Riadenie nelineárnych systémov

Úvod do problematiky nelineárnych systémov

doc.Ing. Ján Kardoš, PhD.
ÚRK, D-410

Nelineárne systémy

- **Prednášajúci, cvičiaci:**
  doc. Ing. Ján Kardoš, PhD. – 1. polovica semestra
  Ing. Martin Ernek, PhD. – 2. polovica semestra
- **Hodnotenie:** **20+20** bodov počas semestra (cvičenia),
  30+30 bodov písomná skúška (t.j. 2 časti)
- **Podmienka absolvovania písomnej skúšky:**
  dosiahnuť v každej časti písomnej skúšky minimálne 15 bodov
- **Okruhy tém:**
  1. Úvod do problematiky, základné typy nelinearít, metóda stavového priestoru
  2. Metóda ekvivalentných prenosov (metóda harmonickej rovnováhy)
  3. Všeobecná teória stability nelineárnych systémov (Ljapunov), stabilita v malom, globálna stabilita
  4. Spätnoväzbová linearizácia

Doplnková literatúra k prednáškam

- H. K. Khalil: Nonlinear Systems, Prentice Hall, 1996, 2002.
- A. Isidori: Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, 1995.
- S. Sastry: Nonlinear Systems, Springer-Verlag, 1999.
- J. Balátě: Automatické řízení, BEN, 2004.
- S. Kubík a kol.: Teorie automatického řízení I - Lineární a nelineární systémy, SNTL, 1982

Základné pojmy a kategórie nelinearít

- Reálne dynamické systémy sú vo všeobecnosti nelineárne
- Stačí, že sa v regulačnom obvode vyskytuje jedna nelinearita, a regulačný obvod je nelineárny
- **Statické nelinearity** – nelineárne prevodové charakteristiky (jednoznačné nelinearity – bez pamäte, nejednoznačné nelinearity – **hysteréza** – s pamäťou)
- **Dynamické nelinearity** – nelineárne diferenciálne rovnice (konzervatívne – bez tlmenia, t.j. s konštantnou celkovou energiou)
  (nekonzervatívne – s tlmením, t.j. s rozptylom energie – napr. úbytok energie trením)
- **Parazitné nelinearity** (vôľa v zuboch, necitlivosť, ...)
- **Zámerné nelinearity** (reléové riadenie, t-optim. riadenie)

Základné pojmy a vlastnosti nelinearít

- **Neplatí princíp superpozície** $f(u_1) + f(u_2) \neq f(u_1 + u_2)$

  (nemožno použiť Laplaceovu transformáciu)

- **Neplatí princíp komutativity**

$$\xrightarrow{y_1} \boxed{\text{LinDyn}} \xrightarrow{y_{21}} \boxed{\text{NelinStat}} \xrightarrow{y_{31}} \qquad \xrightarrow{y_1} \boxed{\text{NelinStat}} \xrightarrow{y_{22}} \boxed{\text{LinDyn}} \xrightarrow{y_{32}}$$

$$y_{32} \neq y_{31}$$

- Prechodová charakteristika závisí od **začiatočných podmienok** a od **veľkosti** skoku vstupnej veličiny

5

Základné pojmy a stabilita

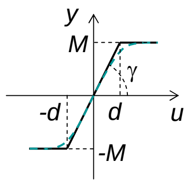
- **Stabilita** systému závisí nielen na jeho parametroch a štruktúre ale aj na **začiatočných podmienkach** a na priebehu vstupného (budiaceho) signálu.
- **Ustálené stavy**: **rovnovážne** a **periodické**
- **Rovnovážne stavy**: (singulárne body)
  - **nulové** derivácie signálov
  - jeden alebo viac bodov
  - stabilné a/alebo nestabilné (overenie stability)
- **Periodické stavy**: (medzné/limitné cykly)
  - **nenulové** derivácie signálov
  - trvalé oscilácie (autooscilácie)
  - jeden alebo viac cyklov
  - stabilné a/alebo nestabilné
- Typy oscilácií: vynútené, samobudené; subharmonické, ultraharmonické, kváziperiodické, **rezonančné** (vlastné kmity systému), relaxačné, parametrické

6

Niektoré typy **statických nelinearít** (symetrické prevodové charakteristiky)

Vo všeobecnosti môžu byť tieto typy nelinearít aj **nesymetrické**.

- Charakteristika **nasýtenia** (saturation)



$$y = Ku \qquad pre \quad |u| \le d$$

$$y = M\,\mathrm{sgn}(u) \qquad pre \quad |u| > d$$

pásmo lineárnosti

$$K = \tan(\gamma) = \frac{M}{d}$$

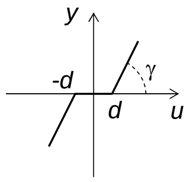
zosilnenie

obmedzenie výstupu – zosilňovače, prevodníky, mechanické systémy

7

Niektoré typy **statických nelinearít** (symetrické prevodové charakteristiky)

- **Pásmo necitlivosti** (dead-zone, threshold)



$$y = 0 \qquad pre \quad |u| \le d$$

$$y = Ku - Kd\,\mathrm{sgn}(u) \qquad pre \quad |u| > d$$

$$K = \tan(\gamma)$$

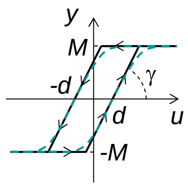
necitlivosť pri rozbehu – mechanické systémy (hydraulické, pneumatické, elektromechanické - napr. vplyv suchého trenia v momentovej spätnej väzbe servopohonov)

zámerné použitie – **potlačenie oscilácií**

8

Niektoré typy **statických nelinearít** (symetrické prevodové charakteristiky)

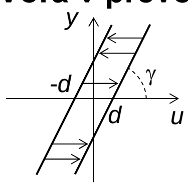
- **Hysteréza** (hysteresis)



hysteréza **s nasýtením**

napr. magnetizačná krivka feromagnetických materiálov

- **Vôľa v prevodoch** (backlash)



hysteréza **bez nasýtenia**

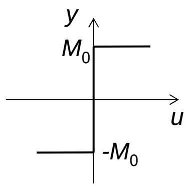
mechanické systémy (mŕtvy chod prevodoviek, pákové prevody)

Nejednoznačné charakteristiky (nelinearity s pamäťou)

9

Niektoré typy **statických nelinearít** (symetrické prevodové charakteristiky)

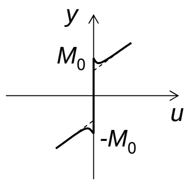
- **Suché trenie** (Coulomb friction)



mechanické systémy

$y = M_0 \operatorname{sgn}(u)$

- **Suché a viskózne trenie** (Coulomb & viscous friction)

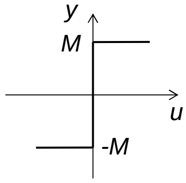


mechanické systémy

10

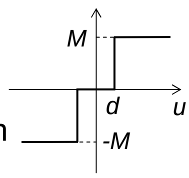
Niektoré typy **statických nelinearít** (symetrické prevodové charakteristiky)

- **Reléové** (relay) charakteristiky (nespojité!) – elektronické spínacie prvky v elektromechanických systémoch

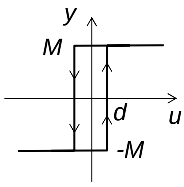


Ideálne relé

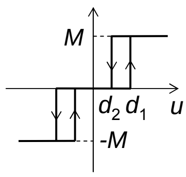
$$y = M\,\mathrm{sgn}(u)$$



Relé s pásmom necitlivosti



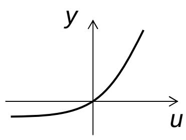
Relé s hysterézou



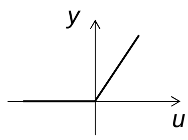
Relé s hysterézou a pásmom necitlivosti

Niektoré typy **statických nelinearít** (nesymetrické prevodové charakteristiky)

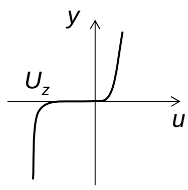
- Nesymetrické nelinearity



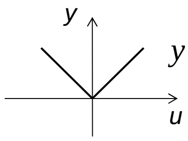
VA charakteristika polovodičového prvku



Ideálny usmerňovač

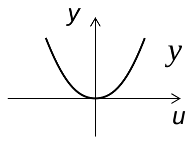


Zenerova dióda



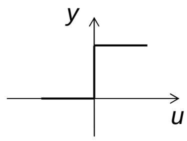
$y = |u|$

Absolútna hodnota



$y = u^2$

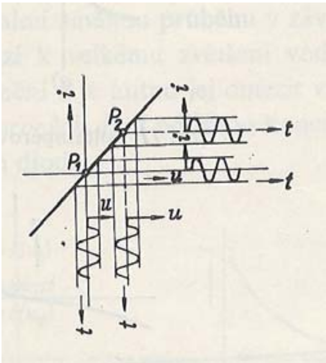
Kvadratická funkcia



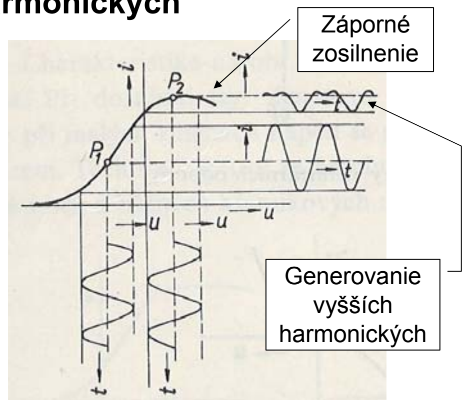
Nesymetrické relé

Nelineárne prevodové charakteristiky

- Rôzne **zosilnenie** v rôznych pracovných bodoch $\left.\frac{df(u)}{du}\right|_{P_i}$
- Generovanie **vyšších harmonických**



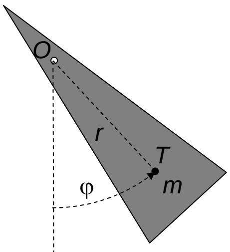
Lineárna prevodová charakteristika



Nelineárna prevodová charakteristika

Nelineárne dynamické systémy

- Fyzikálne kyvadlo $a_2 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\varphi(t)}{dt} + a_0 \sin(\varphi(t)) = 0$ nebudené



$a_2 = mr^2$ moment zotrvačnosti

$a_1 = B$ koef. viskózneho trenia

$a_0 = mgr$ amplitúda momentu gravitačných síl

Rovnovážny stav $\frac{d^i\varphi}{dt^i} = 0 \quad i = 1,2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 \sin(\varphi(t)) = 0$

$$\sin(\varphi(t)) = 0$$

stabilný $\varphi = 0$

nestabilný $\varphi = \pi$

Nelineárne dynamické systémy

- Fyzikálne kyvadlo $$a_2 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\varphi(t)}{dt} + a_0 \sin(\varphi(t)) = \tau$$ budené

v závese nech pôsobí na kyvadlo hnací moment τ!

Ustálený stav $\frac{d^i\varphi}{dt^i} = 0 \quad i = 1,2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 \sin(\varphi(t)) = \tau$

$$\sin(\varphi(t)) = \frac{\tau}{a_0}$$

Prevodová charakteristika $\varphi = f(\tau)$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\tau}{a_0}\right)$$

15

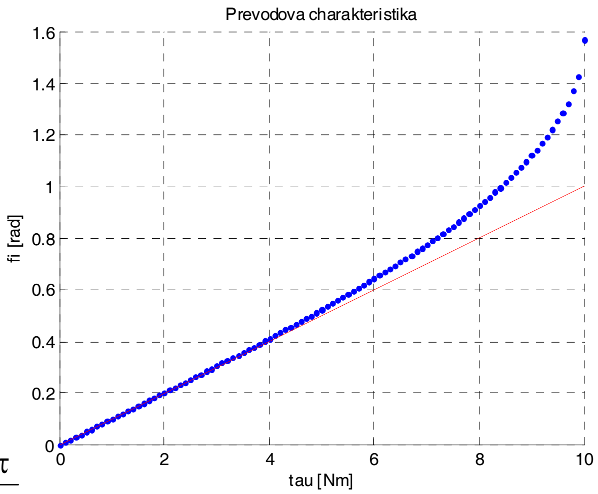
Nelineárne dynamické systémy

- Prevodová charakteristika fyzikálneho kyvadla

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\tau}{a_0}\right)$$

- **Linearizovaná** prevodová charakteristika v bode (0,0)

$$\varphi_{lin} = \left.\frac{d\varphi}{d\tau}\right|_{\tau=0} .\tau \quad = \frac{\tau}{a_0}$$

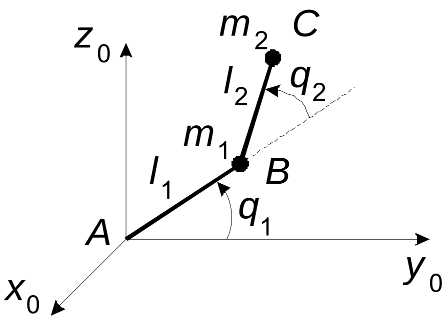


$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ m = 1kg, r = 1m, g = 10ms^{-2}

16

Nelineárne dynamické systémy

- Dynamický model robota



17

Nelineárne dynamické systémy

- Lagrangeove rovnice druhého druhu $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$
  i – číslo kĺbu (stupňa voľnosti, DOF)
- Lagrangeova funkcia $L = E_k - E_p$
- **Celková** kinetická energia robota E_k
- **Celková** potenciálna energia robota E_p
- Zovšeobecnené súradnice q_i
- Zovšeobecnené sily $Q_i = \tau_i - B_i \dot{q}_i$
  - Hnacie momenty/sily τ_i
  - Trecie sily $B_i \dot{q}_i$

18

Nelineárne dynamické systémy

- Nelineárne diferenciálne rovnice 1. a 2. kĺbu robota

$$j_{11}(\mathbf{q})\ddot{q}_1 + j_{12}(\mathbf{q})\ddot{q}_2 + B_1\dot{q}_1 + c_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + g_1(\mathbf{q}) = \tau_1$$

$$j_{21}(\mathbf{q})\ddot{q}_1 + j_{22}(\mathbf{q})\ddot{q}_2 + B_2\dot{q}_2 + c_2(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + g_2(\mathbf{q}) = \tau_2$$

$$j_{11}(\mathbf{q}),\, j_{12}(\mathbf{q}),\, j_{21}(\mathbf{q}) = f\left(\cos(q_2)\right)$$

$$c_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}), c_2(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = f\left(\sin(q_2), \dot{q}_1^2, \dot{q}_1\dot{q}_2, \dot{q}_2^2\right)$$

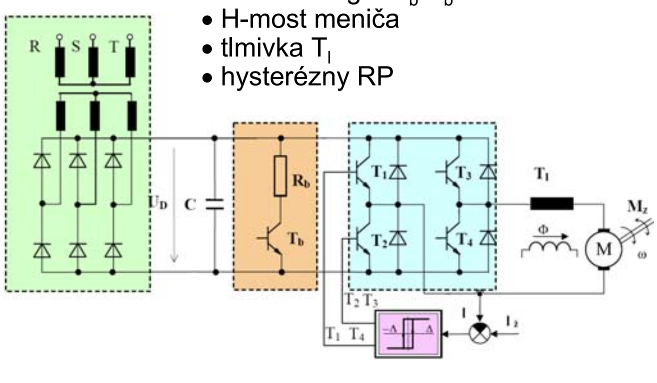
$$g_1(\mathbf{q}), g_2(\mathbf{q}) = f\left(\cos(q_1 + q_2)\right)$$

19

Reléové riadenie prúdu kotvy JM (ukážka použitia **zámernej nelinearity**)

- Regulačný obvod prúdu s **hysteréznym** regulátorom prúdu kotvy v sústave reverzačný **tranzistorový menič** – jednosmerný motor

Principiálna schéma:
- šesťimpulzný neriadený usmerňovač
- vyhladzovací napäťový kondenzátor C
- marič energie R_b-T_b
- H-most meniča
- tlmivka T_l
- hysterézny RP

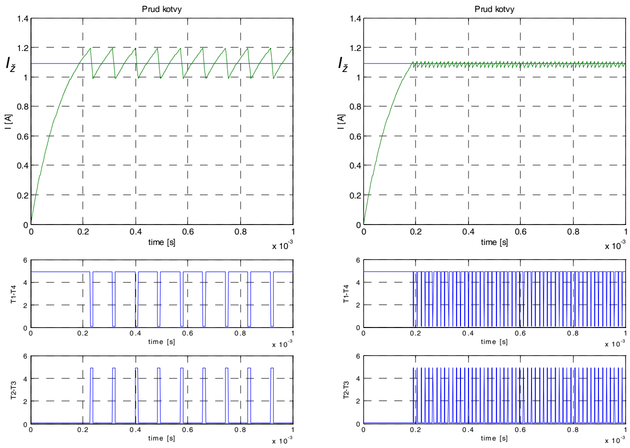


20

Reléové riadenie prúdu kotvy JM (ukážka použitia **zámernej nelinearity**)

- **Kvalitu** riadenia určuje **šírka** Δ hysteréznej charakteristiky, ktorou sa nastavuje maximálny rozkmit prúdu ΔI_{max} a frekvencia kmitov prúdu.

$$\Delta_1 = 0.1$$



$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1}{10}$$

21

Základné pojmy pri riešení NS

- Analýza nelineárnych systémov – **metóda stavového/ fázového priestoru** (pre systémy 2. rádu metóda stavovej/fázovej roviny), **metóda harmonickej rovnováhy**
- Analýza stability nelineárnych systémov so spojitými nelinearitami – **všeobecná teória stability** (1. metóda Ljapunova – stabilita v malom, 2. metóda Ljapunova – globálna stabilita)
- Syntéza nelineárnych regulačných obvodov – metóda stavovej/fázovej roviny, všeobecná teória stability, spätnoväzbová linearizácia, metóda harmonickej rovnováhy (metóda ekvivalentných prenosov)

22

Analýza nelineárnych systémov

- **Metóda stavovej/fázovej roviny – pre systémy 2.rádu** (metóda stavového/fázového priestoru – pre systémy vyšších rádov – náročné na predstavivosť)
- Metóda ekvivalentných prenosov – systémy vyšších rádov (dobré filtračné vlastnosti) s typickými nelinearitami
- **Vnútorný model systému** – stavový resp. fázový model
- **Stavový vektor** (x_1, x_2), **fázový vektor** $(y, \dot{y})$, resp. $(e, \dot{e})$
- **Stavová/fázová trajektória** - trajektória, ktorú opisuje koncový bod stavového/fázového vektora (tzv. **zastupujúci bod**) v stavovej/fázovej rovine v čase (analytické riešenie, grafické riešenie, simulácie).
- **Stavový/fázový portrét** - sieť stavových/fázových trajektórií, ktoré vychádzajú z rôznych začiatočných podmienok.

23

Získanie stavového modelu systému

- Prenosová funkcia **lineárneho systému**

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n} = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad m < n$$

- Stavový model **lineárneho systému**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t)$$

vstupný signál

stavový vektor

výstupný signál

normálna forma riaditeľnosti

matica systému

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} = R^{n \times n} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R^{n \times 1}$$

vstupný vektor systému

$$\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = R^{1 \times n} \qquad d = 0 = R^{1 \times 1}$$

výstupný vektor systému

OPAKOVANIE pre lineárny systém

24

Získanie stavového modelu systému

- Stavový model **nelineárneho systému**

výstupný signál

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(t) + u(t))$$
$$y(t) = Y(\mathbf{x}(t) + u(t))$$

vstupný signál

stavový vektor

- Nelin. dif. rovnica $Y\left[y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right] = U\left[u(t), \dot{u}(t), \ldots, u^{(m)}(t)\right] \quad m < n$

Fyzikálny opis nelin. systému

$\mathbf{X}(.), Y(.), U(.)$ – nelineárne funkcie

- Stavový vektor (fázový vektor) $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t),)^T$

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n(t) = y^{(n-1)}(t) = \dot{x}_{n-1}(t)$$

Stavový model

$$\dot{x}_1(t) = X_1[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u(t)]$$
$$\dot{x}_2(t) = X_2[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u(t)]$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = X_n[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u(t)]$$
$$y(t) = x_1(t)$$

25

Analýza nelineárnych systémov

Nelineárny autonómny systém 2. rádu

- Nelineárna diferenciálna rovnica $\ddot{y}(t) + g[\dot{y}(t)] + f[y(t)] = 0$

$g(.), f(.)$ – nelineárne funkcie

- Stavový vektor (fázový vektor) $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in R^{2\times 1}$

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$$

Stavový model

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -g[x_2(t)] - f[x_1(t)]$$

Výstupná rovnica $y(t) = x_1(t)$

26

Ustálené stavy nelineárnych systémov

- **Rovnovážne stavy** $\frac{dx_i}{dt} = 0 \quad i = 1{,}2 \Longrightarrow (x_1, x_2)_j$
  (j – počet riešení)
- **Autooscilácie** (**medzné cykly**) – Bendixsonovo kritérium existencie limitných cyklov – postačujúca podmienka (len pre stabilné systémy 2.rádu)

Trajektória systému

Nelin. systém $\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2) \end{aligned} \Longrightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)} \Longrightarrow \boxed{X_2 dx_1 - X_1 dx_2 = 0}$

medzný cyklus existuje ak $\oint (X_2 dx_1 - X_1 dx_2) = 0$

$$\oint (X_2 dx_1 - X_1 dx_2) = \iint_R \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0 \Longrightarrow$$ integrand $\boxed{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}}$

Stokesova veta

mení znamienko alebo je nulový

Analýza nelineárnych systémov

(pokračovanie)

- Stavový model $\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -g[x_2] - f[x_1] \end{aligned}$
- **Izoklína** – geometrické miesto (GM) rovnakých smerníc stavových trajektórií vychádzajúcich z rôznych počiatočných podmienok.
- Rovnica (všetkých) izoklín $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g[x_2] + f[x_1]}{x_2}$
- Riešenie rovnice izoklín – **stavová trajektória systému**
- Izoklína pre smernicu k_i – GM konštantných smerníc k_i

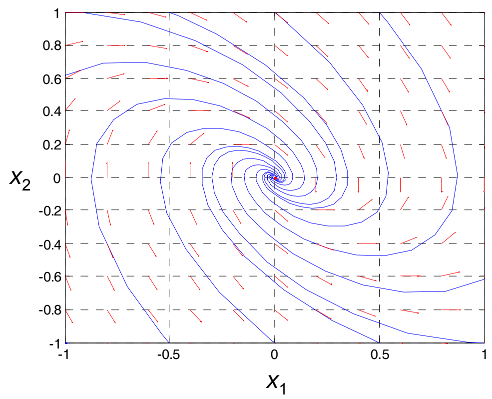
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g[x_2] + f[x_1]}{x_2} = k_i \Longrightarrow x_2 = f_i(x_1, k_i)$$

- Mapovanie fázového portrétu smernicami trajektórií v bodoch (x_1, x_2) (Matlab)

φ = atan2(**dx$_2$/dx$_1$**);
x1v = r.cos(φ);
x2v = r.sin(φ);
quiver(x1,x2,x1v,x2v);

Rovnica izoklín

Smernice trajektórií vo fázovom portréte – ukážka



Analýza nelineárnych systémov

- Charakteristické črty stavového/fázového portrétu

Nelineárny (autonómny) systém

$\ddot{x} + 0{,}6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$

Rovnovážne stavy ($\ddot{x} = \dot{x} = 0$)

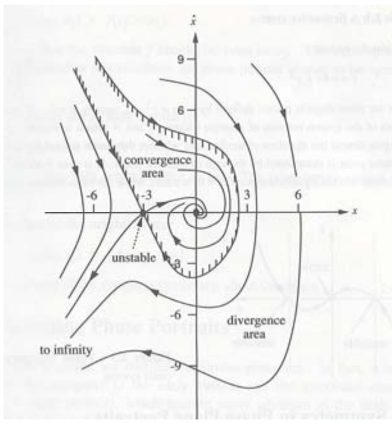
$$3x + x^2 = 0$$

riešenie: $x = 0, \quad x = -3$

Body vo fázovej rovine $(x, \dot{x})$

$$(x, \dot{x}) = (0{,}0)$$

$$(x, \dot{x}) = (-3{,}0)$$



Typy rovnovážnych stavov (príklad fázového portrétu)

- Lineárny (linearizovaný) dynamický systém (autonómny)

$$\ddot{y}(t) - b\dot{y}(t) - ay(t) = 0 \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = ax_1 + bx_2$$

- Rovnovážny stav

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 = 0$$
$$\frac{dx_2}{dt} = ax_1 + bx_2 = 0$$

$$(x_1, x_2) = (0,0)$$

- Charakteristická rovnica

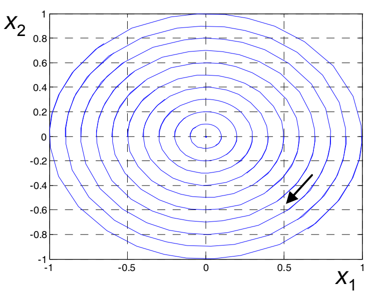
$$s^2 - bs - a = 0$$

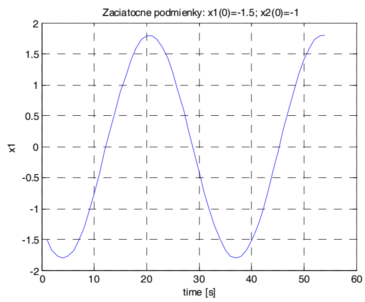
$$s_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + a}$$

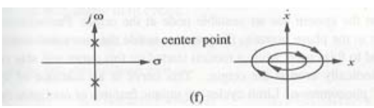
31

Typy rovnovážnych stavov

- a = -1, b = 0, rovnovážny stav (0,0) je tzv. **stred**
- Korene charakteristickej rovnice: $s_{1,2} = \pm i$





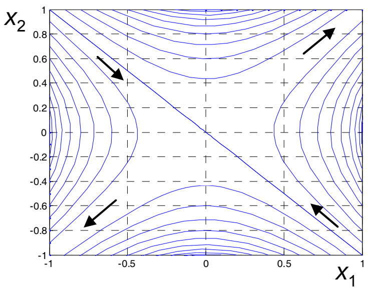


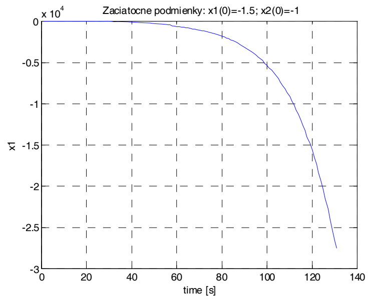
netlmený kmitavý priebeh
(autooscilácie s konštantnou amplitúdou)

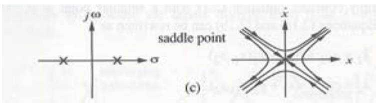
32

Typy rovnovážnych stavov

- a = 1, b = 0, rovnovážny stav (0,0) je tzv. **sedlo**
- Korene charakteristickej rovnice: $s_1 = -1$; $s_2 = 1$





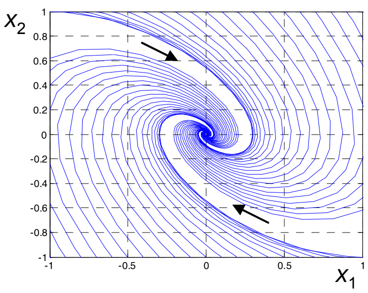


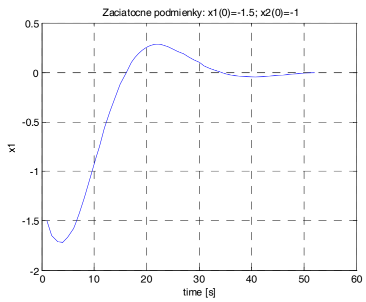
aperiodický netlmený priebeh
(nestabilný)

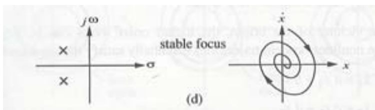
33

Typy rovnovážnych stavov

- a = -1, b = -1, **stabilné ohnisko**
- Korene charakteristickej rovnice: $s_{1,2} = -0.5 \pm 0.866i$





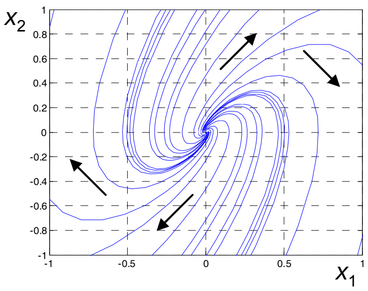


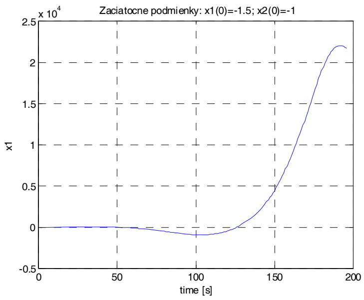
tlmený kmitavý priebeh
(stabilný)

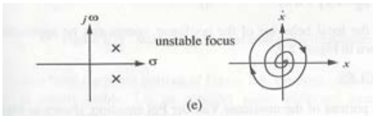
34

Typy rovnovážnych stavov

- a = -2, b = 2, **nestabilné ohnisko**
- Korene charakteristickej rovnice: $s_{1,2} = 1 \pm i$



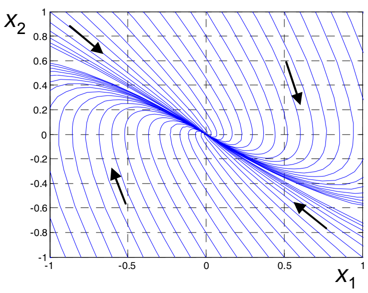


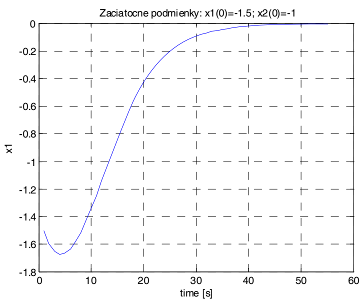


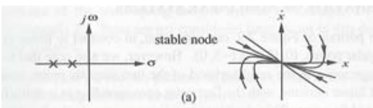
netlmený kmitavý priebeh
(nestabilný)

Typy rovnovážnych stavov

- a = -1, b = -2, **stabilný uzol**
- Korene charakteristickej rovnice: $s_{1,2}$ = -1



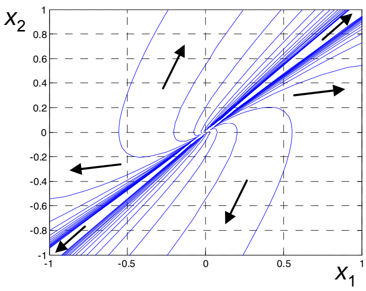


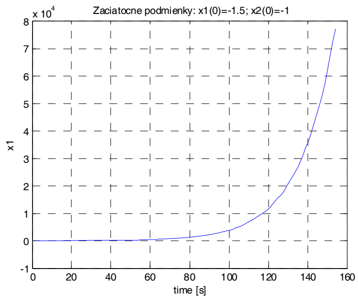


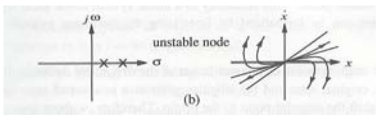
aperiodický priebeh
(stabilný)

Typy rovnovážnych stavov

- a = -1, b = 2, **nestabilný uzol**
- Korene charakteristickej rovnice: $s_{1,2} = 1$







aperiodický priebeh
(nestabilný)

Príklad nelineárneho systému 2. rádu

- Van der Pol-ova rovnica (oscilátor, b – tlmenie)

$$\ddot{y} - (1 - y^2)\dot{y} / b + y = 0$$

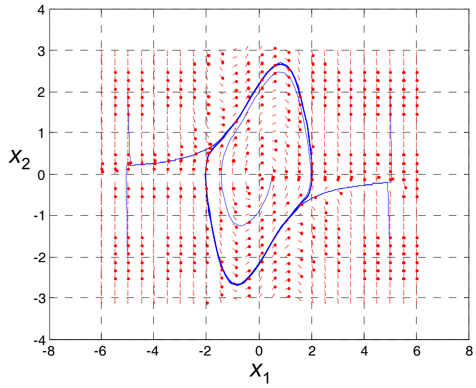
- Stavové veličiny $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$
- Stavový model →

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{b}(1 - x_1^2)x_2 - x_1$$

- Rovnovážny stav (nestabilné ohnisko) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Bendixsonovo krit.: → $\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = \left(1 - x_1^2\right)\frac{1}{b}$
  (existuje stabilný limitný cyklus)

Príklad nelineárneho systému 2. rádu

- Van der Pol-ova rovnica (oscilátor)
  fázový portrét + mapovanie smerníc trajektórií



Príklad nelineárneho systému 1. rádu

- Nelineárna diferenciálna rovnica 1. rádu $\dot{y} + g(y) = u$
  $g(\cdot)$ – nelineárna funkcia, u – konštantné budenie
- Stavové veličiny: $x_1 = y$
  $x_2 = \dot{y}$
- Stavový model: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ x_2 = u - g(x_1) \end{cases}$
  – jediná fázová trajektória
- Pohyb po trajektórii: pre $x_2>0$ – zľava doprava
  pre $x_2<0$ – sprava doľava
- Rovnovážne stavy $\longrightarrow$ $x_2 = 0$ ležia na osi x_1
  – súradnicu x_1 získame riešením rovnice $g(x_1) = u$

Príklad nelineárneho systému 1. rádu

- Nelineárna diferenciálna rovnica 1. rádu $\dot{y} + g(y) = u$
  $g(y) = y^2$, u = 1 $\quad u = 1 \quad \dot{y} + y^2 = 1$
- Stavové veličiny: $x_1 = y$
  $x_2 = \dot{y}$ $\quad \frac{dx_1}{dt} = x_2$
- Stavový model:
  (jediná fázová trajektória – parabola) $\longrightarrow x_2 = 1 - x_1^2$
- Rovnovážne stavy ($x_2 = 0$):

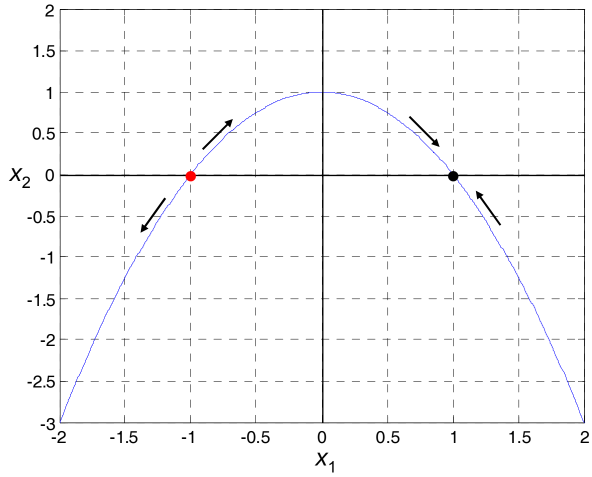
$$x_1^2 = 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

stabilný nestabilný

(Stabilitu zistíme jednoducho z grafu na ďalšej strane.) 41

Príklad systému 1. rádu

- Fázová trajektória nelineárneho systému 1. rádu $\dot{y} + y^2 = 1$

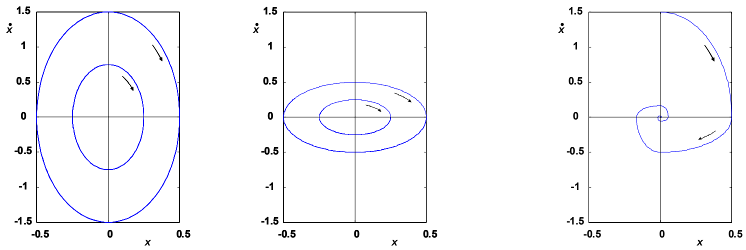


42

Nelineárne riadenie vo fázovej rovine (ukážka stabilizácie)

- Lineárny autonómny oscilujúci systém 2. rádu $\ddot{x} = -ax$

  s premenlivým zosilnením spätnej väzby a



$a = b_1^2$ $\qquad$ $a = b_2^2$ $\qquad$ $a = \begin{cases} b_1^2 & pre \quad x\dot{x} > 0 \\ b_2^2 & pre \quad x\dot{x} < 0 \end{cases}$

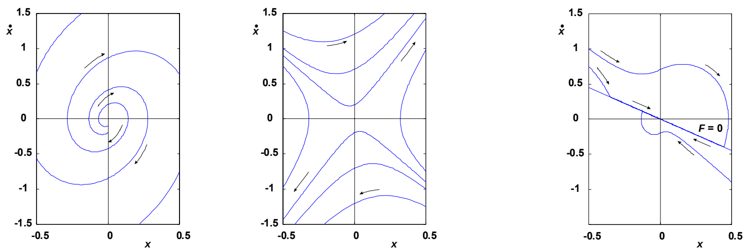
$b_1^2 > b_2^2$

43

Nelineárne riadenie vo fázovej rovine (ukážka stabilizácie, **kĺzavý režim**)

- Nestabilný dynamický systém 2. rádu $\ddot{x} + b\dot{x} + ax = 0$

  s parametrom $b < 0$ a premenlivým parametrom a



$a = \alpha$ $\qquad$ $a = -\alpha$ $\qquad$ $a = \begin{cases} \alpha & pre \quad xF > 0 \\ -\alpha & pre \quad xF < 0 \end{cases}$

$\alpha > 0$

Prepínacia priamka $F = cx + \dot{x} = 0$ $\qquad c > 0$

44

Nelineárne riadenie vo fázovej rovine (ukážka stabilizácie, **kĺzavý režim**)

- Korene charakteristického polynómu $s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \alpha}$
- Určenie parametra $c > 0$ prepínacej priamky $F = cx + \dot{x} = 0$
- Podmienka vzniku kĺzavého režimu $F\dot{F} < 0$
- Riešenie $-s_1 < 0 < c < -s_2$
- Zvolili sme $c = -\frac{s_2}{2} = \frac{b}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4} + \alpha}$

45