第六次作业参考答案

一、3.31 作业参考答案

练习 11

2. 分别找出只含有运算$\neg$和$\wedge$的公式，使之与以下各公式等值：

3° $(\boldsymbol{x_1} \leftrightarrow \neg \boldsymbol{x_2}) \leftrightarrow \boldsymbol{x_3}$

解：以下各公式与原公式等值：

$((x_1 \to \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \to x_1)) \leftrightarrow x_3$ （消去$\leftrightarrow$）

$(\neg(x_1 \wedge \neg\neg x_2) \wedge \neg(\neg x_2 \wedge \neg x_1)) \leftrightarrow x_3$ （依据$u \to v = \neg(u \wedge \neg v)$）

$(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)) \leftrightarrow x_3$ （依据$\neg\neg p = p$）

$\big((\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)) \to x_3\big) \wedge \big(x_3 \to (\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2))\big)$（消去$\leftrightarrow$）

$\neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \wedge \neg x_3) \wedge \neg\big(x_3 \wedge \neg(\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2))\big)$

（依据$u \to v = \neg(u \wedge \neg v)$）

3. 分别找出只含有运算$\neg$和$\vee$的公式，使之与以下各公式等值：

2° $(\neg \boldsymbol{x_1} \wedge \neg \boldsymbol{x_2}) \to (\neg \boldsymbol{x_3} \wedge \boldsymbol{x_4})$

解：以下各公式与原公式等值：

$(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \to (\neg x_3 \wedge \neg\neg x_4)$ （依据$p = \neg\neg p$）

$\neg(x_1 \vee x_2) \to \neg(x_3 \vee \neg x_4)$ （依据$\neg p \wedge \neg q = \neg(p \vee q)$）

$\neg\neg(x_1 \vee x_2) \vee \neg(x_3 \vee \neg x_4)$ （依据$u \to v = \neg u \vee v$）

$x_1 \vee x_2 \vee \neg(x_3 \vee \neg x_4)$ （依据$\neg\neg p = p$）

练习 12

把以下论证形式化，并判断是否合理。

2. A, B, C, D为四个事件。已知：A和B不同时发生；若A发生，则C不发生而D发生；若D发生，则B不发生。结论：B和C不同时发生。

解：用x_1, x_2, x_3, x_4分别表示事件A, B, C, D发生，于是题中的论证可形式化为

$$\{\neg(x_1 \wedge x_2), x_1 \to (\neg x_3 \wedge x_4), x_4 \to \neg x_2\} \vdash \neg(x_2 \wedge x_3)$$

解方程组：

(1) $\neg(v_1 \wedge v_2) = 1$；

(2) $v_1 \to (\neg v_3 \wedge v_4) = 1$；

(3) $v_4 \to \neg v_2 = 1$；

(4) $\neg(v_2 \wedge v_3) = 0$。

由(4)式可得

(5) $v_2=1$，且

(6) $v_3=1$。

由(1)式与(5)式得

(7) $v_1=0$。

由(3)式与(5)式得

(8) $v_4=0$。

将(6)、(7)、(8)式代入(2)式的左边，得

$$v_1 \to (\neg v_3 \wedge v_4)=0 \to (\neg 1 \wedge 0)=1$$

所得结果说明：(0, 1, 1, 0)是(1)~(4)的解。它是前三个公式（“前提”）的公共成真指派，但却是$\neg(x_2 \wedge x_3)$（“结论”）的成假指派，所以题中的论断并不合理。

3. 例 3 中如果办案人员作出的判断是:“a, b, c 三人中至少有一人未作案”，判断是否正确？

例 3 一案案情涉及 a,b,c,d 四人. 根据已有线索，知

1° 若 a,b 均未作案，则 c,d 也均未作案；

2° 若 c,d 均未作案，则 a,b 也均未作案；

3° 若 a 与 b 同时作案，则 c 与 d 有一人且只有一人作案；

4° 若 b 与 c 同时作案，则 a 与 d 同时作案或同未作案.

解 用 x_1,x_2,x_3,x_4 分别表示 a,b,c,d 作案. 办案人员的推理可形式化为

$\{(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \leftrightarrow (\neg x_3 \wedge \neg x_4),\ (x_1 \wedge x_2) \to ((x_3 \vee x_4) \wedge \neg(x_3 \wedge x_4)),$
$(x_2 \wedge x_3) \to ((x_1 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_4))\} \vdash \neg(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$

解方程组

(1) $(\neg v_1 \wedge \neg v_2) \leftrightarrow (\neg v_3 \wedge \neg v_4)=1$;

(2) $(v_1 \wedge v_2) \to ((v_3 \vee v_4) \wedge \neg(v_3 \wedge v_4))=1$;

(3) $(v_2 \wedge v_3) \to ((v_1 \wedge v_4) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_4))=1$;

(4) $\neg(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)=0$。

由(4)式分别可得

(5) $v_1=1$，

(6) $v_2=1$，

(7) $v_3=1$。

以上三式代入(2)式可得

(8) $v_4=0$。

以上四式代入(3)式的左边，得

$$(v_2 \wedge v_3) \rightarrow ((v_1 \wedge v_4) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_4)) = (1 \wedge 1) \rightarrow ((1 \wedge 0) \vee (\neg 1 \wedge \neg 0)) = 0$$

该式与(3)式矛盾，所以方程组(1)~(4)无解。这说明题中论断是正确的。

二、常见问题总结

1. 练习 11 题目的多种解法

本题除了前面给出的参考方法外，也可以沿袭上次作业的策略，先找出公式的等值主合取范式或主析取范式，再利用德摩根律将其变换为符合题意的形式。

几个可以关注的点：

1）两个¬的连续出现，可以利用$\neg\neg p = p$将其化简；

2）等值转蕴涵最好一步一步进行，一次性转两个很容易出现遗漏。

2. 练习 12 出现问题情况较多，这类题目几乎考试必考，请务必按规范书写！

（1）很多同学没有将“论证形式化”

“论证形式化”就是将题目写成形如$\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{p}$的格式，$\Gamma$是由各前提条件构成的公式集，$p$就是结论对应的命题。有些同学没有形式化，直接列真值方程，原则上漏了一个问。

（2）形式化中出现的问题

主要是前一道题目，**“A和B不同时发生”**应该是$\neg(\boldsymbol{x_1} \wedge \boldsymbol{x_2})$，而不是$\neg(x_1 \leftrightarrow x_2)$。另外，也许有些同学发现了$\neg(x_1 \wedge x_2)$、$x_1 \rightarrow \neg x_2$、$x_2 \rightarrow \neg x_1$这三个公式的成真指派是一样的，但这并不代表它们的语义是一模一样的，若仔细考虑会发现$\neg(x_1 \wedge x_2)$和$(x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (x_2 \rightarrow \neg x_1)$语义上才算是一回事。所以，再遇到“$A$和$B$不同时发生”类似的表述时，还是要以$\neg(x_1 \wedge x_2)$为准。

（3）**需要先设事件为命题变元**，一般用 x_i，在列真值方程时对应表示为 v_i。可以稍微注意一下，并没有视为扣分点。

（4）**解方程当中的问题**

a. 怎样算方程有解？（我们一起回顾一下初中知识）

一定是这组解能够使方程组当中的每一个式子都成立。以前一个题为例，如果你根据(1)(3)(4)三个式子得到了一个解(0, 1, 1, 0)，那么还要代回验证满足(2)式成立，才算解完这个方程。（这里本次没有扣分，但还是提示一下大家）

b. 得出矛盾的过程问题较大

先说明本次作业最后一题方程组里的矛盾是怎么来的：我们得到$v_1 = v_2 = v_3 = 1$之后，代回(2)式与(3)式得到v_4的结果不同，这是本题**唯一推出矛盾的方式**。

一些错误的推出矛盾的方式：

1）$v_1 = v_2 = v_3 = 1$ 代回(1)式直接得出v_4无解或有唯一解——事实上，v_4取 0 或 1 都能使原式成立；

2）$v_1 = v_2 = v_3 = 1$ 代回(2)式得到一个形如$(v_4 \wedge \neg v_4) = 1$ 的公式然后说无解——事实上，出现这种错误，主要是把$(1 \vee v_4)$错误地化简为v_4，而实际上 $1 \vee v_4 = 1$。

By：毛星茏