第一次作业反馈

0.1 一些提示

- 初次接触偏微分方程，第一次都会有一些不适应，但其实对本门课程而言，需要掌握的东西不是特别的难，首要的是有信心。
- 解一些形式较为特殊的方程，学会做一些简单的变量替换，使用叠加原理，将复杂的非齐次的方程变成自己会解的方程
- 很多方程都有其物理含义，要真正理解这个方程，你需要搞清楚方程里面每个变量指代什么物理量，这其实也是便于理解。

0.2 作业题

0.2.1 1.6

看清楚题目，这里的 $u = u(x, y, z)$, 很多同学看到方程里面没有出现 z，就当 u 只有 x,y 两个变量，这里我都算对了。

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + a(x, y)u = 0$$

解：将 $a(x, y)u$ 项移到右边，两边同时除 u, 原方程化为

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} = -a(x, y)$$

也即

$$\frac{\partial lnu}{\partial y} = -a(x, y)$$

两边对 y 积分得到

$$lnu = -\int a(x, y)dy + f(x, z)$$

,$f(x, z)$ 为任意函数则

$$u = g(x, z)e^{-\int a(x,y)dy}$$

, 其中 $g(x, z) = e^{f(x,z)}$

注 1. 要注意这里解的是偏微分方程，求的是偏导，所以积分出来的不是常数项而是一个任意的无关变量的函数，就是这里的 $f(x,z)$, 有部分同学这里没有搞清楚。

$$(2) \qquad u_{xy} + u_y = 0$$

解：想法其实类似上一题，先把 u_y 看成一个整体，移项，两边除一下 u_y，得到

$$\frac{1}{u_y}\frac{\partial u_y}{\partial x} = -1$$

然后对 x 积分得到

$$lnu_y = -x + f(y,z)$$

故

$$u_y = e^{-x+f(y,z)}$$

, 其中 $f(y,z)$ 是任意函数再对 y 积分得到 $u = e^{-x}\int e^{f(y,z)}dy + g(x,z)$

$$(3) \qquad u_{tt} = a^2 u_{xx} + 3x^2$$

解：这是个非齐次的波动方程，关于齐次的波动方程，大家都应该是会解的，不再赘述，解非齐次方程的一个办法就是找特解，这一题的特解很容易就能看出，是 $-\frac{1}{4a^2}x^4$, 一般而言猜特解就是去尝试，看后面非齐次项的形式，多项式，指数式之类的都试试，基本差不多了。这个方程的解就是通解加特解 $u = -\frac{1}{4a^2}x^4 + f(x-at) + g(x+at)$

0.2.2 1.7

这一题就是需要对物理含义有所理解，方程就是简单的热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

, 这里有些人在后面加上了 $f(x,t)$, 这是不对的，题目描述里并没有说这个细杆内部有热源吧，所以方程就是齐次的，这里也就体现出理解方程每一项的物理意义的重要性，不然就生搬硬套就很奇怪。

边界条件的写法见书上 1.3.3 节混合问题，这里讨论的是更一般的空间上的问题，对应的就是三类边界条件，一题对应一个，不多赘述。本题是一

维的热传导问题，左端点处 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 方向与外法向相反，右端点处与外法向相同，从而我们有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$$

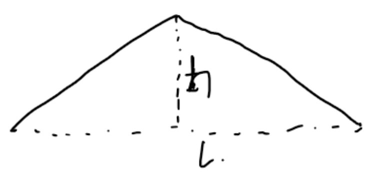
这些边界每个都有其物理背景，需要注意理解，这样写的才对

最后写定解问题最规范的写法是把方程，初值，边界条件一起写出来。

0.2.3　1.8

这一题需要会从题目描述中抓取边界条件，波动方程都会写，这里注意一下，这个弦是在自由振动，除开一开始的扰动，没有持续受到外力作用，所以方程没有非齐次项，要理解非齐次项的物理意义，不能乱加这一项。

约束条件要写的具体，这里初始弦应处于紧绷状态，也就是如下图所示:



$$u(0,x)=\begin{cases}\frac{2h}{l}x & x\in[0,\frac{l}{2}]\\ \frac{2h}{l}(l-x) & x\in(\frac{l}{2},l]\end{cases}$$

不能就是一个 $u(0,\frac{l}{2})=h$，仅仅只有这一点的值不对其他地方做相应的约束，那其他地方的行为可以是任意诡异的东西。(语文不好 orz)