

Спецкурс
"Обработка изображений.
Часть 2: Линейные системы

А.В. Тузиков.

Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси
Факультет прикладной математики и информатики Белгосуниверситета
2024 г.

Оглавление

2	Линейные системы	3
2.1	Линейные пространственно-инвариантные системы	3
2.1.1	Свертка и функция рассеяния точки	3
2.1.2	Передаточная функция	4
2.1.3	Преобразование Фурье	5
2.1.4	Преобразование Фурье для операции свертки	6
2.1.5	Обобщенные функции и единичные импульсы	7
2.1.6	Частные производные и свертка	7
2.1.7	Корреляция и энергетический спектр	9
2.2	Обработка дискретных изображений	10
2.2.1	Пространственная дискретизация изображений	11
2.2.2	Теорема отсчетов	12
2.2.3	Дискретное преобразование Фурье	13
2.3	Быстрые алгоритмы дискретного преобразования Фурье	15
2.3.1	Дискретное преобразование Фурье и обратное к нему	15
2.3.2	Алгоритм быстрого преобразования Фурье	17
2.3.3	Алгоритм Кули-Тьюки (1965)	20
2.3.4	Алгоритм Кули-Тьюки по основанию 2	21
2.4	Китайские теоремы об остатках	22
2.4.1	Кольцо целых чисел	22
2.4.2	Кольцо многочленов	24
2.4.3	Алгоритм Гуда-Томаса быстрого преобразования Фурье (1960-1963)	24
2.5	Выделение границ на полутоновых изображениях	25
2.5.1	Дифференциальные операторы	25
2.5.2	Локальные операторы и шум	27
2.5.3	Дискретные аппроксимации	28

Глава 2

Линейные системы

2.1 Линейные пространственно-инвариантные системы

Рассмотрим систему, которая при входных сигналах $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ дает выходные сигналы $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$.

Система называется *линейной*, если для любых чисел α и β при входном сигнале $\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)$ на ее выходе генерируется сигнал $\alpha g_1(x, y) + \beta g_2(x, y)$.

Большинство реальных систем имеют различные ограничения (ограничения по величине отклика, неотрицательные значения рассматриваемых данных) и поэтому не могут быть строго линейными.

Система называется *пространственно-инвариантной*, если для произвольных a и b реакция системы на смещенный входной сигнал $f(x - a, y - b)$ есть смещенный выходной сигнал $g(x - a, y - b)$.

На практике имеются ограничения, например, по площади и поэтому пространственная инвариантность справедлива только для ограниченных сдвигов. Имеются технические ограничения оптических зрительных систем, поэтому такие системы только ограниченно пространственно-инвариантны.

Простой пример линейной пространственно-инвариантной системы служит система, реализующая оператор дифференцирования.

2.1.1 Свертка и функция рассеяния точки

Рассмотрим систему, реакция которой на входной сигнал $f(x, y)$ имеет вид

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi, y - \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Свертка линейна и пространственно-инвариантна. Обозначение $g = f \otimes h$.

Можно ли для произвольной функции $h(x, y)$ найти такой входной сигнал $f(x, y)$, что

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi, y - \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Понятно, что функция $f(x, y)$ равняется нулю во всех точках за исключением точки 0 и "бесконечности" в нуле. Такая функция называется *единичным импульсом* или *дельта функцией Дирака* и обозначается $\delta(x, y)$. Для дельта функции предполагается выполнение условия $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1$. Это обобщенная функция, которую можно рассматривать как "предел" при $\epsilon \rightarrow 0$ последовательности квадратных импульсов $\delta_{\epsilon}(x, y)$ размером 2ϵ по осям x и y и высотой $\frac{1}{4\epsilon^2}$.

Фильтрующее свойство дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi, y - \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta = h(x, y) \quad (2.1)$$

Функцию $h(x, y)$ называют *функцией рассеяния точки* или *импульсной переходной функцией*.

Можно доказать, что выход любой линейной пространственно-инвариантной системы образуется путем свертки входного сигнала. Действительно, используя фильтрующее свойство дельта-функции имеем

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta,$$

что является "пределом" при $\epsilon \rightarrow 0$ ϵ -аппроксимации $f_{\epsilon}(x, y)$ функции $f(x, y)$, т.е.

$$f_{\epsilon}(x, y) = 4\epsilon^2 \sum_k f(x_k, y_k) \delta_{\epsilon}(x - x_k, y - y_k).$$

Используя линейность системы, ее пространственную инвариантность и зная реакцию на единичный импульс, получаем в "пределе" что реакцией системы на $f(x, y)$ будет $f(x, y) \otimes h(x, y)$.

Импульсная переходная функция является исчерпывающей характеристикой линейной пространственно-инвариантной системы.

Свойства свертки

1. коммутативность, т.е. $a \otimes b = b \otimes a$;
2. ассоциативность, т.е. $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$. Поэтому каскад двух систем с импульсными переходными характеристиками h_1 и h_2 является системой с характеристикой $h_1 \otimes h_2$.

2.1.2 Передаточная функция

Собственной функцией системы называется функция, которая воспроизводится системой возможно только с изменением амплитуды. Так, в двумерной линейной пространственно-инвариантной системе входной сигнал $f(x, y) =$

$e^{+i(ux+vy)}$ приводит к

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i(u(x-\xi)+v(y-\eta))} h(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= e^{+i(ux+vy)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(u\xi+v\eta)} h(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= e^{+i(ux+vy)} H(u, v). \end{aligned}$$

Таким образом, комплексная экспонента является собственной функцией двумерной линейной пространственно-инвариантной системы (ЛПИС). Величина

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(u\xi+v\eta)} h(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

называется *передаточной функцией* двумерной системы. Для каждой частоты эта функция позволяет определить амплитуду и фазу реакции системы.

Комплексная экспонента $e^{+i(ux+vy)}$ имеет две синусоидальные гармоники $\cos(ux + vy)$ и $\sin(ux + vy)$. Максимумы и минимумы $\cos(ux + vy)$ лежат на параллельных прямых $ux + vy = k\pi$. Период этих гармоник равен $2\pi/\sqrt{u^2 + v^2}$. Изображения гармоники $\sin(ux + vy)$ для некоторых значений u и v показаны на Рис. 2.1.

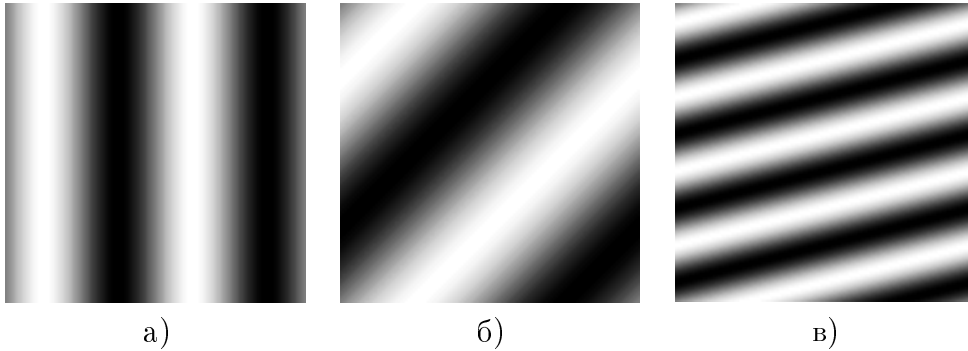


Рис. 2.1. Изображения гармоники $\sin(ux + vy)$ для $0 \leq x, y \leq 2\pi$ для различных значений u и v , начало координат находится в левом верхнем углу: а) $u = 2, v = 0$; б) $u = 1, v = 1$; в) $u = 1, v = 4$.

2.1.3 Преобразование Фурье

Преобразованием Фурье функции $f(x, y)$ называется функция $F(u, v)$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{-i(u\xi+v\eta)} d\xi d\eta,$$

если интеграл существует. Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{+i(ux+vy)} du dv.$$

Небольшая асимметрия в записи коэффициентов прямого и обратного преобразования Фурье используется для соответствия с системой, принятой в других книгах. Почти симметричность прямого и обратного преобразования Фурье дает возможность проводить аналогии в свойствах этих преобразований. Однако следует иметь в виду, что $f(x, y)$ действительная функция, а $F(u, v)$ в общем случае комплексная функция.

Проблемы:

- преобразование Фурье существует не для всех функций;
- интегралы вычисляются по всей плоскости, а зрительные устройства дают более или менее приемлемые изображения только в ограниченной части плоскости, причем при компьютерной обработке используются только дискретные изображения.

2.1.4 Преобразование Фурье для операции свертки

Преобразование Фурье свертки $c = a \otimes b$ функций имеет вид

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(x - \xi, y - \eta) b(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] e^{-i(ux+vy)} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(x - \xi, y - \eta) e^{-i(ux+vy)} dx dy \right] b(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(x - \xi, y - \eta) e^{-i(u(x-\xi)+v(y-\eta))} dx dy \right] \\ &\quad b(\xi, \eta) e^{-i(u\xi+v\eta)} d\xi d\eta = A(u, v) B(u, v), \end{aligned}$$

где $A(u, v)$ и (u, v) – преобразования Фурье функций $a(x, y)$ и $b(x, y)$ соответственно.

Соотношение

$$C(u, v) = A(u, v) B(u, v)$$

является основным доводом в пользу использования частотной области, так как операция свертки в пространственной области сводится к более экономичной операции произведения в частотной области. Из симметричности прямого и обратного преобразования Фурье следует, что преобразование Фурье произведения двух функций

$$d(x, y) = a(x, y) b(x, y) \text{ равно } D(u, v) = (1/4\pi^2) A(u, v) \otimes B(u, v).$$

Значение свертки в точке $(x, y) = (0, 0)$ равно

$$\begin{aligned} c(0, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(-\xi, -\eta) b(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(u, v) B(u, v) du dv. \end{aligned}$$

Отметим, что преобразование Фурье функции $a(-x, -y)$ есть $A^*(u, v)$, т.е. функция комплексно-сопряженная к $A(u, v)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(-\xi, -\eta) e^{-i(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi, \eta) e^{+i(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi, \eta) \cos(u\xi + v\eta) d\xi d\eta + i \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi, \eta) \sin(u\xi + v\eta) d\xi d\eta = \\ &= A^*(u, v). \end{aligned}$$

Поэтому имеем результат равенства энергий в пространственной и частотной области спектра (*теорема Рэлея*), т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^2(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A(u, v)|^2 du dv. \quad (2.2)$$

Дискретный аналог носит название *теоремы Парсеваля*.

2.1.5 Обобщенные функции и единичные импульсы

1. Отметим, что интеграл от одномерного единичного импульса есть одномерная ступенчатая функция

$$\int_{-\infty}^x \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 1/2 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

2. Преобразование Фурье единичного импульса (на основе фильтрующего свойства) равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi, \eta) e^{-i(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta = 1.$$

- 3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ua + vb)} du dv = 4\pi^2 \delta(a, b). \quad (2.3)$$

2.1.6 Частные производные и свертка

Как связаны преобразование Фурье $F(u, v)$ исходной функции $f(x, y)$ и ее частных производных $\partial f / \partial x$ и $\partial f / \partial y$?

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} e^{-i(ux + vy)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} e^{-iux} dx \right] dy.$$

Внутренний интеграл берется по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} e^{-iux} dx = \left[f(x, y) e^{-iux} \right]_{-\infty}^{\infty} + (iu) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-iux} dx$$

Если выполняется $f(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} e^{-i(ux+vy)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} (iu) e^{-iuy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-iux} dx \right] dy = iuF(u, v).$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} e^{-i(ux+vy)} dx dy = ivF(u, v).$$

Отсюда следует, что преобразование Фурье усиливает высокочастотные компоненты и подавляет низкочастотные компоненты входного изображения. В частности, постоянный тон либо составляющая с нулевой частотой полностью теряются.

Лапласиан функции $f(x, y)$ определяется как

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Следовательно преобразование Фурье лапласиана равно

$$-(u^2 + v^2)F(u, v).$$

Функцию $-(u^2 + v^2)$ можно рассматривать как передаточную функцию лапласиана и эта функция обладает круговой симметрией.

Найдем импульсную переходную характеристику системы, выполняющей дифференцирование $\partial f / \partial x$ входного изображения, т.е.

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} iue^{i(ux+vy)} du dv \quad (2.4)$$

Принимая во внимание (2.3), имеем, что (2.4) эквивалентно нахождению $\partial \delta(x, y) / \partial x$. Эту производную можно рассматривать как предел последовательности функций

$$\delta_{x,\epsilon}(x, y) = \frac{1}{2\epsilon} \left(\delta(x + \epsilon, y) - \delta(x - \epsilon, y) \right).$$

Функция $\delta_{x,\epsilon}(x, y)$ называется *дуплетом* и представляет из себя два близко расположенных импульса противоположной полярности. Дифференцирование аналогично нахождению предела свертки

$$f(x, y) \otimes \delta_{x,\epsilon}(x, y) = \frac{f(x + \epsilon, y) - f(x - \epsilon, y)}{2\epsilon}.$$

Импульсная характеристика системы, реализующей лапласиан, представляет из себя предел последовательности функций, обладающих круговой симметрией, например

$$L_{\sigma}(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - \sigma^2}{2\pi\sigma^6} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}.$$

2.1.7 Корреляция и энергетический спектр

Взаимная корреляция функций $a(x, y)$ и $b(x, y)$ определяется следующим образом

$$\varphi_{ab}(x, y) = a(x, y) * b(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi - x, \eta - y) b(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Отличие от свертки состоит в перемене местами аргументов, т.е.

$$a(x, y) \otimes b(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(x - \xi, y - \eta) b(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Если $b(x, y) = a(x, y)$, то корреляция называется *автокорреляцией*.

Свойства автокорреляции

1. симметричность, т.е. $\varphi_{aa}(-x, -y) = \varphi_{aa}(x, y)$;
2. максимум в точке $(0, 0)$, т.е. $\varphi_{aa}(0, 0) \geq \varphi_{aa}(x, y)$ для любых (x, y) ;
3. если $b(x, y) = a(x - x_0, y - y_0)$, то $\varphi_{ab}(x_0, y_0) \geq \varphi_{ab}(x, y)$ для любых (x, y) . Максимум в точке (x_0, y_0) может быть не единственный, особенно если функция $a(x, y)$ периодическая. Это свойство широко используется при поиске объектов на изображении по заданному эталону. При этом предполагается, что объекты изображения и эталон имеют одинаковый масштаб и ориентацию. Взаимная корреляция функций иллюстрируется на Рис. 2.2;
4. Если $b(x, y)$ мало отличается от сдвинутой функции $a(x, y)$, то величину сдвига можно оценить путем нахождения максимума φ_{ab} ;
5. Преобразования Фурье взаимных корреляций и автокорреляций Φ_{ab} и Φ_{aa} называют *энергетическими спектрами* (ЭС).

$$\Phi_{aa}(u, v) = |A(u, v)|^2 = A^*(u, v)A(u, v),$$

где $A^*(u, v)$ – комплексно-сопряженная к $A(u, v)$ функция. Поэтому понятно, что Φ_{aa} действительная функция. Величина $\Phi_{aa}(u, v) \delta u \delta v$ для малых $\delta u, \delta v$ равна энергии изображения в прямоугольной области частотного диапазона изображения, ограниченной значениями $u, u + \delta u$ и $v, v + \delta v$. Этим объясняется происхождение термина энергетический спектр.

Свойства энергетического спектра

- ЭС не зависит от сдвига изображения, так как сдвиг влияет только на фазу преобразования Фурье. Если объект можно распознать по энергетическому спектру, то его можно распознать независимо от его положения на изображении;
- Энергетический спектр неоднозначно определяет функцию, ЭС может существовать даже, если преобразование Фурье функции не сходится.

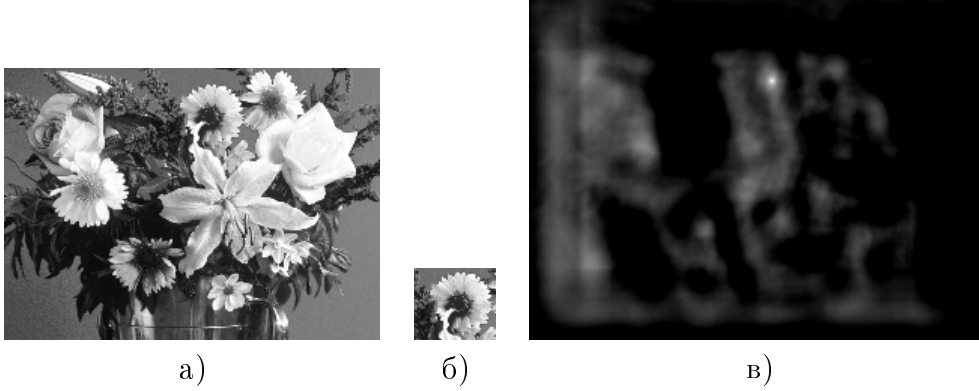


Рис. 2.2. Взаимная корреляция изображений: а) исходное изображение; б) фрагмент изображения; в) взаимная корреляция изображения и фрагмента. Максимум взаимной корреляции соответствует положению фрагмента на исходном изображении.

2.2 Обработка дискретных изображений

Рассмотрим функцию, заданную в ограниченной прямоугольной области шириной W и высотой H . В этом случае преобразование Фурье имеет вид

$$F(u, v) = \int_{-H/2}^{H/2} \int_{-W/2}^{W/2} f(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy,$$

Далее показывается, что функция, ограниченная в замкнутой области, содержит гораздо меньше информации, чем функция, не обладающая этим свойством.

Расширим функцию $f(x, y)$ до периодической в обоих направлениях функции $\tilde{f}(x, y)$

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{при } |x| \leq W/2, |y| \leq H/2, \\ f(x - kW, y - lH) & \text{при } |x| > W/2, |y| > H/2, \end{cases}$$

где

$$k = \left[\frac{x + W/2}{W} \right], \quad l = \left[\frac{y + H/2}{H} \right].$$

Здесь $[x]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее x . Найдем преобразование Фурье \tilde{F} функции \tilde{f}

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-H/2}^{H/2} \int_{-W/2}^{W/2} f(x, y) e^{-i(u(x-kW)+v(y-lH))} dx dy \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{iukW} e^{ivlH} F(u, v). \end{aligned}$$

Можно доказать, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u, v) &= 4\pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(uW - 2\pi k) \delta(vH - 2\pi l) F(u, v) \\ &= \frac{4\pi^2}{WH} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(u - \frac{2\pi k}{W}) \delta(v - \frac{2\pi l}{H}) F(u, v) \end{aligned}$$

Понятно, что $\tilde{F}(u, v)$ равна нулю всюду за исключением дискретного набора частот $\{2\pi k/W, 2\pi l/H\}$. Таким образом для нахождения $\tilde{f}(x, y)$ достаточно знать $F(u, v)$ только для этого дискретного набора частот (счетное множество значений) позволяет восстановить \tilde{f} , а затем простым отсечением участка для $|x| \leq W, |y| \leq H$ получить функцию $f(x, y)$.

Можно считать, что $f(x, y) = \tilde{f}(x, y)w(x, y)$, где $w(x, y)$ – функция выделения окна

$$w(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq W/2, |y| \leq H/2, \\ 0 & \text{при } |x| > W/2, |y| > H/2 \end{cases}$$

Тогда преобразование Фурье функции $f(x, y)$ есть свертка преобразований Фурье функций $\tilde{f}(x, y)$ и $w(x, y)$. Последнее имеет следующий вид (см. Рис. 2.3)

$$\mathcal{W}(u, v) = WH \frac{\sin(uW/2)}{uW/2} \frac{\sin(vH/2)}{vH/2}. \quad (2.5)$$

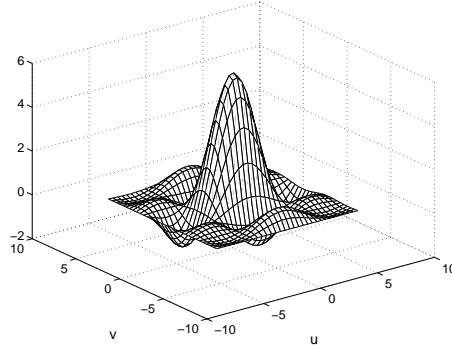


Рис. 2.3. График функции (2.5) для $-2\pi \leq u, v \leq 2\pi$, $W = 2$, $H = 3$.

Таким образом, преобразование Фурье $\tilde{F}(u, v)$ периодической функции $\tilde{f}(x, y)$ с периодом по x равным W и периодом по y равным H является дискретным с шагом дискретизации $2\pi/W$ и $2\pi/H$ по переменным u и v соответственно. А преобразование Фурье $F(u, v)$ функции $f(x, y)$, заданной в ограниченной

прямоугольной области шириной W и высотой H , вычисляется в виде свертки дискретной функции $\tilde{F}(u, v)$ и функции $\mathcal{W}(u, v)$. Период затухания функции $\mathcal{W}(u, v)$ равен $4\pi/W$ и $4\pi/H$ по переменным u и v соответственно. Поэтому в свертке значения $F(u, v)$ в дискретных узлах входят с коэффициентами чередующимися по знаку и затухающими по величине по мере удаления от вычисляемой точки. В узлах дискретизации функции $\tilde{F}(u, v)$ и $F(u, v)$ совпадают.

2.2.1 Пространственная дискретизация изображений

Предположим, что задано дискретное изображение

$$f(x, y) = wh \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{kl} \delta(x - kw, y - lh),$$

где w и h обозначают соответственно горизонтальный и вертикальный шаги решетки. Найдем преобразование Фурье функции f

$$\begin{aligned} F(u, v) &= wh \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{kl} \delta(x - kw, y - lh) e^{-i(ux+vy)} dx dy \\ &= wh \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{kl} e^{-i(ukw+vlh)}. \end{aligned}$$

Получена периодическая функция с периодом по w равным $2\pi/w$ и периодом по h равным $2\pi/h$. Поэтому можно отбросить все значения $F(u, v)$ для $|u| > \pi/w$ и $|v| > \pi/h$, так как они не нужны для восстановления функции $f(x, y)$.

Найдем функцию $\tilde{f}(x, y)$, которая имеет преобразование Фурье $\tilde{F}(x, y)$, совпадающее с $F(x, y)$ в указанной выше области и 0 вне ее, т.е.

$$\tilde{F}(u, v) = \begin{cases} F(u, v) & \text{при } |u| \leq \pi/w, |v| \leq \pi/h, \\ 0 & \text{при } |u| > \pi/w, |v| > \pi/h. \end{cases}$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/w}^{\pi/w} F(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv.$$

Эта функция определена для всех (x, y) , но интерес представляют ее значения в точках решетки $(x, y) = (kw, lh)$. Преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y) &= \frac{wh}{4\pi^2} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/w}^{\pi/w} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{kl} e^{-i(ukw+vlh)} e^{i(ux+vy)} du dv \\ &= \frac{wh}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{kl} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/w}^{\pi/w} e^{i(u(x-kw)+v(y-lh))} du dv \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{kl} \frac{\sin[\pi(x/w - k)]}{\pi(x/w - k)} \frac{\sin[\pi(y/h - l)]}{\pi(y/h - l)} \end{aligned}$$

При $(x, y) = (kw, lh)$ получаем f_{kl} . Между точками решетки функция $\tilde{f}(x, y)$ интерполируется с помощью ядра преобразования, равного произведению двух членов вида $\sin(x)/x$ и $\sin(y)/y$.

2.2.2 Теорема отсчетов

Как было показано ранее, функция с ограниченным частотным спектром полностью определяется отсчетами в узлах регулярной решетки (*теорема отсчетов*). Если $F(u, v) = 0$ при $|u| > \pi/w$ и $|v| > \pi/h$, то $f(x, y)$ можно полностью восстановить по набору значений $f_{kl} = f(kw, lh)$, где k, l пробегают все целые числа. В этом случае справедлива интерполяционная формула

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{kl} \frac{\sin[\pi(x/w - k)]}{\pi(x/w - k)} \frac{\sin[\pi(y/h - l)]}{\pi(y/h - l)}.$$

Этот результат оправдывает пространственную дискретизацию изображения. В случае достаточно гладкой функции (в смысле ограниченности ее частотного спектра) никакая информация не теряется при дискретизации функции. Если δ – интервал пространственной дискретизации функции, то функцию можно восстановить по дискретным значениям, если спектр функции не содержит частот, больших частоты *Найквиста*, равной π/δ .

2.2.3 Дискретное преобразование Фурье

Если изображение является дискретным и периодическим, то его спектр также является периодическим и дискретным. Если изображение задается значениями f_{kl} функции $f(x, y)$ в точках (kw, lh) , $k = 0, 1, \dots, M-1$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, то прямое преобразование Фурье можно записать в виде

$$F_{mn} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{kl} e^{-i2\pi(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N})},$$

а обратное

$$f_{kl} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F_{mn} e^{+i2\pi(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N})}.$$

Примеры выполнения дискретного преобразования Фурье для нескольких бинарных изображений показаны на Рис. 2.4.

Отметим, что рассматриваемое преобразование относится к изображению, которое периодически. При несовпадении значений яркости на левом (либо верхнем) и правом (соответственно нижнем) краях изображения функция яркости будет иметь разрыв. Этот разрыв приведет к появлению высокочастотных составляющих в Фурье-образе.

Существуют несколько способов борьбы с этим эффектом:

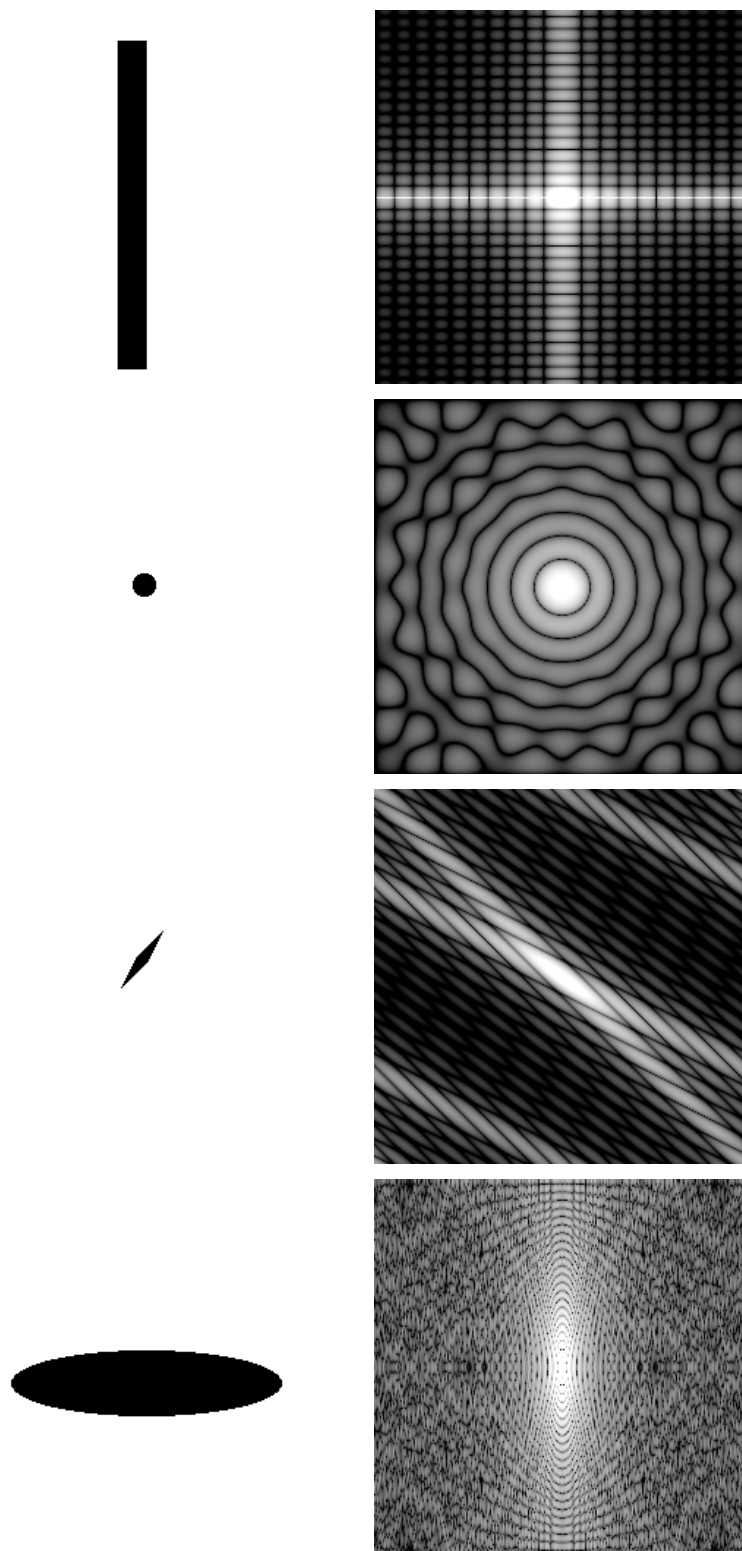


Рис. 2.4. Бинарные объекты изображения размера 256×256 и амплитуды $|F(m, n)|$ их Фурье спектра. Для улучшения визуального отображения спектра частота $(0, 0)$ сдвинута в центр изображения, а величина амплитуды показана в логарифмической шкале.

- Первый состоит в зеркально переворачивании копий изображения относительно боковых граней (при продолжении изображения вправо и влево) перед подстыковкой. Аналогичное преобразование только относительно верхней и нижней граней выполняется при продолжении изображения вверх и вниз. Полученная функция является периодической и непрерывной, однако ее производная имеет разрывы в местах подстыковки. Кроме того эта функция четная и имеет период в два раза больший, чем полученная обычным копированием (без зеркального отображения) функция. Четность функции приводит к тому, что преобразование Фурье имеет только косинусные составляющие и называется *косинусным преобразованием*;
- Второй способ заключается в умножении функции на модулирующую функцию (или *функцию выделения окна*), обращающуюся в нуль на границе. Это приводит к согласованности подстыкованных частей изображения. Моделирующая функция должна быть настолько гладкой, чтобы не вносить искажения в результат. Приведем пример функции выделения окна

$$\frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{W}\right) \right) \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi y}{H}\right) \right) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{W}\right) \cos^2\left(\frac{\pi y}{H}\right).$$

Преобразование Фурье промодулированного изображения равно умноженной на $4\pi^2$ свертке преобразований Фурье исходного изображения и функции выделения окна. Преобразование Фурье приведенной выше функции выделения окна равно

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \delta\left(\frac{2\pi}{W} - u\right) + \delta(u) + \frac{1}{2} \delta\left(\frac{2\pi}{W} + u\right) \right) \times$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \delta\left(\frac{2\pi}{H} - v\right) + \delta(v) + \frac{1}{2} \delta\left(\frac{2\pi}{H} + v\right) \right).$$

Таким образом, каждое значение Фурье образа промодулированной функции представляет собой взвешенную сумму значений Фурье образа исходной функции с маской

$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Одна из причин популярности дискретного преобразования Фурье (ДПФ) состоит в том, что известен быстрый алгоритм его вычисления. Алгоритм непосредственного вычисления ДПФ требует $M^2 N^2$ умножений. Алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) требует $4MN \log_2 MN$ умножений. Это достигается за счет эффективного использования промежуточных результатов.

2.3 Быстрые алгоритмы дискретного преобразования Фурье

2.3.1 Дискретное преобразование Фурье и обратное к нему

Будем определять преобразование Фурье над произвольным коммутативным кольцом $(R, +, \cdot, 0, 1)$. Для простоты можно считать, что имеем кольцо комплексных чисел.

Элемент w из R , обладающий свойством

1. $w \neq 1$,
2. $w^n = 1$,
3. $\sum_{j=0}^{n-1} w^{jp} = 0, \quad 1 \leq p < n$

называется *примитивным корнем n -степени* из 1. Элементы w^0, w^1, \dots, w^{n-1} называются *корнями n -ой степени* из 1.

Например, $w = e^{2\pi i/n}$, где $i = \sqrt{-1}$ является примитивным корнем n -ой степени из единицы в кольце комплексных чисел.

Пусть $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^t$ – n -мерный вектор из R . Предположим, что элемент n обладает в этом кольце обратным элементом и w – примитивный корень n -ой степени из единицы в этом кольце. Пусть A – такая $n \times n$ матрица, что $A[i, j] = w^{ij}$ для $0 \leq i, j < n$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & \dots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \dots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Дискретным преобразованием Фурье вектора a называется вектор

$$F(a) = Aa,$$

i -ая компонента которого равна $\sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{ik}$.

Лемма 1 Пусть R – коммутативное кольцо, w – примитивный корень n -ой степени из единицы и n как элемент кольца R имеет в нем обратный. Пусть A – такая $n \times n$ матрица, что $A[i, j] = w^{ij}$, $0 \leq i, j < n$. Тогда существует обратная матрица A^{-1} и ее (i, j) -ый элемент равен $\frac{1}{n} w^{-ij}$.

Обратным дискретным преобразованием Фурье вектора a называется вектор

$$F^{-1}(a) = A^{-1}a,$$

i -ая компонента которого равна $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-ik}$, $0 \leq i < n$.

Очевидно, что $F^{-1}(F(a)) = a$.

Преобразование Фурье тесно связано с поведением полиномов и их интерполяцией. Пусть $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ – полином $(n-1)$ -ой степени. Его можно однозначно представить списком его коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_{n-1} и списком его значений в n различных точках. Преобразование Фурье эквивалентно вычислению значений полинома в точках w^0, w^1, \dots, w^{n-1} . Аналогично, обратное преобразование Фурье эквивалентно интерполяции (нахождению коэффициентов) полинома по его значениям в корнях n -ой степени из единицы.

Одно из основных приложений преобразования Фурье – вычисления свертки двух векторов. Пусть $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^t$ и $b = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^t$ – два вектора. Их *сверткой* называется вектор $c = a \otimes b$ такой, что

$$c_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{i-j}, \quad i = 0, 1, \dots, 2n-2.$$

Полагаем $b_k = 0$, для $k < 0$ и $k \geq n$.

Произведение двух полиномов степени $n-1$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad \text{и} \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

является полиномом степени $2n-2$

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{2n-2} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i = \sum_{i=0}^{2n-2} c_i x^i,$$

коэффициенты которого – в точности компоненты свертки векторов коэффициентов полиномов $p(x)$ и $q(x)$.

Формула

$$a \otimes b = F^{-1}(F(a)F(b))$$

иллюстрирует тот факт, что для нахождения свертки достаточно вычислить покомпонентное произведение значений двух полиномов в корнях n -ой степени из единицы, получив значения полинома произведения в этих точках. Обратное преобразование Фурье дает коэффициенты этого полинома (свертки) по его значениям.

Проблема состоит в том, что произведение двух полиномов степени $n-1$ является полиномом степени $2n-2$ и для его задания требуются значения в $2n-2$ точках. Теорема 1 показывает, как можно преодолеть эту трудность.

Теорема 1 Пусть

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0, \dots, 0)^t \quad \text{и} \quad b = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, 0, \dots, 0)^t -$$

векторы размерности $2n$, а

$$F(a) = (a'_0, a'_1, \dots, a'_{2n-1})^t \quad \text{и} \quad F(b) = (b'_0, b'_1, \dots, b'_{2n-1})^t -$$

их преобразования Фурье. Тогда

$$a \otimes b = F^{-1}(F(a)F(b)).$$

Определение 1 Пусть $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^t$ и $b = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^t$ – два n -мерных вектора. Циклической сверткой векторов a и b называется такой вектор $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^t$, что

$$c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} + \sum_{j=i+1}^{n-1} a_j b_{n+i-j}.$$

Циклическая свертка задает коэффициенты полинома $p(x)q(x) \bmod (x^n - 1)$ степени $n - 1$.

Теорема 2 Пусть $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^t$ и $b = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^t$ – два n -мерных вектора, а w – примитивный корень n -ой степени из единицы, и элемент n имеет обратный. Тогда циклическая свертка векторов a и b равна

$$F^{-1}(F(a)F(b)).$$

2.3.2 Алгоритм быстрого преобразования Фурье

Очевидно, что преобразование Фурье вектора $a \in \mathbf{R}^n$ можно вычислить за $O(n^2)$ операций в предположении, что операция над элементами кольца выполняется за 1 шаг. Однако, если $n = 2^k$, то вычисления можно выполнить за $O(n \log n)$ шагов.

Пусть $n = 2^k$. Вычисление вектора Aa эквивалентно вычислению значений полинома $p(x)$ в точках w^0, w^1, \dots, w^{n-1} . Но вычисление значения полинома в точке $x = b$ эквивалентно нахождению остатка от деления $p(x)$ на $x - b$ (это следует из того, что $p(x) = (x - b)q(x) + c$, где c – константа). Тогда $p(b) = c$. Таким образом, нужно найти остатки от деления $p(x)$ на каждый из полиномов $x - w^0, x - w^1, \dots, x - w^{n-1}$. Пусть c_0, c_1, \dots, c_{n-1} – некоторая перестановка элементов w^0, w^1, \dots, w^{n-1} . Определим полиномы $q_{l,m}(x)$, где $0 \leq m \leq k$, а l – кратное целое числа 2^m , $0 \leq l \leq 2^k - 1$,

$$q_{l,m}(x) = \prod_{j=l}^{l+2^m-1} (x - c_j).$$

Таким образом, $q_{0,k}(x) = (x - c_0)(x - c_1) \cdots (x - c_{n-1})$, $q_{l,0}(x) = x - c_l$ и в общем случае

$$q_{l,m}(x) = q_{l,m-1}(x)q_{l+2^{m-1},m-1}(x)$$

Цель состоит в вычислении остатка $p(x)$ на $q_{l,0}(x)$ для каждого l . Для этого вычислим остатки от деления $p(x)$ на $q_{l,m}(x)$, начиная с $m = k - 1$ и кончая $m = 0$.

Допустим, что уже вычислены полиномы $r_{l,m}(x)$, остающиеся от деления $p(x)$ на $q_{l,m}(x)$. Поскольку $q_{l,m}(x) = q'(x)q''(x)$, где $q'(x) = q_{l,m-1}(x)$, $q''(x) = q_{l+2^{m-1},m-1}(x)$, то можно показать, что остаток от деления $p(x)$ на $q'(x)$ равен остатку от деления $r_{l,m}(x)$ на $q'(x)$. Аналогичное справедливо и для $q''(x)$.

Действительно, предположим, что

$$p(x) = h(x)q_{l,m}(x) + r_{l,m}(x),$$

Разделим обе части на $q'(x)$ и получим, что остаток от деления от деления $p(x)$ на $q'(x)$ равен остатку от деления $r_{l,m}(x)$ на $q'(x)$.

Таким образом, можно получить остатки от деления $p(x)$ на $q'(x)$ и $q''(x)$, разделив на $q'(x)$ и $q''(x)$ соответственно полином $r_{l,m}(x)$ степени $2^m - 1$, а не полином степени $2^k - 1$. Этот метод выполнения делений сам по себе дает экономии времени. Но можно сделать еще больше. Выбрав подходящий порядок элементов c_0, c_1, \dots, c_{m-1} для степеней w , можно добиться, чтобы каждый полином $q_{l,m}(x)$ имел вид $x^{2^m} - w^s$ при некотором s . Деление на такие полиномы выполняется особенно просто.

Лемма 2 Пусть $n = 2^k$ и w — примитивный корень степени n из единицы. Пусть $[d_0, d_1, \dots, d_{k-1}]$ — двоичное представление целого числа j , где $j < 2^k$, а $\text{rev}(j)$ — целое число с двоичным представлением $[d_{k-1}, d_{k-2}, \dots, d_0]$. Пусть $c_j = w^{\text{rev}(j)}$ и $q_{l,m}(x) = \prod_{j=l}^{l+2^m-1} (x - c_j)$. Тогда $q_{l,m}(x) = x^{2^m} - w^{\text{rev}(l/2^m)}$.

Доказательство. Рассмотрим индукцию по m . При $m = 0$ имеем $q_{l,0}(x) = x - w^{\text{rev}(l)}$. Для проведения шага индукции при $m > 0$ заметим, что

$$q_{l,m}(x) = q_{l,m-1}(x)q_{l+2^{m-1},m-1}(x) = (x^{2^{m-1}} - w^{\text{rev}(l/2^{m-1})})(x^{2^{m-1}} - w^{\text{rev}(l/2^{m-1}+1)}).$$

Здесь $l/2^{m-1}$ — четное число между 0 и 2^{k-1} . Тогда $w^{\text{rev}(l/2^{m-1}+1)} = w^{2^{k-1}+\text{rev}(l/2^{m-1})} = -w^{\text{rev}(l/2^{m-1})}$, так как $w^{2^{k-1}} = w^{n/2} = -1$. Следовательно, $q_{l,m}(x) = x^{2^m} - w^{2\text{rev}(l/2^{m-1})} = x^{2^m} - w^{\text{rev}(l/2^m)}$. □

Лемма 3 Пусть $p(x) = \sum_{j=0}^{2t-1} a_j x^j$ и c — постоянная. Тогда остаток от деления $p(x)$ на $x^t - c$ равен $r(x) = \sum_{j=0}^{t-1} (a_j + c a_{j+t}) x^j$.

Справедливость леммы следует из того, что $p(x)$ можно представить в виде.

$$\left(\sum_{j=0}^{t-1} a_{j+t} x^j \right) (x^t - c) + r(x).$$

Следовательно остаток от деления произвольного полинома степени $2^t - 1$ на $x^t - c$ можно найти за $O(t)$ шагов.

Алгоритм 1 Быстрое преобразование Фурье

Вход: вектор $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^t$, $n = 2^k$ для некоторого целого числа k .

Выход: $F(a) = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^t$, где $b_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j w^{ji}$, $0 \leq i < n$.

Пусть $r_{0,k}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$. Будем обозначать через $r_{l,m}(x)$ остаток от деления полинома $r_{0,k}(x)$ на $q_{l,m}(x)$.

```

for( $m = k - 1; m = 0; m = m - 1$ ) {
  for( $l = 0; l \leq n - 1; l = l + 2^{m+1}$ ) {
    Пусть  $r_{l,m+1}(x) = \sum_{j=0}^{2^{m+1}-1} a_j x^j$ 
    Вычисляем остатки меньшей степени,
    используя коэффициенты полинома  $r_{l,m+1}$ 
     $s := rev(\frac{l}{2^m})$ ;
     $r_{l,m}(x) := \sum_{j=0}^{2^m-1} (a_j + w^s a_{j+2^m}) x^j$ ;
     $r_{l+2^m,m}(x) := \sum_{j=0}^{2^m-1} (a_j - w^s a_{j+2^m}) x^j$ ;
  }
}
for( $l = 0; l \leq n - 1; l = l + 1$ )  $b_{rev(l)} := r_{l,0}$ ;

```

Пример 1 Если $n = 8$, то список c_0, c_1, \dots, c_7 есть $w^0, w^4, w^2, w^6, w^1, w^5, w^3, w^7$. Поэтому полиномы $q_{l,m}(x)$ равны соответственно:

1. $q_{0,3}(x) = x^8 - w^0$;
2. $q_{0,2}(x) = x^4 - w^0$, $q_{4,2}(x) = x^4 - w^4$;
3. $q_{0,1}(x) = x^2 - w^0$, $q_{2,1}(x) = x^2 - w^4$, $q_{4,1}(x) = x^2 - w^2$, $q_{6,1}(x) = x^2 - w^6$;
4. $q_{0,0}(x) = x - w^0$, $q_{1,0}(x) = x - w^4$, $q_{2,0}(x) = x - w^2$, $q_{3,0}(x) = x - w^6$, $q_{4,0}(x) = x - w^1$, $q_{5,0}(x) = x - w^5$, $q_{6,0}(x) = x - w^3$, $q_{7,0}(x) = x - w^7$.

Вначале вычисляются остатки $r_{0,2}(x)$ и $r_{4,2}(x)$ от деления $p(x)$ на $q_{0,2}(x)$ и $q_{4,2}(x)$. Затем вычисляются остатки $r_{0,1}$ и $r_{2,1}$ от деления $r_{0,2}(x)$ на $q_{0,1}(x)$ и $q_{2,1}(x)$, а также остатки $r_{4,1}$ и $r_{6,1}$ от деления $r_{4,2}(x)$ на $q_{4,1}(x)$ и $q_{6,1}(x)$. На последнем шаге вычисляются $r_{0,0}$, $r_{1,0}$, $r_{2,0}$, $r_{3,0}$, $r_{4,0}$, $r_{5,0}$, $r_{6,0}$, $r_{7,0}$.

Рассмотрим шаги алгоритма.

1. $r_{0,3}(x) = \sum_{j=0}^7 a_j x^j$;
2. $m = 2, l = 0$.
 $(s = 0, w^0 = 1) :$ $r_{0,2}(x) = (a_3 + a_7)x^3 + (a_2 + a_6)x^2 + (a_1 + a_5)x + (a_0 + a_4)$;
 $(s = 0, w^{0+4}) :$ $r_{4,2}(x) = (a_3 + w^4 a_7)x^3 + (a_2 + w^4 a_6)x^2 + (a_1 + w^4 a_5)x + (a_0 + w^4 a_4)$.

3. $m = 1$, l принимает значения 0 и 4.

$$\begin{aligned}
 (s = 0, w^0) : \quad & r_{0,1}(x) = (a_1 + a_5 + a_3 + a_7)x + \\
 & (a_0 + a_4 + a_2 + a_6); \\
 (s = 0, w^{0+4}) : \quad & r_{2,1}(x) = (a_1 + a_5 + w^4a_3 + w^4a_7)x + \\
 & (a_0 + a_4 + w^4a_2 + w^4a_6); \\
 (s = 2, w^2) : \quad & r_{4,1}(x) = (a_1 + w^2a_3 + w^4a_5 + w^6a_7)x + \\
 & (a_0 + w^2a_2 + w^4a_4 + w^6a_6); \\
 (s = 2, w^{2+4}) : \quad & r_{6,1}(x) = (a_1 + w^6a_3 + w^4a_5 + w^2a_7)x + \\
 & (a_0 + w^6a_2 + w^4a_4 + w^2a_6).
 \end{aligned}$$

4. $m = 0$, l принимает значения 0, 2, 4, 6.

$$\begin{aligned}
 (s = 0, w^0) : \quad & r_{0,0}(x) = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_1 + \\
 & a_3 + a_5 + a_7; \\
 (s = 0, w^{0+4}) : \quad & r_{1,0}(x) = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + w^4a_1 + \\
 & w^4a_3 + w^4a_5 + w^4a_7; \\
 (s = 2, w^2) : \quad & r_{2,0}(x) = a_0 + w^4a_2 + a_4 + w^4a_6 + \\
 & w^2a_1 + w^6a_3 + w^2a_5 + w^6a_7; \\
 (s = 2, w^{2+4}) : \quad & r_{3,0}(x) = a_0 + w^4a_2 + a_4 + w^4a_6 + \\
 & w^6a_1 + w^2a_3 + w^6a_5 + w^2a_7; \\
 (s = 4, w^1) : \quad & r_{4,0}(x) = a_0 + w^2a_2 + w^4a_4 + w^6a_6 + \\
 & w^1a_1 + w^3a_3 + w^5a_5 + w^7a_7; \\
 (s = 4, w^{1+4}) : \quad & r_{5,0}(x) = a_0 + w^2a_2 + w^4a_4 + w^6a_6 + \\
 & w^5a_1 + w^7a_3 + w^1a_5 + w^3a_7; \\
 (s = 6, w^3) : \quad & r_{6,0}(x) = a_0 + w^6a_2 + w^4a_4 + w^2a_6 + \\
 & w^3a_1 + w^1a_3 + w^7a_5 + w^5a_7; \\
 (s = 2, w^{3+4}) : \quad & r_{7,0}(x) = a_0 + w^6a_2 + w^4a_4 + w^2a_6 + \\
 & w^7a_1 + w^5a_3 + w^3a_5 + w^1a_7.
 \end{aligned}$$

Теорема 3 Алгоритм 1 имеет временную сложность $O(n \log n)$.

Доказательство. Внутренний цикл выполняется $n/2^{m+1}$ раз, причем сложность каждого шага этого цикла равна $O(2^m)$. Таким образом, сложность внутреннего цикла равна $O(n)$. Внешний цикл выполняется $\log n$ раз. Поэтому окончательная сложность алгоритма равна $O(n \log n)$. □

2.3.3 Алгоритм Кули-Тьюки (1965)

Преобразование Фурье вектора $v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$

$$V_k = \sum_{i=0}^{n-1} w^{ik} v_i, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

требует для своего вычисления порядка n^2 сложений и n^2 умножений.

Предположим, что $n = n'n''$. Сделаем следующие замены индексов

$$i = i' + n'i'', \quad i' = 0, 1, \dots, n' - 1, \quad i'' = 0, 1, \dots, n'' - 1,$$

$$k = n''k' + k'', \quad k' = 0, 1, \dots, n' - 1, \quad k'' = 0, 1, \dots, n'' - 1.$$

Тогда

$$V_{n''k'+k''} = \sum_{i''=0}^{n''-1} \sum_{i'=0}^{n'-1} w^{(i'+n'i'')(n''k'+k'')} v_{i'+n'i''}.$$

Обозначим $w^{n'} = \gamma$ и $w^{n''} = \beta$ и, учитывая, что $w^{n'n''i''k'} = 1$, имеем

$$V_{n''k'+k''} = \sum_{i'=0}^{n'-1} \beta^{i'k'} \left(w^{i'k''} \sum_{i''=0}^{n''-1} \gamma^{i''k''} v_{i'+n'i''} \right). \quad (2.6)$$

Определим двумерные переменные

$$v_{i',i''} = v_{i'+n'i''}, \quad i' = 0, 1, \dots, n' - 1, \quad i'' = 0, 1, \dots, n'' - 1,$$

$$V_{k',k''} = V_{n''k'+k''}, \quad k' = 0, 1, \dots, n' - 1, \quad k'' = 0, 1, \dots, n'' - 1.$$

В терминах двумерных преобразований формула (2.6) преобразуется к виду

$$V_{k',k''} = \sum_{i'=0}^{n'-1} \beta^{i'k'} \left(w^{i'k''} \sum_{i''=0}^{n''-1} \gamma^{i''k''} v_{i',i''} \right). \quad (2.7)$$

Алгоритм вычисления отображает вектов v в $n'' \times n'$ матрицу. Вычисления состоят из n'' -точечного дискретного преобразования Фурье каждого столбца, поэлементного умножения полученной таблицы соответственно на $w^{i''k''}$ и n' -точечного дискретного преобразования Фурье каждой строки.

При использовании формулы (2.7) число умножений $M(n)$ и число сложений $A(n)$ равны соответственно

$$M(n) = n'(n'')^2 + n''(n')^2 + n'n'' = n(n' + n'' + 1),$$

$$A(n) = n'n''(n'' - 1) + n''n'(n' - 1) = n(n' + n'' - 2).$$

Внешнее и внутренне преобразование Фурье могут быть вычислены в свою очередь с помощью быстрого алгоритма и тогда оценки сложности будут улучшены.

2.3.4 Алгоритм Кули-Тьюки по основанию 2

Предполагается, что $n = 2^m$. Для представления БПФ-алгоритма длина 2^m представляется в виде $2 \cdot 2^{m-1}$ или $2^{m-1} \cdot 2$. Если в алгоритме Кули-Тьюки полагается $n' = 2$ и $n'' = 2^{m-1}$, то он называется БПФ-алгоритмом Кули-Тьюки

по основанию 2 с *прореживанием по времени*. Учитывая, что $\beta = w^{n/2} = -1$, имеем для $k = 0, 1, \dots, n/2 - 1$

$$\begin{aligned} V_k &= \sum_{i=0}^{n/2-1} w^{2ki} v_{2i} + w^k \sum_{i=0}^{n/2-1} w^{2ki} v_{2i+1}, \\ V_{k+n/2} &= \sum_{i=0}^{n/2-1} w^{2ki} v_{2i} - w^k \sum_{i=0}^{n/2-1} w^{2ki} v_{2i+1} \end{aligned}$$

Прореживание по времени разбивает множество компонент входного вектора на два подмножества: множество компонент с четными индексами и множество компонент с нечетными индексами. Множество компонент выходного вектора разбивается при этом на множество первых $n/2$ компонент (так как индексы выходного вектора нумеруются по столбцам) и множество вторых $n/2$ компонент.

БПФ-алгоритм Кули-Тьюки, в котором $n' = 2^{m-1}$ и $n'' = 2$ называется БПФ-алгоритмом Кули-Тьюки по основанию 2 с *прореживанием по частоте*. Уравнения в этом случае имеют вид для $k' = 0, 1, \dots, n/2 - 1$

$$\begin{aligned} V_{2k'} &= \sum_{i'=0}^{n/2-1} (v_{i'} + v_{i'+n/2}) w^{2k'i'}, \\ V_{2k'+1} &= \sum_{i'=0}^{n/2-1} (v_{i'} - v_{i'+n/2}) w^{i'} w^{2k'i'} \end{aligned}$$

Прореживание по частоте разбивает компоненты входного вектора на два подмножества, содержащие соответственно первые $n/2$ компонент и вторые $n/2$ компонент. Компоненты выходного вектора разбиваются на подмножество компонент с четными индексами и подмножество компонент с нечетными индексами.

Алгоритмы с прореживанием по времени и по частоте могут быть реализованы рекурсивно, разбивая $n/2$ точечные множества аналогичным образом.

2.4 Китайские теоремы об остатках

2.4.1 Кольцо целых чисел

Теорема 4 Для заданного множества положительных попарно взаимно простых целых чисел m_0, m_1, \dots, m_k и множества неотрицательных целых чисел c_0, c_1, \dots, c_k , $c_i < m_i$, $i = 0, 1, \dots, k$, система уравнений

$$c_i = c \pmod{m_i}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

имеет не более одного решения c в интервале $0 \leq c < \prod_{i=0}^k m_i$.

Доказательство. Предположим, что s и s' являются двумя лежащими в заданном интервале решениями. Тогда для любого $i = 0, 1, \dots, k$ справедливо

$$s = q_i m_i + c_i, \quad s' = q'_i m_i + c_i$$

и, следовательно, $s - s'$ кратно m_i для каждого i , а так как все m_i взаимно просты, то $s - s'$ кратно $\prod_{i=0}^k m_i$. Но число $s - s'$ лежит в диапазоне от $-(\prod_{i=0}^k m_i) + 1$ до $(\prod_{i=0}^k m_i) - 1$. Единственным целым числом из этого диапазона, удовлетворяющим указанным выше свойством является 0, и поэтому $s = s'$. \square

Пример 2 Выберем в качестве модулей $m_0 = 3$, $m_1 = 4$, $m_2 = 5$ и положим $M = m_0 m_1 m_2 = 60$. Для заданного числа s из интервала $0 \leq s < 60$, обозначим через $c_i = R_{m_i}[s]$, $i = 0, 1, 2$, остаток от деления s на m_i (вычет по модулю m_i). Китайская теорема об остатках утверждает, что между 60 числами из интервала $[0, 59]$ и тройками (c_0, c_1, c_2) соответствующих вычетов существует взаимно однозначное соответствие. Предположим, например, что $c_0 = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Тогда имеем следующие возможности.

$$\begin{aligned} s &\in \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots, 59\}, \\ s &\in \{1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots, 57\}, \\ s &\in \{2, 7, 12, 17, 22, \dots, 57\}. \end{aligned}$$

Единственным решением служит $s = 17$.

Согласно следствию из теоремы Евклида в кольце целых чисел для любых s и t найдутся такие a и b , что

$$NOD[s, t] = as + bt,$$

где $NOD[s, t]$ обозначает наибольший общий делитель чисел s и t .

Для заданного множества попарно взаимно простых чисел m_0, m_1, \dots, m_k , используемых в качестве модулей (вычетов), положим

$$M = \prod_{i=0}^k m_i, \quad M_i = M/m_i.$$

Тогда $NOD[M_i, m_i] = 1$ и, следовательно, существуют такие целые N_i и n_i , что

$$N_i M_i + n_i m_i = 1, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Теорема 5 Пусть $M = \prod_{i=0}^k m_i$ — произведение взаимно простых положительных чисел, $M_i = M/m_i$ и пусть для каждого i число N_i удовлетворяет равенству $N_i M_i + n_i m_i = 1$. Тогда единственным решением системы

$$c_i = s \pmod{m_i}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

является

$$s = \sum_{i=0}^k c_i M_i N_i \pmod{M}.$$

Для иллюстрации теоремы 5 продолжим пример 2. Имеем $M = 60$, $M_0 = 20$, $M_1 = 15$, $M_2 = 12$. Нетрудно видеть, что $1 = (-1)M_0 + 7m_0$, $1 = (-1)M_1 + 4m_1$, $1 = (-2)M_2 + 5m_2$. Следовательно, $N_0M_0 = -20$, $N_1M_1 = -15$, $N_2M_2 = -24$. Поэтому $c = -103 = 17 \pmod{60}$.

2.4.2 Кольцо многочленов

В кольце многочленов над некоторым полем китайская теорема об остатках имеет следующий вид.

Прямые уравнения

$$c^i(x) = R_{m^i(x)}[c(x)], \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

где многочлены $m^i(x)$, $i = 0, 1, \dots, k$, взаимно просты, и $R_{m^i(x)}[c(x)]$ обозначает вычет многочлена $c(x)$ по модулю $m^i(x)$.

Обратные уравнения

$$c(x) = \sum_{i=0}^k c^i(x) M^i(x) N^i(x) \pmod{M(x)},$$

где $M(x) = \prod_{i=0}^k m^i(x)$, $M^i(x) = M(x)/m^i(x)$, и многочлены $N^i(x)$ являются решениями уравнения

$$N^i(x) M^i(x) + n^i(x) m^i(x) = 1.$$

2.4.3 Алгоритм Гуда-Томаса быстрого преобразования Фурье (1960-1963)

Пусть n' и n'' взаимно простые целые числа. Алгоритм использует отображение линейной последовательности из $n = n'n''$ целых чисел в $n' \times n''$ таблицу на основе китайской теоремы об остатках.

Входные индексы задаются вычетами

$$i' = i \pmod{n'}, \quad i'' = i \pmod{n''}$$

Согласно китайской теореме об остатках существуют такие целые числа N' и N'' , что выполняется равенство

$$i = i' N'' n'' + i'' N' n' \pmod{n}, \quad \text{где } N' n' + N'' n'' = 1.$$

Выходные индексы определяются следующим образом

$$k' = N'' k \pmod{n'}, \quad k'' = N' k \pmod{n''}$$

Справедливо,

$$k = n'' k' + n' k'' \pmod{n}.$$

Действительно,

$$k = \left(n''(N''k + Q_1n') + n'(N'k + Q_2n'') \right) \mod n'n'' = k(N''n'' + N'n') \mod n'n'' = k.$$

В новых обозначениях формула

$$V_k = \sum_{i=0}^{n-1} w^{ik} v_i,$$

преобразуется к виду

$$V_{n''k' + n'k''} = \sum_{i''=0}^{n''-1} \sum_{i'=0}^{n'-1} w^{(i'N''n'' + i''N'n')(n''k' + n'k'')} v_{i'N''n'' + i''N'n'}.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} V_{k',k''} &= \sum_{i''=0}^{n''-1} \sum_{i'=0}^{n'-1} w^{(n'')^2 i' N'' k'} w^{(n')^2 i'' N' k''} v_{i',i''} \\ &= \sum_{i''=0}^{n''-1} \sum_{i'=0}^{n'-1} \beta^{i'k'} \gamma^{i''k''} v_{i',i''}, \end{aligned}$$

где $\beta = w^{(n'')^2 N''}$ и $\gamma = w^{(n')^2 N'}$. Элементы β и γ являются простыми корнями из единицы соответственно степеней n' и n'' .

Уравнение теперь записано в форме двумерного $n' \times n''$ -точечного преобразования Фурье: вначале выполняются одномерные n'' -точечные преобразования Фурье для каждого столбца, а затем – n' -точечные преобразования Фурье для строк. Число умножений и сложений равны примерно $n(n' + n'')$. Если длина преобразования разлагается в произведение простых множителей n_i , то описанная форма БПФ-алгоритма требует примерно $n \sum_i n_i$ умножений и столько же сложений.

2.5 Выделение границ на полутонных изображениях

2.5.1 Дифференциальные операторы

Простейшей моделью края является прямая, разделяющая две контрастные области (см. Рис. 2.5) с яркостями B_1 и B_2 .

Рассмотрим ступенчатую функцию

$$u(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z > 0, \\ 1/2 & \text{при } z = 0, \\ 0 & \text{при } z < 0, \end{cases}$$

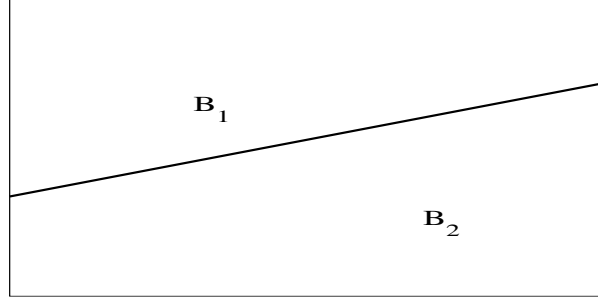


Рис. 2.5. Идеальная граница в виде прямой, разделяющей две области постоянной яркости.

которая является интегралом от одномерного единичного импульса:

$$u(z) = \int_{-\infty}^z \delta(t) dt.$$

Предположим, что край располагается вдоль прямой $x \sin \theta - y \cos \theta + p = 0$. Тогда изображение можно записать в виде

$$E(x, y) = B_1 + (B_2 - B_1)u(x \sin \theta - y \cos \theta + p).$$

Найдем частные производные $E(x, y)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= (B_2 - B_1)\delta(x \sin \theta - y \cos \theta + p) \sin \theta, \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= -(B_2 - B_1)\delta(x \sin \theta - y \cos \theta + p) \cos \theta. \end{aligned}$$

Вектор $(\partial E/\partial x, \partial E/\partial y)$ называется *градиентом яркости*. Градиент яркости представляет собой вектор, не зависящий от выбора системы координат, в том смысле, что он сохраняет свою величину и ориентацию по отношению к E , когда E поворачивается или сдвигается.

Рассмотрим квадрат градиента

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 = \left((B_2 - B_1)\delta(x \sin \theta - y \cos \theta + p)\right)^2.$$

Этот оператор, не являясь линейным, обладает круговой симметрией и действует на края одинаково при любом их угловом расположении.

Производная единичного импульса называется *дуплетом* и обозначается δ' . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= (B_2 - B_1)\delta'(x \sin \theta - y \cos \theta + p) \sin^2 \theta, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} &= -(B_2 - B_1)\delta'(x \sin \theta - y \cos \theta + p) \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} &= (B_2 - B_1)\delta'(x \sin \theta - y \cos \theta + p) \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Лапласиан изображения $E(x, y)$

$$\nabla^2 E(x, y) = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = (B_2 - B_1)\delta'(x \sin \theta - y \cos \theta + p)$$

и квадратичная вариация

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \right)^2 \\ &= \left((B_2 - B_1)\delta'(x \sin \theta - y \cos \theta + p) \right)^2 \end{aligned}$$

также обладают круговой симметрией.

В этой идеализированной модели квадратичная вариация является квадратом лапласиана. Отметим, что из рассмотренных операторов только лапласиан имеет тот же знак при переходе через край изображения, что и перепад яркости. Кроме этого, только лапласиан является линейным оператором.

2.5.2 Локальные операторы и шум

На действие дифференциальных операторов серьезное влияние оказывает шум. Простые дифференциальные операторы значительно усиливают высокочастотные компоненты изображения, относящиеся в том числе и к шуму.

Фильтрацию шума можно реализовать сверткой, например с функцией Гаусса

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.8)$$

Эта функция обладает круговой симметрией. Передаточная функция системы, реализующей свертку с функцией Гаусса имеет вид

$$H(u, v) = e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\sigma^2}.$$

Низкие частоты проходят через систему непогашенными, в то время как высокие частоты уменьшаются по амплитуде. Это особенно заметно для частот выше $1/\sigma$. Но σ – характерный размер функции Гаусса (рассеяния точки системы). Это пример зависимости между изменениями масштабов в частотной и пространственной области.

Подход Марра и Хилдрета выделения границ на нахождении лапласиана свертки изображения $f(x, y)$ с функцией Гаусса $h(x, y)$, заданной (2.8)

$$\nabla^2((h \otimes f)(x, y)) = ((\nabla^2 h) \otimes f)(x, y).$$

Лапласиан функции Гаусса равен

$$\nabla^2 h = -\frac{1}{2\pi\sigma^4} \left(1 - \frac{(x^2 + y^2)}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.9)$$

Таким образом, поиск на изображении изменений яркости состоит в предварительной фильтрации изображения с помощью $\nabla^2 h(x, y)$, пространственная постоянная которого выбирается таким образом, чтобы был обеспечен учет того масштабного уровня, к которому относятся искомые изменения яркости. Затем на отфильтрованном изображении отыскиваются точки нулевого уровня.

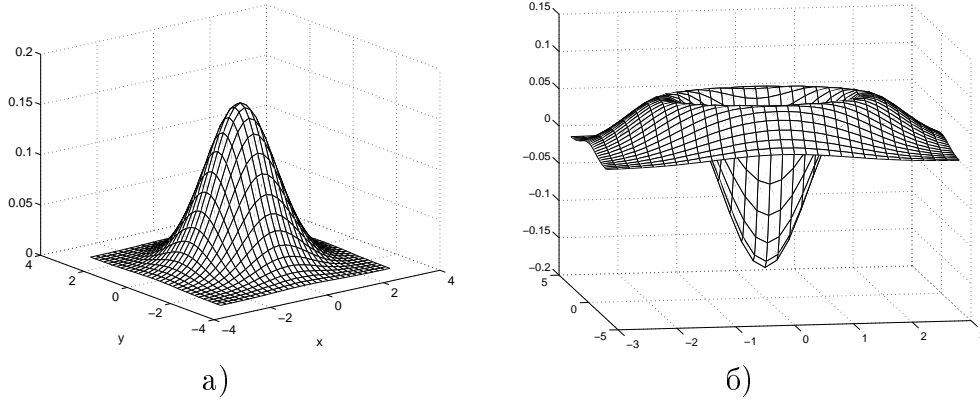


Рис. 2.6. Графики функции Гаусса (2.8) а) и лапласиана функции Гаусса (2.9) б).

2.5.3 Дискретные аппроксимации

Рассмотрим группу элементов изображения

$$\begin{array}{c|c} E_{i-1,j} & E_{i-1,j+1} \\ \hline E_{i,j} & E_{i,j+1} \end{array}$$

Производные в центральной точке этой группы можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &\approx \frac{1}{2\epsilon} \left((E_{i-1,j+1} - E_{i-1,j}) + (E_{i,j+1} - E_{i,j}) \right) \\ \frac{\partial E}{\partial y} &\approx \frac{1}{2\epsilon} \left((E_{i-1,j} - E_{i,j}) + (E_{i-1,j+1} - E_{i,j+1}) \right), \end{aligned}$$

где ϵ – расстояние между центрами соседних элементов.

Квадрат градиента можно аппроксимировать следующим образом

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 \approx \frac{1}{2\epsilon^2} \left((E_{i-1,j+1} - E_{i,j})^2 + (E_{i-1,j} - E_{i,j+1})^2 \right).$$

Выполнение этого преобразования для всего изображения позволяет усиливать края. Однако по квадрату градиента ничего нельзя сказать о направлении края. Так как вектор, направленный вдоль линии, имеет вид $(\cos \theta, \sin \theta)$, то нетрудно видеть, что градиент ортогонален краю.

Рассмотрим теперь группу элементов размером 3×3 :

$$\begin{array}{c|c|c} E_{i-1,j-1} & E_{i-1,j} & E_{i-1,j+1} \\ \hline E_{i,j-1} & E_{i,j} & E_{i,j+1} \\ \hline E_{i+1,j-1} & E_{i+1,j} & E_{i+1,j+1} \end{array}$$

Для оценки лапласиана в центральном пикселе используем следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{\epsilon^2}(E_{i,j+1} - 2E_{i,j} + E_{i,j-1}), \\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{\epsilon^2}(E_{i-1,j} - 2E_{i,j} + E_{i+1,j}).\end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right) \approx \frac{1}{\epsilon^2}(E_{i-1,j} + E_{i,j-1} + E_{i+1,j} + E_{i,j+1} - 4E_{i,j}).$$

Теперь понятно, что нахождение лапласиана можно аппроксимировать сверткой изображения с окном (маской)

$$\frac{1}{\epsilon^2} \left[\begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & \end{array} \right]$$

Другая популярная наиболее точная аппроксимация лапласиана имеет следующий вид

$$\frac{1}{6\epsilon^2} \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 1 \\ \hline 4 & -20 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

На квадратной решетке трудно найти маску, которая аппроксимирует лапласиан и является симметричной. На гексагональной решетке такой проблемы не возникает и все 6 соседей образуют маску с одинаковыми весами

$$\frac{2}{3\epsilon^2} \left[\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & -6 & 1 \\ & 1 & \end{array} \right]$$

Оператор Робертса использует диагональные разности и окно размером 2×2 для аппроксимации модуля градиента по формуле

$$|E_{i-1,j} - E_{i,j+1}| + |E_{i-1,j+1} - E_{i,j}|$$

и использует окна

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right] \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right].$$

Оператор Превитта аппроксимирует модуль градиента следующим образом

$$\begin{aligned}&|(E_{i+1,j-1} + E_{i+1,j} + E_{i+1,j+1}) - (E_{i-1,j-1} + E_{i-1,j} + E_{i-1,j+1})| + \\ &|(E_{i-1,j+1} + E_{i,j+1} + E_{i+1,j+1}) - (E_{i-1,j-1} + E_{i,j-1} + E_{i+1,j-1})|\end{aligned}$$

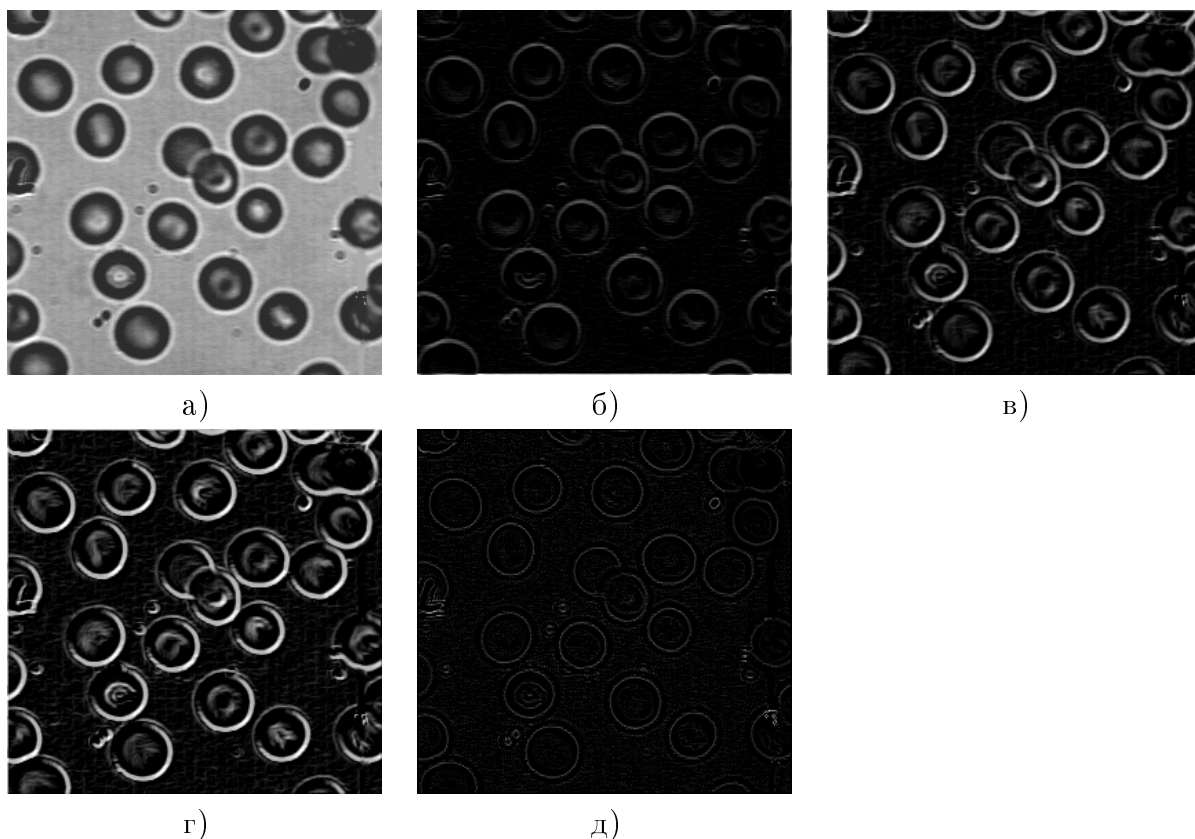


Рис. 2.7. Применение дискретных операторов: а) исходное изображение; б) оператор Робертса; в) оператор Превитта; г) аппроксимация модуля градиента оператором Собеля; д) лапласиан.

и реализуется сверткой с окнами

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & \mathbf{0} & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & \mathbf{0} & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Оператор Собеля аппроксимирует частные производные по x и y сверткой соответственно с окнами

$$\frac{1}{4} \left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & \mathbf{0} & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{и} \quad \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & \mathbf{0} & 0 \\ \hline -1 & -2 & -1 \end{array} \right].$$

Использование масок Собеля позволяет аппроксимировать модуль градиента, а также направление вектора градиента в каждом пикселе изображения.

Применение различных операторов показано на Рис. 2.7.