微分方程

一阶线性 ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + py = q \tag{3.2}$$

$I = \mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}$，通解

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{I}(Iq\mathrm{d}x + C) \\ &= \mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x} q\mathrm{d}x + C\right] \end{aligned}$$

---

n $(n \neq 0, 1)$ 阶 **伯努利方程**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n \tag{3.3}$$

等价于

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

以 $u = y^{1-n}$ 换元。

一阶全微分方程

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \tag{3.4}$$

其中 $P(x,y), Q(x,y)$ 为给定的可微方程。若存在一个 potential function (势函数) $u(x,y)$ 满足

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

(3.4) 的通解即是

$$u = C$$

若一个 ODE 是全微分方程，就可以通过找到它的势函数得到通解。

一阶全微分方程的判定定理 微分方程 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$ 是全微分方程，当且仅当 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

解 首先验证 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，已知 $\begin{cases} P = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ Q = \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$。

法一 对这两个式子分别对 x, y 求积分，

$$\begin{cases} u(x,y) = \displaystyle\int \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + h(y) \\ u(x,y) = \displaystyle\int \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + g(x) \end{cases}$$

将公共部分提取，整理得通解 $u(x,y) = C$。

法二 在此条件下，起点为 (x_0, y_0)，终点为 (x, y) 的曲线积分与路径无关，能够证明

$$u(x,y) \equiv \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = C$$

一阶微分方程是齐次的，若可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.6}$$

置 $u = \dfrac{y}{x}$，通解

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{F(u) - u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = F\left(x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \tag{3.7}$$

解 置 $v=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则 (3.7) 等价于

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=F(x,v).$$

解之。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=F\Big(y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big) \tag{3.8}$$

解 置 $v=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，依 chain rule 有 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，则 (3.8) 等价于

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=F(y,v).$$

形如

$$ay''+by'+cy=0 \quad (a\neq 0) \tag{3.12}$$

考虑 $y=\mathrm{e}^{rx}$，代入给定 DE，得 $ar^2\mathrm{e}^{rx}+br\mathrm{e}^{rx}+c\mathrm{e}^{rx}=0$，即 $ar^2+br+c=0$，解出 r_1,r_2，即得通解 (注意 r 允许为虚数，$\mathrm{e}^{(\alpha\pm\mathrm{i}\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x\pm\mathrm{i}\sin\beta x)$)

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

若特征方程只有一个根 $r=-\dfrac{b}{2a}$，那么一个解为 $y_1=\mathrm{e}^{rx}$，由上节知另一个解为 $y_2=x\mathrm{e}^{rx}$，故 (3.12) 的通解

$$y(x)=(C_1+xC_2)\mathrm{e}^{r_1x}.$$

非齐次方程

$$y''+py'+qy=f\neq 0 \tag{3.14}$$

的通解形如

$$y = y_p + \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{y_c}$$

Basic Rule

f	y_p	r
$P\mathrm{e}^{\mu x}$	$R\mathrm{e}^{\mu x}$	μ
$(P_1 \cos \omega x + P_2 \sin \omega x)\mathrm{e}^{\mu x}$	$(R_1 \cos \omega x + R_2 \sin \omega x)\mathrm{e}^{\mu x}$	$\mu + \mathrm{i}\omega$

上表中，P, R 均表示关于 x 的多项式。

Modification Rule 若使用 Basic Rule 选取出的 y_p 是 (3.14) 对应齐次 ODE 的 k 重根 (表中 r 是特征方程的 k 重根) 时，应当取 $x^k y_p$，而不是 y_p。

Sum Rule 若 f 是上表左列几种情况的线性组合，那么 y_p 也是右侧对应的几种情况的线性组合。

Part2 微積分

§2.4 平面點集、多元函數、二元函數的極限和連續性

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$，则对于定义域内任意一条趋向于点 (x_0, y_0) 的路径 c，都有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in c}} f(x,y) = A$$

因此，如果能找到两条不同的路径，极限不相同，则表明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在。

§2.5 多元函數的微分

§2.5.1 可微性

偏导数定义
$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$。

> (2022) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2y}{xy}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，求 $f_x(0,1)$。
>
> **思路** 即求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,1)-f(0,1)}{\Delta x}$，代入即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}=1$。

可微的必要条件 若二元函数 f 在其定义域内一点 (x,y) 可微，则在该点关于于每个自变量的偏导数都存在，且全微分

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

可微的充分条件 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在点 (x_0,y_0) 的某邻域上存在，且 f_x 与 f_y 在点 (x_0,y_0) 连续，则函数在点 (x_0,y_0) 可微。

- 各个偏导数连续 $\to$ 可微 $\to$ 连续、偏导数存在；
- 偏导数存在 $\nrightarrow$ 连续、可微（与一元不同）；
- 可微 $\nrightarrow$ 各个偏导数连续；
- 连续 $\nrightarrow$ 偏导数存在，可微。

> **例 1**(2019) 按定义证明 $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时偏导数存在，但不连续。
>
> **证明** (1) 由
>
> $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$
>
> 知关于 x 的偏导数存在，同理关于 y 的亦存在。
>
> (2) 置 $P(x,y)$ 沿 $y=kx(k\neq 0)$ 趋于 $(0,0)$，得
>
> $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}z=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{(x)^2\cdot(kx)^2}=\frac{k}{k^2+1}$$
>
> 其随 k 的变化而变化，因此当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在，故不连续。

例 2 按定义证明 $z=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时偏导数存在，但不可微。

证明 (1) 易知偏导数存在，且 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$。

(2) 用反证法证明不可微，假设有 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中
$A=f_x(0,0)=0, B=f_y(0,0)=0$，即 $\Delta z=o(\rho)$，有

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=0,$$

而当点 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于点 $(0,0)$ 时，$\Delta x=\Delta y$，此时

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

产生了矛盾，故不可微。

例 3 按定义证明 $z=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时可微，但偏导数不连续。

证明 略。

例 4 按定义证明 $z=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 处不可微。

证明 易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$。

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-A\Delta x+B\Delta y}{\rho}&=\lim_{\rho\to 0}\frac{(\sqrt{|\Delta x\Delta y|}-0)-0\Delta x-0\Delta y}{\rho}\\&=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{|\rho\sin\theta\cdot\rho\cos\theta|}}{\rho}\\&=\lim_{\rho\to 0}\sqrt{|\sin\theta\cos\theta|}\end{aligned}$$

不存在，故不可微。

§2.5.2 偏導函數與求偏導法則

复合函数的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$

复合函数的全微分 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

全微分形式不变性 若函数 $x=\varphi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$ 在点 (s,t) 可微，则 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial s}\,\mathrm{d}s + \frac{\partial z}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

(2011) 设 $y=2x, f(x,y)=x^2+3x, f_x(x,y)=6x+1$，求 $f_y(x,y)$。

解 对 $f(x,y)=x^2+3x$ 等式两边求全微分，即 $f_x(x,y)+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}f_y(x,y)=2x+3$，代入即得。

(2022) 设 $z=f(xe^y,x,y)$，且 f 具有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y}$。

析 熟悉记号 f_1', f_{12}'' 等的含义，并注意 $\frac{\partial}{\partial x}f_1'$ 与 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 的关系。

解

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= f_1'\frac{\partial}{\partial x}xe^y + f_2'\frac{\partial}{\partial x}x + f_3'\frac{\partial}{\partial x}y \\
&= e^y f_1' + f_2' \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= f_1'\frac{\partial}{\partial y}xe^y + f_2'\frac{\partial}{\partial y}x + f_3'\frac{\partial}{\partial y}y \\
&= xe^y f_1' + f_3' \\
\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y f_1' + f_3'\right) \\
&= xe^y\frac{\partial}{\partial x}f_1' + e^y f_1' + \frac{\partial}{\partial x}f_3' \\
&= xe^y\left(e^y f_{11}'' + f_{21}''\right) + e^y f_1' + \left(e^y f_{13}'' + f_{23}''\right) \\
&= xe^{2y}f_{11}' + xe^y f_{21}'' + e^y f_1' + e^y f_{13}'' + f_{23}''
\end{aligned}
$$

隐函数求导法则

设方程 $F(x,y)=0$，若隐函数 $y=f(x)$ 存在且可导，有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

推广到多个变元有类似的式子；推广到方程组即：

对于 $F(x,y,u,v)=0, G(x,y,u,v)=0$，有

$$\begin{cases} F_x + F_u\dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \\ G_y + G_u\dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

在 $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$ 的条件下，解出

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = -\dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\dfrac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix} \end{cases}$$

(2022) 设 $z = z(x,y)$ 由 $F\big(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\big) = 0$ 所确定，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$。

思路 命 $G(x,y,z) = F\big(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\big)$，以 F_1', F_2' 表示 G_x, G_y, G_z，代入即可。

§2.5.3 多元函數的微分的幾何意義

空间曲线的切线和法平面 化参数式，求方向向量 $\mathbf{T} = \big(\varphi'(t_0), \phi'(t_0), \omega'(t_0)\big)$，对于 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$，设 x 为参数，并依隐函数求导法则求出 $\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$，化归为上述情形。

空间曲面的切平面和法线 化一般式，求法向量 $\mathbf{N} = (F_x, F_y, F_z)$，对于 $z = f(x,y)$，设 $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$ (此时 $F_z = -1$)，化归为上述情形。

§2.5.4 方向導數與梯度

若 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在对所有自变量的偏导数，则函数 f 在点 P_0 的梯度 (gradient)

$$\nabla f(x_0,y_0) = \mathbf{grad}\, f(x_0,y_0) = f_x(P_0)\mathbf{i} + f_y(P_0)\mathbf{j} = (f_x(P_0), f_y(P_0))$$

记 l 方向上的单位向量为 $\mathbf{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$，则方向导数还可写成

$$f_l(P_0)=\mathbf{grad}\, f(P_0)\cdot l_0=|\,\mathbf{grad}\, f(P_0)|\cos\theta$$

其中 θ 是梯度向量 $\mathbf{grad}\, f(P_0)$ 与 l_0 的夹角。

当 $\theta=0$ 时，$f_l(P_0)$ 取得最大值 $|\,\mathbf{grad}\, f(P_0)|$。这就是说，当 f 在点 P_0 可微时，f 在点 P_0 的梯度方向时 f 的值增长最快的方向，且沿这一方向的变化率为 $|\,\mathbf{grad}\, f(P_0)|$；而当 l 与梯度向量反方向 $(\theta=\pi)$ 时，方向导数取得最小值 $-|\,\mathbf{grad}\, f(P_0)|$。

几何意义 二元函数 $z=f(x,y)$ 与 $z=z_0$ 平面的交线称为等高线，向量 $\pm(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$ 是二元函数在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面的法线，梯度是二元函数在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处等高线的法线。

> (2022) 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数。
>
> **解** $\mathbf{grad}\, u=\left(y^2z,2xyz,xy^2\right),\mathbf{grad}\, u|_p=(2,-4,1)$。
>
> 增长最快的方向为梯度方向，即 $\mathbf{grad}\, u|_p=(2,-4,1)$，沿这个方向的方向导数
> $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_p=|\,\mathbf{grad}\, u|=\sqrt{21}$；
> 减少最快的方向为负梯度方向，即 $-\mathbf{grad}\, u|_p=(-2,4,-1)$，沿这个方向的方向导数
> $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_p=-|\,\mathbf{grad}\, u|=-\sqrt{21}$。

§2.5.5 多元函數的極值與最值

一、多元函數的無條件極值

必要条件 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极值且偏导存在，则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$。

几何意义 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得极值且偏导存在，则在 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 有水平切面，且 $\mathbf{N}=(f_x,f_y,-1)|_{P_0}=(0,0,-1)$，切平面方程 $z=f(x_0,y_0)$。

方法 为求 $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$，只需求驻点 $\nabla f=(f_x,f_y)=\mathbf{0}$。

充分条件 $z=f(x,y)$ 在 $U(P_0)$ 具有一阶及二阶连续偏导，$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$。令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，

- $AC-B^2>0$，具有极值，其中 $A>0$ 极小，$A<0$ 极大
- $AC-B^2<0$，无法取得极值
- $AC-B^2=0$，无法确定

二、多元函數的無條件最值

类似一元，由极值点（驻点或偏导不存在）和边界点讨论最值。

三、多元函數的有條件極值

求 L 驻点→条件极值点：$L(x,y,\lambda)=\underset{\text{目标}}{f(x,y)}+\lambda\underset{\text{约束}}{\varphi(x,y)}$

求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 间的最短距离。

代数法 设 (x,y,z) 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上一点，则它到平面 $x+y-2z=2$ 的距离为 $d=\dfrac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$。考虑目标函数 $d^2=\dfrac{(x+y-2z-2)^2}{6}$，作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=\frac{(x+y-2z-2)^2}{6}+\lambda\left(x^2+y^2-z\right)$$

分别令 $L_x=0,L_y=0,L_z=0$，结合条件 $z=x^2+y^2$，解这个四元方程组得 $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$。一方面，只有一个可能极值点；另一方面，从几何上知道，这个最短距离一定存在。所以点 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$ 就是所求的最小值点，最短距离为

$$d=\frac{\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{8}-2\right|}{\sqrt{6}}=\frac{7}{24}\sqrt{6}$$

几何法 设点 (x_0,y_0,z_0) 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上到平面 $x+y-2z=2$ 距离最短的点，则旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0,z_0)处的切平面必平行于平面 $x+y-2z=2$。因此，$z=x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面的法向量 $\mathbf{n}_1=(2x_0,2y_0,-1)$ 与 $(1,1,-2)$ 共线，解得 $x_0=\dfrac{1}{4},y_0=\dfrac{1}{4}$，下同。

§2.6 重積分

二重积分定义 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\quad(\lambda=\max\{\Delta\sigma_i\})$

二重积分性质 线性性质、区域可加性（$D=D_1+D_2\to\iint\limits_D=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}$ ）、保序性（函数大积分就大，用于估值）、中值定理（ $\iint_D f\mathrm{d}\sigma=f(x_0,y_0)\iint_D\mathrm{d}\sigma$ ）。

二重积分计算 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

二重积分换元公式 设 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\left|\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$。

三重积分计算 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}V=r^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$。

对弧长的曲线积分 设 $L:\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\end{cases},\quad a\leqslant t\leqslant\beta$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\phi(t),\psi(t)]\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

对坐标的曲线积分 设 $L:\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\end{cases},\quad t:\alpha\to\beta$，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\big[P(t)\phi'(t)+Q(t)\psi'(t)\big]\mathrm{d}t$$

与路径无关，则 $I\equiv0$，即 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内恒成立。

格林公式（II 类曲线积分与二重积分）若 D 是由 L 围成的，且 D 是单连通的（没有洞），L 是正向的（沿着 L 走的时候 D 在左边），P,Q 一阶偏导连续，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}\\P&Q\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

特别地，$\iint_D f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L xf(y)\mathrm{d}y\quad(Q=x,P=0)$;

置 $Q=\dfrac{x}{2}$，$P=-\dfrac{y}{2}$，则 D 的面积 $A=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$。

对面积的曲面积分 将 z 表示为 x, y 的函数 $z(x, y)$，且 Σ 在 xOy 面上的投影是 D_{xy}，

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对坐标的曲面积分 有向曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出，

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}(-z_x, -z_y, 1) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\begin{cases} \iint_{\Sigma} P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ \iint_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{cases}$$

符号的选取：上侧、前侧、右侧取 $+$，下侧、后侧、左侧取 $-$，即与 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 的符号相同。在 D 内 **与路径无关**，则 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$ 在 D 内恒成立。

两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

高斯公式（两类曲面积分与三重积分）若单连通的 Ω 是由 **封闭的 $\boldsymbol{\Sigma}$** 围成的外侧，则

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v &= \iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S \end{aligned}$$

斯托克斯公式（II 类曲线积分与 II 类曲面积分）

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

§5 級數

§5.1 數項級數

正项级数 正项级数的部分和序列是单调递增的，有

$$\text{定理} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛 } \iff \{S_n\} \text{ 有界}$$

基于这个定理，对于两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$（分别简记为 U，V）有如下最基本的判别法:

判别法	条件	收敛	发散
比较判别法	$\forall n > n_0$，$u_n \leqslant cv_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} \in [0,+\infty)$ $\forall n > n_0$，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$	$U \Leftarrow V$	$U \Rightarrow V$

选取已知收敛性的 v_n，利用比较判别法即可得到 u_n 的收敛性。特别地，

判别法	条件	收敛	发散
d'Alembert判别法	$\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$	$\rho < 1$	$\rho > 1$
柯西判别法	$\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$	$\rho < 1$	$\rho > 1$
极限判别法	$\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n \in (0,+\infty)$	$\alpha > 1$	$\alpha = 1$
积分判别法			

交错级数的莱布尼茨判别法 若数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛。

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛。该结论的逆命题未必成立，即如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 未必收敛，因此定义

- **绝对收敛** 收敛极数加上个绝对值（即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$）也收敛
- **条件收敛** 收敛极数加上个绝对值（即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$）不收敛

§5.2 冪級數

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^{f(n)}$，置 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{f(n+1)}}{a_n x^{f(n)}}\right|=1$，得收敛半径 $R=|x|$，收敛区间 $(-R,R)$，再算幂级数在 $x=\pm R$ 处的收敛性，如果收敛就将开区间改为闭区间，得到 **收敛域**。

函数展开成幂级数

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\ (-\infty<x<+\infty)\\
\ln x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\ (-1<x<1)\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ (-\infty<x<+\infty)\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\ (-\infty<x<+\infty)\\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\ (-1<x<1)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\ |x|<1
\end{aligned}
$$

§5.3 傅里葉級數

函数展开成傅里叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$，其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \end{cases}$$

附録

幂指对

$\int f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$	$f'(x)$
$\begin{cases} \dfrac{x^{k+1}}{k+1}+C, & \text{if } k \neq -1 \\ \ln\lvert x\rvert + C, & \text{if } k = -1 \end{cases}$	x^k	kx^{k-1}
$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	a^x	$a^x \ln a$
$\dfrac{1}{\ln a}x(\ln x-1)+C$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$

三角函数荟萃

$\int f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$	$f'(x)$
$-\cos x + C$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x + C$	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$	$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\ln\lvert\sec x\rvert + C = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\tan x$	$\sec^2 x$
$-\ln\lvert\csc x\rvert + C = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\dfrac{1}{4}(2x+\sin 2x)+C$	$\cos^2 x$	$-\sin 2x$
$\dfrac{1}{4}(2x-\sin 2x)+C$	$\sin^2 x$	$\sin 2x$
$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$	$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert + C$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

其它

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C = \operatorname{arcsinh} x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C = \operatorname{arcsinh} x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C = \operatorname{arctanh} x + C$$

华莱式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ is odd.} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & n \text{ is even.} \end{cases}$$

高阶导数

[Leibniz formula]
$$\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \\ &= uv^{(n)} + C_n^1 u' v^{(n-1)} + \cdots + C_n^{n-1} u^{(n-1)} v' + u^{(n)}v\end{aligned}$$

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
a^x	$a^x \ln^n a$
e^x	e^x
x^μ	$\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$
x^n	$n!$
x^{-1}	$(-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$
$\dfrac{1}{x+a}$	$\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$
$\boldsymbol{\dfrac{1}{kx+b}}$	$\boldsymbol{\dfrac{(-1)^n k^n n!}{(kx+b)^{n+1}}}$
$\log_a x$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$
$\ln(kx+b)$	$\dfrac{(-1)^{n-1}k^n(n-1)!}{(kx+b)^n}$
$\sin(kx+a)$	$k^n \sin\left(kx+a+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
$\cos(kx+a)$	$k^n \cos\left(kx+a+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

定积分

区间再现公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

增强版区间再现公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)+f(a+b-x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)+f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

更强的区间再现公式：设 $f(x)$，$g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，若 $f(x)=f(a+b-x)$，$g(x)+g(a+b-x)=m$，其中 m 为常数，则有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{m}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

扩展的定积分公式:

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sin x\right)\cdot\frac{b-a}{2}\cos x\mathrm{d}x = \int_0^1 (b-a)f[a+$$
$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)+f(-x)\mathrm{d}x$$