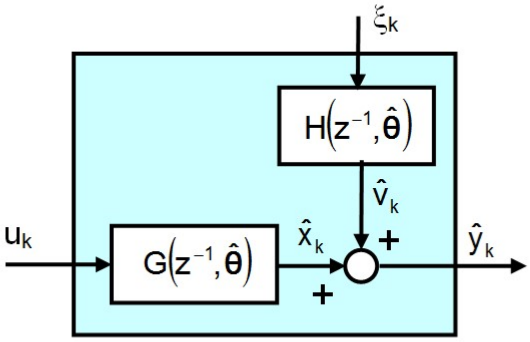
6.2 Regresné metódy

⇒ V kapitole 4 boli **uvedené rôzne štruktúry lineárnych dynamických systémov. Všeobecne môžeme tieto štruktúry vyjadriť v tvare**

$$y_k = G(z^{-1},\hat{\theta})u_k + H(z^{-1},\hat{\theta})\xi_k = x_k + v_k$$



kde polynómy

$$H(z^{-1},\hat{\theta}) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} h_i z^{-i}$$

$$G(z^{-1},\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i z^{-i}$$

vo všeobecnosti reprezentujú prenosové funkcie (predelením čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie dostaneme IIR – infinite impulse response model).

$\hat{\theta}$ je vektor obsahujúci **všetky parametre modelu.**

⇒ **Výstup y_k závisí** od minulých hodnôt y a u a **od aktuálnej hodnoty šumu** v_k, ktorý predpokladáme, že **je nemerateľný**, t.j. **použijeme jeho odhad** $\hat{v}_k$ **– jednokrokový prediktor**

⇒ **Odhad** $\hat{v}_k$ **na základe minulých hodnôt** v_{k-i}, pričom predpokladáme, že zložky **bieleho šumu ξ_{k-i} nie sú merateľné**

$$v_k = H(z^{-1},\hat{\theta})\xi_k \qquad \Rightarrow \qquad \xi_k = v_k + (H^{-1}(z^{-1},\hat{\theta}) - 1)v_k$$

$$v_k = (1 - H^{-1}(z^{-1},\hat{\theta}))v_k + \xi_k$$

keďže ξ_k nie je merateľné, **odhad (predikcia) aktuálnej hodnoty šumu v čase k na základe údajov dostupných do času (k-1)** je nasledovný

$$\boxed{\hat{v}_k = v(k|k-1) = v_k - \xi_k = (1 - H^{-1}(z^{-1},\hat{\theta}))v_k} \qquad \textbf{jednokrokový prediktor}$$

⇒ **Odhad výstupnej veličiny y_k**

$$\hat{y}_k = y(k|k-1) = G(z^{-1},\hat{\theta})u_k + \hat{v}_k = G(z^{-1},\hat{\theta})u_k + (1 - H^{-1}(z^{-1},\hat{\theta}))v_k =$$
$$= G(z^{-1},\hat{\theta})u_k + (1 - H^{-1}(z^{-1},\hat{\theta}))(y_k - G(z^{-1},\hat{\theta})u_k)$$

$$\boxed{\hat{y}_k = H^{-1}(z^{-1},\hat{\theta})G(z^{-1},\hat{\theta})u_k + (1 - H^{-1}(z^{-1},\hat{\theta}))y_k} \qquad \textbf{jednokrokový prediktor}$$

Dostávame **odhad** $\hat{y}_k$, ktorý **vyžaduje iba merateľné minulé vzorky** y_k a u_k.

⇒ **Chyba predikcie má charakter bieleho šumu**

$$e_k = y_k - \hat{y}_k = H^{-1}(z^{-1})y_k - H^{-1}(z^{-1})G(z^{-1})u_k = H^{-1}(z^{-1})(y_k - G(z^{-1})u_k) =$$
$$= H^{-1}(z^{-1})v_k = \xi_k$$

Chyba predikcie reprezentuje tú **časť výstupu**, ktorá **nie je predikovateľná z minulých dát.**

Cieľ: na základe merateľných údajov chceme získať **nevychýlený odhad neznámych parametrov** $\hat{\theta}$ modelu systému pre rôzne štruktúry modelov

Riešenie: pomocou **regresnej analýzy**, t.j. potrebujeme $\hat{y}_k$ vyjadriť ako **lineárnu kombináciu neznámych parametrov a merateľných signálov** a budeme **minimalizovať sumu kvadrátov chyby predikcie.**

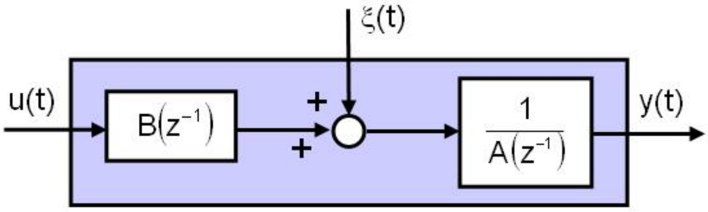
6.2.1 *Equation error* štruktúry modelov

1. ARX model

$$\boxed{A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)y_k = B\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)u_k + \xi_k}$$

$$B\left(z^{-1},\hat{\theta}\right) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_{nb} z^{-nb}$$

$$A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{na} z^{-na}$$



Zodpovedajúca lineárna diferenčná rovnica má tvar

$$\boxed{y_k = -a_1 y_{k-1} - \cdots - a_{na} y_{k-n_a} + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_{nb} u_{k-n_b} + \xi_k}$$

ξ_k **vystupuje v tejto rovnici ako priama chyba**, preto sa táto štruktúra označuje ako ***equation error* model (chyba rovnice).**

$\Rightarrow$ Po porovnaní so všeobecnou štruktúrou pre tento prípad platí

$$\boxed{H\left(z^{-1},\hat{\theta}\right) = \frac{1}{A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}} \qquad \boxed{G\left(z^{-1},\hat{\theta}\right) = \frac{B\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}{A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}}$$

Po **dosadení** do všeobecnej rovnice pre **jednokrokovú predikciu**

$$\hat{y}_k = H^{-1}(z^{-1},\hat{\theta})G\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)u_k + \left(1 - H^{-1}(z^{-1},\hat{\theta})\right)y_k$$

dostaneme

$$\boxed{\hat{y}_k = B\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)u_k + \left(1 - A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)\right)y_k}$$

Predikcia výstupu má tvar lineárnej regresnej rovnice

$$\hat{y}_k = b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \ldots + b_{nb} u_{k-nb} - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \ldots - a_{na} y_{k-na} = \mathbf{h}_k^T \hat{\theta}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(a_1, a_2, \ldots, a_{na}, b_1, b_2, \ldots, b_{nb}\right)^T}$$

$$\boxed{\mathbf{h}_k = (-y_{k-1}, -y_{k-2}, \ldots, -y_{k-na}, u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_{k-nb})^T}$$

$\Rightarrow$ Na **odhad** vektora parametrov $\hat{\theta}$ **je možné použiť <u>štandardnú MNŠ</u>**.

Predpoklad: máme namerané vstupy a zodpovedajúce výstupy u_k a y_k pre k=1, ..., N, kde $N \gg \max(n_a, n_b)$

Pre prípad $n_a \geq n_b$

$$y = \begin{pmatrix} y_{n_a} \\ y_{n_a+1} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} -y_{n_a-1} & \cdots & -y_0 & u_{n_a-1} & \cdots & u_{n_a-n_b} \\ -y_{n_a} & & -y_1 & u_{n_a} & & u_{n_a-n_b+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_{N-1} & \cdots & -y_{N-n_a} & u_{N-1} & \cdots & u_{N-n_b} \end{pmatrix}$$

Budeme minimalizovať sumu kvadrátov chyby predikcie

$$Q(\hat{\theta}) = \sum_{k=1}^{N} e_k^2 = \sum_{k=1}^{N} (y_k - \hat{y}_k)^2 = (y - H\hat{\theta})^T (y - H\hat{\theta}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\theta}^* = (H^T H)^{-1} H^T y}$$

$$e_k = y_k - \hat{y}_k = A(z^{-1},\hat{\theta}) y_k - B(z^{-1},\hat{\theta}) u_k = \xi_k$$

Odchýlka (chyba predikcie) má charakter bieleho šumu ⇒ odhad bude nevychýlený.

2. FIR model

Špeciálny prípad ARX modelu pre $n_a=0$

$$\boxed{y_k = B(z^{-1},\hat{\theta}) u_k + \xi_k} \qquad B(z^{-1},\hat{\theta}) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_{nb} z^{-nb}$$

Zodpovedajúca diferenčná rovnica:

$$\boxed{y_k = b_1 u_{k-1} + \cdots + b_{nb} u_{k-n_b} + \xi_k}$$

Predpoklad: máme namerané vstupy a zodpovedajúce výstupy u_k a y_k pre k=1, ..., N, kde $N >> n_b$

$$\hat{\theta} = (b_1, b_2, \ldots b_{nb})^T$$

$$h_k = (u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_{k-nb})^T$$

$$H = \begin{pmatrix} u_{n_b-1} & u_{n_b-2} & \cdots & u_0 \\ u_{n_b} & u_{n_b-1} & & u_1 \\ u_{n_b+1} & u_{n_b} & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{N-1} & u_{N-2} & \cdots & u_{N-n_b} \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_{n_b} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

Odhad parametrov

$$\boxed{\hat{\theta}^* = (H^T H)^{-1} H^T y}$$

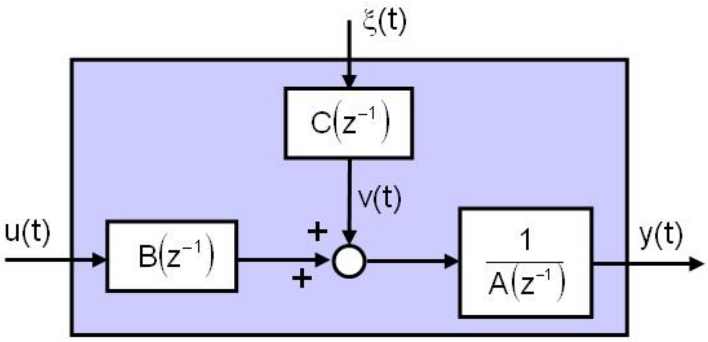
3. ARMAX model

$$\boxed{A(z^{-1},\hat{\theta}) y_k = B(z^{-1},\hat{\theta}) u_k + C(z^{-1},\hat{\theta}) \xi_k}$$

$$A(z^{-1},\hat{\theta}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{na} z^{-na}$$

$$B(z^{-1},\hat{\theta}) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_{nb} z^{-nb}$$

$$C(z^{-1},\hat{\theta}) = 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_{nc} z^{-nc}$$



Zodpovedajúca diferenčná rovnica

$$\boxed{y_k = -a_1 y_{k-1} - \cdots - a_{na} y_{k-n_a} + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_{nb} u_{k-n_b} + \xi_k + c_1 \xi_{k-1} + \cdots c_{nc} \xi_{k-n_c}}$$

Po porovnaní so všeobecnou štruktúrou pre tento prípad platí

$$\boxed{H\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)=\frac{C\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}{A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}} \qquad \boxed{G\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)=\frac{B\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}{A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}}$$

Po **dosadení** do rovnice pre **jednokrokovú predikciu** dostaneme

$$\boxed{\hat{y}_k=\frac{B\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}{C\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}u_k+\left(1-\frac{A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}{C\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)}\right)y_k} \quad \Leftarrow \quad \hat{y}_k=H^{-1}(z^{-1})G\left(z^{-1}\right)u_k+\left(1-H^{-1}(z^{-1})\right)y_k$$

Po roznásobení dostaneme

$$C\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)\hat{y}_k=B\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)u_k+\left(C\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)-A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)\right)y_k$$

K obom stranám rovnice pripočítame $\left(1-C\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)\right)\hat{y}_k$ a dostaneme

$$\hat{y}_k=B\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)u_k+\left(1-A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)\right)y_k+\left(C\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)-1\right)(y_k-\hat{y}_k)$$

kde $\boxed{e_k\left(\hat{\theta}\right)=y_k-\hat{y}_k}$ je chyba predikcie, ktorá je funkciou odhadovaných parametrov $\hat{\theta}$.

Výsledná rovnica má síce tvar lineárnej regresie

$$\boxed{\hat{y}_k=B\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)u_k+\left(1-A\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)\right)y_k+\left(C\left(z^{-1},\hat{\theta}\right)-1\right)e_k\left(\hat{\theta}\right)=h_k^T\hat{\theta}}$$

$$\hat{\theta}=(a_1,a_2,\ldots a_{na},b_1,b_2,\ldots b_{nb},c_1,c_2,\ldots c_{nc})^T$$

$$h_k=\left(-y_{k-1},-y_{k-2},\ldots,-y_{k-na},u_{k-1},u_{k-2},\ldots,u_{k-nb},e_{k-1}\left(\hat{\theta}\right),e_{k-2}\left(\hat{\theta}\right),\ldots,e_{k-nc}\left(\hat{\theta}\right)\right)^T$$

avšak **vzhľadom k nelineárnemu vplyvu vektora parametrov** $\hat{\theta}$ na vektor $\mathbf{h}^T$ sa nazýva **pseudolineárna regresia.**

⇒ **Neexistuje priama metóda** výpočtu odhadu parametrov, **je potrebná iteratívna metóda ⇒ <u>ROZŠÍRENÁ MNŠ (extended least-squares)</u>**

Predpoklad: máme namerané vstupy a zodpovedajúce výstupy u_k a y_k pre k=1, ..., N, kde $N>>\max(n_a,n_b,n_c)$

Pre prípad $n_a \geq n_b, n_c$

matica H v i-tej iterácii

$$H^{(i)}=\begin{pmatrix} -y_{n_a-1} & \cdots & -y_0 & u_{n_a-1} & \cdots & u_{n_a-n_b} & e_{n_a-1}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right)\ldots & e_{n_a-n_c}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) \\ -y_{n_a} & & -y_1 & u_{n_a} & & u_{n_a-n_b+1} & e_{n_a}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) & e_{n_a-n_c+1}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) \\ -y_{n_a+1} & & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{N-1} & \cdots & -y_{N-n_a} & u_{N-1} & \cdots & u_{N-n_b} & e_{N-1}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right)\ldots & e_{N-n_c}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) \end{pmatrix} \qquad y=\begin{pmatrix} y_{n_a} \\ y_{n_a+1} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

☑ **Postup:**

1. **Štart** pomocou **metódy najmenších štvorcov** (nultá iterácia, **i=0**)

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_{n_a} \\ y_{n_a+1} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \qquad H^{(0)} = \begin{pmatrix} -y_{n_a-1} & \cdots & -y_0 & u_{n_a-1} & \cdots & u_{n_a-n_b} \\ -y_{n_a} & & -y_1 & u_{n_a} & & u_{n_a-n_b+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_{N-1} & \cdots & -y_{N-n_a} & u_{N-1} & \cdots & u_{N-n_b} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\theta}^{(0)} = \left(H^{(0)T}H^{(0)}\right)^{-1}H^{(0)T}\mathbf{y} \qquad \text{kde} \qquad \hat{\theta}^{(0)} = (a_1, a_2, \ldots a_{na}, b_1, b_2, \ldots b_{nb})^T$$

2. Vypočítame **chyby predikcie** pre **i=0**

$$e_k\left(\hat{\theta}^{(0)}\right) = y_k - \hat{y}_k\left(\hat{\theta}^{(0)}\right)$$

$$\hat{y}_k\left(\hat{\theta}^{(0)}\right) = B\left(z^{-1}, \hat{\theta}^{(0)}\right)u_k + \left(1 - A\left(z^{-1}, \hat{\theta}^{(0)}\right)\right)y_k =$$
$$= b_1u_{k-1} + b_2u_{k-2} + \ldots + b_{nb}u_{k-nb} - a_1y_{k-1} - a_2y_{k-2} - \ldots - a_{na}y_{k-na}$$

3. Pre **i=1,..., M** kde **M je počet iterácií**

Vytvoríme **maticu H^(i)**

$$H^{(i)} = \begin{pmatrix} -y_{n_a-1} & \cdots & -y_0 & u_{n_a-1} & \cdots & u_{n_a-n_b} & e_{n_a-1}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) \ldots & e_{n_a-n_c}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) \\ -y_{n_a} & & -y_1 & u_{n_a} & & u_{n_a-n_b+1} & e_{n_a}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) & e_{n_a-n_c+1}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) \\ -y_{n_a+1} & & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{N-1} & \cdots & -y_{N-n_a} & u_{N-1} & \cdots & u_{N-n_b} & e_{N-1}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) \ldots & e_{N-n_c}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) \end{pmatrix}$$

Vypočítame **odhad vektora parametrov**

$$\hat{\theta}^{(i)} = \left(H^{(i)T}H^{(i)}\right)^{-1}H^{(i)T}\mathbf{y} \qquad \text{kde} \qquad \hat{\theta}^{(i)} = (a_1, a_2, \ldots a_{na}, b_1, b_2, \ldots b_{nb}, c_1, c_2, \ldots c_{nc})^T$$

Vypočítame **chyby predikcie**

$$\hat{y}_k^{(i)} = B\left(z^{-1}, \hat{\theta}^{(i)}\right)u_k + \left(1 - A\left(z^{-1}, \hat{\theta}^{(i)}\right)\right)y_k + \left(C\left(z^{-1}, \hat{\theta}^{(i)}\right) - 1\right)e_k\left(\hat{\theta}^{(i)}\right)$$

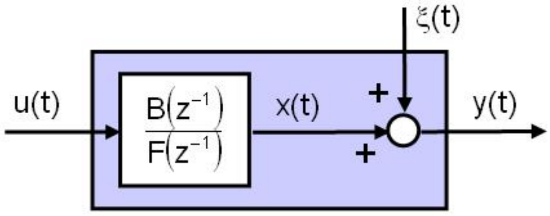
$$e_k\left(\hat{\theta}^{(i)}\right) = y_k - \hat{y}_k\left(\hat{\theta}^{(i)}\right)$$

Prejdeme na **ďalšiu iteráciu i=i+1.**

Poznámka:
Počet iterácií M je buď **vopred zvolený** alebo je **daný konvergenciou** odhadovaných **parametrov**.

6.2.2 *Output error* štruktúry modelov

1. OEM (*output error* model)



$$\boxed{y_k = \frac{B(z^{-1},\hat{\theta})}{F(z^{-1},\hat{\theta})} u_k + \xi_k = x_k + \xi_k}$$

$$B(z^{-1},\hat{\theta}) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_{nb} z^{-nb}$$

$$F(z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + \cdots + f_{nf} z^{-nf}$$

$$x_k(\hat{\theta}) = \frac{B(z^{-1},\hat{\theta})}{F(z^{-1},\hat{\theta})} u_k$$ x_k **- neskreslený výstup**

Neskreslený výstup nie je merateľný, preto **je funkciou odhadovaných parametrov**, potom zodpovedajúca diferenčná rovnica má tvar

$$\boxed{x_k(\hat{\theta}) = -f_1 x_{k-1}(\hat{\theta}) - \cdots - f_{nf} x_{k-nf}(\hat{\theta}) + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_{nb} u_{k-nb}}$$

Pre tento model platí

$$\boxed{G(z^{-1},\hat{\theta}) = \frac{B(z^{-1},\hat{\theta})}{F(z^{-1},\hat{\theta})}} \qquad \boxed{H(z^{-1},\hat{\theta}) = 1}$$

Po dosadení do vzťahu pre **jednokrokovú predikciu výstupu**

$$\boxed{\hat{y}_k = \frac{B(z^{-1},\hat{\boldsymbol{\theta}})}{F(z^{-1},\hat{\boldsymbol{\theta}})} u_k \overset{!}{=} x_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \quad \Leftarrow \quad \hat{y}_k = H^{-1}(z^{-1}) G(z^{-1}) u_k + (1 - H^{-1}(z^{-1})) y_k$$

$$\boxed{\hat{y}_k = x_k(\hat{\theta}) = (1 - F(z^{-1},\hat{\theta})) x_k + B(z^{-1},\hat{\theta}) u_k = z_k^T \hat{\theta}}$$

$$\hat{\theta} = (f_1, f_2, \ldots, f_{nf}, b_1, b_2, \ldots, b_{nb})^T$$

$$z_k = (-x_{k-1}(\hat{\theta}), \ldots, -x_{k-nf}(\hat{\theta}), u_{k-1}, \ldots, u_{k-nb},)^T$$

Keďže vektor z_k závisí od odhadovaných parametrov, opäť sa jedná o pseudolineárnu regresiu.

Vyžaduje to iteratívnu metódu ⇒ METÓDA INŠTRUMENTÁLNYCH PREMENNÝCH (*instrumental variable (IV) method*)

Nemerateľný **neskreslený výstup** vo vektore **z** môže byť **nahradený predikovaným výstupom.**

Zavedieme tzv. **inštrumentálne premenné** $\boxed{x_{k-j}(\hat{\theta}) = \hat{y}_{k-j}}$ pre j=1, 2, ..., n_f

⇒ **Ak by sme ako regresnú rovnicu nepoužili rovnicu pre jednokrokovú predikciu výstupu, ale priamo diferenčnú rovnicu pre výstup**

$$y_k = \frac{B(z^{-1},\hat{\theta})}{F(z^{-1},\hat{\theta})}u_k + \xi_k \qquad \Rightarrow \quad F(z^{-1},\hat{\theta})y_k = B(z^{-1},\hat{\theta})u_k + F(z^{-1},\hat{\theta})\xi_k = B(z^{-1},\hat{\theta})u_k + v_k$$

kde $\quad v_k = F(z^{-1},\hat{\theta})\xi_k \quad$ je **farebný šum – MA proces.**

Dostaneme **diferenčnú rovnicu**

$$\boxed{y_k = -f_1 y_{k-1} - \cdots - f_{nf} y_{k-nf} + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_{nb} u_{k-nb} + v_k = \mathbf{h}^T\hat{\theta} + v_k}$$

Odhad parametrov vypočítaný ako $\hat{\theta}^* = \left(H^T H\right)^{-1} H^T y$

kde $\quad H = \begin{pmatrix} -y_{n_f-1} & \cdots & -y_0 & u_{n_f-1} & \cdots & u_{n_f-n_b} \\ -y_{n_f} & & -y_1 & u_{n_f} & & u_{n_f-n_b+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_{N-1} & \cdots & -y_{N-n_f} & u_{N-1} & \cdots & u_{N-n_b} \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_{n_f} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$

však **bude vychýlený.**

$$\hat{\theta}^* = \left(H^T H\right)^{-1} H^T y = \left(H^T H\right)^{-1} H^T (H\theta + v) = \theta + \left(H^T H\right)^{-1} H^T v$$
$$E\left\{\hat{\theta}^*\right\} = \theta + E\left\{\left(H^T H\right)^{-1}\right\} E\left\{H^T v\right\}$$

Podmienka nevychýlenosti odhadu $\qquad E\left\{\hat{\theta}^*\right\} = \theta \qquad \Rightarrow \qquad E\left\{\left(H^T H\right)^{-1}\right\} E\left\{H^T v\right\} = 0$

Keďže $E\left\{\left(H^T H\right)^{-1}\right\} > 0$, aby sme dostali nevychýlený odhad malo by platiť $E\left\{H^T v\right\} = 0$,

čo znamená, že **signály, ktoré obsahuje matica H** (y_k, u_k) by **nemali byť korelované so signálmi**, ktoré obsahuje **vektor v** (v_k).

Signál **výstupu je korelovaný s farebným šumom v**, preto neplatí $E\left\{H^T v\right\} = 0$ a odhad parametrov je vychýlený.

Namiesto matice H použijeme takú maticu Z, ktorej prvky nie sú korelované s farebným šumom v, t.j. namiesto výstupu y_k použijeme neskreslený výstup x_k – inštrumentálne premenné.

⇒ **METÓDA INŠTRUMENTÁLNYCH PREMENNÝCH**

Predpoklad: máme namerané vstupy a zodpovedajúce výstupy u_k a y_k pre k=1, ..., N, kde $N \gg \max(n_f,n_b)$

Pre prípad $n_f \geq n_b$

Matica inštrumentálnych premenných v i-tej iterácii

$$\boxed{Z^{(i)} = \begin{pmatrix} -x_{n_f-1}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) & \dots & -x_0\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) & u_{n_f-1} & \dots & u_{n_f-n_b} \\ -x_{n_f}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) & & -x_1\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) & u_{n_f} & & u_{n_f-n_b+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{N-1}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) & \dots & -x_{N-n_f}\left(\hat{\theta}^{(i-1)}\right) & u_{N-1} & \dots & u_{N-n_b} \end{pmatrix}} \qquad \boxed{y = \begin{pmatrix} y_{n_f} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} -y_{n_f-1} & \dots & -y_0 & u_{n_f-1} & \dots & u_{n_f-n_b} \\ -y_{n_f} & & -y_1 & u_{n_f} & & u_{n_f-n_b+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_{N-1} & \dots & -y_{N-n_f} & u_{N-1} & \dots & u_{N-n_b} \end{pmatrix}}$$

Odhad parametrov v i-tom kroku $\boxed{\hat{\theta}^{(i)} = \left(Z^{(i)T} H\right)^{-1} Z^{(i)T} y}$

☑ **Postup:**

1. **Štart** pomocou **metódy najmenších štvorcov** (nultá iterácia, **i=0**), t.j. $\mathbf{Z^{(0)}=H}$.
   Vypočítame **vychýlený odhad parametrov**

   $$\hat{\theta}^{(0)} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T y \quad \text{kde} \quad \hat{\theta}^{(0)} = (f_1, f_2, \dots, f_{nf}, b_1, b_2, \dots, b_{nb})^T$$

2. Vypočítame **inštrumentálne premenné** pre i=0 a k=0,..., N-1

   $$x_k\left(\hat{\theta}^{(0)}\right) = -f_1 x_{k-1}\left(\hat{\theta}^{(0)}\right) - \dots - f_{nf} x_{k-nf}\left(\hat{\theta}^{(0)}\right) + b_1 u_{k-1} + \dots + b_{nb} u_{k-nb}$$

3. Pre **i=1,..., M** kde **M je počet iterácií**

   Vytvoríme **matice $\mathbf{Z^{(i)}}$ a H** a vypočítame **odhad parametrov**

   $$\hat{\theta}^{(i)} = \left(Z^{(i)T} H\right)^{-1} Z^{(i)T} y \qquad \text{kde} \qquad \hat{\theta}^{(i)} = (f_1, f_2, \dots, f_{nf}, b_1, b_2, \dots, b_{nb})^T$$

   Vypočítame **inštrumentálne premenné** $x_0\left(\hat{\theta}^{(i)}\right), x_1\left(\hat{\theta}^{(i)}\right), \dots, x_{N-1}\left(\hat{\theta}^{(i)}\right),$

   $$x_k\left(\hat{\theta}^{(i)}\right) = -f_1 x_{k-1}\left(\hat{\theta}^{(i)}\right) - \dots - f_{nf} x_{k-nf}\left(\hat{\theta}^{(i)}\right) + b_1 u_{k-1} + \dots + b_{nb} u_{k-nb}$$

   Prejdeme na **ďalšiu iteráciu i=i+1**.