《随机过程与统计信号处理》

第一次上机作业

1 实验问题

1. 反函数法产生随机序列、概率密度函数

按如下线性概率密度产生均匀随机数的 1000 个样本值。

$$f(x)=\begin{cases} x/2 & 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 计算该序列均值、方差与理想均值方差的误差大小，改变序列个数重新计算；

(2) 绘出该序列的直方图和概率密度函数。

2 问题分析

2.1 实验一：

现已知目标随机序列的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & x\in[0,2] \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{1}$$

由此可求出该随机数列的理想均值与理想均差：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$=\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx=\frac{4}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^2 \frac{x^3}{2}dx=2$$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{9} \tag{2}$$

同时可求出相应的概率分布函数及其反函数：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{0}^{x}\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4} \quad (x\in[0,2])$$

$$F^{-1}(y)=2\sqrt{y}$$

（3）

生成随机变量 R 使其满足均匀分布：

$$f_R(r)=\begin{cases}1 & r\in[0,1]\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

（4）

于是根据反函数法可以生成随机变量 X：

$$X=F^{-1}(R)$$

（5）

（具体实现见下方代码）由此产生 1000 个样本，计算出该序列均值为 1.3353，方差为 0.2262 。而理想序列均值为 4/3，方差为 2/9，算得均值与方差的误差分别为：1.3353 – 1.3333 = 0.0020，0.2262 – 0.2222 = 0.0040 。增加样本数量后，其均值与方差更接近理想值。

2.2 实验二：

绘制序列的直方图与概率密度函数如下图所示

3 实验代码

```
clear; clc; close all;
% Inverse function method generates random sequence and probability density function
n = 1:1000;
R = rand(1,1000);
inverse_function = @(x) sqrt(4*x);
X = inverse_function(R);

% mean and variance of the random sequence
m_X = mean(X);
v_X = var(X);

figure();

% plot the curve of the sequence
subplot(3, 1, 1);
plot(n,X);
title('Random sequence');
xlabel('n');
ylabel('X(n)');
grid on;

% plot the histogram of the sequence
subplot(3, 1, 2);
histogram(X, 100);
title('Histogram of the random sequence');
xlabel('X(n)');
ylabel('Frequency');
grid on;

% plot the probability density function
subplot(3, 1, 3);
[elements, centers] = hist(X, 100);
plot(centers, elements/sum(elements));
title('Probability density function');
xlabel('X(n)');
ylabel('f_X(x)');
grid on;
```

4 结果与分析

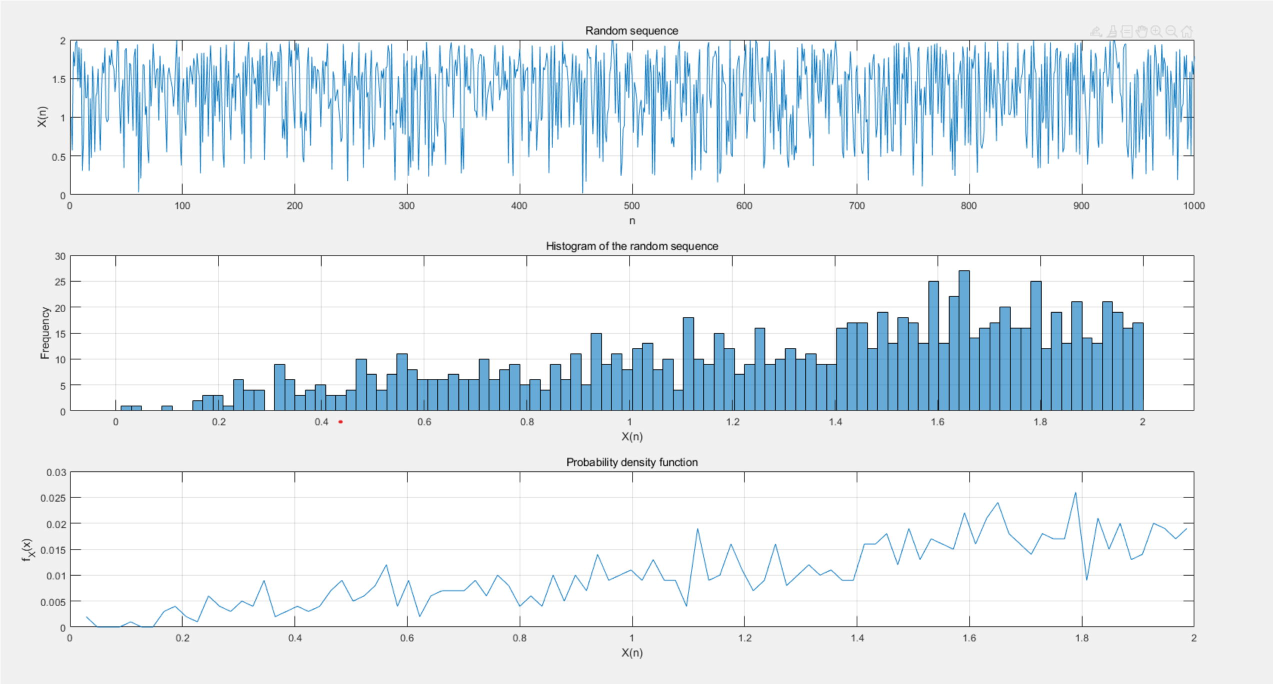

图1：从上到下依次为随机序列样本分布函数图、序列直方图藉概率密度函数

1 实验问题

2. 相关随机序列及其功率谱

模拟产生一个正态随机序列 X(n)，要求它的自相关函数满足

$$R_X(m)=\frac{1}{1-0.64}0.8^{|m|}$$

画出产生的随机序列波形、相关函数（与理论曲线对比）和功率谱密度。

2 问题分析

2.1 实验一：

根据自相关函数，可以得出该序列的均值 mX：

$$m_X=R_X(0)=\frac{1}{1-0.64}0.8^{|0|}=0 \tag{1}$$

由此可得：

$$C_X(m)=R_X(m)-m_X^2=R_X(m) \tag{2}$$

于是只需求出 相应的协方差矩阵，并对生成的正态分布白噪声进行变化即可（代码实现见下方）

3 实验代码

```
clc; clear; close all;

Sigma = 1; a = 0.8; M = 1000; m = 0:1:M;
Rx = Sigma^2 / (1 - a^2) * a.^abs(m);
mule = 0;

% calculate covariance matrix
N = 1000;
K = zeros(N, N);
for i = 1:N
    K(i, :) = cat(2, Rx(i:-1:1), Rx(2:N-i+1));
end

figure;

% generate normal distribution random sequence
subplot(3, 1, 1);

A = chol(K).';
u = randn(N, 1);
x = A * u + mule;

plot(x);
xlabel('n'); ylabel('x(n)'); title('x(n)');


% draw autocorrelation function of x
subplot(3, 1, 2);

Rx = cat(2, Rx(N:-1:2), Rx(1:N));
plot(-N+1:N-1, Rx, 'b');

hold on;

Rx = xcorr(x, 'biased');
plot(-N+1:N-1, Rx, 'r');

hold off;

xlabel('m'); ylabel('Rx(m)'); title('Rx(m)');
legend('theoretical', 'estimated');


% draw power spectral density of x (double-sided)
subplot(3, 1, 3);

Gx = fftshift(fft(Rx));
w = linspace(-pi, pi, 2*N-1);
plot(w, Gx);
xlabel('w'); ylabel('Gx(w)'); title('Gx(w)');
```

4 结果与分析

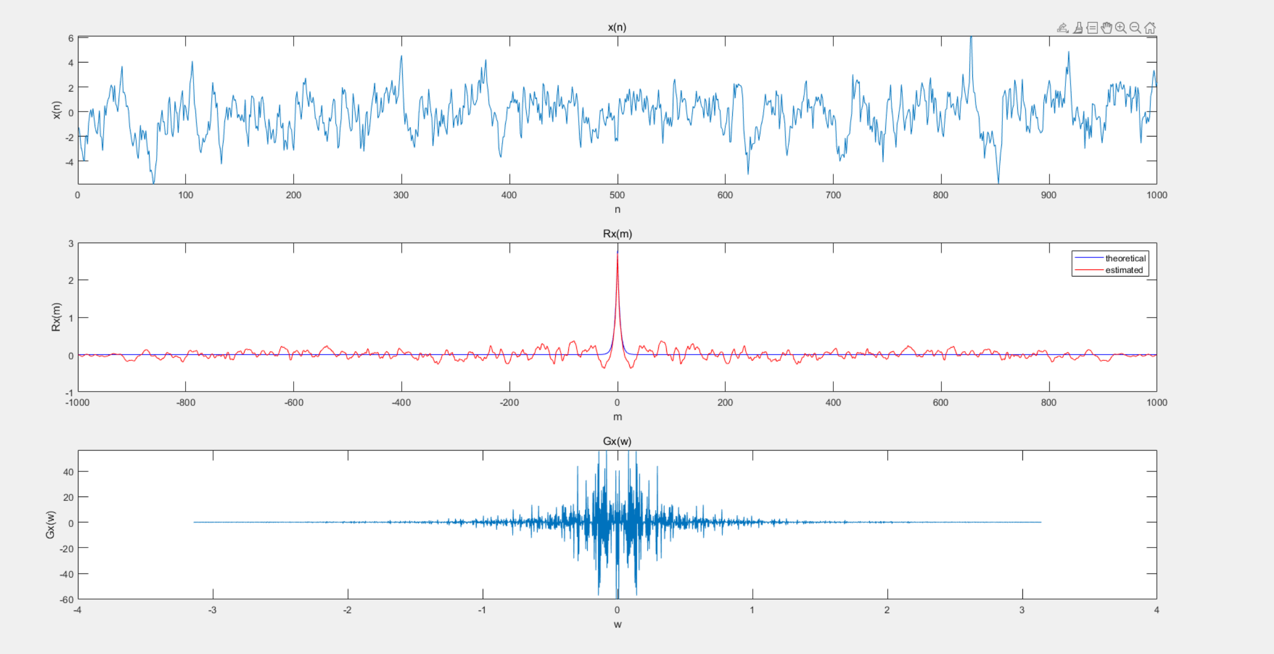

图2：从上到下分别为随机序列的波形、相关函数（及其理论曲线）和功率谱

1 实验问题

▪ **3.→ARMA 模型—1（对应实验 3.1 中 1）**↵

设有 AR(1)模型，↵

·········□□□X(n)=-0.8X(n-1)+W(n)↵

其中 W(n)是零均值正态白噪声，方差为 4。↵

····（1）模拟产生 X(n)的 500 观测点的样本函数，绘出波形；↵

····（2）用产生的 500 个观测点估计 X(n)的均值和方差；↵

····（3）画出理论的自相关函数和功率谱；↵

□□（4）估计 X(n)的相关函数和功率谱。↵

2 问题分析

2.1 实验一：

已知有：

$$X(n)+0.8X(n-1)=W(n) \tag{1}$$

根据上式：

$$h(n)=\frac{1}{1-0.8E^{-1}}=\frac{E}{E-0.8} \tag{2}$$

$$H(\omega)<=>h(n) \tag{3}$$

于是有：

$$X(n)=h(n)*W(n) \tag{4}$$

根据上述步骤即可模拟产生 X(n)（代码实现以及样本函数波形见下方）

2.2 实验二：

样本函数均值为 0.0691，方差为 9.2570 。

2.3 实验三、四

具体实现及图像见下方

3 实验代码

```
clc; clear; close all;

%% generate X(n) by impulse response method

% generate h(n) by freqz and ifft
% - B: numerator
% - A: denominator
B = 1;
A = [1 0.8];
[H, w] = freqz(B, A, (0:2*pi/1000:2*pi).');
h = ifft(H);

% generate W(n) by randn
Sigma = 2; Ts = 1; Fs = 1/Ts;
W = Sigma .* randn(500, 1) + 0;

% X(n) = W(n) * h(n)
X = conv(W,h);
X = X(1:500);
figure, plot(abs(X)); xlabel('order'); ylabel('amplitude');

% calculate mean and variance
mX = mean(X); vX = var(X);


% theorectical Rx and Gx
Gx = abs(H) .^ 2 * 4;
fset = (0:length(Gx)-1) * Fs/length(Gx);
figure, plot(fset, Gx); xlabel('frequency'); ylabel('amplitude(dB)');
Rx = fftshift(ifft(Gx));
figure, plot(abs(Rx)); xlabel('order'); ylabel('amplitude'); axis([0 1000 0 12]);


% estimated Rx and Gx
Rx1 = xcorr(X);
figure, plot(abs(Rx1)); xlabel('order'); ylabel('amplitude');
nfft = 1024;
window = hann(length(X));
[Pxx, fset2] = periodogram(X, window, nfft, Fs);
figure, plot(fset2, Pxx); xlabel('frequency'); ylabel('amplitude(dB)');
```

4 结果与分析

4.1 实验一

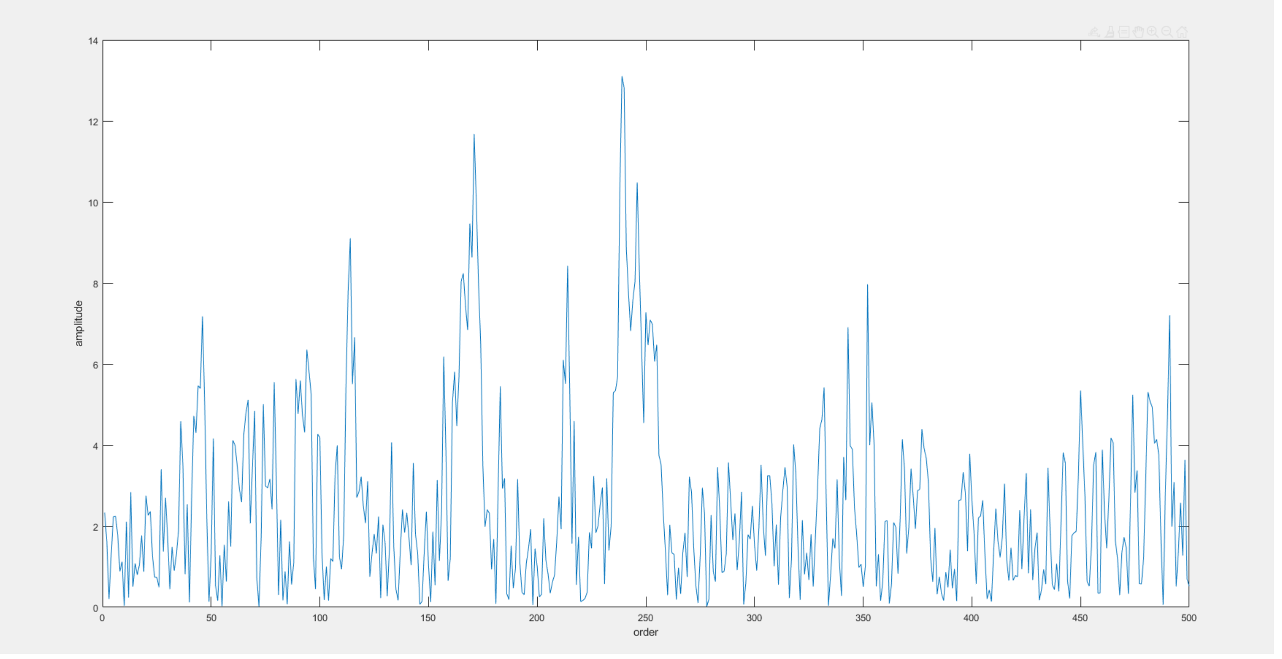

图3：X(n)的样本函数

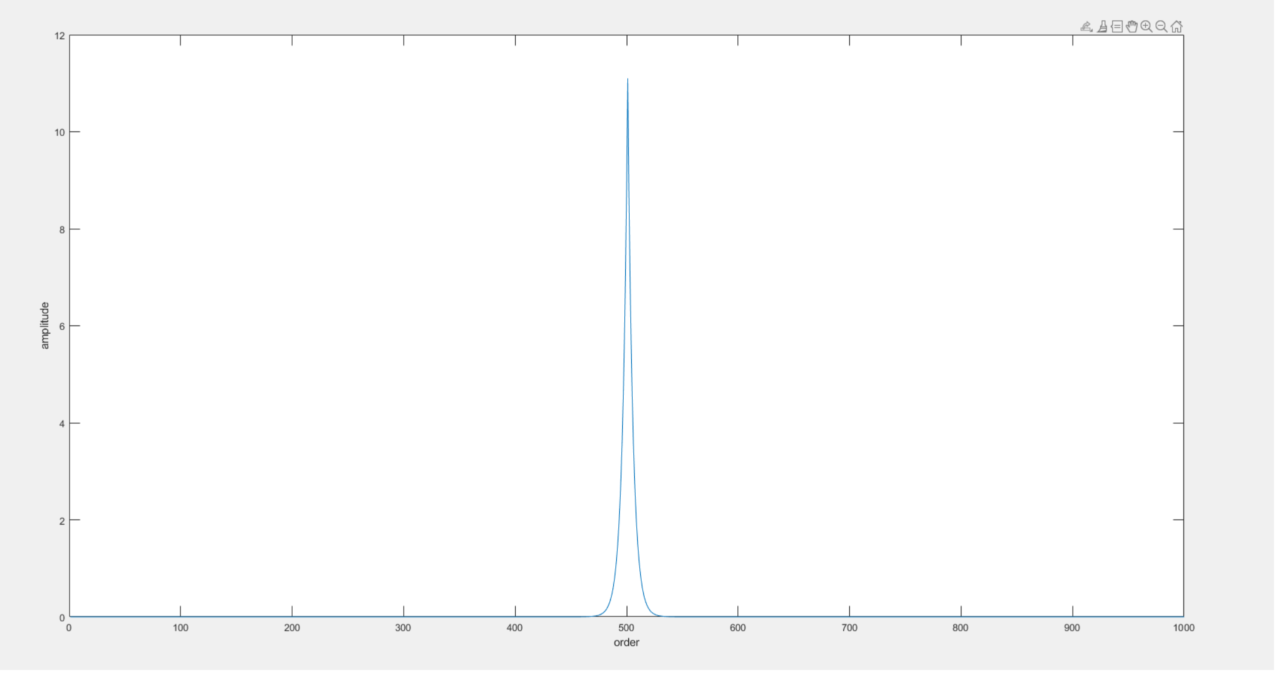

图4：X(n)的理论自相关函数

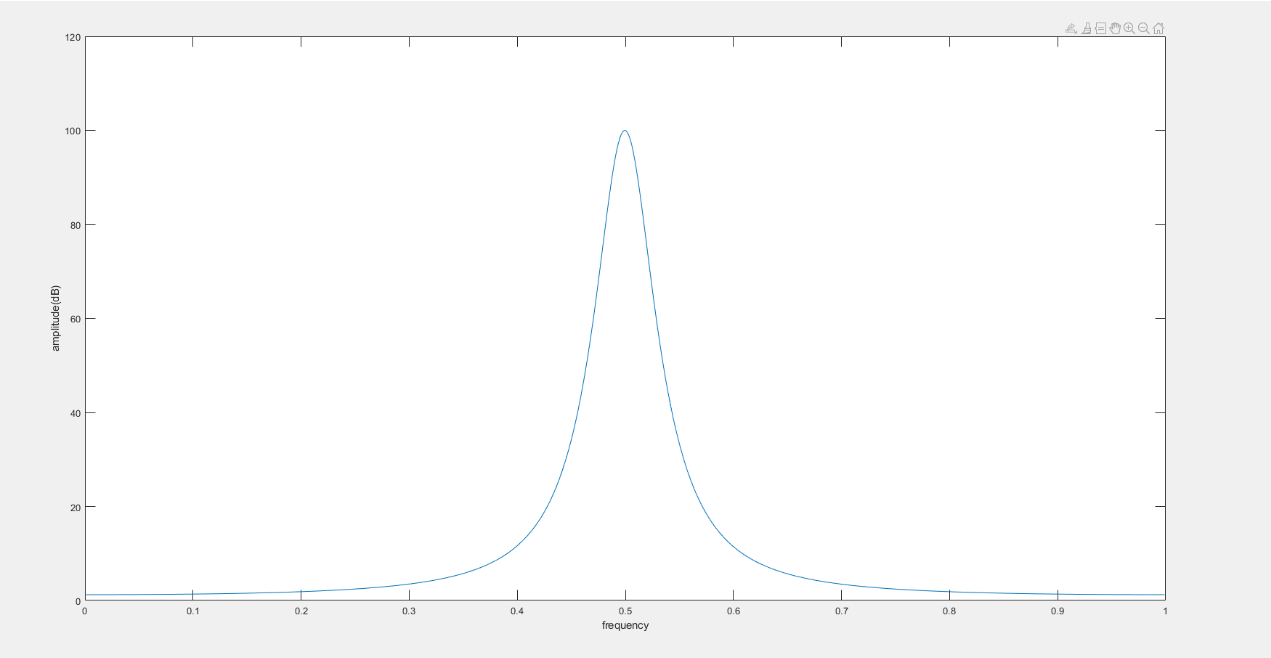

图5：X(n)的理论功率谱密度

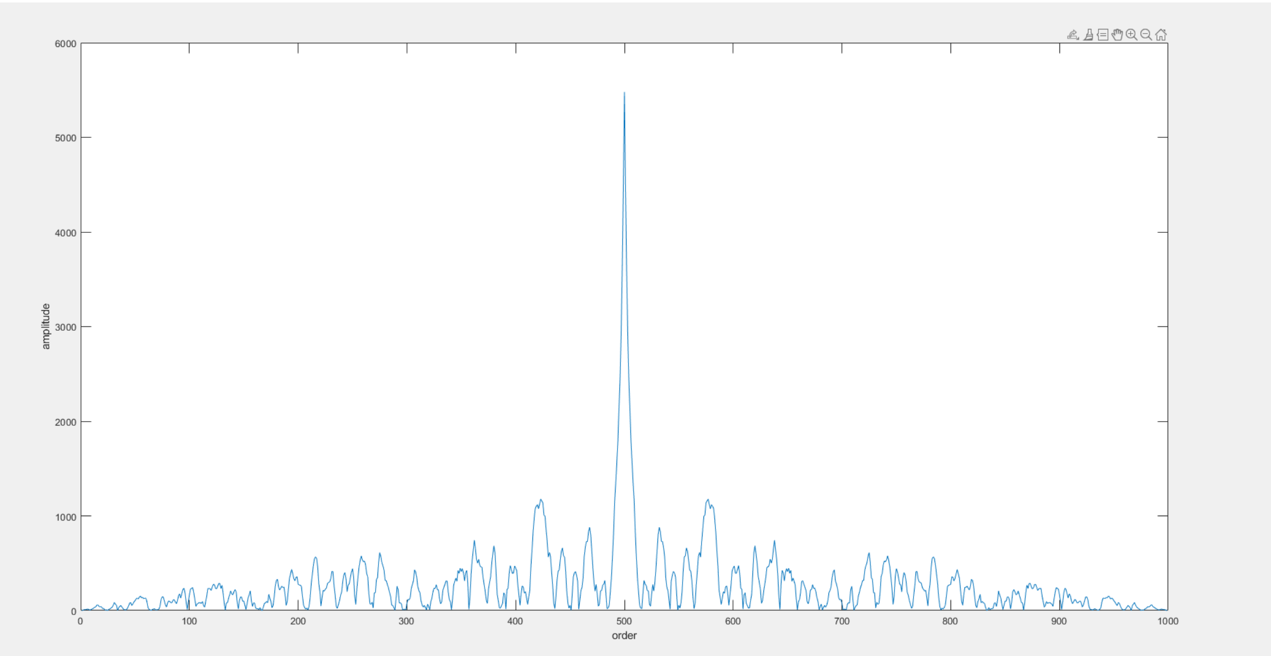

图6：X(n)的理论功率谱密度

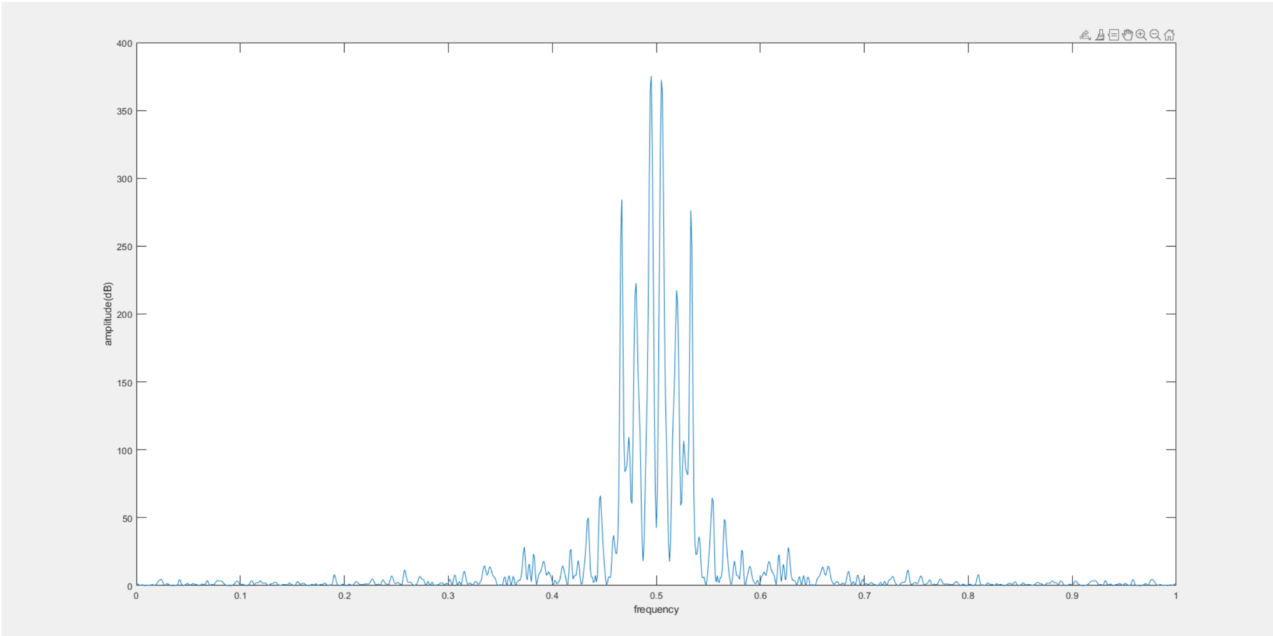

图7：X(n)的功率谱密度