Regresná analýza

1. Odhad parametrov modelu statického systému

Máme nameranú nasledovnú závislosť – počet meraní N=8:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	2	4	6	7	8	9	10	12
y_i	8	7	5	4	5	3	2	3

Úlohou je vypočítať odhad parametrov nasledujúcich aproximácií:

a) Lineárna regresia: $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u$

b) Kvadratická regresia: $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u + \hat{\theta}_2 u^2$

c) Kubická regresia: $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u + \hat{\theta}_2 u^2 + \hat{\theta}_3 u^3$

Pre každý typ závislosti **vyčísliť súčet kvadrátov odchýlok** a na základe nich **určiť poradie vhodnosti náhrady** nameraných údajov.

a) **Lineárna regresia**

$$\hat{y}_i = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_i = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 f_1(u_i) = \left[\hat{\theta}_0 \ \hat{\theta}_1\right]\begin{bmatrix} 1 \\ f_1(u_i) \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T \mathbf{f}_1(\mathbf{u}_i) \quad \text{pre i=1,....,N}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\theta}_1 \end{pmatrix}} \qquad \mathbf{f_1}(u_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ f_1(u_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_i \end{bmatrix} \qquad k=1$$

Po dosadení u_i do rovnice pre lineárnu regresiu pre i=1,....,N dostaneme

$$\hat{y}_1 = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_1$$
$$\hat{y}_2 = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_2 \qquad \text{maticovo} \qquad \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}_1 \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \qquad \text{kde} \quad \boxed{\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 1 & u_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_N \end{pmatrix}}$$
$$\hat{y}_N = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_N$$

Maticu $\mathbf{H_1}$ dosadíme do Gaussovho vzťahu spolu s $\boxed{\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}$ a vypočítame optimálne $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^*$.

Sumu kvadrátov odchýlok vypočítame ako $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$, kde $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{H}_1 \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^*$

b) **Kvadratická regresia**

$$\hat{y}_i = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_i + \hat{\theta}_2 u_i^2 = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 f_1(u_i) + \hat{\theta}_2 f_2(u_i) = \left[\hat{\theta}_0 \ \hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2\right]\left[1 \quad f_1(u_i) \quad f_2(u_i)\right]^T = \hat{\boldsymbol{\theta}}_2^T \mathbf{f}_2(\mathbf{u}_i)$$

pre i=1,....,N

$$k=2 \qquad \mathbf{f_2}(u_i)=\begin{bmatrix} 1 \\ f_1(u_i) \\ f_2(u_i) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ u_i \\ u_i^2 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}_2=\begin{pmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\mathbf{H}_2=\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_N & u_N^2 \end{pmatrix}}$$

c) **Kubická regresia**

$$\hat{y}_i=\hat{\theta}_0+\hat{\theta}_1 u_i+\hat{\theta}_2 u_i^2+\hat{\theta}_3 u_i^3=\hat{\theta}_0+\hat{\theta}_1 f_1(u_i)+\hat{\theta}_2 f_2(u_i)+\hat{\theta}_3 f_3(u_i) \qquad \text{pre } i=1,....,N$$

$$k=3 \qquad \mathbf{f_3}(u_i)=\begin{bmatrix}1 & f_1(u_i) & f_2(u_i) & f_3(u_i)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & u_i & u_i^2 & u_i^3\end{bmatrix}^T \quad \boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}_3=\begin{pmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{pmatrix}}$$

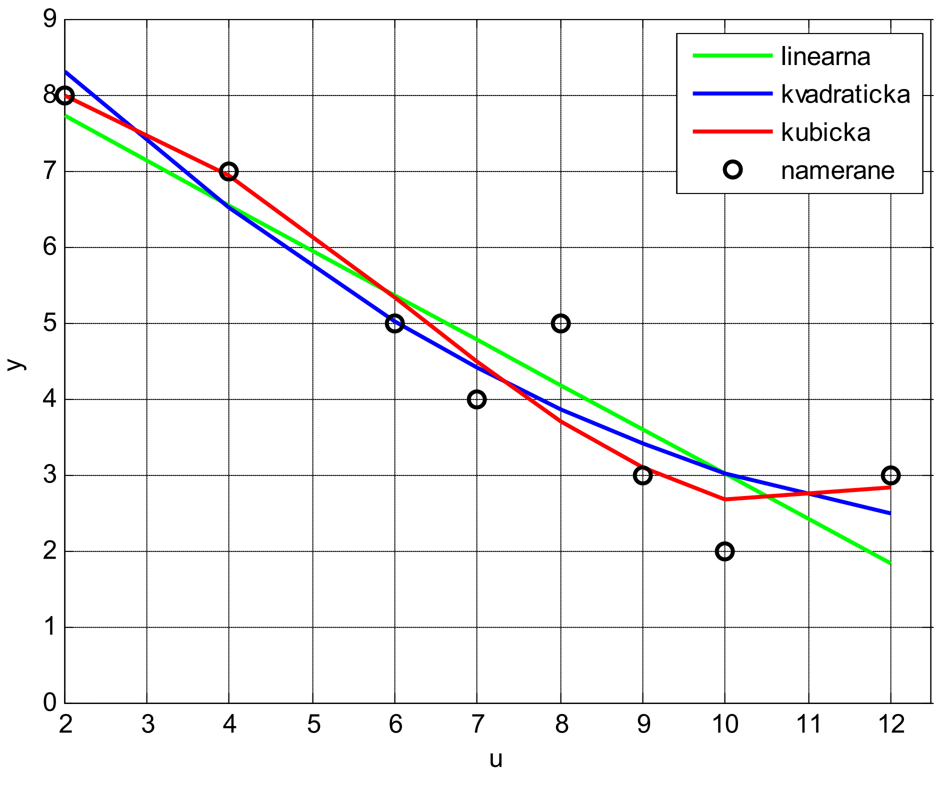
$$\boxed{\mathbf{H}_3=\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_N & u_N^2 & u_N^3 \end{pmatrix}}$$

Výsledky:

Lineárna:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1=\begin{bmatrix} 8{,}8912 \\ -0{,}5884 \end{bmatrix}$$

$Q_1=4{,}4252$



Kvadratická:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2=\begin{bmatrix} 10{,}4299 \\ -1{,}1392 \\ 0{,}0397 \end{bmatrix}$$

$Q_2=3{,}2498$

Kubická:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_3=\begin{bmatrix} 7{,}8484 \\ 0{,}4542 \\ -0{,}2191 \\ 0{,}0122 \end{bmatrix}$$

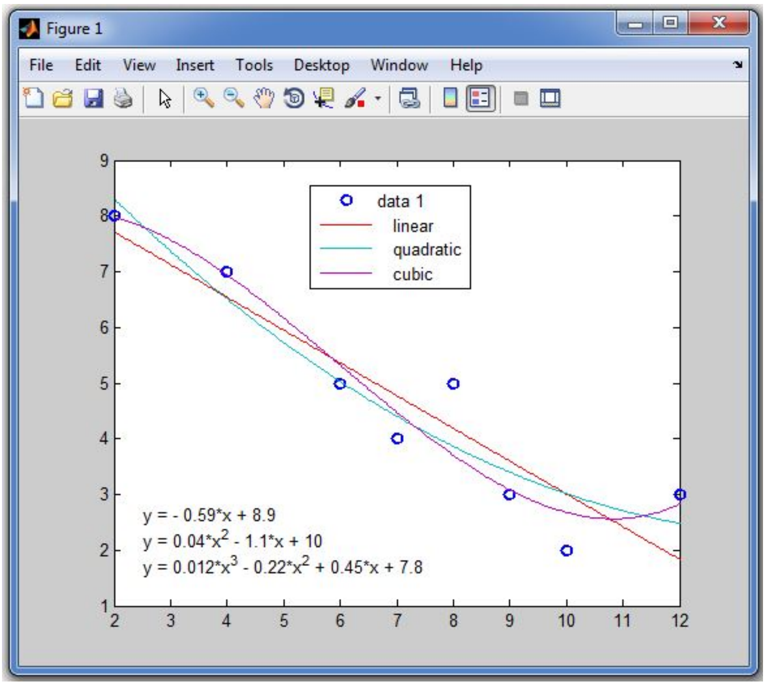
$Q_3=2{,}5074$

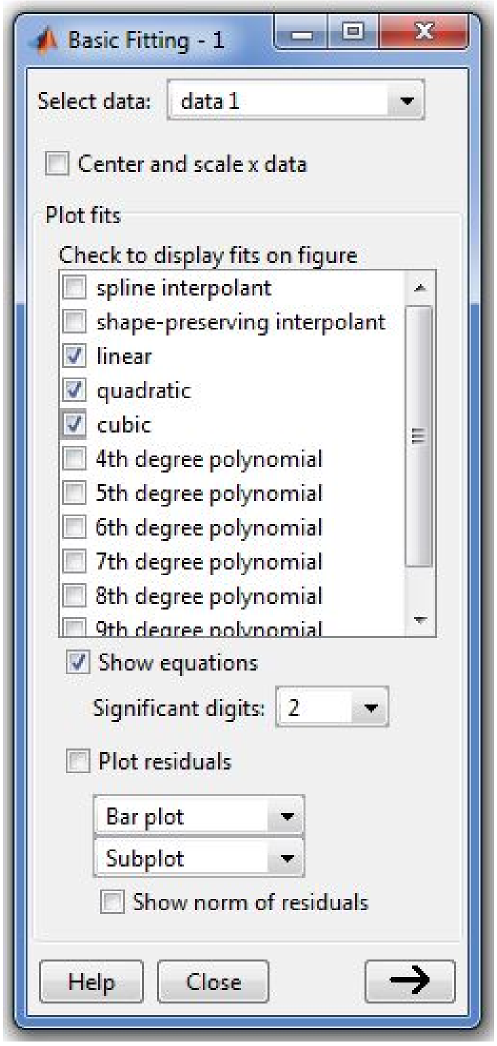
MATLAB

Basic Fitting GUI

⇒ najskôr je potrebné vykresliť údaje príkazom *plot*

v okne obrázku *Tools – Basic Fitting*





Príkazy *polyfit* a *polyval*

```
[p1]=polyfit(u,y,1);
[p2]=polyfit(u,y,2);
[p3]=polyfit(u,y,3);
y1=polyval(p1,u);
y2=polyval(p2,u);
y3=polyval(p3,u);
```

P = POLYFIT(X,Y,N) finds the coefficients of a polynomial P(X) of degree N that fits the data Y best in a least-squares sense. P is a row vector of length N+1 containing the polynomial coefficients in descending powers, P(1)*X^N + P(2)*X^(N-1) +...+ P(N)*X + P(N+1).

Y = POLYVAL(P,X) returns the value of a polynomial P evaluated at X. P is a vector of length N+1 whose elements are the coefficients of the polynomial in descending powers.
Y = P(1)*X^N + P(2)*X^(N-1) + ... + P(N)*X + P(N+1)

```
p1 =
  -0.5884    8.8912

p2 =
   0.0397   -1.1392   10.4299

p3 =
   0.0122   -0.2191    0.4542    7.8484
```

Curve Fitting Toolbox

Umožňuje **spracovanie údajov** (vyhladenie, odstránenie niektorých vzoriek), **aproximáciu funkciou** a **porovnanie výsledkov** graficky aj numericky

Možnosti použitia:

- **príkazy** – napr. ***fit***

  lin=fit(u,y,'poly1')

  kvad=fit(u,y,'poly2')

  y1=lin(u);

  y2=kvad(u);

```
FO = FIT(X, Y, FT) creates a fit object, FO, that
encapsulates the result of fitting the model specified by
the fittype FT to the data X, Y. FT is a string or a
FITTYPE specifying the model to fit.

FITTYPE        DESCRIPTION
   'poly1'       Linear polynomial curve
   'poly11'      Linear polynomial surface
   'poly2'       Quadratic polynomial curve
```

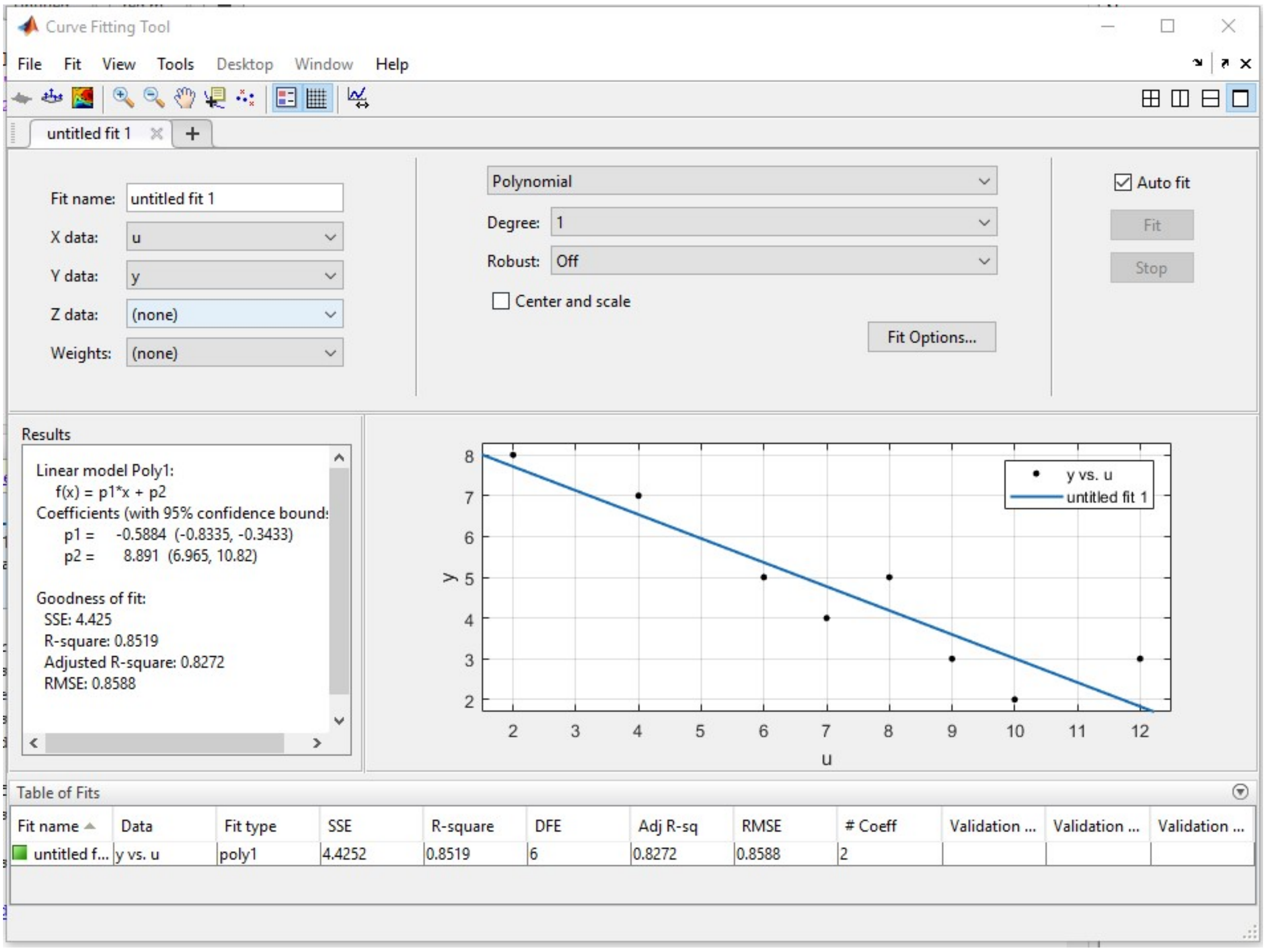
```
lin =

     Linear model Poly1:
     lin(x) = p1*x + p2
     Coefficients (with 95% confidence bounds):
       p1 =     -0.5884  (-0.8335, -0.3433)
       p2 =       8.891  (6.965, 10.82)
```

```
kvad =

     Linear model Poly2:
     kvad(x) = p1*x^2 + p2*x + p3
     Coefficients (with 95% confidence bounds):
       p1 =     0.03975  (-0.03623, 0.1157)
       p2 =      -1.139  (-2.219, -0.05897)
       p3 =       10.43  (6.928, 13.93)
```

- **GUI** (spúšťa sa príkazom *cftool*)



2. Využitie v prípade modelov dynamických systémov – odhad parametrov diskrétnej prenosovej funkcie metódou najmenších štvorcov

Predpokladajme, že neznámy systém je opísaný diskrétnou prenosovou funkciou 1. rádu

$$F(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

čo zodpovedá diferenčnej rovnici (v reálnom prostredí treba uvažovať v tejto rovnici náhodnú zložku v(k))

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) + v(k)$$

Hodnoty skutočných (neznámych) parametrov sú $b_1 = 2$, $a_1 = -0.3$

Zvolíme model rovnako v tvare diskrétnej prenosovej funkcie 1. rádu, ktorá v časovej oblasti zodpovedá diferenčnej rovnici:

$$\hat{y}(k) = -\hat{a}_1 y(k-1) + \hat{b}_1 u(k-1)$$

Táto diferenčná rovnica má tvar lineárnej regresnej rovnice bez absolútneho člena:

$$\hat{y}(k) = -\hat{\theta}_1 y(k-1) + \hat{\theta}_2 u(k-1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{T}} \mathbf{f}(k) \qquad \text{kde } \hat{\theta}_1 = \hat{a}_1 \quad \hat{\theta}_2 = \hat{b}_1$$

Zavedieme označenie: $y_k = y(k)$ $\quad u_k = u(k)$

Potom $\hat{y}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{T}} \mathbf{h_k}$

kde $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{b}_1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}} = \mathbf{f}^{\mathbf{T}}(k) = (-y(k-1), u(k-1))^T$$

Nameriame zašumenú odozvu výstupu systému na jednotkový skok v trvaní 10 s s periódou vzorkovania 1s

$$\{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{10}\}^T = \{1, 1, 1, \ldots, 1\}^T$$

$$\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{10}\}^T = \{\ 0.0732,\ 1.9734,\ 2.5706,\ 2.9929,\ 2.8777,\ 2.8799,\ 3.0932,\ 2.7358,\ 2.9614,\ 2.9823,\ 2.8206\ \}$$

potom môžeme vytvoriť **preurčený systém rovníc**

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 - \hat{y}_1 = y_1 - \left(-\hat{\theta}_1 y_0 + \hat{\theta}_2 u_0\right) \\ e_2 &= y_2 - \hat{y}_2 = y_2 - \left(-\hat{\theta}_1 y_1 + \hat{\theta}_2 u_1\right) \\ &\vdots \\ e_{10} &= y_{10} - \hat{y}_{10} = y_{10} - \left(-\hat{\theta}_1 y_9 + \hat{\theta}_2 u_9\right) \end{aligned}$$

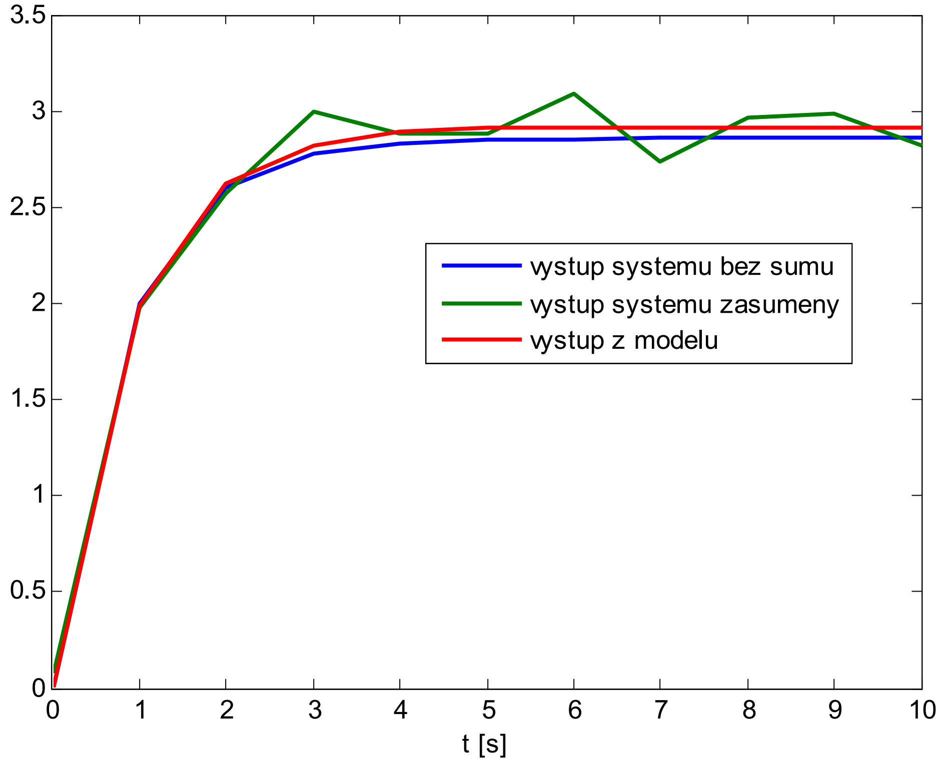
Vytvoríme vektor **y** a maticu **H**

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{10}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 & u_0 \\ -y_1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ -y_9 & u_9 \end{pmatrix} = \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{10} \end{pmatrix}$$

a vypočítame odhad neznámych parametrov

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{y} = [-0.3199, 1.9846]^T = [a_1, b_1]^T$$

Grafické porovnanie prechodových charakteristík skutočného systému a modelu:



Výsledok výpočtu odhadu parametrov pomocou funkcie arx:

Discrete-time IDPOLY model: A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)
A(q) = 1 - 0.3199 q^-1

B(q) = 1.985 q^-1

Estimated using ARX from data set dat
Loss function 0.0146631 and FPE 0.0199952
Sampling interval: 1