第三, 四次作业反馈

这两次作业基本就是套路，写多了熟悉了就好了，就唯一要注意计算的功夫在平时不能省，这样考试的时候反应的才快。感觉很多都是只写个式子，结果不算了或者抄个答案，真下手算，也还有算错的，所以计算是真的很重要的

分离变量法的好处就是把偏微分方程转化为常微分方程，简单总结一下一般情况下分离变量法的步骤：

- 边界齐次化。
- 对齐次方程和齐次边界分离变量求特征值和特征函数。
- 得到形式解后代入初始条件或非齐次边界后利用广义傅里叶展开确定系数。

稍微提一下边界齐次化的方法，对于第一，三类边界，考虑函数 $h(x,t) = A(t)x + B(t)$，相当于可以线性拟合，使得 $h(x,t)$ 在两个边界取值为 0 即可，对于第二类边界考虑 $h(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x$, 用二次函数拟合。然后考虑求解 $v(x,t) = u(x,t) - h(x,t)$ 即可。分离变量法对于非齐次的边界其实不是很好直接求的，所以如果遇到了这种情况，需要做一步边界齐次化。分离变量法能有效，主要还是 Fourier 展开的良好性质。而且对于非齐次的方程也能用该方法求解，只需要将非齐次项做傅里叶展开，得到非齐次的常微分方程，然后使用常数变易法就能求解。本课程基本上不会涉及到这么复杂的。

0.1 作业题

0.1.1 5(1)

我用这个简单的题对应一下上面的步骤

本题边界条件齐次，直接分离变量 $U(x,t) = X(x)T(t)$, 代入原方程，得到方程

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}$$

, 左边关于 t 函数，右边关于 x 函数，故而只能两个都为常数，设为 $-\lambda$, 得到两个方程：

$$
\begin{aligned}
&T'' + \lambda a^2 T = 0 \\
&\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

上面这个方程就是齐次的且边界也齐次，可以很快求解，分 $\lambda = 0, > 0, < 0$ 讨论一下

$\lambda = 0$,X 是线性的，代入边界条件发现是零解，舍去。

$\lambda < 0, X = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$, 代入边界条件，也是零解，舍去。$\lambda > 0, X = c_1 cos\sqrt{\lambda}x + c_2 sin\sqrt{\lambda}x$，这个在 $cos\sqrt{\lambda}l = 0$ 时有非零解，$\sqrt{\lambda} = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$, 固有值 $\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2l})^2$,$n = 1, 2, ...$ 固有函数对应 $X_n = sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x$, 这里只写一个主体的三角函数而不管前面的系数 c_2, 这是因为我们后面还是要去求系数的，而这个 c_2 不会对后面的求解造成任何影响，相当于三角函数就是我们要的 kernel, 可以简化一下运算。

得到了这里 $\lambda_n = (\frac{(2n-1)\pi}{2l})^2$, 我们就可以求解第一个关于 T 的方程了，得到：

$$T_n = A_n cos(\frac{(2n-1)\pi}{2l}at) + B_n sin(\frac{(2n-1)\pi}{2l}at)$$

. 组合起来得到

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n cos(\frac{(2n-1)\pi}{2l}at) + B_n sin(\frac{(2n-1)\pi}{2l}at)) sin(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x)$$

然后代入初始条件，这里注意到如果有 $u(0,x) = 0$ 这样的条件，A_n 直接就是 0 了，然后 $u_t'(0,x) = x$ 用来求 B_n, 这里就对 x 做傅里叶展开就好了。这里取的正交系就是 $sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x$. $B_n = \frac{16l^2}{\pi^3(2n-1)^3 a}(-1)^{n-1}$. 所以这种题最主要的就是傅里叶展开会算，常见的函数的展开要能很快且正确的算出来。

0.1.2 5(2)

这一题，先看边界条件，和第一题稍有不同，不管实际计算的时候，边界条件得到的结果其实是差不多的。唯一的不同就是这里需要 $sin\sqrt{\lambda}l = 0$, 也即 $\sqrt{\lambda}l = n\pi$, 对应固有值 $\lambda_n = (\frac{n\pi}{2})^2$, 固有函数 $X_n = sin(\frac{n\pi}{2}x)$

这里方程对 T 求的是一阶导，所以在解关于 T 的方程时更简单了。$T_n = c_n e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t}$, 后面就是代入初始条件,e 指数项在 $t = 0$ 时就消失了，所

以还是求 $x(l-x)$ 关于正交函数系 $sin(\frac{n\pi}{l}x)$ 展开。这有个也算是较为经典的函数了，要会算。

0.1.3 5(3)

这一题的方程形式，常规方法就不是很好解了，但是使用分离变量法，关于 X 的方程依然很好解，其边界也是齐次的，所以固有值和固有函数很快就能给出。

固有值 $\lambda_n = (\frac{na\pi}{l})^2$, 固有函数 $X_n = sin(\frac{na\pi}{l}x)$.

关于 T 的方程 $T_n'' + 2hT_n' + \lambda_n T_n = 0$ 可以用特征函数的方法去解这个方程，$\Delta = 4h^2 - 4(\frac{na\pi}{l})^2 < 0$ 这里解出两个复的特征值 $-h \pm \sqrt{-\Delta/4}i$ $T_n = e^{-ht}(c_{1n}cos\sqrt{-\Delta/4}t + c_{2n}sin\sqrt{-\Delta/4}t)$, 后面的在 0 处指数项和 c_{2n} 项消失, 我们可以求出 c_{1n}, 在求导为 0 处，稍作化简可以求出 $-hc_{1n} + c_{2n}\sqrt{-\Delta/4}$. 这样联立一下就能求得 c_{2n}. 然后得到解。这一题说实话计算起来很复杂，已经不想打这个公式了 orz

0.1.4 5(6)

这一题考察的是另一种边界条件：周期边界条件。关于直角坐标方程到极坐标方程的转化，应该比较熟练了。$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ 然后也是一样的考虑 $U(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. 对 Θ 我们有齐次的方程和周期的边界条件。

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \end{cases} \tag{2}$$

对应周期的情况，$\lambda = 0$ 解出的线性函数 $\Theta = c_1 + c_2\theta$, 只有在 $c_2 = 0$ 时才满足，$\lambda < 0$ 解出的指数函数自然也不行。只剩 $\lambda > 0$, 解出的三角函数形式自然的可以满足, 得到固有值 $\lambda_n = n^2$ 固有函数 $\Theta_n = c_1cosn\theta + c_2sinn\theta$.

对于关于 R 的方程 $r^2R_n'' + rR_n' - \lambda_n R_n = 0$, 经典的欧拉方程了, 做变换 $r = e^t$, 方程转化为 $\frac{d^2R_n}{dt^2} = n^2R_n$. 解得 $R_n = A_nt^n + B_nt^{-n} = A_nln^nr + B_nln^{-n}r$ 所以

$$U(r,\theta) = C + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_nln^nr + B_nln^{-n}r)(c_1cosn\theta + c_2sinn\theta)$$

, 代入 $u(a,\theta) = 0, u(b,\theta) = 1$ 即可求解，要快速看出来的话，比如说可以考虑我们这里的解一般都是有界的，那么 r^{-n} 项必然不能有，结果为 $u(r,\theta) = \frac{lnr - lnb}{lna - lnb}$

0.1.5 8

本题首先是个热方程的问题，考虑稳定温度分布，即这里的结果不会和时间有关，内部没有热源，齐次方程，故方程直接列为 $\Delta_2 u = 0$, 类似于 5(6), 然后再转为极坐标的形式. 再看一下边界条件，圆周边界即 $u(a,\theta) = T\theta(\pi-\theta)$, 直径边界即 $u(r,0) = u(r,\pi) = 0$。同时板侧面绝缘，不会有热交换，所以以上两条边界条件足够了。

后面的求解和 5(6) 大差不差，这里面关于 θ 的方程，因为是半圆，我们考虑周期是 π, 也即满足 $\Theta(\theta) = \Theta(\theta+\pi)$

0.1.6 2(1)

这一部分主要是考察 S-L 理论。这个主要是给我们分类变量法提供理论支撑。这里考虑的方程

$$\frac{d}{dx}(k(x)\frac{dy}{dx}) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

称为 Sturm-Liouville 型方程，边界条件是我们常见的边界条件。该理论保证了有可数无穷个非负固有值，极限趋于无穷，且每一个固有值相应的固有函数有且只有一个 (对周期性边界条件不成立，比如前面题目中周期边界条件 sin 和 cos 都可以)。固有函数带权正交，且任意有一阶连续导数及分段二阶连续导数的函数 f(x) 可以按照固有函数系展开成绝对一致收敛的广义傅里叶级数。

这一题我们看到 $k = 1, q = 2a, \rho = 1$，这里 a 是常数，但不一定为正，要使得其满足 S-L 方程，可以考虑先算一下 $\rho(x) = e^{-2ax}$, 然后可以把方程化成

$$\frac{d}{dx}(e^{-2ax}\frac{dy}{dx}) + \lambda e^{-2ax}y = 0$$

，第一类边界条件，直接用其现成结论，$\lambda > 0$, 原方程可以用特征方程求解，特征方程为

$$\lambda^2 - 2a\lambda + \lambda = 0$$

,$\Delta = 4a^2 - 4\lambda$. 所以我们分类讨论:

- $0 < \lambda < a^2$, 此时特征方程有两个不相等实根,原方程解 $y = c_1 e^{a+\sqrt{\Delta/4}} + c_2 e^{-a-\sqrt{\Delta/4}}$，代入并边界条件只有零解
- $\lambda = a^2$, 此时原方程解 $y = (c_1 + c_2 x)e^{ax}$, 同样代入边界条件只有零解

- $\lambda > a^2$, 此时原方程解 $y = e^{ax}(c_1 cos\sqrt{\lambda - a^2}x + c_2 sin\sqrt{\lambda - a^2})$, 代入边界条件，得到固有值 $\lambda_n = (n\pi)^2 + a^2$, 固有函数 $y_n = e^{ax} sinnx$

0.1.7 2(2)

本题方程形式自然的就是 S-L 方程，令 $y = rR$, 原方程化为 $y'' + \lambda y = 0$, 这个方程的求解就很平凡了。这题需要注意的是 y 求好之后，换成 R 不要换错了。

0.1.8 2(3)

本题的难点就是方程是 4 阶的，比较复杂，直接给出一个具体步骤 (亓助教提供), 看看就好：

$\lambda=0 \quad y = Ax^3+Bx^2+Cx+D$

$y'' = 6Ax+2B$

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(l)=0 \\ y''(0)=0 \\ y''(l)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=0 \\ Al^3+Bl^2+Cl=0 \\ 2B=0 \\ 6Al=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \\ D=0 \end{cases}$$

$\lambda<0 \quad \lambda=-k^4 \quad m^4-k^4=0 \quad m=k,ik,-k,-ik$

$y = Ae^{kx}+Be^{-kx}+C\cos kx+D\sin kx$

$y'' = Ak^2e^{kx}+Bk^2e^{-kx}-Ck^2\cos kx-Dk^2\sin kx$

$y(0)=y(l)=y''(0)=y''(l)=0$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \quad ① \\ Ae^{kl}+Be^{-kl}+C\cos kl+D\sin kl=0 \quad ② \\ A+B-C\cos kl=0 \quad ③ \\ Ae^{kl}+Be^{-kl}-C\cos kl-D\sin kl=0 \quad ④ \end{cases}$$

整理
$$\begin{cases} A+B+C=0 \quad ① & (1) \\ Ae^{kl}+Be^{-kl}=0 \quad (②+④)/2 & (2) \\ C+C\cos kl=0 \quad ①-③ & (3) \\ C\cos kl+D\sin kl=0 \quad (②-④)/2 & (4) \end{cases}$$

(3)中 若$C\neq0$ $\cos kl=-1$ 则$\sin kl=0$ 则(4)不成立

因此$C=0$ 则有$A=B=0$

则$D\neq0$ 则$\sin kl=0 \Rightarrow k=\frac{n\pi}{l}$ $n=1,2\cdots$

$\therefore$ $y = D\sin kx = D\sin\frac{n\pi x}{l}$ $n=1,2\cdots$

$\lambda>0 \quad \lambda=k^4 \quad m^4+k^4=0 \quad m=k(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i) \quad k(-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i) \quad k(\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i) \quad k(-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i)$

$y = e^{\frac{\sqrt2}{2}kx}(A\cos\frac{\sqrt2}{2}kx+B\sin\frac{\sqrt2}{2}kx)+e^{-\frac{\sqrt2}{2}kx}(C\cos\frac{\sqrt2}{2}kx+D\sin\frac{\sqrt2}{2}kx)$

$y' = \frac{\sqrt2}{2}k\left\{e^{\frac{\sqrt2}{2}kx}\left[(A+B)\cos\frac{\sqrt2}{2}kx+(B-A)\sin\frac{\sqrt2}{2}kx\right]\right.$
$\left.+e^{-\frac{\sqrt2}{2}kx}\left[(D-C)\cos\frac{\sqrt2}{2}kx+(-C-D)\sin\frac{\sqrt2}{2}kx\right]\right\}$

$y'' = \frac{k^2}{2}\left\{e^{\frac{\sqrt2}{2}kx}\left[2B\cos\frac{\sqrt2}{2}kx-2A\sin\frac{\sqrt2}{2}kx\right]\right.$
$\left.+e^{-\frac{\sqrt2}{2}kx}\left[-2D\cos\frac{\sqrt2}{2}kx+2C\sin\frac{\sqrt2}{2}kx\right]\right\}$

$= k^2e^{\frac{\sqrt2}{2}kx}(B\cos\frac{\sqrt2}{2}kx-A\sin\frac{\sqrt2}{2}kx)+k^2e^{-\frac{\sqrt2}{2}kx}(C\sin\frac{\sqrt2}{2}kx-D\cos\frac{\sqrt2}{2}kx)$

$y(0)=y(l)=y''(0)=y''(l)=0$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ Ae^{\frac{\sqrt2}{2}kl}\cos\frac{\sqrt2}{2}kl+Be^{\frac{\sqrt2}{2}kl}\sin\frac{\sqrt2}{2}kl+Ce^{-\frac{\sqrt2}{2}kl}\cos\frac{\sqrt2}{2}kl+De^{-\frac{\sqrt2}{2}kl}\sin\frac{\sqrt2}{2}kl=0 \\ B-D=0 \\ -Ae^{\frac{\sqrt2}{2}kl}\sin\frac{\sqrt2}{2}kl+Be^{\frac{\sqrt2}{2}kl}\cos\frac{\sqrt2}{2}kl+Ce^{-\frac{\sqrt2}{2}kl}\sin\frac{\sqrt2}{2}kl-De^{-\frac{\sqrt2}{2}kl}\cos\frac{\sqrt2}{2}kl=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A(e^{\frac{\sqrt2}{2}kl}-e^{-\frac{\sqrt2}{2}kl})\cos\frac{\sqrt2}{2}kl+B(e^{\frac{\sqrt2}{2}kl}+e^{-\frac{\sqrt2}{2}kl})\sin\frac{\sqrt2}{2}kl=0 \\ B-D=0 \\ A(-e^{\frac{\sqrt2}{2}kl}-e^{-\frac{\sqrt2}{2}kl})\sin\frac{\sqrt2}{2}kl+B(e^{\frac{\sqrt2}{2}kl}-e^{-\frac{\sqrt2}{2}kl})\cos\frac{\sqrt2}{2}kl=0 \end{cases}$$

$\det_{AB} = (e^{\frac{\sqrt2}{2}kl}-e^{-\frac{\sqrt2}{2}kl})^2\cos^2\frac{\sqrt2}{2}kl+(e^{\frac{\sqrt2}{2}kl}+e^{-\frac{\sqrt2}{2}kl})^2\sin^2\frac{\sqrt2}{2}kl\neq0$

$\therefore A=B=0$

$\therefore A=B=C=D=0$

0.1.9 3

本题通过题目描述，弦振动方程，无外力，所以齐次，第一类边界条件，初始条件的函数对应抛物线, 求导表示初速度为 0：

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l \\
u(t,0) = u(t,l) = 0 \\
u_t(0,x) = 0 \\
u(0,x) = \dfrac{4h}{l^2} x(x-l)
\end{cases}
\tag{3}
$$

这种问题的求解就是很平凡分离变量，求解就好了。