练习17

2. 设$\varphi, \psi \in \phi_M$. 求证：若对项t中的任一变元x都有$\varphi(x) = \psi(x)$，则$\varphi(t) = \psi(t)$.

证明：以t中出现的个体常元，个体变元和运算为基础构建项集T，对t在T中的层次数k进行归纳：

- 当$k = 0$时，$t = c_i$或$t = x_i$，因为$\varphi(c_i) = \psi(c_i) = \overline{c_i}$和$\varphi(x_i) = \psi(x_i)$，所以有$\varphi(t) = \psi(t)$;
- 当$k > 0$时，设$t = f_i^n(t_1, t_2, ..., t_n)$，其中$t_1, t_2, ...t_n$是层次较低的项，由归纳假设，有：
  $\varphi(t_1) = \psi(t_1), ..., \varphi(t_n) = \psi(t_n)$
  因此：
  $\varphi(t)$
  $= \psi(f_i^n(t_1, t_2, ...t_n)) = \overline{f_i^n}(\varphi(t_1), ...\varphi(t_n))$
  $= \overline{f_i^n}(\psi(t_1), ...\psi(t_n)) = \psi(f_i^n(t_1, t_2, ...t_n))$
  $= \psi(t)$

由项集T的分层性和上述归纳，得证。

3.设 $t \in T, \varphi, \varphi\prime \in \Phi w$，$\varphi\prime$ 是 φ 的x 变通，且 $\varphi\prime(x) = \varphi(t)$，用项 t 代换 项 $u(x)$ 中 x 所得的项记为 $u(t)$。求证: $\varphi\prime(u(x)) = \varphi(u(t))$.

证明:对 $u(x)$ 在 T 中的层数 k 归纳:
$k = 0$ 时，考虑三种情况:

- $u(x) = c_i, u(t) = c_i, \varphi\prime(u(x)) = \varphi\prime(c_i) = \varphi(c_i) = \varphi(u(t))$
- $u(x) = y$且$u(x) \neq x$，则$u(t) = y$.由于$\varphi\prime$ 是φ的变通,

则$\varphi\prime(u(x)) = \varphi\prime(y) = \varphi(y) = \varphi(u(t))$

- $u(x) = x, u(t) = t$, 即 $\varphi\prime(x) = \varphi(t), \varphi\prime(u(x)) = \varphi\prime(x) = \varphi(t) = \varphi(u(t))$
  下面考虑 $k > 0$ 的情况:
  记 $u(x) = f_i^n(t_1(x), ..., t_n(x))$, 其中 $t_1(x), t_2(x), ..., t_n(x)$ 为低层次的项， 故:
  $\varphi\prime(u(x)) = \varphi\prime(f_i^n(t_1(x), ..., t_n(x)))$
  $= f_i^n(\varphi\prime(t_1(x)), ..., \varphi\prime(t_n(x)))$
  $= f_i^n(\varphi(t_1(t)), ..., \varphi(t_n(t))) = \varphi(f_i^n(t_1(t), ..., t_n(t)))$
  $= \varphi(u(t))$
  综上所述，对含任意层数项的 $u(x)$，有 $\varphi\prime(u(x)) = \varphi(u(t))$，得证。

练习18

1.设 K 中的 $C=\{c_1\}, F=\{f_1^1, f_1^2, f_2^2\}, R=\{R_1^2\}$, 它的一个解释域是 $N=0,1,2,...,\overline{c_1}=0$ ，$\overline{f_1^1}$ 是后继函数,$\overline{f_1^2}$ 是+，$\overline{f_2^2}$ 是 ×**,**$\overline{R_1^2}$ 是 =. 试对以 下公式分别找出 $\varphi,\psi\in\Phi_N$ ，使得 $|p|(\varphi)=1, |p|(\psi)=0$，其中 p 是:

$3^\circ \neg R_1^2(f_2^2(x_1,x_2), f_2^2(x_2,x_3))$.

使上式为真的指派满足:$x_1\times x_2\neq x_2\times x_3$ 故取项解释 φ 满足:$\varphi(x_1)=1,\varphi(x_2)=1,\varphi(x_3)=2$
取项解释 ψ 满足:$\psi(x_1)=1,\psi(x_2)=2,\psi(x_3)=1$

(注:答案不唯一)

$4^\circ \forall x_1\ R_1^2(f_2^2(x_1,x_2),x_3)$. any x_1,x_1 · x_2=x_3

对于φ,使得 φ满足$\varphi(\cancel{x_1})=\varphi(x_2)=0$即可,

对于ψ, 使得ψ满足$\psi(x_2),\psi(x_3)$不同时为0即可。

（举出特例即可，答案不唯一）

$5^\circ \forall x_1\ R_1^2(f_2^2(x_1,c_1),x_1)\rightarrow R_1^2(x_1,x_2)$.

由于公式的真值只与自由变元的指派相关，故对上式中的变元更名:

$\forall x_3\ R_1^2(f_2^2(x_3,c_1),x_3)\rightarrow R_1^2(x_1,x_2)$.

使上式为假的指派满足:对$\forall x_3, x_3=0$且$x_1\neq x_2$
因此，不存在对 x_1,x_2 的指派使上式成立
故对任意的 φ, 恒有 $|p|(\varphi)=1$; 不存在变通 ψ, 使得 $|p|(\psi)=0$

2. 已知 **K** 中 $C=\{c_1\}, F=\{f_1^2\}, R=\{R_1^2\}$, 还已知 **K** 的解释域 Z(整数集**),$\overline{c_1}=0$**,**$\overline{f_1^2}$ **是减法**,
$\overline{R_1^2}$ **是 ' < '.**** 试对以下公式分别找出 $\varphi,\psi\in\Phi_N$，使得 $|p|(\varphi)=1, |p|(\psi)=0$，其中 **p** 是:

$3^\circ \neg R_1^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1,x_2)))$.

对于φ，取φ使得$\varphi(x_1)\geq\varphi(x_2)$即可；

对于ψ，取ψ使得$\psi(x_1)<\psi(x_2)$即可。

（给出特例即可，答案不唯一）

$4^\circ \forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_3)$.

$\forall x_1\ (\overline{x_1}-\overline{x_2})<\overline{x_3}$为假,

即公式在解释域中恒假，所以不存在$\varphi\in\phi_z$使得$|p|(\varphi)=1$;

对所有的ψ，都有$|p|(\psi)=0$。

$5^\circ \forall x_1 R_1^2(f_1^2(x_1,c_1),x_1) \rightarrow R_1^2(x_1,x_2)$

由于公式的真值只与自由变元的指派有关，故对上式中的变元更名：

$\forall x_3\ R_1^2(f_1^2(x_3,c_1),x_3) \rightarrow R_1^2(x_1,x_2)$

使上式为假的指派满足:对$\forall x_3, x_3-0<x_3$ 且$x_1 \geq x_2$

而不存在对 x_1,x_2 的指派使上式成立

故对任意的 ϕ, 恒有 $|p|(\varphi)=1$; 不存在变通 ψ, 使得 $|p|(\psi)=0$

练习19

2. 设K中$C=\{c_1\},F=\{f_1^2\},R=\{R_1^2\}$，还已知$K$的解释域$Z$（整数集），$\overline{c_1}=0$，$\overline{f_1^2}$是减法，$\overline{R_1^2}$是$'<'$. 求$|p|_z$，其中$p$为：

$3^\circ.\forall x_1\forall x_2\forall x_3(R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow R_1^2(f_1^2(x_1,x_3),f_1^2(x_2,x_3)))$.

因为对任意的$\varphi\in\phi_z,\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$和$\varphi(x_1)-\varphi(x_3)<\varphi(x_2)-\varphi(x_3)$同为真或同为假,

就有$|R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_1^2(x_2,x_3))|(\varphi)=1$,

得到$|R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow R_1^2(f_1^2(x_1,x_3),f_1^2(x_2,x_3))|_z=1$,

所以$|p|_z=1$.

$4^\circ.\forall x_1\exists x_2 R_1^2(x_1,f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_2))$.

因为对任意的$\varphi\in\phi_z$，总是存在φ的x_2变通$\varphi':\varphi'(x_2)<0$使得：

$\varphi'(x_1)<(\varphi'(x_1)-\varphi'(x_2))-\varphi'(x_2)=\varphi'(x_1)-2\varphi'(x_2)$

即$|\exists x_2 R_1^2(x_1,f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_2)|(\varphi)=1$,

得到$|\exists x_2 R_1^2(x_1,f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_2))|_z=1$,

所以$|p|_z=1$.