6 DYNAMICKÉ MODELY – ŠTATISTICKÉ METÓDY

⇒ Každý **reálny experiment** je vystavený **vplyvu parazitných šumov**

⇒ **Štatistické metódy** – berú do úvahy rušivé signály a chyby merania

⇒ 2 skupiny metód:

- **korelačné metódy** – vlastnosti systému sa určujú na základe pravdepodobnostných charakteristík vstupných a výstupných signálov;

  nositeľom informácie o hľadaných vlastnostiach sústavy je **stochastický signál**;

  pri práci v **časovej oblasti** hovoríme o metódach **korelačnej analýzy**; ak pracujeme vo **frekvenčnej oblasti**, hovoríme o metódach **spektrálnej analýzy**
- **regresné metódy** – snaha minimalizovať účinky šumov, založené na MNŠ

Pozitíva: nevyžadujú veľké apriórne informácie o procese
nie je potrebná vysoká hladina vstupných signálov
identifikáciu možno robiť priamo v prevádzkovom procese – pasívny experiment

Negatíva: uspokojivé výsledky dávajú iba v prípade aplikácie na lineárne a časovo invariantné systémy
sú náročné na dobu trvania experimentu

6.1. Korelačné metódy

⇒ Využívajú **stochastický** - **náhodný** signál na určenie väzieb medzi vstupným a výstupným signálom, **podmienkou** však je, aby náhodný vstupný signál bol **stacionárny a ergodický.**

⇒ Ako testovacie signály sa môžu použiť aj **umelé – pseudonáhodné** signály, pri ktorých je možné **meniť ich vlastnosti** (aktívny experiment), pri **pasívnom** experimente treba vlastnosti vstupného náhodného signálu **skúmať** (rozdelenie, stacionárnosť, ergodickosť,...).

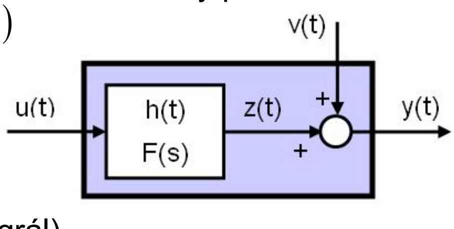
⇒ **Testovanie stacionárnosti** a **ergodickosti** vstupného signálu:

1. zosníma sa viac realizácií $u_k(t)$ náhodného procesu rovnakej dĺžky,
2. vypočítajú sa štatistické charakteristiky (stredná hodnota, rozptyl) zo súboru hodnôt $u_k(t_i)$, ak sú tieto charakteristiky nezávislé od času, potom je náhodný signál **stacionárny**,
3. vypočítame štatistické charakteristiky pre každú realizáciu v čase, ak sú aj tieto charakteristiky rovnaké, náhodný proces je **ergodický**.

6.1.1. Korelačná analýza

Model: predpokladáme **lineárny t-invariantný systém**, charakterizovaný prenosovou funkciou $F(s)$ alebo impulznou charakteristikou $h(t)$

$$Y(s) = F(s)U(s) + V(s)$$



Časová forma:

$$y(t) = \int_0^\infty h(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda + v(t) \qquad \text{(konvolutórny integrál)}$$

Neznáme parametre: $\boxed{?\ h_0,\dots,h_n}$

Predpoklad: nameraná vstupná a výstupná veličina

$\Rightarrow$ Ak budú signály $u(t)$ a $y(t)$ **stacionárne a ergodické**, môžeme charakteristiky získané zo súboru realizácií nahradiť charakteristikami získanými z jednej dostatočne dlhej realizácie, potom môžeme opis systému vyjadriť pomocou korelačných funkcií

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} u(t+\tau)u(t)dt \qquad R_{yu}(\tau) = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} y(t+\tau)u(t)dt$$

$$R_{yu}(\tau) = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \left[\int_{0}^{\infty} h(\lambda)u(t+\tau-\lambda)d\lambda + v(t+\tau) \right] u(t)dt$$

Po zámene poradia integrálov dostaneme

$$R_{yu}(\tau) = \int_{0}^{\infty} h(\lambda) \left[\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{2\upsilon} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} u(t+\tau-\lambda)u(t)dt \right] d\lambda + \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{2\vartheta} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} v(t+\tau)u(t)dt$$

alebo $\boxed{R_{yu}(\tau) = \int_{0}^{\infty} h(\lambda)R_{uu}(\tau-\lambda)d\lambda + R_{uv}(\tau)}$ **Wiener–Hopfova rovnica**

Pri **nekorelovanosti signálov** $u(t)$ a $v(t)$ bude $R_{uv}(\tau) = 0$ a teda

$$\boxed{R_{yu}(\tau) = \int_{0}^{\infty} h(\lambda)R_{uu}(\tau-\lambda)d\lambda}$$

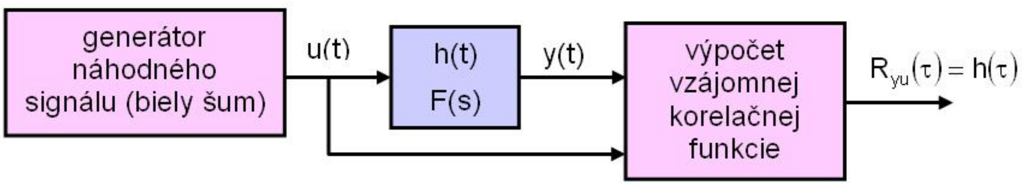
$\Rightarrow$ **Stanovenie impulznej funkcie**

Ak by **vstupný signál** bol **biely gaussovský šum** jednotkovej intenzity, potom

$R_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$ kde $\delta(\tau)$ je Diracova funkcia.

Po dosadení do Wiener-Hopfovej rovnice dostaneme $\boxed{R_{yu}(\tau) = h(\tau)}$

t.j. v tomto prípade by **hľadaná impulzná funkcia bola priamo rovná vzájomnej korelačnej funkcii**.



Pri **meraní** vstupných a výstupných veličín a tiež pri výpočte korelačných funkcií pracujeme s **konečnou dobou trvania experimentu** ϑ (**interval pozorovania**), čo má značný vplyv na presnosť výsledkov. Skutočné korelačné funkcie nahrádzame funkciami

$$\boxed{\hat{R}_{uu}(\tau) = \frac{1}{\vartheta-\tau} \int_{0}^{\vartheta-\tau} u(t+\tau)u(t)dt} \qquad \boxed{\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{\vartheta-\tau} \int_{0}^{\vartheta-\tau} y(t+\tau)u(t)dt}$$

Určenie **intervalu pozorovania** ϑ: musí platiť $R(\vartheta) \le 0.01\sigma R_{max}$ $1 \le \sigma \le 5$

$\Rightarrow$ **Numerický výpočet impulznej funkcie**

Operáciu **integrovania nahrádzame sumáciou ekvidištančných vzoriek** nameraných počas intervalu pozorovania, navzájom vzdialených o **periódu vzorkovania** T_{vz}

$$u(t)_{t=kT_{vz}} = u(kT_{vz}) = u_k \qquad y(t)_{t=kT_{vz}} = y(kT_{vz}) = y_k$$

$N = \mathrm{int}\left(\dfrac{\vartheta}{T_{vz}}\right)$ je počet vzoriek, $n = 0,1,\ldots,N$

potom vzťahy pre korelačné funkcie budú

$$\boxed{\hat{R}_{uu}(n) = \frac{1}{N-n}\sum_{k=1}^{N-n} u_{n+k}u_k} \qquad \boxed{\hat{R}_{yu}(n) = \frac{1}{N-n}\sum_{k=1}^{N-n} y_{n+k}u_k}$$

a **diskrétna Wiener-Hopfova rovnica** bude mať tvar

$$\boxed{\hat{R}_{yu}(n) = \sum_{i=0}^{M} h(i)\hat{R}_{uu}(n-i).T_{vz}} \qquad \text{pre} \quad n = 0,1,\ldots,N$$

M je **praktická dĺžka impulznej charakteristiky**, takže bude platiť $h(n) = 0$ a tiež $\hat{R}_{yu}(n) = 0$ pre $n > M$. Hodnota M sa zvyčajne volí tak, aby hodnota impulznej charakteristiky v tomto bode neprevyšovala určité percento maximálnej hodnoty impulznej charakteristiky.

⇒ **Dekonvolúcia**

Rozpísaním Wiener-Hopfovej rovnice dostaneme **preurčený systém rovníc**

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\hat{R}_{yu}(0)}{T_{vz}} \\ \dfrac{\hat{R}_{yu}(1)}{T_{vz}} \\ \vdots \\ \dfrac{\hat{R}_{yu}(N)}{T_{vz}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{uu}(0) & \hat{R}_{uu}(1) & \ldots & \hat{R}_{uu}(M) \\ \hat{R}_{uu}(1) & \hat{R}_{uu}(0) & \ldots & \hat{R}_{uu}(M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_{uu}(N) & \hat{R}_{uu}(N-1) & \ldots & \hat{R}_{uu}(N-M) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \\ h(M) \end{pmatrix} \qquad \text{alebo} \quad \boxed{\hat{\mathbf{R}}_{yu} = \hat{\mathbf{R}}_{uu}\mathbf{h}}$$

Výpočet vektora $\mathbf{h}$ z tejto rovnice sa nazýva **problémom dekonvolúcie**.

Riešenie minimalizujúce funkcionál

$$\hat{h} \to \min_{h} Q(h) = Q(h^*) \qquad \text{kde} \qquad Q(\mathbf{h}) = \left(\hat{\mathbf{R}}_{yu} - \hat{\mathbf{R}}_{uu}\mathbf{h}\right)^T\left(\hat{\mathbf{R}}_{yu} - \hat{\mathbf{R}}_{uu}\mathbf{h}\right)$$

$$\boxed{\hat{h} = \left(\hat{R}_{uu}^T\hat{R}_{uu}\right)^{-1}\hat{R}_{uu}^T\hat{R}_{yu}}$$

⇒ Ak pre **autokorelačnú funkciu vstupného signálu** platí $\hat{R}_{uu}(0) = 1$ a $\hat{R}_{uu}(j) = 0$ pre $j \neq 0$ (napr. jednotkový impulz, biely šum, náhodný binárny signál), potom je **matica** $\hat{R}_{uu}$ **jednotková** a **výpočet vektora h je jednoduchší** – nie je potrebná inverzia matice.

✍ **Výhodou korelačnej analýzy voči deterministickej metóde konvolutórneho integrálu** je potlačenie vplyvu šumu na odhad impulznej charakteristiky.

⇒ **Regularizácia**

V dôsledku **zlej podmienenosti** matice $\hat{\mathbf{R}}_{uu}$ môže vyjsť postupnosť hodnôt impulznej charakteristiky **skreslená** (neusporiadaná). Na **vyhladenie priebehu** sa používa **regularizácia** – k pôvodnej účelovej funkcii $Q(\mathbf{h})$ sa **pridáva ďalší člen nazývaný stabilizátor**. Jeho tvar má byť taký, aby jeho hodnota s vyhladenosťou priebehu klesala a naopak, narastala s neusporiadanosťou vzoriek

a) Stabilizátor úmerný **súčtu štvorcov prvých diferencií** poradníc impulznej charakteristiky

$Q_1(\mathbf{h}) = Q(\mathbf{h}) + \alpha \Delta \mathbf{h}^T \Delta \mathbf{h}$ $\quad 0{,}1 \le \alpha \le 0{,}3$ je **koeficient regularizácie**

$\Delta h(i) = h(i+1) - h(i)$ $\quad$ pre i=0,...,M-1

$$\Downarrow$$

$$\Delta h(0) = h(1) - h(0)$$
$$\Delta h(1) = h(2) - h(1)$$
$$\vdots$$
$$\Delta h(M-1) = h(M) - h(M-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \Delta h(0) \\ \Delta h(1) \\ \vdots \\ \Delta h(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M) \end{bmatrix} \quad \text{kde} \quad \Delta \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \Delta h(0) \\ \Delta h(1) \\ \\ \Delta h(M-1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \\ h(M) \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta h = Ah$$

$$Q_1(\mathbf{h}) = \left(\hat{\mathbf{R}}_{yu} - \hat{\mathbf{R}}_{uu}\mathbf{h}\right)^T \left(\hat{\mathbf{R}}_{yu} - \hat{\mathbf{R}}_{uu}\mathbf{h}\right) + \alpha \mathbf{h}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{h}$$

$$A^T A = B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Optimálny vektor $\mathbf{h}$ určíme z nulovej hodnoty gradientu

$$\nabla_{\mathbf{h}} Q_1(h)\big|_{\mathbf{h}^*} = -2\mathbf{R}_{uu}^T\left(\mathbf{R}_{yu} - \mathbf{R}_{uu}\mathbf{h}^*\right) + 2\alpha \mathbf{B}\mathbf{h}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{h} = \left(\hat{R}_{uu}^T \hat{R}_{uu} + \alpha B\right)^{-1} \hat{R}_{uu}^T \hat{R}_{yu}}$$

b) Stabilizátor úmerný **súčtu štvorcov druhých diferencií** poradníc impulznej charakteristiky

$Q_2(\mathbf{h}) = Q(\mathbf{h}) + \alpha \Delta^2 \mathbf{h}^T \Delta^2 \mathbf{h}$

$\Delta^2 h(i) = \Delta h(i+1) - \Delta h(i) = h(i+2) - 2h(i+1) + h(i)$ pre i=0,...,M-2

$$\Delta^2 \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{h} = \mathbf{C}\mathbf{h}$$

$$Q_2(\mathbf{h}) = \left(\hat{\mathbf{R}}_{yu} - \hat{\mathbf{R}}_{uu}\mathbf{h}\right)^T \left(\hat{\mathbf{R}}_{yu} - \hat{\mathbf{R}}_{uu}\mathbf{h}\right) + \alpha \mathbf{h}^T D \mathbf{h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{h} = \left(\hat{R}_{uu}^T \hat{R}_{uu} + \alpha D\right)^{-1} \hat{R}_{uu}^T \hat{R}_{yu}}$$

$$C^T C = D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nevýhodou regularizácie je, že násilne **potláča vrcholy** impulznej charakteristiky, ktoré **skutočnému priebehu náležia** a tým môže skresľovať presnosť výsledkov. Preto sa neodporúča používať stabilizátory, v ktorých vystupujú diferencie impulznej charakteristiky vyšších rádov.

Postup:

1. Nameriame vstupy a výstupy a vypočítame korelačné funkcie.
2. Dekonvolúciou určíme impulznú charakteristiku.
3. Získanú impulznú charakteristiku môžeme prepočítať na poradnice prechodovej charakteristiky $g_k = T_{vz} \sum_{i=1}^{k} h_i$ a prípadne identifikovať parametrický model niektorou z predchádzajúcich metód.

$\Rightarrow$ **Iný postup** stanovenia váhovej funkcie vychádza z **použitia tzv. bieliaceho filtra** s prenosom $G_B(s)$, ktorým necháme prejsť vstupný aj výstupný signál, čím dostaneme signály $u_B(t)$ resp. $y_B(t)$

Filter sa volí s takým prenosom, aby sa **signál** $u_B(t)$ svojimi vlastnosťami **blížil realizácii bieleho šumu.**

Pre filtrované signály platí vzťah

$$y_B(t) = \int_0^{\infty} h(\lambda) u_B(t-\lambda) d\lambda + v(t)$$

Na **výpočet impulznej charakteristiky** sa potom používa korelačná funkcia $R_{y_B u_B}$.

Tento postup je využitý **v Matlabovskej procedúre** *cra*.

Príklad → priklady_korelacne_metody.pdf

6.1.2. Spektrálna analýza

$\Rightarrow$ **Wiener – Chinčinove rovnice**: **prepočet korelačných funkcií na výkonové spektrálne hustoty**

Medzi korelačnou funkciou $R_{yu}(\tau)$ a výkonovou spektrálnou hustotou $S_{yu}(j\omega)$ platí **priama a spätná Fourierova transformácia**

$$S_{uu}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad R_{uu}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$S_{yu}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad R_{yu}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yu}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Do vzťahu pre vzájomnú výkonovú spektrálnu hustotu $S_{yu}(j\omega)$ dosadíme $R_{yu}(\tau)$ z Wiener-Hopfovej rovnice

$$R_{yu}(\tau) = \int_0^{\infty} h(\lambda) R_{uu}(\tau - \lambda) d\lambda$$

$$S_{yu}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}h(\lambda)R_{uu}(\tau-\lambda)d\lambda\, e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)e^{-j\omega\lambda}\overbrace{\left(\int_{0}^{\infty}R_{uu}(\tau-\lambda)e^{-j\omega(\tau-\lambda)}d\tau\right)}^{S_{uu}(j\omega)}d\lambda$$

$$F(j\omega)=\int_{0}^{\infty}h(\lambda)e^{-j\omega\lambda}d\lambda \qquad \Rightarrow \qquad S_{yu}(j\omega)=F(j\omega)S_{uu}(j\omega)$$

Na základe znalosti **vlastnej výkonovej spektrálnej hustoty vstupného signálu** $S_{uu}(j\omega)$ a **vzájomnej výkonovej spektrálnej hustoty vstupu a výstupu** $S_{yu}(j\omega)$ je možné **určiť frekvenčnú charakteristiku sústavy**

$$\boxed{F(j\omega)=\frac{S_{yu}(j\omega)}{S_{uu}(j\omega)}}$$ **frekvenčný tvar Wiener-Hopfovej rovnice**

a z nej následne **získať parametrický model** napr. pomocou Bodeho, Vrbanovej alebo Levyho metódy.

⇒ **Výkonové spektrálne hustoty vypočítame** pomocou Fourierovej transformácie **z korelačných funkcií.**

⇒ **Diskrétna Fourierova transformácia**

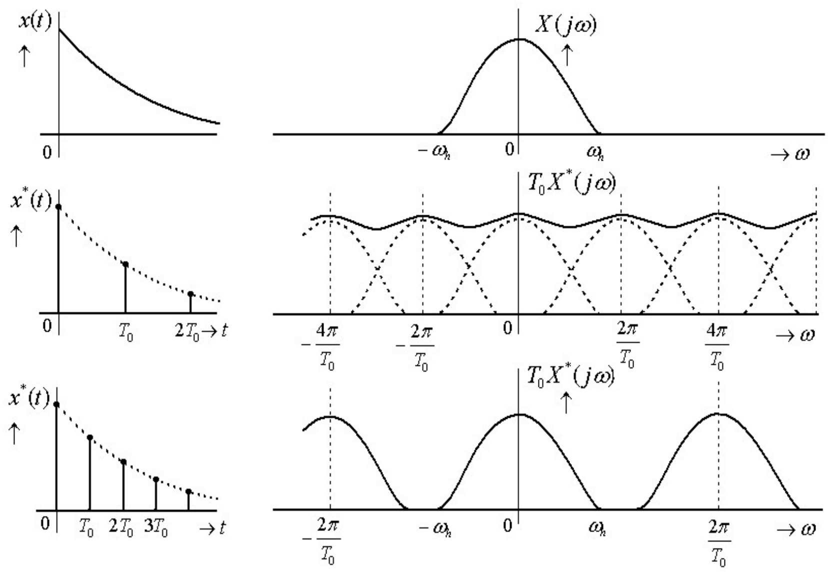
Pri praktickej realizácii pracujeme s **konečnou dobou intervalu pozorovania** ϑ, t.j. namiesto Fourierovho obrazu $X(j\omega)$ funkcie $x(t)$ v tvare

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \text{budeme používať funkciu} \qquad X_{\vartheta}(j\omega)=\int_{-0.5\vartheta}^{0.5\vartheta}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

čo môže spôsobiť **skreslenie frekvenčného spektra**.

⇒ Ďalšiu **stratu informácie** môže spôsobiť **diskretizácia** – dôležitá je **perióda vzorkovania**.

Diskrétna funkcia má periodické spektrum, pričom periodicita spektra vzniká postupným prekrývaním ekvidištančne posunutých spektier pôvodného signálu, čím zároveň dochádza k strate informácie.



Aby nedochádzalo k prekrývaniu spektier musí platiť **Shannonov a Kotelnikovov teorém:** signál s hraničnou frekvenciou ω_H je možné vzorkovať bez straty informácie vtedy, ak perióda vzorkovania T_{vz} vyhovuje nerovnosti $T_{vz} \leq \frac{\pi}{\omega_H}$.

T.j. **perióda vzorkovania** T_{vz} by mala byť **čo najmenšia**, z čoho vyplýva použitie **čo najväčšieho počtu vzoriek** $N = \mathrm{int}\left(\frac{\vartheta}{T_{vz}}\right) = \frac{\vartheta}{T_{vz}}$

⇒ Pri meraní s konečnou dobou trvania experimentu ϑ **skutočnú výkonovú spektrálnu hustotu**

$$S_{uu}(\omega) = \lim_{\vartheta\to\infty} \int_{-0.5\vartheta}^{0.5\vartheta} R_{uu}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

nahrádzame funkciou

$$\boxed{\hat{S}_{uu}(\omega) = \int_0^{\vartheta} R_{uu}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}$$

Operáciu integrovania opäť nahradíme operáciou sumácie ekvidištančných vzoriek nameraných počas intervalu pozorovania, navzájom vzdialených o periódu vzorkovania.

Označme najnižšiu základnú frekvenciu $\Omega = \frac{2\pi}{\vartheta}$

Potom

$$\hat{R}_{uu}(\tau)_{|\tau=kT_{vz}} = \hat{R}_{uu}(kT_{vz}) \stackrel{!}{=} R_k \qquad n,k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\hat{S}_{uu}(\omega)_{|\omega=n\Omega} = \hat{S}_{uu}(n\Omega) \stackrel{!}{=} T_{vz}.S_n$$

$$\omega\tau = n\Omega kT_{vz} = n\frac{2\pi}{\vartheta}k\frac{\vartheta}{N} = kn\frac{2\pi}{N}$$

$$\boxed{\hat{S}_{uu}(\omega) = \int_0^{\vartheta} R_{uu}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad \Rightarrow \qquad S_n = \sum_{k=0}^{N-1} R_k e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}}$$

Zavedieme označenie komplexného čísla s jednotkovým modulom $\boxed{W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$

Potom **Wienerove a Chinčinove rovnice** prejdú na **diskrétny tvar**

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk}R_k} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

prepočet korelačných funkcií na výkonové spektrálne hustoty

Praktická realizácia: $\mathbf{S} = \mathbf{WR}$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \cdots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

(symetrická matica)

Výpočet si vyžaduje N^2 komplexných násobení a $N(N-1)$ komplexných sčítaní.
Zníženie prácnosti výpočtu – rýchla Fourierova transformácia (FFT).

⇒ Spektrálna analýza **v Matlabe** – príkaz *spa.*

Príklad → priklady_korelacne_metody.pdf