1 δ 函数(狄拉克函数)

狄拉克函数是由英国物理学家狄拉克引入的函数，虽然在物理方面有明确的意义并广泛使用，但直到20世纪30年代才建立了完整的数学理论。被称为广义函数论或者分布论，本书不做讨论。

在物理里面，我们常常会用一个点来表示一个物体，并把物体的所有质量集中在该点上，称为质点。那么如何用密度函数来表示质点的密度分布？我们假设x 轴上分布着某种物质A ，总计质量为1，全部位于x 轴的零点。我们将物质A 在x 轴上密度函数记为$\rho(x)$, 显然在零点之外，物质A 分布的密度函数为0，因而

$$\rho(x) = 0, x \neq 0.$$

而在零点，其密度只能取无穷大。如果给物质A 赋予速度$v(x)$（方向沿着x 轴，连续分布），则冲量为

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\rho(x)dx = v(0).$$

特别地，如果$v = 1$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = 1.$$

我们将这样的密度函数称为δ 函数，记为$\delta(x)$。$\delta(x)$ 为满足以下两个条件缺一不可的函数：

(1)

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0, \\ +\infty, x = 0. \end{cases}$$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$

特别地，上诉两条件与$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$对所有连续函数$f$ 成立等价。狄拉克函数可以看作一个作用在连续函数空间的线性算符，

$$\delta(x) : f(x) \to f(0).$$

一般来说如果需要我们要求算符作用在速降函数空间上（$\lim_{x\to\pm\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$ ）。任何我们常见的函数都能看成一个算符（一般不包括指数函数），两个算符相等当且仅当作用在所有速降函数上的取值相等，例如要说明$x\delta(x) = 0$，仅需说明

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x\delta(x))f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(xf(x))dx = 0 \times f(0) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} (0)f(x)dx$$

对所有速降（连续）函数成立即可。

如果我们改变下积分区域则

$$\int_a^b \delta(x)dx = \begin{cases} 1, x \in (a, b), \\ 0, x \notin [a, b]. \end{cases}$$

对于$a = 0$ 或者$b = 0$ 的情况我们不做考虑。

如果质量1 集中在$x = \xi$ 点，则密度函数$\rho(x) = \delta(x - \xi)$。设$f(x)$ 为连续函数，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi)f(x)dx = f(\xi).$$

例子1. 有一根无限长紧绷的弦，在$x=0$敲一下，给它冲量1，求初始速度分布。

解. 对于任何连续密度函数$\rho(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)v(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(0)v(x)dx=1=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\frac{\delta(x)}{\rho(0)}dx.$$

所以$v(x)=\frac{\delta(x)}{\rho(0)}$.

狄拉克函数的一些性质：

(1) 对称性：$\delta(x)=\delta(-x)$。更一般地$\delta(x-\xi)=\delta(\xi-x)$。将狄拉克函数看作质点的密度分布，则对称性是显然的。我们由以下卷积公式

$$\delta*f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)f(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)f(x-\xi)dx=f(x).$$

即

$$\delta*f=f.$$

(2) 求导：我们可以清楚知道狄拉克函数在非零点的导数是零，但在零点的导数呢？因此我们要以算符来理解：设f 无限可导，则由分部积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)f(x)dx=\delta(x)f(x)|_{\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f'(x)dx=-f'(0).$$

即，$\delta'(x):f\to -f'(0)$。同样的理解：$\delta^{(n)}(x):f\to(-1)^n f^{(n)}(0)$。这样的算符在数学上称为广义函数。

(3) 傅里叶变换：依照狄拉克函数的定义

$$F[\delta(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{i\lambda x}dx=e^{i\lambda\times 0}=1.$$

即狄拉克函数的傅里叶变换为1；反之，1 的傅里叶反变换为狄拉克函数，即

$$F^{-1}[1]=\delta(x).$$

把傅里叶反变换的公式代入，有形式表达式

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

用算符来理解：

$$\begin{aligned}\langle\delta,f\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}d\lambda dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dxd\lambda\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(-\lambda)d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda\times 0}d\lambda=f(0).\end{aligned}$$

又$e^{-i\lambda x}=\cos(\lambda x)-i\sin(\lambda x)$,注意到$\sin(\lambda x)$ 是关于x 的奇函数，所以有形式表达式

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\lambda x)d\lambda.$$

同样地，$\delta(x-\xi)$ 的傅里叶变换

$$F[\delta(x-\xi)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)e^{i\lambda x}dx=e^{i\lambda\xi}.$$

反过来

$$F^{-1}[e^{i\lambda\xi}]=\delta(x-\xi).$$

我们用狄拉克函数推导达朗贝尔公式。

例子2. 解初始问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=\delta(x-\xi), u_t(0,x)=0 \end{cases}$$

解. 做傅里叶变换

$$U(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则

$$\begin{cases} U_{tt}=-a^2\lambda^2U, \\ U(0,\lambda)=e^{i\lambda\xi}, U_t(0,\lambda)=0. \end{cases}$$

这是一个与λ 有关的常微分方程：解得

$$U(t,\lambda)=C_1(\lambda)e^{a\lambda ti}+C_2(\lambda)e^{-a\lambda ti}.$$

代入初始条件

$$\begin{cases} C_1(\lambda)+C_2(\lambda)=e^{i\lambda\xi}. \\ C_1(\lambda)-C_2(\lambda)=0. \end{cases}$$

解得

$$C_1(\lambda)=C_2(\lambda)=\frac{1}{2}e^{i\lambda\xi}.$$

所以

$$U(t,\lambda)=\frac{1}{2}(e^{i\lambda(\xi+at)}+e^{i\lambda(\xi-at)}).$$

做傅里叶反变换，得到

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(\delta(x-\xi-at)+\delta(x-\xi+at)\right).$$

注记. 已知定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=g_1(x), u_t(0,x)=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ v(0,x)=g_2(x), v_t(0,x)=0 \end{cases}$$

的解分别为u,v，则定解问题

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ w(0,x)=ag_1(x)+bg_2(x), w_t(0,x)=0 \end{cases}$$

的解为$w=au+bv$。这就是叠加原理。现在我们写成积分形式。如果我们对每个$\xi\in M_0$ （M_0 为一个可以积分的区域）都有定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=g(x;\xi), u_t(0,x)=0 \end{cases}$$

它的解为$u(t,x;\xi)$。则定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=\int_{M_0}\phi(\xi)g(x;\xi)d\xi, u_t(0,x)=0 \end{cases}$$

的解为$\int_{M_0}\phi(\xi)u(t,x;\xi)d\xi$。

现在我们求

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=\varphi(x), u_t(0,x)=0 \end{cases}$$

的解。注意到$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$。即$\varphi(x)$ 可以表示为$\delta(x-\xi)$ 的类似线性组合。由注记，我们可以得到上述定解问题的解为

$$u(x,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2}\left(\delta(x-\xi-at)+\delta(x-\xi+at)\right)d(\xi)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}.$$

例子3. 解初始问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=0, u_t(0,x)=\delta(x-\xi) \end{cases}$$

解. 我们首先解初始问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(0,x)=0, u_t(0,x)=\delta(x-\xi) \end{cases}$$

做傅里叶变换

$$U(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则

$$\begin{cases} U_{tt}=-a^2\lambda^2U, \\ U(0,\lambda)=0, U_t(0,\lambda)=e^{i\lambda\xi}. \end{cases}$$

这是一个与λ 有关的常微分方程：解得

$$U(t,\lambda)=C_1(\lambda)e^{a\lambda ti}+C_2(\lambda)e^{-a\lambda ti}.$$

代入初始条件

$$\begin{cases} C_1(\lambda)+C_2(\lambda)=0. \\ C_1(\lambda)-C_2(\lambda)=\frac{e^{i\lambda\xi}}{a\lambda i}. \end{cases}$$

解得

$$C_1(\lambda)=\frac{e^{i\lambda\xi}}{2a\lambda i},C_2(\lambda)=-\frac{e^{i\lambda\xi}}{2a\lambda i}.$$

所以

$$U(t,\lambda)=\frac{1}{2a}\times\frac{e^{i\lambda(\xi+at)}-e^{i\lambda(\xi-at)}}{\lambda i}.$$

做傅里叶反变换，得到

$$u(t,x)=\begin{cases}\frac{1}{2a},\xi-at\le x\le\xi+at.\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$$

注记. 对于函数

$$f(x)=\begin{cases}1,a\le x\le b.\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$$

它的傅里叶变换为

$$F[f]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx=\int_a^b e^{i\lambda x}dx=\frac{e^{i\lambda b}-e^{i\lambda a}}{i\lambda}.$$

注记. 设$u(t,x:\xi)$ 为上述例子的解，则和例子*2*的情形类似，初始问题

$$\begin{cases}v_{tt}=a^2v_{xx},-\infty<x<+\infty,t>0\\ v(0,x)=0,v_t(0,x)=\psi(x)\end{cases}$$

的解为

$$v(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)u(t,x;\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

将两个注记的结果相加我们就得到了达朗贝尔公式。

例子4. 设有一根长为$2l$ 温度为*0*各种绝热的细杆无热源，在细杆的中间烧一下，给他一个热量$c\rho$，求杆上的温度变换。

解. 设温度为$u(t,x)$，则初始温度$u(0,x)$ 满足

$$u(0,x)=\begin{cases}0,x\neq l,\\ +\infty,x=l.\end{cases}$$

和$\int_0^{2l}u(0,x)c\rho dx=c\rho$。所以$u(0,x)=\delta(x-l)$。

写出定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},0<x<2l,t>0\\ u(0,x)=\delta(x-l)\\ u_x(t,0)=u_x(t,2l)=0.\end{cases}$$

用分离变量法，设$u(t,x)=T(t)X(x)$，则得到

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

设为$-\lambda$，则得到固有值问题

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X'(0)=X'(2l)=0.\end{cases}$$

以及

$$T' + \lambda^2 a^2 T = 0.$$

有零固有值$\lambda_0 = 0$，固有函数为$X_0 = 1$。其余固有值全部为正，解得$X = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$。所以

$$B = 0, \sin(2l\sqrt{\lambda}) = 0.$$

解得固有值及固有函数

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4l^2}, X_n = \cos(\frac{n\pi}{2l}x), n = 1, 2, \cdots.$$

将固有值代入T 的方程，得到

$$T_0 = C_0, T_n = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}a^2 t}, n = 1, 2, 3, \cdots.$$

所以

$$u(t, x) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{4l^2}a^2 t}\cos(\frac{n\pi}{2l}x).$$

确定系数，令$t = 0$，则

$$C_0 = \frac{1}{2l}, C_n = \frac{\int_0^{2l}\delta(x-l)X_n(x)dx}{\int_0^{2l}X_n(x)X_n(x)dx} = \frac{X_n(l)}{l}.$$

得到当$n \geq 1$ 时，

$$C_n = \begin{cases} 0, n = 2k+1 \\ \frac{(-1)^k}{l}, n = 2k. \end{cases}$$

所以

$$u(t, x) = \frac{1}{2l} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{l}e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}a^2 t}\cos(\frac{k\pi}{l}x).$$

例子5. $f(t)$ 连续，计算积分

$$I = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_0^t f(\tau)\sin(\lambda x)\sin(a\lambda(t-\tau))d\tau.$$

$a > 0, at > x > 0.$

解. 首先

$$I = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^t f(\tau)\sin(\lambda x)\sin(a\lambda(t-\tau))d\tau.$$

用三角函数的积化和差公式：

$$\sin(\lambda x)\sin(a\lambda(t-\tau)) = \frac{1}{2}\left(\cos(a\lambda(t-\tau) - \lambda x) - \cos(a\lambda(t-\tau) + \lambda x)\right)$$

所以

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{a}{2\pi}\int_0^t f(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \cos(a\lambda(t-\tau)-\lambda x)-\cos(a\lambda(t-\tau)+\lambda x)d\lambda \\
&= a\int_0^t f(\tau)\left(\delta(a(t-\tau)-x)-\delta(a(t-\tau)+x)\right)d\tau \\
&= a\int_0^t f(\tau)\delta(a(t-\tau)-x)d\tau \\
&= a\int_{at-x}^{-x} f(\frac{at-\eta-x}{a})\delta(\eta)d\frac{at-\eta-x}{a} \\
&= \int_{-x}^{at-x} f(\frac{at-\eta-x}{a})\delta(\eta)d\eta \\
&= f(t-\frac{x}{a}).
\end{aligned}
$$

——

我们同样可以定义高维的狄拉克函数。将质量为1 的质点置于三维空间的零点，则密度函数$\delta(x,y,z)$ 满足

(1)

$$
\delta(x,y,z)=\begin{cases} 0, (x,y,z)\neq(0,0,0), \\ +\infty, (x,y,z)=(0,0,0). \end{cases}
$$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\delta(x,y,z)dxdydz = f(0,0,0)$.

我们发现$\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ 也满足上诉条件，所以$\delta(x)\delta(y)\delta(z)=\delta(x,y,z)$. 记$M=(x,y,z)$，用$\delta(M)$ 表示$\delta(x,y,z)$。高维狄拉克函数的性质是类似的：

(1) 对称性：$\delta(M)=\delta(-M)$。更一般地$\delta(M-M_0)=\delta(M_0-M)$。卷积公式

$$
\delta * f = f(M) = \int_{\mathbb{R}^3} f(M_0)\delta(M-M_0)dM_0.
$$

(2) 求导：我们可以清楚知道狄拉克函数在非零点的导数是零，但在零点的导数呢？因此我们要以算符来理解：设f 无限可导，则由分布积分公式

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\delta(x,y,z)}{\partial x} f(x,y,z)dxdydz &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\delta(z)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)f(x,y,z)dx\right)dydz \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\delta(z)\frac{\partial f}{\partial x}(0,y,z)dydz \\
&= -\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0).
\end{aligned}
$$

(3) 傅里叶变换：回顾高维的傅里叶变换

$$
F[f(x,y,z)] = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz.
$$

傅里叶反变换

$$F^{-1}[F(\lambda,\mu,\nu)] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu.$$

依照狄拉克函数的定义

$$F[\delta(x,y,z)] = \int_{-\mathbb{R}^3} \delta(x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz = 1.$$

即狄拉克函数的傅里叶变换为1；反之，1 的傅里叶反变换为狄拉克函数，即

$$F^{-1}[1] = \delta(x,y,z).$$

2 场势方程基本解与格林函数

书上的形式更一般，但我们直接考虑泊松方程。在三维真空空间中的零点，我们放电量为$-\varepsilon_0$的点电荷(ε_0为真空介电常数)，其电荷密度设为$\rho(x,y,z)$，则

(1)

$$\delta(x,y,z) = \begin{cases} 0,(x,y,z)\neq(0,0,0), \\ +\infty,(x,y,z)=(0,0,0). \end{cases}$$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,y,z)dxdydz = -\varepsilon_0$.

所以$\rho(x,y,z) = -\varepsilon_0\delta(x,y,z)$。回忆泊松方程，我们设电势函数为$u(x,y,z)$，则有

$$\Delta_3 u = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0} = \delta(x,y,z).$$

该方程的解称为泊松方程$\Delta_3 u = 0$ 的基本解。我们解该方程，做高维傅里叶变换，有

$$-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\bar{u}(\lambda,\mu,\nu) = 1.$$

其中$\bar{u}$ 为u 的傅里叶变换。用球坐标，设$\lambda = \rho\sin\theta\cos\varphi, \mu = \rho\sin\theta\sin\varphi, \nu = \rho\cos\theta$，则

$$\bar{u} = -\frac{1}{\rho^2}.$$

做傅里叶反变换，得到

$$u(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(\lambda,\mu,\nu)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu$$

我们设$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，容易发现$u(x,y,z)$ 的取值只与r 有关，所以我么只要求$u(0,0,r)$ 就可以

了，

$$\begin{aligned}
u(0,0,r) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(\lambda,\mu,\nu)e^{-i\rho r\cos\theta}d\lambda d\mu d\nu \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}-\frac{1}{\rho^2}e^{-i\rho r\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\theta d\varphi d\rho \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}-e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-i\rho r\cos\theta}}{-i\rho r}|_0^{\pi}d\rho = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{2\sin(\rho r)}{\rho r}d\rho = -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\rho)}{\rho}d\rho \\
&= -\frac{1}{4\pi r}.
\end{aligned}$$

所以

$$u = -\frac{1}{4\pi r}.$$

至此，我们得到了泊松方程的基本解。因为我们摆放的是负电荷，所以电势为负，如果我们摆放的是正电荷，那么电势为正，即

$$\tilde{u} = \frac{1}{4\pi r}.$$

我们设$M=(x,y,z)$，$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$，如果我们一开始的点电荷$-\varepsilon_0$ 不是放在零点，而是放在M_0 点，那么电势为

$$u(M;M_0) = -\frac{1}{4\pi r(M,M_0)},$$

其中$r(M,M_0)$ 表示两个点之间的间距。此为

$$\Delta_3 u = \delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta).$$

的解。

如果空间的电荷密度为$\rho(M)$，则相应的泊松方程为

$$\Delta_3 u = -\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

我们可以将$-\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$ 分解为狄拉克函数的积分叠加，

$$-\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(M_0)\delta(M-M_0)dM_0.$$

那么相应的解也是积分叠加：

$$u(M) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(M_0)u(M;M_0)dM_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(M_0)}{r(M;M_0)}dM_0.$$

对于基本解，我们还可以这么理解，我们再零点放上大小为$-\varepsilon_0$ 电荷。由高斯公式，通过封闭曲面的电通量等于封闭曲面的电荷除上介电常数，且由对称性，电场强度只与与零点的距离有关，方向指向零点，设其大小为$E(a)$ （方向就不管了）。因而通过以零点为圆心，a 为半径的电通量为

$$-E(a)\times 4\pi a^2 = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = -1$$

即

$$E(a)=\frac{1}{4\pi a^2}$$

假设无穷远处电势为零，则r 处电势为

$$U(+\infty)-U(r)=\int_r^{\infty}\frac{1}{4\pi a^2}da=-\frac{1}{4\pi a}|_r^{\infty}=\frac{1}{4\pi r},$$

即

$$U(r)=-\frac{1}{4\pi r}$$

和我们计算的结果是一致的，这说明虽然我们没说，但我们已经默认了无穷远处电势为零。但这种默认并不总是正确的，例如，当我们求二维泊松方程

$$\Delta_2 u(x,y)=\delta(x,y)$$

的时候，此时

$$-E(a)\times 2\pi a=-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}=-1$$

得到

$$E(a)=\frac{1}{2\pi a},$$

这时候再默认无穷远处电势为零，则

$$U(+\infty)-U(r)=\int_r^{\infty}\frac{1}{2\pi a}da=\text{不可积},$$

这时候我们就不能默认无穷远处电势为零，否则没法算。电势是个相对量，可以默认任何地方电势为零，然后求其他点的相对电势，因而我们可以默认$a=1$ 处电势为零，则

$$U(1)-U(r)=\int_r^{1}\frac{1}{2\pi a}da=\frac{\ln a}{2\pi}|_r^1=-\frac{\ln r}{2\pi}.$$

所以

$$U(r)=\frac{\ln r}{2\pi}.$$

与后面结果是一致的。那么如果是一维呢？

$$\Delta_1 u(x)=\delta(x).$$

此时

$$-E(a)\times 2=-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}=-1$$

得到

$$-E(a)=-\frac{1}{2},$$

我们干脆默认零点的电势为零，则

$$U(0)-U(r)=\int_r^{0}\frac{1}{2}da=\frac{a}{2}|_r^0=-\frac{r}{2}.$$

所以

$$U(r)=\frac{r}{2}.$$

2.1 格林函数及其物理意义

设有一个由金属球壳围成的区域V，金属球壳接地（电势为零），内部M_0 处放一点电荷，电量为ε_0，则V 内部电势分布u 满足

$$\begin{cases} \Delta u = -\delta(M - M_0), M \in V \\ u|_{\partial V} = 0. \end{cases}$$

该定解问题的解我们称为格林函数，记为$G(M; M_0)$，格林函数是有两部分组成的，一部分是有点电荷ε_0产生的电势，这个已经在前面讲过，为

$$(1) \qquad u(M; M_0) = \frac{1}{4\pi r(M, M_0)},$$

其中$r(M, M_0)$ 表示两个点之间的间距。另一部分是由感应电荷产生的电势，满足如下定解问题：

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, M \in V \\ u(M)|_{\partial V} = -\frac{1}{4\pi r(M, M_0)}. \end{cases}$$

$G(M, M_0) = (1) + (2)$的解即为格林函数，这也提供了一个求格林函数的办法，只要求出（2）就可以了，然而还是难求，我们只能对一些特殊的情形求格林函数。

定理. 格林函数具有对称性，即$G(M_1; M_2) = G(M_2; M_1)$，$M_1, M_2$ 为V 内两点。

证明. 推导需要用到格林第二公式

$$\int_V w\Delta v - v\Delta w dV = \int_S w\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} dS$$

设$G(M; M_i), i = 1, 2$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = -\delta(M - M_i), M \in V \\ u(M)|_{\partial V} = 0. \end{cases}$$

在格林第二公式中取$w = G(M; M_1), v = G(M; M_2)$，得到左边

$$\begin{aligned} &\int_V G(M; M_1)\Delta G(M; M_2) - G(M; M_2)\Delta G(M; M_1) dV \\ =&\int_V G(M; M_1)(-\delta(M - M_2)) - G(M; M_2)(-\delta(M - M_1)) dV \\ =&G(M_1; M_2) - G(M_2; M_1) \end{aligned}$$

右边

$$\int_S G(M; M_1)\frac{\partial G(M; M_2)}{\partial \vec{n}} - G(M; M_2)\frac{\partial G(M; M_1)}{\partial \vec{n}} dS = 0$$

对照得到

$$G(M_1; M_2) = G(M_2; M_1).$$

如果我们知道了格林函数，我们可以求出一般泊松方程边值问题的解。即

定理. 泊松方程边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x,y,z), M \in V \\ u|_{\partial V} = \varphi(x,y,z). \end{cases}$$

的解为

$$u(M) = -\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0} G}{\partial \vec{n}} dS + \int_V G(M;M_0) f(M_0) dM_0,$$

其中$G = G(M;M_0)$。

证明. 解有两部分，后面部分$\int_V Gf(M_0)dM_0$ 为定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x,y,z), M \in V \\ u|_{\partial V} = 0. \end{cases}$$

的解。我们只要证明前面部分$v(M) = -\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS$ 为定解问题

$$\begin{cases} \Delta v = 0, M \in V \\ v|_{\partial V} = \varphi(x,y,z). \end{cases}$$

的解即可。由格林第二公式

$$\begin{aligned} \int_S G(M;M_0)\frac{\partial v(M_0)}{\partial \vec{n}} - v(M_0)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS &= \int_V G(M;M_0)\Delta v(M_0) - v(M_0)\Delta G(M;M_0) dM_0 \\ &= \int_V 0 + v(M_0)\delta(M - M_0) dM_0 = v(M). \end{aligned}$$

又在边界上$G(M;M_0) = 0$，所以在边界上

$$\varphi(M) = -\int_S v(M_0)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS = -\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS.$$

这样我们验证了边界条件，现在我么验证泛定方程。

$$\Delta\left(v(M)\right) = -\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}\Delta_M G}{\partial \vec{n}} dS = -\int_S \varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}\delta(M - M_0)}{\partial \vec{n}} dS = 0.$$

为了方便，我们经常交换M, M_0 的位置。

$$u(M_0) = -\int_S \varphi(M)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS + \int_V Gf(M) dM.$$

2.2 用镜象法求格林函数

一般来说格林函数很难求，但是对于特殊的情况，格林函数可以用镜像法求出。

1）半空间的格林函数：定解问题

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = -\delta(M - M_0), z > 0 \\ G|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

的解称为半空间的格林函数。从物理角度看，这就是在$M_0 = (\xi,\eta,\zeta)$ 处放上电量为ε_0 的电荷Q，$z = 0$ 为无限大的接地的金属板，求上半空间的电势分布。方法是镜像法，也就是在(ξ,η,ζ) 关

于$z=0$ 的对称点$M_0'=(\xi,\eta,-\zeta)$ 处放上电量为$-\varepsilon_0$ 的电荷Q'，并移掉金属板。则由电荷Q 和电荷Q' 产生的电势为

$$u(M)=\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}-\frac{1}{4\pi r(M,M_0')}.$$

由对称性，在$z=0$ 处，电势为0。并且

$$\Delta u=-\delta(M-M_0)+\delta(M-M_0').$$

在上半平面正好为

$$\Delta u=-\delta(M-M_0).$$

所以

$$G(M;M_0)=u(M)=\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}-\frac{1}{4\pi r(M,M_0')}=\frac{1}{4\pi}(\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{1}{r(M,M_0')}).$$

就是我们要求的格林函数。即

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}).$$

对于一般形式定解问题：

$$\begin{cases}\Delta u=-f(x,y,z),z>0\\ G|_{z=0}=\varphi(x,y).\end{cases}$$

我们代入蓝色公式，有

$$u(M)=-\int_S\varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec{n}}dS+\int_V Gf(M_0)dM_0.$$

其中前面一半

$$-\int_S\varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec{n}}dS=\int_S\varphi(M_0)\frac{G(M,M_0)}{\partial\zeta}dM_0=\int_S\varphi(\xi,\eta)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial\zeta}dM_0.$$

计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0}&=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{2(\zeta-z)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{3/2}}-\frac{2(\zeta+z)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2)^{3/2}}\right)\Big|_{\zeta=0}\\&=\frac{z}{2\pi((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

所以定解问题

$$\begin{cases}\Delta v=0,z>0\\ v|_{z=0}=\varphi(x,y).\end{cases}$$

的解为

$$v(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varphi(\xi,\eta)z}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}d\xi d\eta.$$

或者写成

$$v(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varphi(x,y)\zeta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2)^{3/2}}dxdy.$$

书上答案自然是错的。

所以半平面求格林函数的关键是在M_0关于半平面的对称点M_0'虚设一个电量为$-\varepsilon_0$ 的电荷，并将两个电荷产生的电势叠加。所以关键是找对称点，解析几何书上应该有公式（好吧，反正百度找不到）。求$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ 关于$ax+by+cz+d=0$ 的对称点。先做经过M_0 和平面垂直的线，有参数表示$(\xi+pa,\eta+pb,\zeta+pc)$。然后求该线和平面的交点$P$。只要解出$p$

$$a(\xi+pa)+b(\eta+pb)+c(\zeta+pc)+d=0.$$

最后对称点即为

$$2P-(\xi,\eta,\zeta)=(\xi+2pa,\eta+2pb,\zeta+2pc)$$

例子6. 区域$\Omega=\{(x,y,z):x+y+z>0\}$，求格林函数。

解. 在Ω 区域的$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ 放电量为ε_0 的点电荷，在它的关于$x+y+z=0$ 的对称点$M_0'=(\frac{\xi-2\eta-2\zeta}{3},\frac{\eta-2\xi-2\zeta}{3},\frac{\zeta-2\xi-2\eta}{3})$ 放另一点电荷，电量为$-\varepsilon_0$。格林函数为两个电荷产生电势的叠加：即

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{\xi-2\eta-2\zeta}{3})^2+(y-\frac{\eta-2\xi-2\zeta}{3})^2+(z-\frac{\zeta-2\xi-2\eta}{3})^2}}\right).$$

例子7. 区域$\Omega=\{(x,y,z):x>y\}$，求格林函数。

解. 在Ω 区域的$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ 放电量为ε_0 的点电荷，在它的关于$x=y$ 的对称点$M_0'=(\eta,\xi,\zeta)$ 放另一点电荷，电量为$-\varepsilon_0$。格林函数为两个电荷产生电势的叠加：即

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\eta)^2+(y-\xi)^2+(z-\zeta)^2}}\right).$$

外单位法向为$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$，所以定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0,x+y>0\\ u|_{x=y}=\varphi(x).\end{cases}$$

的解为

$$u(M)=-\int_S\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}dS=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)(G_\xi-G_\eta)|_{\eta=\xi}d\xi d\zeta.$$

最后求得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-y)\varphi(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\xi)^2+(z-\zeta)^2}^3}d\xi d\zeta.$$

实际上，可以进一步化简为

$$u(M)=\frac{x-y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\xi)^2}}d\xi.$$

例子8. 求定解问题

$$\begin{cases}u_{xx}+4u_{yy}+9u_{zz}=0,x>0\\ u|_{x=0}=\varphi(y,z).\end{cases}$$

解. 设$\bar{x}=x, \bar{y}=\frac{1}{2}y, \bar{z}=\frac{1}{3}z$，则定解问题化为

$$\begin{cases} u_{\bar{x}\bar{x}}+u_{\bar{y}\bar{y}}+u_{\bar{z}\bar{z}}=0, \bar{x}>0 \\ u|_{\bar{x}=0}=\varphi(2\bar{y},3\bar{z}). \end{cases}$$

我们求$\bar{x}>0$ 区域的格林函数，设$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ 为$\xi>0$，其关于$\bar{x}=0$ 的对称点$M_0'=(-\xi,\eta,\zeta)$，在M_0 点放上ε_0 的电荷，在M_0' 放上$-\varepsilon_0$ 的电荷。所以格林函数

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2+(\bar{z}-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(\bar{x}+\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2+(\bar{z}-\zeta)^2}}\right).$$

单位外法向为$\vec{n}=(-1,00)$，所以

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}|_{\xi=0}=-\frac{\partial G}{\partial \xi}|_{\xi=0}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2+(\bar{y}-\eta)^2+(\bar{z}-\zeta)^2}^3}.$$

所以

$$u=\frac{\bar{x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(2\eta,3\zeta)}{\sqrt{\bar{x}^2+(\bar{y}-\eta)^2+(\bar{z}-\zeta)^2}^3}d\eta d\zeta=\frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(2\eta,3\zeta)}{\sqrt{x^2+(\frac{y}{2}-\eta)^2+(\frac{z}{3}-\zeta)^2}^3}d\eta d\zeta.$$

2). 球形域上的格林函数：假设有一个金属球壳，接地，球内$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ 处有ε_0 的电荷，求球内电势分布。我们设$\rho_0=r(O,M_0)$，$\rho_1=R^2/\rho_0$。在

$$M_0'=\frac{\rho_1}{\rho_0}M_0=\frac{R^2}{\rho_0^2}(\xi,\eta,\zeta)$$

处摆放电荷，电量为

$$-\frac{R}{\rho_0}\varepsilon_0.$$

我们可以验证这两电荷产生的电势在球壳上的电势为零。对于任意金属球壳上的点M，三角形OMM_0 与三角形OMM_0' 相似，所以

$$\frac{|MM_0'|}{|MM_0|}=\frac{|MO|}{|OM_0|}=\frac{R}{\rho_0},$$

所以当M 在金属球壳上的时候，M 处的电势为

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|MM_0|}-\frac{R}{|MM_0'|\rho_0}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|MM_0|}-\frac{1}{|MM_0|}\right)=0.$$

因而由这两电荷生成电势分布的叠加就是我们要求的格林函数为

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{R}{\rho_0 r(M,M_0')}\right).$$

如果我们记OM_0 与OM 之间的夹角为ψ，则由余弦定理

$$r(M,M_0)=\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi},$$

和

$$r(M,M_0)=\sqrt{r^2+\rho_1^2-2r\rho_1\cos\psi}=\sqrt{\frac{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}{\rho_0^2}}.$$

所以

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi}}-\frac{R}{\sqrt{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}}\right).$$

特别地，

$$\lim_{\rho_0\to 0}G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2}}-\frac{R}{\sqrt{R^4}}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right).$$

所以

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R}=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{2\rho_0-2r\cos\psi}{\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi}^3}-\frac{R(2\rho_0r^2-2R^2r\cos\psi)}{\sqrt{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}^3}\right)|_{\rho_0=R}.$$

即

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R}=-\frac{1}{4\pi}\frac{R^2-r^2}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\psi}^3}.$$

定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0,r\le R\\ u|_{r=R}=\phi(\theta,\varphi).\end{cases}$$

的解为

$$u=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\phi(\theta,\varphi)\frac{R^2-r^2}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\psi}^3}\sin\theta d\theta d\varphi$$

2.2.1 二维情形

我们求半平面的格林函数，首先求以下基本解问题

$$\Delta_2 u=\delta(x,y).$$

这个在前面我们已经求过了，基本解为

$$u=\frac{\ln r}{2\pi}.$$

这是在0 点摆放了一个$-\varepsilon_0$ 电荷产生的电势。同样的如果我们在零点摆放ε_0 电荷产生的电势为

$$-\frac{\ln r}{2\pi}.$$

当然我们也可以用书上的解法，由物理直观，解应该有对称性，所以$u=u(r)$，r 为$M=(x,y)$ 到零点距离。则有

$$u_{rr}+\frac{u_r}{r}=0,r>0$$

即

$$r^2u_{rr}+ru_r=0.$$

这是欧拉方程，做变量替换$r=e^t$，得到

$$u_{tt}=0.$$

所以

$$u=A+Bt=A+B\ln r,r>0$$

取$A=0$，并对小圆域做积分

$$1=\int_{\mathbb{R}^2}\Delta_2 u dxdy=\int_{C_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}dl=\int_{C_\varepsilon}\frac{B}{r}dl=2\pi B.$$

所以$B=\frac{1}{2\pi}$. 所以

$$u=\frac{\ln r}{2\pi}.$$

现在我们假设在上半平面$y>0$ 的某位置$M_0=(\xi,\eta)$ 处摆放了电荷ε_0. $y=0$ 是金属板接地。我们求格林函数，即求：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=-\delta(M-M_0), y>0\\ u|_{y=0}=0.\end{cases}$$

方法类似，同样在M_0 关于$y=0$ 的对称点$M_0'=(\xi,-\eta)$ 处摆放电荷$-\varepsilon_0$。格林函数即是由这两电荷产生电势的叠加，即

$$G(M;M_0)=-\frac{1}{2\pi}\left(\ln r(M,M_0)-\ln r(M,M_0')\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

三维的定解问题公式对二维依然成立，以下定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, y>0\\ u|_{y=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

的解为

$$u(x,y)=-\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}d\xi.$$

$\vec{n}=(0,-1)$ 为单位外法向，所以

$$\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}|_{\eta=0}=-G_\eta|_{\eta=0}=-\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}.$$

所以

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi.$$

一般定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=-f(x,y), y>0\\ u|_{y=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

的解为

$$u(x,y)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta)Gd\xi d\eta+\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi.$$

例子9. 求定解问题：

$$\begin{cases}u_{xx}+4u_{yy}=0, x<0\\ u|_{x=0}=\varphi(y).\end{cases}$$

解. 设$\bar{x}=x,\bar{y}=\frac{1}{2}y$，则定解问题化为

$$\begin{cases}u_{\bar{x}\bar{x}}+u_{\bar{y}\bar{y}}=0, \bar{x}<0\\ u|_{\bar{x}=0}=\varphi(2\bar{y}).\end{cases}$$

我们求$\bar{x}<0$ 区域的格林函数，设$M_0=(\xi,\eta)$ 为$\xi<0$，其关于$\bar{x}=0$ 的对称点$M_0'=(-\xi,\eta)$，所以格林函数

$$G(M;M_0)=-\frac{1}{2\pi}\left(\ln r(M,M_0)-\ln r(M,M_0')\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(\bar{x}+\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2}{(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2}.$$

单位外法向为$\vec{n}=(1,0)$，所以

$$\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}|_{\xi=0}=\frac{\partial G}{\partial\xi}|_{\xi=0}=\frac{1}{\pi}\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+(\bar{y}-\eta)^2}.$$

所以

$$u=-\frac{\bar{x}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(2\eta)}{\bar{x}^2+(\bar{y}-\eta)^2}d\eta=-\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\varphi(2\eta)}{4x^2+(y-2\eta)^2}d\eta.$$

例子10. 设平面区域$\Omega=\{(x,y):x+y>0\}$，

(1) 求区域Ω 的格林函数；

(2) 求区域Ω 的定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, x+y>0\\ u|_{x+y=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

解. *(1).* 设$M_0=(\xi,\eta)$为Ω 内点，则M_0 关于$x+y=0$ 的对称点为$M_0'=(-\eta,-\xi)$ 所以格林函数为

$$G(M;M_0)=-\frac{1}{2\pi}\left(\ln r(M,M_0)-\ln r(M,M_0')\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

*(2).*单位外法向为$\vec{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$，所以

$$\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}|_{\xi+\eta=0}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(G_\xi+G_\eta)|_{\xi+\eta=0}=-\frac{x+y}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}.$$

所以

$$u(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{2}\pi}\int\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}dl=\frac{x+y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}d\xi.$$

2). 圆域上的格林函数：二维区域为半径为R 的圆内部，求格林函数，在圆内$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ 处有ε_0 的电荷，圆周上电势为零，求圆内电势分布。我们设$\rho_0=r(O,M_0)$，$\rho_1=R^2/\rho_0$。在

$$M_0'=\frac{\rho_1}{\rho_0}M_0=\frac{R^2}{\rho_0^2}(\xi,\eta,\zeta)$$

处摆放电荷，电量为

$$-\varepsilon_0.$$

此时，可以计算得到圆周上的电势虽然不是0，但是常数。实际上对于圆周上的任意点M，三角形OMM_0 与三角形OMM_0' 相似，所以

$$\frac{|MM_0'|}{|MM_0|}=\frac{|MO|}{|OM_0|}=\frac{R}{\rho_0},$$

所以当M 在圆周上的时候，M 处的电势为

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|MM_0'|}{|MM_0|}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho_0}.$$

因而格林函数为

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_0')}{r(M,M_0)}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho_0}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0 r(M,M_0')}{Rr(M,M_0)}.$$

当M 再圆周上的时候，

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{\rho_0 r(M,M_0')}{Rr(M,M_0)}\right)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0 R}{R\rho_0}=0.$$

以下定解问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,0\le r\le R\\ u|_{r=R}=\varphi(\theta).\end{cases}$$

的解为

$$u(x,y)=-\int\varphi\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}dl=-\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)G_{\rho_0}Rd\theta.$$

设ψ 为OM 与OM_0 夹角。由余弦公式：

$$r(M,M_0)=\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi}$$

和

$$r(M,M_0')=\sqrt{r^2+\rho_1^2-2r\rho_1\cos\psi}=\sqrt{\frac{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}{\rho_0^2}}.$$

所以

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0 r(M,M_0')}{Rr(M,M_0)}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}}{R\sqrt{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi}}.$$

所以

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\rho_0r^2-2R^2r\cos\psi}{r^2\rho_0^2+R^4-2R^2r\rho_0\cos\psi}-\frac{2\rho_0-2r\cos\psi}{r^2+\rho_0^2-2r\rho_0\cos\psi}\right)|_{\rho_0=R}.$$

即

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R}=\frac{1}{2\pi R}\frac{r^2-R^2}{r^2+R^2-2rR\cos\psi}.$$

所以

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\theta)(R^2-r^2)}{r^2+R^2-2rR\cos(\theta-\phi)}d\theta,$$

其中ϕ 为M 的幅角。

我们的最后一个例子是书上的，用分离变量法求格林函数。

例子11. 区域为$\Omega:0<x<a,0<y<b$，求格林函数。

解. 只要解如下定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=\delta(\xi,\eta),0<x<a,0<y<b\\ u|_{x=0}=u|_{x=a}=u|_{y=0}=u|_{y=b}=0.\end{cases}$$

2.3 热方程初始问题的基本解

我们说某些现象具有时间和空间的平移不变性，如果当初始状态做一个时间和空间的平移后，相应的物理过程也相应的做一个时间和空间的平移。特别地一个数学物理方程如果它的系数是与时间和空间无关的常数，那么它描述的物理过程就具有时间和空间的平移不变性，当初始状态发生平移后，我们仅需要对相应的解平移（把原来到时间空间换成相对时间和相对空间）即可。

设$\mathcal{L}$ 是x, y, z 的常系数（时间和空间的平移性质）线性微分算子。称

$$II_1: \quad \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \delta(x, y, z). \end{cases}$$

为柯西问题

$$II_2: \quad \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u + f(t, x, y, z), t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

的基本解。如果我们能解出II_1，那么II_2 的解也就知道了。设II_1 的解为

$$U(t, M), M = (x, y, z).$$

则由时间和空间的平移性质，

$$(c): \quad \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u, t > \tau, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(\tau, x, y, z) = \delta(M - M_0). \end{cases}$$

的解为

$$U(t - \tau, M - M_0).$$

则II_2 的解为

$$U(t, M) * \varphi(M) + \int_0^t U(t - \tau, M) * f(\tau, M) dt.$$

为了理解这个式子，我们可以将II_2 用叠加原理分成两部分

$$(a): \quad \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

和

$$(b): \quad \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u + f(t, x, y, z), t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = 0. \end{cases}$$

解的前半部分即是(a) 的解，其实

$$\varphi(M) = \varphi(M) * \delta(M) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(M_0)\delta(M - M_0) dM_0.$$

从而(a) 的解为将上式中狄拉克函数替换为(c) 的解。即为

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(M_0) U(t, M - M_0) dM_0 = U(t, M) * \varphi(M).$$

至于(b)，我们可以用冲量原理，只要求

$$(d):\quad \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u, t > \tau, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = f(\tau, x, y, z). \end{cases}$$

其解为

$$f(\tau, M) * U(t-\tau, M).$$

由冲量原理，(b) 的解为

$$\int_0^t f(\tau, M) * U(t-\tau, M) d\tau.$$

这样我们将(a) 和(b) 合起来就得到了II_2 的解。

上述是一般形式，我们回到热方程的基本解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta_3 u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \delta(x, y, z). \end{cases}$$

需要注意的是，一维二维三维的热方程基本解有相同的形式，因而此处我们仅说明三维的情形。做三维的傅里叶变换

$$\bar{U}(t, \lambda, \mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}^3} u(t, x, y, z) e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)} dx dy dz.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_t = -a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\bar{U}, t > 0, -\infty < \lambda, \mu, \nu < \infty \\ \bar{U}(0, \lambda, \mu, \nu) = 1. \end{cases}$$

这是一个以t 为自变量的常微分方程。解之

$$\bar{U} = C(\lambda, \mu, \nu) e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}.$$

令$t = 0$，得到

$$C(\lambda, \mu, \nu) = 1.$$

所以

$$\bar{U} = e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}.$$

做傅里叶反变换。

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t} e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} d\lambda d\mu d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{-i\lambda x} d\lambda \times \cdots \end{aligned}$$

配平方

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(a\lambda\sqrt{t} + \frac{ix}{a\sqrt{t}})^2 - \frac{x^2}{4a^2 t}} d(a\sqrt{t}\lambda) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

所以基本解为

$$U(t, x, y, z) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t}}.$$

二维热方程的基本解为

$$U(t,x,y)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}}.$$

一维热方程的基本解为

$$U(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

可以看出热扩散时候始终保持正态分布，并且保持曲线或则曲面或者高维曲面下总体积不变，即能量守恒，后者可以通过傅里叶变换很容易得到，实际上

$$\int_{\mathbb{R}^3}U(t,x,y,z)dxdydz=\bar{U}(t,0,0,0).$$

而

$$\bar{U}_t(t,0,0,0)=0\text{即}\bar{U}(t,0,0,0)\text{恒等于常数}.$$

所以能量守恒。

2.4 波动方程初始问题的基本解

设$\mathcal{L}$ 是x,y,z 的常系数（时间和空间的平移性质）线性微分算子。称

$$II_1:\quad\begin{cases}u_{tt}=\mathcal{L}u,t>0,-\infty<x,y,z<\infty\\ u(0,x,y,z)=0,u_t(0,x,y,z)=\delta(x,y,z).\end{cases}$$

为柯西问题

$$II_2:\quad\begin{cases}u_{tt}=\mathcal{L}u+f(t,x,y,z),t>0,-\infty<x,y,z<\infty\\ u(0,x,y,z)=\varphi(x,y,z),u_t(0,x,y,z)=\psi(x,y,z).\end{cases}$$

的基本解。如果我们能解出II_1，那么II_2 的解也就知道了。设II_1 的解为

$$U(t,M).$$

则II_2 的解为

$$u(t,M)=\frac{\partial}{\partial t}[U(t,M)*\varphi(M)]+U(t,M)*\psi(M)+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)d\tau.$$

这个方程的解有三部分，后面两部分都好理解，我们仅需要验证第一部分为定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=\mathcal{L}u,t>0,-\infty<x,y,z<\infty\\ u(0,x,y,z)=\varphi(x,y,z),u_t(0,x,y,z)=0.\end{cases}$$

的解即可。首先验证其满足泛定方程：即

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}[U(t,M)*\varphi(M)]=\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial^2}{\partial t^2}[U(t,M)]*\varphi(M)]=\frac{\partial}{\partial t}[\mathcal{L}[U(t,M)]*\varphi(M)]=\mathcal{L}\frac{\partial}{\partial t}[U(t,M)*\varphi(M)].$$

其中

$$\mathcal{L}[U(t,M)]*\varphi(M)=\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{L}[U(t,M-M_0)]\varphi(M_0)dM_0=\mathcal{L}[\int_{\mathbb{R}^3}U(t,M-M_0)\varphi(M_0)dM_0]=\mathcal{L}[U(t,M)*\varphi(M)].$$

然后验证初始条件：

$$\frac{\partial}{\partial t}[U(t,M)*\varphi(M)]|_{t=0}=U_t(t,M)|_{t=0}*\varphi(M)=\delta(M)*\varphi(M)=\varphi(M);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[U(t,M)*\varphi(M)]|_{t=0}=U_{tt}(t,M)|_{t=0}*\varphi(M)=\mathcal{L}[U(t,M)]|_{t=0}*\varphi(M)=\mathcal{L}[U(t,M)|_{t=0}]*\varphi(M)=0.$$

这样我们就完成了验证。

例子12. 波动方程柯西问题的基本解：

$$II_1: \quad \begin{cases} U_{tt}=a^2\Delta_3 U, t>0, -\infty<x,y,z<\infty \\ U(0,x,y,z)=0, U_t(0,x,y,z)=\delta(x,y,z). \end{cases}$$

解. 做三维的傅里叶变换

$$\bar{U}(t,\lambda,\mu,\nu)=\int_{\mathbb{R}^3}u(t,x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_{tt}=-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\bar{U}, t>0, -\infty<\lambda,\mu,\nu<\infty \\ \bar{U}(0,\lambda,\mu,\nu)=0, \bar{U}_t(0,\lambda,\mu,\nu)=1. \end{cases}$$

为了书写方便，我们设$\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$，并记球极坐标

$$\lambda=\rho\sin\theta\cos\phi, \mu=\rho\sin\theta\sin\phi, \nu=\rho\cos\theta.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_{tt}=-a^2\rho^2\bar{U}, t>0, -\infty<\lambda,\mu,\nu<\infty \\ \bar{U}(0,\lambda,\mu,\nu)=0, \bar{U}_t(0,\lambda,\mu,\nu)=1. \end{cases}$$

这是一个以t 为自变量的常微分方程。解之

$$\bar{U}=C(\lambda,\mu,\nu)\cos(a\rho t)+D(\lambda,\mu,\nu)\sin(a\rho t).$$

代入初始条件得到

$$C(\lambda,\mu,\nu)=0, D(\lambda,\mu,\nu)=\frac{1}{a\rho}.$$

所以

$$\bar{U}=\frac{\sin(a\rho t)}{a\rho}.$$

做傅里叶反变换，

$$U=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\sin(a\rho t)}{a\rho}e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu.$$

通过观察，我们发现解应该是球对称的。也就是说U 的取值只是与时间和M 到零点的距离有关。

即$U=U(t,r)$。所以

$$
\begin{aligned}
U(t,r) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(a\rho t)}{a\rho}e^{-i\rho r\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\theta d\phi d\rho \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_0^\pi \frac{\rho\sin(a\rho t)}{a}e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta d\theta d\rho \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\sin(a\rho t)}{iar}e^{-i\rho r\cos\theta}|_0^\pi d\rho \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{2\sin(\rho r)\sin(a\rho t)}{ar}d\rho \\
&= \frac{1}{8\pi^2 ar}\int_{-\infty}^\infty \cos(\rho r-a\rho t)-\cos(\rho r+a\rho t)d\rho.
\end{aligned}
$$

用公式

$$
\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \cos(\lambda x)d\lambda.
$$

得到

$$
U(t,r)=\frac{1}{4\pi ar}(\delta(r-at)-\delta(r+at)).
$$

因为$r,a,t>0$，所以

$$
U(t,r)=\frac{\delta(r-at)}{4\pi ar}.
$$

这说明波以零点为中心，向四周以匀速a 扩散。这样我们就得到了三维波动方程的基本解。

有了三维波动方程的基本解，我们可以给出三维自由波的解。三维自由波定解问题为

$$
\begin{cases}
u_{tt}=a^2\Delta_3 u, t>0, -\infty<x,y,z<\infty \\
u(0,x,y,z)=\varphi(x,y,z), u_t(0,x,y,z)=\psi(x,y,z).
\end{cases}
$$

其解为

$$
u(t,M)=\frac{\partial}{\partial t}[U(t,M)*\varphi(M)]+U(t,M)*\psi(M).
$$

其中后面项

$$
\begin{aligned}
U(t,M)*\psi(M) &= \int_{\mathbb{R}^3} U(t,M-M_0)\psi(M_0)dM_0 \\
&= \frac{1}{4\pi a}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\delta(r-at)}{r}\psi(M_0)dM_0.
\end{aligned}
$$

这里$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. 由狄拉克函数的取值规则，我们可以立马得到状态函数$u(t,M)$ 只与与M 点距离at 的点的初始状态有关。把$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ 写成以$M=(x,y,z)$ 为中心的球坐标形式，

$$
\begin{cases}
\xi=x+r\sin\theta\cos\varphi \\
\eta=y+r\sin\theta\sin\varphi \\
\zeta=z+r\cos\theta.
\end{cases}
$$

并取$\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)=\psi(\xi,\eta,\zeta)$。得到

$$\begin{aligned}
U(t,M)*\psi(M) &= \frac{1}{4\pi a}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(r-at)}{r}\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr\\
&= \frac{1}{4\pi a}\frac{1}{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{\psi}(at,\theta,\varphi)(at)^2\sin\theta d\varphi d\theta\\
&= \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}}\psi(M_0)dS\\
&= t[\frac{1}{4\pi(at)^2}\int_{S_{at}}\psi(M_0)dS].
\end{aligned}$$

中括号里相当于对球面求平均。记

$$M_{at}(\psi)=\frac{1}{4\pi(at)^2}\int_{S_{at}}\psi(M_0)dS.$$

则可以得到自由波的传播公式：

$$u(t,M)=\frac{\partial}{\partial t}[tM_{at}(\varphi)]+tM_{at}(\psi).$$

通常称之为泊松公式。

值得注意的是波动方程不同维数的基本解并不统一，下面我们给出一维波动方程的基本解，实际上，以前算过。

$$II_1: \quad \begin{cases} U_{tt}=a^2U_{xx}, t>0, -\infty<x,<\infty\\ U(0,x)=0, U_t(0,x)=\delta(x). \end{cases}$$

解. 做傅里叶变换

$$\bar{U}(t,\lambda)=\int_{\mathbb{R}^3}u(t,x)e^{i(\lambda x)}dxdydz.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_{tt}=-a^2(\lambda^2)\bar{U}, t>0, -\infty<\lambda<\infty\\ \bar{U}(0,\lambda)=0, \bar{U}_t(0,\lambda)=1. \end{cases}$$

这是一个以t 为自变量的常微分方程。解之

$$\bar{U}=C(\lambda)\cos(a\lambda t)+D(\lambda)\sin(a\lambda t).$$

代入初始条件得到

$$C(\lambda)=0, D(\lambda)=\frac{1}{a\lambda}.$$

所以

$$\bar{U}=\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}.$$

做傅里叶反变换，

$$U=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i\lambda at}-e^{-i\lambda at}}{2a\lambda i}e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

所以

$$U(t,x)=\begin{cases} \frac{1}{2a}, & x\in[-at,at]\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

所以一维的基本解是简单的。

将一维波动方程的基本解代入一开始的公式，我们可以得到达朗贝尔公式。一维自由波

$$II_1: \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, -\infty < x, < \infty \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases}$$

的解为

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}[u(t,x) * \varphi(x)] + u(t,x) * \psi(x).$$

通过计算：

$$u(t,x) * \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t,\xi)\psi(x-\xi)d\xi = \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(x-\xi)d\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

这是达朗贝尔公式的后半部分。

$$\frac{\partial}{\partial t}[u(t,x) * \varphi(x)] = \frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi] = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}.$$

这是达朗贝尔公式的前半部分。