

Спецкурс
"Основы цифровой обработки
изображений.
Часть: Геометрические моменты"

Тузиков А.В., Шейнин С.А.
Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси
Факультет прикладной математики и информатики Белгосуниверситета
2024 г.

Содержание

1	Введение	2
2	Моменты многоугольников	4
3	Объемные и поверхностные моменты	6
4	Моменты тетраэдра	10
5	Объемные моменты многогранных объектов произвольной размерности	15
6	Поверхностные моменты для n -мерного случая	17
7	Реализация алгоритма вычисления моментов	20
8	Моменты полиномиальных функций	23
9	Моменты подграфиков параметризованных кривых	25
10	Моменты подграфиков кривых Безье и сплайнов	27
11	Объекты с замкнутой сплайновой границей	31
12	Примеры	41
12.1	Квадратичные B -сплайны	41
12.2	Кубические B -сплайны	42
12.3	Кубические интерполяционные сплайны	43
13	Вычисление объема трехмерного объекта по непараллельным сечениям	44
14	Инварианты моментов.	52
15	Аффинные инварианты моментов	53
16	Ортогональные моменты	54
17	Комплексные моменты	56

1 Введение

Одним из широко используемых в настоящее время методов в распознавании изображений является применение моментов различного типа, вычисляемых по двумерному или трехмерному изображению, а также их инвариантов. Посредством моментов и их инвариантов представляется возможным анализировать как бинарные, так и полутонные изображения, ориентировать дву- и трехмерные изображения, проводить их классификацию. Наиболее часто используются декартовы моменты, вращательные моменты, ортогональные моменты, комплексные моменты. Инварианты моментов изучались как относительно движений плоскости (пространства), так и относительно их аффинных преобразований.

Двумерный декартов момент, m_{pq} , порядка $p + q$, от функции плотности $f(x, y)$ есть

$$m_{pq} = \int \int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy$$

Двумерный момент для $(M \times N)$ -дискретизированного изображения есть

$$m_{pq} = \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{N-1} x^p y^q f(x, y).$$

Полное множество моментов порядка n состоит из всех моментов m_{pq} таких, что $p + q \leq n$ и содержит $(n + 1)(n + 2)/2$ элементов. Использование моментов для анализа изображений было предложено М. Ху в 1962 году. Теорема единственности гласит, что если $f(x, y)$ – кусочно-непрерывная функция с ограниченным носителем, то существуют моменты всех порядков. Можно показать, что множество моментов $\{m_{pq}\}$ однозначно определяется $f(x, y)$ и обратно, $f(x, y)$ однозначно определяется моментами $\{m_{pq}\}$. Поскольку сегмент изображения имеет конечную площадь и, даже в худшем случае, кусочно-непрерывен, то моменты всех порядков существуют и их совокупность однозначно описывает информацию о сегменте изображения. Множество всех моментов бесконечно, поэтому одной из задач является выделение из него конечного подмножества, содержащего достаточно полную для практических приложений информацию об объекте.

Момент нулевого порядка $m_{00} = \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$ есть масса объекта с плотностью $f(x, y)$. В случае бинарного изображения m_{00} есть площадь объекта.

Нормированные моменты порядка 1 дают координаты центра тяжести объекта: $\bar{x} = m_{10}/m_{00}$, $\bar{y} = m_{01}/m_{00}$. Центр тяжести часто оказывается полезно использовать в качестве фиксированной точки привязки. Если начало координат помещено в центр тяжести, то получающиеся моменты называются *центральными* и обозначаются μ_{pq} , $\mu_{01} = \mu_{10} = 0$.

Моменты второго порядка, m_{02}, m_{11}, m_{20} известны как моменты инерции. Они могут быть использованы для определения положения главных осей объекта, пары перпендикулярных прямых, относительно которых достигается минимум и максимум инерции. В терминах моментов направление главных осей задается формулой

$$\Phi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\mu_{11}}{\mu_{20} - \mu_{02}} \right).$$

Направление главных осей объекта может быть использовано для привязки к определенной ориентации. Моменты первого и второго порядков также позволяют определить эллипс инерции. Эллипс инерции изображения – эллиптический диск постоянной интенсивности с той же массой и моментами до второго порядка включительно, что и у исходного изображения. Он обладает тем же центром тяжести, главными осями и инерционными характеристиками, что и исходный объект.

Два центральных момента третьего порядка, $\{\mu_{30}, \mu_{03}\}$ описывают асимметрию проекций изображения. Коэффициенты асимметрии проекций образа на оси X и Y даются формулами

$$Sk_x = \mu_{30}/\mu_{20}^{3/2}, \quad Sk_y = \mu_{03}/\mu_{02}^{3/2}.$$

Равенство Sk_x и Sk_y нулю не дает гарантий симметричности объекта.

Два центральных момента четвертого порядка, $\{\mu_{40}, \mu_{04}\}$ описывают "остроконечность" проекций изображения, т.е. классическую статистическую меру "пиковости" распределения. Коэффициенты "остроконечности" для проекций изображения на оси X и Y равны

$$K_x = \mu_{40}/\mu_{20}^2 - 3, \quad K_y = \mu_{04}/\mu_{02}^2 - 3.$$

Равенство коэффициентов нулю указывает на Гауссовское распределение, если они меньше 0, то распределение имеет более плоский характер, а если больше 0, то более остроконечный характер.

Если над изображением производится преобразование, то происходит и соответствующее преобразование моментов. Следующие формулы показывают связь этих преобразований:

1. Преобразование растяжения $f'(x, y) = f(x/\alpha, y/\beta)$. Тогда

$$m'_{pq} = \alpha^{1+p} \beta^{1+q} m_{pq}, \quad \alpha \neq \beta$$

$$m'_{pq} = \alpha^{2+p+q}, \quad \alpha = \beta$$

2. Сдвиг $f'(x, y) = f(x - \alpha, y - \beta)$.

$$m'_{pq} = \sum_{r=0}^p \sum_{s=0}^q C_p^r C_q^s \alpha^{p-r} \beta^{q-s} m_{rs}.$$

3. Поворот на угол θ относительно начала координат.

$$m'_{pq} = \sum_{r=0}^p \sum_{s=0}^q C_p^r C_q^s (-1)^{q-s} (\cos \theta)^{p-r+s} (\sin \theta)^{q+r-s} m_{p+q-r-s, r+s}.$$

4. Отражение относительно оси X , $f'(x, y) = f(-x, y)$.

$$m'_{pq} = (-1)^p m_{pq}.$$

5. Изменение интенсивности изображения $f'(x, y) = \alpha f(x, y)$.

$$m'_{pq} = \alpha m_{pq}.$$

2 Моменты многоугольников

Пусть область P является многоугольником (см. Рис. 1) с n вершинами $(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ (в порядке обхода против часовой стрелки).

Задача вычисления площади или геометрических моментов многоугольника P сводится к суммированию ориентированных площадей или моментов треугольников, образованных сторонами многоугольника и началом координат, как это показано на Рис. 2. Площади (моменты) треугольников ориентированы в том смысле, что они могут быть положительными или отрицательными.

Площадь треугольника вычисляется по формуле

$$S_i = \frac{1}{2} |A_i| = \frac{1}{2} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i),$$

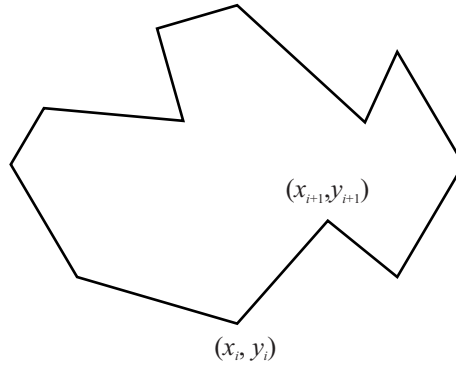


Рис. 1: Многоугольник с заданными координатами вершин.

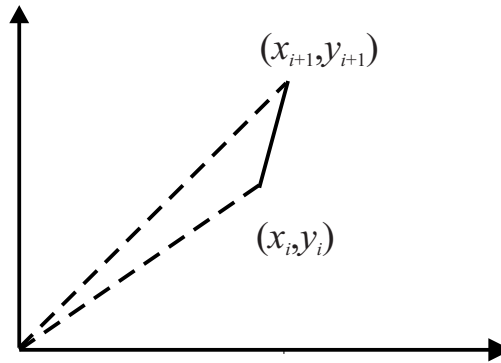


Рис. 2: Треугольник, образованный стороной многоугольника и началом координат.

где $|A_i|$ обозначает определитель матрицы

$$A_i = \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{pmatrix}$$

В результате суммирования по всем треугольникам будет получена ориентированная площадь (момент) всего многоугольника P .

Справедлива общая формула для вычисления геометрического момента $m_{pq}(P)$ многоугольника P :

$$m_{pq}(P) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \frac{p!q!(k+l)!(p+q-k-l)!}{k!l!(p-k)!(q-l)!(p+q+2)!} x_i^k x_{i+1}^{p-k} y_i^l y_{i+1}^{q-l}. \quad (1)$$

При $p = q = 0$ получаем формулу площади многоугольника:

$$m_{00}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

Из общей формулы (1) получаются формулы моментов более высоких порядков. В частности, для моментов первого и второго порядков получаем следующие формулы:

$$m_{10}(P) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (x_i + x_{i+1}),$$

$$m_{01}(P) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (y_i + y_{i+1}),$$

$$m_{20}(P) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_i x_{i+1}),$$

$$m_{02}(P) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (y_i^2 + y_{i+1}^2 + y_i y_{i+1}),$$

$$m_{11}(P) = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (2x_i y_i + 2x_{i+1} y_{i+1} + x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i).$$

3 Объемные и поверхностные моменты

Метод вычисления моментов очень сильно зависит от представления трехмерного объекта. В дискретном случае, когда тело задается своими вокселями, для вычислений моментов достаточно однократно сканировать все воксели, принадлежащие телу. Однако задача становится

значительно более сложной, если тело задано своей поверхностью. Даже в дискретном случае необходима процедура определения координат всех вокселей объекта. Одно из распространенных представлений объектов в компьютерной графике - полигональное представление, в котором объект задается сетью полигональных граней. В простейшем случае сеть полигонов - это набор многоугольников, заданных списками координат (x, y, z) своих вершин. Например, многогранник, изображенный на Рис. 3, имеет следующее представление:

```
{ 1280 320 1280 /* число вершин, граней и ребер*/
  5.40414 0.269732 0.917559 /*координаты вершин*/
  4.68585 0.381459 0.739248
  4.35375 -1.08202 1.25418
  .....
  6.00284 -3.25924e-08 0.558376
4   0 1 2 3 /*число вершин в грани и индексы вершин*/
4   4 5 6 7
4   8 9 10 11
4   12 13 14 15
  .....
4 1276 1277 1278 1279 }
```

В этом примере вершины и ребра считаются снова для каждой грани. В случае, если их считать один раз, то многогранник, изображенный на рисунке, содержит 320 вершин, 320 граней и 640 ребер.

Обозначим через $m_{k_1 k_2 k_3} V(P)$ и $m_{k_1 k_2 k_3} S(P)$ объемные и поверхностные моменты порядка $p + q + r$ трехмерного компактного объекта P (который в дальнейшем предполагается многогранником),

$$m_{k_1 k_2 k_3} V(P) = \int_P x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dx dy dz \quad (2)$$

$$m_{k_1 k_2 k_3} S(P) = \int_{S(P)} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dS \quad (3)$$

Здесь первый из интегралов вычисляется по объему P , а второй — по поверхности P .

Аналогично определяются моменты для объектов произвольной размерности.

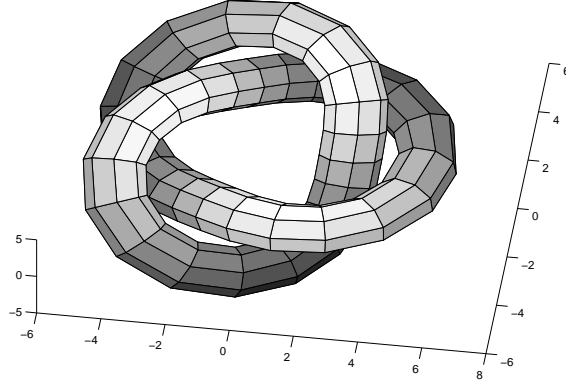


Рис. 3: Многогранник "трилистник" содержащий 320 вершин, 320 граней и 640 ребер.

Разобьем каждую грань многогранника на треугольники (ориентированные). Пусть вершины каждой грани упорядочены и пронумерованы против часовой стрелки (со стороны внешней нормали). Начиная с некоторой вершины v_0 обозначим их $v_1, v_2, \dots, v_n = v_0$ (для грани с n вершинами). Тогда i -й треугольник разбиения имеет вершины v_0, v_i, v_{i+1} , $i = 1, \dots, n - 2$. Пусть $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}$ — соответствующие радиус-вектора этих вершин. Обозначим через $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1} \rangle$ смешанное произведение векторов $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}$. Значение $\frac{1}{6} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1} \rangle$ называется *ориентированным объемом* тетраэдра $T(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})$, построенного по треугольнику разбиения и началу координат (см. Рис. 4).

Для объема многогранника будет верна формула

$$V = \sum_i V_i,$$

где V_i — ориентированный объем тетраэдра, образованного i -м треугольником и началом координат (суммирование идет по всем треугольникам всех граней). Формула остается верной независимо от взаимного расположения начала координат и граней многогранника.

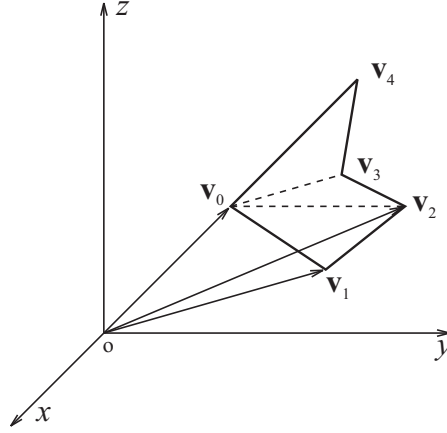


Рис. 4: Разбиение грани многогранника на треугольники.

Аналогичные формулы верны и для моментов любого порядка. Момент $m_{k_1 k_2 k_3}$ многогранника есть:

$$m_{k_1 k_2 k_3} V(P) = \iiint_P x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dx dy dz = \sum_i \iiint_{T_i} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dx dy dz = \sum_i m_{k_1 k_2 k_3} V(T_i), \quad (4)$$

где T_i — соответствующий ориентированный тетраэдр, а $m_{k_1 k_2 k_3} V(T_i)$ — его момент. Эти формулы также не зависят от положения системы координат (и более того, выполняются даже для неодносвязных и для несвязных многогранных объектов).

Для нахождения моментов каждого из тетраэдров можно воспользоваться линейной заменой переменных под знаком интеграла, которая переводит этот тетраэдр в *координатный* (образованный началом координат и тремя базисными векторами). Коэффициентами этой замены служат координаты вершин тетраэдра.

Можно показать, что сходная формула верна и для поверхностных моментов тела P :

$$m_{k_1 k_2 k_3} S_0(P) = \iiint_S (P) x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dS = \sum_i m_{k_1 k_2 k_3} S_0(T_i). \quad (5)$$

Здесь через $S(P)$ и $S_0(T_i)$ обозначены поверхность P и грань S_0 тетраэдра T_i , соответственно.

4 Моменты тетраэдра

Пусть тело P – тетраэдр $T = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ образован началом координат и векторами $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^t$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^t$ (см. Рис. 5). Обозначим через $S_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ грань тетраэдра, противоположную началу координат. Предполагается, что тройка векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^t$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^t$ имеет правую ориентацию. Это означает, что контур, образованный точками $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имеет направление обхода против часовой стрелки, если смотреть на него со стороны внешней нормали к грани $S_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

В этом разделе будем вычислять объемные и поверхностные моменты тетраэдра, обозначаемые как $m_{k_1 k_2 k_3} V(T)$ и $m_{k_1 k_2 k_3} S_0(T)$, соответственно

$$m_{k_1 k_2 k_3} V(T) = \int_T x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dx dy dz \quad (6)$$

$$m_{k_1 k_2 k_3} S_0(T) = \int_{S_0(T)} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dS \quad (7)$$

Здесь первый из интегралов берется по объему, а второй – по грани $S_0(T)$ тетраэдра T .

Пусть также $\mathbf{i} = (1, 0, 0)^t$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)^t$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^t$ – базисные векторы. Если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ не компланарны (в противном случае тетраэдр T не вносит вклада в значение момента), то

$$\mathbf{a} = A\mathbf{i}, \quad \mathbf{b} = A\mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = A\mathbf{k},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

— матрица невырожденного линейного преобразования.

Для нахождения момента произвольного порядка используем интеграл Дирихле.

Теорема 1 (Интеграл Дирихле). Пусть f – непрерывная функция в \mathbb{R} , и $\alpha_1, \dots, \alpha_n > -1$. Тогда

$$\int f(x_1 + \dots + x_n) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} dx_1 \dots dx_n = \frac{\alpha_1! \dots \alpha_n!}{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + n - 1)!} \int_0^1 f(t) t^{n-1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i} dt, \quad (8)$$

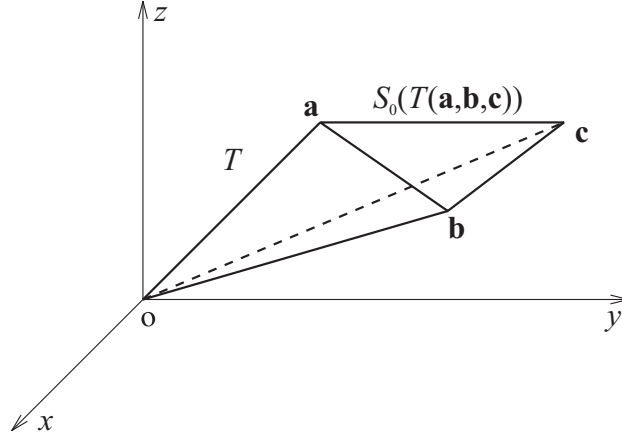


Рис. 5: Тетраэдр $T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

где интеграл берется по области, заданной неравенствами $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ и $x_1 + \dots + x_n \leq 1$.

Теперь найдем $m_{k_1 k_2 k_3} V(T)$. Имеем

$$m_{k_1 k_2 k_3} V(T) = \int_{T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$|A| \int_{T(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})} ((A\mathbf{y})_1)^{k_1} ((A\mathbf{y})_2)^{k_2} ((A\mathbf{y})_3)^{k_3} dy_1 dy_2 dy_3$$

Здесь $|A|$ —определитель матрицы A , состоящей из координат векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (поскольку интегралы берутся по ориентированным объемам, определитель выносится без знака модуля). Последний интеграл есть интеграл Дирихле для $f = 1$. Расписав значение интеграла, получим выражение для момента произвольного порядка тетраэдра, образованного началом координат и точками $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Справедлива следующая теорема для вычисления объемного момента в трехмерном случае. Доказательство приводится далее для общего случая n измерений (см. Теорему 4).

Для заданных целых чисел k_1, k_2, k_3 обозначим через \mathcal{K} множество всех таких 3×3 матриц (k_{ij}) с целочисленными $0 \leq k_{ij} \leq k_i$, для которых $\sum_{j=1}^3 k_{ij} = k_i$, $i = 1, 2, 3$.

Теорема 2. Для объемного момента $m_{k_1 k_2 k_3} V(T)$ порядка $k = k_1 + k_2 + k_3$ тетраэдра $T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ верна следующая формула:

$$m_{k_1 k_2 k_3} V(T) = \frac{|A| k_1! k_2! k_3!}{(k+3)!} \sum_{(k_{ij}) \in \mathcal{K}} \frac{\prod_{j=1}^3 ((\sum_{i=1}^3 k_{ij})!)}{\prod_{i,j=1}^3 (k_{ij}!)} \prod_{i,j=1}^3 a_{ij}^{k_{ij}}, \quad (9)$$

где $|A|$ есть определитель матрицы A .

Сходный результат верен и для поверхностного момента $m_{k_1 k_2 k_3} S_0(T)$ (см. доказательство Теоремы 5 для случая n измерений).

Теорема 3. Для поверхностного момента $m_{k_1 k_2 k_3} S_0(T)$ порядка $k = k_1 + k_2 + k_3$ тетраэдра $T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ верна следующая формула:

$$m_{k_1 k_2 k_3} S_0(T) = \frac{2Ar(S_0) k_1! k_2! k_3!}{(k+2)!} \sum_{(k_{ij}) \in \mathcal{K}} \frac{\prod_{j=1}^3 ((\sum_{i=1}^3 k_{ij})!)}{\prod_{i,j=1}^3 (k_{ij}!)} \prod_{i,j=1}^3 a_{ij}^{k_{ij}}, \quad (10)$$

где $Ar(S_0)$ есть площадь грани $S_0(T)$.

Нетрудно видеть, что объемный и поверхностный моменты порядка $k = k_1 + k_2 + k_3$ тетраэдра связаны следующим соотношением:

$$\frac{m_{k_1 k_2 k_3} S_0(T)}{m_{k_1 k_2 k_3} V(T)} = \frac{2Ar(S_0)(k+3)}{|A|}.$$

Для моментов порядка k только по одной координате формулы (9) и (10) приобретают наиболее простой вид (ниже они приведены для первой координаты):

$$m_{k00} V(T) = \frac{|A| k!}{(k+3)!} \sum_{(k_1, k_2, k_3)} a_1^{k_1} b_1^{k_2} c_1^{k_3},$$

$$m_{k00} S_0(T) = \frac{2Ar(S_0) k!}{(k+2)!} \sum_{(k_1, k_2, k_3)} a_1^{k_1} b_1^{k_2} c_1^{k_3},$$

где суммирование производится по всем таким тройкам k_1, k_2, k_3 целых чисел, для которых $k_1 + k_2 + k_3 = k$, $k_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3$.

Пример 1. Продемонстрируем использование формулы (9) для момента $m_{020}V(T(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3))$. Суммирование в (9) проводится для следующих матриц (k_{ij}) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Первая из этих матриц дает выражение

$$\left(\frac{\prod_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n k_{ij})! \prod_{i=1}^n k_i!}{\prod_{i,j=1}^n k_{ij}!} \prod_{i,j=1}^n a_{ij}^{k_{ij}} \right) = 2! a_{21}^2.$$

Аналогично рассматриваются остальные матрицы. В результате получается формула

$$m_{020}V(T(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)) = \frac{|A|}{5!} \left(2!(a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2) + 2!(a_{21}a_{22} + a_{21}a_{23} + a_{22}a_{23}) \right) =$$

$$\frac{|A|}{60} (a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{21}a_{22} + a_{21}a_{23} + a_{22}a_{23}).$$

Здесь $|A|$ обозначает определитель матрицы A , столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

Приведем также формулы для объемных моментов тетраэдра малых порядков.

$$m_{000}V(T) = \frac{1}{6}|A|$$

$$m_{100}V(T) = \frac{1}{24}|A|(a_1 + b_1 + c_1)$$

$$m_{010}V(T) = \frac{1}{24}|A|(a_2 + b_2 + c_2)$$

$$m_{001}V(T) = \frac{1}{24}|A|(a_3 + b_3 + c_3)$$

$$\begin{aligned}
m_{200}V(T) &= \frac{1}{60}|A|(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) \\
m_{020}V(T) &= \frac{1}{60}|A|(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + a_2b_2 + a_2c_2 + b_2c_2) \\
m_{002}V(T) &= \frac{1}{60}|A|(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 + a_3b_3 + a_3c_3 + b_3c_3) \\
m_{110}V(T) &= \frac{1}{60}|A|(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + \frac{1}{2}(a_1b_2 + a_1c_2 + b_1c_2 + a_2b_1 + a_2c_1 + b_2c_1)) \\
m_{101}V(T) &= \frac{1}{60}|A|(a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 + \frac{1}{2}(a_1b_3 + a_1c_3 + b_1c_3 + a_3b_1 + a_3c_1 + b_3c_1)) \\
m_{011}V(T) &= \frac{1}{60}|A|(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 + \frac{1}{2}(a_2b_3 + a_2c_3 + b_2c_3 + a_3b_2 + a_3c_2 + b_3c_2)) \\
m_{300}V(T) &= \frac{1}{120}|A|(a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 + a_1^2b_1 + a_1b_1^2 + a_1^2c_1 + a_1c_1^2 + b_1^2c_1 + b_1c_1^2 + a_1b_1c_1) \\
m_{030}V(T) &= \frac{1}{120}|A|(a_2^3 + b_2^3 + c_2^3 + a_2^2b_2 + a_2b_2^2 + a_2^2c_2 + a_2c_2^2 + b_2^2c_2 + b_2c_2^2 + a_2b_2c_2) \\
m_{003}V(T) &= \frac{1}{120}|A|(a_3^3 + b_3^3 + c_3^3 + a_3^2b_3 + a_3b_3^2 + a_3^2c_3 + a_3c_3^2 + b_3^2c_3 + b_3c_3^2 + a_3b_3c_3) \\
\\
m_{210}V(T) &= \frac{1}{120}|A|(a_1^2a_2 + b_1^2b_2 + c_1^2c_2 + \\
&\quad \frac{2}{3}(a_1a_2b_1 + a_1a_2c_1 + b_1b_2c_1 + a_1b_1b_2 + a_1c_1c_2 + b_1c_1c_2) + \\
&\quad \frac{1}{3}(a_1^2b_2 + a_1^2c_2 + b_1^2c_2 + a_2b_1^2 + a_2c_1^2 + b_2c_1^2 + a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1)) \\
\\
m_{201}V(T) &= \frac{1}{120}|A|(a_1^2a_3 + b_1^2b_3 + c_1^2c_3 + \\
&\quad \frac{2}{3}(a_1a_3b_1 + a_1a_3c_1 + b_1b_3c_1 + a_1b_1b_3 + a_1c_1c_3 + b_1c_1c_3) + \\
&\quad \frac{1}{3}(a_1^2b_3 + a_1^2c_3 + b_1^2c_3 + a_3b_1^2 + a_3c_1^2 + b_3c_1^2 + a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1)) \\
\\
m_{120}V(T) &= \frac{1}{120}|A|(a_2^2a_1 + b_2^2b_1 + c_2^2c_1 + \\
&\quad \frac{2}{3}(a_2a_1b_2 + a_2a_1c_2 + b_2b_1c_2 + a_2b_2b_1 + a_2c_2c_1 + b_2c_2c_1) + \\
&\quad \frac{1}{3}(a_2^2b_1 + a_2^2c_1 + b_2^2c_1 + a_1b_2^2 + a_1c_2^2 + b_1c_2^2 + a_2b_2c_1 + a_2b_1c_2 + a_1b_2c_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{102}V(T) = & \frac{1}{120}|A|(a_3^2a_1 + b_3^2b_1 + c_3^2c_1 + \\
& \frac{2}{3}(a_3a_1b_3 + a_3a_1c_3 + b_3b_1c_3 + a_3b_3b_1 + a_3c_3c_1 + b_3c_3c_1) + \\
& \frac{1}{3}(a_3^2b_1 + a_3^2c_1 + b_3^2c_1 + a_1b_3^2 + a_1c_3^2 + b_1c_3^2 + a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 + a_1b_3c_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{021}V(T) = & \frac{1}{120}|A|(a_2^2a_3 + b_2^2b_3 + c_2^2c_3 + \\
& \frac{2}{3}(a_2a_3b_2 + a_2a_3c_2 + b_2b_3c_2 + a_2b_2b_3 + a_2c_2c_3 + b_2c_2c_3) + \\
& \frac{1}{3}(a_2^2b_3 + a_2^2c_3 + b_2^2c_3 + a_3b_2^2 + a_3c_2^2 + b_3c_2^2 + a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 + a_3b_2c_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{012}V(T) = & \frac{1}{120}|A|(a_3^2a_2 + b_3^2b_2 + c_3^2c_2 + \\
& \frac{2}{3}(a_3a_2b_3 + a_3a_2c_3 + b_3b_2c_3 + a_3b_3b_2 + a_3c_3c_2 + b_3c_3c_2) + \\
& \frac{1}{3}(a_3^2b_2 + a_3^2c_2 + b_3^2c_2 + a_2b_3^2 + a_2c_3^2 + b_2c_3^2 + a_3b_3c_2 + a_3b_2c_3 + a_2b_3c_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{111}V(T) = & \frac{1}{120}|A|\left(a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3 + \right. \\
& \frac{1}{3}(a_1a_2b_3 + a_1a_2c_3 + b_1b_2c_3 + a_3b_1b_2 + a_3c_1c_2 + b_3c_1c_2 + a_1a_3b_2 + a_1a_3c_2 + b_1b_3c_2 + \\
& a_2b_1b_3 + a_2c_1c_3 + b_2c_1c_3 + a_1b_2b_3 + a_1c_2c_3 + b_1c_2c_3 + a_2a_3b_1 + a_2a_3c_1 + b_2b_3c_1) + \\
& \left. \frac{1}{6}(a_1b_2c_3 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_3b_2c_1)\right)
\end{aligned}$$

5 Объемные моменты многогранных объектов произвольной размерности

Аналогичный подход применим к многогранникам произвольной размерности. Для этого каждую гипергрань необходимо разбить на ориентированные симплексы. В результате n -мерный многогранник также разбивается на ориентированные симплексы, образованные началом координат и

$(n-1)$ -мерными симплексами разбиения каждой гиперграны (разбиение гиперграней на симплексы можно осуществлять рекурсивно с понижением размерности). Момент многогранника равен алгебраической сумме моментов по всем n -мерным симплексам.

Пусть n -мерный симплекс определяется началом координат и n векторами $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^t$, $1 \leq j \leq n$, и координаты этих векторов являются столбцами матрицы A . Для нахождения момента $m_{k_1 k_2 \dots k_n}$ порядка $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ этого симплекса сделаем линейную замену, переводящую этот симплекс в координатный, задаваемый неравенствами $y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq 1$, $y_i \geq 0$. Для нахождения момента по координатному симплексу T_0 применяется интеграл Дирихле:

$$\int_{T_0} f(x_1 + \dots + x_n) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} dx_1 \dots dx_n = \frac{k_1! \dots k_n!}{(\sum k_i + n - 1)!} \int_0^1 f(t) t^{\sum k_i + n - 1} dt.$$

В итоге получаем следующий результат.

Теорема 4. Момент $m_{k_1 k_2 \dots k_n} V(T)$ n -мерного симплекса $T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, определяемого началом координат и векторами $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^t$, $1 \leq j \leq n$, равен

$$m_{k_1 \dots k_n} V(T) = \frac{|A|}{(k + n)!} \sum_{(k_{ij})} \frac{\prod_{i=1}^n (k_i!) \prod_{j=1}^n ((\sum_{i=1}^n k_{ij})!)}{\prod_{i,j=1}^n (k_{ij}!)} \prod_{i,j=1}^n a_{ij}^{k_{ij}}, \quad (11)$$

где суммирование производится по всем матрицам (k_{ij}) с неотрицательными целыми элементами k_{ij} , $k_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$, такими, что $\sum_{j=1}^n k_{ij} = k_i$ для всех i . Здесь $|A|$ обозначает определитель матрицы A .

Доказательство:

$$\begin{aligned}
& m_{k_1 \dots k_n}(T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) \\
&= |A| \int_{T(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n)} \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right)^{k_i} dy_1 \cdots dy_n \\
&= |A| \int_{T(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n)} \prod_{i=1}^n \sum_{(k_{ij})} \frac{k_i!}{\prod_{j=1}^n k_{ij}!} \prod_{j=1}^n (a_{ij}^{k_{ij}} y_j^{k_{ij}}) dy_1 \cdots dy_n \\
&= |A| \left(\sum_{(k_{ij})} \prod_{i=1}^n \frac{k_i!}{\prod_{j=1}^n k_{ij}!} \prod_{j=1}^n a_{ij}^{k_{ij}} \right) \int_{T(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n)} \prod_{j=1}^n y_j^{\sum_{i=1}^n k_{ij}} dy_1 \cdots dy_n \\
&= \frac{|A|}{(k+n)!} \sum_{(k_{ij})} \left(\frac{\prod_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n k_{ij})! \prod_{i=1}^n k_i!}{\prod_{i,j=1}^n k_{ij}!} \prod_{i,j=1}^n a_{ij}^{k_{ij}} \right).
\end{aligned}$$

□

6 Поверхностные моменты для n -мерного случая

Рассмотрим задачу вычисления поверхностных моментов многогранников.

Для поверхностного интеграла по гипергранни S_0 в \mathbb{R}^n , заданной соотношениями $x_1 + \dots + x_n = 1$, $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, справедлив следующий результат:

Для вычисления поверхностных моментов докажем следующий результат.

Теорема 5. Пусть S_0 — гиперповерхность в \mathbb{R}^n , заданная соотношениями $x_1 + \dots + x_n = 1$, $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Тогда

$$\int_{S_0} \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} dS = \sqrt{n} \frac{\prod_{i=1}^n k_i!}{(k+n-1)!} \quad (12)$$

Доказательство: Рассмотрим n -мерный координатный симплекс T , заданный соотношениями $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$, $x_i \geq 0$. Он имеет $n+1$

гиперграней размерности $n - 1$, далее обозначаемых $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$, где грань S_i , $i = 1, \dots, n$ определяется соотношениями $x_1 + \dots + x_n \leq 1$, $x_i = 0$, $x_j \geq 0$ при $j \neq i$. Пусть \mathbf{b}_i — внешняя нормаль к грани S_i , $i = 0, \dots, n$. Очевидно

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)$$

и $\mathbf{b}_i = (-\delta_{1i}, -\delta_{2i}, \dots, -\delta_{ni})$, $i = 1, \dots, n$. Здесь $\delta_{ji} = 1$ при $j = i$ и $\delta_{ji} = 0$ в противном случае.

Формула Остроградского связывает интеграл по симплексу T с интегралом по его поверхности:

$$\int_{S_0} \sqrt{n} \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} dS - \sum_{j=1}^n \int_{S_j} \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} dS = \int_T \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\prod_{i=1}^n x_i^{k_i})}{\partial x_j} dx_1 \cdots dx_n$$

При этом последний интеграл по формуле Дирихле (8) равен

$$\begin{aligned} \int_T \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\prod_{i=1}^n x_i^{k_i})}{\partial x_j} dx_1 \cdots dx_n &= \int_T \sum_{j=1, k_j \neq 0}^n (k_j x_j^{k_j-1} \prod_{i=1, i \neq j}^n x_i^{k_i}) dx_1 \cdots dx_n = \\ &= \sum_{j=1, k_j \neq 0}^n \frac{k_j! \prod_{i=1, i \neq j}^n k_i!}{(k+n-1)!} = \sum_{j=1, k_j \neq 0}^n \frac{\prod_{i=1}^n k_i!}{(k+n-1)!} \end{aligned}$$

С другой стороны, гиперграни S_i , $i = 1, \dots, n$, также являются координатными симплексами размерности $n - 1$. Поэтому соответствующие поверхностные интегралы также выражаются через интеграл Дирихле:

$$\sum_{j=1}^n \int_{S_j} \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} dS = \sum_{j=1, k_j=0}^n \int_{S_j} \prod_{i=1, i \neq j}^n x_i^{k_i} \prod_{i \neq j} dx_i = \sum_{j=1, k_j=0}^n \frac{\prod_{i=1}^n k_i!}{(k+n-1)!}$$

В результате имеем

$$\int_{S_0} \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} dS = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{\prod_{i=1}^n k_i!}{(k+n-1)!} = \sqrt{n} \frac{\prod_{i=1}^n k_i!}{(k+n-1)!}$$

□

Теперь рассмотрим $(n - 1)$ -мерную гипергрань $S_0(T)$, заданную концами n векторов $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^t$, $1 \leq j \leq n$, в \mathbb{R}^n . Она является гранью n -мерного симплекса $T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$. Для вычисления момента

$m_{k_1 k_2 \dots k_n} S_0(T)$ порядка $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ по грани $S_0(T)$ необходимо выполнить линейную замену с матрицей A , состоящей из столбцов \mathbf{a}_i , $i = 1, \dots, n$. Эта замена переводит симплекс $T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ в координатный симплекс, после чего можно использовать формулу (12). Таким образом для поверхностных моментов имеет место результат, аналогичный (11).

Теорема 6. Поверхностный момент $m_{k_1 k_2 \dots k_n} S_0(T)$ порядка $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ для $(n-1)$ -мерной гиперграни $S_0(T)$, определяемой концами векторов $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^t$, $1 \leq j \leq n$, в n -мерном пространстве, равен

$$m_{k_1 \dots k_n} S_0(T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) = \frac{Ar(S_0)(n-1)!}{(k+n-1)!} \sum_{(k_{ij})} \left(\frac{\prod_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n k_{ij})! \prod_{i=1}^n k_i!}{\prod_{i,j=1}^n k_{ij}!} \prod_{i,j=1}^n a_{ij}^{k_{ij}} \right), \quad (13)$$

где $Ar(S_0)$ есть $(n-1)$ -мерный объем (в трехмерном случае – площадь) гиперграни S_0 , а суммирование производится по всем матрицам (k_{ij}) с неотрицательными целыми элементами k_{ij} , $k_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$, такими, что $\sum_{j=1}^n k_{ij} = k_i$ для всех i .

Доказательство:

$$\begin{aligned} & m_{k_1 \dots k_n} S_0(T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) \\ &= \frac{Ar(S_0)(n-1)!}{\sqrt{n}} \int_{S_0(T(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n))} \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right)^{k_i} dS \\ &= \frac{Ar(S_0)(n-1)!}{\sqrt{n}} \int_{S_0(T(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n))} \prod_{i=1}^n \sum_{(k_{ij})} \frac{k_i!}{\prod_{j=1}^n k_{ij}!} \prod_{j=1}^n (a_{ij}^{k_{ij}} y_j^{k_{ij}}) dS \\ &= \frac{Ar(S_0)(n-1)!}{\sqrt{n}} \left(\sum_{(k_{ij})} \prod_{i=1}^n \frac{k_i!}{\prod_{j=1}^n k_{ij}!} \prod_{j=1}^n a_{ij}^{k_{ij}} \right) \int_{S_0(T(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n))} \prod_{j=1}^n y_j^{\sum_{i=1}^n k_{ij}} dS \\ &= \frac{Ar(S_0)(n-1)!}{(k+n-1)!} \sum_{(k_{ij})} \left(\frac{\prod_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n k_{ij})! \prod_{i=1}^n k_i!}{\prod_{i,j=1}^n k_{ij}!} \prod_{i,j=1}^n a_{ij}^{k_{ij}} \right) \end{aligned}$$

□

Здесь $\sum_{(k_{ij})}$ обозначает сумму по всем наборам (k_{ij}) таким, что $k_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$, и $\sum_{j=1}^n k_{ij} = k_i$ для каждого i . При линейной замене в

поверхностном интеграле используется факт, что $(n - 1)$ -мерный объем гиперграни $S_0(T(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n))$ равен $\sqrt{n}/(n - 1)!$ (см. (12) при $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$).

□

Понятно, что поверхностный момент произвольного многогранного объекта можно вычислить путем разбиения каждой его грани на треугольники (в n -мерном случае — на $(n - 1)$ -мерные симплексы).

7 Реализация алгоритма вычисления моментов

Вычислительный алгоритм может быть реализован с учетом следующих полезных особенностей формул (4) и (5):

- Полигональные грани могут обрабатываться независимо одна от другой. Таким образом, набор граней может рассматриваться как последовательность или "поток";
- Полный момент тела может быть получен как сумма соответствующих моментов, вычисленных в нескольких потоках исполнения, работающих параллельно. При этом потоки должны обрабатывать непересекающиеся подпоследовательности граней тела;
- Формулы (4) и (5) для объемных и поверхностных моментов различаются только постоянными коэффициентами и множителями объем/площадь. Однако для вычисления объемных моментов необходима согласованная ориентация всех граней, тогда как для поверхностных моментов это требование не является обязательным.

Алгоритм 1. Вычисление объемного момента

Вход: последовательность согласованно ориентированных полигональных граней (например, против часовой стрелки) и момент порядка (k_1, k_2, k_3) , который необходимо вычислить.

Выход: значение момента m_{k_1, k_2, k_3} .

1. Установить m_{k_1, k_2, k_3} в 0.

2. Сканировать все грани в последовательности.
 - {
 - Сканировать все тетраэдры T_i , соответствующие выбранной грани, и накапливать m_{k_1, k_2, k_3} в соответствии с (4).
 - }

Если вершины граней упорядочены по часовой стрелке, то вычисленный момент $m_{000}V(P)$ (объем) будет отрицательным. В этом случае знак m_{k_1, k_2, k_3} необходимо инвертировать.

Алгоритм 2. Вычисление поверхностного момента

Вход: последовательность полигональных граней и момент порядка (k_1, k_2, k_3) , который необходимо вычислить.

Промежуточные переменные: момент грани m и площадь грани Ar .

Выход: значение момента m_{k_1, k_2, k_3} .

1. Установить m_{k_1, k_2, k_3} в 0.
2. Сканировать все грани в последовательности.
 - {
 - Для выбранной грани установить m в ноль и итерировать все треугольники, соответствующие этой грани.
 - {
 - Для первого треугольника, определяемого вершинами $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, вычислить вектор нормали к грани $\mathbf{n} = [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0)]$ и площадь треугольника $Ar_1 = \mathbf{n}/2$. Здесь с помощью $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ обозначено векторное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Установить $Ar = Ar_1$.

Для i -того треугольника, определяемого вершинами $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}$, $i \geq 2$, вычислить вектор $\mathbf{n}_i = [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0) \times (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_0)]$ и ориентированную площадь $Ar_i = (\mathbf{n}_i/2)\text{sign}((\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_1))$. Здесь с помощью (\mathbf{a}, \mathbf{b}) обозначено скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Установить $Ar = Ar + Ar_i$ и аккумулировать t в соответствии с (5).

}

Если $Ar < 0$, инвертировать знак вычисленного t .

Прибавить t к m_{k_1, k_2, k_3} .

}

Следует обратить внимание на то, что при вычислении поверхностного момента требование согласованной ориентации всех граней существенно. Это означает, что вершины некоторых граней могут быть упорядочены против часовой стрелки, в то время как другие - по часовой стрелке. Различные ориентации влияют только на знак площади грани (и, соответственно, знаки ее моментов). Поэтому проверка знака площади грани позволяет получить правильное значение поверхностного момента. Наша реализация алгоритмов написана на языке C++. Мы используем следующий подход к проектированию вычислительного процессора (см. Рис. 6 и 7 . Моменты тела вычисляются с помощью "Вычислителя моментов". Это объект C++, который вычисляет и накапливает моменты граней, одной в каждый момент времени, которые поставляются ему в предопределенном формате другим объектом - "Итератором многоугольников". В нашей реализации "Вычислитель моментов" представлен шаблонным классом, который принимает классы "Итератора многоугольников" в качестве параметра шаблона. Такая схема дает возможность использовать единственную реализацию "Вычислителя моментов" для различных представлений многоугольников, при условии, что для нужного формата данных создан специальный класс "Итератор многоугольников".

Алгоритмы вычисляют объемные и поверхностные моменты очень быстро. К примеру, расчет всех объемных (поверхностных) моментов

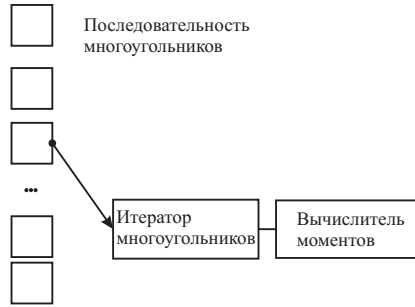


Рис. 6: Однопоточный (непараллельный) вычислитель моментов. "Вычислитель моментов" использует "Итератор многоугольников" для сканирования последовательности многоугольников (граней), по одному многоугольнику в каждый момент времени.

нулевого, первого и второго порядка объекта, представленного на Рис. 3 (320 вершин, 320 граней и 640 ребер), занимает 0.36мс (0.64мс) на персональном компьютере РИ-400.

8 Моменты полиномиальных функций

Обозначим теперь через $m_{k_1,k_2,k_3}V(f)$ и $m_{k_1,k_2,k_3}S(f)$ объемные и поверхностные моменты порядка $k_1 + k_2 + k_3$ трехмерного полутонного изображения с неотрицательной функцией интенсивности f , определенной на компактном теле P

$$m_{k_1,k_2,k_3}V(f) = \int_P f(x, y, z) x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dx dy dz,$$

$$m_{k_1,k_2,k_3}S(f) = \int_{S(P)} f(x, y, z) x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dS.$$

Отметим, что объемный момент трехмерного полутонного изображения равен моменту четырехмерного тела (подграфику функции f)

$$m_{k_1,k_2,k_3}V(f) = m_{k_1,k_2,k_3,0}V(F), \text{ где } F = \{(x, y, z, t) | 0 \leq t \leq f(x, y, z)\}.$$

Это справедливо для изображений произвольной размерности. Если f является кусочно-линейной функцией, то ее подграфик будет многогранником, объемные моменты которого можно вычислить алгоритмом, описанным ранее. В противном случае, нельзя применить этот подход.

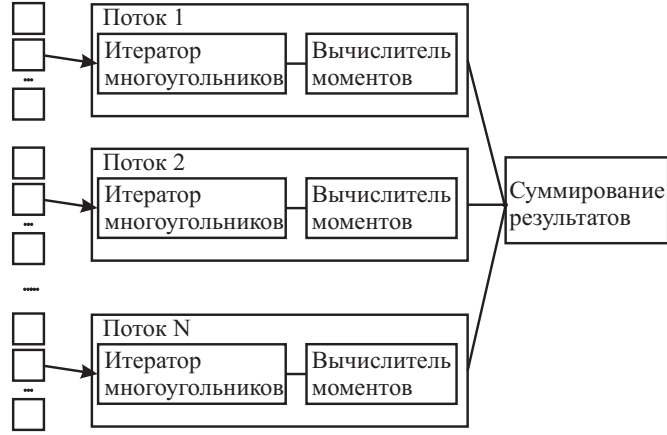


Рис. 7: Многопоточный (параллельный) вычислитель моментов. Несколько потоков обрабатывают подпоследовательности многоугольников. В каждом потоке работают отдельные "Вычислитель моментов" и "Итератор многоугольников".

Рассмотрим случай полиномиальных функций. Пусть P является многогранником. Предположим, что $f(x, y, z) = x^p y^q z^r$. Тогда

$$m_{k_1, k_2, k_3} V(f) = \int_P f(x, y, z) x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} dx dy dz = \int_P x^{k_1+p} y^{k_2+q} z^{k_3+r} dx dy dz = m_{k_1+p, k_2+q, k_3+r} V(P).$$

Это означает, что момент одночлена равен моменту соответствующего порядка бинарного объекта (области задания функции). Очевидно, что момент произвольной полиномиальной функции равен сумме моментов соответствующего порядка одного и того же бинарного объекта. Поэтому метод, описанный в данном разделе, применим для вычисления объемных и поверхностных моментов многогранных объектов и полиномиальных функций, заданных на многогранной области.

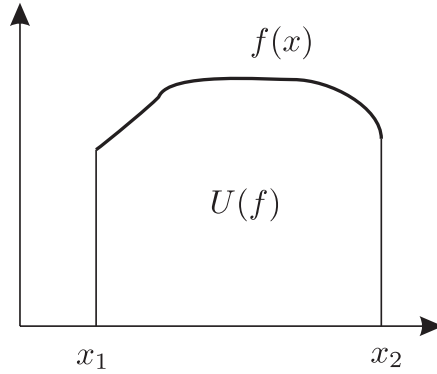


Рис. 8: Подграфик функции $f(x)$.

9 Моменты подграфиков параметризованных кривых

Рассмотрим задачу вычисления геометрического момента двумерной области – подграфика некоторой функции $f(x)$ (см. Рис. 8):

$$m_{pq}(U_f) = \iint_{0 \leq y \leq f(x)} x^p y^q dx dy.$$

Если $q = 0$, это эквивалентно вычислению одномерного полутонного момента от функции f . Для простоты мы предполагаем $f(x) \geq 0$, однако на самом деле это ограничение не является существенным. При этом все площади, моменты и интегралы предполагаются ориентированными (т.е. меняющими знак в зависимости от ориентации границы).

Если функция f задана явно, задача сводится к обычному интегрированию по отрезку:

$$\iint_{0 \leq y \leq f(x)} x^p y^q dx dy = \int (x^p \int_0^{f(x)} y^q dy) dx = \frac{1}{q+1} \int x^p f(x)^{q+1} dx$$

Далее рассматривается задача для функций, заданных неявным параметрическим уравнением:

$$f(x(t)) = y(t), \tag{14}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — функции достаточной гладкости, заданные на числовом промежутке $[t_0, t_1]$, которые определяют параметризованную кривую на

плоскости. В дальнейшем предполагается, что $x(t)$ и $y(t)$ — полиномы, однако большая часть рассуждений остается в силе для достаточно произвольных функций.

Если $x(t)$ — непрерывная монотонная функция, то уравнение (14) определяет однозначную функцию $y = f(x)$ на промежутке $[x(t_0), x(t_1)]$. Вычисление моментов такой функции сводится к замене $x = x(t)$ под знаком интеграла:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} x^p f(x)^{q+1} dx = \int_{t_0}^{t_1} x(t)^p y(t)^{q+1} x'(t) dt.$$

Таким образом, для моментов функции, заданной уравнением (14), верна формула:

$$m_{pq}(U_f) = \frac{1}{q+1} \int x(t)^p y(t)^{q+1} x'(t) dt. \quad (15)$$

Если функция $x(t)$ не монотонна, уравнение (14) не задает однозначную функцию. Однако формула (15) и в этом случае сохраняет силу и задает ориентированные моменты подграфика кривой. Примеры подграфиков показаны на Рис. 9. Подграфики на рисунке выделены серым цветом, а знаки “+” и “−” на компонентах второго графика указывают знак, с которым площадь каждой компоненты входит в результирующую ориентированную площадь. В частном случае, когда $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$, кривая является замкнутой и формула (15) дает моменты области, ограниченной этой кривой. Заметим, что в этом случае перестановка координатных осей x и y сохраняет область на плоскости, но меняет ее ориентацию на противоположную, поэтому перестановка x и y (и соответствующих порядков моментов) в формуле (15) в этом случае приведет только к изменению знака (это нетрудно проверить и непосредственно).

Если параметрическое представление задается полиномиальными функциями, для моментов получаются аналитические выражения.

Аналогичные рассуждения можно провести и для высшей размерности. Так, пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, заданная неявным параметрическим представлением $f(x(u, v), y(u, v)) = z(u, v)$, где x, y, z

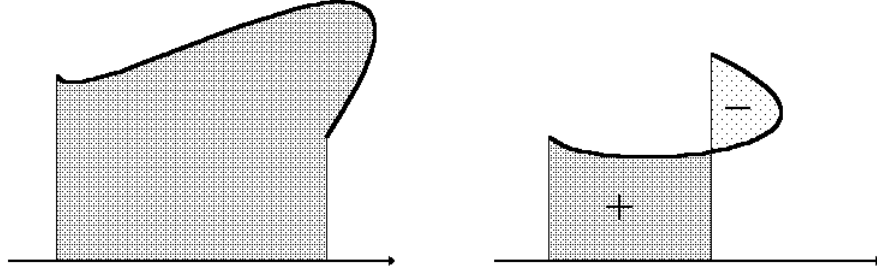


Рис. 9: Подграфики кривых, не являющихся графиками однозначных функций.

— функции двух переменных, заданные на некоторой области. Тогда

$$\begin{aligned}
 m_{pqr}(U_f) &= \iiint_{0 \leq z \leq f(x,y)} x^p y^q z^r dx dy dz = \\
 &= \iint (x^p y^q \int_0^{f(x,y)} z^r dz) dx dy = \frac{1}{r+1} \iint x^p y^q f(x,y)^{r+1} dx dy = \\
 &= \frac{1}{r+1} \iint x(u,v)^p y(u,v)^q z(u,v)^{r+1} \frac{d(x,y)}{d(u,v)} du dv.
 \end{aligned}$$

10 Моменты подграфиков кривых Безье и сплайнов

К полиномиальным параметризациям, используемым для аппроксимации объектов, относятся, например, кривые Безье и B -сплайны.

Кривая Безье третьего порядка, строящаяся по 4 точкам (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, 3$, имеет параметрическое представление:

$$[x(t), y(t)] = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Эта кривая проходит через первую и последнюю точку и аппроксимирует промежуточные.

Для подграфиков кривых Безье формула (15) дает аналитические выражения моментов. При помощи пакета символьных вычислений *Maple* был получен их явный вид для площадей, моментов первого и второго порядка. Так, площадь подграфика, ограниченного кривой Безье, построенной по 4 точкам, равна

$$(x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3) \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -10 & -6 & -3 & -1 \\ 6 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в последней матрице при перестановке строк и столбцов в противоположном порядке меняется знак (центрально-антисимметричная матрица). На самом деле это следует из того факта, что кривая Безье при перестановке порождающих точек в противоположном порядке остается прежней, но меняет ориентацию на противоположную. Тем же свойством обладают и рассматриваемые далее сплайновые кривые.

Выражения для моментов первого порядка подграфика кривой Безье насчитывают уже 36 слагаемых, для моментов m_{20} и m_{02} — 74 и для момента m_{11} — 86 слагаемых.

Для аппроксимации кривой по произвольному числу точек часто используются *B*-сплайны. Сегмент сплайновой кривой третьего порядка, строящийся по 4 точкам (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, 3$, имеет параметрическое представление:

$$[x(t), y(t)] = (t^3 \ t^2 \ t \ 1) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 1].$$

Эта кривая аппроксимирует отрезок $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$. Последующие отрезки аппроксимируются кривыми, построенными по соответствующим четверкам точек. Так, для аппроксимации отрезка $[(x_2, y_2), (x_3, y_3)]$ соответствующая параметризованная кривая строится по точкам (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4$. При этом построенная из сегментов сплайновая кривая имеет непрерывную вторую производную.

Площади и моменты для сплайновой кривой вычисляются аналогично кривым Безье. Для площади подграфика сегмента сплайновой кривой получается выражение

$$(x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3) \frac{1}{720} \begin{pmatrix} -10 & -71 & -38 & -1 \\ -9 & -150 & -183 & -18 \\ 18 & 183 & 150 & 9 \\ 1 & 38 & 71 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Выражения для моментов первого порядка содержат 40 слагаемых, второго порядка — более 80.

Вообще, для полиномиальных параметризаций подобного вида, строящихся по 4 точкам, справедлива верхняя оценка числа слагаемых 4^{k+2} в выражении для момента порядка k .

Отметим, что площадь и моменты подграфика для всей кривой, состоящей из нескольких сегментов, равны сумме соответствующих значений, вычисленных для каждого сегмента. Если кривая является замкнутой, то получаем площадь и моменты области, ограниченной данной кривой.

Еще один пример параметризации подобного вида — интерполирующие сплайны, строящиеся аналогичным образом по 4 точкам при помощи матрицы

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В отличие от B -сплайнов, эта кривая, построенная из нескольких сегментов, имеет только первую непрерывную производную.

Площадь подграфика такой кривой равна

$$(x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3) \frac{1}{240} \begin{pmatrix} 0 & -11 & 12 & -1 \\ 11 & -120 & -143 & 12 \\ -12 & 143 & 120 & -11 \\ 1 & -12 & 11 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Приведем также формулы для B -сплайна второго порядка, который строится по 3 точкам $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ посредством матрицы

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$m_{00} = -\frac{1}{8}x_0y_0 - \frac{1}{3}x_0y_1 - \frac{1}{24}x_0y_2 + \frac{1}{12}x_1y_0 - \frac{1}{12}x_1y_2 \\ + \frac{1}{24}x_2y_0 + \frac{1}{3}x_2y_1 + \frac{1}{8}x_2y_2;$$

$$m_{10} = -\frac{1}{24}x_0^2y_0 - \frac{19}{240}x_0^2y_1 - \frac{1}{240}x_0^2y_2 - \frac{11}{240}x_0x_1y_0 - \frac{7}{40}x_0x_1y_1 \\ - \frac{7}{240}x_0x_1y_2 + \frac{1}{240}x_0x_2y_0 - \frac{1}{240}x_0x_2y_2 + \frac{1}{20}x_1^2y_0 - \frac{1}{20}x_1^2y_2 \\ + \frac{7}{240}x_1x_2y_0 + \frac{7}{40}x_1x_2y_1 + \frac{11}{240}x_1x_2y_2 + \frac{1}{240}x_2^2y_0 + \frac{19}{240}x_2^2y_1 + \frac{1}{24}x_2^2y_2;$$

$$m_{01} = -\frac{1}{48}x_0y_0^2 - \frac{19}{240}x_0y_0y_1 - \frac{1}{240}x_0y_0y_2 - \frac{9}{80}x_0y_1^2 - \frac{7}{240}x_0y_1y_2 \\ - \frac{1}{240}x_0y_2^2 + \frac{1}{60}x_1y_0^2 + \frac{1}{20}x_1y_0y_1 - \frac{1}{20}x_1y_1y_2 - \frac{1}{60}x_1y_2^2 \\ + \frac{1}{240}x_2y_0^2 + \frac{7}{240}x_2y_0y_1 + \frac{1}{240}x_2y_0y_2 + \frac{9}{80}x_2y_1^2 + \frac{19}{240}x_2y_1y_2 + \frac{1}{48}x_2y_2^2.$$

Параметризации подобного типа обобщаются и на трехмерный случай. При этом они строятся уже по 16 точкам (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) , $i, j = 1, 2, 3, 4$, а соответствующие полиномы имеют третью степень по каждому из параметров u, v . Они имеют вид:

$$x(u, v) = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} A X A^t \begin{pmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{pmatrix}^t,$$

где $X = (x_{ij})_{i,j=1}^4$, A — та же 4×4 -матрица, что и в двумерном случае, и аналогично для $y(u, v)$ и $z(u, v)$. В этом случае для явного выражения момента порядка k справедлива верхняя оценка числа слагаемых 16^{k+3} . Реально формулы оказываются слишком сложными для вычислений.

Рассмотрим более простую поверхность с билинейной параметризацией. Она задается 4 точками (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) , $i, j = 0, 1$ и матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Эта параметризация имеет вид:

$$x(u, v) = (x_{00} - x_{01} - x_{10} + x_{11})uv + (x_{10} - x_{00})u + (x_{01} - x_{00})v + x_{00},$$

и аналогично для $y(u, v)$ и $z(u, v)$.

Объем подграфика такой поверхности равен

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6}x_{00}y_{01}z_{00} - \frac{1}{6}x_{00}y_{01}z_{01} - \frac{1}{12}x_{00}y_{01}z_{10} - \frac{1}{12}x_{00}y_{01}z_{11} + \\
& \quad \frac{1}{6}x_{00}y_{10}z_{00} + \frac{1}{12}x_{00}y_{10}z_{01} + \frac{1}{6}x_{00}y_{10}z_{10} + \frac{1}{12}x_{00}y_{10}z_{11} + \\
& \quad \frac{1}{12}x_{00}y_{11}z_{01} - \frac{1}{12}x_{00}y_{11}z_{10} + \frac{1}{6}x_{01}y_{00}z_{00} + \frac{1}{6}x_{01}y_{00}z_{01} + \\
& \quad \frac{1}{12}x_{01}y_{00}z_{10} + \frac{1}{12}x_{01}y_{00}z_{11} - \frac{1}{12}x_{01}y_{10}z_{00} + \frac{1}{12}x_{01}y_{10}z_{11} - \\
& \quad \frac{1}{12}x_{01}y_{11}z_{00} - \frac{1}{6}x_{01}y_{11}z_{01} - \frac{1}{12}x_{01}y_{11}z_{10} - \frac{1}{6}x_{01}y_{11}z_{11} - \\
& \quad \frac{1}{6}x_{10}y_{00}z_{00} - \frac{1}{12}x_{10}y_{00}z_{01} - \frac{1}{6}x_{10}y_{00}z_{10} - \frac{1}{12}x_{10}y_{00}z_{11} + \\
& \quad \frac{1}{12}x_{10}y_{01}z_{00} - \frac{1}{12}x_{10}y_{01}z_{11} + \frac{1}{12}x_{10}y_{11}z_{00} + \frac{1}{12}x_{10}y_{11}z_{01} + \\
& \quad \frac{1}{6}x_{10}y_{11}z_{10} + \frac{1}{6}x_{10}y_{11}z_{11} + \frac{1}{12}x_{11}y_{00}z_{10} - \frac{1}{12}x_{11}y_{00}z_{01} + \\
& \quad \frac{1}{12}x_{11}y_{01}z_{00} + \frac{1}{6}x_{11}y_{01}z_{01} + \frac{1}{12}x_{11}y_{01}z_{10} + \frac{1}{6}x_{11}y_{01}z_{11} - \\
& \quad \frac{1}{12}x_{11}y_{10}z_{00} - \frac{1}{12}x_{11}y_{10}z_{01} - \frac{1}{6}x_{11}y_{10}z_{10} - \frac{1}{6}x_{11}y_{10}z_{11}
\end{aligned}$$

11 Объекты с замкнутой сплайновой границей

Рассмотрим плоские объекты, ограниченные одной замкнутой сплайновой кривой. Такая кривая в общем виде строится по набору из n точек (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq n$, который рассматривается как циклическая последовательность (т.е. полагается $(x_{i+n}, y_{i+n}) = (x_i, y_i)$).

Сплайновая кривая строится по сегментам. Для сплайна порядка s каждый сегмент строится по $s + 1$ последовательным точкам. Общее число сегментов замкнутой кривой равно числу точек n , и m -й сегмент задается параметрическим представлением:

$$(x(t), y(t)) = (1 \ t \ \dots \ t^{s-1} \ t^s) HX_m, \ t \in [0, 1], \quad (16)$$

где

$$X_m = \begin{pmatrix} x_m & y_m \\ \dots\dots\dots \\ x_{m+s} & y_{m+s} \end{pmatrix}.$$

Здесь H — фиксированная матрица размера $(s + 1) \times (s + 1)$, которая и определяет вид сплайна. На Рис. 10 показаны примеры кубического B -сплайна и интерполяционного сплайна. Примеры вычисления моментов для таких сплайнов обсуждются в разделе 12.

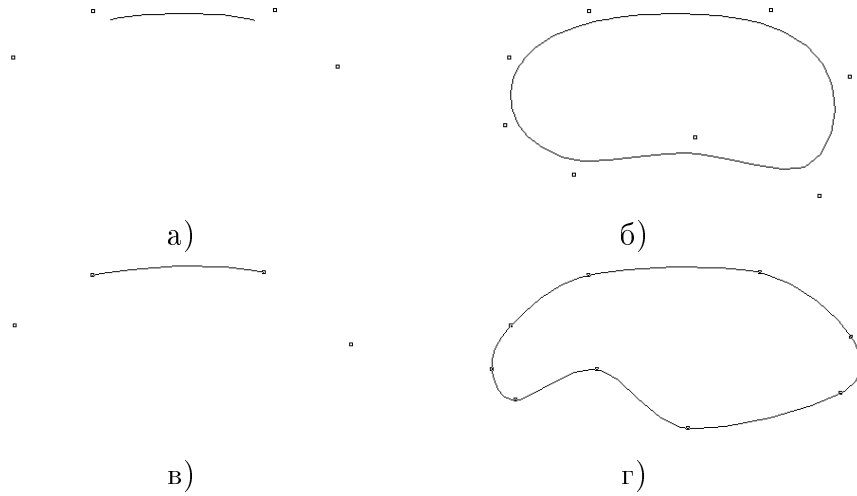


Рис. 10: Кубический B -сплайн: а) сегмент сплайна; б) замкнутая кривая. Интерполяционный сплайн: в) сегмент сплайна; г) замкнутая кривая.

Отметим, что часто используется другое представление сплайнов на основе линейной комбинации базисных функций. Это позволяет определить также нерегулярные сплайны. Нерегулярные сплайны имеют различные матрицы H для разных сегментов сплайна. В данной работе мы рассматриваем только регулярные сплайны.

Далее для всех матриц используются следующие обозначения: H_{ij} , $0 \leq i, j \leq s$, обозначает соответствующий элемент матрицы H , причем строки и столбцы нумеруются от 0 до s . Аналогичные обозначения будут использоваться для всех $(s + 1) \times (s + 1)$ -матриц.

Будем предполагать, что сплайн обладает следующим свойством симметрии: кривая сохраняет свой вид, если порядок точек поменять на противоположный. Такие часто используемые сплайны, как интерполирующие и B -сплайны, обладают этим свойством.

Для вычисления площади области, ограниченной замкнутой сплайновой кривой, нужно просуммировать ориентированные площади подграфиков всех сегментов сплайна. То же относится и к моментам любого порядка (см. Рис. 11).

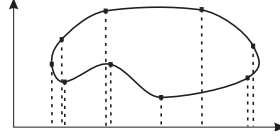


Рис. 11: Площадь фигуры получается суммированием ориентированных площадей подграфиков всех сегментов сплайна.

Напомним формулу для вычисления моментов подграфика параметризованной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$:

$$m_{pq} = \frac{1}{q+1} \int_{t_0}^{t_1} x(t)^p y(t)^{q+1} x'(t) dt. \quad (17)$$

Для каждого сегмента сплайна $x(t)$ и $y(t)$ есть некоторые полиномы. При их подстановке в последнюю формулу получаем выражение для момента подграфика сегмента сплайна. Оно представляет собой форму степени $p+1$ относительно x -координат и степени $q+1$ относительно y -координат точек, по которым строится данный сегмент. Следовательно, выражение для момента m_{pq} подграфика содержит не более $C_{s+p+1}^{p+1} C_{s+q+1}^{q+1}$ слагаемых.

Для площади (т.е. момента m_{00}) верно

Утверждение 1. *Площадь подграфика m -го сегмента сплайна порядка s , построенного по точкам $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$, $m \leq i \leq m+s$, по формуле (16), равна*

$$\mathbf{x}_m A \mathbf{y}_m^t. \quad (18)$$

Здесь $\mathbf{x}_m = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+s})$, $\mathbf{y}_m = (y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+s})$, а A — матрица размера $(s+1) \times (s+1)$. Элементы a_{ij} матрицы A определяются по формуле:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^s \sum_{l=0}^s \frac{k}{k+l} h_{ki} h_{lj}. \quad (19)$$

Если сплайн обладает указанным выше свойством симметрии, то матрица A центрально-антисимметрична, т.е. верно $a_{ij} = -a_{s-i, s-j}$.

Доказательство. Имеем

$$y(t) = \sum_{l=0}^s \left(\sum_{j=0}^s h_{lj} y_{j+m} \right) t^l = \sum_{j=0}^s \sum_{l=0}^s h_{lj} t^l y_{j+m},$$

$$x'(t) = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=0}^s h_{ki} x_{i+m} \right) k t^{k-1} = \sum_{i=0}^s \sum_{k=1}^s k h_{ki} t^{k-1} x_{i+m}.$$

Подставляя $x'(t)$ и $y(t)$ в (17) при $p = q = 0$ и $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, получаем

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s \left(\sum_{k=1}^s \sum_{l=0}^s k h_{ki} h_{lj} t^{k+l-1} \right) x_{i+m} y_{j+m} dt =$$

$$\sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s \left(\sum_{k=1}^s \sum_{l=0}^s \frac{k}{k+l} h_{ki} h_{lj} \right) x_{i+m} y_{j+m}.$$

Это доказывает формулу (19).

Обозначим $\check{\mathbf{x}}_m = (x_{m+s}, x_{m+s-1}, \dots, x_m)$. Пусть также \check{A} есть матрица с элементами $\check{a}_{ij} = a_{s-i, s-j}$. Поскольку сегмент сплайна обладает свойством симметрии, ориентированная площадь подграфика для противоположного порядка контрольных точек имеет то же значение по абсолютной величине, но с противоположным знаком, по сравнению с исходным порядком, т.е.

$$0 = \mathbf{x}_m A \mathbf{y}_m^t + \check{\mathbf{x}}_m A \check{\mathbf{y}}_m^t = \mathbf{x}_m (A + \check{A}) \mathbf{y}_m^t.$$

Это выполняется для произвольного набора контрольных точек. Следовательно, $A + \check{A} = 0$, и матрица A является центрально-антисимметричной. □

Формула (18) содержит $(s+1)^2$ слагаемых. Для площади всей замкнутой области необходимо просуммировать значения для всех сегментов:

$$m_{00} = \sum_{m=1}^n \mathbf{x}_m A \mathbf{y}_m^t = \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s a_{ij} x_{m+i} y_{m+j}. \quad (20)$$

Однако в этой циклической сумме матрица A является избыточной.

Теорема 7. Площадь m_{00} области, ограниченной замкнутой сплайновой кривой порядка s с n контрольными точками $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, вычисляется следующим образом:

$$m_{00} = \sum_{(i,j) \in \Gamma_{00}} a'_{ij} \sum_{m=1}^n x_{m+i} y_{m+j}. \quad (21)$$

Здесь $a'_{ij} = \sum_{k=0}^s a_{k+i,k+j}$ (по всем $a_{k+i,k+j}$, имеющим смысл), а Γ_{00} — множество индексов $\Gamma = \{(i,j) \mid 0 \leq i, j \leq s, ij = 0\}$, соответствующих первому строке и столбцу матрицы A .

Доказательство. Возьмем некоторую пару индексов $(i,j) \in \Gamma_{00}$. Тогда для каждого m , $1 \leq m \leq n$, найдется единственная пара контрольных точек $\mathbf{p}_{i'}, \mathbf{p}_{j'}$ такая, что $i' = i+m \bmod n$, $j' = j+m \bmod n$. Элемент $x_{i'} y_{j'}$, соответствующей этой паре контрольных точек, входит в (20) с каждым из коэффициентов $a_{i+m',j+m'}$, $0 \leq m' \leq s$, имеющим смысл. Таким образом, суммарный коэффициент для него равен $a'_{ij} = \sum_{k=0}^s a_{k+i,k+j}$ (см. Рис. 12. При этом коэффициент a'_{ij} не зависит от m . Аналогично, для каждого $x_{i'} y_{j'}$, входящего в (20), суммарный коэффициент равен $a'_{i,j}$, $(i,j) \in \Gamma_{00}$. Это доказывает формулу (21).

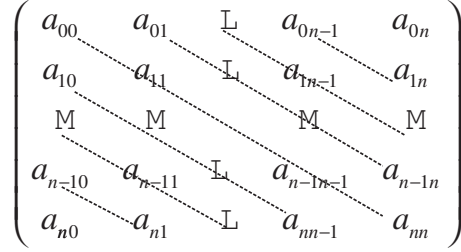


Рис. 12: Элементы a'_{ij} получаются суммированием элементов матрицы вдоль диагоналей.

Из центральной антисимметричности A следует $a'_{i0} = -a'_{0i}$, $a'_{00} = 0$. Таким образом, для вычисления площади достаточно просуммировать $2sn$ слагаемых. Отметим, что прямое вычисление по формуле (20) требует суммирования $(s+1)^2 n$ слагаемых. Заметим также, что формула площади многоугольника с n вершинами содержит $2n$ слагаемых.

□

Аналогичным способом вычисляются моменты. Рассмотрим момент первого порядка m_{10} . Для него справедлив результат, аналогичный утверждению 1:

$$m_{10} = \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^s b_{ijk} x_{m+i} x_{m+j} y_{m+k}, \quad (22)$$

где

$$b_{ijk} = \sum_{p=0}^s \sum_{q=1}^s \sum_{r=0}^s \frac{q}{p+q+r} h_{pi} h_{qj} h_{rk}. \quad (23)$$

Заметим, что выполняется равенство $b_{ijk} = b_{kji}$.

Кроме того, при $i \neq j$ члены с коэффициентами b_{ijk} подобны, поэтому реальное значение имеет только сумма $b_{ijk} + b_{jik}$. Можно, таким образом, ввести симметризованные коэффициенты $\bar{b}_{ijk} = (b_{ijk} + b_{jik})/2$ вместо коэффициентов b_{ijk} . Для симметризованных коэффициентов также выполняется свойство антисимметрии $\bar{b}_{ijk} = -\bar{b}_{s-i, s-j, s-k}$.

Аналогичное выражение получается для момента m_{01} . Верно

$$m_{01} = \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^s \tilde{b}_{ijk} x_{m+i} y_{m+j} y_{m+k}, \quad (24)$$

где

$$\tilde{b}_{ijk} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^s \sum_{q=0}^s \sum_{r=0}^s \frac{p}{p+q+r} h_{pi} h_{qj} h_{rk}. \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{b}_{ijk} = b_{jik}/2$. Кроме того, $\tilde{b}_{ijk} = \tilde{b}_{ikj}$, поэтому коэффициенты для момента m_{01} получаются сразу в симметризованном виде (заметим, что здесь реальный смысл имеют только суммы $\tilde{b}_{ijk} + \tilde{b}_{ikj}$).

Формулы (22) и (24) упрощаются аналогично формуле площади.

Теорема 8. Моменты m_{10} и m_{01} области, ограниченной замкнутой сплайновой кривой порядка s с n контрольными точками $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, равны:

$$m_{10} = \sum_{(i,j,k) \in \Gamma_{10}} b'_{ijk} \sum_{m=1}^n x_{m+i} x_{m+j} y_{m+k}, \quad (26)$$

$$m_{01} = - \sum_{(i,j,k) \in \Gamma_{10}} b'_{ijk} \sum_{m=1}^n x_{m+k} y_{m+i} y_{m+j}. \quad (27)$$

Здесь $\Gamma_{10} = \{(i, j, k) | 0 \leq i, j, k \leq s, ijk = 0, j \leq i\}$, а

$$b'_{ijk} = \begin{cases} \sum_{m=0}^s \bar{b}_{m+i, m+j, m+k} = \sum_{m=0}^s b_{m+i, m+j, m+k} & j = i, \\ 2 \sum_{m=0}^s \bar{b}_{m+i, m+j, m+k} = \sum_{m=0}^s b_{m+i, m+j, m+k} + \sum_{m=0}^s b_{m+j, m+i, m+k} & j \neq i. \end{cases}$$

Кроме того, при $i = 2k$ выполняется $b'_{ijk} = 0$ в силу центральной антисимметричности. Действительно, при $i = j = k = 0$ верно

$$b'_{000} = \sum_{m=0}^s \bar{b}_{m, m, m} = 0.$$

В противном случае

$$b'_{ijk} = 2 \sum_{m=0}^{s-2k} \bar{b}_{m+2k, m, m+k} = 0,$$

поскольку последняя сумма состоит из симметричных элементов.

В результате можно сделать вывод, что число слагаемых в каждой из формул (26) и (27) не превосходит $\left[\frac{(s+1)(3s+1)}{2} \right] n$, в то время как в формуле (22) оно равно $(s+1)^3 n$. Здесь $[s]$ обозначает целую часть s .

Формула (27) следует из (26), поскольку при перестановке координатных осей момент m_{01} переходит в момент m_{10} той же области (при этом меняется знак, поскольку ориентация изменяется на противоположную).

Рассмотрим вычисление вторых моментов m_{20} , m_{11} и m_{02} . Аналогично можно показать, что для объекта, ограниченного замкнутой сплайновой кривой порядка s с n контрольными точками справедливы формулы:

$$m_{20} = \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^s \sum_{l=0}^s c_{ijkl} x_{m+i} x_{m+j} x_{m+k} y_{m+l}, \quad (28)$$

$$m_{11} = \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^s \sum_{l=0}^s d_{ijkl} x_{m+i} x_{m+j} y_{m+k} y_{m+l}, \quad (29)$$

$$m_{02} = \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^s \sum_{l=0}^s e_{ijkl} x_{m+i} y_{m+j} y_{m+k} y_{m+l}. \quad (30)$$

Здесь коэффициенты определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= \sum_{p=0}^s \sum_{q=0}^s \sum_{r=1}^s \sum_{u=0}^s \frac{r}{p+q+r+u} h_{pi} h_{qj} h_{rk} h_{ul}, \\ d_{ijkl} &= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^s \sum_{q=1}^s \sum_{r=0}^s \sum_{u=0}^s \frac{q}{p+q+r+u} h_{pi} h_{qj} h_{rk} h_{ul}, \\ e_{ijkl} &= \frac{1}{3} \sum_{p=1}^s \sum_{q=0}^s \sum_{r=0}^s \sum_{u=0}^s \frac{p}{p+q+r+u} h_{pi} h_{qj} h_{rk} h_{ul}. \end{aligned}$$

Ясно, что коэффициенты c_{ijkl} , c_{ikjl} , c_{jikl} , c_{jkil} , c_{kijl} и c_{kjil} соответствуют подобным членам, поэтому для вычисления момента m_{20} необходима только их сумма. Вместо коэффициентов c_{ijkl} можно опять ввести симметризованные коэффициенты \bar{c}_{ijkl} :

$$\bar{c}_{ijkl} = \frac{1}{6} (c_{ijkl} + c_{ikjl} + c_{jikl} + c_{jkil} + c_{kijl} + c_{kjil}). \quad (31)$$

Аналогично для момента m_{11} вводятся симметризованные коэффициенты \bar{d}_{ijkl} :

$$\bar{d}_{ijkl} = \frac{1}{4} (d_{ijkl} + d_{jikl} + d_{ijlk} + d_{jilk}).$$

Матрицы симметризованных коэффициентов являются центрально-антисимметричными, т.е. $\bar{c}_{ijkl} = -\bar{c}_{s-i, s-j, s-k, s-l}$ и $\bar{d}_{ijkl} = -\bar{d}_{s-i, s-j, s-k, s-l}$. Это доказывается аналогично утверждению 1.

Формулы (28)–(30) не являются оптимальными для вычислений. Каждая из них содержит $(s+1)^4 n$ слагаемых. С учетом замкнутости кривой можно опять вычислить суммарные коэффициенты и получить более эффективные формулы.

Теорема 9. *Моменты m_{20} , m_{11} и m_{02} области, ограниченной замкнутой сплайновой кривой порядка s с n контрольными точками $\mathbf{p}_i =$*

(x_i, y_i) , $1 \leq i \leq n$, равны:

$$m_{20} = \sum_{(i,j,k,l) \in \Gamma_{20}} c'_{ijkl} \sum_{m=1}^n x_{m+i} x_{m+j} x_{m+k} y_{m+l}, \quad (32)$$

$$m_{11} = \sum_{(i,j,k,l) \in \Gamma_{11}} d'_{ijkl} \sum_{m=1}^n x_{m+i} x_{m+j} y_{m+k} y_{m+l}, \quad (33)$$

$$m_{02} = - \sum_{(i,j,k,l) \in \Gamma_{20}} c'_{ijkl} \sum_{m=1}^n x_{m+l} y_{m+i} y_{m+j} y_{m+k}. \quad (34)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma_{20} &= \{(i, j, k, l) \mid 0 \leq i, j, k, l \leq s, \ i j k l = 0, \ k \leq j \leq i\}, \\ \Gamma_{11} &= \{(i, j, k, l) \mid 0 \leq i, j, k, l \leq s, \ i j k l = 0, \ j \leq i, \ l \leq k\}, \end{aligned}$$

и

$$c'_{ijkl} = \begin{cases} \sum_{m=0}^s c_{m+i, m+j, m+k, m+l} & \text{if } i = j = k, \\ \sum_{m=0}^s c_{m+i, m+j, m+k, m+l} + \sum_{m=0}^s c_{m+j, m+k, m+i, m+l} + \\ \sum_{m=0}^s c_{m+k, m+i, m+j, m+l} & \text{if } i \neq j = k \\ & \text{or } i = j \neq k, \\ \sum_{m=0}^s c_{m+i, m+j, m+k, m+l} + \sum_{m=0}^s c_{m+i, m+k, m+j, m+l} + \\ \sum_{m=0}^s c_{m+j, m+i, m+k, m+l} + \sum_{m=0}^s c_{m+j, m+k, m+i, m+l} + \\ \sum_{m=0}^s c_{m+k, m+j, m+i, m+l} + \sum_{m=0}^s c_{m+k, m+i, m+j, m+l} & \text{if } i \neq j \neq k. \end{cases}$$

$$d'_{ijkl} = \begin{cases} \sum_{m=0}^s d_{m+i, m+j, m+k, m+l} & \text{if } i = j, \ k = l \\ \sum_{m=0}^s d_{m+i, m+j, m+k, m+l} + \sum_{m=0}^s d_{m+j, m+i, m+k, m+l} & \text{if } i \neq j, \ k = l, \\ \sum_{m=0}^s d_{m+i, m+j, m+k, m+l} + \sum_{m=0}^s d_{m+i, m+j, m+l, m+k} & \text{if } i = j, \ k \neq l, \\ \sum_{m=0}^s d_{m+i, m+j, m+k, m+l} + \sum_{m=0}^s d_{m+j, m+i, m+k, m+l} + \\ \sum_{m=0}^s d_{m+i, m+j, m+l, m+k} + \sum_{m=0}^s d_{m+j, m+i, m+l, m+k} & \text{if } i \neq j, \ k \neq l. \end{cases}$$

Утверждение 2. Число слагаемых (ненулевых) в формулах (32), (34) and (33) равно $\left[\frac{(s+1)(4s^2+11s+3)}{6} \right] n$ для моментов m_{20} и m_{02} и $((s+1)^3 - [(\frac{s+1}{2})^2] - [(\frac{s+2}{2})^2]) n$ для момента m_{11} , соответственно.

Доказательство. Покажем, что $c'_{ijkl} = 0$, если $(i, j, k, l) = (2l, l, 0, l)$. Действительно, если $l = 0$, то из центральной антисимметричности коэффициентов \bar{c}_{ijkl} следует

$$c'_{0000} = \sum_{m=0}^s \bar{c}_{mmmm} = 0.$$

Если же $l \neq 0$, то $c'_{2l,l,0,l} = 6 \sum_{m=0}^{s-2l} \bar{c}_{m+2l,m+l,m,m+l}$. Пусть $m = s - 2l - i$. Тогда

$$\bar{c}_{s-i,s-l-i,s-2l-i,s-l-i} = \bar{c}_{s-2l-i,s-l-i,s-i,s-l-i} = -\bar{c}_{i+2l,i+l,i,i+l}.$$

Первое равенство здесь вытекает из того, что коэффициенты \bar{c}_{ijkl} симметризованы (31), второе равенство следует из центральной антисимметричности коэффициентов \bar{c}_{ijkl} . Поэтому $c'_{2l,l,0,l} = 0$.

Покажем, что $d'_{ijkl} = 0$ при $i + j = k + l$. Если $i = j = k = l = 0$, то из центральной антисимметричности коэффициентов \bar{d}_{ijkl} следует

$$d'_{0000} = \sum_{m=0}^s \bar{d}_{mmmm} = 0.$$

В противном случае возможна одна из двух ситуаций: $j = 0$ и $i = k + l$ либо $l = 0$ и $i + j = k$. В первой из них имеем

$$d'_{i,0,i-l,l} = \begin{cases} 2 \sum_{m=0}^{s-i} \bar{d}_{m+i,m,m+i-l,m+l} & \text{if } i - l = l, \\ 4 \sum_{m=0}^{s-i} \bar{d}_{m+i,m,m+i-l,m+l} & \text{if } i - l \neq l. \end{cases}$$

Пусть $m = s - i - p$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{d}_{m+i,m,m+i-l,m+l} &= \bar{d}_{s-p,s-i-p,s-p-l,s-i-p+l} = \bar{d}_{s-i-p,s-p,s-i-p+l,s-p-l} = \\ &= -\bar{d}_{p+i,p,p+i-l,p+l}. \end{aligned}$$

Поэтому $d'_{i,0,i-l,l} = 0$ как сумма симметричных элементов. One can verify that the number of such coefficients is $\left[\left(\frac{s+2}{2}\right)^2\right]$. The second option $d'_{k-j,j,k,0} = 0$, $j \geq 1$, is proved the same way and the number of coefficients is $\left[\left(\frac{s+1}{2}\right)^2\right]$.

Теперь подсчитаем число ненулевых элементов в множествах Γ_{20} and Γ_{11} .

Рассмотрим множество Γ_{20} . При $l = 0$ число элементов равно

$$N_1 = \sum_{i=0}^s \frac{(i+1)(i+2)}{2} = \frac{1}{6}(s+1)(s+2)(s+3).$$

Если $l \neq 0$, то $k = 0$ и число элементов равно

$$N_2 = \frac{s(s+1)(s+2)}{2}.$$

Из суммарного числа $N_1 + N_2$ необходимо отнять $\left[\frac{s+1}{2}\right] + 1$ нулевых элементов, что дает $\left[\frac{(s+1)(4s^2+11s+3)}{6}\right]$ ненулевых элементов в Γ_{20} .

Рассмотрим множество Γ_{11} . При $j = 0$ число элементов равно $N_3 = \frac{(s+1)^2(s+2)}{2}$. Если $j \neq 0$, то $l = 0$ и число элементов равно $N_4 = \frac{s(s+1)^2}{2}$. Вычитая $\left[\left(\frac{s+1}{2}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{s+2}{2}\right)^2\right]$ нулевых элементов из $N_3 + N_4$, получаем $\left((s+1)^3 - \left[\left(\frac{s+1}{2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{s+2}{2}\right)^2\right]\right) n$ ненулевых элементов в Γ_{11} . □

12 Примеры

Рассмотрим примеры конкретных сплайнов.

12.1 Квадратичные B -сплайны

Квадратичный B -сплайн задается матрицей

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица A для вычисления площади находится по формуле (19):

$$A = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -3 & -8 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Формула (21) для вычисления площади области, ограниченной замкнутой кривой с n контрольными точками имеет вид:

$$m_{00} = \frac{1}{24} \sum_{m=1}^n \left(-10(x_m y_{m+1} - x_{m+1} y_m) - (x_m y_{m+2} - x_{m+2} y_m) \right).$$

Моменты m_{10} и m_{01} вычисляются по формулам (26) и (27), которые для квадратичных сплайнов имеют вид:

$$m_{10} = \frac{1}{240} \sum_{i=1}^n \left(31x_i x_{i+1} y_i + 31x_{i+1}^2 y_i + x_i x_{i+2} y_i + 7x_{i+1} x_{i+2} y_i + x_{i+2}^2 y_i \right. \\ \left. - 31x_i^2 y_{i+1} - 31x_i x_{i+1} y_{i+1} - x_i^2 y_{i+2} - 7x_i x_{i+1} y_{i+2} - x_i x_{i+2} y_{i+2} \right),$$

$$m_{01} = \frac{1}{240} \sum_{i=1}^n \left(-31x_i y_i y_{i+1} - 31x_i y_{i+1}^2 - x_i y_i y_{i+2} - 7x_i y_{i+1} y_{i+2} - x_i y_{i+2}^2 \right. \\ \left. + 31x_{i+1} y_i^2 + 31x_{i+1} y_i y_{i+1} + x_{i+2} y_i^2 + 7x_{i+2} y_i y_{i+1} + x_{i+2} y_i y_{i+2} \right).$$

12.2 Кубические B -сплайны

Матрица H для кубического B -сплайна имеет вид:

$$H = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица A для вычисления площади (19) следующая:

$$A = \frac{1}{720} \begin{pmatrix} -10 & -71 & -38 & -1 \\ -9 & -150 & -183 & -18 \\ 18 & 183 & 150 & 9 \\ 1 & 38 & 71 & 10 \end{pmatrix}$$

Формула (21) для площади области ограниченной замкнутой кривой принимает вид:

$$m_{00} = \frac{1}{720} \sum_{m=1}^n \left(-245(x_m y_{m+1} - x_{m+1} y_m) - \right. \\ \left. 56(x_m y_{m+2} - x_{m+2} y_m) - x_m y_{m+3} + x_{m+3} y_m \right).$$

Формулы (26) и (27) для моментов m_{10} и m_{01} принимают вид, соответственно:

$$m_{10} = \frac{1}{60480} \sum_{i=1}^n \left(5947x_i x_{i+1} y_i + 5947x_{i+1}^2 y_i + 648x_i x_{i+2} y_i + 2710x_{i+1} x_{i+2} y_i + \right. \\ \left. 648x_{i+2}^2 y_i + \frac{5}{3}x_i x_{i+3} y_i + 36x_{i+1} x_{i+3} y_i + 43x_{i+2} x_{i+3} y_i + \frac{5}{3}x_{i+3}^2 y_i - 5947x_i^2 y_{i+1} - \right. \\ \left. 5947x_i x_{i+1} y_{i+1} + 7x_i x_{i+3} y_{i+1} - 648x_i^2 y_{i+2} - 2710x_i x_{i+1} y_{i+2} - 648x_i x_{i+2} y_{i+2} - \right. \\ \left. 7x_i x_{i+3} y_{i+2} - \frac{5}{3}x_i^2 y_{i+3} - 43x_i x_{i+1} y_{i+3} - 36x_i x_{i+2} y_{i+3} - \frac{5}{3}x_i x_{i+3} y_{i+3} \right),$$

$$m_{01} = \frac{1}{60480} \sum_{i=1}^n \left(-5947x_i y_i y_{i+1} - 5947x_i y_{i+1}^2 - 648x_i y_i y_{i+2} - 2710x_i y_{i+1} y_{i+2} - \right. \\ \left. 648x_i y_{i+2}^2 - \frac{5}{3}x_i y_i y_{i+3} - 36x_i y_{i+1} y_{i+3} - 43x_i y_{i+2} y_{i+3} - \frac{5}{3}x_i y_{i+3}^2 + 5947x_{i+1} y_i^2 + \right. \\ \left. 5947x_{i+1} y_i y_{i+1} - 7x_{i+1} y_i y_{i+3} + 648x_{i+2} y_i^2 + 2710x_{i+2} y_i y_{i+1} + 648x_{i+2} y_i y_{i+2} + \right. \\ \left. 7x_{i+2} y_i y_{i+3} + \frac{5}{3}x_{i+3} y_i^2 + 43x_{i+3} y_i y_{i+1} + 36x_{i+3} y_i y_{i+2} + \frac{5}{3}x_{i+3} y_i y_{i+3} \right).$$

12.3 Кубические интерполяционные сплайны

Матрицы H и A для кубического интерполяционного сплайна, проходящего через контрольные точки, равны:

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{240} \begin{pmatrix} 0 & -11 & 12 & -1 \\ 11 & -120 & -143 & 12 \\ -12 & 143 & 120 & -11 \\ 1 & -12 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Формула (21) для вычисления площади области, ограниченной интерполирующей сплайновой кривой, имеет вид:

$$m_{00} = \frac{1}{240} \sum_{i=1}^n \left(-165(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + 24(x_i y_{i+2} - x_{i+2} y_i) - x_i y_{i+3} + x_{i+3} y_i \right).$$

Моменты m_{10} и m_{01} вычисляются по формулам:

$$m_{10} = \frac{1}{6720} \sum_{i=1}^n \left(1643x_i x_{i+1} y_i + 1643x_{i+1}^2 y_i - 136x_i x_{i+2} y_i - 302x_{i+1} x_{i+2} y_i - \right. \\ \left. 136x_{i+2}^2 y_i - x_i x_{i+3} y_i + 8x_{i+1} x_{i+3} y_i + 23x_{i+2} x_{i+3} y_i - x_{i+3}^2 y_i - 1643x_i^2 y_{i+1} - \right. \\ \left. 1643x_i x_{i+1} y_{i+1} + 15x_i x_{i+3} y_{i+1} + 136x_i^2 y_{i+2} + 302x_i x_{i+1} y_{i+2} + 136x_i x_{i+2} y_{i+2} - \right. \\ \left. 15x_i x_{i+3} y_{i+2} + x_i^2 y_{i+3} - 23x_i x_{i+1} y_{i+3} - 8x_i x_{i+2} y_{i+3} + x_i x_{i+3} y_{i+3} \right),$$

$$m_{01} = \frac{1}{6720} \sum_{i=1}^n \left(-1643x_i y_i y_{i+1} - 1643x_i y_{i+1}^2 + 136x_i y_i y_{i+2} + 302x_i y_{i+1} y_{i+2} + \right. \\ \left. 136x_i y_{i+2}^2 + x_i y_i y_{i+3} - 8x_i y_{i+1} y_{i+3} - 23x_i y_{i+2} y_{i+3} + x_i y_{i+3}^2 + 1643x_{i+1} y_i^2 + \right. \\ \left. 1643x_{i+1} y_i y_{i+1} - 15x_{i+1} y_i y_{i+3} - 136x_{i+2} y_i^2 - 302x_{i+2} y_i y_{i+1} - 136x_{i+2} y_i y_{i+2} + \right. \\ \left. 15x_{i+2} y_i y_{i+3} - x_{i+3} y_i^2 + 23x_{i+3} y_i y_{i+1} + 8x_{i+3} y_i y_{i+2} - x_{i+3} y_i y_{i+3} \right).$$

В качестве заключения можно сказать, в данном разделе представлен подход, позволяющий получить явные формулы для вычисления площадей и геометрических моментов малых порядков двумерных объектов со сплайновой границей. Подход использует замкнутость граничной сплайновой кривой. Это позволяет понизить сложность полученных формул. Сложность зависит от порядка момента, степени сплайна и числа контрольных точек сплайновой кривой. Окончательные формулы могут быть эффективно использованы в различных приложениях при работе с плоскими объектами, имеющими гладкую границу. Очевидна, что границу можно также приблизить ломаной и применить формулы моментов многоугольных объектов. Однако, чтобы получить хорошую аппроксимацию, число сторон многоугольника должно быть существенно больше, чем число контрольных точек сплайна.

13 Вычисление объема трехмерного объекта по непараллельным сечениям

Мы рассматриваем задачу вычисления объема трехмерного объекта по его сечениям движущейся плоскостью. Предполагается, что плоскость

в своем движении пробегает весь исследуемый объем, т.е. объект представляется как объединение своих сечений (см. Рис. 13). Такие задачи часто возникают в медицинских приложениях, например при обработке последовательности ультразвуковых изображений.

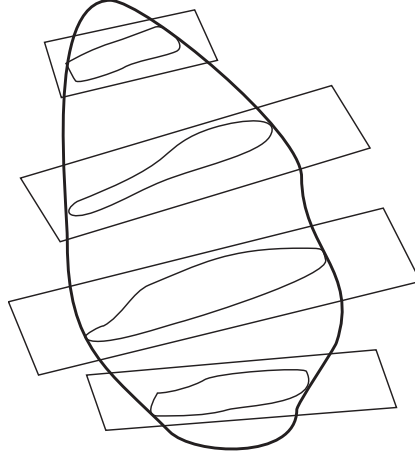


Рис. 13: Оценка объема по площадям сечений.

Справедлива формула для вычисления объема:

$$V = \left| \int_C \mathbf{s} \cdot d\mathbf{c} \right|, \quad (35)$$

где C — кривая, образованная центроидами всех сечений, \mathbf{s} — направляющий вектор этой кривой, а \mathbf{s} — вектор, ортогональный сечению и равный по длине площади этого сечения.

В реальных вычислениях имеется только конечный набор сечений. Если в (35) перейти от интегралов к суммам, получим

$$V \approx \left| \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2} (\mathbf{s}_{i+1} + \mathbf{s}_i) \cdot (\mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{c}_i) \right|,$$

где \mathbf{s}_i — вектор, ортогональный i -му сечению и равный по длине его площади, а \mathbf{c}_i — радиус-вектор центроида i -го сечения (см. Рис. 14). Эта формула осуществляет линейную интерполяцию векторов. Точность такого приближения зависит от степени выпуклости объекта.

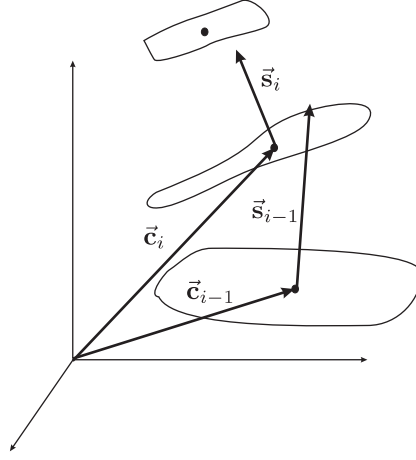


Рис. 14: Вычисление объема по непараллельным сечениям.

Далее мы приводим явные формулы для вычисления объема с использованием трехмерных интерполирующих сплайнов. Кроме того, используем сплайны для вычисления площадей и центроидов сечений. Для них также приведены явные формулы.

Напомним, что сплайновая кривая, проходящая через некоторый набор точек $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$ пространства, состоит из сегментов, каждый из которых строится по 4 точкам. Так, сегмент интерполирующего сплайна, соединяющий точки (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) , строится по 4 точкам $(x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq 4$ по формуле

$$[x(t), y(t), z(t)] = (t^3 \ t^2 \ t \ 1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

При этом кривая, собранная из сегментов, является гладкой. Сегмент кривой, соединяющий первую точку со следующей, можно построить по набору 4 точек $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Аналогично последний сегмент строится по точкам $\mathbf{p}_{n-2}, \mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n-1}$. В итоге получаем гладкую параметризованную кривую, проходящую через все точки.

Для данной задачи можно аппроксимировать сплайнами последовательность радиус-векторов центроидов сечений \mathbf{c}_i и последовательность

векторов \mathbf{s}_i . Пусть $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — кривая, аппроксимирующая последовательность центроидов, $\mathbf{s}(t) = (u(t), v(t), w(t))$ — соответствующая аппроксимация векторов площадей. Тогда получаем следующую аппроксимацию для исходного объема:

$$V \approx \left| \int_{\mathbf{c}(t)} \mathbf{s}(t) \cdot d\mathbf{c}(t) \right| = \left| \int (u(t)x'(t) + v(t)y'(t) + w(t)z'(t)) dt \right|.$$

Подставляя аналитические выражения для $\mathbf{c}(t)$ и $\mathbf{s}(t)$ на каждом сегменте, получим формулу для объема между соседними сечениями. Сплайновые аппроксимации на i -м слое задаются векторами $\mathbf{c}_j = (x_j, y_j, z_j)$ и $\mathbf{s}_j = (u_j, v_j, w_j)$, $j = i-1, i, i+1, i+2$. Соответствующий объем равен:

$$V_i = \mathbf{x}_i A \mathbf{u}_i^t + \mathbf{y}_i A \mathbf{v}_i^t + \mathbf{z}_i A \mathbf{w}_i^t, \quad (36)$$

где

$$A = \frac{1}{240} \begin{pmatrix} 0 & -11 & 12 & -1 \\ 11 & -120 & -143 & 12 \\ -12 & 143 & 120 & -11 \\ 1 & -12 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь используются обозначения $\mathbf{x}_i = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ и т.д.

Объем всего объекта вычисляется по формуле

$$V = \left| \sum_{i=1}^{N-1} V_i \right|. \quad (37)$$

Для вычисления объема по данному методу необходимо найти площади и положения центроидов каждого сечения. Эта задача решается уже двумерными методами. Одним из таких методов является полигональная аппроксимация контура каждого сечения, позволяющая вычислять площади и моменты. Однако для аппроксимации контура можно также использовать сплайны, дающие более точное приближение. Для этого нужно зафиксировать на контуре некоторый набор точек, по которым будет строиться аппроксимация контура.

Пусть на сечении задана система координат (x, y) , и для аппроксимации используется n точек на контуре с координатами $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Положим $(x_{m \pm n}, y_{m \pm n}) = (x_m, y_m)$. По этим точкам строится сплайновая

аппроксимация контура. Площадь полученной области с точностью до знака равна

$$S = \sum_{m=1}^n \begin{pmatrix} x_{m-1} & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_{m-1} \\ y_m \\ y_{m+1} \\ y_{m+2} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Координаты центроида вычисляются с помощью первых моментов области:

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{m_{10}}{S}, \frac{m_{01}}{S} \right) \quad (39)$$

Для моментов сплайновой аппроксимации верны формулы (полученные с использованием пакета символьных вычислений *Maple*):

$$m_{10} = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 b_{ijk} x_{m+i} x_{m+j} y_{m+k};$$

$$m_{01} = - \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 b_{ijk} x_{m+k} y_{m+i} y_{m+j}.$$

Здесь

$$(b_{ij1}) = \frac{1}{13440} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 10 & -1 \\ -9 & 386 & -77 & 8 \\ 10 & -77 & -292 & 23 \\ -1 & 8 & 23 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(b_{ij2}) = \frac{1}{13440} \begin{pmatrix} 18 & -193 & -148 & 15 \\ -193 & -4480 & 1459 & -146 \\ -148 & 1459 & 2918 & -225 \\ 15 & -146 & -225 & 20 \end{pmatrix},$$

$$(b_{ij3}) = \frac{1}{13440} \begin{pmatrix} -20 & 225 & 146 & -15 \\ 225 & -2918 & -1459 & 148 \\ 146 & -1459 & 4480 & 193 \\ -15 & 148 & 193 & -18 \end{pmatrix},$$

$$(b_{ij4}) = \frac{1}{13440} \begin{pmatrix} 2 & -23 & -8 & 1 \\ -23 & 292 & 77 & -10 \\ -8 & 77 & -386 & 9 \\ 1 & -10 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последние формулы можно переписать в другом виде, учитывая, что сплайновая кривая является замкнутой. Так,

$$\sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 b_{ijk} x_{m+i} x_{m+j} y_{m+k} = \sum_{m=1}^n \sum_{(i,j,k) \in \Gamma} b'_{ijk} x_{m+i} x_{m+j} y_{m+k}. \quad (40)$$

Здесь $\Gamma = \{(i, j, k) \mid 1 \leq i, j, k \leq 4, \min\{i, j, k\} = 1\}$ и $b'_{ijk} = \sum_{l=0}^3 b_{l+i, l+j, l+k}$. Последнее суммирование выполняется только для коэффициентов $b_{l+i, l+j, l+k}$, имеющих смысл.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 b_{ijk} x_{m+i} x_{m+j} y_{m+k} = \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_j y_k \sum_{m=1}^n b_{i', j', k'} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^n b'_{ijk} x_i x_j y_k, \end{aligned}$$

где $i' = i + m \bmod n$, $j' = j + m \bmod n$, $k' = k + m \bmod n$, а

$$b'_{ijk} = \begin{cases} \sum_{m=1}^n b_{i', j', k'} & \text{если } j = i, \\ \sum_{m=1}^n b_{i', j', k'} + \sum_{m=1}^n b_{j', i', k'} & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

Здесь суммирование идет тем значениям m , для которых $b_{i', j', k'}$ имеет смысл. Очевидно, b'_{ijk} не меняется при сдвиге всех индексов на одно и то же число. При этом $b'_{-i, -j, -k} = b'_{ijk}$, поскольку $b_{4-i, 4-j, 4-k} = b_{ijk}$. В итоге, подставляя конкретные значения и меняя обозначение индексов, получаем формулу:

$$\begin{aligned} m_{10} = \frac{1}{6720} \sum_{i=1}^n (1643(x_i x_{i+1} y_i - x_i x_{i+1} y_{i+1}) + 1643(x_{i+1}^2 y_i - x_i^2 y_{i+1}) \\ + 136(x_i x_{i+2} y_{i+2} - x_i x_{i+2} y_i) + 302(x_i x_{i+1} y_{i+2} - x_{i+1} x_{i+2} y_i) \\ + 136(x_i^2 y_{i+2} - x_{i+2}^2 y_i) + (x_i x_{i+3} y_{i+3} - x_i x_{i+3} y_i) \\ + 8(x_{i+1} x_{i+3} y_i - x_i x_{i+2} y_{i+3}) + 23(x_{i+2} x_{i+3} y_i - x_i x_{i+1} y_{i+3}) \\ + (x_i^2 y_{i+3} - x_{i+3}^2 y_i) + 15(x_i x_{i+3} y_{i+1} - x_i x_{i+3} y_{i+2})). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
m_{01} = & -\frac{1}{6720} \sum_{i=1}^n (1643(x_i y_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i y_{i+1}) + 1643(x_i y_{i+1}^2 - x_{i+1} y_i^2) \\
& + 136(x_{i+2} y_i y_{i+2} - x_i y_i y_{i+2}) + 302(x_{i+2} y_i y_{i+1} - x_i y_{i+1} y_{i+2}) \\
& + 136(x_{i+2} y_i^2 - x_i y_{i+2}^2) + (x_{i+3} y_i y_{i+3} - x_i y_i y_{i+3}) \\
& + 8(x_i y_{i+1} y_{i+3} - x_{i+3} y_i y_{i+2}) + 23(x_i y_{i+2} y_{i+3} - x_{i+3} y_i y_{i+1}) \\
& + (x_{i+3} y_i^2 - x_i y_{i+3}^2) + 15(x_{i+1} y_i y_{i+3} - x_{i+2} y_i y_{i+3})).
\end{aligned}$$

Упрощенная формула площади выглядит следующим образом:

$$S = \frac{1}{240} \sum_{i=1}^n (165(x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}) + 24(x_i y_{i+2} - x_{i+2} y_i) + (x_{i+3} y_i - x_i y_{i+3})).$$

Упрощение выражений для моментов и площади приводит к следующим расчетным формулам:

$$\begin{aligned}
m_{10} = & \frac{1}{6720} \sum_{i=1}^n (-z_{i1} 1643(x_i + x_{i+1}) + z_{i2}(302x_{i+1} + 15x_{i+3} + 136(x_i + x_{i+2})) \\
& + z_{i3}(8(x_i + x_{i+2}) - x_i - x_{i+3}) - z_{i4} 15x_i), \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{01} = & \frac{1}{6720} \sum_{i=1}^n (-z_{i1} 1643(y_i + y_{i+1}) + z_{i2}(302y_{i+1} + 15y_{i+3} + 136(y_i + y_{i+2})) \\
& + z_{i3}(8(y_i + y_{i+2}) - y_i - y_{i+3}) - z_{i4} 15y_i), \quad (42)
\end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{240} \sum_{i=1}^n (-165z_{i1} + 24z_{i2} - z_{i3}), \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned}
z_{i1} &= x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i, \quad z_{i2} = x_i y_{i+2} - x_{i+2} y_i \\
z_{i3} &= x_i y_{i+3} - x_{i+3} y_i, \quad z_{i4} = x_{i+1} y_{i+3} - x_{i+3} y_{i+1}
\end{aligned}$$

Сформулируем полученные результаты в виде алгоритма.

Алгоритм 3. Вход: Набор плоскостей Π_i с нормальными векторами \mathbf{n}_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Положение каждой плоскости зафиксировано в глобальной системе координат. В локальной системе координат каждой плоскости Π_i даны контрольные точки $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{n_i}$, которые задают сплайновое представление границы. Для определения этих контрольных точек применяется предварительная процедура сегментации, например, ручная.

Выход: Объем V объекта.

1. Для каждой плоскости Π_i в локальной системе координат вычислить площадь S_i и координаты центра по формулам (43), (39), (41) и (42).
2. Вычислить глобальные пространственные координаты центра \mathbf{c}_i , $i = 1, 2, \dots, N$.
3. По набору векторов $\mathbf{s}_i = S_i \mathbf{n}_i$ и центров \mathbf{c}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, вычислить объем по формулам (36) и (37).

Частным случаем рассмотренной задачи является восстановление объема по параллельным сечениям. В этом случае объем равен просто интегралу от площади сечения и не зависит от положений центров:

$$V = \left| \int s(h) dh \right|,$$

где $s(h)$ — последовательность площадей сечений, параметризованных положением точки пересечения плоскости сечения с общей ортогональной прямой.

Для интерполяции площадей также можно использовать сплайны, при этом интерполируются уже не векторы, а скалярные значения площадей. Тогда для объема V_i получается выражение

$$V_i = \mathbf{h}_i \mathbf{A} \mathbf{s}_i^t.$$

Здесь используются те же обозначения, что и выше.

14 Инварианты моментов.

Инвариантами моментов называются такие алгебраические выражения от моментов, которые не зависят от выбранного множества преобразований изображений. Первые инварианты моментов были предложены относительно масштабирования, сдвига и изменения ориентации объекта изображения. Явное построение инвариантов моментов осуществляется посредством алгебраической теории инвариантов, в свою очередь использующую аппарат алгебраической теории тензоров.

Инвариантность относительно растяжений (сжатий) может легко быть достигнута нормализацией полученных алгебраических инвариантов. Инвариантность относительно сдвигов получается выбором начала координат в центре тяжести объекта. Инвариантность относительно вращений является более трудной задачей. Один из методов ее решения (метод абсолютных инвариантов) основан на алгебраических инвариантах. Исследуются нелинейные комбинации значений центральных моментов, которые не меняются при вращениях пространства. Первые семь инвариантов моментов относительно масштабирования, сдвига и ориентации были предложены Ху. Они используют моменты не выше третьего порядка и имеют следующий вид:

$$M_1 = \mu_{20} + \mu_{02}$$

$$M_2 = (\mu_{20} - \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2$$

$$M_3 = (\mu_{30} - 3\mu_{12})^2 + (3\mu_{21} - \mu_{03})^2$$

$$M_4 = (\mu_{30} + \mu_{12})^2 + (\mu_{21} + \mu_{03})^2$$

$$M_5 = (\mu_{30} - 3\mu_{12})(\mu_{30} + \mu_{12})[(\mu_{30} + \mu_{12})^2 - 3(\mu_{21} + \mu_{03})^2] + (3\mu_{21} - \mu_{03})(\mu_{21} + \mu_{03})[3(\mu_{30} + \mu_{12})^2 - (\mu_{21} + \mu_{03})^2]$$

$$M_6 = (\mu_{20} - \mu_{02})[(\mu_{30} - \mu_{12})^2 - (\mu_{21} + \mu_{03})^2 + 4\mu_{11}(\mu_{30} + \mu_{12})(\mu_{21} + \mu_{03})]$$

$$M_7 = (3\mu_{21} - \mu_{03})(\mu_{30} - \mu_{12})[(\mu_{30} + \mu_{12})^2 - 3(\mu_{21} + \mu_{03})^2] + (\mu_{30} - 3\mu_{12})(\mu_{21} + \mu_{03})[3(\mu_{30} + \mu_{12})^2 - (\mu_{21} + \mu_{03})^2].$$

Все инварианты моментов кроме M_7 абсолютные, а M_7 называется относительным, так как меняет знак при зеркальном отражении.

Аналогично инвариантам моментов Ху для двумерного случая известны следующие абсолютные инварианты для трехмерного случая:

$$I_1 = J_1^2/J_2, \quad I_2 = \Delta_2/J_1^3, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \mu_{200} + \mu_{020} + \mu_{002} \\ J_2 &= \mu_{020}\mu_{002} - \mu_{011}^2 + \mu_{200}\mu_{002} - \mu_{101}^2 + \mu_{200}\mu_{020} - \mu_{110}^2 \\ \Delta_2 &= \det \begin{bmatrix} \mu_{200} & \mu_{110} & \mu_{101} \\ \mu_{100} & \mu_{020} & \mu_{011} \\ \mu_{101} & \mu_{011} & \mu_{002} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

15 Аффинные инварианты моментов

Наряду с инвариантами моментов, сохраняющих свое значение при изменении положения, размеров и интенсивности изображения, изучались инварианты, остающиеся неизменными при аффинных преобразованиях. Если аффинному преобразованию подвергается двумерное Евклидово пространство, содержащее исходное изображение, то пространство моментов также подвергается аффинному преобразованию, каждый момент переходит в линейную комбинацию моментов такого же порядка. Используя теорию алгебраических инвариантов, Флуссер и Сук построили четыре аффинных инварианта моментов плоских бинарных изображений, включающих моменты не выше третьего порядка. Они таковы:

$$\begin{aligned} I_1 &= (\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2)/\mu_{00}^4, \\ I_2 &= (\mu_{30}^2\mu_{03}^2 - 6\mu_{30}\mu_{21}\mu_{12}\mu_{03} + 4\mu_{30}\mu_{12}^3 + 4\mu_{21}^3 - 3\mu_{21}^2\mu_{12}^2)/\mu_{00}^{10}, \\ I_3 &= (\mu_{20}(\mu_{21}\mu_{03} - \mu_{12}^2) - \mu_{11}(\mu_{30}\mu_{03} - \mu_{21}\mu_{12}) + \mu_{02}(\mu_{30}\mu_{12} - \mu_{21}^2))/\mu_{00}^7, \\ I_4 &= (\mu_{20}^3\mu_{03}^2 - 6\mu_{20}^2\mu_{11}\mu_{12}\mu_{03} - 6\mu_{20}^2\mu_{02}\mu_{21}\mu_{03} + 9\mu_{20}^2\mu_{02}\mu_{12}^2 + \\ &\quad 12\mu_{20}\mu_{11}^2\mu_{21}\mu_{03} + 6\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}\mu_{30}\mu_{03} - 18\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}\mu_{21}\mu_{12} - \\ &\quad 8\mu_{11}^3\mu_{30}\mu_{03} - 6\mu_{20}\mu_{02}^2\mu_{30}\mu_{12} + 9\mu_{20}\mu_{02}^2\mu_{21} + 12\mu_{11}^2\mu_{02}\mu_{30}\mu_{12} - \\ &\quad 6\mu_{11}\mu_{02}^2\mu_{30}\mu_{21} + \mu_{02}^3\mu_{30}^2)/\mu_{00}^{11}. \end{aligned}$$

16 Ортогональные моменты

Геометрический момент m_{pq} является проекцией в функциональном векторном пространстве функции плотности на прямую с направляющим вектором $x^p y^q$. Однако, базис одночленов не является ортогональным. Заменяя одночлены на ортогональное базисное множество (например, Лежандра или Зернике), получаем, что функция плотности восстанавливается через проекции на базисные вектора.

Многочлены Лежандра определяются следующим образом:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n/2} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m},$$

или, иначе, через коэффициенты Лежандра

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_{nk} x^k, \quad C_{nk} = (-1)^{(n-k)/2} \frac{1}{2^n} \frac{(n+k)!}{[(n-k)/2]![(n+k)/2]!},$$

где $n-k$ четно.

Полиномы Лежандра ортогональны на отрезке $[0, 1]$.

Ортогональные моменты Лежандра определяются следующим образом:

$$L_{pq} = \frac{(2p+1)(2q+1)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_p(x) P_q(y) dx dy.$$

Заметим, что для того, чтобы моменты были ортогональны, необходимо, чтобы изображение было масштабировано так, что его носитель попадает в квадрат $-1 \leq x, y \leq 1$.

Если многочлены Лежандра выражены через свои коэффициенты C_{nk} , то связь между обычными моментами и моментами Лежандра следующая:

$$L_{pq} = \frac{(2p+1)(2q+1)}{4} \sum_{r=0}^p \sum_{s=0}^q C_{pr} C_{qs} \mu_{rs}.$$

Тигью получил простую аппроксимацию обратного преобразования для множества моментов через их порядок N :

$$f(x, y) \approx \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N P_{n-m}(x) P_m(y) L_{n-m,m}.$$

Обратное преобразование, основанное на моментах Лежандра, обладает тем преимуществом, что не требуется решать систему алгебраических уравнений. Более того, моменты Лежандра легко вычисляются через обычные моменты и хорошо определенные коэффициенты многочленов.

Комплексные многочлены Зернике, $V_{nl}(x, y)$, порядка n , определяются следующим образом:

$$V_{nl}(x, y) = R_{nl}(r)e^{il\theta}, \quad 0 \leq l \leq n, \quad n - l - \text{четное},$$

где действительные радиальные многочлены R_{nl} даются формулой

$$R_{nl}(r) = \sum_{m=0}^{(n-l)/2} (-1)^m \frac{(n-m)!}{m![(n-2m+l)/2]![(n-2m-l)/2]!} r^{n-2m},$$

или, иначе

$$R_{nl}(r) = \sum_{k=l}^n B_{nlk} r^k, \quad \text{где } B_{nlk} - \text{коэффициенты Зернике и}$$

$$B_{nlk} = (-1)^{(n-k)/2} \frac{[(n+k)/2]!}{[(n-k)/2]![(k+l)/2]![(k-l)/2]!}$$

для $n - k$ четного.

Многочлены Зернике ортогональны внутри единичного круга $x^2 + y^2 \leq 1$.

Комплексный момент Зернике задается следующим образом:

$$Z_{nl} = \frac{n+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty V_{nl}(r, \theta)^* f(r, \theta) r dr d\theta,$$

где $*$ означает комплексное сопряжение. Для того, чтобы моменты были ортогональны, необходимо, чтобы изображение было скалировано внутрь единичного круга с центром в начале координат. Моменты Зернике выражаются через обычные геометрические моменты формулой

$$Z_{nl} = \frac{n+1}{\pi} \sum_{k=l}^n \sum_{j=0}^q \sum_{m=0}^l (-1)^m C_q^j C_m^l B_{nlk} \mu_{k-2j-l+m, j+l-m}.$$

Приближенное обратное преобразование для множества моментов через их порядок N таково:

$$f(x, y) \approx \sum_{n=0}^N \sum_l Z_{nl} V_{nl}(x, y).$$

При повороте изображения на угол ϕ моменты Зернике претерпевают фазовый сдвиг:

$$Z'_{nl} = Z_{nl} e^{il\phi}.$$

17 Комплексные моменты

Двумерный комплексный момент порядка (p, q) задается следующим образом:

$$C_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + iy)^p (x - iy)^q f(x, y) dx dy.$$

Если $f(x, y)$ – действительная неотрицательная функция, то C_{pp} – действительный неотрицательный и C_{pq} сопряжено с C_{qp} . Комплексный момент есть линейная комбинация обычных геометрических моментов.

$$C_{pq} = \sum_{r=0}^p \sum_{s=0}^q C_p^r C_q^s (-1)^{q-s} (i)^{(p+q)-(r+s)} m_{r+s, (p+q)-(r+s)}.$$

Инварианты моментов могут быть получены из комплексных моментов посредством след. формулы:

$$(C_{rs} C_{tu}^k + C_{sr} C_{ut}^k), \quad (r - s) + k(t - u) = 0.$$