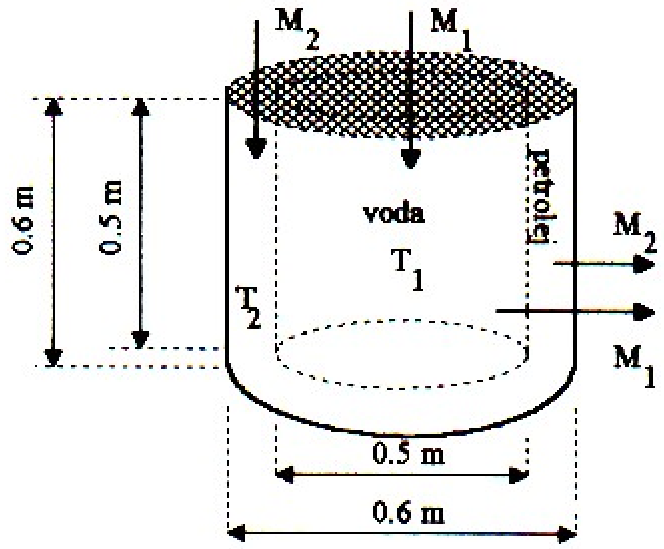
Cvičenie č.1: Analytické určenie modelu tepelného systému

Uvažujte jednoduchý nepriamy výmenník tepla so sústredenými parametrami podľa obr. 1. Ohrieva sa v ňom petrolej, teplonosným médiom je horúca voda. Prevádzkový prietok petroleja je 300 kg/hod, vody 200 kg/hod. Hustoty a merné teplá sú: 770 kg/m^3 (petrolej) a 1000 kg/m^3 (voda), resp. 2420 J/kg/K (petrolej) a 4186 J/kg/K (voda). Vstupná teplota vody je 80°C, vstupná teplota petroleja aj teplota okolia sú 18°C. Koeficient prestupu tepla z vody do petroleja je 1,02.10^6 J/m^2/K/hod a z petroleja do okolia 2,1.10^4 J/m^2/K/hod. Predpokladáme dokonalé miešanie v obidvoch častiach výmenníka. Vrchná (šrafovaná) časť výmenníka predstavuje dokonalú izoláciu vzhľadom k okoliu.

Cieľom je určiť model (prenosové funkcie) tohto systému ako závislosť výstupnej teploty obidvoch médií od oboch hmotnostných prietokov.

Úlohy:

1. Napíšte diferenciálne rovnice opisujúce dynamiku výmenníka.
2. Vypočítajte ustálenú hodnotu teplôt vo výmenníku v danom pracovnom bode.
3. Linearizujte model v danom pracovnom bode.
4. Vyjadrite prenosové funkcie $\frac{\Delta T_1(s)}{\Delta M_1(s)}, \frac{\Delta T_1(s)}{\Delta M_2(s)}, \frac{\Delta T_2(s)}{\Delta M_1(s)}, \frac{\Delta T_2(s)}{\Delta M_2(s)}$.



Obr. 1 Nepriamy výmenník tepla

Riešenie:

$S_1 = 0.9813$ $S_2 = 1.413$ $V_1 = 0.0981$ $V_2 = 0.0714$

1. Napíšte diferenciálne rovnice opisujúce dynamiku výmenníka

$$\rho_1 c_{p1} V_1 \frac{dT_1}{dt} = M_1 c_{p1}(T_{1i} - T_1) - \lambda_{12} S_1 (T_1 - T_2)$$

$$\rho_2 c_{p2} V_2 \frac{dT_2}{dt} = M_2 c_{p2}(T_{2i} - T_2) + \lambda_{12} S_1 (T_1 - T_2) - \lambda_{2ok} S_2 (T_2 - T_{ok})$$

2. Vypočítajte ustálenú hodnotu teplôt vo výmenníku v danom pracovnom bode

V ustálenom stave sú derivácie stavových premenných nulové a teda bude platiť

$$\frac{dT_1}{dt} = 0 \qquad \frac{dT_2}{dt} = 0$$

$$0 = M_1 c_{p1}(T_{1i0} - T_{10}) - \lambda_{12} S_1 (T_{10} - T_{20})$$
$$0 = M_2 c_{p2}(T_{2i0} - T_{20}) + \lambda_{12} S_1 (T_{10} - T_{20}) - \lambda_{2ok} S_2 (T_{20} - T_{ok})$$

Z diferenciálnych rovníc sa tak stávajú algebrické, pričom ustálené hodnoty teplôt v pracovnom bode sme označili ako T_{10} a T_{20}.

Ďalej vyjmeme neznáme T_{10} a T_{20} a takto vzniknutú sústavu rovníc môžeme zapísať v maticovej forme

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} T_{10} \\ T_{20} \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} M_1 c_{p1} + \lambda_{12} S_1 & -\lambda_{12} S_1 \\ -\lambda_{12} S_1 & \lambda_{12} S_1 + M_2 c_{p2} + \lambda_{2ok} S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{10} \\ T_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 c_{p1} T_{1i0} \\ M_2 c_{p2} T_{2i0} + \lambda_{2ok} S_2 T_{ok} \end{pmatrix}$$

Túto sústavu rovníc je potom možné riešiť v Matlabe ako:

```
A=[  M1*cp1+la12*S1,  -la12*S1;
   -la12*S1,          la12*S1+M2*cp2+la2ok*S2];

b=[ M1*cp1*T1i;
   M2*cp2*T2i+la2ok*S2*Tok];

x=A\b;
T10=x(1)
T20=x(2)
```

Iný spôsob riešenia:

Z prvej rovnice vyjadríme vzťah pre teplotu T_{10} a ten následne dosadíme do druhej rovnice a z nej vyjadríme teplotu T_{20}:

$$0 = M_1 c_{p1} T_{1i} - T_{10}\left(M_1 c_{p1} + \lambda_{12} S_1\right) + \lambda_{12} S_1 T_{20} \quad \rightarrow \quad T_{10} = \frac{M_1 c_{p1} T_{1i} + \lambda_{12} S_1 T_{20}}{M_1 c_{p1} + \lambda_{12} S_1} = A + B T_{20}$$

$$\downarrow$$

$$0 = \left(M_2 c_{p2} T_{2i} + \lambda_{2ok} S_2 T_{ok}\right) - T_{20}\left(M_2 c_{p2} + \lambda_{12} S_1 + \lambda_{2ok} S_2\right) + \lambda_{12} S_1 T_{10} = C - D T_{20} + \lambda_{12} S_1 T_{10}$$

$$0 = C - D T_{20} + \lambda_{12} S_1 \left(A + B T_{20}\right) \quad \rightarrow \quad T_{20} = \frac{C + \lambda_{12} S_1 A}{D - \lambda_{12} S_1 B}$$

$$A = \frac{M_1 c_{p1} T_{1i}}{M_1 c_{p1} + \lambda_{12} S_1} = 36.4381 \qquad B = \frac{\lambda_{12} S_1}{M_1 c_{p1} + \lambda_{12} S_1} = 0.5445$$

$$C = M_2 c_{p2} T_{2i} + \lambda_{2ok} S_2 T_{ok} = 13602114 \qquad D = M_2 c_{p2} + \lambda_{12} S_1 + \lambda_{2ok} S_2 = 1756548$$

$$T_{20} = 41.3290 \qquad T_{10} = 58.9428$$

3. Linearizujte model v danom pracovnom bode M_{10}, M_{20}, T_{10}, T_{20}

Každú veličinu vyjadríme ako súčet jej hodnoty v ustálenom stave (konštanta) a odchýlky od ustáleného stavu (premenná):

$$M_1 = M_{10} + \Delta M_1, \quad M_2 = M_{20} + \Delta M_2, \quad T_1 = T_{10} + \Delta T_1, \quad T_2 = T_{20} + \Delta T_2$$

$$T_{1i} = T_{1i0} + \Delta T_{1i}, \quad T_{2i} = T_{2i0} + \Delta T_{2i},$$

Pričom budeme predpokladať: $\Delta T_{1i} = \Delta T_{2i} = \Delta T_{ok} = 0$

Linearizovaný model vychádza z rozvoja pravých strán diferenciálnych rovníc do Taylorovho radu, pričom uvažujeme iba lineárny člen tohto rozvoja.

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{M_1}{m_1}\left(T_{1i} - T_1\right) - \frac{\lambda_{12} S_1}{m_1 c_{p1}}\left(T_1 - T_2\right) = f_1\left(T_1, T_2, M_1\right)$$

$$\frac{d\Delta T_1}{dt} = \left(\frac{\partial f_1(T_1, T_2, M_1)}{\partial T_1}\right)_{\substack{T1=T10\\T2=T20\\M1=M10\\T1i=T1i0}} .\Delta T_1 + \left(\frac{\partial f_1(T_1, T_2, M_1)}{\partial T_2}\right)_{\substack{T1=T10\\T2=T20\\M1=M10\\T1i=T1i0}} .\Delta T_2 + \left(\frac{\partial f_1(T_1, T_2, M_1)}{\partial M_1}\right)_{\substack{T1=T10\\T2=T20\\M1=M10\\T1i=T1i0}} .\Delta M_1 =$$

$$= A_{11} \Delta T_1 + A_{12} \Delta T_2 + B_{11} \Delta M_1$$

$$A_{11} = -\frac{M_{10}}{m_1} - \frac{\lambda_{12} S_1}{m_1 c_{p1}} = -4.4749 \qquad A_{12} = \frac{\lambda_{12} S_1}{m_1 c_{p1}} = 2.4367 \qquad B_{11} = \frac{1}{m_1}\left(T_{1i0} - T_{10}\right) = 0.2146$$

$$\frac{dT_2}{dt}=\frac{M_2}{m_2}\left(T_{2i}-T_2\right)+\frac{\lambda_{12}S_1}{m_2c_{p2}}\left(T_1-T_2\right)-\frac{\lambda_{2ok}S_2}{m_2c_{p2}}\left(T_2-T_{ok}\right)=f_2\left(T_1,T_2,M_2\right)$$

$$\frac{d\Delta T_2}{dt}=\left(\frac{\partial f_2(T_1,T_2,M_2)}{\partial T_1}\right)_{\substack{T1=T10\\T2=T20\\M1=M10\\T1i=T1i0}}.\Delta T_1+\left(\frac{\partial f_2(T_1,T_2,M_2)}{\partial T_2}\right)_{\substack{T1=T10\\T2=T20\\M1=M10\\T1i=T1i0}}.\Delta T_2+\left(\frac{\partial f_2(T_1,T_2,M_2)}{\partial M_2}\right)_{\substack{T1=T10\\T2=T20\\M1=M10\\T1i=T1i0}}.\Delta M_2=$$

$$=A_{21}\Delta T_1+A_{22}\Delta T_2+B_{22}\Delta M_2$$

$$A_{22}=-\frac{M_{20}}{m_2}-\frac{\lambda_{12}S_1}{m_2c_{p2}}-\frac{\lambda_{2ok}S_2}{m_2c_{p2}}=-13.1960 \qquad A_{21}=\frac{\lambda_{12}S_1}{m_2c_{p2}}=7.5190$$

$$B_{22}=\frac{1}{m_2}\left(T_{2i0}-T_{20}\right)=-0.4241$$

⇩ ⇩ ⇩

Po linearizácii dostaneme sústavu dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc:

$$\frac{d\Delta T_1}{dt}=A_{11}\Delta T_1+A_{12}\Delta T_2+B_{11}\Delta M_1$$
$$\frac{d\Delta T_2}{dt}=A_{21}\Delta T_1+A_{22}\Delta T_2+B_{22}\Delta M_2$$

ekvivalentnú opisu v stavovom priestore, ktorého všeobecný tvar je:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{Cx}+\mathbf{Du}$$

kde

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\Delta T_1\\ \Delta T_2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}=\begin{pmatrix}\Delta M_1\\ \Delta M_2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}B_{11} & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

4. **Vyjadrite prenosové funkcie** $\frac{\Delta T_1(s)}{\Delta M_1(s)}, \frac{\Delta T_1(s)}{\Delta M_2(s)}, \frac{\Delta T_2(s)}{\Delta M_1(s)}, \frac{\Delta T_2(s)}{\Delta M_2(s)}$.

Majme všeobecný opis v stavovom priestore v tvare :

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{Cx}+\mathbf{Du}$$

Tento opis v stavovom priestore je možné pretransformovať na prenosovú funkciu (maticu prenosov):

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{y}(s)}{\mathbf{u}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Pomôcka (výpočet inverzie matice 2x2): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & s - A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s - A_{11})(s - A_{22}) - A_{12}A_{21}} \begin{pmatrix} s - A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & s - A_{11} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta T_1(s)}{\Delta M_1(s)} & \frac{\Delta T_1(s)}{\Delta M_2(s)} \\ \frac{\Delta T_2(s)}{\Delta M_1(s)} & \frac{\Delta T_2(s)}{\Delta M_2(s)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(s - A_{11})(s - A_{22}) - A_{12}A_{21}} \begin{pmatrix} s - A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & s - A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2 - (A_{11} + A_{22})s + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} \begin{pmatrix} (s - A_{22})B_{11} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & (s - A_{11})B_{22} \end{pmatrix}$$

Hľadané prenosy

$$G_{11}(s) = \frac{\Delta T_1(s)}{\Delta M_1(s)} = \frac{B_{11}s - A_{22}B_{11}}{s^2 - (A_{11} + A_{22})s + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} = \frac{0.215s + 2.832}{s^2 + 17.67s + 40.729}$$

$$G_{12}(s) = \frac{\Delta T_1(s)}{\Delta M_2(s)} = \frac{A_{12}B_{22}}{s^2 - (A_{11} + A_{22})s + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} = \frac{-1.033}{s^2 + 17.67s + 40.729}$$

$$G_{21}(s) = \frac{\Delta T_2(s)}{\Delta M_1(s)} = \frac{A_{21}B_{11}}{s^2 - (A_{11} + A_{22})s + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} = \frac{1.614}{s^2 + 17.67s + 40.729}$$

$$G_{22}(s) = \frac{\Delta T_2(s)}{\Delta M_2(s)} = \frac{B_{22}s - A_{11}B_{22}}{s^2 - (A_{11} + A_{22})s + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} = \frac{-0.424s - 1.898}{s^2 + 17.67s + 40.729}$$