## 3.3. Pasívny experiment

$\Rightarrow$ **Pasívny experiment** – využitie veličín z prevádzkových podmienok, **nemáme možnosť ovplyvniť voľbu bodov merania**

$\Rightarrow$ Predpokladáme náhradu funkčnej závislosti $y = F(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) + v$

regresnou funkciou $\hat{y} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{f}(\mathbf{u})$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n\right)^T \qquad k = n + 1 \text{ neznámych parametrov}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \left(f_0(\mathbf{u}), f_1(\mathbf{u}), \ldots, f_n(\mathbf{u})\right)^T$$

Predpokladajme, že uskutočníme celkom $N >> 1 + n$ meraní, potom optimálny odhad dostaneme pomocou **Gaussovho vzťahu**

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T y}$$

**Negatíva:**

- Matica **H** bude v týchto prípadoch **plnou maticou** a matice **P** a **R** teda **nebudú diagonálne**.
- Súčasťou riešenia **nebude hodnota účelovej funkcie**.
- Aj keď sa zdá, že je riešenie Gaussovho vzťahu aj v prípade pasívneho experimentu jednoduché, predsa môžu vzniknúť problémy v prípadoch, keď:
  1) matica **R** je **singulárna** (det(R)=0, t.j. **neinvertovateľná**)
  2) matica **R** je **zle podmienená** (det(R) je malé číslo, $\mathbf{R}.\mathbf{R}^{-1} \neq \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ )
  3) zvolíme nevhodné postupy pre určenie matice $\mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1}$, resp. **nevhodný postup riešenia systému rovníc**
  4) **obmedzená presnosť počítača a zaokrúhľovanie** pri zostavovaní matice **R.**

$\Rightarrow$ **Cieľom je modifikovať riešenie tak, aby sme sa vyhli výpočtu matice P (inverzii R).**

### 3.3.1. Jednorazové metódy

$\Rightarrow$ **Dávkové – jednorazové spracovanie údajov**

$\Rightarrow$ **Možnosti riešenia napr.:**

- **priame riešenie normálnych rovníc** $\mathbf{H}^T\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \mathbf{H}^T\mathbf{y}$
- **riešenie preurčeného systému rovníc** $y = H\hat{\theta}^*$
  - **singulárny rozklad matice H** (SVD – Singular Value Decomposition)
  - **QR rozklad matice H**.

$\Rightarrow$ **QR rozklad matice H**

**Ortogonálny alebo QR rozklad reprezentuje maticu ako súčin ortogonálnej matice Q a hornej trojuholníkovej matice R.**

$$H = QR$$

**Ortogonálna matica Q** je štvorcová matica, pre ktorú platí: $Q^T = Q^{-1} \Rightarrow Q^T Q = I$ .

Potom **preurčený systém rovníc**

$$y = H\hat{\theta}^*$$

môžme **pretransformovať**

$$Q^T y = Q^T H\hat{\theta}^* = Q^T Q\, R\hat{\theta}^* = R\hat{\theta}^*$$

**Riešenie systému rovníc**

$$\boxed{Q^T y = R\hat{\theta}^*}$$

**je jednoduché, kedže R je horná trojuholníková matica.**

***Príklad → priklad_preurc_syst.pdf***

**Negatíva jednorazových metód**

- v prípade **nového experimentu** (v preurčenom systéme rovníc sa pridá ďalší $N+1$ riadok) je potrebné **opakovať všetky výpočty v plnom rozsahu**
- pri väčšom počte údajov **veľké nároky na pamäť** a realizácia výpočtov môže byť **mimo reálneho času.**

### 3.3.2. Rekurzívne metódy

⇒ **Nové meranie** je využité **na korekciu odhadovaných parametrov** (použitie napr. v adaptívnych regulátoroch)

⇒ Predpokladajme, že **poznáme odhad parametrov v N-tom kroku**, získaný z N meraní a **chceme získať odhad v kroku N+1**

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1} = f\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N, y_{N+1}, \mathbf{h}_{N+1}\right)}$$

#### 3.3.2.1 Rekurzívna metóda najmenších štvorcov (RMNŠ) s váhovaním a exponenciálnym zabúdaním

⇒ Uvažujeme systém opísaný v i-tom experimente **lineárnou regresnou rovnicou**

$$y_i = \theta_0 + \sum_{k=1}^{n} \theta_k h_{ki} + v_i = \mathbf{h}_i^T \boldsymbol{\theta} + v_i \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

kde $\mathbf{h}_i^T = \mathbf{f}(\mathbf{u}_i) = \begin{pmatrix} 1 & h_{1i} & h_{2i} & \ldots & h_{ni} \end{pmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)^T$

$v_i$ je šum merania s vlastnosťami $\qquad E\{v_i\} = 0, \quad E\{v_i^2\} = \sigma^2$

**odhad výstupu** je $\quad \hat{y}_i = \hat{\theta}_0 + \sum_{k=1}^{n} \hat{\theta}_k h_{ki} = \mathbf{h}_i^T \hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)^T$

potom v i-tom experimente bude hodnota odchýlky $\qquad e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \mathbf{h}_i^T \hat{\boldsymbol{\theta}}$

Na **výpočet odhadu parametrov použijeme N vzoriek** a označíme ho $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = (\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)^T$

Označíme vektory $\quad \mathbf{y}_N = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{y}}_N = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_N = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$

$$\mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix} = \mathbf{y}_N - \hat{\mathbf{y}}_N = \mathbf{y}_N - \mathbf{H}_N\hat{\boldsymbol{\theta}}_N \quad \text{kde} \quad \mathbf{H}_N = \begin{pmatrix} 1 & h_{11} & h_{21} & \dots & h_{n1} \\ 1 & h_{12} & h_{22} & \dots & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{1N} & h_{2N} & \dots & h_{nN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}_N^T \end{pmatrix}$$

⇒ Nech $s_i = \lambda^{N-i} w_i$ je **všeobecný váhový koeficient**,

kde $w_i > 0$ je **váhový koeficient**
$0 < \lambda \leq 1$ je **faktor zabúdania**

**Použijeme účelovú funkciu** v tvare

$$Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right) = \sum_{i=1}^{N} s_i e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \lambda^{N-i} w_i \left(y_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{h}_i\right)^2 = \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{e}_N$$

kde
$$\begin{pmatrix} \lambda^{N-1} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{N-2} w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{W}_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & w_N \end{pmatrix} = \mathbf{W}_N > 0 \quad \text{je \textbf{váhová matica}}$$

⇒ **Minimalizácia účelovej funkcie**

$$Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right) = \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{e}_N = \left(\mathbf{y}_N - \mathbf{H}_N \hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)^T \mathbf{W}_N \left(\mathbf{y}_N - \mathbf{H}_N \hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_N} Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right)\Big|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*} = -2\mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \left(\mathbf{y}_N - \mathbf{H}_N \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) = 0$$

⇒ **Optimálny odhad parametrov v N-tom kroku**

kde
$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = \left(\mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{H}_N\right)^{-1} \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{y}_N = \mathbf{P}_N \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{y}_N = \mathbf{P}_N \mathbf{q}_N \\ &\mathbf{P}_N = \left(\mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{H}_N\right)^{-1} = \mathbf{P}_N^T > 0 \\ &\mathbf{q}_N = \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{y}_N\,. \end{aligned}}$$

⇒ **Optimálny odhad parametrov v (N+1) kroku**

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^* = \mathbf{P}_{N+1} \mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{W}_{N+1} \mathbf{y}_{N+1} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} \mathbf{H}_N^T & \mathbf{h}_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{W}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & w_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_N \\ \mathbf{h}_{N+1}^T \end{pmatrix}\right]^{-1}} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_N^T & \mathbf{h}_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{W}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & w_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_N \\ y_{N+1} \end{pmatrix}$$

Po roznásobení môžeme zapísať maticu $\mathbf{P}_{N+1}$ v tvare

$$\mathbf{P}_{N+1} = \left(\lambda \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{H}_N + w_{N+1} \mathbf{h}_{N+1} \mathbf{h}_{N+1}^T\right)^{-1} = \left(\lambda \mathbf{P}_N^{-1} + w_{N+1} \mathbf{h}_{N+1} \mathbf{h}_{N+1}^T\right)^{-1}$$

t.j. **pri rekurzívnom výpočte** odhadu parametrov **by bolo potrebné počítať inverziu matice**.

Použijeme **Woodburyho lemma o inverzii matíc**

$$\boxed{\left(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T\right)^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}\left(\mathbf{C} + \mathbf{B}^T \mathbf{A}\mathbf{B}\right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}}$$

Ak bude

$$\mathbf{A}^{-1} = \lambda \mathbf{P}_N^{-1} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{h}_{N+1} \qquad \mathbf{C} = w_{N+1}^{-1}$$

potom

$$\mathbf{P}_{N+1} = \lambda^{-1}\mathbf{P}_N - \underbrace{\lambda^{-1}\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}\overbrace{\left(w_{N+1}^{-1} + \mathbf{h}_{N+1}^T\lambda^{-1}\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}\right)^{-1}}^{\text{skalár}}}\mathbf{h}_{N+1}^T\lambda^{-1}\mathbf{P}_N$$

$$\frac{\frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}}{\frac{1}{w_{N+1}} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}} = \frac{w_{N+1}\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}}{\lambda + w_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}} = \boldsymbol{\gamma}_{N+1}$$

a dostaneme **rekurzívny vzťah pre výpočet disperznej matice bez potreby invertovať matice väčších rozmerov**

$$\boxed{\mathbf{P}_{N+1} = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{P}_N - \boldsymbol{\gamma}_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\gamma}_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T\right)\mathbf{P}_N}$$

kde $\boldsymbol{\gamma}_{N+1}$ je **korekčný faktor**

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma}_{N+1} = \frac{w_{N+1}\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}}{\lambda + w_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}} = \rho_{N+1}\mathbf{d}_{N+1}}$$

$$\boxed{\rho_{N+1} = \left(\lambda + w_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}\right)^{-1}} \quad \text{skalár}$$

$$\boxed{\mathbf{d}_{N+1} = w_{N+1}\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}} \quad \text{vektor}$$

Vzťah pre $P_{N+1}$ dosadíme do vzťahu pre **optimálny odhad parametrov v (N+1) kroku**

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^* = \mathbf{P}_{N+1}\mathbf{H}_{N+1}^T\mathbf{W}_{N+1}\mathbf{y}_{N+1}$$

Po úprave dostaneme $\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^* = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + \boldsymbol{\gamma}_{N+1}\left(y_{N+1} - \mathbf{h}_{N+1}^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + \boldsymbol{\gamma}_{N+1}e_{N+1}}$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nový odhad | = | starý odhad | + | vektor korekcií | · | ( nová nameraná hodnota výstupu | − | hodnota výstupu odhadovaná pomocou parametrov z minulého kroku ) |

t.j. **nový odhad získame korekciou predchádzajúceho odhadu**, pričom $e_{N+1}$ je **odchýlka (rezíduum)**

$$\boxed{e_{N+1} = y_{N+1} - \mathbf{h}_{N+1}^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*}$$

**Hodnota účelovej funkcie** (bez odvodenia)

$$\boxed{Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^*\right) = \lambda\left(Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) + \frac{w_{N+1}e_{N+1}^2}{\lambda + w_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}}\right) = \lambda\left(Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) + \rho_{N+1}w_{N+1}e_{N+1}^2\right)}$$

⇒ <u>**Algoritmus RMNŠ bez váhovania a zabúdania (prostá MNŠ)**</u>

$\lambda = 1 \quad a \quad w_i = 1$

Z predchádzajúceho kroku poznáme $P_N$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*$

V aktuálnom kroku nameriame $y_{N+1}$ ako odozvu na $\mathbf{h}_{N+1}$

| | | |
|---|---|---|
| **Zosilnenie** čitateľ: / menovateľ: | $\boldsymbol{\gamma}_{N+1} = \rho_{N+1}\mathbf{d}_{N+1}$ | $\mathbf{d}_{N+1} = \mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}$, $\rho_{N+1} = \left(1+\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{d}_{N+1}\right)^{-1}$ |
| **Odchýlka**: | $e_{N+1} = y_{N+1} - \mathbf{h}_{N+1}^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*$ | |
| **Nový odhad parametrov**: | $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^* = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + \rho_{N+1}e_{N+1}\mathbf{d}_{N+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + e_{N+1}\boldsymbol{\gamma}_{N+1}$ | |
| **Nová disperzná matica**: | $\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_N - \rho_{N+1}\mathbf{d}_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N = \mathbf{P}_N - \boldsymbol{\gamma}_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N$ | |
| **Nová hodnota kritéria**: | $Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^*\right) = Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) + \rho_{N+1}e_{N+1}^2 = Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) + \dfrac{e_{N+1}^2}{1+\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}}$ | |

***Príklad → priklad_rekurz_met.pdf + cvičenia***

⇒ **<u>Algoritmus RMNŠ bez váhovania so zabúdaním</u>**

$w_i = 1$ a $s_i = \lambda^{N-i}$.

Potom sa **zmenia** vzťahy

$$\boldsymbol{\gamma}_{N+1} = \rho_{N+1}\mathbf{d}_{N+1} = \frac{\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}}{\lambda + \mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}}$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{P}_N - \boldsymbol{\gamma}_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N\right)$$

$$Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^*\right) = \lambda\left(Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) + \frac{e_{N+1}^2}{\lambda + \mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}}\right)$$

Ostatné vzťahy zostanú **bez zmeny**

$$e_{N+1} = y_{N+1} - \mathbf{h}_{N+1}^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^* = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + \boldsymbol{\gamma}_{N+1}\left(y_{N+1} - \mathbf{h}_{N+1}^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + e_{N+1}\boldsymbol{\gamma}_{N+1}$$

**Konštantné exponenciálne zabúdanie** $\lambda = \text{konšt}$ – postupné **zabúdanie starších údajov**, pričom **najväčšia váha je na poslednom meraní**. Je vhodné v prípade, že sa parametre systému pomaly menia.

Ak sú parametre systému približne konštantné počas $T_0$ period vzorkovania, potom faktor zabúdania môže byť zvolený tak, aby vyhovoval vzťahu $T_0 = \dfrac{1}{1-\lambda}$.

**Typické hodnoty** $\lambda$ sú z intervalu 0,98 až 0,995.

**Premenlivé exponenciálne zabúdanie** $\lambda(t) \to 1$ – zabúdanie počiatočných údajov. Je vhodné pre stacionárne systémy v prípade **nevhodných počiatočných podmienok**. Napr.

$$\lambda(t) = \lambda_0\lambda(t-1) + (1-\lambda_0)\lambda_\infty \qquad \lambda(0), \lambda_0 \in \langle 0.95; 0.99\rangle$$

**<u>Negatívum</u>:**

Ak **vstupy** $\mathbf{h}_{k+1}$ pre $k \ge N$ neprinášajú **novú informáciu**, potom

$$\mathbf{P}_k\mathbf{h}_{k+1} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma}_{N+1} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}_{N+1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_N$$

pre $\lambda \in \langle 0.95; 0.99\rangle$ budú prvky matice **P** narastať geometrickým radom s kvocientom $\lambda^{-1}$, t.j. nastáva tzv. **„bursting“ disperznej matice.**

Exponenciálne **zabúdanie funguje správne** len ak sú vstupno/výstupné **údaje dostatočne vybudzujúce (prinášajú nové informácie)**. **V opačnom prípade** budú prvky kovariančnej matice aj zosilnenie identifikácie narastať a **príchod novej informácie môže spôsobiť prudkú (neadekvátnu) zmenu identifikovaných parametrov**.

⇒ **Algoritmus RMNŠ bez zabúdania s váhovaním,** t.j. $\lambda = 1$ a $s_i = w_i$

$$w_{N+1} = 1 - \varepsilon \frac{e_{N+1}^2}{1 + \mathbf{h}_{N+1}^T \mathbf{P}_N \mathbf{h}_{N+1}} \qquad \text{kde} \qquad 0.001 \le \varepsilon \le 0.01$$

**Zmenia** sa vzťahy

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{N+1} &= \rho_{N+1}\mathbf{d}_{N+1} = \frac{w_{N+1}\mathbf{P}_N \mathbf{h}_{N+1}}{1 + w_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T \mathbf{P}_N \mathbf{h}_{N+1}} \\ \mathbf{P}_{N+1} &= \mathbf{P}_N - \boldsymbol{\gamma}_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T \mathbf{P}_N \\ Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^*\right) &= Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) + \frac{w_{N+1}e_{N+1}^2}{1 + w_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T \mathbf{P}_N \mathbf{h}_{N+1}} \end{aligned}}$$

**Bez zmeny**

$$\boxed{\begin{aligned} e_{N+1} &= y_{N+1} - \mathbf{h}_{N+1}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^* &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + e_{N+1}\boldsymbol{\gamma}_{N+1} \end{aligned}}$$

⇒ **Vlastnosti odhadu $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*$** pre RMNŠ

**BLUE (Best Linear Unbiased Estimator:**

- lineárny vzhľadom k dátam
- nevychýlený (unbiased)
- výdatný (best, minimum variace)

**Linearita**

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = \left(\mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{H}_N\right)^{-1} \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{y}_N = \mathbf{P}_N \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{y}_N = \mathbf{L}_N \mathbf{y}_N$$

odhad je lineárny vzhľadom k nameraným výstupom.

**Nevychýlenosť**

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* - \boldsymbol{\theta} = \left(\mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{H}_N\right)^{-1} \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{y}_N - \boldsymbol{\theta} = \left(\mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{H}_N\right)^{-1} \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \left(\mathbf{y}_N - \mathbf{H}_N \boldsymbol{\theta}\right) = \mathbf{P}_N \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{v}_N$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{P}_N \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{v}_N \quad \Rightarrow \qquad E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right\} = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{P}_N \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N E\left\{\mathbf{v}_N\right\} = \boldsymbol{\theta}$$

**odhad je nevychýlený za predpokladu**, že $\qquad E\{v_i\} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, N$.

**Výdatnosť**

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N\right) = E\left\{\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N - \boldsymbol{\theta}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N - \boldsymbol{\theta}\right)^T\right\} = \mathbf{P}_N \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N E\left\{\mathbf{v}_N \mathbf{v}_N^T\right\} \mathbf{W}_N \mathbf{H}_N \mathbf{P}_N = \underbrace{\mathbf{P}_N \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \operatorname{cov}\left(\mathbf{v}_N\right) \mathbf{W}_N \mathbf{H}_N \mathbf{P}_N}_{\mathbf{B}^T\mathbf{B}}$$

Využijeme Schwarzovu nerovnosť

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} \ge \mathbf{B}^T\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{B}$$

Nech $\qquad \mathbf{B} = \sqrt{\operatorname{cov}\left(\mathbf{v}_N\right)}\,\mathbf{W}_N \mathbf{H}_N \mathbf{P}_N = \sqrt{\operatorname{cov}\left(\mathbf{v}_N\right)}\,\mathbf{W}_N \mathbf{H}_N \left(\mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \mathbf{H}_N\right)^{-1}$

Zvolíme **A** tak, aby platilo $\quad \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cov}\left(\mathbf{v}_N\right)}}\mathbf{H}_N$

potom $\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N) = \underbrace{\mathbf{P}_N \mathbf{H}_N^T \mathbf{W}_N \operatorname{cov}(\mathbf{v}_N) \mathbf{W}_N \mathbf{H}_N \mathbf{P}_N}_{\mathbf{P}_N \mathbf{P}_N^{-1} \mathbf{P}_N} \geq (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \underbrace{(\mathbf{H}_N^T \operatorname{cov}(\mathbf{v}_N)^{-1} \mathbf{H}_N)^{-1}}_{\mathbf{P}_N}$

Ak $\mathbf{W}_N = \operatorname{cov}(\mathbf{v}_N)^{-1}$ potom platí rovnosť

$\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N) = (\mathbf{H}_N^T \operatorname{cov}(\mathbf{v}_N)^{-1} \mathbf{H}_N)^{-1}$ t.j. **nadobúda najmenšiu hodnotu**.

**Odhad** $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = (\mathbf{H}_N^T \operatorname{cov}(\mathbf{v}_N)^{-1} \mathbf{H}_N)^{-1} \mathbf{H}_N^T \operatorname{cov}(\mathbf{v}_N)^{-1} \mathbf{y}_N$ **je výdatný.**

⇒ Pri rekurzívnych algoritmoch je potrebné **zvoliť počiatočné podmienky**:
**Štartovacia disperzná matica** môže byť zvolená ako

$\boxed{\mathbf{P}_0 \overset{!}{=} \lim_{\alpha\to\infty} \alpha \mathbf{I}}$ $\qquad 10^4 \leq \alpha \leq 10^{24}$

a **vektor odhadu parametrov** môže byť inicializovaný ako

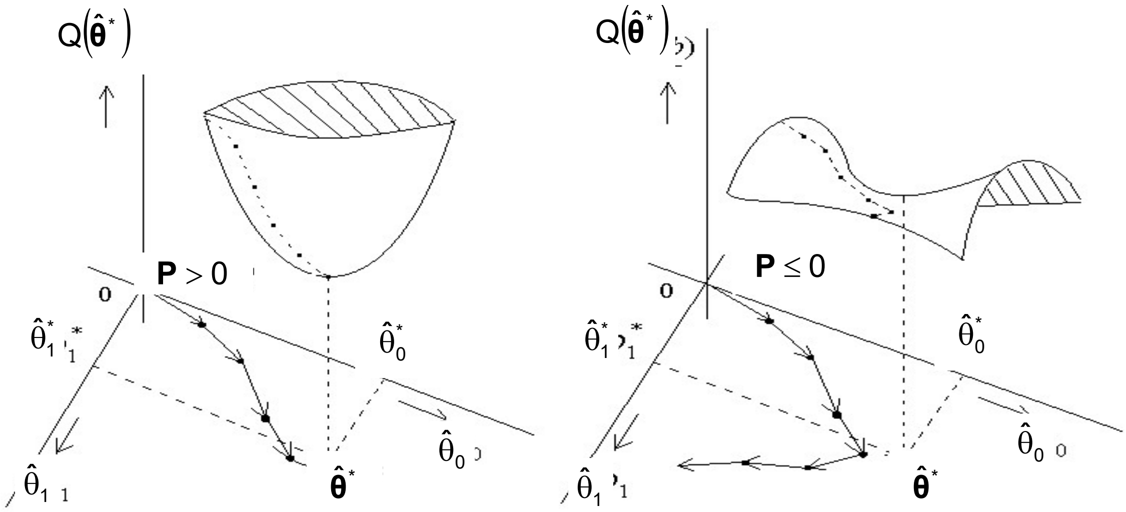
$\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^* \overset{!}{=} 0}$

alebo

$\boxed{\mathbf{P}_N = (\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N)^{-1}}$ **využijeme prvých N vzoriek ako jednorazový odhad**, je potrebná inverzia matice

a $\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = \mathbf{P}_N \mathbf{H}_N^T \mathbf{y}_N}$ v **rekurzívnom** výpočte **pokračujeme od vzorky N+1**

### 3.3.2.2 Odmocninová verzia rekurzívnej metódy najmenších štvorcov




⇒ Pri použití algoritmu RMNŠ sa môže stať, že v dôsledku zaokrúhľovania sa **naruší symetria disperznej matice**, čo môže spôsobiť **stratu jej pozitívnej definitnosti** a **ovplyvniť konvergenciu odhadu parametrov**.

Ak $\mathbf{P}_{N-1} > 0$ bude aj $\mathbf{P}_N = (\mathbf{I} - \rho_N \mathbf{d}_N \mathbf{h}_N^T) \mathbf{P}_{N-1} > 0$ ?

⇒ Preto je vhodnejšie použiť odmocninovú verziu RMNŠ.
Keď $\mathbf{P}_N$ je **symetrická a kladne definitná** matica, je možné ju **vyjadriť pomocou jej odmocniny**, ktorú označíme $\mathbf{G}_N$ a na ňu sa už také prísne podmienky nekladú

$\boxed{\mathbf{P}_N = \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N \overset{!}{>} 0}$ $\qquad \mathbf{G}_N$ je **odmocnina (koreň) matice** $\mathbf{P}_N$

Definujme $\boxed{\mathbf{z}_{N+1} = \mathbf{G}_N \mathbf{h}_{N+1}}$

potom $\quad \mathbf{d}_{N+1} = \mathbf{P}_N \mathbf{h}_{N+1} = \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N \mathbf{h}_{N+1} = \mathbf{G}_N^T \mathbf{z}_{N+1}$

a ďalšie vzťahy pre RMNŠ budú mať tvar

$$\boxed{\begin{aligned}
&\rho_{N+1} = \left(1 + \mathbf{h}_{N+1}^T \mathbf{P}_N \mathbf{h}_{N+1}\right)^{-1} = \left(1 + \mathbf{h}_{N+1}^T \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N \mathbf{h}_{N+1}\right)^{-1} = \left(1 + \mathbf{z}_{N+1}^T \mathbf{z}_{N+1}\right)^{-1} \\
&e_{N+1} = y_{N+1} - \mathbf{h}_{N+1}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* \\
&\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^* = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + \rho_{N+1} \mathbf{d}_{N+1} e_{N+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + \rho_{N+1} e_{N+1} \mathbf{G}_N^T \mathbf{z}_{N+1} \\
&Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^*\right) = Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) + \rho_{N+1} e_{N+1}^2
\end{aligned}}$$

Potrebujeme ešte **rekurentný vzťah** pre $\mathbf{G}_{N+1}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{N+1} &= \mathbf{G}_{N+1}^T \mathbf{G}_{N+1} = \mathbf{P}_N - \rho_{N+1} \mathbf{d}_{N+1} \mathbf{h}_{N+1}^T \mathbf{P}_N = \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N - \rho_{N+1} \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N \mathbf{h}_{N+1} \mathbf{h}_{N+1}^T \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N = \\
&= \mathbf{G}_N^T \left(\mathbf{I} - \rho_{N+1} \mathbf{z}_{N+1} \mathbf{z}_{N+1}^T\right) \mathbf{G}_N
\end{aligned}$$

Platí $\quad \mathbf{I} - \rho_{N+1} \mathbf{z}_{N+1} \mathbf{z}_{N+1}^T = \left(\mathbf{I} - \dfrac{\rho_{N+1}}{1 + \sqrt{\rho_{N+1}}} \mathbf{z}_{N+1} \mathbf{z}_{N+1}^T\right)^2$

potom $\quad \boxed{\mathbf{G}_{N+1} = \left(\mathbf{I} - \dfrac{\rho_{N+1}}{1 + \sqrt{\rho_{N+1}}} \mathbf{z}_{N+1} \mathbf{z}_{N+1}^T\right) \mathbf{G}_N}$

⇒ **Počiatočné podmienky**

$$\boxed{\mathbf{G}_0 = \left(10^2 \div 10^{12}\right) \mathbf{I}}$$

alebo využijeme jednorazový odhad z prvých N vzoriek

$$\mathbf{P}_N = \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N = \left(\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N\right)^{-1} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{G}_N = \left(\mathbf{H}_N^T\right)^{-1}}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N \mathbf{H}_N^T \mathbf{y}_N}$$

alebo na určenie matice $\mathbf{G}_N$ v tvare **hornej trojuholníkovej matice** môžeme použiť **Choleského algoritmus**

$$\mathbf{P}_N = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&1.\ g_{11} = \pm\sqrt{p_{11}} \\
&2.\ g_{1j} = \frac{1}{g_{11}} p_{1j} && j = 2, 3, \ldots, n \\
&3.\ g_{ii} = \pm\sqrt{p_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ki}^2} && i = 2, 3, \ldots, n \\
&4.\ g_{ij} = \frac{1}{g_{ii}}\left(p_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ki} g_{kj}\right) && j = i+1, \ldots, n
\end{aligned}}$$

☑ ***Postup***:

| | **Základná verzia** | **Odmocninová verzia** |
|---|---|---|
| **1. Štart** | $\mathbf{P}_0 = \left(10^4 \div 10^{24}\right)\mathbf{I}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^* = 0$ <br> alebo <br> $\mathbf{P}_N = \left(\mathbf{H}_N^T\mathbf{H}_N\right)^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = \mathbf{P}_N\mathbf{H}_N^T\mathbf{y}_N$ | $\mathbf{G}_0 = \left(10^2 \div 10^{12}\right)\mathbf{I}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^* = 0$ <br> alebo <br> $\mathbf{G}_N = \left(\mathbf{H}_N^T\right)^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = \mathbf{G}_N^T\mathbf{G}_N\mathbf{H}_N^T\mathbf{y}_N$ |
| **2. Odchýlka (reziduum)** | $e_{N+1} = y_{N+1} - \mathbf{h}_{N+1}^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*$ | $e_{N+1} = y_{N+1} - \mathbf{h}_{N+1}^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*$ |
| **3. Vektor zosilnenia** | $\mathbf{d}_{N+1} = \mathbf{P}_N\mathbf{h}_{N+1}$ | $\mathbf{z}_{N+1} = \mathbf{G}_N\mathbf{h}_{N+1}$ |
| **4. Skalár** | $\rho_{N+1} = \left(1 + \mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{d}_{N+1}\right)^{-1}$ | $\rho_{N+1} = \left(1 + \mathbf{z}_{N+1}^T\mathbf{z}_{N+1}\right)^{-1}$ |
| **5. Nový odhad** | $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^* = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + \rho_{N+1}e_{N+1}\mathbf{d}_{N+1}$ | $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^* = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* + \rho_{N+1}e_{N+1}\mathbf{G}_N^T\mathbf{z}_{N+1}$ |
| **6. Nová disperzná matica** | $\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_N - \rho_{N+1}\mathbf{d}_{N+1}\mathbf{h}_{N+1}^T\mathbf{P}_N$ | $\mathbf{G}_{N+1} = \mathbf{G}_N - \dfrac{\rho_{N+1}}{1+\sqrt{\rho_{N+1}}}\mathbf{z}_{N+1}\mathbf{z}_{N+1}^T\mathbf{G}_N$ |
| **7. Nová účelová funkcia** | $Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^*\right) = Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) + \rho_{N+1}e_{N+1}^2$ | $Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}^*\right) = Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) + \rho_{N+1}e_{N+1}^2$ |

***Príklad → priklad_rekurz_met.pdf + cvičenia***

### 3.3.2.3 <u>Rekurzívne algoritmy V.Peterku</u>

⇒ Václav Peterka vytvoril dvojicu rekurzívnych algoritmov REFIL a LDFIL, ktoré umožňujú **získať optimálny odhad parametrov $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*$ bez požiadavky na invertovanie matíc**.

Vyjadrime **chybu predikcie v k-tom kroku** ako súčin dvoch vektorov

$$e_k = y_k - \mathbf{h}_k^T\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = -\left[\mathbf{h}_k^T \quad y_k\right]\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k \\ -1\end{bmatrix} = \mathbf{z}_k^T\mathbf{c} \qquad k = 1,\ldots,N \qquad N >> 1 + \dim\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

kde $\boxed{\mathbf{z}_k = \left[\mathbf{h}_k^T \quad y_k\right]^T}$ $\boxed{\mathbf{c} = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_k \quad -1\right]^T}$

Potom **preurčený systém rovníc** vyjadríme v tvare

$$\boxed{\mathbf{e}_N = \mathbf{Z}_N\mathbf{c}}$$

$$\mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}_N = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \qquad \boxed{\mathbf{Z}_N = \left[\mathbf{H}_N \ \ \mathbf{y}_N\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^T \\ \mathbf{z}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{z}_N^T \end{pmatrix}}$$

**Účelovú funkciu** vyjadríme v tvare

$$Q(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \mathbf{e}_N{}^T\mathbf{e}_N = \mathbf{c}^T\mathbf{Z}_N^T\mathbf{Z}_N\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i^T\right)\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbf{V}_N\mathbf{c}$$

$$\boxed{\mathbf{V}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T + \mathbf{z}_N \mathbf{z}_N^T = \mathbf{V}_{N-1} + \mathbf{z}_N \mathbf{z}_N^T}$$

Ak by sme uvažovali aj parameter zabúdania $\lambda$, potom

$$Q(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda^{N-i} e_i\right)^2 = \mathbf{c}^T \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda^{2(N-i)} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T\right) \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{V}_N \mathbf{c}$$

$$\boxed{\mathbf{V}_N = \lambda^2 \mathbf{V}_{N-1} + \mathbf{z}_N \mathbf{z}_N^T}$$

Potrebujeme inverziu matice $\mathbf{V}_N$, definujme **kladne definitnú maticu $\mathbf{R}_N$**

$$\boxed{\left(\mathbf{V}_N\right)^{-1} \overset{!}{=} \mathbf{R}_N}$$

Požiadavku **kladnej definitnosti matice $\mathbf{R}_N$** splnil Peterka vo svojich **algoritmoch REFIL a LDFIL** tak, že realizoval **odmocninový rozklad** alebo **LDL rozklad matice $\mathbf{R}_N$**.

**a) <u>Algoritmus REFIL</u>**

$\Rightarrow$ Predpokladá, že $\mathbf{G}_N$ je **dolnou trojuholníkovou maticou** v tvare

$$\boxed{\mathbf{R}_N = \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N = \mathbf{R}_N^T \overset{!}{>} 0} \qquad \boxed{\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}^T & \gamma \end{pmatrix}}$$

**Optimálny odhad parametrov** potom bude $\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = -\frac{\mathbf{g}}{\gamma}}$

a **hodnota účelovej funkcie** $\boxed{Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) = \frac{1}{\gamma^2}}$

$\Rightarrow$ Potrebujeme **rekurzívny vzťah pre výpočet matice $\mathbf{G}_N$**

Označme $\boxed{\mathbf{f}_N = \mathbf{G}_{N-1} \mathbf{z}_N = \left[f_1, f_2, \ldots, f_n\right]^T}$

potom

$$\boxed{\mathbf{G}_N = \mathbf{W}_{N-1} \frac{\mathbf{G}_{N-1}}{\lambda} = \begin{pmatrix} \frac{s_0}{s_1} & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{f_1 f_2}{s_1 s_2} & \frac{s_1}{s_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{f_1 f_n}{s_{n-1} s_n} & -\frac{f_2 f_n}{s_{n-1} s_n} & \ldots & \frac{s_{n-1}}{s_n} \end{pmatrix} \frac{\mathbf{G}_{N-1}}{\lambda}}$$

kde $s_0^2 = \lambda^2$

$$s_q^2 = \lambda^2 + \sum_{k=1}^{q} f_k^2 = s_{q-1}^2 + f_q^2 \qquad q = 1, \ldots, n$$

$$s_n^2 = \lambda^2 + \mathbf{f}_N^T \mathbf{f}_N$$

$f_i$, $i = 1, \ldots, n$ sú prvky vektora $\mathbf{f}_N$ a $n = 1 + \dim(\boldsymbol{\theta})$.

Prvky matice $\mathbf{G}_N$ označíme ${}^N g_{ij}$ a vypočítame ich podľa vzťahu (kde ${}^{N-1} g_{ij}$ sú prvky matice $\mathbf{G}_{N-1}$)

$$\boxed{{}^N g_{ij} = \frac{1}{\lambda} \frac{s_{i-1}}{s_i} \left( {}^{N-1} g_{ij} - \frac{f_i}{s_{i-1}^2} \sum_{k=j}^{i-1} f_k \, {}^{N-1} g_{kj} \right)}$$

⇒ **Štart algoritmu**: $\mathbf{G}_N$ získame **odmocninovým rozkladom** matice $\mathbf{R}_N$

Keďže platí $r_{ii} = \sum_{k=i}^{n} g_{ki}^2 \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad\qquad r_{ij} = \sum_{k=i}^{n} g_{ki} g_{kj} \quad i \geq j$

potom

$$\boxed{\begin{array}{ll} g_{nn} = \sqrt{r_{nn}} & g_{nj} = \dfrac{1}{g_{nn}} r_{nj} \text{ pre } j = 1,\dots,n-1 \\ g_{ii} = \sqrt{r_{ii} - \sum\limits_{k=i+1}^{n} g_{ki}^2} \text{ pre } i = n-1,\dots,1 & g_{ij} = \dfrac{1}{g_{ii}}\left( r_{ij} - \sum\limits_{k=i+1}^{n} g_{ki} g_{kj} \right) \text{ pre } j = i-1,\dots,1 \end{array}}$$

⇒ Vzťah medzi $\mathbf{R}_N$ a $\mathbf{G}_{N-1}$

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{G}_N^T \mathbf{G}_N = \frac{\mathbf{G}_{N-1}^T}{\lambda} \mathbf{W}_{N-1}^T \mathbf{W}_{N-1} \frac{\mathbf{G}_{N-1}}{\lambda} = \frac{\mathbf{G}_{N-1}^T}{\lambda} \mathbf{M}_{N-1} \frac{\mathbf{G}_{N-1}}{\lambda}$$

☑ ***Postup***:

1. Určíme východiskovú maticu $\mathbf{R}_N$ (štvorcová matica rozmeru nxn, kde $n = 1 + \dim(\boldsymbol{\theta})$)

   $$\mathbf{Z}_N = [\mathbf{H}_N \; \mathbf{y}_N] \quad \rightarrow \quad \mathbf{V}_N = \mathbf{Z}_N^T \mathbf{Z}_N = \mathbf{R}_N^{-1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{R}_N$$

   a zrealizujeme odmocninový rozklad matice $\mathbf{R}_N$ a vypočítame maticu $\mathbf{G}_N$

   $$g_{nn} = \sqrt{r_{nn}}$$

   $$g_{nj} = \frac{1}{g_{nn}} r_{nj} \qquad j = 1,\dots,n-1$$

   $$g_{ii} = \sqrt{r_{ii} - \sum_{k=i+1}^{n} g_{ki}^2} \qquad i = n-1,\dots,1$$

   $$g_{ij} = \frac{1}{g_{ii}}\left( r_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} g_{ki} g_{kj} \right) \qquad j = i-1,\dots,1$$

   alebo $\mathbf{G}_0 \overset{!}{=} \left(10^2 \div 10^{12}\right)\mathbf{I} \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^* \overset{!}{=} 0$

2. Vypočítame odhad parametrov a hodnotu účelovej funkcie

   Ak $\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}^T & \gamma \end{pmatrix}$

   potom $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = -\dfrac{\mathbf{g}}{\gamma}$ a $Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) = \dfrac{1}{\gamma^2}$

3. Vypočítame prvky matice $\mathbf{W}_N$

   $$\mathbf{z}_{N+1} = \left[\mathbf{h}_{N+1}^T \quad y_{N+1}\right]^T$$

   $$\mathbf{f}_{N+1} = \mathbf{G}_N \mathbf{z}_{N+1} = \left[f_1, f_2, \dots, f_n\right]^T$$

   $$s_0^2 = \lambda^2 \qquad s_q^2 = s_{q-1}^2 + f_q^2 \qquad q = 1,2,\dots,n$$

4. Vypočítame prvky novej matice $\mathbf{G}_{N+1}$ a pokračujeme krokom 2.

   $${}^{N+1}g_{ij} = \frac{1}{\lambda} \frac{s_{i-1}}{s_i}\left( {}^{N}g_{ij} - \frac{f_i}{s_{i-1}^2} \sum_{m=j}^{i-1} f_m \, {}^{N}g_{mj} \right) \qquad \frac{f_i}{s_{i-1}^2} \sum_{m=j}^{i-1} f_m \, {}^{N}g_{mj} = 0 \text{ pre } i = j$$

🗎 ***Príklad → priklad_rekurz_met.pdf + cvičenia***

**b) <u>Algoritmus LDFIL</u>**

$\Rightarrow$ Predpokladá, že **symetrickú pozitívne definitnú** maticu $\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_N^T > 0$ **rozložíme na súčin troch matíc**

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{L}_N{}^T \mathbf{D}_N \mathbf{L}_N$$

kde
$$\mathbf{D}_N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{L}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{(n-1)1} & l_{(n-1)2} & \dots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} l_{ii} = 1 & i = 1,\dots,n \\ l_{ij} = 0 & i > j \end{matrix}$$

Označme štruktúru matíc nasledovne

$$\boxed{\mathbf{R}_N = \mathbf{L}_N{}^T \mathbf{D}_N \mathbf{L}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}^T & \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}^T & 1 \end{pmatrix}}$$

**Optimálny odhad parametrov** potom bude $\boxed{\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = -\boldsymbol{\lambda}}$

a **hodnota účelovej funkcie** $\boxed{Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) = \frac{1}{d}}$

$\Rightarrow$ **Štart algoritmu**: $\mathbf{L}^T\mathbf{DL}$ **rozklad** matice $\mathbf{R}_N$ ($r_{ij}$ sú prvky matice $\mathbf{R}_N$)

Keďže platí
$$r_{ij} = \sum_{k=i}^{n} l_{ki} d_k l_{kj} = d_i l_{ij} + \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} d_k l_{kj} \qquad r_{ii} = d_i + \sum_{k=i+1}^{n} d_k l_{ki}^2$$

potom
$$\boxed{l_{ij} = \frac{1}{d_i}\left(r_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} d_k l_{kj}\right)} \qquad \boxed{d_i = r_{ii} - \sum_{k=i+1}^{n} d_k l_{ki}^2}$$

**prvky matice $\mathbf{L}_N$** **prvky matice $\mathbf{D}_N$**

$\Rightarrow$ **Rekurzívne vzťahy** pre matice $\mathbf{L}_N$ a $\mathbf{D}_N$

Označme $\mathbf{f}_N = \mathbf{L}_{N-1}\mathbf{z}_N$ a $f_i$ označuje i-ty prvok vektora $\mathbf{f}_N$

potom
$$\mathbf{L}_N = \mathbf{X}_{N-1}\mathbf{L}_{N-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{f_2 f_1}{s_1^2} d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{f_3 f_1}{s_2^2} d_1 & -\frac{f_3 f_2}{s_2^2} d_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\frac{f_n f_1}{s_{n-1}^2} d_1 & -\frac{f_n f_2}{s_{n-1}^2} d_2 & -\frac{f_n f_3}{s_{n-1}^2} d_3 & \dots & 1 \end{pmatrix} \mathbf{L}_{N-1}$$

$$\mathbf{D}_N = \mathbf{U}_{N-1}\mathbf{D}_{N-1} = \begin{pmatrix} \frac{s_0^2}{s_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{s_1^2}{s_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_2^2}{s_3^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s_{n-1}^2}{s_n^2} \end{pmatrix} \frac{\mathbf{D}_{N-1}}{\lambda^2}$$

Prvky matice $\mathbf{X}_{N-1}$ $\quad {}^{N-1}x_{ij} = -\frac{f_i f_j d_j}{s_{i-1}^2}$

kde $\quad s_0^2 = \lambda^2$

$$s_q^2 = \lambda^2 + \sum_{k=1}^{q} d_k f_k^2 = s_{q-1}^2 + d_q f_q^2 \qquad q = 1,\dots,n$$

$$s_n^2 = \lambda^2 + \mathbf{f}_N^T \mathrm{D}_{N-1} \mathbf{f}_N$$

$f_i$ označuje i-ty prvok vektora $\mathbf{f}_N$ a $d_i$ je i-ty diagonálny prvok matice $\mathrm{D}_{N-1}$.

Prvky matice $\mathbf{L}_N$ $\quad \boxed{{}^{N}l_{ij} = {}^{N-1}l_{ij} + \sum_{k=j}^{i-1} {}^{N-1}x_{ik}\ {}^{N-1}l_{kj} = {}^{N-1}l_{ij} - \frac{f_i}{s_{i-1}^2} \sum_{k=j}^{i-1} f_k\ {}^{N-1}d_k\ {}^{N-1}l_{kj}}$

Prvky matice $\mathbf{U}_{N-1}$ $\quad {}^{N-1}u_i = \frac{1}{\lambda^2}\frac{s_{i-1}^2}{s_i^2}$

Prvky matice $\mathbf{D}_N$ $\quad \boxed{{}^{N}d_i = \frac{1}{\lambda^2}\frac{s_{i-1}^2}{s_i^2}\ {}^{N-1}d_i}$

☑ ***Postup***:

1. Určíme východiskovú maticu $\mathbf{R}_N$ (štvorcová matica rozmeru nxn, kde $n = 1 + \dim(\boldsymbol{\theta})$)

$$\mathbf{Z}_N = [\mathbf{H}_N\ \mathbf{y}_N] \quad\rightarrow\quad \mathbf{V}_N = \mathbf{Z}_N^T\mathbf{Z}_N = \mathbf{R}_N^{-1} \quad\rightarrow\quad \mathbf{R}_N$$

a zrealizujeme $\mathbf{L}^T\mathbf{DL}$ rozklad matice $\mathbf{R}_N$, t.j. vypočítame matice $\mathbf{L}_N$ a $\mathbf{D}_N$

$$d_i = r_{ii} - \sum_{k=i+1}^{n} d_k l_{ki}^2 \qquad i = n,\dots,1$$

$$l_{ij} = \frac{1}{d_i}\left(r_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} d_k l_{kj}\right) \qquad j = i-1,\dots,1$$

$$l_{ii} = 1$$

alebo $\quad \mathbf{L}_0 \overset{!}{=} \mathbf{I};\quad \mathbf{D}_0 \overset{!}{=} \left(10^2 \div 10^{12}\right)\mathbf{I} \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^* \overset{!}{=} 0$

2. Vypočítame odhad parametrov a hodnotu účelovej funkcie

Ak $\quad \mathbf{R}_N = \mathbf{L}_N^T\mathbf{D}_N\mathbf{L}_N = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}^T & \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}^T & 1 \end{pmatrix}$

potom $\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_N^* = -\boldsymbol{\lambda}$

$$Q\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N^*\right) = \frac{1}{d}$$

3. Určíme parametre potrebné na výpočet prvkov matíc $\mathbf{X}_N$ a $\mathbf{U}_N$

$$\mathbf{f}_{N+1} = \mathbf{L}_N \mathbf{z}_{N+1} \quad \text{kde} \quad \mathbf{z}_{N+1} = \left[\mathbf{h}_{N+1}^T \quad y_{N+1}\right]^T \quad \text{a}$$

$$s_0^2 = \lambda^2$$

$$s_q^2 = \lambda^2 + \sum_{k=1}^{q} d_k f_k^2 = s_{q-1}^2 + d_q f_q^2 \qquad q = 1, \ldots, n$$

$d_i$ je i-ty diagonálny prvok matice $\mathbf{D}_N$.

4. Vypočítame prvky nových matíc $\mathbf{L}_{N+1}$ a $\mathbf{D}_{N+1}$ pokračujeme krokom 2.

$$^{N+1}d_i = {}^{N}d_i \, \frac{1}{\lambda^2} \frac{s_{i-1}^2}{s_i^2}$$

$$^{N+1}l_{ij} = {}^{N}l_{ij} - \frac{f_i}{s_{i-1}^2} \sum_{m=j}^{i-1} f_m \; {}^{N}d_m \; {}^{N}l_{mj}$$

🗎 ***Príklad → priklad_rekurz_met.pdf + cvičenia***