Inverzia matice

Inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A} \in R^{nxn}$ je definovaná ako

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

kde **I** je n×n jednotková matica.

Ak $\mathbf{A}^{-1}$ **neexistuje** (má nulový determinant), potom **A** sa nazýva **singulárna matica**.

Condition number (číslo podmienenosti, kondičné číslo)

Číslo podmienenosti matice c(**A**) je **pomer medzi najväčšou a najmenšou singulárnou hodnotou** matice (výpočet čísla podmienenosti **v Matlabe – príkaz *cond***).

Číslo podmienenosti matice môže byť použité ako „miera singularity" matice. **Ak je číslo podmienenosti veľké, potom matica je blízko singulárnej**. Pre singulárnu maticu $c(\mathbf{A}) \to \infty$.

Najlepšie podmienená je jednotková matica, jej číslo podmienenosti je rovné 1.

Ak je matica zle podmienená, potom $\mathbf{AA}^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$

Najznámejšia zle podmienená matica je Hilbertova matica (v Matlabe príkaz *hilb*).

Jedným z **najväčších problémov** numerickej matematiky je **riešenie zle podmienených sústav**. **Niet presnej definície, kedy je sústava zle podmienená a kedy nie; neexistuje žiadna pevná hranica medzi týmito dvoma možnosťami**. Vo všeobecnosti sú matica a príslušná sústava lineárnych rovníc zle podmienené, ak inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ má niektoré prvky veľmi veľké v absolútnej hodnote (veľké vzhľadom k jednotke a vzhľadom k determinantu **|A|**). V každom prípade, ak sa budú prvky matice **A** a matice $\mathbf{A}^{-1}$ príliš líšiť, dôjde k veľkej zmene riešenia pri malej zmene koeficientov sústavy alebo pravej strany.

Príklady:

Singulárna matica: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ cond(**A**) = 8.1822e+015

Zle podmienená matica: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5.98 \end{bmatrix}$ cond(**A**) = 1619 det(**A**) = -0,04

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -149.5 & 75 \\ 100 & -50 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.99999999999994 & 0.00000000000003 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.00000000000006 \\ 0 & 0.99999999999994 \end{bmatrix}$$

Hilbertova matica 3. rádu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.3333 \\ 0.5 & 0.3333 & 0.25 \\ 0.3333 & 0.25 & 0.2 \end{bmatrix}$ cond(**A**) = 524.0568

det(**A**) = 4.6296e-004