第三次作业

March 2022

1 作业答案

练习 7

2. 下面的公式哪些恒为永真式？

$3°.(q \vee r) \rightarrow (\neg r \rightarrow q)$

$4°.(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$

$5°.(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$

解

(	q	$\vee$	r	)	$\rightarrow$	(	$\neg$	r	$\rightarrow$	q	)
	0	0	0		1		1	0	0	0	
	0	1	1		1		0	1	1	0	
	1	1	0		1		1	0	1	1	
	1	1	1		1		0	1	1	1	

3°. 由真值表可知，公式 3° 为永真式。

解

(	p	$\wedge$	$\neg$	q	)	$\vee$	((	q	$\wedge$	$\neg$	r	)	$\wedge$	(	r	$\wedge$	$\neg$	p	))
	0	0	1	0		0		0	0	1	0		0		0	0	1	0	
	0	0	1	0		0		0	0	0	1		0		1	1	1	0	
	0	0	0	1		0		1	1	1	0		0		0	0	1	0	
	0	0	0	1		0		1	0	0	1		0		1	1	1	0	
	1	1	1	0		1		0	0	1	0		0		0	0	0	1	
	1	1	1	0		1		0	0	0	1		0		1	0	0	1	
	1	0	0	1		0		1	1	1	0		0		0	0	0	1	
	1	0	0	1		0		1	0	0	1		0		1	0	0	1	

表 1: 公式 4° 的真值表

4° 由真值表可知，公式 4° 可能存在成假指派，因此不恒为永真式。

$(p$	$\to$	$(q$	$\to$	$r))$	$\to$	$((p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\vee$	$r)$
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1

表 2: 公式 5° 的真值表

5° 由真值表可知，公式 5° 可能存在成假指派，因此不恒为永真式。

3. 以下结论是否正确？为什么？

1° $\models p(x_1, \cdots, x_n) \;\Leftrightarrow\; \models (\neg x_1, \cdots, \neg x_n)$.

2° $\models (p \to q) \leftrightarrow (p' \to q') \;\Rightarrow\; \models p \leftrightarrow p'$ 且 $\models q \leftrightarrow q'$.

解

1° 结论正确，以下对等价关系 $\Leftrightarrow$ 做两个方向上的 分别证明: ⟵ 形式上参考代换定理的证明

证明. '$\Rightarrow$': 由代换定理，取 $p_1, \cdots, p_n$ 分别为 $\neg x_1, \cdots, \neg x_n$，立刻可得：

$$\models p(x_1, \cdots, x_n) \;\Rightarrow\; \models (\neg x_1, \cdots, \neg x_n).$$

'$\Leftarrow$': 设 v 是 $L(X)$ 的任一赋值，记

$$u_1 = v(\neg x_1), \cdots, u_n = v(\neg x_n)$$

将 $u_1, \cdots, u_n$ 分别指派给 $x_1, \cdots, x_n$，且将此真值指派扩张成 $L(X_n)$ 的赋值 u。于是 u 满足：

(1) $$u(x_i) = u_i = v(\neg x_i) = \neg v(x_i) \qquad i = 1, \cdots, n$$

现需证明下面的(2)式：

(2) $$v(p(x_1, \cdots, x_n)) = u(p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n))$$

我们有：

$$\begin{aligned}
u(p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)) &= p(\neg u(x_1), \cdots, \neg u(x_n)) && （u \text{ 的保运算性}） \\
&= p(\neg u_1, \cdots, \neg u_n) \\
&= p(\neg v(\neg x_i), \cdots, \neg v(\neg x_n)) && （由(1)式） \\
&= p(\neg\neg v(x_i), \cdots, \neg\neg v(x_n)) && （v \text{ 的保运算性}） \\
&= p(v(x_i), \cdots, v(x_n)) && （\mathbb{Z}_2 \text{ 中公式}） \\
&= v(p(x_i, \cdots, x_n)) && （v \text{ 的保运算性}）
\end{aligned}$$

有了(2)便可得：

$$\begin{aligned}
\vDash (\neg x_1, \cdots, \neg x_n) &\Rightarrow u(p(\neg x_1, \cdots, \neg x_n)) = 1 \\
&\Rightarrow v(p(x_i, \cdots, x_n)) = 1 \\
&\vDash p(x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

$\square$

2° 结论不正确，取以下公式为例

$$p = x_1, q = x_1$$
$$p' = x_2, q' = x_2$$

我们有

$$\vDash (x_1 \to x_1) \leftrightarrow (x_2 \to x_2)$$

但

$$\nvDash x_1 \to x_2$$