第二次作业反馈

彭怡腾

一、参考解答

练习 6

2. 证明命题 2-$2°, 3°, 4°$

.

命题 2-$2°$ $\vdash (p \wedge q) \to q.$

命题 2-$3°$ $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p).$

命题 2-$4°$ $\vdash p \to (p \wedge p).$

解

命题 2-$2°$

证明. 要证 $\vdash (p \wedge q) \to q$，即要证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to q$. 由演绎定理，只用证 $\{\neg(p \to \neg q)\} \vdash q$. 把 $\neg q$ 作为新假定，可得

(1)	$\neg q$	新假定
(2)	$\neg q \to (p \to \neg q)$	(L1)
(3)	$p \to \neg q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg(p \to \neg q)$	假定

由(3)，(4)用反证律即得 $\{\neg(p \to \neg q)\} \vdash q$. □

命题 2-3°

证明. 要证 $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$，即要证 $\vdash \neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p)$. 下面是所要的一个证明：
假定 $q \to \neg p$、p 和 q， 立即可得

(1) $\{q \to \neg p, p, q\} \vdash p$

(2) $\{q \to \neg p, p, q\} \vdash \neg p$

由(1)，(2)用归谬律即得 $\{q \to \neg p, p\} \vdash \neg q$.

(3) $(q \to \neg p) \to (p \to \neg q)$ 由演绎定理

(4) $((q \to \neg p) \to (p \to \neg q)) \to (\neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p))$ 换位律

(5) $\neg(p \to \neg q) \to \neg(q \to \neg p)$ (3), (4), MP

□

命题 2-4°

证明. 要证 $\vdash p \to (p \wedge p)$，即要证 $\vdash p \to \neg(p \to \neg p)$. 由演绎定理，只用证 $\{p\} \vdash \neg(p \to \neg p)$. 把 $p \to \neg p$ 作为新假定，立即可得

(1) $\{p, p \to \neg p\} \vdash p$

(2) $\{p, p \to \neg p\} \vdash \neg p$

由(1)，(2)用归谬律即得 $\{p\} \vdash \neg(p \to \neg p)$. □

4. 证明命题4-1°

$$\vdash \neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$$

即证 $\neg\neg(p\to\neg q)\leftrightarrow(\neg\neg p\to\neg q)$

先证 $\neg\neg(p\to\neg q)\to(\neg\neg p\to\neg q)$

由演绎定理，只需证 $\{\neg\neg(p\to\neg q)\}\vdash\neg\neg p\to\neg q$

(1) $\neg\neg(p\to\neg q)$ 假定

(2) $\neg\neg(p\to\neg q)\to(p\to\neg q)$ 双重否定律

(3) $p\to\neg q$ (1)(2) MP

(4) $\neg\neg p\to p$ 双重否定律

(5) $\neg\neg p\to\neg q$ (3)(4) HS

(6) $\neg\neg(p\to\neg q)\to(\neg\neg p\to\neg q)$ 由演绎定理.

再证 $(\neg\neg p\to\neg q)\to\neg\neg(p\to\neg q)$

由演绎定理，只需证 $\{\neg\neg p\to\neg q\}\vdash\neg\neg(p\to\neg q)$

(7) $\neg\neg p\to\neg q$ 假定

(8) $p\to\neg\neg p$ 第二双重否定律

(9) $p\to\neg q$ (7)(8) HS

(10) $(p\to\neg q)\to\neg\neg(p\to\neg q)$ 第二双重否定律

(11) $\neg\neg(p\to\neg q)$ (9)(10) MP

(12) $(\neg\neg p\to\neg q)\to\neg\neg(p\to\neg q)$ 由演绎定理

(13) $(\neg\neg(p\to\neg q)\to(\neg\neg p\to\neg q))$
$\to(((\neg\neg p\to\neg q)\to\neg\neg(p\to\neg q))\to(\neg\neg(p\to\neg q)\leftrightarrow(\neg\neg p\to\neg q)))$
(命题3-5°)

(14) $((\neg\neg p\to\neg q)\to\neg\neg(p\to\neg q))\to(\neg\neg(p\to\neg q)\leftrightarrow(\neg\neg p\to\neg q))$
(6)(13) MP

(15) $\neg\neg(p\to\neg q)\leftrightarrow(\neg\neg p\to\neg q)$ (12)(14) MP

二、一些问题

1、部分同学将p和¬¬p随意交换，但是要记得，L(X)中的公式是具有分层性的，因此直接的交换并不妥。

我下面给出一种将p换成¬¬p可能的思路，大家也可以采取其他更好的方法。

首先，利用P72命题6和两个双否律可以得到p↔¬¬p，然后利用P74的定理1，可以得到原式和替换后式子的等值关系，再利用一次P72命题6可以得到一个蕴含式，最后使用一次MP即可完成替换。

2、穿透的使用双否律和HS，穿透使用双否律和上面的问题1属于一个问题，区别只是有的同学在交换p和¬¬p证明依据写了个双否律。穿透的使用HS的话，是如下面这种情况

```
(1)   ......p......          [证明依据]
(2)   p->q                   [证明依据]
(3)   ......q......          (1) (2) HS
```

这样子是不合理的，大家在使用各类定理和规则的时候一定要严格看清楚条件。

对于这个问题我暂时并没有想到什么可以绕开的方法，从逻辑上这一步的替换就不太合理。

3、在证明命题4.1的时候，许多同学直接将↔拆为了←和→而没有任何交代，没有扣分，但是我应该都批注了一下。

一种思路是利用命题3.5加上两次MP完成证明，就如同我前面所写的。

另一种思路是利用P72的命题6完成这个动作。

但是不能不交代就直接拆，形式化证明和数学里面的一些证明有一定的区别，切忌主观的将两者混淆。如果有需要，可以直观上用数学里面证明的方法去理解形式化的证明，但是在书写正规过程的时候切忌混淆。

4、将各类公式和反证律和归谬律张冠李戴，这个虽说可能是笔误，但是批改作业以及之后考试批改试卷时，由于批改份量较多，部分证明公式较长，助教和老师可能难以发现你实际上想表达的公式到底是哪个，从而造成误判的现象。

因此大家在作业和考试的时候，一定要看仔细了再写证明依据。

5、少数同学依然存在跳步现象或者格式不严谨的地方。

这个依据批注记得修改，也多看看课本上的证明方法。

QQ群里面已经发过的评分标准：

WARNING：
1、可以被诸如双否律，第二双否律，简单修正的!!p直接换为p的情况。
2、等值符号不能直接换为←和→，可以利用命题3.5或者命题2.5再加上两步MP进行处理，记得把MP的过程写出来。
3、一些定理的证明依据写得有误，最常见的是把换位律写成了L3
ERROR：
1、无法被简单修正的!!p直接换为p的情况
2、穿透使用HS，就是写一个双否律和一个HS之后，就把上一个公式里面的!!p全部换成p了
3、证明依据写得有误或是用错了定理的形式，并且也无法看出所使用的到底是哪个定理

WARNING没有扣分，ERROR视严重程度酌情扣分。