

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

И. С. ГРУЗМАН

Новосибирский государственный технический университет

## MATHEMATICAL PROBLEMS OF COMPUTER-AIDED TOMOGRAPHY

I. S. GRUZMAN

*The methods of projection data acquisition and tomographic images reconstruction on the basis of Radon transformation are reviewed.*

*Рассмотрены методы получения проекционных данных и восстановления томографических изображений на основе интегральных преобразований Радона.*

[www.issep.rssi.ru](http://www.issep.rssi.ru)

## ВВЕДЕНИЕ

Желание заглянуть внутрь непрозрачного объекта, не разрушив его, существовало на протяжении многих веков развития человечества. Первым шагом в решении этой проблемы было открытие В.К. Рентгеном незадолго до конца 1895 года X-лучей, проникающих через плотные вещества. Это величайшее открытие произвело ошеломляющее впечатление не только на ученых того времени, но и на всех образованных людей мира. Ведь X-лучи, которые впоследствии в России были названы рентгеновскими, позволяли заглянуть внутрь непрозрачных тел и видеть сквозь них. Естественно, что самый большой интерес к практическому применению рентгеновских лучей проявила медицина. Рентгеновские лучи позволяли получать изображения внутренних органов человека, обнаруживать посторонние предметы внутри его тела, переломы и т.п.

В основе формирования рентгеновских изображений лежит использование эффекта неодинаковой рентгеновской плотности веществ. Одни вещества пропускают лучи лучше, другие хуже. Пройдя через тело и попав на чувствительную пленку, лучи засвечивают участки пленки тем сильнее, чем меньше плотность вещества.

Возможность оценки взаимного расположения различных органов тела, их точной геометрической формы при таком методе исследования существенно ограничена. Основной причиной является то, что мы получаем плоское (двумерное) теневое изображение объемного (трехмерного) объекта. Теневое рентгеновское изображение представляет собой сумму изображений слоев тела, которые находятся на различных расстояниях от пленки. При этом внутренние органы тела на рентгеновском изображении наслаиваются друг на друга и важные особенности их пространственного расположения значительно искажаются или полностью утрачиваются. Задачи получения изображения каждого изолированного слоя объекта, не искаженного никакими наложениями, и восстановления его внутренней

структуры решает современная компьютерная томография (от греч. *tómos* — слой, срез).

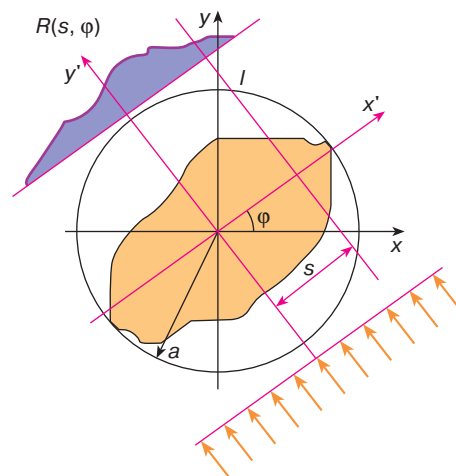
Математические основы компьютерной томографии были заложены задолго до появления первых рентгеновских компьютерных томографов. Еще в 1917 году математик И. Радон предложил метод решения обратной задачи интегральной геометрии, состоящий в восстановлении (реконструкции) многомерных функций по их интегральным характеристикам. Однако этот метод не нашел практического применения до тех пор, пока не появились рентгеновские установки, позволяющие получать большое число высококачественных снимков, необходимых для восстановления внутренней структуры реальных объектов, и быстродействующие ЭВМ, способные эти снимки обрабатывать. Первый в мире рентгеновский компьютерный томограф был продемонстрирован Хаунсфилдом в 1972 году. Внедрение методов компьютерной томографии в медицину позволило существенно повысить эффективность диагностики и обеспечило создание новых методов лечения. В настоящее время методы компьютерной томографии также широко используются в электронной и рентгеновской микроскопии — для получения структур кристаллов и макромолекул, в геофизике — для поиска и разведки месторождений полезных ископаемых, в астрофизике — для исследования полей планет и в других областях науки и техники.

## ПОЛУЧЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ

В основе большинства томографов лежит идея, состоящая в том, что внутреннюю структуру объекта можно представить получив ряд параллельных поперечных сечений. Поэтому главная задача компьютерной томографии состоит в получении двумерного (плоского) изображения поперечного сечения исследуемого объекта, которая и будет рассмотрена далее.

Метод получения двумерного томографического изображения содержит два этапа. На первом этапе формируются проекционные данные, на втором по проекционным данным восстанавливается изображение поперечного сечения.

Чтобы определить внутреннюю структуру объекта, необходимо получить информацию о ней. Для этого используется излучение, проникающее сквозь объект. Пусть необходимо определить плотность распределения вещества  $f(x, y)$  в сечении объекта. Исследуемый объект в пределах тонкого поперечного слоя просвечивается, например, параллельным пучком хорошо сфокусированных рентгеновских лучей (рис. 1). Направление лучей составляет некоторый угол  $\varphi$  с осью  $x$ . Лучи ослабляются веществом, находящимся внутри объекта, пропорционально его плотности. С противоположной



**Рис. 1.** Схема получения проекций

стороны объекта располагается устройство, регистрирующее интенсивность каждого луча, прошедшего через объект. При этом полагается, что лучи распространяются в объекте вдоль прямой линии  $l$ , определяемой уравнением

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0, \quad (1)$$

где  $s$  — расстояние от начала координат до соответствующего луча (см. рис. 1). Тогда интенсивность луча на выходе из объекта равна интегралу от искомого распределения  $f(x, y)$  вдоль траектории луча  $l$ :

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - y' \sin \varphi, s \sin \varphi + y' \cos \varphi) dy', \quad (2)$$

где связь между исходной системой координат  $\{x, y\}$  и повернутой на угол  $\varphi$  системой координат  $\{x', y'\}$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \end{aligned}$$

а уравнение прямой (1) в системе координат  $\{x', y'\}$  имеет вид

$$x' - s = 0.$$

Регистрируемое излучение  $R(s, \varphi)$  называется радонским образом или проекцией, а преобразование (2) — преобразованием Радона. Проекции вычисляются под всевозможными углами  $\varphi$  и для тех значений  $s$ , при которых двумерная функция  $f(x, y)$  отлична от нуля. На практике величина  $s$  ограничивается физическими размерами исследуемого объекта, а угол  $\varphi$  изменяется в пределах от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , так как при изменении угла на  $180^\circ$  просвечивание ведется в строго обратном направлении, поэтому  $R(s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi)$ . Удобно ввести в

рассмотрение окружность радиуса  $a$ , охватывающую исследуемое поперечное сечение. В этом случае интеграл в (2) имеет вид

$$R(s, \varphi) = \int_{-\sqrt{a^2-s^2}}^{\sqrt{a^2-s^2}} f(s \cos \varphi - y' \sin \varphi, s \sin \varphi + y' \cos \varphi) dy'. \quad (3)$$

Таким образом, каждое значение радоновского образа  $R(s, \varphi)$  есть интеграл от тех значений функции  $f(x, y)$ , которые она принимает вдоль луча  $l$ , определяемого параметрами  $s$  и  $\varphi$ .

В качестве примера вычислим радоновский образ для двух гауссовских импульсов, описываемых соотношением

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^2 \exp \left\{ -\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{2b^2} \right\}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), находим [1]

$$R(s, \varphi) = \sum_{i=1}^2 b \sqrt{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi - s)^2}{2b^2} \right\}.$$

Функция (4) и соответствующий ей радоновский образ изображены на рис. 2. Видно, что функция и радоновский образ совсем непохожи друг на друга. Однако между радоновским образом и функцией, порождающей его, имеется взаимно однозначное соответствие, которое и лежит в основе всех алгоритмов реконструкции томографических изображений.

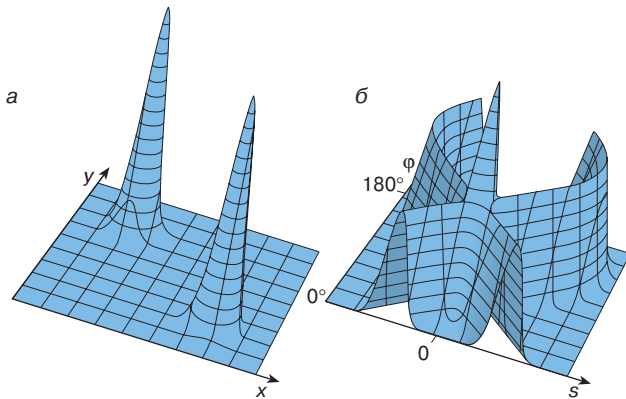


Рис. 2. Функция (а) и ее радоновский образ (б)

## КЛАССИЧЕСКАЯ ТОМОГРАФИЯ

До появления ЭВМ в медицине использовалась так называемая классическая томография. Ее идея состоит в следующем. Пусть необходимо получить изображение объекта в плоскости  $B$  (рис. 3). Для этого фотопленка помещается в плоскости  $C$ , а источник рентгеновского

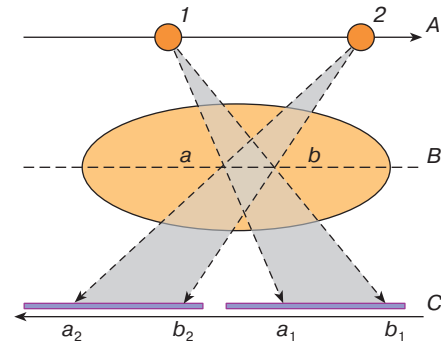


Рис. 3. Схема классической томографии

излучения — в плоскости  $A$ . Плоскости  $A$  и  $C$  параллельны плоскости  $B$ . Источник рентгеновского излучения и фотопленка перемещаются в противоположных направлениях с одинаковой скоростью. В этом случае точка пересечения осей источника рентгеновского излучения лежит на плоскости  $B$ . Потому изображение плоскости  $B$ , в частности точек  $a$  и  $b$  (см. рис. 3), на фотопленке в плоскости  $C$  будет неподвижным. В то же время точки, которые лежат вне плоскости  $B$ , будут отображаться в различные места фотопленки на плоскости  $C$ . Поэтому на фотопленке изображение плоскости  $B$  четкое, а изображения остальных сечений объекта размываются за счет движения, создавая искажения томографического изображения.

Несмотря на относительную простоту описанного метода, это было лишь частичное решение задачи формирования томографического изображения сечения, так как получаемое классическим методом изображение сечения  $B$  остается значительно затененным другими слоями исследуемого объекта.

## АЛГОРИТМ ОБРАТНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Простейшим алгоритмом реконструкции изображений в компьютерной томографии является алгоритм обратного проецирования.

Оценка плотности  $f(x, y)$  вычисляется следующим образом. Проекция  $R(s, \varphi)$  функции двух переменных  $f(x, y)$  для каждого значения угла  $\varphi$  представляет собой одномерную функцию. Ее можно преобразовать в двумерную функцию, зафиксировав угол  $\varphi$  и растянув (выполнив обратное проецирование) по всей плоскости  $(x, y)$  в соответствии с выражением

$$R_\varphi(x, y) = R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi). \quad (5)$$

Очевидно, что сечение двумерной функции  $R_\varphi(x, y)$  равно  $R(s, \varphi)$ , если секущая плоскость перпендикулярна плоскости  $(x, y)$  и ее проекция на плоскость  $(x, y)$  с осью  $x$  составляют угол  $\varphi$ . Далее осуществляется сложение всех

обратных проекций  $R_\varphi(x, y)$  для  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . В результате получим суммарное изображение  $\hat{f}_{on}(x, y)$ , которое используется в качестве оценки функции плотности  $f(x, y)$ . Суммарное изображение определяется соотношением

$$\hat{f}_{on}(x, y) = \int_0^\pi R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi. \quad (6)$$

Операция обратного проецирования имеет простую геометрическую интерпретацию. На рис. 4, а показана схема получения трех проекций под углами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  по двумерному изображению  $f(x, y)$ , описываемому функцией (4). Изображение  $f(x, y)$  на рис. 4 представляет собой вид сверху изображения, приведенного на рис. 2, а, где большим значениям функции  $f(x, y)$  соответствует меньший уровень яркости и наоборот. Полученные проекции  $R(s, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , растягиваем в соответствии с (5) и суммируем. Результат реконструкции функции  $f(x, y)$  по трем проекциям приведен на рис. 4, б. Видно, что, несмотря на искажения в виде полос, изображение, восстановленное лишь по трем проекциям, имеет много общего с функцией  $f(x, y)$ . Полосы являются результатом растягивания проекций. По их направлению можно оценить углы проекций.

При обратном проецировании каждая точка на изображении превращается в многолучевую звезду, число лучей которой равно удвоенному числу проекций. С увеличением числа проекций эти лучи будут сливаться и восстанавливаемое изображение все больше будет похоже на функцию  $f(x, y)$ , однако оно с ней никогда не совпадет. На рис. 5, в показан результат применения алгоритма обратного проецирования для восстановления функции  $f(x, y)$  (см. рис. 5, а) по 180 равноотстоящим по углу проекциям, изображение которых приведено на рис. 5, б. В данном случае полосы уже незаметны и практически все детали рис. 5, а можно рассмотреть на восстановленной томограмме. Од-

нако контрастность и четкость такого изображения остаются неудовлетворительными.

Таким образом, идея алгоритма обратного проецирования состоит в том, что оценку плотности  $f(x, y)$  в любой точке с координатами  $(x, y)$  находят путем суммирования лучей, проходящих через эту точку.

## СВЕРТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ

Невысокая эффективность алгоритма обратного проецирования объясняется тем, что он является эвристическим (полученным опытным путем). Для того чтобы точно восстановить функцию  $f(x, y)$  по проекциям  $R(s, \varphi)$ , необходимо найти преобразование, обратное преобразованию Радона. По сути для определения неизвестной функции  $f(x, y)$  необходимо решить интегральное уравнение (2) или (3). Впервые такое решение было предложено Радонам. Одной из возможных реализаций этого решения является сверточный алгоритм, который благодаря простоте и высокой точности нашел широкое применение в компьютерных томографах.

Сверточный алгоритм определяется соотношением

$$f(x, y) = \int_0^\pi \tilde{R}(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi, \quad (7)$$

где

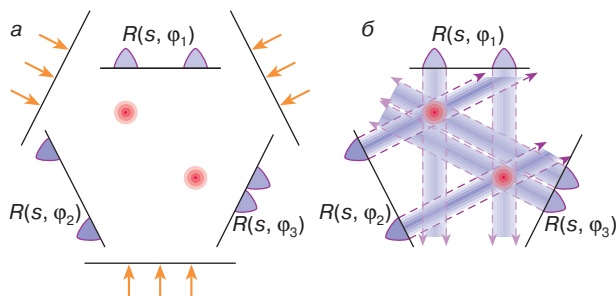
$$\begin{aligned} \tilde{R}(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) &= \tilde{R}(s, \varphi) = \\ &= \int_{-a}^a h(s_1) R(s - s_1, \varphi) ds_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) представляет собой операцию свертки проекции  $R(s, \varphi)$  (при фиксированном угле  $\varphi$ ) с функцией

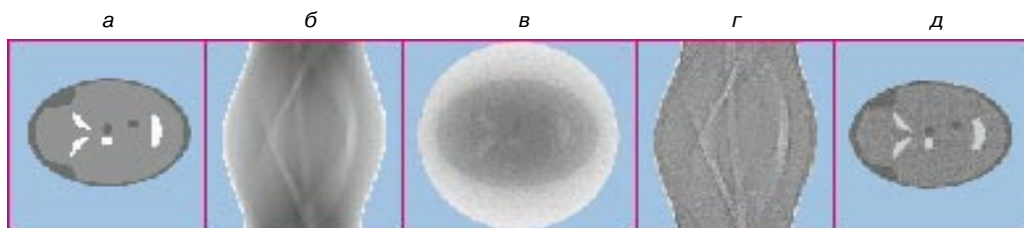
$$h(s_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \cos(\omega s_1) d\omega.$$

Очевидно, что операция, описываемая соотношением (7), является операцией обратного проецирования. Из (7) и (8) следует, что обратное преобразование Радона реализуется с помощью сверточного алгоритма в два этапа. На первом этапе выполняется свертка по первой переменной проекции, результатом которой являются модифицированные проекции  $\tilde{R}(s, \varphi)$ . На втором этапе осуществляется их обратное проецирование.

На рис. 5, д показан результат восстановления функции  $f(x, y)$  сверточным алгоритмом по модифицированным проекциям, изображение которых приведено на рис. 5, г. Неидеальность восстановления объясняется тем, что число проекций, полученных под различными



**Рис. 4.** Схема восстановления томограммы по алгоритму обратного проецирования: а – получение проекций, б – суммирование обратных проекций



**Рис. 5.** Примеры восстановления томографического изображения методом обратного проецирования и сверточным алгоритмом: а – эталонное изображение  $f(x, y)$ ; б – проекции  $R(s, \varphi)$ ; в – результат восстановления алгоритмом обратного проецирования; г – модифицированные проекции  $\tilde{R}(s, \varphi)$ ; д – результат восстановления сверточным алгоритмом

углами зондирования, и число лучей являются конечными. В приведенном примере число лучей равно 128, а число проекций – 180. Это ограничение принципиально, так как в реальных компьютерных томографах технически невозможно получить бесконечное число проекций и измерять интенсивность излучения для всех возможных значений  $s$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели лишь два простейших алгоритма восстановления томографических изображений. За время, прошедшее с появления первого рентгеновского компьютерного томографа, томография превратилась в бурно развивающуюся область науки и техники. В томографах стали использовать новые источники излучения, появились новые принципы формирования томографических изображений и, естественно, новые математические методы восстановления изображений. Проблемы восстановления томографических изображений широко освещаются в литературе. В частности, ее математическим, техническим и вычислительным аспектам посвящены работы [1–5].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Троицкий И.Н. Статистическая теория томографии. М.: Радио и связь, 1989.
2. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. М.: Мир, 1983.
3. Троицкий И.Н. Компьютерная томография. М.: Знание, 1988.
4. Левин Г.Г., Вишняков Г.Н. Оптическая томография. М.: Радио и связь, 1989.
5. Реконструктивная и вычислительная томография // ТИИЭР: (Темат. вып.). 1983. Т. 71, № 3.

*Рецензент статьи* В.А. Брусин

\* \* \*

Игорь Семенович Грузман, доктор технических наук, профессор кафедры теоретических основ радиотехники Новосибирского государственного технического университета. Область научных интересов – статистические методы цифровой обработки многомерных сигналов и изображений. Автор и соавтор более 90 научных работ и трех учебных пособий для студентов.