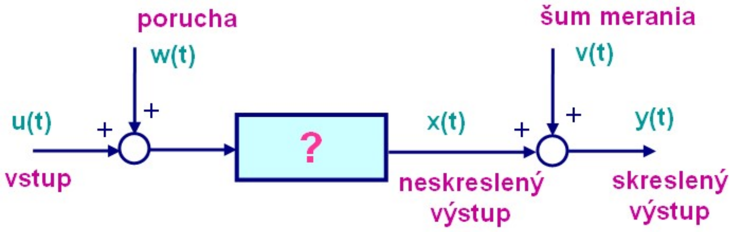
5 DETERMINISTICKÉ METÓDY IDENTIFIKÁCIE

⇒ **Dynamické modely** – vyjadrujú **vlastnosti** identifikovaných systémov v **prechodných** režimoch

⇒ **Všeobecný postup** pri identifikácii dynamických systémov:

- meranie vstupno-výstupných závislostí,
- určenie neparametrického modelu – vyhodnotenie meraní,
- parametrizácia neparametrického modelu, výberom vhodného algoritmu.

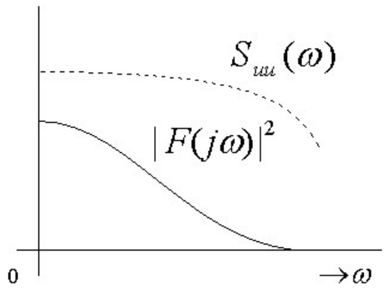


⇒ **Minimalizácia vplyvu rušivých vstupov**

- vykonáme **viac meraní** charakteristík toho istého procesu a **parametrizovať budeme** strednú hodnotu týchto meraní,
- alebo vyhodnotíme viac meraní a určíme stredné hodnoty hľadaných parametrov.

⇒ Identifikácia **sústavy s viacerými vstupmi** – všetky ostatné vstupy okrem aktívneho treba udržiavať v pracovnom bode na konštantnej hodnote počas celého merania.

⇒ **Vstupné signály** musia preverovať **prenosové vlastnosti** sústavy **v celej oblasti prenášaných frekvencií**, t.j. mali by mať **konštantný priebeh frekvenčného spektra** v tej oblasti frekvencií, kde je modul frekvenčného prenosu podstatne odlišný od nuly



$$S_{uu}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{\vartheta} \int_{-0.5\tau}^{0.5\tau} u(t+\tau)u(t)dt$$

⇒ Túto vlastnosť spĺňa fiktívny signál „**biely šum**“, ktorý je považovaný za **model testovacieho signálu**, ku ktorému by sa mal vstupný signál čo najviac približovať.

⇒ **Deterministické metódy** – predpokladáme, že vstupná veličina je **deterministický signál**, čiže **neuvažujeme pôsobenie náhodných veličín** na systém, resp. predpokladáme, že **pomer intenzity** parazitných **šumov k intenzite riadeného signálu** je dostatočne **malý**.

⇒ Užitočné **deterministické signály**:

- jednotkový skok,
- harmonický signál,
- pseudonáhodný signál.

5.1. Identifikácia z prechodovej charakteristiky

👎 **Negatíva:** je potrebný aktívny experiment

👍 **Pozitíva:** jednoduchá realizácia, slúžia najmä na prvotnú orientačnú identifikáciu

⇒ **Pred uskutočnením** skokovej **zmeny** je potrebné, aby **systém bol v ustálenom stave**

⇒ Možné **problémy:**

- **určenie rádu modelu** z prechodovej charakteristiky – prechodové charakteristiky vyšších rádov majú podobný priebeh
- **možný vplyv nelinearít** – pri experimente systém prejde z jedného pracovného bodu do druhého, čím väčší skok vstupnej veličiny, tým väčší tento vplyv môže byť. Je vhodné urobiť niekoľko skokových zmien rozličných veľkostí a smerov (N meraní) a pre stanovenie výslednej prechodovej charakteristiky použiť vzorec:

$$\boxed{y_v(i) = \frac{\sum_{k=1}^{N} \Delta u_k y_k(i)}{\sum_{k=1}^{N} (\Delta u_k)^2}}$$

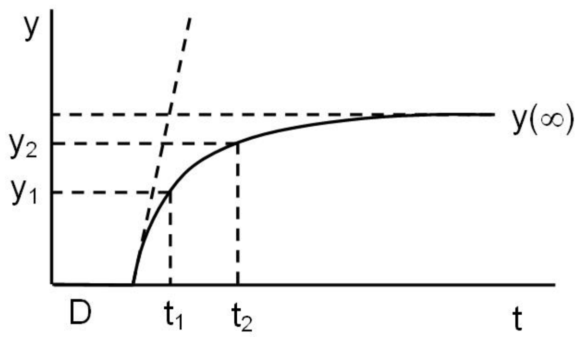
kde i - i-ty bod prechodovej charakteristiky
k - k-te meranie (k=1,...,N)
Δu_k - skoková zmena vstupu pri k-tom meraní
$y_k(i)$ - hodnota výstupu pri k-tom meraní v i-tom bode (v čase $t = i\Delta t$)
$y_v(i)$ - výsledná hodnota prechodovej charakteristiky v i-tom bode.

5.1.1. Sústava 1.rádu

Prenos: $F(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-Ds}$

Časová forma: $y(t) = \begin{cases} 0 & t < D \\ K\left(1 - e^{-\frac{t-D}{T}}\right) & t \geq D \end{cases}$

Neznáme parametre: **?** K, T, D



1. metóda

Predpoklad: poznáme **y(∞) a ľubovoľné 2 body prechodovej charakteristiky** $[t_1,y_1]$ a $[t_2,y_2]$

$$y_1(t_1) = K\left(1 - e^{-\frac{t_1-D}{T}}\right) \qquad y_2(t_2) = K\left(1 - e^{-\frac{t_2-D}{T}}\right)$$

Ich zlogaritmovaním a následnou úpravou dostaneme výsledné vzťahy.

☑ ***Postup***:

1. $K = y(\infty)$
2. $T = \dfrac{t_2 - t_1}{\ln\left(\dfrac{K - y_1}{K - y_2}\right)}$
3. $D = \dfrac{t_2 x - t_1}{x - 1}$, kde $x = \dfrac{\ln\dfrac{K - y_1}{K}}{\ln\dfrac{K - y_2}{K}}$

2. metóda

Predpoklad: poznáme **y(∞) a 2 body prechodovej charakteristiky** $[t_1,y_1]$ a $[t_2,y_2]$, pre ktoré platí $y_1 = 0.33y(\infty)$ s odpovedajúcim časom $t_1 = t_{0.33}$ a $y_2 = 0.70y(\infty)$ s časom $t_2 = t_{0.7}$. Metóda vychádza z porovnania náhradnej prechodovej charateristiky so skutočnou prechodovou charakteristikou v bodoch $y(0)$, $y(t_{0.33})$, $y(t_{0.7})$ a $y(\infty)$.

☑ ***Postup***:

1. $K = y(\infty)$
2. $T = 1.245(t_{0.7} - t_{0.33})$
3. $D = 1.498t_{0.33} - 0.498t_{0.7}$

3. metóda (Broïdova)

Predpoklad: poznáme **y(∞) a 2 body prechodovej charakteristiky** $[t_1,y_1]$ a $[t_2,y_2]$, pre ktoré platí $y_1 = 0.28y(\infty)$ s odpovedajúcim časom $t_1 = t_{0.28}$ a $y_2 = 0.4y(\infty)$ s časom $t_2 = t_{0.4}$.

☑ ***Postup***:

1. $K = y(\infty)$
2. $T = 5.5(t_{0.4} - t_{0.28})$
3. $D = 2.8t_{0.28} - 1.8t_{0.4}$

Poznámka: T je možné tiež odčítať z prechodovej charakteristiky ako čas, za ktorý dosiahne **výstupná veličina 63% svojej ustálenej hodnoty** (resp. v čase 3T dosiahne 95% ustálenej hodnoty).

5.1.2. Aperiodická sústava 2.rádu

a) Rovnaké časové konštanty

Prenos: $F(s) = \dfrac{K}{(1+Ts)^2}e^{-Ds}$

Neznáme parametre: **?** K, T, D

Predpoklad: poznáme **y(∞) a 2 body prechodovej charakteristiky** $[t_1,y_1]$ a $[t_2,y_2]$, pre ktoré platí $y_1 = 0.33y(\infty)$ s odpovedajúcim časom $t_1 = t_{0.33}$ a $y_2 = 0.70y(\infty)$ s časom $t_2 = t_{0.7}$. Metóda vychádza z porovnania náhradnej prechodovej charateristiky so skutočnou prechodovou charakteristikou v bodoch $y(0)$, $y(t_{0.33})$, $y(t_{0.7})$ a $y(\infty)$.

☑ ***Postup***:

1. $K = y(\infty)$
2. $T = 0.794(t_{0.7} - t_{0.33})$
3. $D = 1.937t_{0.33} - 0.937t_{0.7}$

b) Rozdielne časové konštanty

Prenos: $F(s)=\dfrac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$

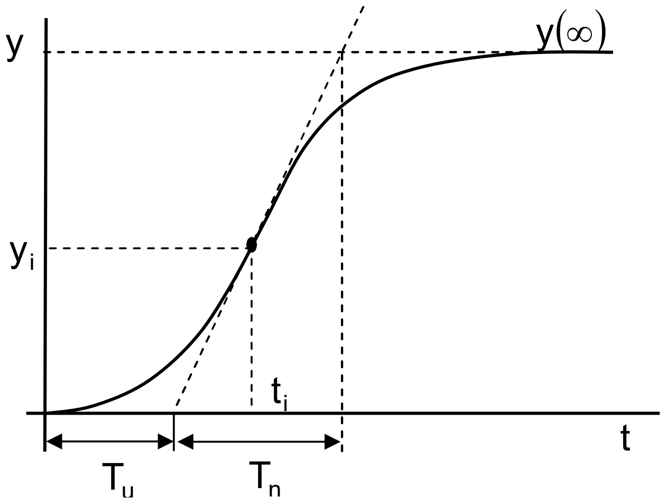
Časová forma: $y(t)=K\left(1-\dfrac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}+\dfrac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$

Neznáme parametre: $\boxed{?\ K,\ T_1,\ T_2}$

T_n	doba nábehu
T_u	doba prieťahu

Metóda vychádza zo vzťahov platných pre **dotyčnicu prechodovej charakteristiky v inflexnom bode** $[t_i, y_i]$:

1. Dotyčnica je daná priamkou $p=a+bt$.
2. Priamka prechádza bodmi $[T_u, 0]$, $[T_u+T_n, K]$, $[t_i, y_i]$ a platí $b=\dfrac{K}{T_n}$ a $a=-T_u b$.
3. Smernica priamky je daná ako $b=\dot{y}(t_i)$.
4. Pre inflexný bod platí $\ddot{y}(t_i)=0$.



Definujme $k=\dfrac{T_2}{T_1}$, potom sa z predchádzajúcich vzťahov dá odvodiť, že platí:

$$\boxed{\frac{T_n}{T_u}=f_1(k)=\frac{1}{k^{-\frac{k}{k-1}}\left[1+k+\frac{k}{k-1}\ln k\right]-1}}$$

$$\boxed{\frac{T_n}{T_1}=f_2(k)=k^{\frac{k}{k-1}}}$$

Predpoklad: poznáme **y(∞), T_n, T_u** a máme k dispozícii závislosti $f_1(k)$ a $f_2(k)$ vo forme tabuľky alebo grafu, napr.:

k	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8	0,9	0,95	0,99	1,05	1,1	1,3	2
f_2(k)	1,171	1,292	1,495	1,842	2,441	2,581	2,65	2,705	2,786	2,853	3,117	4
f_1(k)	31,737	20,088	13,974	10,91	9,72	9,665	9,653	9,649	9,652	9,662	9,748	10,355

☑ ***Postup***:

1. $K=y(\infty)$
2. $\dfrac{T_n}{T_u}=f_1(k)$ $\Rightarrow$ z tabuľky alebo grafu odčítame k
3. pre dané k odčítame z tabuľky alebo grafu $f_2(k)$ $\Rightarrow$ $T_1=\dfrac{T_n}{f_2(k)}$
4. $T_2=kT_1$

Poznámka:

Ak $f_1(k) < 9.65$, **nie je možné aproximovať** správanie systému sústavou 2. rádu s nerovnakými časovými konštantami.

5.1.3. Kmitavá sústava 2.rádu

a) Bez dopravného oneskorenia

Prenos: $F(s) = \dfrac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \dfrac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2}$

Časová forma: $y(t) = K\left[1 - \dfrac{1}{P}e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_0 Pt + \varphi)\right]$ $P = \sqrt{1-\xi^2}$ $\varphi = \arccos\xi$ $P = \sin\varphi$

Neznáme parametre: $\boxed{?\ K, T, (\omega_0), \xi}$

$\omega_0 = \dfrac{1}{T}$	prirodzená frekvencia
$\omega_v = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$	vlastná frekvencia
ξ	tlmenie

Platí: $\omega_v = \dfrac{2\pi}{\Delta t}$ kde $\Delta t = t_2 - t_1$

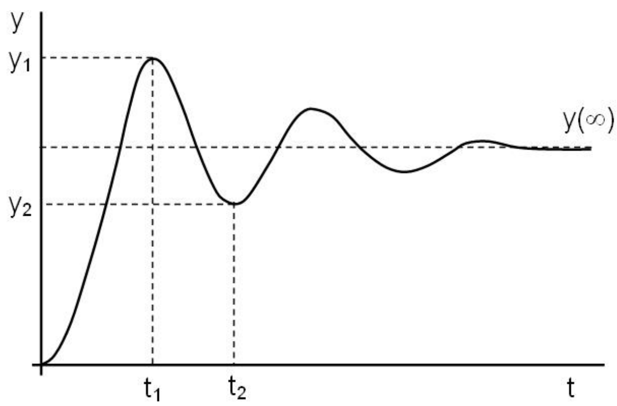
t_1 a t_2 sú časy, kedy prechodová charakteristika nadobúda prvé 2 maximá.

1.metóda

Metóda vychádza z toho, že **derivácia prechodovej charakteristiky v extrémoch je rovná nule**.

$$\dot{y}(t_k) = K\frac{\omega_0}{P}e^{-\xi\omega_0 t_k}\sin(\omega_0 Pt_k) = 0 \qquad k = 1,2$$

$$\sin(\omega_0 Pt_k) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 P}$$



Po dosadení do rovnice výstupu dostaneme:

$$y(t_k) = K\left[1 - \frac{1}{P}e^{-\frac{1}{P}k\pi\xi}\sin(k\pi + \varphi)\right] = K\left[1 - (-1)^k M^k\right] \qquad \text{kde} \qquad M = e^{-\frac{1}{P}\pi\xi}, \quad k = 1,2$$

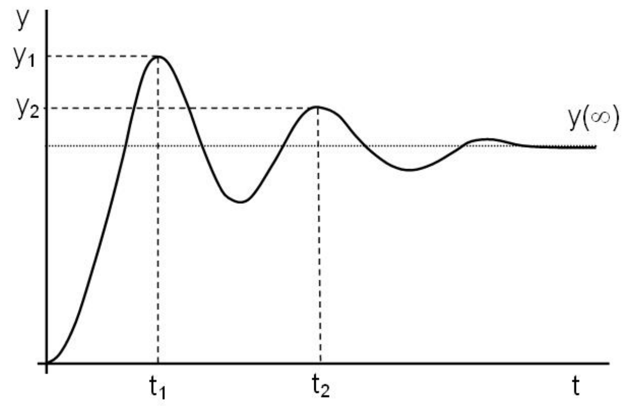
Predpoklad: poznáme **y(∞) a súradnice prvých 2 extrémov** prechodovej charakteristiky $[t_1,y_1]$ a $[t_2,y_2]$.

☑ ***Postup***:

1. $K = y(\infty)$
2. $y_1 = K(1+M),\quad y_2 = K(1-M^2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{M = \dfrac{y_1 - y_2}{y_1}}$
3. $M = e^{-\frac{1}{P}\pi\xi}$ kde $P = \sqrt{1-\xi^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\xi = \left|\dfrac{\ln M}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 M}}\right|}$
4. $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_0 P},\quad t_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_0 P}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_0 = \dfrac{\pi}{(t_2 - t_1)\sqrt{1-\xi^2}},\quad T = \dfrac{1}{\omega_0}}$

2.metóda

Predpoklad: poznáme **y(∞) a súradnice prvých 2 maxím** prechodovej charakteristiky [t_1,y_1] a [t_2,y_2].



☑ ***Postup***:

1. $K = y(\infty)$
2. $c = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{y_1}{K} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi = \frac{-c}{\sqrt{1+c^2}}}$
3. $\Delta t = t_2 - t_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{1+c^2}}}$

3.metóda

Predpoklad: poznáme **y(∞) a súradnice prvých 2 maxím** prechodovej charakteristiky [t_1,y_1] a [t_2,y_2].

☑ ***Postup***:

1. $K = y(\infty)$
2. $A_1 = y_1 - y(\infty),\ \ A_2 = y_2 - y(\infty),\ \ \delta = \frac{A_1}{A_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi = \frac{\ln\delta}{\sqrt{(\ln\delta)^2 + 4\pi^2}}}$
3. $\Delta t = t_2 - t_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{\Delta t}{2\pi}\sqrt{1-\xi^2}}$

b) S dopravným oneskorením

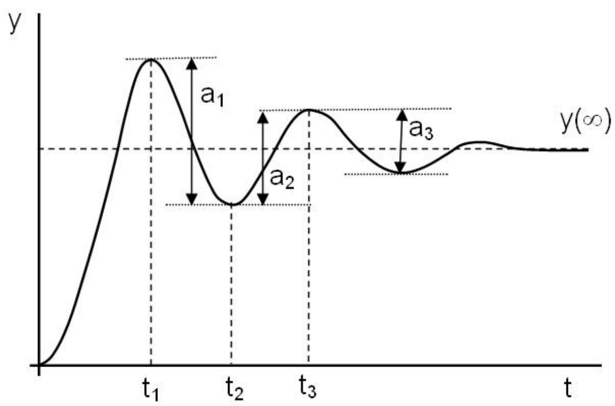
Prenos: $$F(s) = \frac{Ke^{-Ds}}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{K\omega_0^2 e^{-Ds}}{s^2 + 2\omega_0\xi + \omega_0^2}$$

Časová forma: $$y(t) = K\left[1 - \frac{1}{P}e^{-\xi\omega_0(t-D)}\sin(\omega_0 P(t-D) + \varphi)\right]$$

Neznáme parametre:

$\boxed{?\ K,\ T,\ (\omega_0),\ \xi,\ D}$

Predpoklad: poznáme **y(∞) a súradnice extrémov** prechodovej charakteristiky [t_1,y_1], [t_2,y_2], atď.... Z nich vypočítame hodnoty a_1, a_2, atď., n je počet vypočítaných hodnôt a_i.



☑ ***Postup***:

1. $K = y(\infty)$

2. $\xi = -\dfrac{\ln\dfrac{a_{i+1}}{a_i}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\dfrac{a_{i+1}}{a_i}}}$ alebo $\xi = -\dfrac{\ln\dfrac{a_{i+2}}{a_i}}{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2\dfrac{a_{i+2}}{a_i}}}$

   (ak sú získané hodnoty rozdielne, výsledná hodnota sa získa ako ich aritmetický priemer)

3. $T = \dfrac{1}{\pi n}(t_{n+1} - t_1)\sqrt{1-\xi^2}$ kde n je počet získaných hodnôt a_i, $i = 1,\ldots n$

4. $D = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i - \dfrac{n+1}{2n}(t_{n+1} - t_1)$

Poznámka:

Uvedená metóda dáva **dobré výsledky** v prípade, že **časová konštanta T je podstatne väčšia ako ďalšie časové konštanty sústavy** (ak je skutočná dynamika identifikovanej sústavy vyššieho rádu).

Príklad → priklady_prech_char.pdf + cvičenia

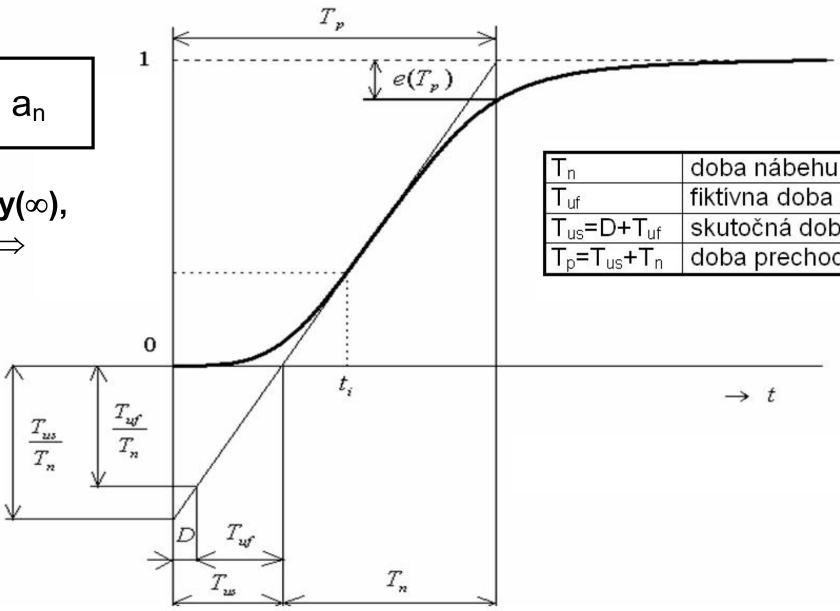
5.1.4. Aperiodická sústava vyššieho rádu

Prenos: $F(s) = \dfrac{K}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + 1} e^{-Ds}$

Neznáme parametre:

? n, K, D, a_1,..., a_n

***Predpoklad*: poznáme y(∞), T_n, T_{us}, prípadne $e(T_p)$ ⇒** máme viac neznámych parametrov modelu ako známych veličín



T_n	doba nábehu
T_{uf}	fiktívna doba prieťahu
T_{us}=D+T_{uf}	skutočná doba prieťahu
T_p=T_{us}+T_n	doba prechodu

Zjednodušenie:

a) ***Strejc*** $\dfrac{K}{(1+sT)^n} e^{-Ds}$ ⇒ **?** n, K, T, D

b) ***Broïda*** $\dfrac{K}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{T}{i}s\right)}e^{-Ds}$ $\Rightarrow$ $\boxed{?\ n, K, T, D}$

c) **Hudzovič** $\dfrac{K}{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\dfrac{T}{1-i\dfrac{r}{n-1}}s\right)}e^{-Ds}$ $\Rightarrow$ $\boxed{?\ n, K, T, D, r}$

$$0 \le r = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}} < 1$$

parameter rozloženia časových konštánt
Strejcov prenos: $r = 0$
Broidov prenos: $r = \dfrac{n-1}{n}$

a) Strejcova metóda

Prenos: $F(s) = \dfrac{K}{(1+sT)^n}e^{-Ds}$

Časová forma: $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{t}{T}\right)^k$

Neznáme parametre: $\boxed{?\ n, K, T, D}$

Postup odvodenia je **rovnaký ako pri aperiodickej sústave 2. rádu**, využíva vlastnosti dotyčnice prechodovej charakteristiky v inflexnom bode $[t_i, y_i]$.
Prvá a druhá derivácia výstupu je:

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{T^n(n-1)!}t^{n-1}e^{-\frac{t}{T}} \qquad \ddot{y}(t) = \frac{1}{T^n}\left[\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{1}{T}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]e^{-\frac{t}{T}}$$

V inflexnom bode platí:

$\ddot{y}(t_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_i = T(n-1)$ dosadíme do prvej derivácie, pričom platí $\dot{y}(t_i) = \dfrac{K}{T_n}$

$$\dot{y}(t_i) = \frac{(n-1)^{n-1}}{T(n-1)!}e^{-(n-1)} = \frac{1}{T_n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{T}{T_n} = \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-(n-1)} = g(n)}$$

Rovnako sa dá odvodiť aj vzťah: $\boxed{\dfrac{T_u}{T_n} = e^{-(n-1)}\left[\dfrac{(n-1)^n}{(n-1)!} + \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}(n-1)^k\right] - 1 = f(n)}$

Funkcie **f(n) a g(n)** pre celočíselné hodnoty n sú **dané vo forme tabuľky**:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
f(n)	0	0,104	0,218	0,319	0,410	0,496
g(n)	1	0,368	0,271	0,224	0,195	0,161

Predpoklad: poznáme **y(∞), T_n, T_{us}** a máme k dispozícii závislosti $f(n)$ a $g(n)$ (tabuľka, graf)

☑ ***Postup***:

1. $K = y(\infty)$

2. $f_s = \frac{T_{us}}{T_n}$ $\Rightarrow$ nájdeme (v tabuľke) také n_0, pre ktoré platí $f(n_0) \le f_s < f(n_0+1)$

$\Rightarrow$ n_0 je rád modelu

3. $D = (f_s - f(n_0))T_n$ (rozdiel medzi skutočným a fiktívnym časom nábehu)

4. $T = T_n g(n_0)$

b) Broïdova metóda

Prenos: $\frac{K}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{T}{i}s\right)}e^{-Ds}$

Neznáme parametre: **?** n, K, T, D

☑ ***Postup***:

je **rovnaký** ako pri Strejcovej metóde, iba **funkcie f(n) a g(n)** sú pre Broïdov prenos **iné**:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
f(n)	0	0,096	0,192	0,268	0,331	0,385
g(n)	1	0,500	0,440	0,420	0,410	0,400

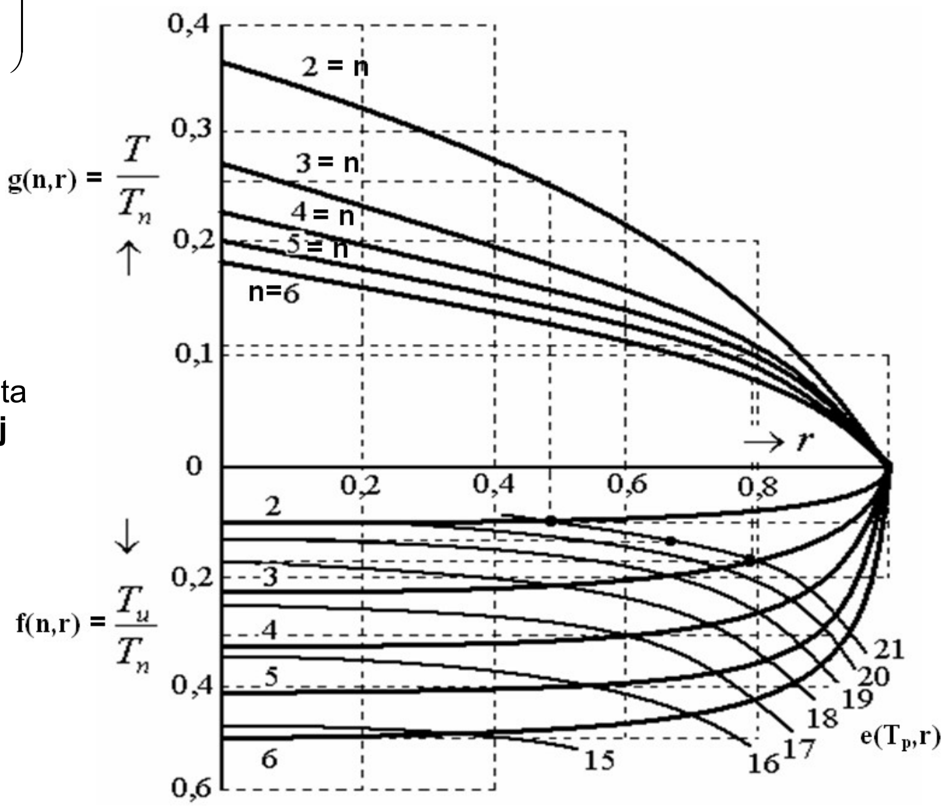
c) Hudzovičova metóda

Prenos: $\frac{K}{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{T}{1-i\frac{r}{n-1}}s\right)}e^{-Ds}$

Neznáme parametre: **?** n, K, T, D, r

Počet identifikovaných parametrov sa oproti predchádzajúcim dvom prenosom **zvýšil o jeden**, je potrebné **zväčšiť** aj **počet nameraných údajov**.

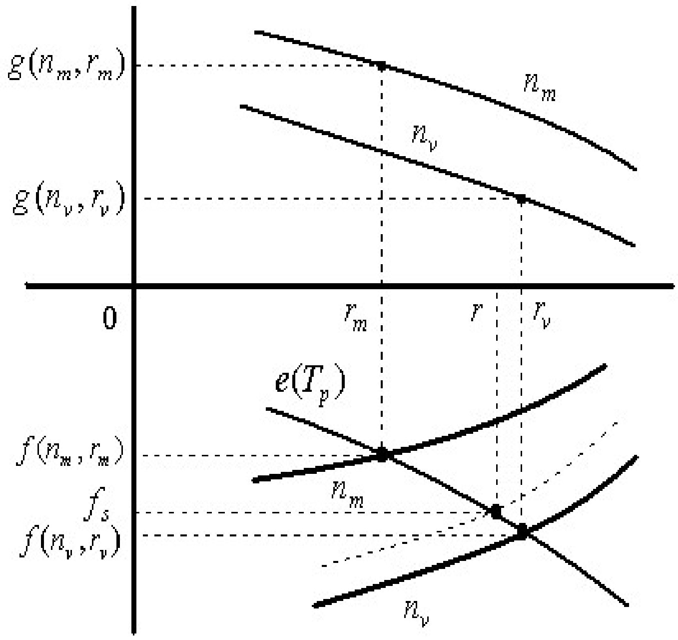
Ako vhodná sa ukázala hodnota rozdielu **doplnku normovanej** PCH **od ustáleného stavu** v čase $T_p = T_u + T_n$ daná ako $e(T_p) = 1 - y(T_p)$ (**v prípade nenormovanej PCH vyjadrená v percentách**).



Pri identifikácii sa pracuje s funkciami: $\frac{T_u}{T_n} = f(n,r)$, $\frac{T}{T_n} = g(n,r)$, $e(T_p) = e(T_p, r)$ a používajú sa ich grafické priebehy (nomogramy). V dolnej časti je graf funkcie $f(n,r)$ pri spojitej zmene parametra r a s vyznačením celočíselnej hodnoty rádu n, v hornej časti je rovnaký graf funkcie $g(n,r)$ a v dolnej časti je tenšou čiarou nakreslený priebeh funkcie $e(T_p, r)$s vyznačením konštantnej hodnoty doplnku v percentách.

☑ ***Postup***:

1. $K = y(\infty)$
2. znormujeme prechodovú charakteristiku tak, aby sa výstup blížil k 1 $\Rightarrow$ určíme $f_s = \frac{T_{us}}{T_n}$ a $e(T_p) = (1 - y(T_p))100$ [%]
3. v dolnej časti grafu určíme priesečník týchto údajov $P(n,r)$ a presunieme sa do bodu $P(n_m, r_m)$, ktorý zodpovedá najbližšiemu celočíselnému rádu v smere k nižším hodnotám f_s pri zachovaní konštantného $e(T_p) \Rightarrow n_m$ je rád modelu a r_m je parameter rozloženia časových konštánt
4. $D = (f_s - f(n_m, r_m))T_n$
5. $T = T_n g(n_m, r_m)$



🖹 ***Príklad → priklady_prech_char.pdf + cvičenia***

5.1.5. <u>Integračná sústava bez zotrvačného člena</u>

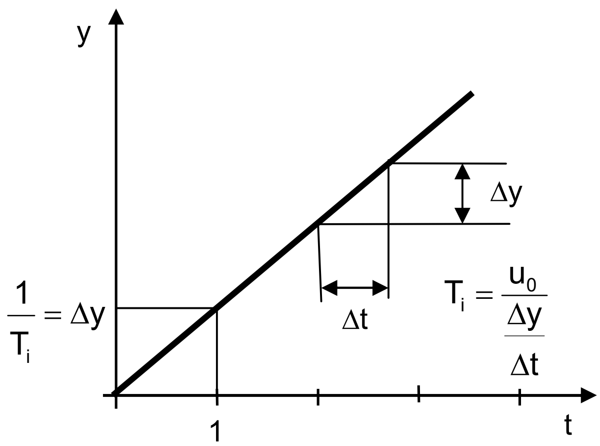
Prenos: $F(s) = \frac{K}{s} = \frac{1}{T_i s}$

Neznáme parametre: $\boxed{?\ K\ (T_i)}$

Odozva sústavy pri skokovej zmene vstupu s veľkosťou u_0 je $y(t) = \frac{u_0}{T_i} t$

Pre smernicu odozvy platí

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{u_0}{T_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_i = \frac{u_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}}$$



Ak u_0=1 a zvolíme Δt=1, potom $$\boxed{T_i = \frac{1}{\Delta y}}$$

t.j. integračná časová konštanta je rovná prevrátenej hodnote prírastku Δy za čas Δt=1.

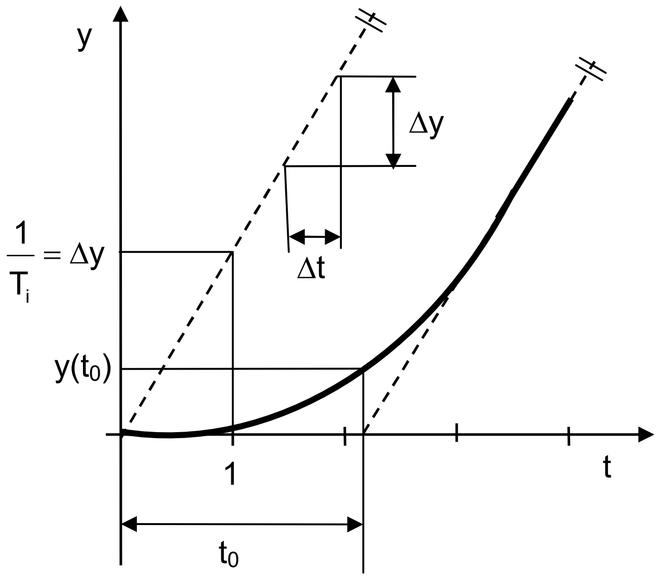
☑ ***Postup***:

1. Vykreslíme asymptotu k prechodovej charakteristike.
2. Odčítame Δt a Δy a vypočítame T_i.

5.1.6. Integračná sústava so zotrvačným členom

Prenos: $$F(s) = \frac{1}{T_i s} \frac{1}{(Ts+1)^n}$$

Neznáme parametre: $\boxed{?\ T_i, T, n}$



☑ ***Postup***:

1. Vykreslíme asymptotu k prechodovej charakteristike.
2. Odčítame Δt a Δy a vypočítame T_i ako v prípade čiste integračného člena.
3. Odčítame t_0 a $y(t_0)$ a vypočítame pomocnú konštantu
$$A = \frac{y(t_0)}{\frac{t_0}{T_i}}$$
4. Z tabuľky určíme rád systému n na základe hodnoty A.

n	1	2	3	4
A	0,368	0,271	0,224	0,195

5. Vypočítame časovú konštantu
$$T = \frac{t_0}{n}$$

5.2. Identifikácia z impulznej charakteristiky

5.2.1. Metóda momentov

⇒ Metóda je **vhodná pre lineárne systémy s aperiodickým priebehom odozvy**.

Prenos: $$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + 1}$$

Neznáme parametre: $\boxed{?\ a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m}$

Predpoklad: nameraná **impulzná charakteristika** (váhová funkcia), **(vzorky h_j, j=1,..., N v časoch t_j)**

poznáme (odhadneme) **rády čitateľa a menovateľa**

Vzťah medzi **váhovou funkciou a hľadaným prenosom** je daný pomocou **Laplaceovej transformácie**

$$F(s) = L\{h(t)\} = \int_0^\infty h(t)e^{-st}dt$$

Člen e^{-st} v okolí bodu st=0 rozvinúť do Taylorovho radu

$$F(s) = \int_0^\infty \left[1 - st + \frac{(st)^2}{2!} - \frac{(st)^3}{3!} + \ldots\right] h(t)dt = \int_0^\infty h(t)dt - s\int_0^\infty t\,h(t)dt + \frac{s^2}{2!}\int_0^\infty t^2\,h(t)dt - \cdots$$

Definujme **i-ty moment váhovej funkcie**

$$M_i = \int_0^\infty t^i\,h(t)dt \qquad \text{v diskrétnom tvare} \qquad \boxed{M_i = \sum_{j=1}^{N} t_j^i h_j T_{vz}}$$

kde h_j je vzorka impulznej charakteristiky v čase t_j a T_{vz} je perióda vzorkovania, potom

$$F(s) = M_0 - sM_1 + \frac{s^2}{2!}M_2 - \frac{s^3}{3!}M_3 + \cdots = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + 1}$$

Po roznásobení dostaneme

$$\left(M_0 - sM_1 + \frac{s^2}{2!}M_2 - \frac{s^3}{3!}M_3 + \cdots\right)\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + 1\right) = \left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right)$$

Pomocou **porovnania koeficientov pri rovnakých mocninách s** na ľavej a pravej strane rovnice **zostavíme m+n+1 algebrických rovníc pre výpočet hľadaných koeficientov** $a_1,\ldots, a_n, b_0,\ldots, b_m$.

$\Rightarrow$ Pre m=1 a n=2 $\qquad F(s) = \dfrac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$

Vytvorená **sústava algebrických rovníc** má tvar

$$\begin{array}{llll} M_0 & & & = b_0 \\ -M_1 & +M_0 a_1 & & = b_1 \\ \frac{M_2}{2!} & -M_1 a_1 & +M_0 a_2 & = 0 \\ -\frac{M_3}{3!} & +\frac{M_2}{2!}a_1 & -M_1 a_2 & = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ M_0 & 0 & 0 & -1 \\ -M_1 & M_0 & 0 & 0 \\ \frac{M_2}{2!} & -M_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ -\frac{M_2}{2!} \\ \frac{M_3}{3!} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\boxed{\hat{\theta} = M^{-1}m} \quad \Leftarrow \quad M.\hat{\theta} = m$$

$\Rightarrow$ Pre m=1 a n=3 má sústava algebrických rovníc tvar

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ M_0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -M_1 & M_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_2}{2!} & -M_1 & M_0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_3}{3!} & \frac{M_2}{2!} & -M_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ -\frac{M_2}{2!} \\ \frac{M_3}{3!} \\ -\frac{M_4}{4!} \end{bmatrix}$$

☑ ***Postup***:

1. Z nameranej váhovej funkcie vypočítame momenty M_i, i=1,2,.... $M_i = \sum_{j=1}^{N} t_j^i h_j T_{vz}$
2. Zostavíme a vyriešime sústavu algebrických rovníc $\mathbf{M}.\hat{\theta} = \mathbf{m}$.

🖹 ***Príklad → priklad_met_momentov.pdf***

5.3. <u>Identifikácia z odozvy na všeobecný signál</u>

$\Rightarrow$ Ak je získanie odozvy na jednotkový skok alebo harmonický signál **obtiažne** alebo **nerealizovateľné.**

5.3.1. <u>Metóda konvolutórneho integrálu</u>

Model: neparametrický **FIR alebo SR model**

Neznáme parametre: $\boxed{\textbf{?}\ \{h_0, h_1, h_2, \dots, h_n,\}}$

Predpoklad: nameraná vstupná a výstupná veličina

$\Rightarrow$ Odozva systému na všeobecný vstupný signál je určená konvolúciou vstupného signálu a váhovej funkcie (impulznej charakteristiky)

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Konvolutórny integrál môžeme nahradiť pre malý a konštantný časový krok $\Delta\tau$ sumáciou

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} h_i u_{k-i} \Delta\tau$$

Pre k=0, 1, ..., n dostaneme sústavu lineárnych algebrických rovníc

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & u_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-1} & u_{n-2} & \dots & u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \Delta\tau}$$

v maticovom tvare

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{h}\Delta\tau}$

⇒ Dekonvolúciou získame neznámy vektor **h** - hodnoty váhovej funkcie

$$\boxed{h = \frac{1}{\Delta\tau} U^{-1} y}$$

a následnou integráciou, resp. sumáciou získame hodnoty prechodovej charakteristiky

$$\boxed{g_k = \Delta\tau \sum_{i=1}^{k} h_i} \qquad k=1,\ 2,\ ...,\ n$$

⇒ **Modifikácia**: Nameriame vstupy a výstupy nasledovne: od času 0 do n-1 meriame iba u a potom do času 2n meriame u aj y

$$\boxed{y = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{bmatrix}} \qquad \boxed{U = \begin{bmatrix} u_{n-1} & u_{n-2} & \dots & u_0 \\ u_n & u_{n-1} & \dots & u_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{2n-1} & u_{2n-2} & \dots & u_n \end{bmatrix}}$$

☑ ***Postup***:

1. Z nameraných údajov vytvoríme vektor **y** a maticu **U**.
2. Vypočítame hodnoty váhovej funkcie $h = \frac{1}{\Delta\tau} U^{-1} y$.
3. Môžeme ďalej prepočítať na poradnice prechodovej charakteristiky $g_k = \Delta\tau \sum_{i=1}^{k} h_i$,

   prípadne identifikovať parametrický model niektorou z predchádzajúcich metód.

Príklad → priklad_konv_integral.pdf

5.4. <u>Identifikácia z frekvenčných charakteristík</u>

Pozitívum: frekvenčné charakteristiky poskytujú informácie o dynamických vlastnostiach systému v celom meranom frekvenčnom rozsahu

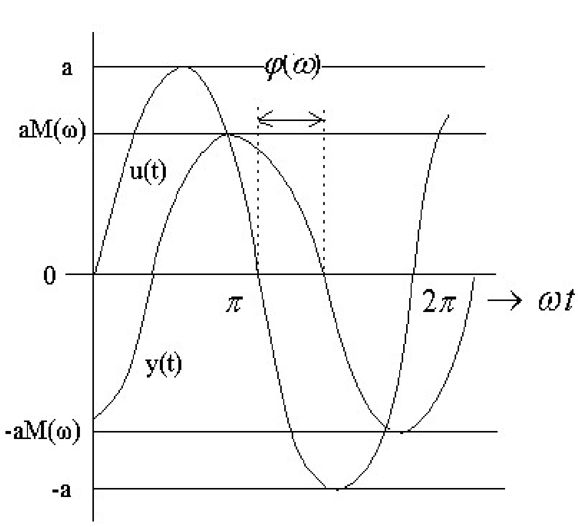
Negatívum: praktické meranie frekvenčných charakteristík je v reálnych procesoch dosť prácne, a často z prevádzkových dôvodov aj obtiažne alebo neprípustné

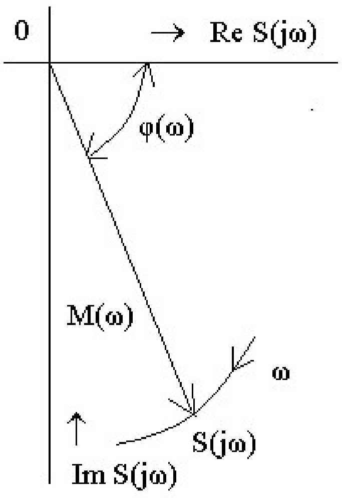
5.4.1. <u>Odhad (meranie) frekvenčnej charakteristiky (neparametrický model)</u>

a) <u>Vyhodnotenie bodov frekvenčnej charakteristiky z odozvy na harmonický signál</u>

⇒ na **vstup** systému pripojíme **zdroj harmonických kmitov** a pre nejaké amplitúdy a_k (rovnaké alebo rôzne) a **rôzne frekvencie harmonického signálu** ω_k, $k = 1,\dots,M$ **odmeriame odozvu systému** y_k

$$\xrightarrow{u_k(t) = a_k \sin(\omega_k t)} \boxed{F(j\omega_k)} \xrightarrow{y_k(t) = b_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)}$$





⇒ Pre **k-tu frekvenciu** ω_k, $k = 1, \ldots, N$ určíme:

modul $M_k = \left|\hat{F}(j\omega_k)\right| = \dfrac{b_k}{a_k}$

fázový posun $\varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{b_k}{a_k}\right)$

čím získame **1 bod frekvenčnej charakteristiky** (Nyquist, Bode): $\boxed{\hat{F}(j\omega_k) = M_k e^{j\varphi_k}}$

kde $\operatorname{Re}\hat{F}(j\omega_k) = U(j\omega_k) = M_k \cos(\varphi_k)$

$\operatorname{Im}\hat{F}(j\omega_k) = V(j\omega_k) = M_k \sin(\varphi_k)$

⇒ Ak **poznáme reálnu a imaginárnu časť**

$\operatorname{Re}\hat{F}(j\omega_k) = U(j\omega_k) = U_k$ a $\operatorname{Im}\hat{F}(j\omega_k) = V(j\omega_k) = V_k$

potom môžeme **vypočítať modul a fázový posun**

$$\boxed{M_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}}$$

$$\boxed{\varphi_k = -\left(\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{V_k}{U_k}\right)\right)}$$

Pri meraní FCH **pozor na systémy s rezonanciou** – pri rezonančných frekvenciách treba zmenšiť amplitúdu vstupného signálu, aby nedošlo k poškodeniu zariadenia.

Odčítanie amplitúdy a fázového posunu z nameraných údajov je citlivé na šumy merania.

⇒ **KORELAČNÁ METÓDA** - **potlačenie vplyvu šumu -** (bez odvodenia)

Predpoklad: pre **vstupný harmonický signál** s frekvenciou ω_k

$$u_k(t) = a_k \cos(\omega_k t)$$

máme **nameranú navzorkovanú odozvu výstupu** (t_i, y_i) i=1, ..., N **v dĺžke 1 periódy harmonického signálu po odoznení prechodného deja**

Pre danú frekvenciu ω_k vypočítame **korelácie výstupu so signálmi kosínusu a sínusu**

$$R_c(\omega_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cos(\omega_k t_i)$$

$$R_S(\omega_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \sin(\omega_k t_i)$$

Potom **bod frekvenčnej charakteristiky pre frekvenciu ω_k** vypočítame

$$\boxed{\hat{F}(j\omega_k) = \frac{R_C(\omega_k) - jR_S(\omega_k)}{a_k/2}}$$

modul $$\boxed{M_k = \frac{\sqrt{R_C^2(\omega_k) + R_S^2(\omega_k)}}{a_k/2}}$$

fázový posun $$\boxed{\varphi_k = -\left(\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{-R_S(\omega_k)}{R_C(\omega_k)}\right)\right)}$$

b) <u>Vyhodnotenie bodov frekvenčnej charakteristiky z prechodovej charakteristiky</u>

***Predpoklad*: namerané body** prechodovej charakteristiky g_0, g_1, ..., g_N

$\Rightarrow$ Medzi prechodovou funkciou g(t) a impulznou funkciou h(t) je vzťah

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad dg(t) = h(t)dt$$

Frekvenčný prenos je Fourierov obraz impulznej funkcie

$$F(j\omega) = \int_0^\infty e^{-j\omega t} h(t) dt = \int_0^\infty e^{-j\omega t} dg(t)$$

Po dosadení za exponenciálny člen $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$

dostaneme $$F(j\omega) = \int_0^\infty (\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)) dg(t)$$

Diskretizáciou dostaneme vzhľadom ku stredu intervalu výsledný vzťah

$$\boxed{\hat{F}(j\omega_i) = \sum_{k=0}^{N}\left\{\cos\left[\omega_i\left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right] - j\sin\left[\omega_i\left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right]\right\}(g_{k+1} - g_k)} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

N je počet diskrétnych hodnôt prechodovej charakteristiky
m je počet bodov frekvenčnej charakteristiky
Δt je perióda vzorkovania.

Maximálna frekvencia, pre ktorú môžeme frekvenčnú charakteristiku vyhodnotiť závisí od periódy vzorkovania $$\boxed{\omega_m < \frac{\pi}{\Delta t}}$$

☑ ***Postup***:

1. Zvolíme postupnosť frekvencií ω_i, i=1, 2, ..., m.
2. Vypočítame body frekvenčnej charakteristiky v týchto frekvenciách.

c) Vyhodnotenie bodov frekvenčnej charakteristiky z odozvy na všeobecný vstupný signál

Predpoklad: namerané hodnoty **vstupnej a výstupnej veličiny u_k a y_k**, k=1, 2, ..., N

⇒ **Fourierova transformácia** pri spracovaní signálov slúži na **transformáciu z časovej oblasti do oblasti frekvenčnej**

Diskrétna Fourierova transformácia (DFT) signálu y_k, k=1, ..., N

$$\boxed{Y_N(\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} y_k e^{-j\omega_i k}} \qquad \text{kde} \qquad \omega_i = \frac{2\pi i}{N} \qquad i = 1, \ldots, N$$

Analogicky získame DFT vstupného signálu $U_N(\omega_i)$.

Predelením $Y_N(\omega_i)$ a $U_N(\omega_i)$ po zložkách pre $\omega_i = \frac{2\pi i}{N}$, i=1, ..., N dostaneme **odhad prenosovej funkcie** označovaný ako **Empirical Transfer Function Estimate - ETFE**

$$\boxed{\hat{F}(j\omega_i) = \frac{Y_N(\omega_i)}{U_N(\omega_i)}}$$

⇒ Ak má **šum merania nulovú strednú hodnotu**, pri použití **periodického vstupného signálu** dáva EFTE **nevychýlený odhad** prenosovej funkcie, avšak pri použití **neperiodického vstupného signálu** dáva iba **asymptoticky nevychýlený** odhad.

⇒ **Zlepšenie („vyhladenie“) odhadu prenosovej funkcie** – použitie **Hammingovho okna**
Na výpočet odhadu pri frekvencii ω_0 sa použijú $\hat{F}(j\omega_i)$ z intervalu

$$\frac{2\pi k_1}{N} = \omega_0 - \Delta\omega \le \omega \le \omega_0 + \Delta\omega = \frac{2\pi k_2}{N}$$

$$\boxed{\hat{F}(j\omega_0) = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \sum_{i=k_1}^{k_2} \hat{F}(j\omega_i) \qquad \omega_i = \frac{2\pi i}{N}}$$

☑ ***Postup***:

1. Vypočítame DFT vstupného a výstupného signálu $U_N(\omega)$ a $Y_N(\omega)$.
2. Predelíme $Y_N(\omega)$ a $U_N(\omega)$ po zložkách pre $\omega = \frac{2\pi n}{N}$, n=1, 2, ..., N, čím získame neparametrický model $F(j\omega_i)$, i=1, 2, ..., N.
3. V prípade potreby môžeme identifikovať parametrický model niektorou z nasledujúcich metód.

⇒ Empirical Transfer Function Estimate **v Matlabe** – príkaz *etfe.*

5.4.2. Bodeho metóda (metóda asymptôt)

⇒ **Grafická** metóda – **hrubý odhad** prenosovej funkcie

⇒ **Asymptotická náhrada** nameranej a vykreslenej **amplitúdovej** logaritmickej frekvenčnej charakteristiky $20\log|S(j\omega)|$

⇒ **Overenie** cez **fázovú** logaritmickú frekvenčnú charakteristiku

Prenos:

$$K\frac{\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{1}{z_k}s\right)}{s^r\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p_k}s\right)}e^{-Ds}$$

Neznáme parametre: $\boxed{?\ K, m, n, r, z_k, p_k, D}$

Predpoklad: **vykreslená amplitúdová** a **fázová** logaritmická frekvenčná charakteristika

☑ ***Postup***:

1. Amplitúdovú logaritmickú frekvenčnú charakteristiku aproximujeme priamkovými úsekmi so sklonom rovným celočíselnému násobku základného sklonu 20 dB/dek (asymptotami).
2. Zosilnenie určíme z asymptoty v oblasti najnižších frekvencií – priamka rovnobežná s x-osou $y = 20\log K$.
3. Bod zlomu $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ pri zmene sklonu o $\alpha_i.20\text{dB}/\text{dek}$ udáva časovú konštantu čiastkového prenosu $(1+sT_i)^{\alpha_i}$ v čitateli (ak asymptota stúpa), alebo v menovateli (ak asymptota klesá). Chyba náhrady v mieste lomu je $\Delta_i = \alpha_i.3\text{dB}$.
4. Ak je zmena sklonu asymptôt $\pm 40\,\text{dB}/\text{dek}$ a chyba náhrady v mieste lomu $\Delta_i \neq 6\text{dB}$, potom ide o čiastkový prenos $\left(1+2b_iT_is+T_i^2s^2\right)$, hodnotu koeficientu tlmenia zistíme z veľkosti chyby náhrady $\Delta_i = 6-20\log\frac{1}{b_i}$.
5. Rád astatizmu r určíme zo sklonu asymptoty v oblasti najnižších frekvencií $-r.20\text{dB}/\text{dek}$.
6. Porovnáme fázovú logaritmickú frekvenčnú charakteristiku výsledného frekvenčného prenosu $F(j\omega)$ s nameranou frekvenčnou charakteristikou skutočného systému $S(j\omega)$. Ak sa priebehy zhodujú, $S(s)=F(s)$.
7. Ku zhode fázových charakteristík nedôjde pri sústavách s neminimálnou fázou, kedy pravdepodobne pôjde o:
   - sústavu s dopravným oneskorením $S(s)=F(s)e^{-Ds}$, ak rozdiel fázových charakteristík má exponenciálny priebeh: $\arg S(j\omega)-\arg F(j\omega) = -\omega D$,
   - sústavu s nestabilnou nulou ak, rozdiel medzi fázovými frekvenčnými charakteristikami sa ustáli na hodnote $-\beta\pi$; v tomto prípade $S(s)=F(s)\left(\frac{1-Ts}{1+Ts}\right)^{\beta}$, pričom cez hodnotu $-\beta.90^\circ$ prechádza pri frekvencii $\omega = \frac{1}{T}$.

5.4.3. Vrbanova metóda

$\Rightarrow$ **Výpočtová** metóda

Negatívum: je potrebné poznať (vopred odhadnúť) rád modelu

Prenos: $\dfrac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + s^n}$ $\quad m \le n$

Neznáme parametre: $\boxed{\textbf{?}\ b_0, \ldots, b_m,\ a_0, \ldots a_{n-1}}$

Predpoklad: **namerané body** frekvenčnej charakteristiky $\hat{F}(j\omega_k) = U(\omega_k) + jV(\omega_k)$ pre $k = 1, \ldots, N$, pričom $N \ge n + m + 1$
rády čitateľa a **menovateľa** sú **známe** (odhadnuté)

$\Rightarrow$ **Frekvenčný prenos** vyjadríme **v zložkovom tvare**:

$$F(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{u_1(\omega) + jv_1(\omega)}{u_2(\omega) + jv_2(\omega)} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{U(\omega) + jV(\omega)}_{\textbf{namerané}} - \underbrace{\frac{u_1(\omega) + jv_1(\omega)}{u_2(\omega) + jv_2(\omega)}}_{\textbf{model}} \to 0$$

kde

$$u_1(\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - b_6\omega^6 + \ldots$$
$$v_1(\omega) = \omega\left(b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 - b_7\omega^6 + \ldots\right)$$
$$u_2(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \ldots$$
$$v_2(\omega) = \omega\left(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - a_7\omega^6 + \ldots\right)$$

Po roznásobení zložkového tvaru frekvenčného prenosu dostaneme reálnu a imaginárnu časť

$$u_1(\omega) - u_2(\omega)U(\omega) + v_2(\omega)V(\omega) = 0$$
$$v_1(\omega) - u_2(\omega)V(\omega) - v_2(\omega)U(\omega) = 0$$

a ich rozdiel $\quad u_1(\omega) - v_1(\omega) - u_2(\omega)\left[U(\omega) - V(\omega)\right] + v_2(\omega)\left[U(\omega) + V(\omega)\right] = 0$

Po dosadení za u_1, u_2, v_1, v_2 dostaneme

$$\sum_{q=0}^{n-1} (-1)^{\mathrm{int}\left(\frac{q+1}{2}\right)} a_q x_q(\omega) - \sum_{q=0}^{m} (-1)^{\mathrm{int}\left(\frac{q+1}{2}\right)} b_q \omega^q = (-1)^{\mathrm{int}\left(\frac{n-1}{2}\right)} x_n(\omega)$$

čo musí byť splnené pre všetky ω_k,

Po prenásobení oboch strán rovnice (-1) dostaneme

$$\sum_{q=0}^{m} (-1)^{\mathrm{int}\left(\frac{q+1}{2}\right)} b_q \omega^q - \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^{\mathrm{int}\left(\frac{q+1}{2}\right)} a_q x_q(\omega) = -(-1)^{\mathrm{int}\left(\frac{n-1}{2}\right)} x_n(\omega)$$

$$b_0\omega^0 - b_1\omega - b_2\omega^2 + b_3\omega^3 + \ldots + (-1)^{\mathrm{int}\left(\frac{m+1}{2}\right)} b_m \omega^m -$$
$$- a_0 x_0(\omega) + a_1 x_1(\omega) + a_2 x_2(\omega) - a_3 x_3(\omega) - \ldots - (-1)^{\mathrm{int}\left(\frac{n-2}{2}\right)} a_{n-1} x_{n-1}(\omega) =$$
$$= -(-1)^{\mathrm{int}\left(\frac{n-1}{2}\right)} x_n(\omega)$$

Vyjadrené vo vektorovom tvare:

$$h(\omega)^T \hat{\theta} = y(\omega)$$

kde

$$y(\omega) = -(-1)^{\mathrm{int}\left(\frac{n-1}{2}\right)} x_n(\omega)$$

$$\begin{array}{l} \hat{\theta} = (b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots,\quad b_m,\quad a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots,\quad a_{n-1})^T \\ \quad\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\qquad\quad \downarrow\qquad \downarrow\qquad \downarrow\qquad \downarrow\qquad \downarrow\qquad\qquad \downarrow \\ h(\omega)^T = \left(1, -\omega, -\omega^2, \omega^3, \ldots, (-1)^{\mathrm{int}\frac{m+1}{2}} \omega^m, -x_0(\omega), x_1(\omega), x_2(\omega), -x_3(\omega), \ldots, (-1)^{\mathrm{int}\frac{n-2}{2}} x_{n-1}(\omega)\right) \end{array}$$

Premenné $x_q(\omega)$ sú funkciou nameraných údajov

$$x_q(\omega) = \omega^q \left\lfloor U(\omega) + (-1)^{q+1} V(\omega) \right\rfloor \qquad q = 0,\ldots,n$$

Po zapísaní do vektorového tvaru dostaneme preurčený systém rovníc $\boxed{\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{y}}$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}^T(\omega_1) \\ \mathbf{h}^T(\omega_2) \\ \vdots \\ \mathbf{h}^T(\omega_N) \end{pmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = (b_0, b_1, \ldots, b_m, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})^T$$

$$\mathbf{h}(\omega)^T = \left(1, -\omega, -\omega^2, \omega^3, \ldots, (-1)^{\mathrm{int}\frac{m+1}{2}} \omega^m, -x_0(\omega), x_1(\omega), x_2(\omega), -x_3(\omega), \ldots, (-1)^{\mathrm{int}\frac{n-2}{2}} x_{n-1}(\omega)\right)$$

$$\mathbf{y} = -\left((-1)^{\mathrm{int}\frac{n-1}{2}} x_n(\omega_1), \ldots, (-1)^{\mathrm{int}\frac{n-1}{2}} x_n(\omega_N)\right)^T$$

$$x_q(\omega) = \omega^q \left\lfloor U(\omega) + (-1)^{q+1} V(\omega) \right\rfloor \qquad q = 0,\ldots,n$$

☑ ***Postup***:

1. Z nameraných hodnôt $\hat{F}(j\omega_k) = U(\omega_k) + jV(\omega_k)$, $k = 1,\ldots,N$ vytvoríme maticu $\mathbf{H}$ a vektor $\mathbf{y}$.
2. Vypočítame odhad parametrov $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (Gaussovým vzťahom).

5.4.4. <u>Levyho metóda</u>

⇒ **Výpočtová** metóda

Negatíva: je potrebné poznať (vopred odhadnúť) rád modelu
nevhodné pre systémy s astatizmom

Prenos:

$$\frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \ldots + a_n s^n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Neznáme parametre: $\boxed{\textbf{?}\ b_0,\ldots, b_m, a_1,\ldots a_n}$

***Predpoklad*: namerané body** frekvenčnej charakteristiky

$$F_k = \hat{F}(j\omega_k) = U(\omega_k) + jV(\omega_k), \quad k = 1,\dots,N$$

rády čitateľa a **menovateľa** sú **známe** (odhadnuté)

$\Rightarrow$ Predpokladáme, že platí $\quad F_k = F(j\omega_k) = \dfrac{B(j\omega_k)}{A(j\omega_k)}$

Minimalizujeme sumu štvorcov odchýliek $\quad J = \sum_{k=1}^{N} e_k^* e_k$,

kde $\quad e_k = A(j\omega_k)F_k - B(j\omega_k)$ a * označuje transpozíciu komplexne združeného čísla.

Po zavedení vektorov $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m)^T$

$$H = \begin{pmatrix} -j\omega_1 F_1 & \dots & -(j\omega_1)^n F_1 & 1 & j\omega_1 & \dots & (j\omega_1)^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -j\omega_N F_N & \dots & -(j\omega_N)^n F_N & 1 & j\omega_N & \dots & (j\omega_N)^m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}$$

je odhad parametrov prenosu $\boxed{\hat{\theta} = [\mathrm{Re}(H^* H)]^{-1}\,\mathrm{Re}(H^* y)}$

<u>* označuje transpozíciu komplexne združeného čísla</u>

☑ ***Postup*:**

1. Z nameraných hodnôt F_k, $k = 1,\dots,N$ vytvoríme maticu **H** a vektor **y**.
2. Vypočítame odhad parametrov $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Príklady → priklady_frek_char.pdf + cvičenia