第十次作业反馈

批改：彭怡腾 钟书锐

一、一些问题

！！！这次作业非常多的同学出现了问题，请特别关注以下信息！！！

1、注意在要求给出一种赋值使得一阶命题成立/不成立时，要给出赋值的命题变元仅为**自由变元**，对于非自由变元需根据约束的量词考虑，如全称量词下，需要求对这个变元的所有赋值都能成立，而**不是自己找到一种赋值。**并且逻辑上应在**自由变元赋值确定后检查非自由变元是否使命题成立**，比如命题中 x_1被约束: $\forall x_1$，赋值时写$\varphi(x_2)=\varphi(x_1)+1$，这种写法是错误的，$\varphi(x_2)$ 应与x_1无关。

2、证明时需要注意**约束量词**，检查证明的逻辑有没有问题。比如P93 3.4中要求证明

$$\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)\to\exists x_2\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$$

证明过程中只取一个x_2的解释并证明不成立是有漏洞的，应证明任何x_2的解释都不成立。

注意：考虑到大部分同学对于这个地方可能没有很好的理解，而且本次作业是最后一次作业，因此未进行扣分。但请务必核对自己作业的相关地方是否正确，助教标出了明显有误的地方，但部分同学过程极其简单，无法判断是确实掌握还是糊过去了，因此无法进行批注。请特别注意考试时如果没有一定的过程是可能会进行扣分的。

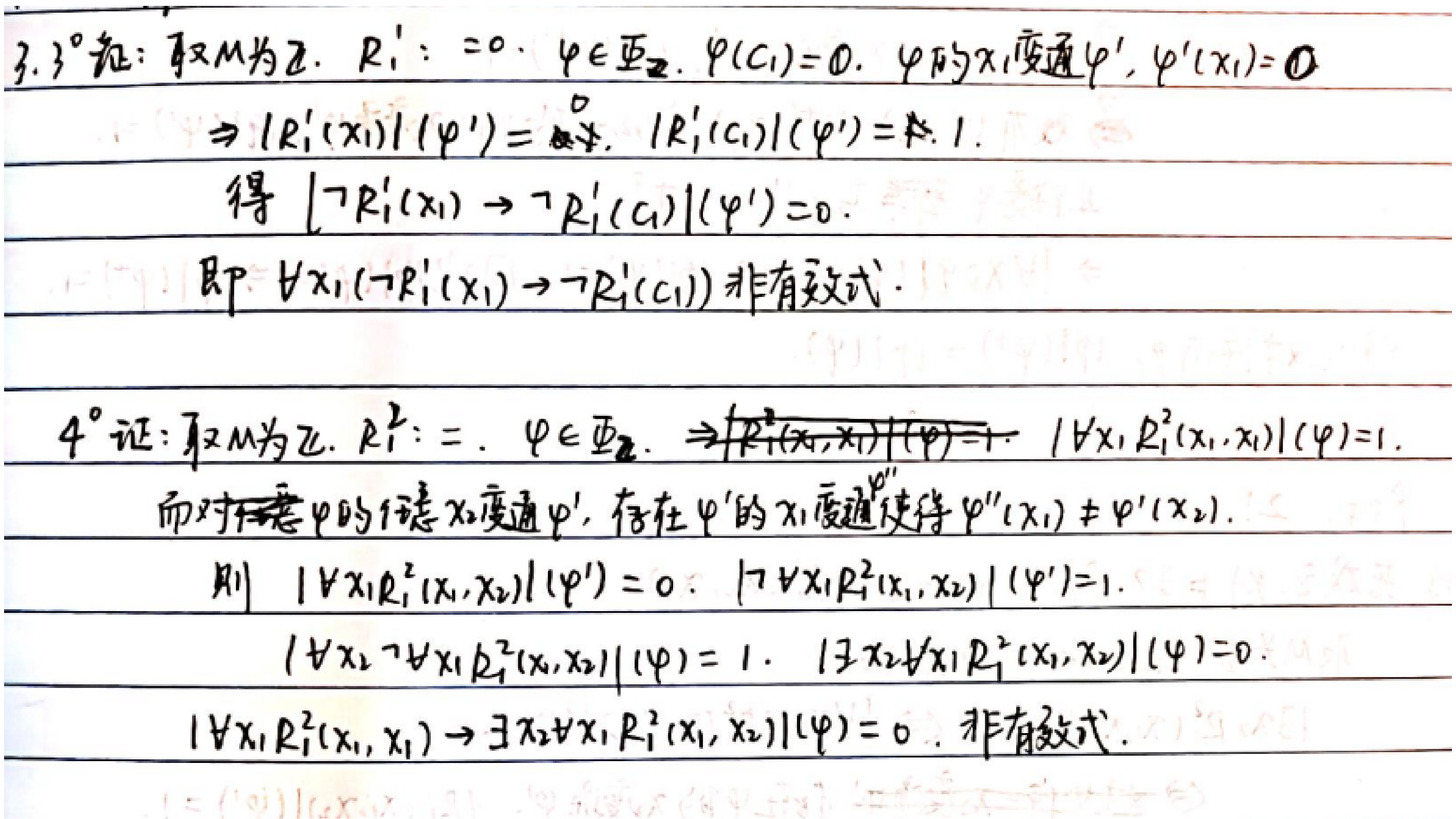
3、项解释是与公式中出现的变元有关，而公式的真值只与出现的自由变元有关。因此当计算公式赋值时，注意将自由变元和约束变元分开讨论，特别是当出现重名变元时，为避免出错可以先做更名处理再计算（事实上不少同学确实是这样子做的）。

4、还有部分同学在P94 4(2)的证明过程中没有考虑$p=q\to r$和$p=\neg q$的情况，或是只写了个易证。书后答案虽然确实也写的"较为简单"，但是在解答的过程中，应该将这里写出来。

二、参考解答

3.3 3.4

下面借用这位同学的第三题的解答来做一下前面内容的解释。



3.3° 证：取M为Z. R_1^1: $=0$. $\varphi\in\Phi_Z$. $\varphi(c_1)=0$. φ的x_1变通φ', $\varphi'(x_1)=1$

$\Rightarrow |R_1^1(x_1)|(\varphi')=0$. $|R_1^1(c_1)|(\varphi')=1$.

得 $|\neg R_1^1(x_1)\to\neg R_1^1(c_1)|(\varphi')=0$.

即 $\forall x_1(\neg R_1^1(x_1)\to\neg R_1^1(c_1))$ 非有效式.

4° 证：取M为Z. R_1^2: $=$. $\varphi\in\Phi_Z$. $\cancel{\Rightarrow |R_1^2(x_1,x_1)|(\varphi)=1}$. $|\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1)|(\varphi)=1$.

而对~~任意~~φ的任意x_2变通φ', 存在φ'的x_1变通φ''使得$\varphi''(x_1)\neq\varphi'(x_2)$.

则 $|\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi')=0$. $|\neg\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi')=1$.

$|\forall x_2\neg\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi)=1$. $|\exists x_2\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi)=0$.

$|\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1)\to\exists x_2\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|(\varphi)=0$. 非有效式.

3.3直接取一个反例即可，因为这里是需要证明$\forall x_1$约束下的这个蕴含式非有效式，依据P85定义1可知，这里取一个反例，即证明了"存在φ的x变通φ'使$|q|(\varphi')=0$"。

3.4题中，核心点在于表述对于任意x_2的变通，我们都无法使$\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2)$成立。我们从直观上理解这里，我们证明**任意**$x_2$的变通都无法使后式成立，也就是证明了**不存在**这样子的项解释，因此后件不成立。而有些同学取了特例并证明了不成立，这里直观上的理解，只能说，你找的这**一个**项解释无法使这个式子成立，而无法说明**不存在**这样子的项解释。

4

第四题课后答案已经写得很详细了，一个小的问题是，大家需要注意区分**原子公式**和**项**的区别，这门课各种类似的术语不少，大家考前复习的时候注意区分。下面给出第四题第一问和第二问证明答案中所说**易证**部分的一个参考，其他的部分可以参见课本P196部分给出的解答。

4(1)

(i) 对 t 的层数 k 进行归纳

k=1时，t为常元或变元

若t为变元，则 $t=x_i$，有 $\varphi^+(t)=\varphi(t)$, $i=1,2,\dots$

若t为常元，则 $t=c_i$且$t\neq b_i$，有 $\varphi^+(t)=\varphi(t)$, $i=1,2,\dots$

设层数为k时满足 $\varphi^+(t_k)=\varphi(t_k)$，

则 $\varphi^+(t_{k+1})=\varphi^+(f_i(t_k))$，$\varphi(t_k)=\varphi(f_i(t_k))$

由项解释的"保运算性"可得

$$\varphi^+(f_i(t_k)) = f_i(\varphi^+(t_k)) = f_i(\varphi(t_k)) = \varphi(f_i(t_k))$$

即 $\varphi^+(t_{k+1})=\varphi(t_k)$

由归纳证明得原命题成立

4(2)部分

(i) $p=\neg q$，此时

$$|\neg q|(\varphi^+)=1 \Leftrightarrow |q|(\varphi^+)=0$$
$$\Leftrightarrow |q|(\varphi)=0$$
$$\Leftrightarrow |\neg q|(\varphi)=1$$

(ii) $p=q\to r$时

$$|q\to r|(\varphi^+)=1 \Leftrightarrow |q|(\varphi^+)\to|r|(\varphi^+)=1$$
$$\Leftrightarrow |q|(\varphi)\to|r|(\varphi)=1$$
$$\Leftrightarrow |q\to r|(\varphi)=1$$

2

由**可靠性**，我们证此式不为有效式即可，取$\varphi(x_1)=2,\bar{R}_1^2$为">", 对于前件，我们有$\varphi(x_2)=1$使之成立（注意，这里前件是需要证明成立，因此可以取特例）。对于后件，对于φ任意x_2的变通，我们都无法使$R_1^2(x_2,x_2)$成立。因此原蕴含式不为有效式，即题中式子不成立。

这一题除了之前出现过的”证有存在量词的后件不成立时取特例“的问题以外，部分同学在使用可靠性时没有进行交代，请务必在使用完全性和可靠性的时候做出交代，这代表你能够区分语法和语义的不同。