Skupina 8-Metric independence number

Živa Kocijan, Lucija Koprivec

14.12.2023

1 Naloga

Najine naloge so:

- Among trees T on n vertices, find trees with maximum/minimum $mi(T)$.
- Find trees for which $dim(T) = mi(T)$. Here, $dim(T)$ is the classical vertex metric dimension.
- Find trees for which $dim(T)$–$mi(T)$ is maximum/minimum.
- Determine $mi(G)$ of a grid graph $G = P_k \Box P_t$
- Determine $mi(G)$ of a hypercube $G = Q_d$

2 Osnovni pojmi

Naj bo G graf. Točka x grafa G razreši dve točki u in v grafa G, če je razdalja med x in u različna od razdalje med x in v.
Niz S oglišč G je razrešujoča množica za G, če sta vsaki dve različni točki iz G razrešeni z nekim ogliščem iz S. Najmanjša moč razrešujoče množice za G se imenuje metrična dimenzija G in jo označimo z $dim(G)$.
Iskanje metrične dimezije grafa naj bi bil NP-popoln.
Naprej, naj bo $V_p = \{\{x, y\}\, x, y \in V(G)\}$ in neka njena podmonžica P je neodvisen razrešujoč nabor parov, če ni noben par iz P razrešen z istim ogliščem. Pri tem pa z $mi(G)$ označimo metrično neodvisno število grafa G, ki je moč največje množice P.
Število $mi(G)$ je možno najti s pomočjo celoštevilskega linearnega programa.

3 Vrste grafov

Drevo je neusmerjen graf, v katerem sta katerikoli dve točki povezani z natanko eno potjo.
Hiperkocka Q_d je graf, ki ima 2^n vozlišč in vsako vozlišče je stopnje n.
Produkt grafov $G \Box H$, je nov graf, ki ima število oglišč enako $V(G) * V(H)$

4 NP-popolnost

V računalništvu je NP-popolnost ali NP-trdnost problema merilo težavnosti reševanja tega problema. Problem je NP-popoln, če ga je mogoče rešiti s polinomskim časovnim algoritmom in če je tudi NP-težek V angleščini je ime "NP-complete" okrajšava za "nondeterministic polynomial-time complete".

5 CLP

Celoštevisli linearni program ali krajše CLP je matematični optimizacijski problem, pri katerem je cilj maksimizirati oziroma minimizirati linearno funkcijo celoštevilskih spremenljivk ob upoštevanju določenega nabora linearnih enakosti in neenakosti. Drugače povedano, CLP je vrsta matematičnega programiranja, kjer so celoštevilske vrednosti zahtevane za odločitvene spremenljivke.

6 Primer CLP-ja pri iskanju metrične dimenzije grafa

Naj bo G graf, potem definiramo

$$a_{p,v} = \begin{cases} 1 & \text{če je } p \in V_p \text{ razrešen z } v \in V(G) \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \tag{1}$$

$$max \sum_{p \in V_p} y_p \tag{2}$$

$$s.t. \sum_{p \in V_p} a_{p,v} y_p \leq 1 \qquad \text{za vsak} v \in V(G),$$

$$y_p \in \{0, 1\} \qquad \text{za vsak} p \in V_p,$$

kjer je $y_p = 1$, če in samo če $p \in P$.

7 Primerjava vrednosti

Za vse grafe, ki jih označimo z G, velja neeakost:

$$mi(G) \leq dim(G)$$

Problem, če za dani graf G v zgornji neenačbi velja enakost, je prav tako NP-popoln. Sledi, da je $0 \leq dim(G) - mi(G) \leq dim(G)$.