Riadenie nelineárnych systémov

Metóda harmonickej rovnováhy I.

(výpočet ekvivalentných prenosov)

doc.Ing. Ján Kardoš, PhD.
ÚRK, D-410

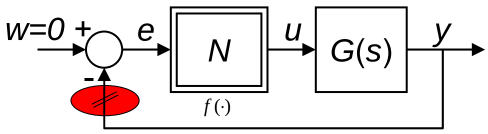
Metóda harmonickej rovnováhy

- Metóda ekvivalentných prenosov (describing function), (metóda harmonickej linearizácie)
- **Frekvenčná metóda analýzy** nelineárnych systémov
- Určenie **počtu** a **stability limitných cyklov**
- Nelineárny systém daný sériovým zapojením **statického nelineárneho člena** (typická nelinearita) a **lineárneho dynamického systému** vyššieho rádu
- Statický nelineárny člen *N* – **symetrický s nepárnou prevodovou charakteristikou** $f(-x) = -f(x)$
- Lineárny dynamický systém vyššieho rádu *G*(s) – **dobré filtračné vlastnosti (dolnopriepustný filter)** (samozrejme sa predpokladá **stabilný** dynamický systém)
- **Podstata metódy** harmonickej rovnováhy: **linearizácia** nelineárneho systému, ktorým sa šíri **harmonický signál**

2

Princíp metódy harmonickej rovnováhy

- Nelineárny regulačný obvod $\Rightarrow$ prerušíme spätnú väzbu



- Na vstup nelinearity zavedieme **harmonický** signál
$$e(t) = A\sin(\omega t)$$
- Na výstupe nelinearity – **periodický neharmonický** signál (**rozvinuteľný do Fourierovho radu**) $u(\omega t) = f\left(A\sin(\omega t)\right)$
- Dolnopriepustný filter $G(s)$ **odfiltruje vyššie harmonické**.
- Nelineárny člen môžeme nahradiť lineárnym členom, ktorý prenáša len **prvú harmonickú** (jednosmerná zložka je nulová) $\Rightarrow$ **ekvivalentný prenos** $G_N(A)$ Vyšetríme neskôr.
- Ak obnovíme spätnú väzbu obvod môže samovoľne kmitať.

3

Výpočet ekvivalentných prenosov

- Rozklad $u(\omega t) = f\left(A\sin(\omega t)\right) = f(\cdot)$ do Fourierovho radu

$$u(\omega t) = a_1\sin(\omega t) + a_2\sin(2\omega t) + \cdots + \frac{b_0}{2} + b_1\cos(\omega t) + b_2\cos(2\omega t) + \cdots$$

- koeficienty Fourierovho radu

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)d(\omega t)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)\sin(k\omega t)d(\omega t) \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)\cos(k\omega t)d(\omega t)$$

$$k = 1,\ldots,\infty$$

4

Výpočet ekvivalentných prenosov

- Nelineárny člen má nepárnu prevodovú charakteristiku, preto b_0=0 – jednosmerná zložka je nulová
- Po odfiltrovaní vyšších harmonických je prvá harmonická

$$u(\omega t) = a_1 \sin(\omega t) + b_1 \cos(\omega t) = A_1 \sin(\omega t + \gamma_1)$$

- V komplexnom tvare

$$u(\omega t) = A_1 e^{j\gamma_1} = a_1 + jb_1$$

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\gamma_1 = \arctan \frac{b_1}{a_1}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cdot) \sin(\omega t) d(\omega t)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cdot) \cos(\omega t) d(\omega t)$$

5

Výpočet ekvivalentných prenosov

- **Ekvivalentný prenos nelineárneho člena** je daný pomerom komplexnej amplitúdy prvej harmonickej zložky výstupu z nelinearity k amplitúde vstupného harmonického signálu

$$G_N(A) = \frac{A_1 e^{j\gamma_1}}{A} = \frac{a_1 + jb_1}{A}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cdot) \sin(\omega t) d(\omega t)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cdot) \cos(\omega t) d(\omega t)$$

$$|G_N(A)| = \frac{1}{A}\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\gamma = \gamma_1 = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

Bez hysterézy

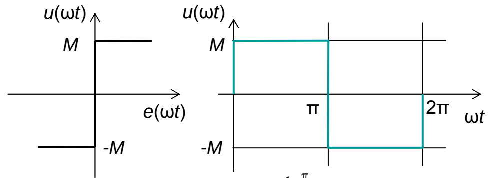
- Pre jednoznačnú statickú charakteristiku je $b_1 = 0$

$$G_N(A) = \frac{a_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(\cdot) \sin(\omega t) d(\omega t)$$

6

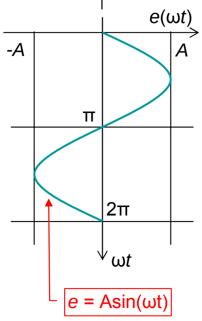
Výpočet ekvivalentných prenosov

- **Ideálne relé** $u(\omega t)=f\left(A\sin(\omega t)\right)=f(\cdot)$



$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)\cos(\omega t)d(\omega t)$$



$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} M\sin(\omega t)d(\omega t)-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} M\sin(\omega t)d(\omega t)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} M\sin(\omega t)d(\omega t)=\frac{2M}{\pi}\left[-\cos(\omega t)\right]_0^{\pi}=\frac{4M}{\pi}$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} M\cos(\omega t)d(\omega t)-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} M\cos(\omega t)d(\omega t)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} M\cos(\omega t)d(\omega t)=\frac{2M}{\pi}\left[\sin(\omega t)\right]_0^{\pi}=0$$

Jednoznačná nelinearita

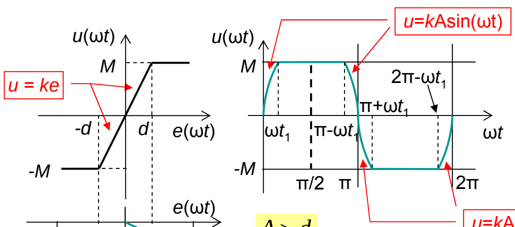
$$\boxed{G_N(A)=\frac{a_1}{A}=\frac{4M}{\pi A}}$$

7

Výpočet ekvivalentných prenosov

- **Saturácia** $u(\omega t)=f\left(A\sin(\omega t)\right)=f(\cdot)$

Jednoznačná nelinearita $\rightarrow b_1=0$

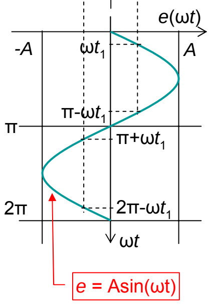


$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$k=\frac{M}{d} \qquad M=kd$$

$$d=A\sin(\omega t_1) \qquad \sin(\omega t_1)=\frac{d}{A}$$

$$\omega t_1=\arcsin\left(\frac{d}{A}\right)$$



$A>d$

$$u(\omega t)=kA\sin(\omega t) \quad pre \quad 0<\omega t<\omega t_1$$

$$u(\omega t)=M \quad pre \quad \omega t_1<\omega t<\pi/2$$

$$a_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\omega t_1} kA\sin^2(\omega t)d(\omega t)+\frac{4}{\pi}\int_{\omega t_1}^{\pi/2} M\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$a_1=\frac{2kA}{\pi}\left[\arcsin\left(\frac{d}{A}\right)+\frac{d}{A}\sqrt{1-\left(\frac{d}{A}\right)^2}\right]$$

$$\boxed{G_N(A)=\frac{a_1}{A}}$$

8

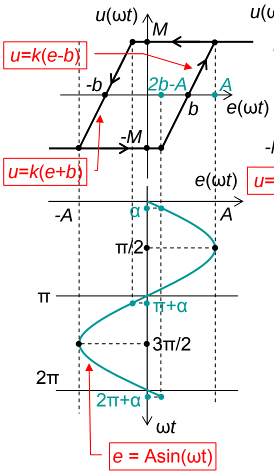
Výpočet ekvivalentných prenosov

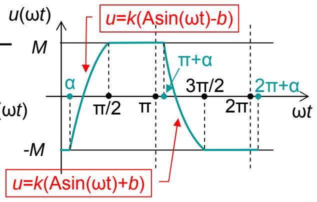
- **Hysteréza** – špec. prípad $A = b + \dfrac{M}{k}$

$$u(\omega t) = f\big(A\sin(\omega t)\big) = f(\cdot)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)\sin(\omega t)\,d(\omega t)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cdot)\cos(\omega t)\,d(\omega t)$$





$$u = k(e-b) \Longrightarrow M = k(A-b)$$

$$u = k(A\sin(\alpha) - b) = -M = -k(A-b) \Longrightarrow \sin(\alpha) = \frac{2b}{A} - 1$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi/2} k\big(A\sin(\omega t) - b\big)\sin(\omega t)\,d\omega t + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi+\alpha} M\sin(\omega t)\,d\omega t$$

$$a_1 = \frac{kA}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2b}{A} - 1\right) - \left(\frac{2b}{A} - 1\right)\sqrt{1 - \left(\frac{2b}{A} - 1\right)^2}\,\right]$$

$$b_1 = \frac{4kb}{\pi}\left(\frac{b}{A} - 1\right)$$

Nejednoznačná nelinearita

$$\boxed{G_N(A) = \frac{a_1 + jb_1}{A}}$$

9