SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

JEDNODUCHÉ KYVADLO

ZADANIE

2023

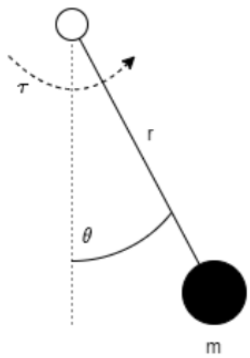
Bc. Maroš Kocúr

1 Úlohy

Realizujte úlohy pre systém jednoduchého kyvadla, ktoré je zadané nasledovnou diferenciálnou rovnicou:

$$mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + n\frac{d\theta}{dy} + mgr\sin\theta = 0 \tag{1.1}$$

- Nájdite linearizovaný model systému pre rovnovážny stav [0,0]. Výsledný model zapíšte v stavovom opise.
- Transformujte nelineárny systém tak aby bol posunutý počiatok súradnicového systému do bodu $[\pi, 0]$.
- Nájdite linearizovaný model transformovaného systému v bode [0,0]. Výsledný model zapíšte v stavovom opise.
- Overte stabilitu rovnovážneho stavu [0,0] pôvodného systému pomocou Lyapunovovej linearizačnej metódy.
- Overte stabilitu rovnovážneho stavu [0,0] transformovaného systému pomocou Lyapunovovej linearizačnej metódy.



Parametre modelu:
$g = 9.81ms^{-2}$
$r = 0.4m$
$b = 10^{-2}Nms^{-1}$
$m = 0.03kg$

2 Riešenie

① $mr^2\ddot{\Theta} + b\dot{\Theta} + mgr\sin\Theta = 0$

$\Theta = x_1$

$\dot{x}_1 = x_2 \quad = f_1$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{mr^2}(-bx_2 - mgr\sin x_1) = f_2$

$f_1 \sim \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x=0} x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{x=0} x_2 = 0x_1 + 1x_2$

$f_2 \sim \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x=0} x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{x=0} x_2 = \frac{1}{mr^2}\left([-mgr\cos x_1]_{x=0} x_1 + [-b]_{x=0} x_2\right) = -\frac{g}{r}x_1 - \frac{b}{mr^2}x_2$

$x = Ax$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{r} & -\frac{b}{mr^2} \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda I) = \left| A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{r} & -\frac{b}{mr^2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda + \frac{b}{mr^2}\right) + \frac{g}{r} = \lambda^2 + \frac{b}{mr^2}\lambda + \frac{g}{r}$

MATLAB $\quad$ roots([1 $\frac{b}{mr^2}$ $\frac{g}{r}$]) $= \begin{matrix} -1{,}0417 + 4{,}8415i \\ -1{,}0417 - 4{,}845i \end{matrix}$

② $y = x - [\pi, 0]$

$\dot{x}_1 = x_2 \quad (y_1 + \pi) = y_2 - 0$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{mr^2}(-bx_2 - mgr\sin x_1) = \frac{1}{mr^2}(-b(y_2 + 0) - mgr\sin(y_1 + \pi)) = \frac{1}{mr^2}(-bx_2 + mgr\sin(x_1 + \pi))$

(3) $f_1 \sim \frac{d f_1}{d x_1}\Big|_{x=0} x_1 + \frac{d f_1}{d x_2}\Big|_{x=0} x_2 = 0 + 1 x_2$

$f_2 \sim \frac{d f_2}{d x_1}\Big|_{x=0} x_1 + \frac{d f_2}{d x_2}\Big|_{x=0} x_2 = \frac{1}{mr^2}\left[-mgr\cos(x_1-\pi)\right]_{x=0} x_1 + \frac{1}{mr^2}\left[-b\right]_{x=0} x_2 =$

$= -\frac{g}{r}(-1)x_1 - \frac{b}{mr^2}x_2 = \frac{g}{r}x_1 - \frac{b}{mr^2}x_2 \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{r} & -\frac{b}{mr^2} \end{vmatrix} \qquad eig(A) < \begin{matrix} 4{,}019 \\ -6{,}1023 \end{matrix}$

(4) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{r} & \frac{b}{mr^2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{\lambda b}{mr^2} + \lambda^2\right) + \frac{g}{r} = \lambda^2 + \frac{b}{mr^2}\lambda + \frac{g}{r}$

MATLAB

roots$([1 \;\; \frac{b}{mr^2} \;\; \frac{g}{r}]) = -1{,}0417 \pm 4{,}8415i$

Rovnovážny stav [0,0] je stabilný(linearizovaný model systému je nestabilný), pretože reálna časť oboch vlastných čísel je záporná.

(5) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{r} & -\frac{b}{mr^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\lambda b}{mr^2} + \lambda^2\right) - \frac{g}{r} = \lambda^2 + \frac{b}{mr^2} - \frac{g}{r}$

MATLAB

roots$([1 \;\; \frac{b}{mr^2} \;\; -\frac{g}{r}]) = < \begin{matrix} -6{,}1023 \\ 4{,}019 \end{matrix}$

Rovnovážny stav [0,0] transformovaného systému je nestabilný(linearizovaný model transformovaného systému je nestabilný), pretože reálna časť oboch vlastných čísel nieje záporná.