第二次作业反馈

本次作业总体完成情况良好，大部分同学已经适应这门课的思想以及一些规范

0.1 作业题

0.1.1 1.9(1)

这是个简单题，对 t 求积分，然后结合边界条件即可得解，只给出答案 $u(t,x)=(t+1)x^2$

0.1.2 1.9(2)

注意到题目里面的球对称这个条件，这个条件使得 u 只和 t,r 有关，而不是 $u(t,r,\theta,\phi)$, 这样利用球坐标下的

$$\Delta_3 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

上面这个式子很有用，而且推导不难，建议自行推导，最好掌握。在本题用球对称，上面式子化简成

$$u_{tt}=a^2(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)$$

, 再令 $v=ru$, 原方程就变为了如下的：

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{rr} \\ v|_{t=0}=r\varphi(r) \\ v_t|_{t=0}=r\psi(r) \end{cases} \tag{1}$$

这就是一个经典的带初值的波动方程了，直接套达朗贝尔公式即可 (当然要理解达朗贝尔公式怎么来的)

ps: 本题答案后面积分项 r 写成了 x，有的人也写是 x，这是否说明了什么 doge

pps: 有的人认为这里的 φ,ψ 都是定义在正半轴上的，题目也没说，简单起见就认为是可以定义在实轴上的，不需要做什么延拓，但是严谨来看毕竟 r 就是大于 0 的，延拓也没有问题，但是要理解如何使得做的延拓合理，在这里如果我们有 $\varphi(0)=\psi(0)=0$ 可以考虑奇延拓, 但题目也没说，所以只能说这个题不好，它的本意也许不在考察你延拓上面。

0.1.3 1.9(3)

本题没有提示的话确实是个不好做的题，本题是一个调和方程的 Dirichlet 问题，这个问题其实不是很简单，但是它存在很多很好的性质，感兴趣的可以参考陈祖墀 pde 第五章。这个方程一般情况怎么解在其 5.2 节。解的推导有很强的物理思想-电像法。本题的提示可能也有这个思想，但我感觉总不是个味 233。对其没啥兴趣的就按提示做就完了。下面给出关键的步骤：

我们有

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)=5+4y \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \tag{2}$$

展开上式，二阶项没了，令 x,y,z 这些一阶项的系数对应起来，即可。我们得到 $x_0=0, y_0=-2, z_0=0$ 故结果为

$$u=(x^2+(y+2)^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

0.1.4 1.9(4)

本题看到这个奇怪的边界，第一反应就应该进行换元 $\xi=t+x, \eta=t-x$，这样就把方程化为了

$$\begin{cases} u_{\xi\eta}=0 \\ u|_{\xi=0}=\varphi(\dfrac{\xi-\eta}{2}), \varphi(0)=\psi(0) \\ u|_{\eta=0}=\psi(\dfrac{\xi-\eta}{2}) \end{cases} \tag{3}$$

所以 $u=f(\xi)+g(\eta)$ 带回到 x,t, 然后用边界条件确定 f,g 就得到了结果。答案是 $u=\varphi(\frac{x-t}{2})+\psi x+t2-\varphi(0)$

0.1.5 1.10

本题是个经典题，需要掌握这个方法，用叠加原理，将一个方程拆分为两个，如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}+a\dfrac{\partial v}{\partial x}=0(t>0,-\infty<x<+\infty) \\ v(0,x)=\varphi(x)\,(a\neq 0, a\,is\,a\,constant) \end{cases} \tag{4}$$

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} = f(x,t)(t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ w(0,x) = 0\,(a \neq 0, a\,is\,a\,constant) \end{cases} \tag{5}
$$

其中 $u = v + w$, 第一个方程是简单的，方程齐次，还是一阶的，怎么写都能写。$v = \varphi(x - at)$

第二个需要齐次化原理，转化为

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} + a\dfrac{\partial w_1}{\partial x} = 0(t > \tau, -\infty < x < +\infty) \\ w_1(\tau,x) = f(\tau,x)\,(a \neq 0, a\,is\,a\,constant) \end{cases} \tag{6}
$$

解为 $w_1 = f(\tau, x - a(t-\tau))$, 所以 $w = \int_0^t f(\tau, x - a(t-\tau))d\tau$, 所以 $u = \varphi(x - at) + \int_0^t f(\tau, x - a(t-\tau))d\tau$

需要注意的是，用齐次化原理之后的方程实际上和原方程不一样了，毕竟解都不一样了，不要搞混了。