

# Układy równań liniowych

Marta Kociszewska 198143

## 1. Wstęp

Celem projektu jest zaimplementowanie i porównanie iteracyjnych metod rozwiązywania układów równań liniowych oraz metody faktoryzacji LU.

W ramach projektu zaimplementowane zostaną metody Jacobiego i Gaussa-Seidla, a także metoda faktoryzacji LU.

Zgodnie z wymaganiami **zadania A** skonstruowano układ równań w postaci:

$$Ax = b$$

gdzie:

- $A$  - macierz systemowa
- $b$  - wektor pobudzenia
- $x$  - wektor rozwiązań

Macierz  $A$  jest macierzą kwadratową o wymiarach  $N \times N$ , zawierającą pięć diagonalnych pasm, w której:

- główna diagonalna – elementy  $a_1$ ,  $a_1 = 5 + e$ , gdzie  $e$  to czwarta cyfra numeru indeksu, tutaj  $e = 1$ ,
- dwie sąsiednie – elementy  $a_2$  i  $a_3$ ,  $a_2 = a_3 = -1$ .

Macierz  $A$  ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

Przyjmuje ona postać:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 6 \end{bmatrix}$$

Macierz  $b$  jest wektorem o wymiarach  $N \times 1$ , w którym  $n$ -ty element ma wartość  $\sin(n \cdot (f + 1))$ , gdzie  $f$  to trzecia cyfra numeru indeksu, tutaj  $f = 3$ .

Wówczas wektor  $b$  przyjmuje postać:

$$b = \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.41212 \\ -0.75099 \\ 0.95638 \\ \vdots \\ -0.93643 \end{bmatrix}$$

$N$  zostało obliczone według wzoru:

$$N = 1200 + 10c + d$$

gdzie:

- $c$  - przedostatnia cyfra numeru indeksu, tutaj  $c = 4$ ,
- $d$  - ostatnia cyfra numeru indeksu, tutaj  $d = 3$ .

Wówczas

$$N = 1200 + 10 * 4 + 3 = 1243$$

## 2. Metody rozwiązywania układów równań liniowych

### 2.1.1 Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego jest jedną z najprostszych iteracyjnych metod rozwiązywania układów równań liniowych. Jest to metoda iteracyjna, która polega na przekształceniu układu równań do postaci:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

gdzie:

- $x_i^{(k+1)}$  - wartość  $i$ -tej zmiennej w  $k$ -tej iteracji,
- $a_{ij}$  - element macierzy systemowej,
- $b_i$  - element wektora pobudzenia,
- $N$  - liczba zmiennych w układzie równań,
- $k$  - numer iteracji.

Metoda Jacobiego jest stosunkowo prosta do zaimplementowania, ale może być wolna w konwergencji, szczególnie dla dużych układów równań. Wymaga również, aby macierz systemowa była diagonalnie dominująca, aby zapewnić zbieżność metody. W przypadku macierzy diagonalnie dominującej, metoda Jacobiego zbiega do rozwiązania układu równań liniowych. W przeciwnym razie może nie zbiegać lub zbiegać bardzo wolno.

### 2.1.2 Metoda Jacobiego w postaci macierzowej

Metoda Jacobiego w postaci macierzowej polega na przekształceniu układu równań do postaci:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

którą można zapisać w postaci:

$$x^{(k+1)} = M_J x^{(k)} + w_J$$

gdzie:

- $x^{(k+1)}$  - wektor rozwiązań w k-tej iteracji,
- $D$  - macierz diagonalna,
- $L$  - macierz dolnotrójkątna,
- $U$  - macierz górnortrójkątna,
- $b$  - wektor pobudzenia,
- $x^{(k)}$  - wektor rozwiązań w k-tej iteracji.

Metoda Jacobiego w postaci macierzowej jest bardziej złożona do zaimplementowania, ale może być szybsza w konwergencji, szczególnie dla dużych układów równań.

### 2.2.1 Metoda Gaussa-Seidla

Metoda Gaussa-Seidla jest ulepszoną wersją metody Jacobiego. Jest to również metoda iteracyjna, która polega na przekształceniu układu równań do postaci:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

gdzie:

- $x_i^{(k+1)}$  - wartość i-tej zmiennej w k-tej iteracji,
- $a_{ij}$  - element macierzy systemowej,
- $b_i$  - element wektora pobudzenia,
- $N$  - liczba zmiennych w układzie równań,
- $k$  - numer iteracji.

Metoda Gaussa-Seidla jest szybsza od metody Jacobiego, ponieważ wykorzystuje już obliczone wartości zmiennych w bieżącej iteracji. Jednak również wymaga, aby macierz systemowa była diagonalnie dominująca, aby zapewnić zbieżność metody. W przypadku macierzy diagonalnie dominującej, metoda Gaussa-Seidla zbiega do rozwiązania układu równań liniowych. W przeciwnym razie może nie zbiegać lub zbiegać bardzo wolno.

### 2.2.2 Metoda Gaussa-Seidla w postaci macierzowej

Metoda Gaussa-Seidla w postaci macierzowej polega na przekształceniu układu równań do postaci:

$$x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}b$$

którą można zapisać w postaci:

$$x^{(k+1)} = M_{GS}x^{(k)} + w_{GS}$$

gdzie:

- $x^{(k+1)}$  - wektor rozwiązań w k-tej iteracji,
- $D$  - macierz diagonalna,
- $L$  - macierz dolnotrójkątna,
- $U$  - macierz górnortrójkątna,
- $b$  - wektor pobudzenia,
- $x^{(k)}$  - wektor rozwiązań w k-tej iteracji.

Metoda Gaussa-Seidla w postaci macierzowej jest bardziej złożona do zaimplementowania, ale może być szybsza w konwergencji, szczególnie dla dużych układów równań.

Aby zapewnić wydajność metody Gaussa-Seidla, czynnik  $-(D + L)^{-1}(Ux^{(k)})$  będzie liczony w pętli jako  $-T (U * x)$ , gdzie  $T = (D + L)$ .

### 2.3. Metoda bezpośrednia - faktoryzacja LU

Metoda faktoryzacji LU jest jedną z najczęściej stosowanych metod rozwiązywania układów równań liniowych. Jest to metoda bezpośrednia, która polega na przekształceniu macierzy systemowej do postaci iloczynu dwóch macierzy:

$$A = LU$$

gdzie:

- $L$  - macierz dolnotrójkątna,
- $U$  - macierz górnortrójkątna.
- $A$  - macierz systemowa.

Metoda faktoryzacji LU jest szybsza od metod iteracyjnych, ponieważ wymaga jedynie jednego przekształcenia macierzy systemowej do postaci iloczynu dwóch macierzy. Jednak wymaga również, aby macierz systemowa była macierzą kwadratową i nieosobliwą, aby zapewnić istnienie faktoryzacji LU. W przypadku macierzy kwadratowej i nieosobliwej, metoda faktoryzacji LU zbiega do

rozwiązania układu równań liniowych. W przeciwnym razie może nie zbiegać lub zbiegać bardzo wolno.

Rozwiązywanie układu równań liniowych za pomocą metody faktoryzacji LU składa się z dwóch kroków:

1. Faktoryzacja macierzy systemowej do postaci iloczynu dwóch macierzy:

Wyznaczane są macierze trójkątne  $L$  i  $U$  zgodnie do wzoru:

$$A = LU$$

2. Rozwiązanie układu równań liniowych za pomocą macierzy dolnotrójkątnej i górnortrójkątnej.

Polega na rozwiązaniu dwóch układów równań liniowych:

1. Podstawienie w przód (ang. *forword substitution*)

$$y = L^{-1}(Pb)$$

2. Podstawienie w tył (ang. *backward substitution*)

$$x = U^{-1}y$$

### 3. Analiza wyników dla zadanego układu równań

#### 3.1. Metoda Jacobiego

Czas działania metody Jacobiego wyniósł w przybliżeniu 2.8156 s, a liczba iteracji 44.

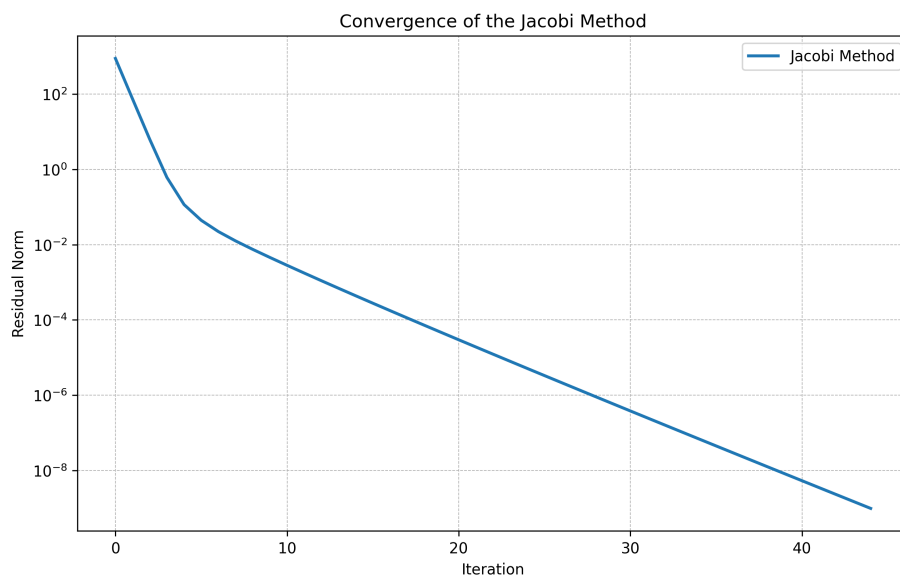


Figure 1: Wykres norm residuum - zadanie A, metoda Jacobiego

Oś Y przedstawia normę residuum, a oś X liczbę iteracji. Norma residuum jest w skali logarytmicznej, co pozwala na obserwację zmian wielkości residuum w czasie. Norma residuum jest miarą błędu w obliczeniach i jest definiowana jako różnica między wartością rzeczywistą a wartością obliczoną. W przypadku metody Jacobiego norma residuum maleje w czasie, co oznacza, że metoda zbiega do rozwiązania układu równań liniowych.

Wykres wyraźnie pokazuje zbieżność metody Jacobiego. Norma residuum maleje monotonicznie wraz ze wzrostem liczby iteracji. Spadek jest początkowo dość stromy, a następnie staje się łagodniejszy, co jest typowe dla metod iteracyjnych.

Metoda Jacobiego osiąga zadowalający poziom normy residuum po około 44 iteracjach. Wartość normy residuum po 44 iteracjach wynosi około  $10^{-6}$ , co oznacza, że metoda Jacobiego zbiega do rozwiązania układu równań liniowych.

### 3.2. Metoda Gaussa-Seidla

Czas działania metody Gaussa-Seidla wyniósł w przybliżeniu 3.7465 s, a liczba iteracji 25.

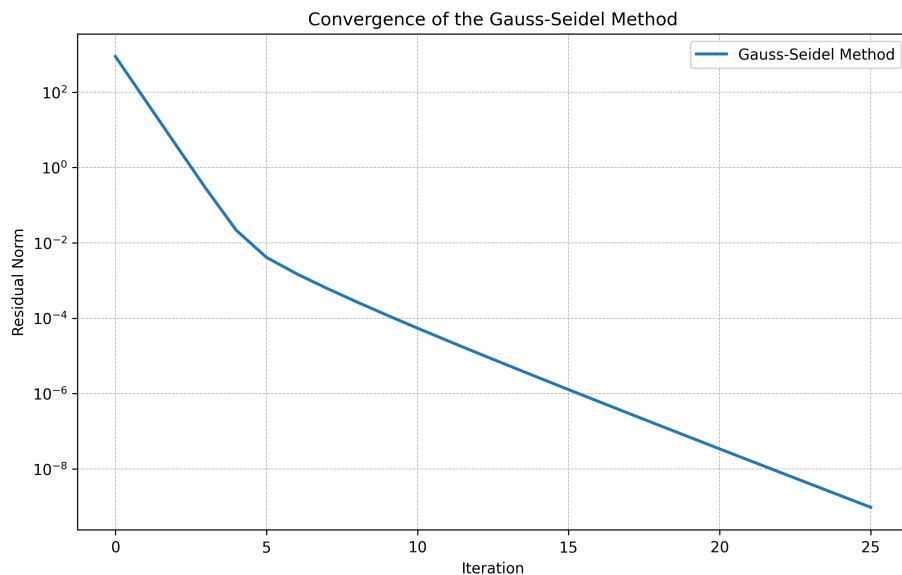


Figure 2: Wykres norm residuum - zadanie A, metoda Gaussa-Seidla

Oś Y (norma residuum) jest w skali logarytmicznej.

Wykres również pokazuje zbieżność metody Gaussa-Seidla. Norma residuum maleje wraz z liczbą iteracji. Podobnie jak w metodzie Jacobiego, spadek normy residuum jest szybszy na początku, a potem zwalnia.

Metoda Gaussa-Seidla osiąga zadowalający poziom normy residuum po około 25 iteracjach. Wartość normy residuum po 25 iteracjach wynosi około  $10^{-8.5}$ , co oznacza, że metoda Gaussa-Seidla zbiega do rozwiązania układu równań liniowych.

### 3.3. Porównanie dwóch metod

Porównanie dwóch metod przedstawia poniższa tabela oraz wykres.

| Metoda        | Czas działania (s) | Liczba iteracji |
|---------------|--------------------|-----------------|
| Jacobiego     | 3.0815             | 44              |
| Gaussa-Seidla | 3.9794             | 25              |

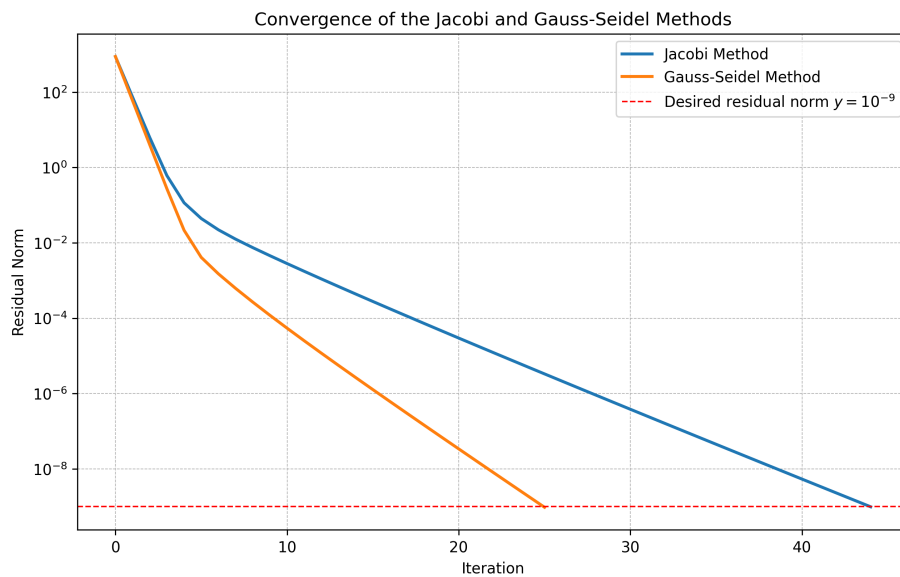


Figure 3: Wykres norm residuum - zadanie A, porównanie dwóch metod

Wnioski:

- Metoda Jacobiego jest szybsza od metody Gaussa-Seidla, pod względem czasu działania, jednak wykonuje ona więcej iteracji.
- Obie metody zbieżne do rozwiązania układu równań liniowych, ale metoda Gaussa-Seidla osiąga zadowalający poziom normy residuum szybciej niż metoda Jacobiego.
- Obie metody są skuteczne w rozwiązywaniu układów równań liniowych, ale metoda Gaussa-Seidla jest bardziej efektywna w praktyce.



#### 4. Analiza wyników alternatywnego układu równań

Zgodnie z wymaganiami **zadania C** skonstruowano układ równań w postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 6 \end{bmatrix}$$

Macierz  $b$  oraz  $N$  pozostają bez zmian.

##### 4.1. Metoda Jacobiego

Czas działania metody Jacobiego wyniósł w przybliżeniu 23.3873 s, a liczba iteracji 500 - maksymalną możliwą ilość.

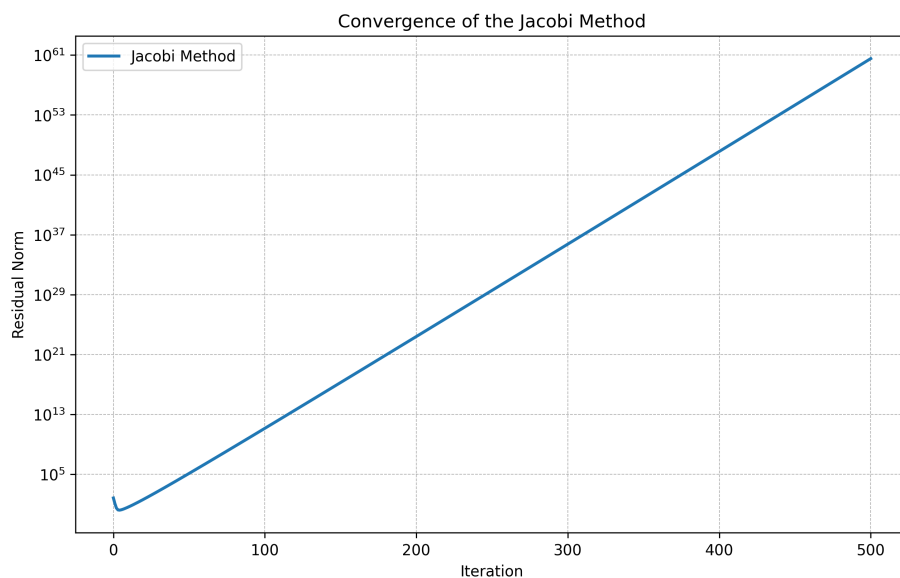


Figure 4: Wykres norm residuum - zadanie C, metoda Jacobiego

Mimo długiego czasu działania, norma residuum nie zbiega do zera, co oznacza, że metoda Jacobiego nie zbiega do rozwiązania układu równań liniowych.

## 4.2. Metoda Gaussa-Seidla

Czas działania metody Gaussa-Seidla wyniósł w przybliżeniu 77.5113 s, a liczba iteracji 500 - maksymalną możliwą ilość.

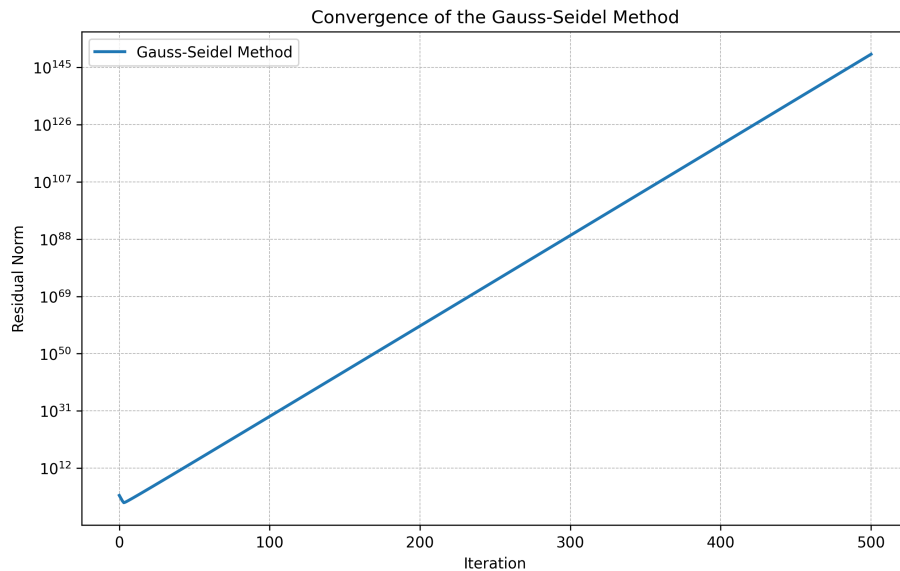


Figure 5: Wykres norm residuum - zadanie C, metoda Gaussa - Seidla

Norma residuum nie zbiega do zera, co oznacza, że metoda Gaussa-Seidla nie zbiega do rozwiązania układu równań liniowych.

## 4.3. Porównanie dwóch metod

Porównanie dwóch metod przedstawia poniższa tabela oraz wykres.

| Metoda        | Czas działania (s) | Liczba iteracji |
|---------------|--------------------|-----------------|
| Jacobiego     | 23.3873            | 500             |
| Gaussa-Seidla | 77.5113            | 500             |

Wnioski:

- Obie metody nie zbieżne do rozwiązania układu równań liniowych.
- Obie metody wymagają maksymalnej liczby iteracji, aby zakończyć obliczenia.
- Obie metody są nieskuteczne w rozwiązywaniu układów równań liniowych w tej postaci.

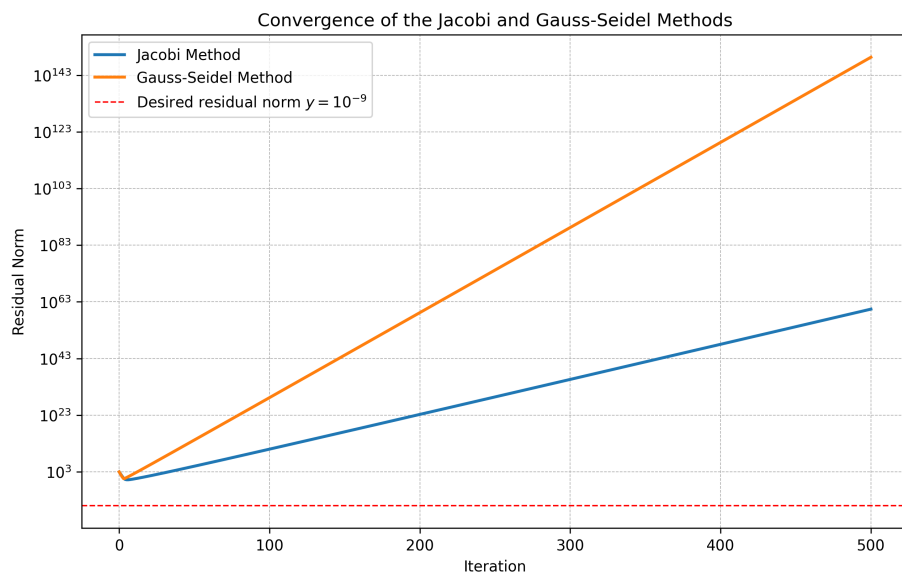


Figure 6: Wykres norm residuum - zadanie C, prównanie dwóch metod

#### 4. Metoda bezpośrednia - faktoryzacja LU

Czas działania metody faktoryzacji LU wyniósł w przybliżeniu 0.01 s. Norma residuum wynosiła ok.  $1.606 \times 10^{-15}$ , rząd wielkości  $10^{-15}$ .

Metoda faktoryzacji LU radzi sobie znacznie lepiej w rozwiązywaniu tego układu równań, niż metody iteracyjne. Metoda ta jest też w tym przypadku znacznie szybsza od metod iteracyjnych, spowodowana jest to tym, że wymaga jedynie jednego przekształcenia macierzy systemowej do postaci iloczynu dwóch macierzy, a metody Jacobiego oraz Gaussa-Seidela, które nie zbiegają do rozwiązania, wykonują znacznie więcej operacji niż zazwyczaj powinny.

## 5. Czas działania metod

Czas działania metod przedstawiają poniższe wykresy. Na wykresach przedstawiono czasy działania metod w skali liniowej oraz logarytmicznej.

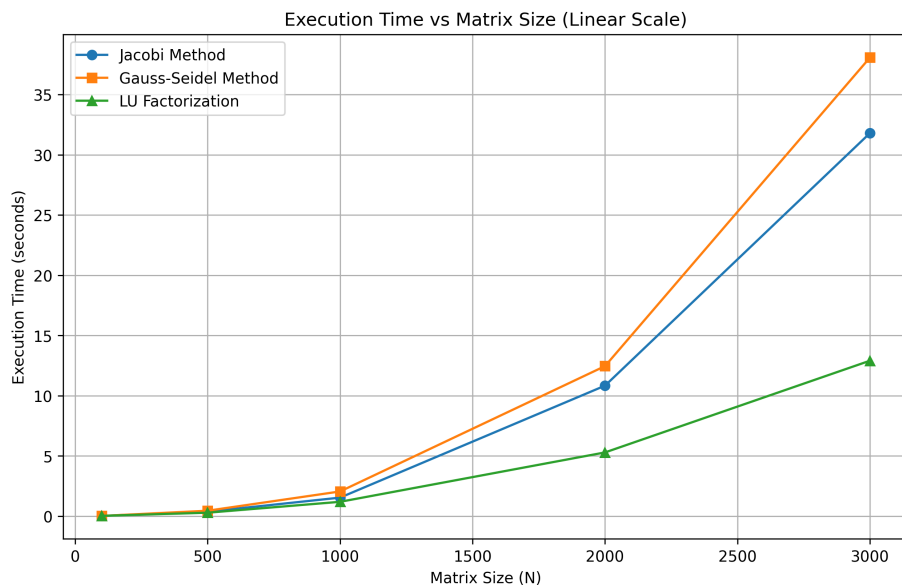


Figure 7: Wykres czasów działania metod - skala liniowa

### 1. Porównanie metod na skali liniowej:

- Dla mniejszych rozmiarów macierzy (do około  $N=1000$ ), czasy wykonania wszystkich trzech metod są stosunkowo niewielkie i zbliżone do siebie.
- Wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy, różnice w czasach wykonania stają się bardziej widoczne.
- Metoda faktoryzacji LU wydaje się mieć najmniejszy czas wykonania dla większych rozmiarów macierzy ( $N=3000$ ).
- Metoda Gaussa-Seidela ma wyraźnie najdłuższy czas wykonania dla największego badanego rozmiaru macierzy.
- Metoda Jacobiego ma czasy wykonania pomiędzy metodą faktoryzacji LU a Gaussa-Seidela.

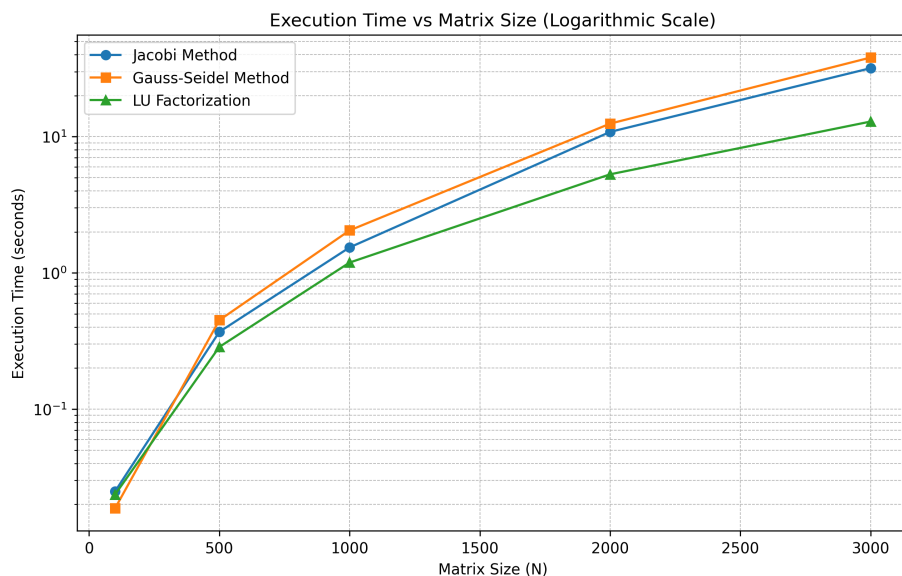


Figure 8: Wykres czasów działania metod - skala logarytmiczna

## 2. Porównanie metod na skali logarytmicznej:

- Skala logarytmiczna na osi czasu wykonania pozwala lepiej zobrazować względne różnice w czasach wykonania, szczególnie dla mniejszych wartości.
- Widać, że wzrost czasu wykonania dla wszystkich metod jest nieliniowy.
- Ponownie, dla większych rozmiarów macierzy, faktoryzacja LU wydaje się być najbardziej efektywna czasowo (najniższa krzywa).
- Metoda Gaussa-Seidela konsekwentnie wykazuje dłuższy czas wykonania niż pozostałe dwie metody dla większych  $N$ .

## 6. Podsumowanie

W projekcie zaimplementowano i porównano iteracyjne metody rozwiązywania układów równań liniowych oraz metodę faktoryzacji LU.

Zrealizowano zadania, które polegały na skonstruowaniu układu równań w postaci macierzy trójkątnej i wektora pobudzenia oraz przeprowadzeniu analizy wyników dla różnych metod rozwiązywania układów równań liniowych.

### Obserwacje:

1. Metoda Jacobiego i Gaussa-Seidla

- Obie metody są skuteczne w rozwiązywaniu układów równań liniowych dla układów o macierzy diagonalnie dominującej (tak jak w zadaniu A). Metoda Gaussa-Seidla jest szybsza od metody Jacobiego, zarówno pod względem czasu działania, jak i liczby iteracji.
  - Obie metody nie są skuteczne w rozwiązywaniu układów równań liniowych dla układów o macierzy nie-diagonalnie dominującej (tak jak w zadaniu C). Przyczyna tego może być związana z tym, że macierz systemowa nie spełnia warunków zbieżności dla tych metod.
2. Metoda faktoryzacji LU
- Metoda faktoryzacji LU jest znacznie szybsza od metod iteracyjnych i skuteczna w rozwiązywaniu układów równań liniowych o macierzy nie-diagonalnie dominującej (tak jak w zadaniu C).

### Porównanie

- Metody iteracyjne są obliczeniowo kosztowne dla dużych układów, ponieważ wymagają wielu iteracji, aby osiągnąć zbieżność. Jednak są przydatne dla macierzy rzadkich lub o określonej strukturze, gdzie metody bezpośrednie, takie jak faktoryzacja LU, mogą być mniej efektywne.
- Faktoryzacja LU jest obliczeniowo wydajna dla macierzy gęstych i zapewnia dokładne rozwiązania w jednym kroku, ale może wymagać więcej pamięci dla dużych układów.

### Wnioski

- Skuteczność metod iteracyjnych zależy od właściwości macierzy: Metody Jacobiego i Gaussa-Seidla są efektywne w rozwiązywaniu układów równań liniowych, gdy macierz systemowa jest diagonalnie dominująca. W przeciwnym przypadku, mogą nie zbiegać do rozwiązania lub zbiegać bardzo wolno.
- Metoda Gaussa-Seidla jest generalnie wydajniejsza od Jacobiego: Dla macierzy diagonalnie dominujących, metoda Gaussa-Seidla charakteryzuje się szybszym czasem działania i mniejszą liczbą iteracji w porównaniu do metody Jacobiego.
- Faktoryzacja LU jest efektywna dla macierzy nie-diagonalnie dominujących: W przeciwieństwie do metod iteracyjnych, metoda faktoryzacji LU skutecznie rozwiązuje układy równań liniowych, nawet gdy macierz systemowa nie jest diagonalnie dominująca. Jest również znacznie szybsza, szczególnie dla macierzy, dla których metody iteracyjne mają problemy ze zbieżnością.
- Złożoność obliczeniowa a rozmiar układu: Metody iteracyjne stają się bardziej kosztowne obliczeniowo dla dużych układów równań, ponieważ wymagają wielu iteracji. Metody bezpośrednie, takie jak faktoryzacja LU, mogą być bardziej efektywne dla macierzy gęstych, ale mogą wymagać więcej pamięci.

- Wybór metody zależy od specyfiki problemu: Wybór odpowiedniej metody rozwiązywania układów równań liniowych zależy od charakterystyki macierzy systemowej (np. diagonalna dominacja, rzadkość) oraz od wymagań dotyczących wydajności i dokładności obliczeń.