

## 第一次作业参考答案

### 一、2.24 作业参考答案

#### 练习 1

1. 列出以下复合命题的真值表. (其中支命题  $p, q, r, s$  视为命题变元.)

7° $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$								8° $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$							
$(\neg p \wedge q)$	$\rightarrow$	$(\neg q \wedge r)$						$(p \rightarrow q)$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow r)$					
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1

  

9° $\neg(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$														
$\neg$	$(p \vee (q \wedge r))$	$\leftrightarrow$	$((p \vee q) \wedge (p \vee r))$											
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

#### 练习 2

2. 写出由  $X_2 = \{x_1, x_2\}$  生成的公式集  $L(X_2)$  的三个层次:  $L_0, L_1$  和  $L_2$ .

$$L_0 = X_2 = \{x_1, x_2\} \quad |L_0| = 2$$

$$L_1 = \{\neg x_1, \neg x_2, x_1 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow x_2\} \quad |L_1| = 6$$

$$L_2 = \{\neg\neg x_1, \neg\neg x_2, \neg(x_1 \rightarrow x_1), \neg(x_1 \rightarrow x_2), \neg(x_2 \rightarrow x_1), \neg(x_2 \rightarrow x_2),$$

$$\neg x_1 \rightarrow x_1, \neg x_2 \rightarrow x_1, (x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1, (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1, (x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1, (x_2 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1,$$

$$\neg x_1 \rightarrow x_2, \neg x_2 \rightarrow x_2, (x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2, (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2, (x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2, (x_2 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2,$$

$$x_1 \rightarrow \neg x_1, x_1 \rightarrow \neg x_2, x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2), x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1), x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_2),$$

$$x_2 \rightarrow \neg x_1, x_2 \rightarrow \neg x_2, x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2), x_2 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1), x_2 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_2)\}$$

$$|L_2| = 30$$

**分析:** 如何不重不漏地写出  $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  各层次的全部公式?

本质上是一个“排列组合”问题。

首先易知  $L_0 = X_n$ , 故  $|L_0| = n$ ;

对于  $L_i (i \geq 1)$ , 根据公式形成的规则“若  $p$  是公式, 则  $\neg p$  是公式; 若  $p, q$  是公式, 则

$p \rightarrow q$ 是公式”可知： $L_i$ 的公式必然形如“ $\neg p$ ”或“ $p \rightarrow q$ ”，且 $p, q$ 均为 $L_k(k < i)$ 当中的公式。对于 $L_i$ 中形如“ $\neg p$ ”的公式， $p$ 全部属于 $L_{i-1}$ ，故这类公式的个数为 $|L_{i-1}|$ ；

对于 $L_i$ 中形如“ $p \rightarrow q$ ”的公式，不妨设 $p$ 属于 $L_\alpha$ 而 $q$ 属于 $L_\beta$ ， $\alpha, \beta$ 应当满足：“ $0 \leq \alpha \leq i-1$ ”

且“ $0 \leq \beta \leq i-1$ ”且“ $\alpha + \beta = i-1$ ”，这类公式的个数为 $\sum_{l=0}^{i-1} |L_l| \cdot |L_{i-l-1}|$ 。

综合以上两类公式，便知 $|L_i| = |L_{i-1}| + \sum_{l=0}^{i-1} |L_l| \cdot |L_{i-l-1}|$ ，而依据这种思路，各层次（即 $L_i(i \geq 1)$ ）具体有哪些公式也可以不重不漏地写出。

$$\begin{aligned} \text{以 } X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}(n=3) \text{ 为例, } |L_0| &= 3, |L_1| = |L_0| + |L_0| \cdot |L_0| = 12, \\ |L_2| &= |L_1| + \sum_{l=0}^1 |L_l| \cdot |L_{1-l}| = |L_1| + 2|L_0| \cdot |L_1| = 84, \\ |L_3| &= |L_2| + \sum_{l=0}^2 |L_l| \cdot |L_{2-l}| = |L_2| + 2|L_0| \cdot |L_2| + |L_1| \cdot |L_1| = 732 \dots \end{aligned}$$

## 二、常见问题总结

### 1. 真值表格式有误

请严格仿照教材中真值表的书写方式及本次作业参考答案的格式进行真值表的绘线与填写，不必冗余也不可简略。

### 2. 对命题联结词不熟悉导致真值判定有误

- (1) 合取词“ $\wedge$ ”（“与”/“且”）和析取词“ $\vee$ ”（“或”）产生了混淆；
- (2) 蕴含词“ $\rightarrow$ ”的唯一成假指派是“前件为真且后件为假”。

### 3. 题目抄错的现象略为严重

- (1) 部分同学真值表第9小问遗漏了公式最前面的“ $\neg$ ”，导致该永假式错判为永真；
- (2) 其他常见问题还包括把 $p$ 和 $q$ 、 $\wedge$ 和 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 抄混等情况。

### 4. 公式集各层次元素有遗漏或错写

- (1) 部分同学在 $L_1$ 中没有写“ $x_1 \rightarrow x_1$ ”和“ $x_2 \rightarrow x_2$ ”两个公式，这进而导致遗漏了 $L_2$ 中与之相关的10个公式；
- (2) 部分同学在列举 $L_2$ 中公式时，把形如“ $\neg x_m \rightarrow \neg x_n$ ”的公式错误地写入，请注意这些公式属于 $L_3$ 而不是 $L_2$ 。

另外，不要偷懒打省略号，尤其是省略号打得不明不白！！！即便你是用集合的简化表示，助教只要看懂也给分了，但考试时还是建议规规矩矩地一一列举。

By: 毛星范