $\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$　　（三角不等式）；

(4) $|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$　　（Cauchy-Schwarz 不等式）.

性质(1)和(2)的证明请读者作为练习自己完成，下面证明三角不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式.

证：(3) 三角不等式的证明使用了内积的性质，复数运算的性质以及 Cauchy-Schwarz 不等式.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\|^2 &= (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \\
&= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&= \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + 2|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + 2\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 \\
&= (\|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|)^2.
\end{aligned}$$

再由内积空间中向量长度的非负性，可得

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \le \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|.$$

在上述证明中，$\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$表示$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$的实部. ■

性质(4)的证明由定理 1.5.1 给出.

定理 1.5.1（Cauchy-Schwarz 不等式） 设 V 是内积空间，对任意向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in V$，有

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|. \tag{1.5.1}$$

证： 当$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$时，不等式显然成立.

设$\boldsymbol{\beta} \ne \mathbf{0}$，则有

$$\begin{aligned} 0 \le \|\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta}\|^2 &= (\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) - \bar{k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) - k(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) + k\bar{k}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

令$k=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})}$，则

$$0 \le (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) - \frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})} = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 - \frac{|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|^2}{\|\boldsymbol{\beta}\|^2},$$

即

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \le \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

式(1.5.1)称为 **Cauchy-Schwarz 不等式**. ■

Cauchy-Schwarz 不等式有重要的应用，例如其在$\mathbb{R}^n$中的形式为

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

在欧氏空间中，内积总是实数，因此 Cauchy-Schwarz 不等式可以写为

$$-1 \le \frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|} \le 1,$$

因此，在欧氏空间中，向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的夹角θ可以定义为

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|},$$

即向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的夹角θ为

$$\theta = \arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}. \tag{1.5.2}$$

内积的物理意义是描述两个向量的相似程度，由内积的物理意义和向量夹角的定义，可得出如下关系：

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$越小，则$\cos\theta$越小，$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的夹角$\theta$越大，$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的相似程度越小.

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$越大，则$\cos\theta$越大，$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的夹角$\theta$越小，$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的相似程度越大.

(3) 当$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$，则$\theta = 0$，此时，$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$完全相似.

(4) 当$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0$，则$\theta = \pi/2$，此时，$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$完全不相似.

定义 1.5.4　内积空间中长度为 1 的向量称为**单位向量**.

对于任何一个非零向量$\boldsymbol{\alpha}$，都有

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$$

是单位向量，这是因为若$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，有

$$\left\|\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\right\| = \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} = 1.$$

将任一非零向量$\boldsymbol{\alpha}$转化为单位向量$\boldsymbol{\alpha}_0$的过程称为**单位化**或**标准化**.

定义 1.5.5　内积空间中两个向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$的**距离**定义为

$$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|.$$

1.5.4　求标准正交基的 Schmidt 方法

在解析几何中，当两个向量互相垂直时，它们的内积就为零，在内积空间中也有如下与向量垂直相关的定义.

定义 1.5.6　若向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0$，则称$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交，记为$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$.

若不含零向量的向量组内的向量两两正交，则称该向量组是**正交向量组**；若一个正交向量组内的任意一个向量都是单位向量，则称该向量组是**标准正交向量组**.

对于 n 维内积空间的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，根据定义不难证明：

(1) 向量组是正交向量组的充要条件是：

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j) = 0\,,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,n.$$

(2) 向量组是标准正交向量组的充要条件是：

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases},\quad i,j = 1,2,\cdots,n.$$

(3) 零向量与每个向量都正交. 反之，与内积空间中每个向量都正交的向量必是零向量.

定理 1.5.2　正交向量组(不含零向量)是线性无关向量组.

证：　设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是正交向量组，若

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

则对$\forall\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,s)$，都有

$$\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_j\right)=\sum_{i=1}^{s}k_i\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\right)=0.$$

根据$\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\right)=0$（$i\neq j$时），简化上式得

$$k_j\left(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j\right)=0.$$

由于$\left(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j\right)\neq 0$，故$k_j=0\ (j=1,2,\cdots,s)$，于是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关. ■

定义 1.5.7 在n维内积空间中，由n个正交向量组成的基称为**正交基**. 由n个标准正交向量组成的基称为**标准正交基**.

显然，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是标准正交基的充要条件是$\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\right)=\delta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 例如，$e_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},e_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,e_n=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$是标准正交基.

一个n维线性空间的基由n个线性无关的向量组成，如果这个线性空间是内积空间，总可以构造出一个标准正交基. Schmidt(施密特)方法就是一种从一组线性无关的向量出发构造一组标准正交基的方法，下面介绍该方法.

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是$n$维内积空间 V 中的一个线性无关的向量组，现求由这r个向量生成的r维线性子空间$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$的一个标准正交基.

为方便起见，取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$.

取$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\beta}_1$，其中 k 是待定常数，根据$\boldsymbol{\beta}_2\perp\boldsymbol{\beta}_1$，有

$$(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)+k(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=0.$$

由于$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，所以$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)\neq 0$，可以解出

$$k=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)},$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

显然，$\boldsymbol{\beta}_2\neq\mathbf{0}$，否则$\boldsymbol{\alpha}_2$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$线性表示，这与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是线性无关向量组矛盾.

类似地，取$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$，其中$k_1,k_2$是待定常数，由于$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$两两正交，可得

$$(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_3+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)+k_1(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=0,$$
$$(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_3+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)+k_2(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=0,$$

由以上两式解出

$$k_1=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)},\quad k_2=-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)},$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2.$$

显然，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且容易解出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也可以由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示，因此，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$等价.

通过归纳，可得

$$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_{i-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{i-1},\boldsymbol{\beta}_{i-1})}\boldsymbol{\beta}_{i-1},$$

且$\boldsymbol{\beta}_i\neq\mathbf{0}$，$i=1,2,\cdots,r$.

用上述方法，可得到一组两两正交的向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$，且$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$等价.

综上, Schmidt 方法可分两步进行:

(1) 正交化

令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1&=\boldsymbol{\alpha}_1,\\
\boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,\\
\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,\\
&\vdots\\
\boldsymbol{\beta}_r&=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r-1})}\boldsymbol{\beta}_{r-1},
\end{aligned}$$

所得到的$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$是正交向量组.

(2) 单位化

令

$$\boldsymbol{\nu}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\boldsymbol{\nu}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\cdots,\boldsymbol{\nu}_r=\frac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|},$$

所得到的$\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\cdots,\boldsymbol{\nu}_r$是标准正交向量组，它是子空间$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$的一个标准正交基.

定理 1.5.3　从r维内积空间的任意一组基$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$出发都可以通过Schmidt 方法构造出一个标准正交基.

例 1.5.5　在内积空间$\mathbb{R}^4$中，设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1,1, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (5,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (-3, -3,1, -3)^{\mathrm{T}},$$

求$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$的一个标准正交基.

解：　由 Schmidt 方法可得

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1,1, -1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_1 = (4,2,0,2)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = (0,0,0,0)^{T},$$

因为$\boldsymbol{\beta}_3 = 0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，容易验证$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，因此

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}.$$

将$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$单位化后可得$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$的一个标准正交基：

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\nu}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

例 1.5.6　已知内积空间中的向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, \mathrm{i}, \mathrm{i})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,1, \mathrm{i}, \mathrm{i})^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1, \mathrm{i}, \mathrm{i})^{\mathrm{T}},$$

求$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$的一个标准正交基.

解：　由 Schmidt 方法可得

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, \mathrm{i}, \mathrm{i})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,1, \mathrm{i}, \mathrm{i})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

再将$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$单位化，可得

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\mathrm{i}}{2}, \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\nu}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{i}}{2}, \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\nu}_3 = \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0,0\right)^{\mathrm{T}},$$

则$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3$即为所求的标准正交基.

1.6 应用实例

1.6.1 线性分组码的编码

纠错编码技术是提高通信系统可靠性的有效途径之一，线性分组码是纠错码中很重要的一类码.

图 1.6.1 是纠错编码系统示意图.

图 1.6.1 纠错编码系统示意图

相关概念如下:

(1) 信息位：含有信息的比特(bit).

(2) 消息组:信息位构成的矢量，长度为 k，记为$\boldsymbol{m}=(m_0,m_1,\cdots,m_{k-1})$.

(3) 校验位：由信息位按编码规则生成的冗余位，用于检错或纠错.

(4) 码字：信息位和校验位组合在一起构成的信息矢量.

(5) 分组码：将信息序列每 k 个码元分为一组，编码和译码均按分组进行，编码器按一定规则依据每组信息位产生 r 个多余码元(校验位)，构成长为$n=k+r$的码字. 每个分组内的校验位仅与本组信息位有关，组与组之间是无记忆的.

(6) 线性码：所有码元都是原始信息元的线性组合，编码器不带反馈电路.

(7) 线性分组码：既是线性码又是分组码的纠错码，(n,k)线性分组码$\boldsymbol{c}=(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$的码长为 n，信息位长度为 k.

在图 1.6.1 中，信源产生的消息组经编码器编码生成码字$\boldsymbol{c}$，由于信道噪声和干扰等因素的恶化，译码器接收到的接收码字$\boldsymbol{r}=(r_0,r_1,\cdots,r_{n-1})$一般不等于$\boldsymbol{c}$，译码器输出用$\boldsymbol{c}'$表示，当译码输出正确时，$\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{c}$.

线性分组码空间$\boldsymbol{C}$是由 k 个线性无关的基$\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_{k-1}$生成（张成）的 k 维 n 重子空间，码空间的所有元素（码字）都可以写成 k 个基的线性组合:

$$\boldsymbol{c}=m_0\boldsymbol{g}_0+m_1\boldsymbol{g}_1+\cdots+m_{k-1}\boldsymbol{g}_{k-1}.$$

用$\boldsymbol{g}_i$表示第 i 个基，即

$$\boldsymbol{g}_i=\left[g_{i,0},g_{i,1},\cdots,g_{i,n-1}\right],\qquad i=0,1,\cdots,k-1.$$

再将 k 个基排列成 k 行 n 列的矩阵:

$$\boldsymbol{G}=[\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_{k-1}]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,n-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,n-1} \\ & & \vdots & \\ g_{k-1,0} & g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,n-1} \end{bmatrix},$$

矩阵$\boldsymbol{G}$称为**生成矩阵**.

一个(n,k)线性分组码的码字$\boldsymbol{c}$可以表示为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}\boldsymbol{G}=[m_0,m_1,\cdots,m_{k-1}]\begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,n-1} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & \cdots & g_{1,n-1} \\ & & \vdots & \\ g_{k-1,0} & g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,n-1} \end{bmatrix},$$

其中, $\boldsymbol{m}$为任意的 k 维信息矢量, $\boldsymbol{G}$是 k 行 n 列$(n\geq k)$的生成矩阵.

如果生成矩阵$\boldsymbol{G}$具有如下形式:

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}_s=[\boldsymbol{I}_k \quad \boldsymbol{Q}_{k\times(n-k)}],$$

其中, $\boldsymbol{I}_k$为 k 阶单位矩阵, 则称该码为**系统码**, 即消息比特在码字中的位置和取值不因消息的变化而变化, 并且保证了矩阵的秩为 k.

在码字集合不变的情况下, 任何一个线性分组码都可以一对一地去对应一个系统码.

例 1. 6. 1　一个(4, 3)线性分组码的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

当$\boldsymbol{m}=(101)$时, 试求其码字.

解:　由题意, 有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}\boldsymbol{G}=[1 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}=[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0],$$

因此, 输出码字为$\boldsymbol{c}=(1010)$.

注意, 矩阵运算中的加法是模 2 加, 编程实现时可以使用普通矩阵乘法计算$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}\boldsymbol{G}$, 再对计算结果进行模 2 处理.

1. 6. 2　线性分组码的译码

对于生成矩阵$\boldsymbol{G}$, 存在$(n-k)\times n$矩阵

$$
\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} h_{0,0} & h_{0,1} & \cdots & h_{0,n-1} \\ h_{1,0} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,n-1} \\ & & \vdots & \\ h_{n-k-1,0} & h_{n-k-1,1} & \cdots & h_{n-k-1,n-1} \end{bmatrix}
$$

使得$\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=[\mathbf{0}]_{k\times(n-k)}$，矩阵$\boldsymbol{H}$称为**一致校验矩阵**，可简称为**校验矩阵**，且有

$$
\boldsymbol{c}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{m}\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{m}[\mathbf{0}]_{k\times(n-k)}=\boldsymbol{\theta},
$$

其中，$\boldsymbol{\theta}$为$(n-k)$维零向量.

系统码的校验矩阵为

$$
\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_s=\left[\boldsymbol{Q}_{k\times(n-k)}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{I}_{(n-k)}\right].
$$

线性分组码空间$\boldsymbol{C}$是由 k 个线性无关的基$\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_{k-1}$张成的 k 维 n 重子空间，由$n-k$个线性无关的基$\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_{n-k-1}$也可以张成$n-k$维 n 重子空间$\boldsymbol{D}$，称空间$\boldsymbol{D}$为空间$\boldsymbol{C}$的**对偶空间**.

码空间$\boldsymbol{D}$和码空间$\boldsymbol{C}$存在如下对偶关系：

(1) 空间$\boldsymbol{C}$的k个基构成的生成矩阵$\boldsymbol{G}$也是空间$\boldsymbol{D}$的校验矩阵；

(2) 空间$\boldsymbol{D}$的$n-k$个基构成的生成矩阵$\boldsymbol{H}$也是空间$\boldsymbol{C}$的校验矩阵.

此外，由 k 个线性无关的基可以生成(n,k)线性分组码，由$n-k$个线性无关的基也可以生成$(n,n-k)$线性分组码，称$(n,n-k)$线性分组码为(n,k)线性分组码的**对偶码**.

例 1.6.2　一个(5, 3)线性分组码的生成矩阵为

$$
\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

求对应的$\boldsymbol{G}_s$和$\boldsymbol{H}_s$.

解：　对$\boldsymbol{G}$进行行初等变换可得

$$
\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},
$$

由于在 mod2 运算下-1 等于 1，可得$\boldsymbol{G}_s$为

$$
\boldsymbol{G}_s=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

故

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{H}_s=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{I}_{(n-k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

码字通过信道传输到达接收端，接收端收到的接收向量$\boldsymbol{r}$可能有错，如果信道是无记忆的，$\boldsymbol{r}$可以表示为码字和差错的线性叠加.

构造矢量$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{n-1})$，将对应接收向量出错的位置标记为 1，则$\boldsymbol{r}$可表示为:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{c}\oplus\boldsymbol{e}=(c_0\oplus e_0,c_1\oplus e_1,\ldots,c_{n-1}\oplus e_{n-1}),$$

称$\boldsymbol{e}$为错误图样.

接收矢量是否有错可用伴随式向量$\boldsymbol{s}$描述，简称**伴随式**或**校验子**，它是一个$(n-k)$维向量:

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=(s_0,s_1,\ldots,s_{n-k-1})=\boldsymbol{c}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\oplus\boldsymbol{e}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{e}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}.$$

因此，若接收矢量没有误码，则$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$；若接收矢量存在误码，则$\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{0}$.

由上述推导可知，伴随式只与错误图样有关，而与传输的码字无关，不同的码字可能由于有相同的错误图样而有相同的伴随式.

采用伴随式进行纠错译码的通用译码方法是:

(1) 按可能出现的差错图案$\boldsymbol{e}$计算相应的伴随式$\boldsymbol{s}$，并构造伴随式—差错图案表$[(s,e)]$;

(2) 对接收向量$\boldsymbol{r}$计算伴随式$\boldsymbol{s}$;

(3) 查$[(s,e)]$表得$\boldsymbol{e}$;

(4) 纠错计算得码字估值：$\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{e}(\mathrm{mod}\,2)=\boldsymbol{r}\oplus\boldsymbol{e}$.

例 1.6.3 已知一个(6, 3)线性分组码的系统生成矩阵

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{s}}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&1\end{bmatrix},$$

接收矢量$\boldsymbol{r}=(111001)$，试对其译码.

解: (1) 求系统校验矩阵:

$$\boldsymbol{H}_s=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}.$$

(2) 由$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}\boldsymbol{H}_S^{\mathrm{T}}$构造$[(s,e)]$表，由于误码位数越少，发生的概率越大，最可能出现的误码是 1 位误码，$[(s,e)]$表的部分结果如下:

$\boldsymbol{e}$	000000	100000	010000	001000	000100	000010	000001
$\boldsymbol{s}$	000	110	011	101	100	010	001

(3) 由式$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{H}_S^{\mathrm{T}}$计算接收向量伴随式，得$\boldsymbol{s}=(001)$.

(4) 查$[(s,e)]$表可知，与伴随式(001)对应的错误图案$\boldsymbol{e}=(000001)$.

(5) 纠错计算得码字估值$\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{r}\oplus\boldsymbol{e}=111001\oplus000001=111000$.

本 章 小 结

本章介绍了线性空间的概念和相关知识,以及线性子空间的概念和运算，然后分别通过定义范数、度量、内积，将几何空间中的长度、距离、角度的概念推广到一般线性空间，逐步阐述了赋范线性空间、度量空间、内积空间的概念及这些空间的性质.

本章所介绍的概念和相关知识是矩阵理论的基础，学习完本章内容后，应能达到如下基本要求：

1. 理解从实际问题中抽象出来的线性空间的概念. 掌握向量的线性表示、向量组的线性相关、线性无关的判断与性质.

2. 掌握线性空间的基与维数、坐标与坐标变换等相关概念和求法.

3. 掌握线性子空间的概念、子空间的交与和以及维数公式,能进行相关计算.了解子空间的直和.

4. 理解范数、度量、内积的概念，掌握赋范线性空间、度量空间、内积空间的概念及这些空间的性质.

5. 掌握线性无关向量组的Schmidt正交化与单位化方法，能求解内积空间的标准正交基.

习题 1

1-1　判断下列集合对于给定的数域和运算，是否构成线性空间:

（1）数域: $\mathbb{R}$; 运算: 数的加法和乘法; 集合: 全体整数.

（2）数域: $\mathbb{R}$; 运算: 矩阵的加法和数乘; 集合: 全体 n 阶实矩阵.

（3）数域: $\mathbb{F}$; 运算: 多项式的加法和数乘; 集合: 数域上的所有 3 次多项式.

（4）数域: $\mathbb{F}$; 运算: 矩阵的加法和数乘; 集合: 数域上的所有 n 阶对称矩阵.

（5）数域: $\mathbb{R}$; 运算: 函数的加法和数乘; 集合: [a, b]上的全体连续函数.

1-2　在$\mathbb{R}^4$中，求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$在基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

下的坐标.

1-3　在$\mathbb{R}^{2\times 2}$中求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$$

在基$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$下的坐标.

1-4　试证: 在$\mathbb{R}^{2\times 2}$中矩阵

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

线性无关，并求$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\mathrm{a}&\mathrm{b}\\\mathrm{c}&\mathrm{d}\end{bmatrix}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的坐标.

1-5　设$\mathbb{R}[\mathrm{x}]_4$是所有次数小于 4 的实系数多项式组成的线性空间，求多项式 $p(x)=1+2x^3$在基 1，$x-1,(x-1)^2,(x-1)^3$下的坐标.

1-6　已知$\mathbb{R}^4$中的两组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,-1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)^{\mathrm{T}}.$$

求:

(1) 由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵;

(2) 求向量$\boldsymbol{\xi}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标.

1-7 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,3,7)^{\mathrm{T}},$$

试求:

(1) span$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$与 span$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$的和空间的基和维数.

(2) span$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$与 span$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$的交空间的基和维数.

1-8 已知V_1是齐次线性方程组

(I) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3-x_4=0 \\ 5x_1-10x_2-6x_3-4x_4=0 \end{cases}$

的解空间, V_2是齐次线性方程组

(II) $x_1-x_2+x_3+2x_4=0$

的解空间, 试求:

(1) V_1与V_2的基与维数;

(2) $\mathrm{V}_1\cap\mathrm{V}_2$的基与维数;

(3) $\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2$的基与维数.

1-9 在$\mathbb{R}^4$中, 求由向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$生成的子空间的基和维数, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(3,3,3,2)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,-3,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,-2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(3,2,4,2)^{\mathrm{T}}.$$

1-10 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,0,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_2=(0,3,-3,1)^{\mathrm{T}},$$
$$V_1=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\},\qquad V_2=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}.$$

试求:

(1) $V_1\cap V_2$ 的基与维数;

(2) V_1+V_2 的基与维数.

1-11 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,5,2,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,5,10,5)^{\mathrm{T}},$$
$$\mathrm{V}_1=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\},\qquad \mathrm{V}_2=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}.$$

试求:

(1) V_1与V_2的基与维数;

(2) $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2$的基与维数;

(3) $\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2$的基与维数.

1-12 设 V 是数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基, 证明:

(1) 对于数域$\mathbb{F}$中的任意非零数 k, 向量组$k\boldsymbol{\alpha}_1, k\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, k\boldsymbol{\alpha}_n$是 V 的一组基.

(2) 对于数域$\mathbb{F}$中的任意一组全不为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_n$, 向量组$k_1\boldsymbol{\alpha}_1, k_2\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, k_n\boldsymbol{\alpha}_n$是 V 的一组基.

1-13 设$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$是度量空间$(X, d)$上的距离, 证明$\bar{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{1+d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$也是$X$上的距离.

1-14 设在n^2维空间$\mathbb{R}^{n\times n}$中对向量（n 阶矩阵）$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$规定内积为

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}), \quad \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

其中, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的迹, 即$\boldsymbol{A}$的主对角元素之和.

试证：$\mathbb{R}^{n\times n}$是欧氏空间.

1-15 设$\boldsymbol{A}$为 n 阶正定矩阵, 对于$\mathbb{R}^n$中任意两个列向量$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$, 规定

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y},$$

试证: $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$是$\mathbb{R}^n$的一个内积, $\mathbb{R}^n$是一个欧氏空间.

1-16 在$\mathbb{C}^{n\times n}$中, 对任意$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 定义内积为

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}^T}),$$

试证: $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$是$\mathbb{C}^{n\times n}$的一个内积, $\mathbb{C}^{n\times n}$是一个酉空间.

1-17 用正交化与单位化方法将向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

化为标准正交向量组.

1-18 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间的一个标准正交基.

1-19 已知矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求$N(\boldsymbol{A})$的标准正交基.