Riadenie nelineárnych systémov

Metóda harmonickej rovnováhy II.

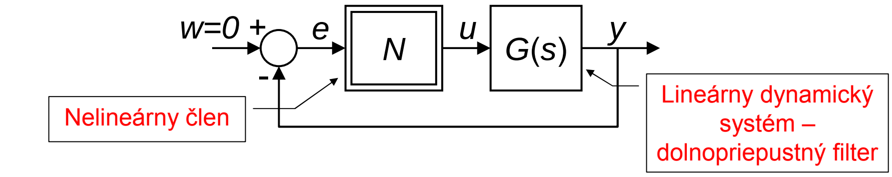
doc.Ing. Ján Kardoš, PhD.
ÚRK, D-410

Metóda harmonickej rovnováhy

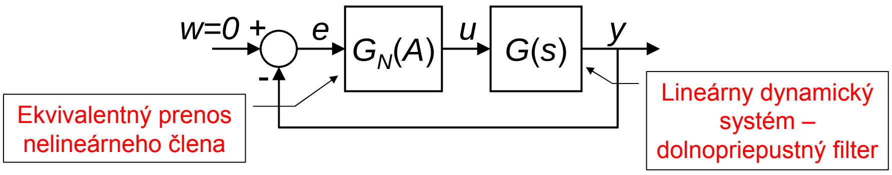
- Metóda ekvivalentných prenosov (metóda harmonickej linearizácie): **linearizácia** nelineárneho systému, ktorým sa šíri **harmonický signál**.
- **Frekvenčná metóda** analýzy nelineárnych systémov, určenie **počtu** a **stability limitných cyklov**.
- Štruktúra nelineárneho regulačného obvodu: **statický nelineárny člen** *N* (typická nelinearita, symetrická nepárna prevodová charakteristika) v sérii s **lineárnym dynamickým systémom** *G*(s) (dolnopriepustný filter, dobré filtračné vlastnosti).
- Náhrada nelinearity lineárnym členom, ktorý prenáša len **prvú harmonickú** – **ekvivalentný prenos** $G_N(A)$.

Princíp metódy harmonickej rovnováhy

- Nelineárny regulačný obvod

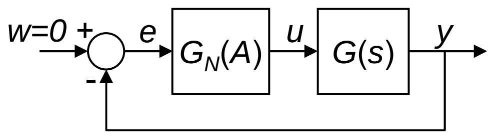


- **Náhradný lineárny** obvod (linearizácia pre signál prvej harmonickej)



Princíp metódy harmonickej rovnováhy

- Aby sa v obvode udržali autooscilácie prvej harmonickej, musí sa **fáza** výstupného signálu y prepočítaná na vstup nelinearity N resp. $G_N(A)$ **zhodovať** s fázou signálu e.
- Aby sa zachovala amplitúda oscilácií prvej harmonickej, musí byť **zosilnenie** v otvorenej slučke **jednotkové**.
- **Záporná spätná väzba** otáča fázu signálu y o 180°.
- Sériové zapojenie členov $G_N(A)$ a $G(s)$ teda musí **otáčať fázu signálu o ďalších 180°** a musí mať **zisk 1**.



Princíp metódy harmonickej rovnováhy

- **Podmienka vzniku ustálených kmitov** (vo **frekvenčnej oblasti**)

$$G(j\omega)G_N(A) = -1$$

Frekvenčný prenos lineárnej sústavy

Ekvivalentný prenos

alebo

$$G(j\omega) = -\frac{1}{G_N(A)}$$

Ekvivalentný útlm

Princíp metódy harmonickej rovnováhy

- **Analytické riešenie** podmienky vzniku ustálených kmitov

$$G(j\omega)G_N(A) = -1$$

alebo

- Získame **dve rovnice** na určenie dvoch neznámych parametrov prvej harmonickej: **amplitúdy** *A* a **kruhovej frekvencie** ω

$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)G_N(A)\} = -1$$

$$\mathrm{Im}\{G(j\omega)G_N(A)\} = 0$$

$$A > 0, \quad \omega > 0; \quad A, \omega \in R$$

Podmienka stability oscilácií $\frac{\partial \mathrm{Re}}{\partial A}\frac{\partial \mathrm{Im}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathrm{Re}}{\partial \omega}\frac{\partial \mathrm{Im}}{\partial A} > 0$

Princíp metódy harmonickej rovnováhy

- **Analytické riešenie** podmienky vzniku ustálených kmitov

$$G(j\omega) = -\frac{1}{G_N(A)}$$

alebo

$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{G_N(A)}\right\} \qquad \mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = \mathrm{Im}\left\{-\frac{1}{G_N(A)}\right\}$$

$G_N(A) = \frac{a_1}{A}$ jednoznačná nelinearita

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{G_N(A)}\right\} = -\frac{A}{a_1}$$

$$\mathrm{Im}\left\{-\frac{1}{G_N(A)}\right\} = 0$$

$G_N(A) = \frac{a_1 + jb_1}{A}$ nejednoznačná nelinearita

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{G_N(A)}\right\} = -A\frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\mathrm{Im}\left\{-\frac{1}{G_N(A)}\right\} = A\frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2}$$

Princíp metódy harmonickej rovnováhy

- **Analytické riešenie** podmienky vzniku ustálených kmitov

$$G(j\omega)G_N(A) = -1$$

alebo

vo **fázorovom tvare**

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$G_N(A) = |G_N(A)|e^{j\gamma(A)}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{G(j\omega)\} + \mathrm{Im}^2\{G(j\omega)\}} \qquad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}\right)$$

$$|G_N(A)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{G_N(A)\} + \mathrm{Im}^2\{G_N(A)\}} \qquad \gamma(A) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{G_N(A)\}}{\mathrm{Re}\{G_N(A)\}}\right)$$

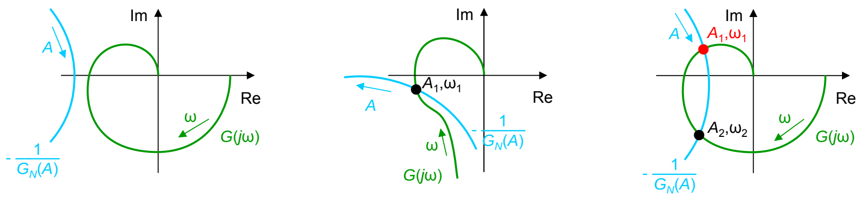
- Podmienka amplitúdovej rovnováhy $|G(j\omega)||G_N(A)| = 1$
- Podmienka fázovej rovnováhy $\varphi(\omega) + \gamma(A) = \pi$

Princíp metódy harmonickej rovnováhy

- **Grafické riešenie** podmienky vzniku ustálených kmitov

Priesečník/-y frekvenčnej charakteristiky $G(j\omega)$ a záporne vzatého ekvivalentného útlmu $1/G_N(A)$ v **komplexnej rovine**

$$G(j\omega) = -\frac{1}{G_N(A)}$$



Stabilný systém (oscilácie nevzniknú) | Stabilné autooscilácie | Stabilné aj nestabilné autooscilácie

Princíp metódy harmonickej rovnováhy

Opakovanie kreslenia **frekvenčných charakteristík v komplexnej rovine** (Nyquistove charakteristiky)

Niekoľko poznámok k metóde harmonickej rovnováhy:

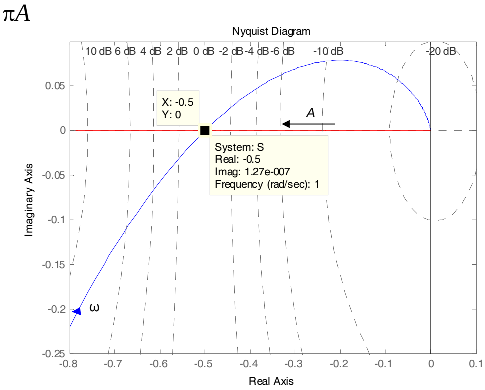
- Pri symetrickej jednoznačnej nelinearite ($G_N(A)$ je reálna funkcia, teda graf $-1/\,G_N(A)$ leží na zápornej reálnej polosi) je podmienkou vzniku ustálených kmitov najmenej **tretí rád** lineárneho dynamického systému $G(s)$ alebo dopravné oneskorenie (frekvenčná charakteristika $G(j\omega)$ musí pretínať zápornú reálnu polos).
- Pri nejednoznačnej nelinearite (hysteréza) môžu vzniknúť autooscilácie aj pri nižšom ráde prenosovej funkcie ako 3.
- Lepšie výsledky dostaneme pre sústavy vyššieho rádu (lepšie filtračné vlastnosti) – analýza sa viac blíži k realite.

Príklad č.1

- Pri sériovom zapojení **relé** a **systému 3. rádu** vyšetrite amplitúdu *A* a frekvenciu ω oscilácií 1. harmonickej.
- **Lineárna prenosová funkcia** $G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$
- **Relé** (*M*=10) $G_N(A) = \frac{4M}{\pi A}$
- Riešenie:
  A=6.366
  ω=1rads^{-1}

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{G_N(A)}\right\} = -\frac{\pi A}{4M} = -0{,}5$$

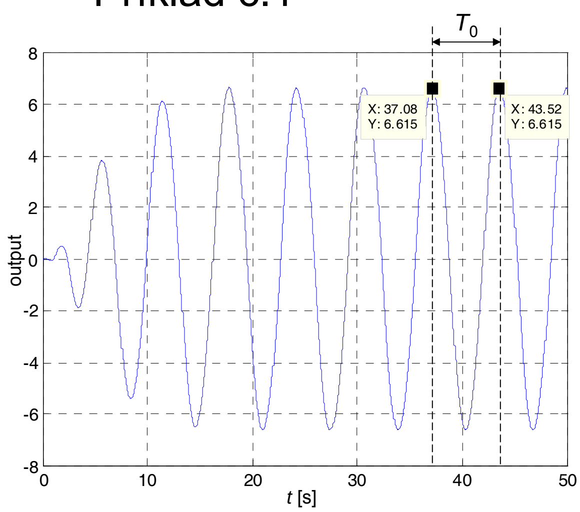
$$A = \frac{2M}{\pi} = 6.366$$



Príklad č.1

Vypočítané hodnoty
A = 6.366
ω = 1 rads^{-1}
T_0 = 6.283 s

Modelované hodnoty
A = 6.615
ω = 0.976 rads-1
T_0 = 6.44 s



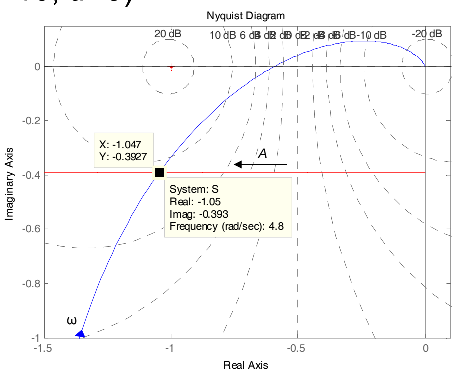
Príklad č.2

- Pri sériovom zapojení **relé s hysterézou** a **systému 3. rádu** vyšetrite amplitúdu *A* a frekvenciu ω oscilácií 1. harmonickej.
- **Lineárna prenosová funkcia** $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)(0.25s+1)(0.125s+1)}$
- **Relé s hysterézou** (*M*=10, *d*=5)

$$G_N(A) = \frac{a_1 + jb_1}{A}$$

$$a_1 = \frac{4M}{\pi}\sqrt{1-\frac{d^2}{A^2}} \qquad b_1 = -\frac{4M}{\pi}\frac{d}{A}$$

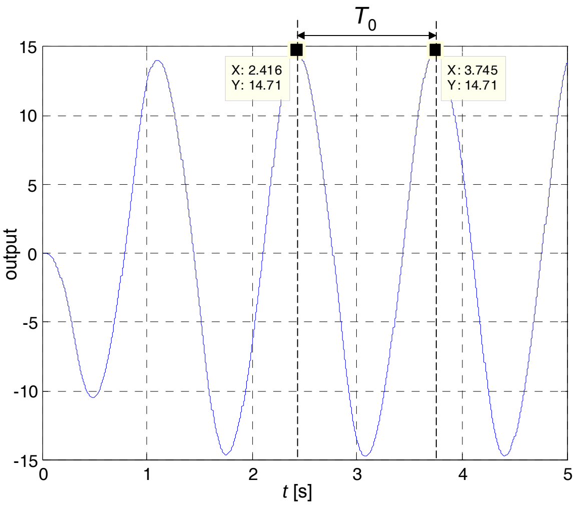
- Riešenie:
  A=14.16
  ω=4.8rads^{-1}



Príklad č.2

Vypočítané hodnoty
A = 14.16
ω = 4.8 rads-1
T_0 = 1.309 s

Modelované hodnoty
A = 14.71
ω = 4.728 rads^{-1}
T_0 = 1.329 s



Príklad č.3

- **Relé s hysterézou** je sériovo zapojené s lineárnym dynamickým systémom **2. rádu**. Aké má byť zosilnenie *K* a časová konštanta *T* systému, ak požadujeme na výstupe systému oscilácie 1. harmonickej s amplitúdou *A* = 10 a frekvenciou ω = 5 rads^{-1}?
  (perióda oscilácií je $T_0=2\pi/\omega$ = 1.257 s)
- **Lineárna prenosová funkcia** $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$
- **Relé s hysterézou** (*M*=10, *d*=5)

$$G_N(A)=\frac{a_1+jb_1}{A}$$

$$a_1=\frac{4M}{\pi}\sqrt{1-\frac{d^2}{A^2}} \qquad b_1=-\frac{4M}{\pi}\frac{d}{A}$$

Príklad č.3

- Riešenie - postup:

$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}=-\frac{KT}{T^2\omega^2+1} \qquad \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{G_N(A)}\right\}=-A\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}=-\frac{\pi}{4M}\sqrt{A^2-d^2}$$

$$\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}=-\frac{K}{\omega(T^2\omega^2+1)} \qquad \mathrm{Im}\left\{-\frac{1}{G_N(A)}\right\}=A\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}=-\frac{\pi d}{4M}$$

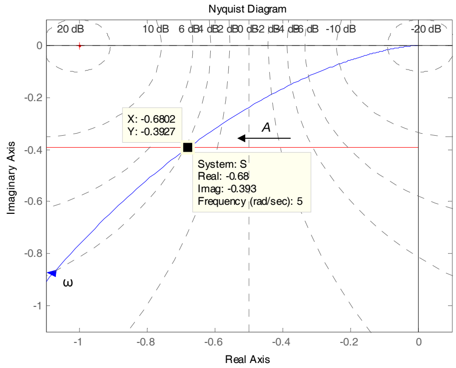
$$\Uparrow$$

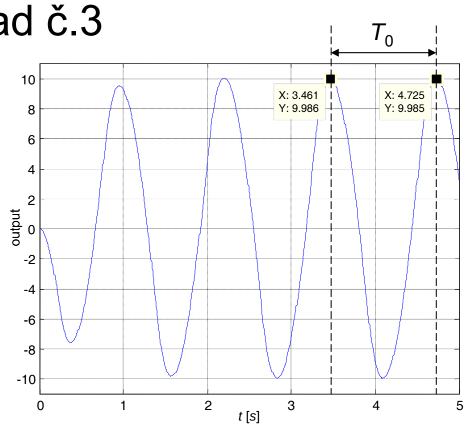
$$T=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{A^2}{d^2}-1} \quad \Longrightarrow \quad T^2\omega^2+1=\frac{A^2}{d^2} \qquad \mathrm{Im}\{G_N(A)\}=-0.3926$$

$$K=\frac{\pi A^2}{4Md}\omega$$

- Riešenie: *K* = 7.854
  T = 0.3464 s

Príklad č.3

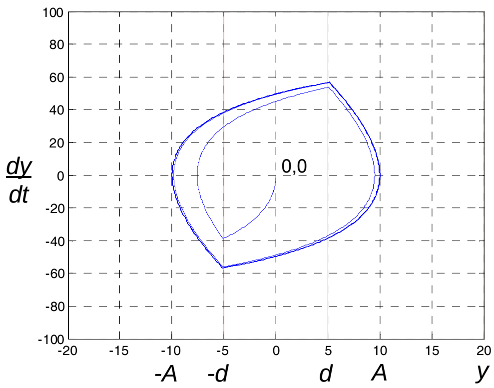




Požadované hodnoty
A = 10
ω = 5 rads-1
T_0 = 1.257 s

Modelované hodnoty
A = 9.986
ω = 4.97 rads^{-1}
T_0 = 1.264 s

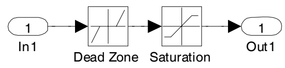
Príklad č.3

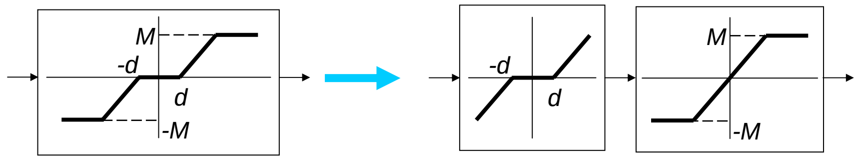


Fázový portrét

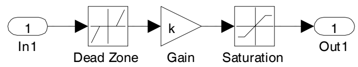
Skladanie (kompozícia) nelinearít

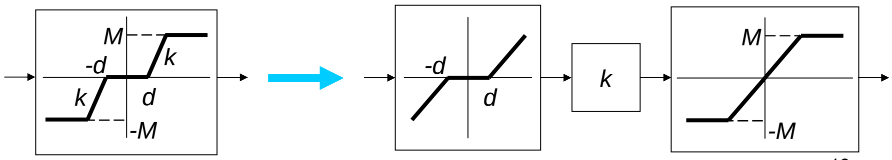
Saturácia s necitlivosťou





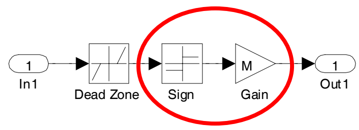
Saturácia so zosilnením *k* a s necitlivosťou

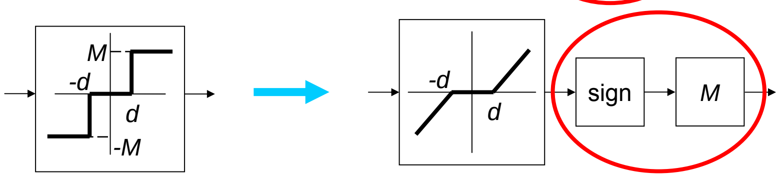




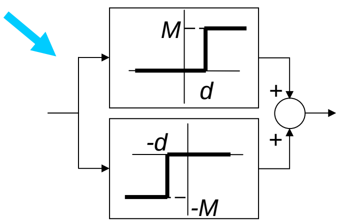
Skladanie (kompozícia) nelinearít

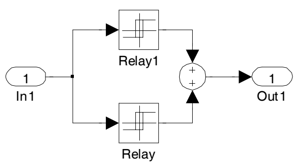
Relé s necitlivosťou





alebo





Skladanie (kompozícia) nelinearít

Relé s necitlivosťou a hysterézou