8 PRAKTICKÉ OTÁZKY IDENTIFIKÁCIE

8.1. Analýza systému

Čo sú vstupy a čo výstupy?

Sú merateľné?

Je možné / dovolené ich aktívne nastavovať?

Perióda vzorkovania?

$\Rightarrow$ Nech T_{vz} je **perióda vzorkovania**, potom $\omega_s = \frac{2\pi}{T_{vz}}$ je **frekvencia vzorkovania** a

$\omega_N = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_{vz}}$ je **Nyquistova frekvencia**.

Shannon-Kotelnikovov-Nyquistov teorém: Presná rekonštrukcia spojitého signálu z jeho vzoriek je možná vtedy, ak bol vzorkovaný frekvenciou aspoň dvakrát vyššou ako je maximálna frekvencia rekonštruovaného signálu.

Ak vzorkovaný signál obsahuje frekvencie vyššie ako ω_N, potom budú tieto interpretované ako príspevky od nižších frekvencií – **aliasing** – a rekonštruovaný signál bude odlišný od pôvodného. **Informácia o frekvenciách vyšších ako Nyquistova frekvencia sa pri vzorkovaní stratí**. Preto ak predpokladáme, že signál obsahuje frekvencie vyššie ako ω_N, mal by byť **signál pred vzorkovaním prefiltrovaný** cez tzv. **antialiasing filter**, ktorý príspevky od týchto frekvencií neprepustí.

V prípade zašumeného vstupného signálu **sa perióda vzorkovania zvyčajne volí tak, aby spektrum užitočného signálu bolo pod ω_N** a antialiasing filter potom odfiltruje vysokofrekvenčné príspevky od šumu.

$\Rightarrow$ Teoreticky je najvýhodnejšie vzorkovať tak rýchlo ako je technicky (a ekonomicky) možné.

Avšak pri **príliš malých periódach vzorkovania:**

- môžu nastať numerické problémy a póly identifikovaného modelu sa blížia ku 1,
- zhoda modelu so systémom nastáva skôr vo vysokofrekvenčnej oblasti,
- neeliminuje sa vplyv šumu.

Ak je **perióda vzorkovania príliš veľká:**

- vplyvu šumu je redukovaný, ale
- informácia o dynamike systému je nedostatočná,
- narastá rozptyl identifikovaných parametrov (klesá výdatnosť odhadu).

Je horšie použiť príliš veľkú periódu vzorkovania ako príliš malú. **Odporúčaná frekvencia vzorkovania je približne desaťnásobok odhadovaného frekvenčného rozsahu systému**. Ak náklady na meranie nie sú vysoké, potom je možné vzorkovať tak rýchlo ako je technicky možné a potom urobiť výber údajov v závislosti od zvolenej periódy vzorkovania.

Ak má model slúžiť na účely návrhu riadenia, perióda vzorkovania by mala byť **rovnaká ako pri riadení**.

8.2. Voľba vstupného signálu

Nominálny pracovný bod nelineárneho systému?

Rozsah pracovnej oblasti systému?

Frekvenčné spektrum a tvar vstupného signálu?

Dĺžka merania (počet vzoriek)?

⇒ **Podmienky experimentu** by sa mali **podobať pracovným podmienkam**, v ktorých bude model použitý.

⇒ **Vstupný signál** musí mať **dostatočne bohaté frekvenčné spektrum**, aby **v celej oblasti sústavou prenášaných frekvencií** preverovali jej prenosové vlastnosti – t.j. vstupný signál by mal mať konštantný priebeh frekvenčného spektra v tej oblasti frekvencií, kde je modul frekvenčného prenosu identifikovanej sústavy podstatne odlišný od nuly.

Biely šum – konštantný priebeh vlastnej výkonovej spektrálnej hustoty.

⇒ **Nepretržite vybudzujúci (NV) signál rádu n** je taký signál u(k), pre ktorý platí

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X\left(z^{-1}\right)u(k)\right)^2 > 0$$

pre všetky polynómy $X(z^{-1})$ stupňa n-1 a menšieho.

Experiment je dostatočne informatívny pre získanie nevychýleného odhadu n parametrov, ak vstupný signál je nepretržite vybudzujúci najmenej rádu n.

Príklady:

1. u(t)=A=konšt je NV rádu 1.
2. u(t)=A sin(ωt) je NV rádu 2.
3. $u(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(\omega_k t)$ je NV rádu 2n.
4. Biely šum je NV všetkých rádov.

⇒ Keďže výdatnosť odhadu sa zvyšuje so vzrastom hladiny užitočných signálov, **vstupný signál by mal mať čo najmenší činiteľ výkyvu** C_r (crest factor), ktorý je pre signály s nulovou strednou hodnotou definovaný nasledovne

$$C=\frac{|u|_{peak}}{u_{rms}} \qquad u_{rms}=\sqrt{\frac{1}{N}\left(u(1)^2+\cdots+u(N)^2\right)}$$

Teoreticky najmenšia hodnota Cr je 1, ktorá je dosiahnutá pre binárny symetrický signál $u(t)=\pm A$.

⇒ **Typické vstupné signály**:

- Filtrovaný Gaussov biely šum – filtrom sa dosiahne požadované frekvenčné spektrum signálu)
- Náhodný binárny signál – môže byť generovaný rôznymi spôsobmi, najpoužívanejší je: biely Gaussov šum s nulovou strednou hodnotou sa prefiltruje cez vhodne zvolený filter a potom sa vezme znamienko filtrovaného signálu
- Pseudonáhodný binárny signál (PRBS) – periodický deterministický signál s vlastnosťami bieleho šumu

$$u(t)=\mathrm{rem}\left(a_1u(t-1)+\ldots+a_nu(t-n),2\right)$$

rem(x,2) označuje zvyšok po delení x/2, t.j. nadobúda hodnotu 0 alebo 1.

Maximálna dĺžka periódy je $M=2^n-1$.

- Suma sínusoviek – umožňuje vytvoriť spektrum z požadovaných frekvencií

$$u(t) = \sum_{k=1}^{d} a_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

Sínusovky by mali byť čo najviac rozfázované, aby mal výsledný signál čo najmenší činiteľ výkyvu.

⇒ Ak sa používajú **periodické signály**, je vhodné urobiť **meranie počas K periód** a na identifikáciu použiť výstupný signál v trvaní jednej periódy získaný ako **priemer zo všetkých periód – zníži sa tým vplyv šumu**

$$y_u(t) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} y(t + kM) \qquad 1 \le t \le M \qquad \text{M je perióda signálu}$$

Potom je možné urobiť aj **odhad šumu**:

$$\hat{v}(t) = y(t) - y_u(t)$$

a jeho vlastností, napr. disperzie

$$S_v^2 = \frac{1}{(K-1)M}\sum_{t=1}^{KM} \hat{v}^2(t)$$

8.3. <u>Spracovanie nameraných údajov</u>

Šum?

Ustálené zložky?

Veľkosť signálov?

⇒ **Odstránenie statického posunu** – pri odvodení a analýze vlastností MNŠ sme predpokladali, že šum merania má nulovú strednú hodnotu, čo však v praxi nastáva zriedka. Väčšinou je cieľom identifikovať model opisujúci správanie systému v okolí pracovného bodu (u^s, y^s), preto je potrebné pri identifikácii pracovať s odchýlkovými veličinami

$$\bar{y}(t) = y(t) - y^s \qquad \text{a} \qquad \bar{u}(t) = u(t) - u^s$$

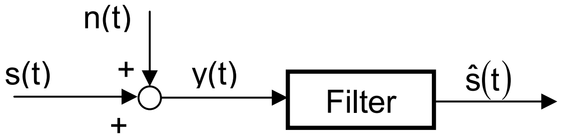
⇒ **Normalizácia signálov** – ak nadobúdajú signály vstupu a výstupu rádovo rozdielne hodnoty, mohla by byť disperzná matica zle podmienená, čo by mohlo viesť k numerickým problémom. Preto sa signály normalizujú, napr.

$$y'(t) = \frac{y(t)}{y^s}$$

⇒ **Filtrácia signálov** – predpokladajme, že na **užitočný signál** s(t) pôsobí **aditívna porucha** n(t), pričom **merateľný je iba skreslený signál** y(t)

$$y(t) = s(t) + n(t)$$

Cieľom je **rekonštruovať užitočný signál a potlačiť poruchu** n(t) pomocou **filtra**



Filtre – technické alebo programové prostriedky na separáciu signálov

Typy filtrov:

a) Podľa technickej realizácie:

- **Analógové** (spojité) – realizované pomocou pasívnych prvkov (RLC články) alebo pomocou aktívnych RC článkov využívajúcich operačné zosilňovače
- **Číslicové** (diskrétne) – implementované ako programy.
    - **FIR** (Finite Impulse Response) filtre – filtre s konečnou impulzovou odpoveďou. Patria medzi najjednoduchšie číslicové filtre ako z teoretického, tak aj z realizačného hľadiska. Medzi charakteristické vlastnosti patrí stabilita a možnosť realizácie FIR filtra s lineárnou fázovou charakteristikou (t.j proporcionálna frekvencii). Ich prenosová funkcia obsahuje iba čitateľa.
    - **IIR** (Infinite Impulse Response) filtre – filtre s nekonečnou impulzovou odpoveďou. Zvyčajne sa navrhujú ako číslicové verzie analógových filtrov. Majú vnútornú spätnú väzbu a môžu byť nestabilné. Ich prenosová funkcia obsahuje čitateľa aj menovateľa.

b) Podľa frekvenčných charakteristík signálu a šumu:

- **Pásmové** (selektívne) – ak sa spektrá signálu a šumu nachádzajú v rôznych frekvenčných rozsahoch, realizujú sa analógovo alebo číslicovo
    - **dolnopriepustné** (low-pass) filtre
    - **hornopriepustné** (high-pass) filtre
    - **pásmové priepusty** (band-pass filters)
    - **pásmové zádrže** (band-elimination filters)
    - **celopriepustné** (all-pass) filtre (menia iba fázové pomery signálov)

  Ideálne verzie filtrov majú v pásme prepúšťania jednotkové zosilnenie (neskreslený prenos) a mimo tohto pásma skokom realizované pásmo prechodu do pásma tlmenia s nulovým zosilnením, ideálne filtre však nie je možné prakticky realizovať.

- **Štatistické metódy** – ak sa spektrá signálu a šumu vzájomne prekrývajú, filtre sa realizujú číslicovo.

8.3.1 Analógové filtre

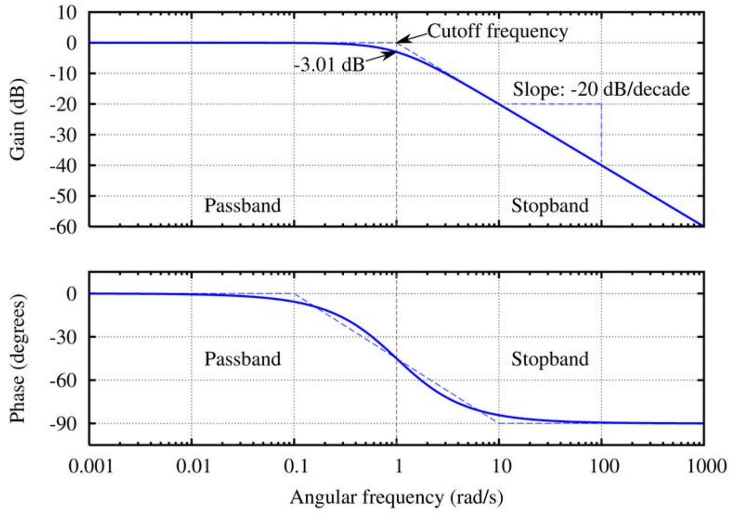
$\Rightarrow$ **Dolnopriepustné filtre** – filtrujú vysokofrekvenčné šumy v rozsahu $\omega > \omega_0$

- **Sériové zapojenie n členov 1. rádu**

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T)^n} = \frac{1}{(1 + j\Omega)^n}$$

$\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \omega T$ je normovaná frekvencia

$\omega_0 = \dfrac{1}{T}$ **frekvencia zlomu filtra**



- **Butterworthov filter (BF)**– má póly na jednotkovej kružnici a jeho amplitúdová charakteristika má tvar

$$|G(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^{2n}}}$$

V pásme prepúšťania je amplitúdová charakteristika rovná.

Na obr. je FCH BF 1. rádu.

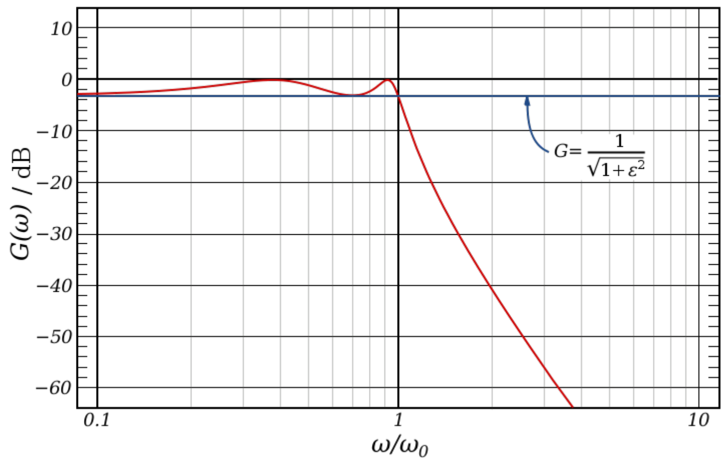
- **<u>Čebyševov filter (ČF1) typu 1</u>** – má amplitúdovú charakteristiku v tvare

$$|G(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}}$$

ε je konštanta a T_n sú Čebyševove polynómy stupňa n.

V pásme prepúšťania amplitúdová charakteristika osciluje medzi hodnotami 1 a $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ (**extremálne odchýlky**), ale pásmo prechodu má užšie ako BF.

Na obr. je FCH ČF1 4. rádu.



Čebyševov polynóm i-teho stupňa je definovaný nasledovne

$$\boxed{T_i(x) = \cos(i.\arccos(x))} \quad \text{kde} \quad -1 \le x \le 1$$

t.j. frekvenciu treba najskôr **znormovať** do intervalu $\langle -1;1\rangle$. S využitím vzorca

$$\cos[(i+1).\arccos(x)] + \cos[(i-1).\arccos(x)] = 2\cos(i.\arccos(x))\cos(\arccos(x))$$

pre **Čebyševove polynómy** dostávame

t.j.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x \qquad T_{i+1}(x) = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x) \quad \text{pre} \quad i \ge 1$$

rekurentný vzťah

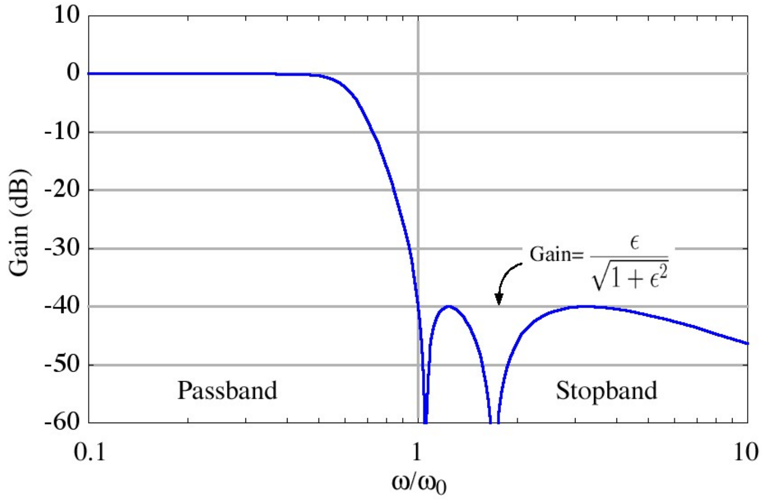
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

- **<u>Čebyševov filter (ČF2) typu 2</u>** – má amplitúdovú charakteristiku v tvare

$$|G(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}}}$$



Amplitúdová charakteristika vykazuje extremálne odchýlky v pásme tlmenia.

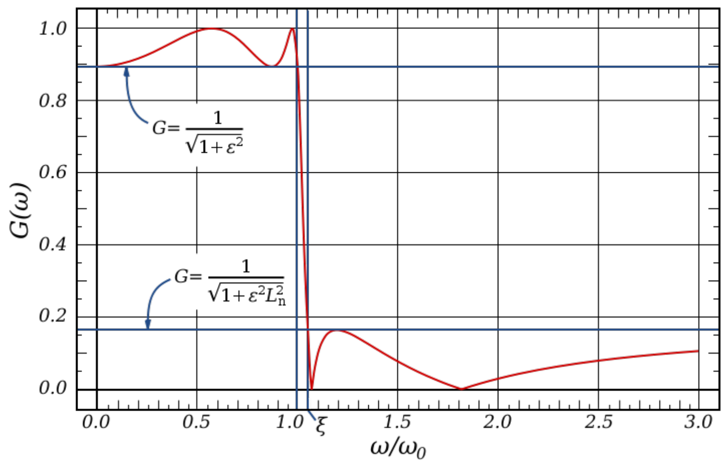
Na obr. je FCH ČF2 5. rádu.

- **Eliptický (Cauerov) filter (EF)** – má amplitúdovú charakteristiku v tvare

$$|G(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 R_n^2(\xi,\Omega)}}$$

ε a ξ sú konštanty a R_n sú eliptické racionálne funkcie stupňa n.

Amplitúdová charakteristika vykazuje extremálne odchýlky nielen v pásme prepúšťania, ale aj v pásme tlmenia, avšak filter **má najužšie pásmo prechodu spomedzi všetkých filtrov** rovnakého rádu.



Na obr. je FCH EF 4. rádu.

Príklady → priklad_filtre.pdf + cvičenia

Poznámka:

Návrh číslicových filtrov a samotná filtrácia signálov sú jednoducho implementovateľné **v Matlabe** s využitím balíka funkcií na spracovanie signálov - **Signal Processing Toolbox**

- ***butter*** – návrh dolno- alebo hornopriepustného Butterworthovho filtra
- ***cheby1*** – návrh doplnopriepustného Čebyševovho filtra typu 1
- ***cheby2*** – návrh doplnopriepustného Čebyševovho filtra typu 2
- ***ellip*** – návrh doplnopriepustného eliptického filtra
- ***filter*** – filtrácia údajov zadaným filtrom
- ***fvtool*** – GUI na analýzu číslicových filtrov
- ***designfilt*** – návrh číslicových filtrov

8.3.2 Špeciálne (rekurentné) filtre

⇒ Algoritmy na výpočet **priebežného priemeru hodnôt** filtrovaného signálu a **filtráciu špičiek** náhodných prekmitov

- **Priebežný priemer s nekonečnou pamäťou**

  (filtrácia špičiek náhodných prekmitov)

  $$\hat{s}(k) = \hat{s}(k-1) + \frac{1}{k}\big(y(k) - \hat{s}(k-1)\big)$$

  $\hat{s}(k)$ je **odhad filtrovaného signálu** v kroku k

- **Priebežný priemer s konštantným koeficientom korekcie**

  (špeciálny prípad predchádzajúceho pre $k=k_1$=konšt)

$$\hat{s}(k)=\hat{s}(k-1)+\frac{1}{k_1}\left(y(k)-\hat{s}(k-1)\right)=\frac{k_1-1}{k_1}\hat{s}(k-1)+\frac{1}{k_1}y(k)$$

$$\frac{\hat{s}(z)}{y(z)}=\frac{b_0}{1+a_1z^{-1}} \qquad b_0=\frac{1}{k_1} \qquad a_1=\frac{1-k_1}{k_1}$$ dolnopriepustný filter 1. rádu

- **Priebežný priemer s konečnou pamäťou**

  (priemeruje sa posledných N meraní)

$$\hat{s}(k)=\hat{s}(k-1)+\frac{1}{N}\left(y(k)-\hat{s}(k-N)\right)$$

$$\frac{\hat{s}(z)}{y(z)}=\frac{1}{N}\frac{\left(1-z^{-N}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

Príklady → priklady_filtrácia_signalov.pdf + cvičenia

8.4. <u>Určenie štruktúry modelu a validácia modelu</u>

Typ modelu?

Veľkosť modelu?

Kvalita modelu?

⇒ **Voľba vhodnej štruktúry** modelu je **rozhodujúca** pre **úspešnú identifikáciu.** Zahŕňa

- **typ modelu** (lineárny, nelineárny, stavový, vstupno/výstupný,...) – využitie apriórnej informácie, intuície, inžinierskych skúseností, treba začať od najjednoduchších
- **veľkosť modelu** (stupne polynómov, rozmery matíc, významnosť vplyvu jednotlivých vstupov,...)

⇒ **Parametrizácia modelu** – treba zvoliť vhodný algoritmus, môžu nastať numerické problémy

⇒ **Vyhodnotenie kvality výsledného modelu**

- **kompromis medzi zložitosťou a presnosťou modelu**, pričom je dôležité zamýšľané použitie modelu,
- **testovanie na údajoch**, ktoré sú **blízke** predpokladaným **pracovným podmienkam** modelovaného systému.

⇒ **Porovnanie modelov rôznych veľkostí - informačné kritériá:**

- **Konečná chyba predikcie** (**FPE** – Final Prediction Error, Hirotugu Akaike, 1969)

  Miera kvality modelu pre testovanie na iných údajoch ako boli použité na identifikáciu.

$$FPE=V\left(\frac{1+d/N}{1-d/N}\right)$$

kde N je počet nameraných údajov

d je počet odhadovaných parametrov

$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}e_i\left(\hat{\theta}_N\right)^2$ je hodnota účelovej funkcie

Kritérium **kombinuje komplexnosť modelu** (reprezentovaná počtom parametrov) a **kvalitu odhadu parametrov** (hodnota účelovej funkcie).

Najlepší model má najmenšiu hodnotu kritéria.

Pre d<<N

$$FPE = V\left(1 + 2\frac{d}{N}\right)$$

- **Akaikeho informačné kritérium** (Akaike Information Criterion – AIC, 1974)

$$AIC = \ln V + 2\frac{d}{N}$$

Pre d<<N

$$AIC = \ln\left(V\left(1 + 2\frac{d}{N}\right)\right)$$

- **Schwarz-Bayesovo kritérium** (Schwarzovo informačné kritérium (bayesovské); Schwarz information criterion – BIC, SBC, 1978)

$$BIC = \ln V + \frac{d}{N}\ln N$$

Poznámky:

- AIC je približne rovné ln(FPE).
- ak sú použité tie isté údaje na identifikáciu aj na validáciu, zvýšenie počtu odhadovaných parametrov vždy vedie k zlepšeniu zhody modelu.
- **Matlab**: *mod.EstimationInfo, fpe, aic, aicbic*.

⇒ **Validácia modelu** - vyhodnotenie či model

- **súhlasí s** nameranými **dátami**
- **popisuje** skutočný **proces**
- je **dostatočne dobrý a použiteľný** pre zamýšľaný účel.