SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

RIEŠENIE PREURČENÉHO SYSTÉMU ROVNÍC METÓDOU NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV (REKURZÍVNE METÓDY)

ZADANIE

2023 **Bc. Maroš Kocúr**

Obsah

Úvod

Cieľom zadania je otestovať iteračná metódy odhadov parametrov, bez použitia inverzii matíc pre zjednodušenie výpočtov.

1 Úlohy

Predpokladajme sústavu rovníc v tvare:

$$(x_{w+1} - x_w)\theta_1 + (x_{w+2} - x_w)\theta_2 + ...x_{w+n+1} - x_w w = 0 \tag{1.1}$$

pre w=0,1,..., N-n-1, čo predstavuje m = N-n rovníc o n neznámych parametroch, pričom hodnoty x_i sú dané v nasledovnej tabuľke:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	2.7	6.8	9	9.2	8.6	8	7.8	7.8	7.9	8

Dostaneme teda preurčený systém rovníc v tvare

$$H\hat{\theta} - y = e \tag{1.2}$$

Minimálny počet potrebných vzoriek pre požadované n = 3 bude N = 7 , určený z podmienky

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & \cdots & x_n - x_0 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_{n+1} - x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-n} - x_{N-n-1} & x_{N-n+1} - x_{N-n-1} & \cdots & x_{N-1} - x_{N-n-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = -\begin{pmatrix} x_{n+1} - x_0 \\ x_{n+2} - x_1 \\ \vdots \\ x_N - x_{N-n-1} \end{pmatrix}$$

m = N - n > n (M rovníc, n neznámych).

- Riešte preurčený systém rovníc:
  - rekurzívnou metódou najmenších štvorcov (RMNŠ) a zabúdania, pričom uvažujte počiatočné podmienky:
    $P_0 = 10^{10}I \qquad \hat{\theta}_0^* = 0$
  - odmocninovou verziou RMNŠ bez zabúdania, pričom uvažujte počiatočné podmienky:
    $G_0 = 10^{10}I \qquad \hat{\theta}_0^* = 0$
  - algoritmom REFIL bez zabúdania, pričom uvažujte počiatočné podmienky:
    $G_0 = 10^{10}I \qquad \hat{\theta}_0^* = 0$
  - algoritmom LDFIL bez zabúdania, pričom uvažujte počiatočné podmienky:
    $L_0 = I \qquad D_0 = 10^{10}I \qquad \hat{\theta}_0^* = 0$
- Určite vektor parametrov $\hat{\theta}^*$ a hodnotu účelovej funkcie $Q(\hat{\theta}^*)$.

2 Riešenie

Zo zadania sme riešili metódy b) a c) s $x_i = x_i * 7.5$. Postupujeme výpočtom z prednášky pasivny_experimenta.pdf a priklad_rekurz_met.pdf Vytvorili sme si v programe Matlab funkcie na výpočet algoritmov RMNS.m REFIL.m a skripty na definovanie parametrov pre funkcie zad1a.m a zad1b.m, pomocov ktorých sme vypočítali parametre a overili správnosť výpočtov. Výpočty sme písomne spracovali v dokumente nižšie.
Vypočítali sme si maticu H a vektor Y pre riešenie oboch metód, ktoré vyzerajú nasledovne.

$$H = \begin{pmatrix} 20.25 & 51 & 67.5 \\ 30.75 & 47.25 & 48.75 \\ 16.5 & 18 & 13.5 \\ 1.5 & -3 & -7.5 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -69 \\ -44.25 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

3 Odmocninová rekurzívna metóda najmenších štvorcov bez zabúdania

Pred začatím výpočtu pomocou ORMNS sme si zadefinovali maticu G ako jednotkovú maticu vynásobenú 10^{10} a stĺpcový vektor = 0.

Následne sme m-krát zavolali funkciu ORMNS, ktorá nám vypočítala parametre θ_k^*, G_k,e_k a Q_k. Funkcia počítala pomocou vzorcov nižšie.

$$e_{N+1} = y_{N+1} - \mathbf{h}_{N+1}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* \qquad \mathbf{z}_{N+1} = \mathbf{G}_N \mathbf{h}_{N+1}$$

$$\rho_{N+1} = \left(1 + \mathbf{z}_{N+1}^T \mathbf{z}_{N+1}\right)^{-1} \qquad Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^*\right) = Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) + \rho_{N+1} e_{N+1}^2$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^* = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + \rho_{N+1} e_{N+1} \mathbf{G}_N^T \mathbf{z}_{N+1} \qquad \mathbf{G}_{N+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{\rho_{N+1}}{1 + \sqrt{\rho_{N+1}}} \mathbf{z}_{N+1} \mathbf{z}_{N+1}^T \right) \mathbf{G}_N$$

k	1	2
θ_k^*	$\begin{pmatrix} -0.1846 \\ -0.4650 \\ -0.6155 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4987 \\ -0.2360 \\ -0.9935 \end{pmatrix}$
G_k	$10^9 * \begin{pmatrix} 9.4581 & -1.3648 & -1.8063 \\ -1.3648 & 6.5628 & -4.5492 \\ -1.8063 & -4.6592 & 3.9790 \end{pmatrix}$	$10^9 * \begin{pmatrix} 2.4082 & -3.7279 & 2.0942 \\ -3.7279 & 5.7707 & -3.2418 \\ 2.0942 & -3.2418 & 1.8211 \end{pmatrix}$
e_k	-69	13.4047
Q_k	$6.2915 * 10^{-21}$	$1.2915 * 10^{-20}$

k	3	4
θ_k^*	$\begin{pmatrix} 1.6486 \\ -2.0160 \\ 0.0064 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8408 \\ -0.7439 \\ -0.7139 \end{pmatrix}$
G_k	$10^9 * \begin{pmatrix} -0.1561 & 0.3061 & -0.1810 \\ -2.0516 & 3.622 & -31.7650 \\ 2.7664 & -4.3808 & 2.4915 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0480 & -0.0153 & 0.0010 \\ -1.3805 & 2.1055 & -1.1667 \\ 1.3782 & -2.1947 & 1.2537 \end{pmatrix}$
e_k	0.4319	0.5272
Q_k	$6.7820 * 10^{-20}$	0.0808

4 Algoritmus REFIL bez zabúdania

Algoritmus REFIL navrhol Václav Pertek, aby sme vedeli dosiahnuť optimálny odhad parametrov bez potreby inverzie matice. Počiatočné parametre sme nastavili rovnako ako v predošlej metóde a algoritmus nám vypočítal veličiny θ_k^*, G_k a Q_k. Vo funkcii sme použili vzorce uvedené nižšie.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^* = -\frac{\mathbf{g}}{\gamma} \qquad Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k\right) = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{G}_k \mathbf{z}_{k+1}$$

$$s_0^2 = \lambda^2 \qquad s_q^2 = s_{q-1}^2 + f_q^2 \qquad q = 1, 2, \ldots, k$$

$${}^{k+1}g_{ij} = \frac{1}{\lambda}\frac{s_{i-1}}{s_i}\left({}^{k}g_{ij} - \frac{f_i}{s_{i-1}^2}\sum_{m=j}^{i-1} f_m \, {}^{k}g_{mj}\right)$$

k	1
θ_k^*	$\begin{pmatrix} -0.1846 \\ -0.4650 \\ -0.6155 \end{pmatrix}$
G_k	$\begin{pmatrix} 0.0494 & 0 & 0 & 0 \\ -9.2942 * 10^9 & 3.6903 * 10^9 & 0 & 0 \\ -2.8636 * 10^9 & -7.2118 * 10^9 & 6.3080 * 10^9 & 0 \\ 1.4466 * 10^9 & 3.6433 * 10^9 & 4.8220 * 10^9 & 7.8346 * 10^9 \end{pmatrix}$
Q_k	$1.6292 * 10^{-20}$

k	2
θ_k^*	$\begin{pmatrix} 0.4987 \\ -0.42360 \\ -0.9935 \end{pmatrix}$
G_k	$\begin{pmatrix} 0.0272 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1104 & 0.0602 & 0 & 0 \\ 4.9073 * 10^9 & -7.5965 * 10^9 & 4.2674 * 10^9 & 0 \\ -3.29944 * 10^9 & 1.5589 * 10^9 & 6.5633 * 10^9 & 6.6060 * 10^9 \end{pmatrix}$
Q_k	$2.2915 * 10^{-20}$

k	3
θ_k^*	$\begin{pmatrix} 1.6486 \\ -2.0160 \\ 0.0064 \end{pmatrix}$
G_k	$\begin{pmatrix} 0.0248 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0854 & 0.0499 & 0 & 0 \\ 3.4465 * 10 & -5.4113 & 3.0587 & 0 \\ -5.9096 * 10^9 & 7.2267 * 10^9 & -2.2906 * 10^9 & 3.5847 * 10^9 \end{pmatrix}$
Q_k	$7.7820 * 10^{-20}$

k	4
θ_k^*	$\begin{pmatrix} 0.8408 \\ -0.7439 \\ -0.7139 \end{pmatrix}$
G_k	$\begin{pmatrix} 0.0248 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0820 & 0.0481 & 0 & 0 \\ 1.9494 & -3.0410 & 1.7127 & 0 \\ -2.9583 & 2.6173 & 2.5118 & 3.5185 \end{pmatrix}$
Q_k	0.8088

Záver

Naučili sme sa pracovať s rekurzívnymi metódami odhadu parametrov. S oboma metódami sme získali rovnáke parametre odhadu, ktoré sme porovnáli s Gausovým vzťahom. S týmto porovnaním môžeme povedať, že obe metódy nás dostali ku nami žiadanému výsledku.