



BAB LIMIT FUNGSI

I. LIMIT FUNGSI ALJABAR

Definisi Limit Fungsi Aljabar

Misal suatu fungsi $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ untuk x mendekati 1, dapat dituliskan sebagai :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

x	0,9	0,99	?	1,01	1,1
y	1,9	1,99		2,01	2,1

Berdasarkan tabel di atas, maka $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

TEOREMA LIMIT

Jika $f(x) = k$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

Jika $f(x) = x$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^n = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\}^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

A Limit mendekati nilai tertentu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Limit ini dapat diselesaikan dengan cara :

1. Substitusi

Cara ini dilakukan jika dalam substitusi langsung tidak ditemukan bentuk tak tentu, $\frac{0}{0}$

Latihan soal

1. Hitunglah nilai Limit berikut :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} (14x^5 - 7x^2 + 2x + 8)$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 4}{x - 2}$

2. Fungsi $f(x) = x^2 - 2x$, jika $x \geq 0$
 $f(x) = x$, jika $x < 0$

Hitunglah

a. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

2. Cara Pemfaktoran / Pembagian Bersusun / Skema

Cara ini dilakukan jika dalam substitusi langsung ditemukan bentuk tak tentu, $\frac{0}{0}$

Bentuk-bentuk Istimewa Faktor

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Latihan Soal

Hitunglah nilai limit berikut :

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x - 3}$

e. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - x^3 + x^2}{x^4 + x^3 - x^2}$

B. Limit dalam bentuk akar

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p}{p - \sqrt{q}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p}{p - \sqrt{q}} \times \frac{p + \sqrt{q}}{p + \sqrt{q}} \dots \text{merasionalkan}$$

Latihan soal

1. Hitunglah nilai limit berikut :

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 16}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 2x^2}}{\sqrt{1 - 2x} - \sqrt{1 + 2x^2}}$

7. Hitunglah nilai limit dari $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ dari:

a. $f(x) = 2x$

b. $f(x) = x^2 - 1$

c. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

d. $f(x) = x^3$

e. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

c. Limit Aljabar mendekati nilai tertentu, dapat juga diselesaikan dengan menggunakan Dalil L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \text{ Dengan syarat } \frac{0}{0}$$



Latihan soal

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{3x+1}-2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

4. Tentukan nilai a dan b

(i). $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{ax+b-\sqrt{x}}{x-4} = \frac{3}{4}$

(ii). $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2+b+3}{x^2-2x-3} = \frac{3}{4}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^3-1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-8x^2+21x-18}{x^3-7x^2+15x-9}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} \right]$

C. Limit mendekati nilai tak hingga

C.1 Bentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Bentuk ini diselesaikan dengan cara membagi pangkat tertinggi dari penyebut atau pembilang.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = L$, maka

Jika $n = m$, maka $L = \frac{a_n}{b_m}$

Jika $n > m$, dan $(a_n, b_m) > 0$, maka $L = +\infty$

Jika $n > m$, dan $(a_n, b_m) < 0$, maka $L = -\infty$

Jika $n < m$, maka $L = 0$

Latihan soal

Hitunglah nilai limit berikut :

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-6x+1}{x^2+x-5}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+4x^2-5x+10}{x^2+x-3}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-5}{x^5+1}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2-1}}$

C.2 Bentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)-g(x)$

Bentuk ini diselesaikan dengan cara mengalikan bentuk sekawan,

$\frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}$, kemudian dibagi dengan pangkat tertinggi dari

pembilang atau penyebut.

Limit mendekati nilai tak hingga

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+qx+r} = L$

▪ Jika $a = p$ maka $L = \frac{b-p}{2\sqrt{a}}$

▪ Jika $a \neq p$ maka $L = \sim$

▪ Jika $a = p, b = q$, maka $L = 0$

Latihan

Hitunglah nilai Limit dari :

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}\}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-x+4}\}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2+4x-2} - x+1\}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{5x^2-4x+5} - \sqrt{x^2-3x+8}\}$

Latihan soal

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+3}}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3-2x^2} - x-1$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} [\log \sqrt{2x^2+1} - \log x]$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2+5x+7} - ax - b\} = 1$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}]$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{25x^2+10x+1} - 3x+3 - \sqrt{4x^2+4x+3})$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+8x+1} + \sqrt{16x^2+24x+1} - \sqrt{36x^2+18x+3})$



IGNATIUS
GLOBAL SCHOOL
THE GLOBAL SPIRIT

Jl. Veteran F3 Telp. (0711) 35 35 99 – 377 159

II. Limit Trigonometri

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
- e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

Latihan Soal

- Hitunglah nilai limit berikut !
 - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow \pi} (\sin^2 x + \cos^2 x)$
- Hitunglah nilai limit berikut !
 - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2(x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}}$
 - $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\tan(6x + 12)}{4x + 8}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{8x}$
 - $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(3x - \frac{3}{4}\pi)}{\tan(4x - \pi)}$
- Hitunglah nilai limit berikut !
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2x + \sin x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - a)}{\sin(x - a) + (4a - 4x)}$
- Hitunglah nilai limit berikut !
 - $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x + 6)\tan(x - 4)}{2x^2 - 7x - 4}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x + 2)\sin(x - 2)}{x^2 - 4}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x) \cot 2x$
- Hitunglah nilai limit berikut !
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$

6. Hitunglah nilai limit berikut !

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 3x \cos 2x}{4x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

7. Hitunglah nilai limit dari $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ dari:
- $\sin x$
 - $3 \sin x + \cos x$
 - $\sin 2x$

Latihan Soal

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + x}{2x + 3 \sin 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - x}{3x - \sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos 3x}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow y} \frac{\tan x - \tan y}{\{1 - \frac{x}{y}(\tan x \tan y + 1)\}}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ax + b}{\cos x} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x^2}$