4 MODELY LINEÁRNYCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV

4.1. Deterministické modely

⇒ **Výstup** zo systému je **závislý iba od vstupných veličín a od času** a **neuvažuje sa vplyv náhodných porúch.**

4.1.1. Parametrické modely

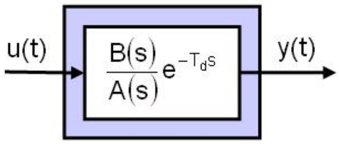
⇒ Vzťah medzi nezávislou a závislou premennou / premennými je **vyjadrený analyticky ako funkcia nezávislej premennej a konečného počtu parametrov s danou štruktúrou**.

1. Lineárna diferenciálna rovnica (spojitý model)

$$\boxed{a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 u(t)}$$

alebo $\boxed{A(s)y(s) = B(s)u(s)}$

$$A(s) = 1 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n$$
$$B(s) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1}s^{m-1} + b_m s^m$$



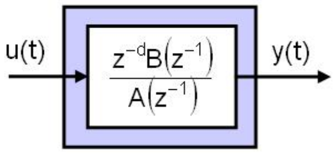
alebo **s dopravným oneskorením** $\boxed{A(s)y(s) = e^{-T_d s}B(s)u(s)}$

2. Lineárna diferenčná rovnica (diskrétny model)

$$\boxed{y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n) + b_1 u(k-d-1) + \cdots + b_m u(k-d-m)}$$

alebo $\boxed{A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-d)}$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1}z^{-n+1} + a_n z^{-n}$$
$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_{m-1}z^{-m+1} + b_m z^{-m}$$



⇒ **Cieľom identifikácie je odhadnúť**:

?
- koeficienty polynómov A a B pre dané rády n a m
- prípadne aj rády n a m
- dopravné oneskorenie T_d alebo d.

⇒ **Typické štruktúry** modelov používané v **spojitých technológiách**:

Prvý rád s dopravným oneskorením: $\frac{Ke^{-Ds}}{Ts+1}$

Druhý rád s dopravným oneskorením: $\frac{Ke^{-Ds}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$

Jedna nula, dva póly s dopravným oneskorením: $\frac{K(T_3 s+1)e^{-Ds}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$

4.1.2. Neparametrické modely

⇒ Vzťah medzi nezávislou a závislou premennou / premennými je **vyjadrený v grafickej alebo tabelárnej forme, nevyžadujú žiadnu informáciu o štruktúre modelu, parametre nie sú v modeli explicitne prítomné.**

1. Impulzná funkcia

⇒ **Impulzná funkcia** (resp. **váhová funkcia**) **h(t)** je **odozva** systému na **vstupný signál v tvare Diracovho (jednotkového) impulzu** $\delta(t)$, pre ktorý platí

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad \text{a} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

⇒ **Grafická podoba** impulznej funkcie sa **nazýva prechodová charakteristika**.

⇒ **Výstupný signál** lineárneho systému pre **ľubovoľný deterministický vstupný signál** sa dá určiť pomocou **konvolutórneho integrálu**

$$\boxed{y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau} \qquad \text{resp.} \qquad \boxed{y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau}$$

⇒ ***FIR (Finite Impulse Response) model*** **(diskrétny prípad)**

Ak je na **vstupe** systému postupnosť signálov v tvare:

$$\{u(0), u(1), u(2), \ldots, u(k), \ldots\} = \{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$$

potom **odozva výstupu** systému je

$$\{y(0), y(1), y(2), \ldots, y(k), \ldots\} = \{h_0, h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots\}$$

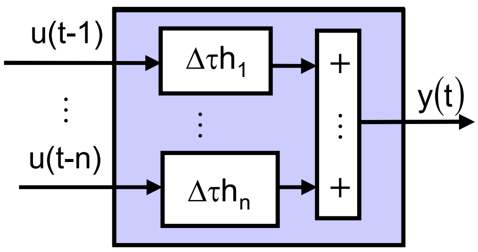
pričom platí:

- $h_0 = 0$, t.j. **výstup nereaguje okamžite na vstup**,
- $h_k = 0$ pre $k > n$, t.j. **po n krokoch odozva systému na impulz odoznie** (systém musí byť stabilný), kde n **je horizont modelu**.

Odozvu systému **na ľubovoľnú postupnosť vstupných signálov** je možné získať pomocou **konvolutórnej sumy**

$$\boxed{y(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, u(t-i)\Delta\tau = H(z^{-1})u(t)}$$

t.j. na jej výpočet je potrebné zapamätať posledných n hodnôt vstupného signálu.



⇒ V prípade, že pri **meraní impulznej odozvy** je použitý impulz s veľkosťou $\alpha \neq 1$, odozva výstupu bude

$$y(t) = \alpha h(t)$$

a **odhad impulznej funkcie** bude $\boxed{\hat{h}(t) = \frac{y(t)}{\alpha}}$

Pri meraní sa **odporúča použiť impulz s maximálnou možnou veľkosťou** z dôvodu redukcie vplyvu šumu merania.

2. Prechodová funkcia

⇒ **Prechodová funkcia g(t)** je odozva systému na **vstupný signál v tvare jednotkového skoku** η(t), pre ktorý platí

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

⇒ **Grafická podoba** prechodovej funkcie sa **nazýva prechodová charakteristika**.

⇒ Pre prechodovú funkciu platí $\boxed{g(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau}$

potom **impulzná funkcia je časová derivácia prechodovej funkcie** $\boxed{h(t) = \frac{d\,g(t)}{dt}}$

⇒ **SR (Step Response) model (diskrétny prípad)**

Pre **jednotkový vstupný signál**:

$$\{u(0), u(1), u(2), \ldots, u(k), \ldots\} = \{1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$$

nadobudne **výstup systému** tvar:

$$\{y(0), y(1), y(2), y(3), \ldots,\} = \{h_0, h_1, h_1 + h_2, h_1 + h_2 + h_3, \ldots,\} = \{0, g_1, g_2, g_3, \ldots\}$$

kde g_i, $i = 1, 2, \ldots$ sú **koeficienty prechodovej charakteristiky** systému spĺňajúce predpoklady:

- $g_0 = 0$, t.j. výstup nereaguje okamžite na skokový signál,
- $g_{n+1} = g_{n+2} = \ldots = g_\infty$,.t.j. po n krokoch sa výstup systému ustáli.

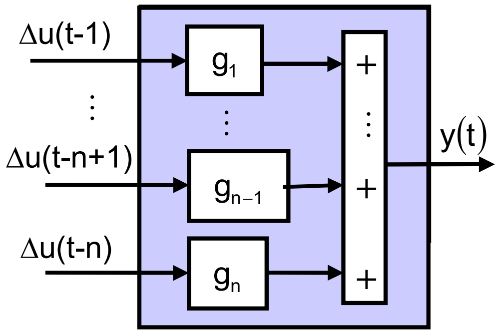
⇒ **Koeficienty prechodovej charakteristiky** je možné **priamo vypočítať z koeficientov impulznej charakteristiky** a naopak:

$$\boxed{g_k = \Delta\tau \sum_{i=1}^{k} h_i} \qquad \boxed{h_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{\Delta\tau}}.$$

⇒ **Odozvu** systému **na ľubovoľnú postupnosť vstupných signálov** je možné získať pomocou vzťahu

$$\boxed{y(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i\, \Delta u(t-i) = G(z^{-1})(1 - z^{-1})u(t)}$$

kde $\quad \Delta u(i) = u(i) - u(i-1)$.



⇒ V prípade, že pri **meraní prechodovej charakteristiky** je použitý skok s veľkosťou $\alpha \neq 1$, odhad prechodovej charakteristiky je

$$\boxed{\hat{g}(t) = \frac{y(t)}{\alpha}}$$

<u>**Poznámka**</u>:
Neparametrické modely sa **využívajú** najmä **pri syntéze prediktívneho riadenia.**

🗎 ***Príklady → priklady_neparam_mod.pdf***

4.2. Stochastické modely

⇒ Na **výstup pôsobia stochastické poruchy a šumy merania** popísané postupnosťami náhodných premenných.

⇒ Podľa toho, **akým spôsobom sa prejavuje porucha na výstupe**, môžu byť definované **rôzne štruktúry modelov.**

⇒ **Poruchový signál** môže byť **v tvare náhodného procesu**

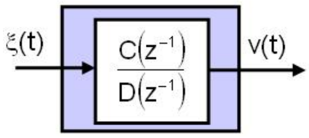
- **biely šum** $\xi(t)$
- **farebný šum** v(t) **= filtrovaný biely šum**.

4.2.1. Modely náhodných procesov

ARMA (AutoRegressive Moving Average) proces

stacionárny **náhodný proces** v(k) reprezentovaný ako **biely šum** $\xi(k)$ **filtrovaný cez lineárny filter**

$$\boxed{v(k)=\frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\xi(k)}$$



kde $C(z^{-1})=1+c_1z^{-1}+\cdots+c_{nc}z^{-nc}$

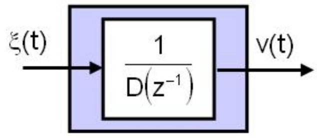
$D(z^{-1})=1+d_1z^{-1}+\cdots+d_{nd}z^{-nd}$

potom $v(k)=-d_1v(k-1)-\cdots-d_{nd}v(k-nd)+\xi(k)+c_1\xi(k-1)+\cdots+c_{nc}\xi(k-nc)$

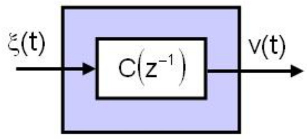
$$\boxed{D(z^{-1})v(k)=C(z^{-1})\xi(k)}$$

ARMA proces môže byť **rozdelený na dve časti**:

- **AR (AutoRegressive)** keď $nc=0$
  (autoregresívny, odhad v(k) na základe minulých hodnôt v(k-i) a okamžitej hodnoty ξ(k))
  $v(k)=-d_1v(k-1)-\cdots-d_{nd}v(k-nd)+\xi(k)$
  $$\boxed{D(z^{-1})v(k)=\xi(k)}$$



- **MA (Moving Average)** keď $nd=0$
  (váhovaný priebežný priemer hodnôt bieleho šumu)
  $v(k)=\xi(k)+c_1\xi(k-1)+\cdots+c_{nc}\xi(k-nc)$
  $$\boxed{v(k)=C(z^{-1})\xi(k)}$$



4.2.2. Modely dynamických systémov

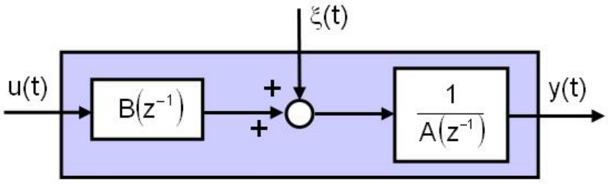
1. ARX (AutoRegressive with eXogenous input) model

⇒ **Náhodný proces v podobe bieleho šumu** vstupuje priamo do rovnice procesu ako **extra vstup.**

⇒ Patrí medzi najčastejšie používané modely pri identifikácii.

⇒ V špeciálnom prípade, keď $na=0$ prejde na FIR (Finite Impulse Response) model.

$$\boxed{A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \xi(k)}$$

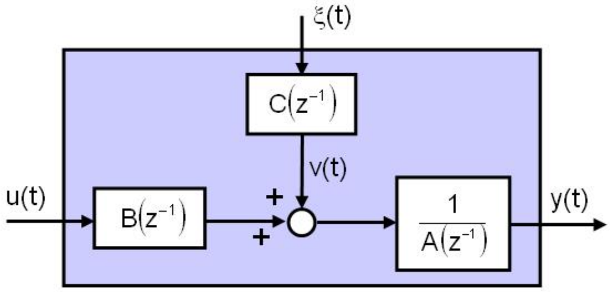


$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_{nb} z^{-nb}$$
$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{na} z^{-na}$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_{na} y(k-na) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_{nb} u(k-nb) + \xi(k)$$

2. ARMAX (AutoRegressive Moving Average with eXogenous input) model alebo CARMA (Controlled AutoRegressive Moving Average) model

⇒ **Náhodný proces** vstupuje do systému ako **MA proces**

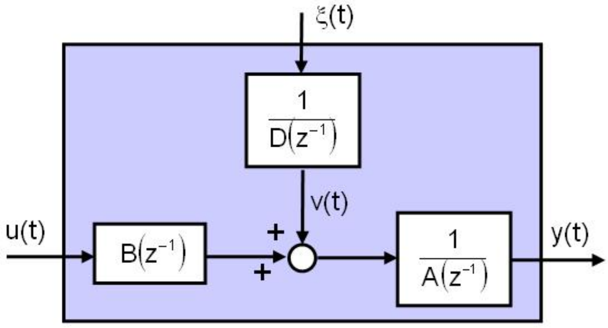


$$\boxed{A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k)}$$

$$\begin{aligned} y(k) = & -a_1 y(k-1) - \cdots - a_{na} y(k-na) + \\ & + b_1 u(k-1) + \cdots + b_{nb} u(k-nb) + \\ & + \xi(k) + c_1 \xi(k-1) + \cdots c_{nc} \xi(k-nc) \end{aligned}$$

3. ARARX (AutoRegressive AutoRegressive with eXogenous input) model

⇒ **Náhodný proces** vstupuje do systému ako **AR proces**



$$\boxed{A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \frac{1}{D(z^{-1})}\xi(k)}$$

4. ARIX (AutoRegressive Integrated with eXogenous input) model

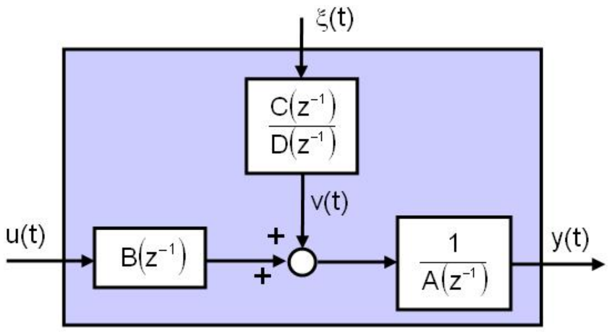
⇒ Predpokladá nestacionárnu poruchu v podobe **bieleho šumu filtrovaného cez integrátor** (špeciálny prípad ARARX modelu)

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \frac{1}{D(z^{-1})}\xi(k)$$

kde $\boxed{D(z^{-1}) = 1 - z^{-1}}$ zodpovedá **diskrétnemu integrátoru**.

5. ARIMAX (AutoRegressive Integrated Moving Average with eXogenous input) model alebo CARIMA (Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average) model

⇒ Predpokladá nestacionárnu poruchu v podobe **MA procesu filtrovaného cez integrátor**

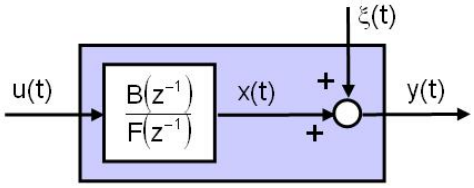


$$\boxed{A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\xi(k)}$$
$$D(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$$

6. OEM (Output Error Model) model

⇒ **K výstupnej premennej** je pridaný **biely šum** (chyba merania)

$$\boxed{y(k)=\frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}u(k)+\xi(k)}$$



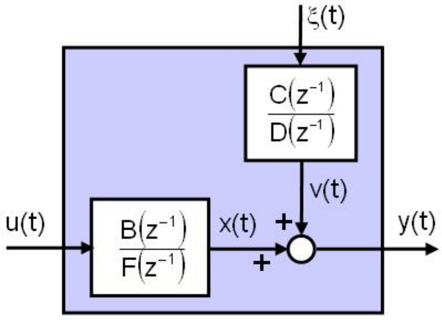
$$F(z^{-1})=1+f_1z^{-1}+\cdots+f_{nf}z^{-nf}$$

$$y(k)=x(k)+\xi(k)$$
$$x(k)=-f_1x(k-1)-\cdots-f_{nf}x(k-nf)+b_1u(k-1)+\cdots+b_{nb}u(k-nb)$$

x(k) – neskreslený výstup

7. Box-Jenkinsov (BJ) model

⇒ **K výstupnej premennej** je pridaný **farebný šum**



$$\boxed{y(k)=\frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}u(k)+\frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\xi(k)}$$

$$F(z^{-1})D(z^{-1})y(k)-B(z^{-1})D(z^{-1})u(k)=C(z^{-1})F(z^{-1})\xi(k)$$

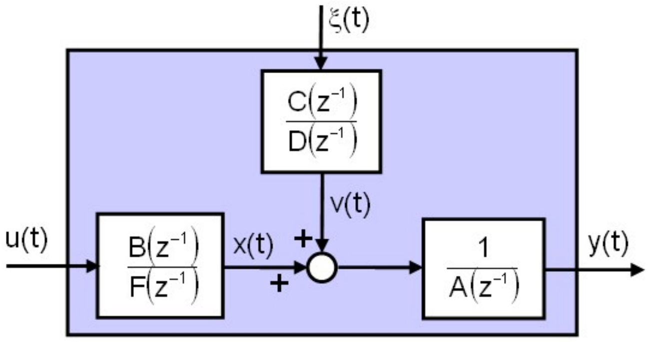
BJ model je možné previesť na ARMAX model, ak označíme

$$\tilde{A}(z^{-1})=F(z^{-1})D(z^{-1})$$
$$\tilde{B}(z^{-1})=B(z^{-1})D(z^{-1})$$
$$\tilde{C}(z^{-1})=C(z^{-1})F(z^{-1})$$

8. Åströmov model

⇒ Najvšeobecnejšia štruktúra

$$\boxed{A(z^{-1})y(k)=\frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}u(k)+\frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\xi(k)}$$



Predchádzajúce modely dostaneme ako **špeciálne prípady** tohto modelu:

- ARX: $n_c=n_d=n_f=0$
- ARMA: $n_b=n_d=n_f=0$
- ARMAX: $n_d=n_f=0$
- ARARX: $n_c=n_f=0$
- ARIMAX: $n_f=0$
- OE: $n_c=n_d=n_a=0$
- BJ: $n_a=0$

9. Systémy s dopravným oneskorením

Ak je hodnota dopravného oneskorenia nk

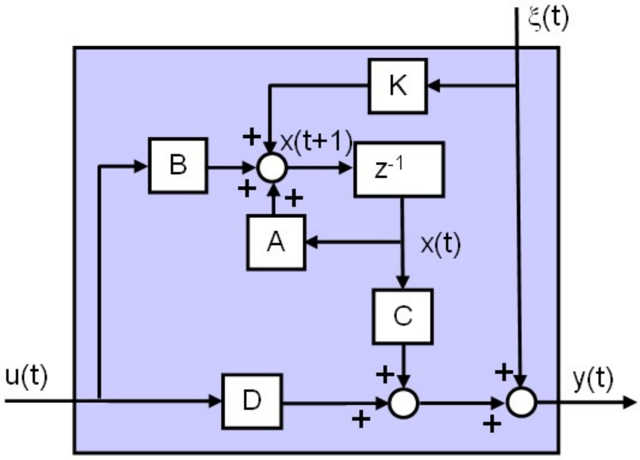
$$B\left(z^{-1}\right) = z^{-nk}\left(b_1 z^{-1} + \cdots + b_{nb} z^{-nb}\right)$$

10. Stavový model

⇒ Popisuje **rovnaký** lineárny **vzťah medzi vstupom a výstupom ako ARX model**, ale používa iba oneskorenie o jeden krok (periódu vzorkovania), na tento účel využíva stavové premenné

⇒ Rád stavového modelu súvisí s počtom minulých (oneskorených) vstupov a výstupov v lineárnej diferenčnej rovnici

⇒ Užitočný najmä v prípade systémov s viacerými výstupmi



$$\boxed{\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + K\xi(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + \xi(t) \end{aligned}}$$

⇒ Ak K=0, šum ovplyvňuje priamo výstup → ekvivaletné OE modelu

<u>Poznámka:</u>

MATLAB System Identification Toolbox - funkcie

arx	Estimate parameters of ARX or AR model using least squares
armax	Estimate parameters of ARMAX model using time-domain data
bj	Estimate Box-Jenkins polynomial model using time domain data
iv4	ARX model estimation using four-stage instrumental variable method
ivx	ARX model estimation using instrumental variable method with arbitrary instruments
oe	Estimate Output-Error polynomial model using time or frequency domain data