BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Selain untuk menghitung isi benda padat, salah satu penggunaan lain dari integral lipat dua adalah untuk menentukan massa, pusat massa, dan momen inersia suatu keping datar dengan rapat masa yang tak homogen. Rapat massa keping di setiap titiknya bergantung pada letak titik tersebut, yaitu merupakan fungsi dua peubah. Kerapatan massa keping datar yaitu besar massa per satuan luas, dapat dinyatakan sebagai fungsi dalam x dan y biasanya disimbolkan dengan $\delta(x,y)$.

1.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah dari makalah ini sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep massa, pusat massa pada suatu garis?
2. Bagaimana konsep massa, pusat massa pada suatu bidang datar?
3. Bagaimana konsep distribusi massa pada bidang?
4. Bagaimana konsep distribusi massa pada suatu daerah (lamina)?

1.3. Tujuan Penulisan

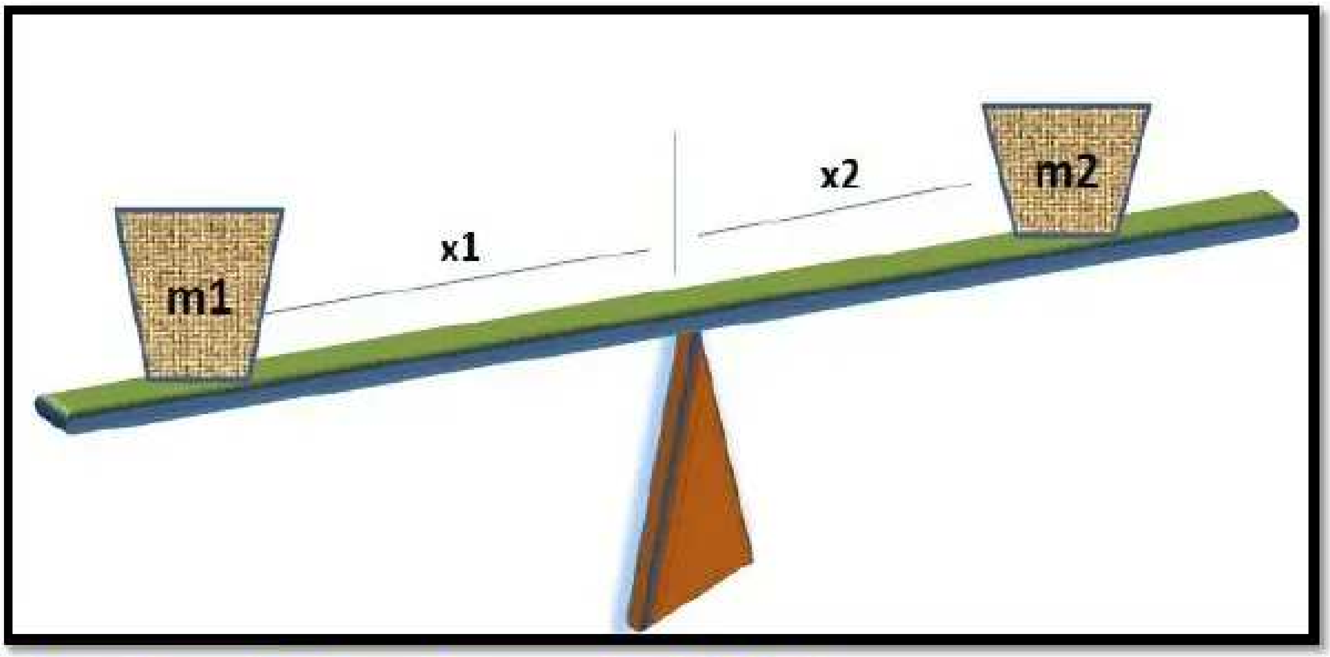
Tujuan penulisan dari makalah ini sebagai berikut:

1. Untuk mengetahuikonsep massa, pusat massa pada suatu garis.
2. Untuk mengetahui konsep massa, pusat massa pada suatu bidang datar.
3. Untuk mengetahui konsep distribusi massa pada bidang.
4. Untuk mengetahui konsep distribusi massa pada suatu daerah (lamina).

BAB II
PEMBAHASAN

2.1. Momen dan Titik Berat

Misalkan dua massa berukuran m^1 dan m^2 diletakkan pada kesetimbangan dan berjarak d_1 dan d_2 dan titik tumpu pada bagian-bagian yang berlawanan terhadapnya, perhatikan gambar 2.1.



GAMBAR 1

Model matematis yang baik untuk situasi ini yaitu dengan meletakkan ulang papan penyangga sebagai suatu sistem koordinat datar yang titik asalnya berada di titik tumpu. Maka koordinat x_1 dari m_1 adalah $x_1 = -d_1$, koordinat m_2 adalah $x_2 = d_2$ dan kondisi kesetimbangan adalah

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$$

Definisi 2.1

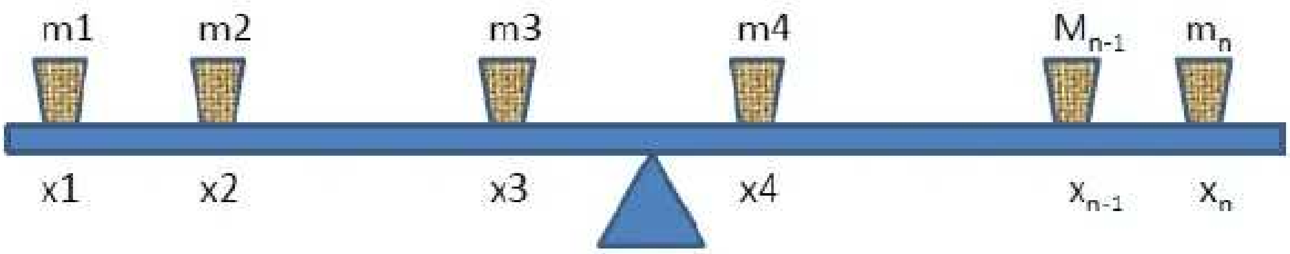
Hasil kali massa m suatu partikel dengan jarak berarahnya dari suatu titik (lengan tuas) dinamakan Momen partikel terhadap titik tersebut.

Situasi yang baru saja diuraikan dapat digeneralisasikan yaitu jumlah momen **M** (terhadap titik asal) suatu sistem yang terdiri atas n massa berukuran $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ yang berada pada $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sepanjang sumbu x adalah jumlah momen massa masing-masing yakni:

$$M = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n$$

Dengan demikian dapat disimpulkan **MOMEN** ialah hasil kali massa m dan jarak berarah dari suatu titik tertentu.

Syarat agar dua buah massa pada sebuah garis, berimbang pada sebuah titik ialah apabila jumlah momen-momen terhadap titik itu sama dengan nol (M = 0). Tentu saja kita tidak selalu mengharapkan kesetimbangan di titik asal kecuali dalam keadaan khusus. Lalu dimana posisi titik itu dapat diletakkan? Perhatikan gambar berikut



GAMBAR 2

Sebut koordinat yang kita inginkan untuk letak kesetimbangan adalah $\bar{x}$. Jumlah momen terhadap titik ini harus nol yakni

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n = \bar{x} m_1 + \bar{x} m_2 + \cdots + \bar{x} m_n$$

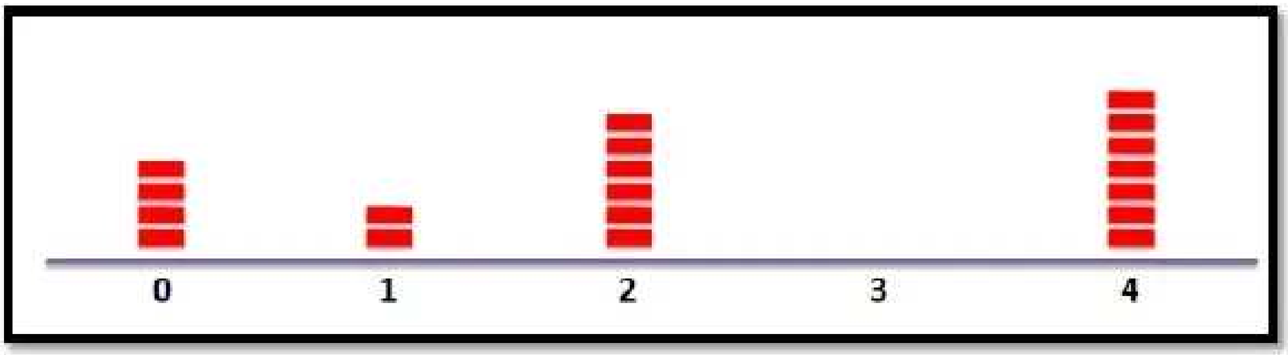
Bila kita selesaikan untuk $\bar{x}$, maka kita memperoleh:

$$\bar{X} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Titik $\bar{x}$, yang dinamakan **pusat massa (titik berat) , adalah titik kesetimbangan.** Perhatikan bahwa titik itu adalah jumlah momen terhadap titik asal dibagi dengan jumlah massa.

Contoh 1:

Diketahui massa sebesar 4,2,6,dan 7 pon pada posisi 0,1,2, dan 4 terhadap suatu sistem koordinat X. Tentukan titik berat sistem ini.



GAMBAR 3

$$\overline{X} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi.mi}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{(0).(4)+(1).(2)+(2).(6)+(4).(7)}{4+2+6+7} = \frac{42}{19} = 2,21$$

2.2. Distribusi Massa Pada Suatu Garis

Andaikan suatu kawat logam diletakkan sepanjang suatu sistem koordinat dan misal kepadatan di X adalah α(x) maka titik seimbangnya :

$$\overline{X} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x.\alpha(x)dx}{\int_a^b \alpha(x)dx}$$

Contoh 2:

Kepadatan α(x) sepotong kawat di sebuah titik yang terletak **x** sentimeter dari salah satu ujungnya adalah $\alpha(x) = 3x^2$ g/cm. Tentukan pusat massa kawat antara x=0 dan x=10.

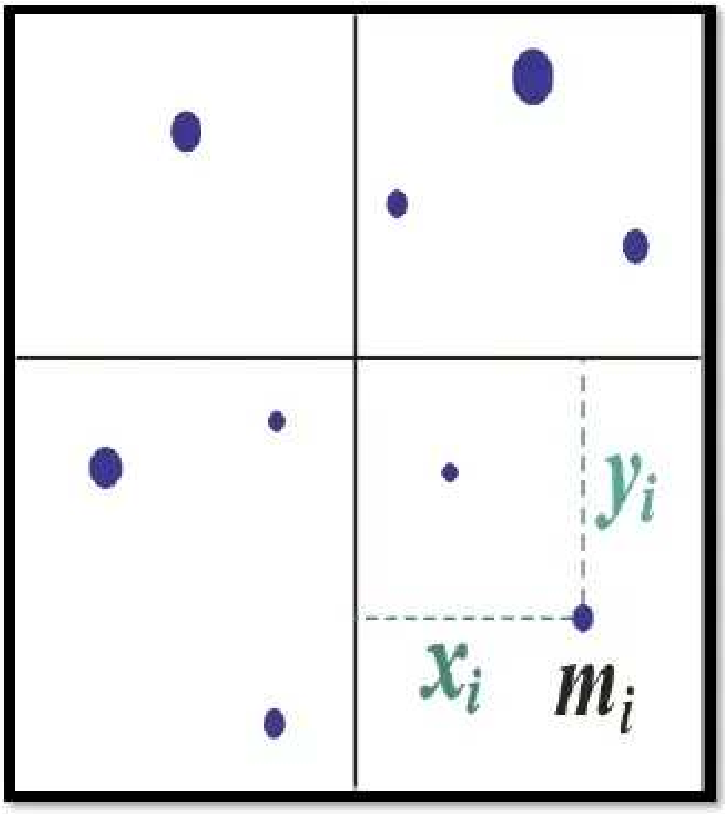
$$\overline{X} = \frac{M}{m} = \frac{\int_0^{10} x.3x^2 dx}{\int_0^{10} 3x^2 dx} = \frac{[\frac{3x^4}{4}]_0^{10}}{[x^3]_0^{10}} = \frac{7500}{1000} = 7,5cm$$

2.3. Distribusi Massa Pada Bidang

Berdasarkan koordinat kartesius, maka suatu bidang adalah suatu permukaan yang terletak pada kartesius sumbu X dan sumbu Y, sehingga dapat dirumuskan dengan :

$$\overline{X} = \frac{My}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi.mi}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\overline{Y} = \frac{Mx}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} yi.mi}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$



GAMBAR 4

CONTOH 3 :

Jika ada lima partikel dengan massa masing-masing sebesar 1, 4, 2, 3, dan 2 satuan massa yang ada di titik-titik (6,-1), (2,3), (-4,2), (-7,4), (2,-2). Tentukan pusat massanya.

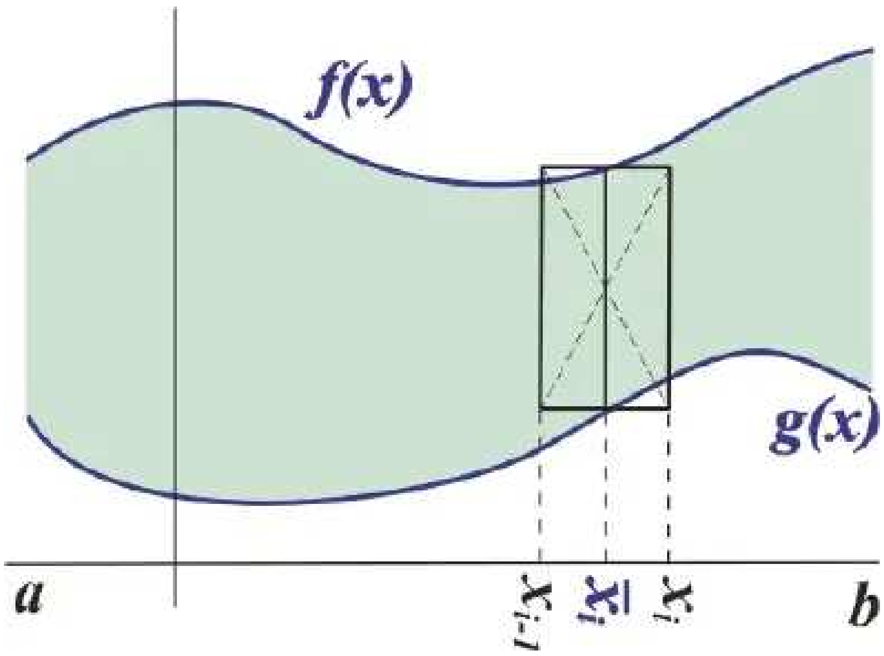
JAWAB : ➔➔➔➔

$$\overline{X} = \frac{My}{m} = \frac{(6)(1)+(2)(4)+(-4)(2)+(-7)(3)+(2)(2)}{1+4+2+3+2} = \frac{-11}{12}$$

$$\overline{Y} = \frac{Mx}{m} = \frac{(-1)(1)+(3)(4)+(2)(2)+(4)(3)+(-2)(2)}{1+4+2+3+2} = \frac{23}{12}$$

2.4. Distribusi Massa Pada Suatu Daerah

Berikutnya kita meninjau persoalan pernentuan pusat *massa lamina* (lemppeng rata lapis tipis), untuk memudahkan kita andaikan lamina itu homogeny; yakni itu lamina itu mempunyai kepadatan massa δ konstan. Untuk suatu lempeng segiempat homogeny, pusat massa berada pada pusat geometrinya, pada gambar 5 berikut



GAMBAR 5

Pusat massa persegipanjang tersebut terletak pada perpotongan diagonalnya (lihat gambar). Misalkan rapat massa keping adalah δ (konstanta),

maka:

$$\Delta m = \delta\left(f(\overline{x_i}) - g(\overline{x_i})\right)\Delta x_i \qquad m = \delta\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx$$

$$\Delta M_y = x\delta\left(f(\overline{x_i}) - g(\overline{x_i})\right)\Delta x_i \qquad M_y = \delta\int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right)\,dx$$

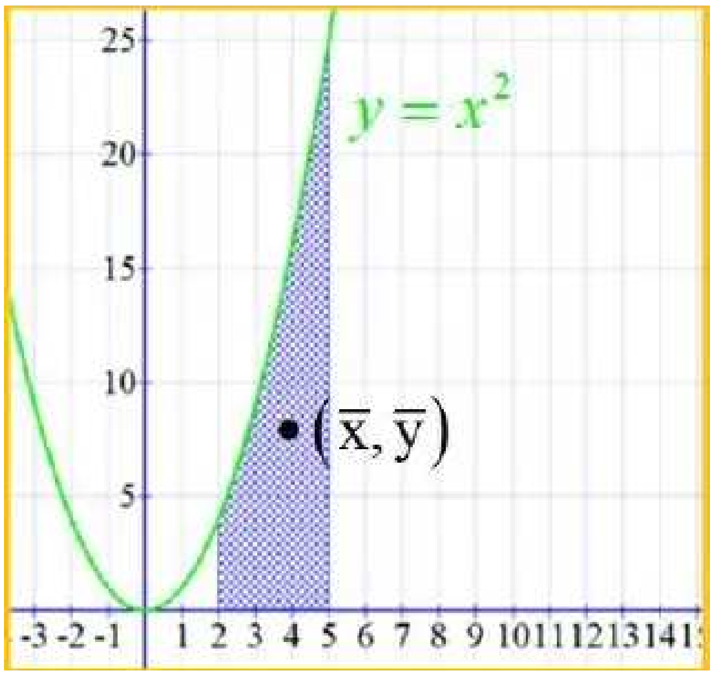
$$\Delta M_x = \frac{f(\overline{x_i}) + f(\overline{x_i})}{2}\,\delta\left(f(\overline{x_i}) - g(\overline{x_i})\right)\Delta x_i \qquad M_x = \frac{\delta}{2}\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\,dx$$

Pusat massanya (*x =My/m, y =Mx/m*). Pusat massa keping homogen ini tidak bergantung pada rapat massa δ, dan biasa disebut *sentroid*.

Catatan: Perhitungan pusat massa untuk keping tak homogen memerlukan konsep integral lipat dua, akan dipelajari pada Kalkulus 2.

CONTOH 4:

Carilah koordinat sentroid dari fungsi $y = x^2$ dengan batas kiri x_a = 2 dan batas kanan x_b =5. Seperti gambar berikut:



PENYELESAIAN :

Bagian pertama adalah integral dari y, kita hitung seperti dibawah ini.

$$\int y.\,dx = \int_2^5 x^2.\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^5$$

$$\int y.\,dx = \left(\tfrac{1}{3}.5^3\right) - \left(\tfrac{1}{3}.2^3\right) = \tfrac{125}{3} - \tfrac{8}{3} = \tfrac{117}{3}$$

Bagian kedua adalah integral dari x.y, dihitung seperti ini.

$$\int x.\,y.\,dx = \int_2^5 x.\,x^2.\,dx = \int_2^5 x^3.\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_2^5$$

$$\int x.\,y.\,dx = \left(\tfrac{1}{4}.5^4\right) - \left(\tfrac{1}{4}.2^4\right) = \tfrac{625}{4} - \tfrac{16}{4} = \tfrac{609}{4}$$

Kemudian, kita tuliskan kembali formula integral untuk mencari koordinat titik sentroid dari bidang yang diarsir warna biru seperti ditunjukan oleh gambar diatas.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int xy.dx}{\int y.dx}}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{1}{2}.\frac{\int y^2.dx}{\int y.dx}}$$

Dan bagian ketiga, kita menghitung integral dari y kuadrat seperti dibawah ini.

$$\int y^2.dx = \int_2^5 \left(x^2\right)^2.dx = \int_2^5 x^4.dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_2^5$$

$$\int y^2.dx = \left(\tfrac{1}{5}.5^5\right) - \left(\tfrac{1}{5}.2^5\right) = \frac{3125}{5} - \frac{32}{5} = \frac{3093}{5}$$

Setelah kita mendapatkan hasil dari ketiga bagian tersebut, kita bisa pakai untuk menghitung koordinat titik sentroid dari bidang yang diarsir.

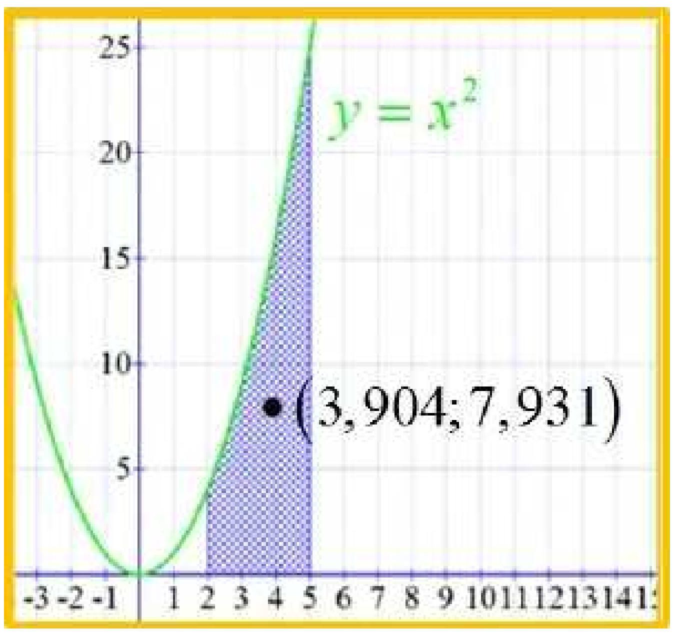
$$\bar{x} = \frac{\int xy.dx}{\int y.dx} = \frac{609/4}{117/3} = \frac{609}{4}.\frac{3}{117}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1827}{468} = 3\frac{423}{468} \approx 3{,}904}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}.\frac{\int y^2.dx}{\int y.dx} = \frac{1}{2}.\frac{3093/5}{117/3} = \frac{1}{2}.\frac{3093}{5}.\frac{3}{117}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{9279}{1170} = 7\frac{1089}{1170} \approx 7{,}931}$$

Titik terletak pada koordinat (3,9 ; 7,93)



BAB III
PENUTUP

3.1. Kesimpulan

Situasi yang baru saja diuraikan dapat digeneralisasikan yaitu jumlah momen **M** (terhadap titik asal) suatu sistem yang terdiri atas n massa berukuran$m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ yang berada pada $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sepanjang sumbu x adalah jumlah momen massa masing-masing yakni:

$$M = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n$$

Distribusi Massa Pada Suatu Garis

Andaikan suatu kawat logam diletakkan sepanjang suatu sistem koordinat dan misal kepadatan di X adalah α(x) maka titik seimbangnya :

$$\overline{X} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x.\alpha(x)dx}{\int_a^b \alpha(x)dx}$$

Distribusi Massa Pada Bidang

$$\overline{X} = \frac{My}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi.mi}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\overline{Y} = \frac{Mx}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} yi.mi}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

3.2. Saran

Perhatikan bahwa untuk menghitung integral lipat duanya kita mengambil proyeksi daerah D terhadap sumbu X atau terhadap sumbu Y. Perhatikan kembali kedua gambar pada masalah di atas, yang pertama bila proyeksinya pada sumbu X adalah selang $[a,b]$ sedangkan yang kedua, bila proyeksinya terhadap sumbu Y adalah selang $[c,d]$. Untuk memudahkan perhitungannya, seringkali kita harus membuat transformasi ke koordinat kutub.

DAFTAR PUSTAKA

Purell dan Varberg.2010. *Kalkulus Jilid 1 Edisi 9.*Jakarta : Penerbit Erlangga

Purnomo,Dwi.2012. *Kalkulus Peubah Banyak.* Diakses melalui e-book

https://dwipurnomoikipbu.files.wordpress.com/2012/03/bab-i-sistem-koordinat.doc. Pada tanggal 10 Februari 2019

Stewart, James. 2003. **Kalkulus Edisi Keempat Jilid 2**. Jakarta : Erlangga