SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

KONŠTRUKCIA LYAPUNOVÝCH FUNKCIÍ

ZADANIE

2023 Bc. Maroš Kocúr

1 Úlohy

Realizujte úlohy pre nelineárny systém, ktorý je zadaný nasledovne:

$\dot{x_1} = -2x_1 - x_2$

$\dot{x_2} = x_1 - 3x_2^3 - x_2$

1. Nájdite rovnovážny stav systému.
2. Vytvorte dynamický model pre tento systém.
3. Simulačne analyzujte stabilitu rovnovážneho stavu [0,0] tohto systému.
4. Pre tento systém realizujte analýzu stability rovnovážneho stavu [0,0] použitím metódy Variabilného gradientu.
5. Analyzujte stabilitu rovnovážneho stavu [0,0] systému pomocou Krasowského teorému.

2 Úloha 1.

$0 = \dot{x_1} = \dot{x_2}$

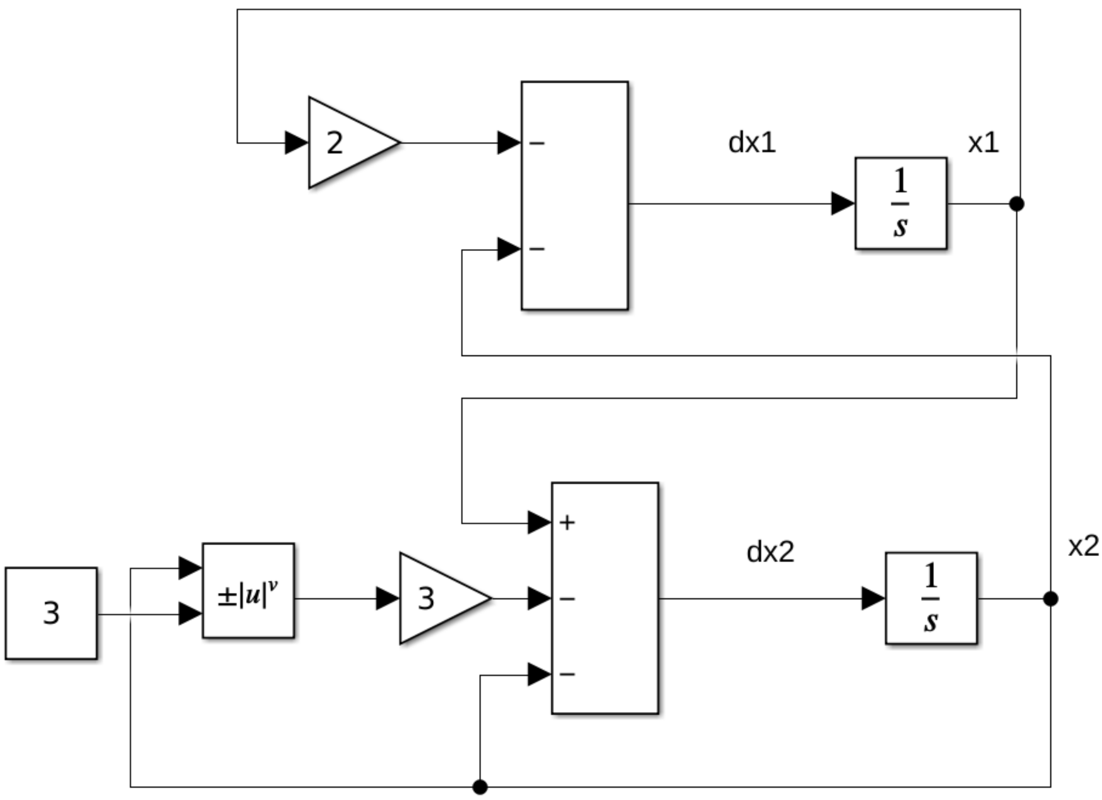
$x = [0, 0]$

$-2x_1 = x2$

$0 = x_1 - 3x_2^3 - x_2 = x_1 - 3(-2x_1)^3 - (-2x_1) = 3x_1 + 24x_1^3 = x_1 + 8x_1^3 = x_1(1 + 8x_1^2)$

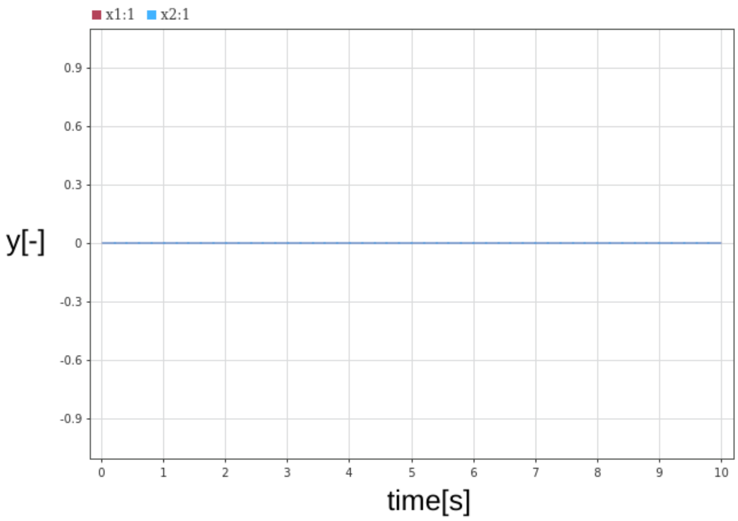
$x_1 = 0; x_2 = 0$

3 Úloha 2. a 3.

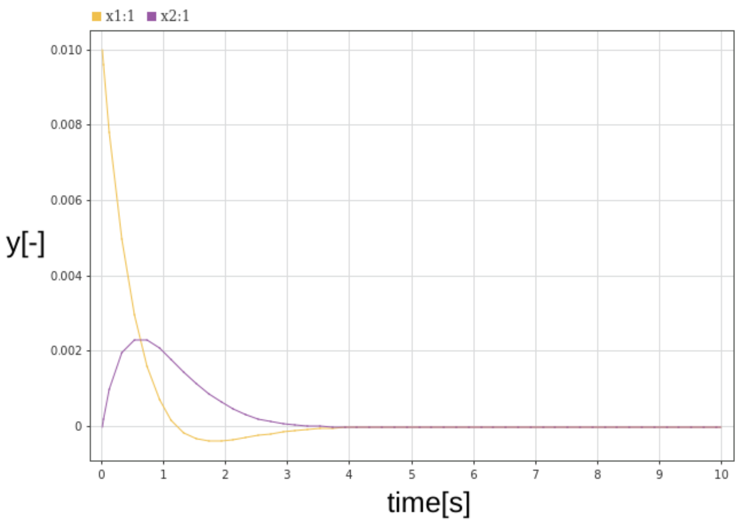


Obr. 3.1: Simulačná schéma

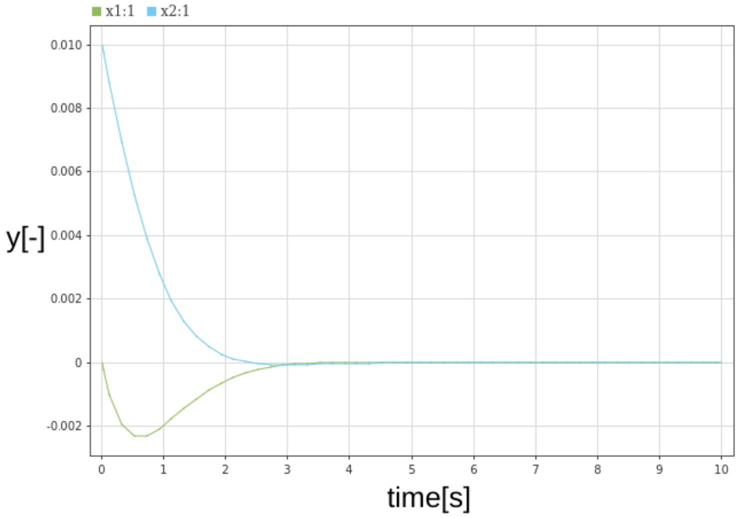
Simulačne sme overili Lyapunovu funkciu. Tým že sme nastavili počiatočné podmienky rovníc.



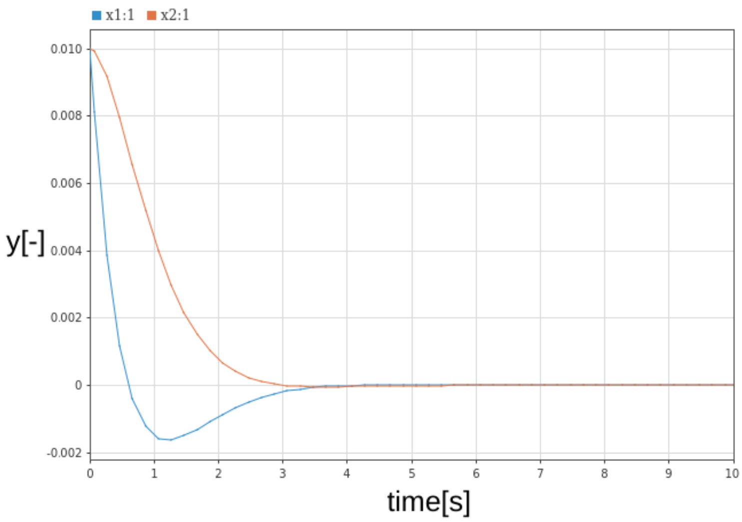
Obr. 3.2: Výstup funkcie s počiatočnými hodnotami $[x_1, x_2]$ [0, 0]



Obr. 3.3: Výstup funkcie s počiatočnými hodnotami $[x_1, x_2]$ [0.01, 0]



Obr. 3.4: Výstup funkcie s počiatočnými hodnotami $[x_1, x_2]$ [0, 0.01]



Obr. 3.5: Výstup funkcie s počiatočnými hodnotami $[x_1, x_2]$ [0.01, 0.01]

4 Úloha 4.

$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} = \frac{\nabla V_2}{\partial x_1}$

$\nabla V_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$

$\nabla V_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$

$a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}$

$a_{12} = a_{21} = 0$

$a_{11} = a_{22} = 1$

$\dot{V} = \nabla V_1 \dot{x_1} + \nabla V_2 \dot{x_2} = x_1 \dot{x_1} + x_2 \dot{x_2} = x_1(-2_x 1 - x_2) + x_2(x_1 - 2x_2^3 - x_2) =$

$= -2x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 - 3x_2^4 - x_2^2 <= 0$

$V_{(x)} = \int_0^{x_1} \xi_1 \, d\xi_1 + \int_0^{x_2} \xi_2 \, d\xi_2 = [\frac{\xi_1}{2}]_0^{x_1} + [\frac{\xi_2}{2}]_0^{x_2} = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$

Podmienky všeobecnej teórii stability:

1. $V_{(0)} = 0$

2. $V > 0$

3. $V \leq 0$

Podmienky všeobecnej teórii stability sú splnené.

5 Úloha 5.

$$F = A + A^T$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -9x^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -9x^2 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -9x^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -18x^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$det(F - \lambda I = \begin{pmatrix} -4 - \lambda & 0 \\ 0 & -18x^2 - 2 - \lambda \end{pmatrix} = (4 + \lambda)(\lambda + 18x^2 + 2)$$

$$\lambda_1 = -4 \leq 0$$

$$\lambda_2 = -18x^2 - 2x^2 \geq 0$$

Rovnovážny stav systému v počiatku je stabilný, pretože matica F je záporne definitná, pretože jej vlastné čísla sú záporné.