第二次作业参考答案

一、3.3 作业参考答案

练习 3

2. 写出以下公式在 L 中的“证明”（即证明它们是 L 的定理）.

$\mathbf{1^\circ}$ $(\boldsymbol{x_1 \to x_2}) \to ((\neg \boldsymbol{x_1} \to \neg \boldsymbol{x_2}) \to (\boldsymbol{x_2 \to x_1}))$

证：

(1) $(\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)$ (L3)

(2) $((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)) \to ((x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1)))$ (L1)

(3) $(x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to \neg x_2) \to (x_2 \to x_1))$ (1)，(2)，MP

$\mathbf{2^\circ}$ $((\boldsymbol{x_1} \to (\boldsymbol{x_2 \to x_3})) \to (\boldsymbol{x_1 \to x_2})) \to ((\boldsymbol{x_1} \to (\boldsymbol{x_2 \to x_3})) \to (\boldsymbol{x_1 \to x_3}))$

证：

(1) $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))$ (L2)

(2) $((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))) \to$

$\big(((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))\big)$ (L2)

(3) $((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_2)) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))$ (1)，(2)，MP

3. 证明下面的结论.

$\mathbf{2^\circ}$ $\{\neg\neg \boldsymbol{p}\} \vdash \boldsymbol{p}$

证：

(1) $\neg\neg p$ 假定

(2) $\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ (L1)

(3) $\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p$ (1)，(2)，MP

(4) $(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ (L3)

(5) $\neg p \to \neg\neg\neg p$ (3)，(4)，MP

(6) $(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ (L3)

(7) $\neg\neg p \to p$ (5)，(6)，MP

(8) p (1)，(7)，MP

$\mathbf{3^\circ}$ $\{\boldsymbol{p \to q}, \neg(\boldsymbol{q \to r}) \to \neg \boldsymbol{p}\} \vdash \boldsymbol{p \to r}$

证：

(1) $\neg(q \to r) \to \neg p$ 假定

(2) $(\neg(q \to r) \to \neg p) \to (p \to (q \to r))$ (L3)

(3) $p \to (q \to r)$ (1)，(2)，MP

(4) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)

(5) $(p \to q) \to (p \to r)$ (3)，(4)，MP

(6) $p \to q$ 假定

(7) $p \to r$ (5)，(6)，MP

4° $\{p \to (q \to r)\} \vdash q \to (p \to r)$

证：

(1) $p \to (q \to r)$ 假定

(2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)

(3) $(p \to q) \to (p \to r)$ (1)，(2)，MP

(4) $((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ (L1)

(5) $q \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (3)，(4)，MP

(6) $(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r)))$ (L2)

(7) $(q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$ (5)，(6)，MP

(8) $q \to (p \to q)$ (L1)

(9) $q \to (p \to r)$ (7)，(8)，MP

练习 4

2. 利用演绎定理证明以下公式是 L 的定理.

2° $(q \to p) \to (\neg p \to \neg q)$.（换位律）

注：由于在练习 3 的 3.2° 这道作业题中已完成对$\{\neg\neg p\} \vdash p$（双重否定律）的证明，本题在简化证明里直接引用双重否定律，但并不默认可同时直接引用“第二双重否定律”。

证：根据演绎定理，只用证$\{q \to p\} \vdash \neg p \to \neg q$，下面是所需要的一个证明。

(1) $\neg\neg\neg p \to \neg p$ 双重否定律

(2) $(\neg\neg\neg p \to \neg p) \to (p \to \neg\neg p)$ (L3)

(3) $p \to \neg\neg p$ (1)，(2)，MP

(4) $q \to p$ 假定

(5) $q \to \neg\neg p$ (3)，(4)，HS

(6) $\neg\neg q \to q$ 双重否定律

(7) $\neg\neg q \to \neg\neg p$ (5)，(6)，HS

(8) $(\neg\neg q \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg q)$ (L3)

(9) $\neg p \to \neg q$ (7)，(8)，MP

3° $((p \to q) \to p) \to p$.（Peirce 律）

证：根据演绎定理，只用证$\{(p \to q) \to p\} \vdash p$，下面是所需要的一个证明。

(1) $(p \to q) \to p$ 假定

(2) $\neg p \to (p \to q)$ 否定前件律

(3) $\neg p \to p$ (1)，(2)，HS

(4) $(\neg p \to p) \to p$ 否定肯定律

(5) p (3)，(4)，MP

练习 5

1. 证明.

2° $\vdash (\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$.

证：根据演绎定理，只用证$\{\neg p \to q\} \vdash \neg q \to p$；再根据演绎定理，只用证$\{\neg p \to q, \neg q\} \vdash p$。为用反证律，我们把$\neg p$作为新假定。以下公式从$\{\neg p \to q, \neg q, \neg p\}$都是可证的。

(1) $\neg p$ 新假定

(2) $\neg p \to q$ 假定

(3) q (1)，(2)，MP

(4) $\neg q$ 假定

由(3)，(4)用**反证律**即得$\{\neg p \to q, \neg q\} \vdash p$。

3° $\vdash \neg(p \to q) \to \neg q$.

证：根据演绎定理，只用证$\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$。为用归谬律，我们把$q$作为新假定。以下公式从$\{\neg(p \to q), q\}$都是可证的。

(1) $q \to (p \to q)$ (L1)

(2) q 新假定

(3) $p \to q$ (1)，(2)，MP

(4) $\neg(p \to q)$ 假定

由(3)，(4)用**归谬律**即得$\{\neg(p \to q)\} \vdash \neg q$。

注：以上题目仅仅各给出了一种贴近于当节所学内容的解答方法，正确答案并不唯一，鼓励同学们尝试用不同方法解决问题，以巩固知识、加深理解。

二、常见问题总结

1. 关于直接证明与简化证明

对于命题演算系统，其“直接证明”的过程是通过列出一系列由**三条公理**(L1)、(L2)、(L3)和“**假言推理规则**（MP）”得到的公式，不能直接引用“同一律”、“双重否定律”、“第二双重否定律”、“否定肯定律”等后续证明出来的“定理”。其中，(L3)的形式最容易弄混，须知练习 4-2-2°、练习 5-1-2°的公式都不是公理(L3)。

当题目没有明确要求“直接证明”时，一般指的是“简化证明”，此时允许使用由各种定理产生的公式和演绎定理、假设三段论、反证律、归谬律等方法，但注意一定要规范形式证明的**序列化书写格式**（每行公式前写序号），并清楚准确写出各公式的**依据**。

2. 关于本次作业各节习题的考点

练习 3：**直接证明**；练习 4：**演绎定理**；练习 5：**反证律&归谬律**。很多同学在解决练习 5 的问题时没有用到反证律/归谬律，这当然是可以的，不过建议尝试一下这种方法，以便未来给自己的武器库里增加一种进攻手段。此外，注意“反证律”和“归谬律”二者之间的区分，运用时注明依据的是哪一个，最好不要混淆。

3. 跳步和漏步的现象略为严重

(1) 多次使用 MP 和 HS 不要跳步，一定是两两完成的，且不要将 MP 与 HS 混淆；

(2) 在使用(L2)和(L3)时，很多时候为了与前面已经证明出来的公式继续进行 MP，很多同学跳过了(L2)和(L3)这一步，直接写了它与前面公式 MP 的结果，这样必

然是不可以的；

(3) 在练习 3-3-2°中，一些同学忘记要证的是$\{\neg\neg \boldsymbol{p}\} \vdash \boldsymbol{p}$而不是$\vdash \neg\neg \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}$，证到$\neg\neg \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}$戛然而止，也没有说明依据“演绎定理”，$\vdash \neg\neg \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}$可推知$\{\neg\neg \boldsymbol{p}\} \vdash \boldsymbol{p}$，是不完整的。

4. 假定与新假定

参见教材 P20：如果公式p从公式集Γ可证，那么我们写$\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{p}$，这时$\Gamma$中的公式叫做“**假定**”。在运用演绎定理时，或者题设给定了原始的公式集Γ时，在证明过程中写出来自于Γ的公式时，它的依据就是“假定”。

“**新假定**”特指在使用反证律/归谬律时，将要证的结论“取非”或“去非”，加入公式集的新公式。

5. 其他问题

(1) 练习 3-2-2°，部分同学将公式的部分用字母替代，考试时如果有时间最好写全；

(2) 有些同学出现漏写蕴涵词后件部分的括号或者括号前后不配对，注意细节；

(3) 区分“双重否定律”和“第二双重否定律”；

(4) 重申(L3)公理形式的唯一性，不要与练习 4-2-2°、练习 5-1-2°的公式混淆，这两题有些同学因对(L3)的定义不明确，从而出现“用结论证明结论”的伪证。

By：毛星茏