week8
P74：4
P81：1
3.3°，3.4°

助教 彭怡腾 发表于 04-14 12:19 26人已确认

P74 T4

4. 设 x 不在 p 中自由出现. 求证:

1° $\vdash (p \to \forall x q) \to \forall x (p \to q)$.

2° $\vdash (p \to \exists x q) \to \exists x (p \to q)$.

- 4.1

  (1) $p \to \forall x q$ 假定

  (2) $\forall x q \to q$ $K4$

  (3) $p \to q$ $(1)(2)HS$

  (4) $\forall x(p \to q)$ $(3)Gen$

  考试不要遗漏GEN前面的（3）

- 4.2

  由演绎定理，只需证：$\{p \to \exists x q\} \vdash \exists x (p \to q)$

  由归谬律，只需证：$\{p \to \exists x q, \forall x \neg (p \to q)\} \vdash \forall x \neg q$ <1>

  且 $\{p \to \exists x q, \forall x \neg (p \to q)\} \vdash \exists x q$ <2>

(1) $\forall x\ \neg(p\to q)$ 假定

(2) $\forall x\ \neg(p\to q)\to\neg(p\to q)$ K4

(3) $\neg(p\to q)$ (1),(2),MP

(4) $\neg(p\to q)\to p$ 永真式

(5) p (3),(4),MP

(6) $p\to\exists x q$ 假定

(7) $\exists x q$ (3),(6),MP

式<2>得证

(8) $\neg(p\to q)\to\neg q$ 永真式

(9) $\neg q$ (3),(8),MP

(10) $\forall x\ \neg q$ (9) Gen.

式<1>得证

P81 1

1. 设 x 不在 q 中自由出现. 求证

$1°\ \vdash (\exists x p\to q)\to\forall x(p\to q).$

$2°\ \vdash \exists x(p\to q)\to(\forall x p\to q).$

- 第一问

命题 2 ($\exists_1$ 规则) 设项 t 对 $p(x)$ 中的 x 自由，则有

$$\vdash\ p(t)\to\exists x p(x).$$

先用一次演绎定理 等价证明$\{\exists xp\to q\}\vdash\{\forall x(p\to q)\}$

(1) $p \to \exists xp$ $\quad\exists_1$规则

(2) $\exists xp \to q$ $\quad$假定

(3) $p \to q \quad (1)(2)HS$

(4) $\forall x(p \to q) \quad (3)Gen$

- 第二问

  先用一次演绎定理 等价证明$\{\exists x(p \to q), \forall xp\} \vdash \{q\}$

  反证律 只需要证明 $\{\exists x(p \to q), \forall xp, \neg q\} \vdash \{\neg\forall x\neg(p \to q)\}$ 而且 $\{\exists x(p \to q), \forall xp, \neg q\} \vdash \{\forall x\neg(p \to q)\}$

  (1) $\forall xp$ $\quad$假定

  (2) $\forall xp \to p \quad K4$

  (3) $p \quad (1)(2)MP$

  (4) $\neg q$ $\quad$新假定

  (5) $p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$ $\quad$永真式

  (6) $\neg q \to \neg(p \to q) \quad (4)(5)MP$

  (7) $\neg(p \to q) \quad (4)(6)MP$

  (8) $\forall x\neg(p \to q) \quad (7)GEN$

  (9)$\neg\forall x\neg(p \to q)$假定

  故得证

P81 3.3 3.4

3. 找出与所给公式等价的前束范式.

$1°\ \forall x_1 R_1^1(x_1) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2).$

$2°\ \forall x_1 (R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)).$

$3°\ \forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2 R_1^1(x_2) \to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3)).$

$4°\ \exists x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg\exists x_3 R_1^2(x_1, x_3)).$

- 以第三问为例

$$3°\ \forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2 R_1^1(x_2) \to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3)).$$

根据化前束范式定理中的可证等价关系，直接进行公式变换

$q_1 = \forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3))),$ $\quad$ **改名**

$q_2 = \forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \exists x_3 (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))),$ $\quad$ **反复进行量词外移**

$q_3 = \forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \exists x_3 \forall x_4 (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3)),$

$q_4 = \exists x_3 (\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \forall x_4 (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))),$

$q_5 = \exists x_3 \forall x_4 (\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))),$

$q_6 = \exists x_3 \forall x_4 \exists x_1 ((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))).$

注意

- 前束范式不唯一;
- 约束变元代表所有个体;
- 一个命题中约束出现的变元和自由出现的变元是不同的变元.

- 第四问

类似

$$q_1=\exists x_1\ R_1^2(x_1, x_2)\text{->}(R_1^1(x_1)\text{->-}\ \exists x_3\ R_1^2(x_1, x_3))$$

$q_2=\exists x_1\ R_1^2(x_1, x_2)\text{->}(R_1^1(x_1)\text{->}\forall x_3\ \text{-}R_1^2(x_1, x_3))$ （由命题 2.3）

$q_3=\exists x_1\ R_1^2(x_1, x_2)\text{->}\forall x_3\ (R_1^1(x_1)\text{->-}R_1^2(x_1,nm\ x_3))$ （由命题 2.2）

$q_4=\forall x_3\ (\exists x_1\ R_1^2(x_1, x_2)\text{->}\ (R_1^1(x_1)\text{->-}R_1^2(x_1, x_3)))$ （由命题 2.2）

$q_5=\forall x_3\ (\exists x_4\ R_1^2(x_4, x_2)\text{->}\ (R_1^1(x_1)\text{->-}R_1^2(x_1, x_3)))$ （由命题 2.1）

$q_6=\forall x_3\forall x_4\ (R_1^2(x_4, x_2)\text{->}\ (R_1^1(x_1)\text{->-}R_1^2(x_1, x_3)))$ （由命题 2.2）

TIP

gen要标号符号