Einführung in die Topologie
Vorlesung von I. van Santen

Mitschrift von David Flückiger und Kim Schaffner

Email address: david.flueckiger@stud.unibas.ch

Vorwort

Dies sind die Notizen zu der zweistündigen Vorlesung „Einführung in die Topologie". Die Vorlesung basiert auf folgender Literatur, wobei [**2**] als Hauptquelle diente.

[1] Klaus Jänich, Hrsg. *Topologie*. 8. Auflage, 2. korrigierter Nachdruck. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 978-3-540-26828-4. DOI: 10.1007/b138142.

[2] Gerd Laures und Markus Szymik. *Grundkurs Topologie*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2023. ISBN: 978-3-662-67828-2. DOI: 10.1007/978-3-662-67828-2. URL: https://link.springer.com/10.1007/978-3-662-67828-2 (besucht am 18. 12. 2024).

[3] James R. Munkres. *TOPOLOGY UPDATED*. Paperback. Second edition (1 January 2021); Pearson Education, 1. Jan. 2021. 537 S. ISBN: 978-93-5343-277-5. URL: https://lead.to/amazon/com/?op=bt&la=en&cu=usd&key=9353432774.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Grundbegriffe der Topologie

1.1. Metrische Räume

Topologische Räume sind stellen eine Verallgemeinerung von metrischen Räumen dar. Wir werden daher zuerst die Grundlagen metrischer Räume behandeln, um nachher eine Brücke zu den topologischen Räumen schlagen zu können.

(1.1) Definition. Sei X eine Menge. Wir nennen eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *Metrik* oder *Distanz*, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

(M1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ impliziert $x = y$ für alle $x, y \in X$
(M2) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
(M3) Dreiecksungleichung: Für jeweils drei Punkte $x, y, z \in X$ gilt stets

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Ist d eine Metrik auf X, so nennen wir das Paar (X, d) *metrischen Raum.*

(1.2) Beispiel. (1) Auf $\mathbb{R}$ ist $d(x, y) := |x - y|$ eine Distanz.
(2) Jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ liefert einen Distanzbegriff durch $d(x, y) := \|x - y\|$ (siehe unten).
(3) Sei M eine Menge. Wir können dann die *diskrete Metrik* durch

$$d_{\text{diskret}}(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

definieren.

(1.3) Bemerkung. In metrischen Räumen gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung d.h. es gilt

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z) \quad \text{für alle } x, y, z \in X,$$

wobei X ein metrischer Raum ist.

(1.4) Definition. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektor-Raum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt: Für alle $v, w \in V$ gilt

(N1) $\|v\| \geq 0$ und falls $\|v\| = 0$ ist $v = 0$;
(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und
(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt *normierter Raum.*

(1.5) Bemerkung. Durch $d(x, y) := \|x - y\|$ definiert jede Norm eine Metrik.

(1.6) Beispiel. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$\mathcal{F}_b(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}_b$ mit der Norm $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in I} |f(x)|$ ein normierter Vektorraum (sogar ein Banachraum).

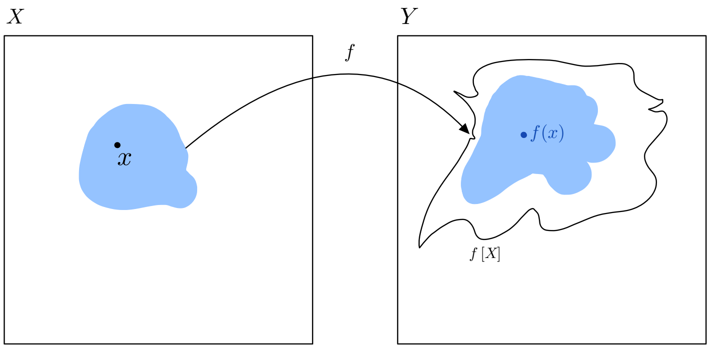


Abbildung 1. Illustration von Satz 1.9

(1.7) Definition. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion und $x \in X$. f heißt *stetig* in $x \in X$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir $\delta > 0$ sodass

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in X \text{ mit } d(x, y) < \delta.$$

Die Funktion f heißt (global) stetig, falls sie an jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

(1.8) Definition. Sei X ein metrischer Raum. Wir nennen eine Menge $U \subseteq X$ eine *ε-Umgebung* von einem Punkt $x \in X$, falls $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, wobei

$$B_\varepsilon(x) := B_\varepsilon^X(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Die Menge U heißt Umgebung von x, falls es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gibt.

(1.9) Satz. *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ und sei $x \in X$ Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist stetig in x;
(ii) Das Urbild einer jeder Umgebung von $f(x)$ ist eine Umgebung von x.

Beweis. „(i) $\implies$ (ii)“: Sei f stetig in x und sei U eine Umgebung von $f(x)$. Dann finden wir $\varepsilon > 0$ sodass $B_\varepsilon^Y(f(x)) \subseteq U$. Nach der Definition der Stetigkeit finden wir ein $\delta > 0$, sodass $f[B_\delta^X(x)] \subseteq B_\varepsilon^Y(f(x))$. Nach Anwenden von f^{-1} folgt

$$B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}\left[f[B_\delta^X(x)]\right] \subseteq f^{-1}[B_\varepsilon^Y(f(x))] \subseteq f^{-1}[U],$$

d.h. $f^{-1}[U]$ ist eine Umgebung von x.

„(ii) $\implies$ (i)“: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $f^{-1}[B_\varepsilon^Y(f(x))]$ eine Umgebung von x, d.h. wir finden $\delta > 0$ sodass $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}[B_\varepsilon^Y(f(x))]$. Das bedeutet dann aber

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad \text{für alle } y \in X \text{ mit } d_X(x, y) < \delta.$$

Da $\varepsilon > 0$ arbiträr war, entspricht dies genau der Definition von Stetigkeit. $\square$

(1.10) Definition. Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung von jedem $x \in U$ ist. Die Menge heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement $A^\complement := X \setminus A$ offen ist.

(1.11) Übung. Zeigen Sie: Der offene Ball $B_\varepsilon(x)$ ist offen für jedes $x \in X$.

(1.12) Definition. sei X ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^\mathbb{N}$ eine Folge. Wir sagen, dass die Folge x_n gegen $x \in X$ konvergiert, falls jede Umgebung von x alle

Folgenglieder bis auf endlich viele (fast alle) enthält. Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

(1.13) SATZ. *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) f ist stetig;
(2) Für alle $U \subseteq Y$ offen ist $f^{-1}[U] \subseteq X$ offen;
(3) Für alle $A \subseteq Y$ abgeschlossen ist $f^{-1}[A] \subseteq X$ abgeschlossen;
(4) Für alle $x \in X$ und jede Folge $x_n \in X$ mit $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ gilt

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x).$$

(1.14) ÜBUNG. Zeigen Sie Satz 1.13.

(1.15) BEISPIEL. Der Raum $(\mathcal{F}_b(I), \|\cdot\|_{L^\infty})$ aus Beispiel 1.6 hat als Konvergenzbegriff die gleichmäßige Konvergenz (Konvergenz in L^∞).

(1.16) BEISPIEL. Wir betrachten $X := \mathbb{R} \times \{1\} \cup \mathbb{R} \times \{2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und definieren eine Äquivalenzrelation durch

$$\sim := \left\{ \Big((t,i),(s,i)\Big) \in X \times X \;\Big|\; t = s \neq 0 \text{ oder } t = s, i = j \right\}.$$

Für $x = (t,i) \in X$ ist die Äquivalenzklasse von x

$$[x]_\sim = \begin{cases} \{(t,1),(t,2)\}, & \text{falls } t \neq 0; \\ \{(0,i)\} & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

In einem metrischen Raum Y kann man jeweils zwei Punkte $y_1 \neq y_2 \in Y$ durch disjunkte Umgebungen trennen.

Hätte nun $X/\sim$ eine Metrik, sodass die kanonische Projektion $\pi : X \to X/\sim$ stetig wäre, dann fänden wir disjunkte Umgebungen von U_i von $[(0,i)]_\sim$ für $i = 1,2$. Wäre nun π stetig, dann wären also $\pi^{-1}[U_i]$ disjunkte Umgebungen von $(0,i)$ für $i = 1,2$.

Motivation für topologische Räume. Auf dem Raum $\mathcal{F}_b(I)$ gibt es verschiedene Konvergenzbegriffe, z.B. punktweise Konvergenz. Man kann weiter zeigen, dass es *keine* Metrik gibt, welche die punktweise Konvergenz induziert. Der Grund ist, dass dieser Raum dann nicht dem ersten Abzählbarkeitsaxiom entspricht, was ein notwendiges Kriterium für die Metrisierbarkeit ist (siehe Bemerkung 1.26).

Wir wollen im folgenden auch Aussagen für Räume, die nicht metrisierbar sind treffen. Dafür werden wir im nächsten Abschnitt topologische Räume einführen.

1.2. Toplogische Räume

Wir starten mit der Definition einer Topologie:

(1.17) DEFINITION. Sei X eine Menge. Eine Topologie auf X ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

($\mathcal{T}$1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
($\mathcal{T}$2) Falls $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ ist auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$;
($\mathcal{T}$3) Für eine beliebige Indexmenge I und $U_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ ist auch $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt dann topologischer Raum und die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen von X.

(1.18) Beispiel. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet

$$\mathcal{T}(d) := \{U \subseteq X \mid U \text{ offen in } X \text{ bez. } d\}$$

eine Topologie auf X. Ist $d = d_{\text{diskret}}$ die diskrete Metrik, dann ist $\{x\}$ eine offene Menge für alle $x \in X$ und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Wir nennen dies dann die *diskrete Topologie*. Ist andererseits $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, sprechen wir von der *Klumpentopologie*.

(1.19) Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt die Menge $M \subseteq X$ *Umgebung von x*, falls es eine offenen Menge $U \subseteq X$ mit $x \in U \subseteq M$ gibt.

(1.20) Bemerkung. Eine Menge $U \subseteq X$ in einem topologischen Raum ist genau dann offen, falls Umgebung von allen ihren Punkten ist.

Durch Satz 1.9 und Satz 1.13 inspiriert definieren wir nun folgendes:

(1.21) Definition. Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$. Wir nennen f *stetig in x*, falls für jede Umgebung U von $f(x)$, $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von x ist.

Wir nennen f *(global) stetig*, falls das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist.

(1.22) Beispiel. Sei $X = \mathbb{R} \times \{1, 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir definieren durch

$$(t, i) \sim (s, j) :\iff \begin{cases} t = s \neq 0 & \text{oder} \\ t = s, i = j. \end{cases}$$

eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $\pi : X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$ die Projektion auf die Äquivalenzklassen. Können wir eine Topologie auf $X/\sim$ definieren, sodass π stetig ist? Offensichtlich könnten wir die Klumpentopologie wählen, dann ist jede Funktion $f : X \to X/\sim$ stetig. Allerdings können wir auch

$$\left\{U \subseteq X/\sim \;\middle|\; \pi^{-1}[U] \subseteq X \text{ offen}\right\}$$

als solche Topologie wählen. Später werden wir diese Topologie *co-induzierte Topologie von π* nennen.

(1.23) Definition. Sei X eine Menge und $\mathcal{T}_i$ $i = 1, 2$ Topologien. $\mathcal{T}_2$ heißt feiner als $\mathcal{T}_1$ bzw. $\mathcal{T}_1$ heißt gröber als $\mathcal{T}_2$, falls $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

In Beispiel 1.22 ist $\mathcal{T}$ die feinste Topologie auf der Quotientenmenge sodass die Projektion π stetig ist.

(1.24) Bemerkung. $\mathcal{T}_2$ ist genau dann feiner als $\mathcal{T}_1$, (d.h. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$) wenn die Identitätsabbildung $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ stetig ist.

(1.25) Definition. Ein topologischer Raum heißt *metrisierbar*, falls es eine Metrik gibt, die Topologie auf dem Raum induziert.

(1.26) Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(1) Ein notwendiges Kriterium für die Metrisierbarkeit ist das sogenannte *erste Abzählbarkeitsaxiom* d.h. für jedes $x \in X$ existiert eine höchstens abzählbare Menge von Umgebungen $\mathcal{U}(x)$ sodass für jede Umgebung V von x finden wir $U \in \mathcal{U}(x)$ sodass $U \subseteq V$.
(2) Ein hinreichendes Kriterium für die Metrisierbarkeit ist das sogenannte *zweite Abzählbarkeitsaxiom* d.h. es existierte eine höchstens abzählbare Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ sodass für alle $U \in \mathcal{T}$ gibt es $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}$, sodass $U = \bigcup_{K \in \mathcal{I}} K$. Dieser Satz heißt

Satz von Bing-Nagata-Smirnow. Ein Beweis davon findet der geneigte Leser in [3].

(3) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert gegen $x \in X$, falls jede Umgebung von x fast alle Folgenglieder enthält (man nennt x dann auch *Limespunkt* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Man bemerke aber, dass der Grenzwert einer solchen Folge nun nicht mehr zwingend eindeutig ist. Nimmt man z.B. $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ und

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \text{ gerade,} \\ 1, & \text{falls } i \text{ ungerade,} \end{cases}$$

dann gilt $x_i \to 0$ aber auch $x_i \to 1$.

(4) Analog wie oben kann man auch Folgenstetigkeit für Funktionen $f : X \to Y$ (Y ein topologischer Raum) definieren. Allerdings ist dieser Begriff dann schwächer als die Stetigkeit. Falls der Raum X aber das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann stimmen die Begriffe überein.

(1.27) Übung. Sei X ein topologischer Raum der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie, dass hier die Folgenstetigkeit und Stetigkeit äquivalent sind.

1.3. Abgeschlossene Mengen

(1.28) Definition. Wir sagen $A \subseteq X$ ist *abgeschlossen*, falls $A^\complement = X \setminus A$ offen ist.

Man beachte, dass abgeschlossen nicht das Gegenteil von offen ist. Es gibt auch Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind und Mengen die beides sind z.b. X und $\emptyset$.

(1.29) Definition. Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Wir definieren denn *Abschluss von M in X* durch

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A\subseteq X \text{abgeschlossen} \\ M\subseteq A}} A.$$

Offensichtlich ist $\overline{M}$ eine abgeschlossene Menge. Falls $\overline{M} = X$ nennen wir M *dicht in X*.

(1.30) Beispiel. Sei $M := \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $A := \overline{M} = M \cup \{0\}$, denn die Menge

$$A^\complement = (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \cup (1, +\infty)$$

ist offen in $\mathbb{R}$, was $\overline{M} \subseteq A$ zeigt. Wäre nun $0 \in A^\complement$, dann würden wir $n \in \mathbb{N}$ finden, sodass $(-1/n, 1/n) \subseteq A^\complement$, weil $A^\complement$ offen ist. Dies ist aber ein Widerspruch.

(1.31) Bemerkung. $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge die M enthält. Ist weiter M abgeschlossen, dann gilt $\overline{M} = M$, d.h. allgemein gilt $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

(1.32) Definition. Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Wir definieren das *Innere von M* als

$$\mathring{M} := \bigcup_{\substack{U\subseteq X \text{ offen} \\ U\subseteq M}} U.$$

Der Rand von M ist gegeben durch $\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M}$.

(1.33) Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von topologischen Räumen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) f ist stetig;
(2) Für alle $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}[A] \subseteq X$ abgeschlossen.
(3) Für alle $M \subseteq X$ gilt $f[\overline{M}] \subseteq \overline{f[M]}$.

Beweis. „(1) $\iff$ (2)“: Wegen den De Morgan'schen Regeln folgt $f^{-1}[N^{\complement}] = f^{-1}[N]^{\complement}$ und die Aussage folgt nach Satz 1.9.

„(2) $\implies$ (3)“: Sei $M \subseteq X$. Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen sodass $f[M] \subseteq A$. Weil das Bilden des Abschlusses inklusionserhaltend ist und $f^{-1}[A]$ abgeschlossen, folgt $\overline{M} \subseteq f^{-1}[A]$ also $f[\overline{M}] \subseteq A$. Da $A \supseteq f[M]$ arbiträr war, folgt die Behauptung.

„(3) $\implies$ (2)“: Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen. Wir setzen $M := f^{-1}[A] \subseteq X$ und zeigen, dass M abgeschlossen d.h. $M = \overline{M}$ ist. Per Annahme gilt nun

$$f[\overline{M}] \subseteq \overline{f[M]} = \overline{f[f^{-1}[A]]} \subseteq \overline{A} = A$$

Wenden wir f^{-1} auf beiden Seiten an, folgt $\overline{M} \subseteq M$, also ist M abgeschlossen. □

(1.34) Definition. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. f heißt *offen/abgeschlossen*, falls für alle $M \subseteq X$ offen/abgeschlossen gilt $f[M] \subseteq Y$ offen/abgeschlossen.

1.4. Die Kategoriensprache

Dieses Kapitel ist eine direkte Kopie von [**2**]. Wie schon zuvor betont, wird die Klasse der topologischen Räume erst dadurch interessant, weil man zwischen je zwei topologischen Räumen die Menge der stetigen Abbildungen betrachten kann. Die folgende Notiz ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Stetigkeit. Ihre Bedeutung ist deswegen aber nicht gering, ermöglicht sie es doch, komplizierte stetige Abbildungen aus einfachen stetigen Abbildungen zusammenzusetzen.

Notiz. Ist X ein topologischer Raum, so ist die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ eine stetige Abbildung. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen, so ist auch die Komposition $g \circ f : X \to Z$ stetig (siehe Abb. 2).

Mit *'gelehrten'* Worten gesagt: Die Klasse der topologischen Räume bildet zusammen mit den stetigen Abbildungen zwischen ihnen eine Kategorie. In diesem Abschnitt soll erklärt werden, was das bedeutet.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[d] & \\
f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W) & g^{-1}(W) & W & W
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2. Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig.

Die Kategoriensprache eignet sich gut dazu, häufig wiederkehrende Phänomene und Konstruktionen in einen einheitlichen, konzeptionellen Rahmen zu fassen. Das Lernen der neuen Vokabeln wird sich schnell bezahlt machen.

(1.35) Definition. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten:

- Einer Klasse, deren Elemente *Objekte* genannt werden.
- Für je zwei Objekte X und Y einer Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, deren Elemente *Morphismen* genannt werden. Statt $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ schreibt man oft $f : X \to Y$.
- Für je drei Objekte X, Y und Z eine Verknüpfung:

  $$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Z), \quad (g,f) \mapsto g \circ f,$$

  genannt *Komposition*.
- Schließlich muss es zu jedem Objekt X ein Element $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,X)$ geben, die Identität von X.

Die einzigen Axiome, denen diese Daten genügen sollen, sind:

(1) *Assoziativität der Komposition:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(2) *Neutralität der Identitäten:*

$$f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f.$$

Beispiele für Kategorien gibt es in Hülle und Fülle. In vielen Beispielen von Kategorien sind die Objekte Mengen *mit Struktur* und die Morphismen sind die *strukturerhaltenden* Abbildungen. So gibt es etwa:

- die Kategorie **Sets** der Mengen und Abbildungen,
- die Kategorie **Grp** der Gruppen und Gruppenhomomorphismen,
- die Kategorie **AbGrp** der abelschen Gruppen und ihrer Homomorphismen,
- und die Kategorie der Ringe und Ringhomomorphismen.

Ist K ein Körper, so gibt es die Kategorie der K-Vektorräume und K-linearen Abbildungen. Kurz gesagt: Die Algebra ist voller Kategorien. Und die Topologie beginnt damit, die Kategorie **Top** der topologischen Räume und stetigen Abbildungen zu definieren.

Die algebraische Topologie beschäftigt sich unter anderem damit, diese oder ähnliche Kategorien *topologischer Objekte* in Kategorien *algebraischer Objekte* abzubilden, um topologische Probleme dann mit algebraischer Hilfe zu bearbeiten. Die Abbildungen zwischen Kategorien haben übrigens einen eigenen Namen: *Funktoren*. Sie werden aber erst dann erklärt, wenn wir sie unbedingt brauchen.

(1.36) Definition. Ein Isomorphismus in der Kategorie der topologischen Räume heißt *Homöomorphismus*. D.h. ein Homoömorphismus ist eine bijektive stetige Funktion mit stetigem Inverse. Die Homomorphismen sind die stetigen Funktionen, deren Menge wir mit

$$\hom(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ ist stetig}\}$$

bezeichnen. Die Menge der Homöomorphismen bezeichnen wir mit $\mathrm{Homeo}(X,Y)$.

Kapitel 2
Universelle Konstruktionen

2.1. Teilräume

Sei X ein topologischer Raum und $f : M \to X$ eine Abbildung, wobei M eine beliebige Menge ist. Welches ist die kleinste Topologie auf M, unter welcher f stetig ist? Antwort: wir setzen

$$\mathcal{I} := \left\{ f^{-1}[U] \,\middle|\, U \subseteq X \text{ offen} \right\} \subseteq \mathcal{P}(M). \tag{2.1}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass $\mathcal{I}$ eine Topologie ist.

(2.2) Definition. Wir nennen (2.1) die *von f induzierte Topologie auf M*. Ist $M \subseteq X$ und $f := \mathrm{id}_M$, dann heißt $\mathcal{I}$ *Teilraumtopologie* auf M und $(M, \mathcal{I})$ *Teilraum von X*. Konvention: $M \subset X$ trägt *immer* die Teilraumtopologie falls nichts weiter festgelegt ist.

Ist $M \subseteq X$, dann sind die offenen Mengen in der Teilraumtopologie

$$\{U \cap M \mid U \text{ offen in } X\}.$$

(2.3) Beispiel. Sei $M := [1, 2] \cup \{3\}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge $\{4\}$ offen in M aber nicht offen in $\mathbb{R}$.

(2.4) Bemerkung. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $M \subseteq X$. Dann ist die Topologie erzeugt von $d|_{M\times M}$ genau die Teilraumtopologie der von d erzeugten Topologie. Die offenen Mengen von M sind dann von der Form $U \cap M$, wobei $U \subseteq X$ offen.

(2.5) Definition. Eine Funktion $f : M \to X$ heißt *Einbettung*, falls f injektiv ist und M die von f induzierte Topologie trägt. Wir schreiben manchmal $M \hookrightarrow X$ (sofern f trivial ist).

(2.6) Bemerkung. $f : M \to X$ ist genau dann eine Einbettung, falls $f'M \to f[M]$, $m \mapsto f(m)$ ein Homöomorphismus ist (wobei $f[M]$ mit der Teilraumtopologie versehen ist).

(2.7) Satz (Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie). *(2.1) ist die einzige Topologie auf M mit folgender Eigenschaft: Für alle $g : T \to M$ stetig gilt:*

$$g \text{ stetig} \iff f \circ g : T \to X \text{ stetig}, \tag{2.8}$$

wobei T ein beliebiger topologischer Raum ist.

Beweis. Sei T ein topologischer Raum. Wir zeigen, dass, dass $\mathcal{I}$ (2.8) erfüllt. Ist g stetig, dann ist $f \circ g : T \to X$ stetig als Komposition zweier stetiger Funktionen.

Sei also $f \circ g$ stetig. Sei $A \subseteq M$ offen. Per Definition ist dann aber $A = f^{-1}[U]$ für ein offenes $U \subseteq X$. Da $f \circ g$ stetig ist, ist

$$g^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[U]] = (f \circ g)^{-1}[U] \subseteq T$$

offen, daher ist g stetig.

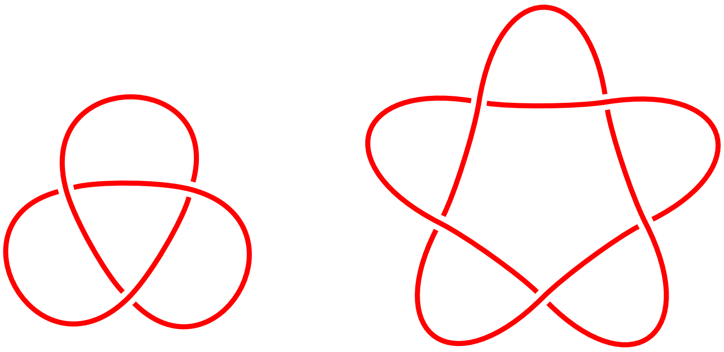


ABBILDUNG 1. Knoten sind Einbettungen von $\mathbb{S}^1$ in $\mathbb{R}^3$ (meistens wird noch differenzierbar verlangt).

Es bleibt die Eindeutigkeit von $\mathcal{I}$ zu zeigen: Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien, die (2.8) erfüllen.

Setzen wir $T = M$ und betrachten die Abbildung $g := \mathrm{id} : (M, \mathcal{T}_i) \to (M, \mathcal{T}_i)$, folgt dass $f : (M, \mathcal{T}_i) \to X$ für $i = 1, 2$ stetig ist. Setzen wir nun $\tilde{g} := \mathrm{id} : (M, \mathcal{T}_1) \to (M, \mathcal{T}_2)$ und betrachten $\tilde{g} \circ f : (M, \mathcal{T}_1) \to X$, sehen wir dass dies eine stetige Funkion, und damit nach (2.8) auch $\tilde{g}$ stetig ist. Dies zeigt $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ nach Bemerkung 1.24. Die Umgekehrte Inklusion folgt durch Vertauschen von $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$. $\square$

2.2. PRODUKTE

Seien I eine beliebige Indexmenge und seien X_i, $i \in I$ topologische Räume. Sei weiterhin M eine Menge und $f_i : M \to X_i$ Funktionen. Im Allgemeinen bildet

$$\mathcal{S} = \left\{ f_i^{-1}[U] \,\middle|\, U \subseteq X_i \text{ offen}, \, i \in I \right\}$$

keine Topologie auf M, weil der Durchschnitt zweier und die Vereinigung beliebig vieler Elemente in $\mathcal{S}$ i.A nicht mehr in $\mathcal{S}$ liegt. Wir können dem aber leicht aus dem Weg gehen indem wir

$$\mathcal{J} := \bigcap_{\substack{\mathcal{T} \text{ Topologie auf } M \\ \mathcal{T} \supseteq \mathcal{S}}} \mathcal{T} \tag{2.9}$$

definieren. Dies ist nun eine Topologie, die aus beliebigen Vereinigungen in $\mathcal{S}$ und endlichen Durchschnitten von Mengen in $\mathcal{S}$ besteht.

(2.10) DEFINITION. Wir nennen $\mathcal{J}$ aus (2.9) die *von den f_i induzierte Produkttopologie* aus M. Ist $M = \prod_{i \in I} X_i$ und $f_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$ für alle $i \in I$, dann nennen wir $\mathcal{I}$ die *Produkttopologie*. In diese Fall nennen wir die f_i *kanonische Projektionen*.

(2.11) BEISPIEL. Seien X_1, X_2 topologische Räume und definiere $M := X_1 \times X_2$ und seien $f_i : M \to X_i$ die kanonischen Projektionen. Dann ist die Topologie auf M durch

$$\mathcal{J} = \{U_1 \times U_2 \mid U_i \subseteq X_i \text{ offen } \forall i = 1, 2\}$$

gegeben. Analoges gilt für endliche Produkte.

(2.12) BEMERKUNG. Sei I eine beliebige Indexmenge und X_i topologische Räume für alle $i \in I$. Setze $X := \prod_{i\in I} X_i$. Die kanonische Produkttopologie lässt sich dann folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \left\{ \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}[U_j] \;\middle|\; U_j \subseteq X_j \text{ offen } \forall j \in J, J \subseteq I \text{ endlich} \right\} \\ &= \bigcup_{\substack{I\subseteq J\\ I \text{ endlich}}} \left\{ \prod_{i\in I} U_i \;\middle|\; U_i \subseteq X_i \text{ offen }, X_i = U_i \forall i \notin J \right\}.\end{aligned}$$

(2.13) SATZ (Universelle Eigenschaft der Produkttopologie). *Die Topologie $\mathcal{J}$ (definiert durch (2.9)) ist die einzige Topologie auf M, die folgende Eigenschaft erfüllt: Für alle $g : T \to M$ stetig gilt*

$$g \text{ stetig} \iff f_i \circ g \text{ stetig für alle } i \in I, \tag{2.14}$$

wobei T ein beliebiger topologischer Raum ist.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{J}$ (2.14) erfüllt.

Ist g stetig, dann ist auch $f_i \circ g$ stetig als Komposition stetiger Funktionen.

Sei $f_i \circ g$ stetig für alle i und sei $U \subseteq M$ offen. Wegen der Konstruktion von $\mathcal{I}$ können wir U als

$$U = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{i\in I_j} f_i^{-1}[U_{i,j}]$$

mit $U_{i,j} \subseteq X_i$ offen und $I_{i,j} \subseteq I$ endlichen Teilmengen. Dann ist aber

$$g^{-1}[U] = \bigcup_{j\in I} \bigcap_{i\in I_j} g^{-1}\left[f_i^{-1}[U_{i,j}] \right] = \bigcup_{j\in I} \bigcap_{i\in I_j} (f_i \circ g)^{-1}[U_{i,j}],$$

was eine offene Menge ist, wegen der angenommenen Stetigkeit von $f_i \circ g$ für alle $i \in I$. Der Beweis für die Eindeutigkeit lässt sich analog zu jenem der induzierten Topologie führen. $\square$

(2.15) BEISPIEL. Wir betrachten $X = \prod_{i\in[0,1]} X_i$ mit $X_i = \mathbb{R}$ für alle $i \in [0,1]$, wobei wir X mit $\mathrm{Abb}([0,1];\mathbb{R})$ identifizieren können. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $f \in X$. Dann gilt $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ in der Produkttopologie genau dann wenn

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für jedes } x \in [0,1].$$

(2.16) ÜBUNG. Weisen Sie nach, dass die Behauptung aus Beispiel 2.15 auch wirklich stimmt.

(2.17) DEFINITION. Seien $p : X \to B$, $q : Y \to B$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Dann heißt die Menge

$$X \times_B Y := \{(x,y) \in X \times Y \mid p(x) = q(y)\} \subseteq X \times Y$$

Faser-Produkt von p und q. Dabei trägt die Menge $X \times_B Y \subseteq X \times Y$ die Teilraumtopologie.

(2.18) BEMERKUNG. (*i*) Ist B nur ein Punkt, dann ist $X \times_B Y = X \times Y$.

(*ii*) Ist $X = \{b\} \subseteq B$ und $p : \{b\} \hookrightarrow B$ die Inklusion, dann ist $\{b\} \times_B Y \to q^{-1}[\{b\}]$, $(x,y) \mapsto y$ ein Homöomorphismus, da das Inverse von der Form $\{b\} \times_B Y \to$

$q^{-1}[\{b\}]$, $(b,y) \leftarrow y$ ist, also die Einschränkung einer stetigen Funktion und damit auch stetig. Wir erhalten, dass

$$\begin{tikzcd} X \times_B Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, leftrightarrow] \\ X \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm ist.

(2.19) Satz (Universelle Eigenschaft des Faser-Produkts). *Seien $f : T \to X$, $g : T \to Y$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen sodass $p \circ f = q \circ g$. Dann existiert ein eindeutiges und stetiges $h : T \to X \times_B Y$ mit $g = \pi_X \circ h$ und $f = \pi_Y \circ h$ (π_X, π_Y sind die Projektionen auf jeweils X, Y).*

(2.20) Übung. Beweisen Sie Satz 2.19.
Hinweis: Der Beweis ist ähnlich wie der für die induzierte Topologie.

2.3. Summen und co-induzierte Topologie

Seien $f_i : X_i \to M$ Abbildungen und X_i topologische Räume für alle $i \in I$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist. Welches ist die feinste Topologie auf M sodass alle f_i stetig sind?

Die Antwort ist:

(2.21) Definition. Die Topologie

$$\mathcal{J}^{\text{co}} = \left\{ U \subseteq M \;\middle|\; f_i^{-1}[U] \subseteq X_i \text{ offen für alle } i \in I \right\} \tag{2.22}$$

heißt *von den f_is co-induzierte Topologie.*

(2.23) Satz (Universelle Eigenschaft der co-induzierten Topologie). *$\mathcal{J}^{\text{co}}$ ist die einzige Topologie auf M mit: Für alle $g : M \to T$ gilt*

$$g \text{ stetig} \iff g \circ f_i : X_i \to T \text{ stetig für alle } i \in I, \tag{2.24}$$

wobei T ein beliebiger topologischer Raum ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{J}^{\text{co}}$ (2.24) erfüllt. Ist g stetig, ist offensichtlich auch $g \circ f_i$ stetig für alle i.

Sei $g \circ f_i$ stetig für alle $i \in I$ und sei $U \subseteq T$ offen. Dann ist

$$(g \circ f_i)^{-1}[U] = f_i^{-1}\Big[g^{-1}[U]\Big] \subseteq X_i \text{ offen für alle } i \in I$$

und weil M die co-induzierte Topologie trägt, ist also $g^{-1}[U] \subseteq M$ offen.

Für die Eindeutigkeit seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf M, die beide (2.24) erfüllen. Dann lässt sich zeigen (siehe Beweis von Satz 2.7), dass $f_i : X_i \to (M, \mathcal{T}_i)$ für alle $i \in I$ stetig ist. Betrachten wir nun die Funktion

$$\text{id} = g : (M, \mathcal{T}_1) \to (M, \mathcal{T}_2), \quad m \mapsto m,$$

dann ist die Komposition $f_i = g \circ f_i : X_i \to (M, \mathcal{T}_2)$ stetig und nach (2.24) g stetig. Dies zeigt $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. Die andere Inklusion folgt durch das Vertauschen von $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$. $\square$

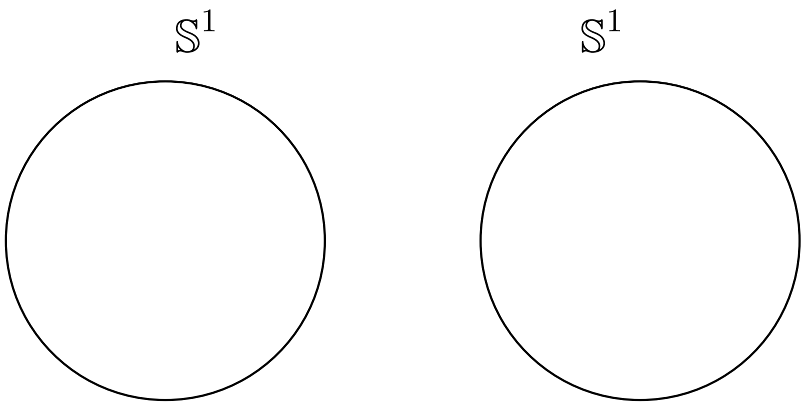


Abbildung 2. Eine Visualisierung von $\mathbb{S}^1 + \mathbb{S}^1$. Die Menge ist gegeben durch

$$\mathbb{S}^1 + \mathbb{S}^1 = \{(x, i) \mid x \in \mathbb{S}^1, i = 1, 2\}.$$

Im Bild ist z.B. $\{(x, i) \in \mathbb{S}^1 + \mathbb{S}^1 \mid i = 1\}$ der linke Kreis.

(2.25) Definition. Seien $X_i, i \in I$ topologische Räume. Der Raum

$$\coprod_{i \in I} X_i = \{(x, i) \mid x \in X_i, i \in I\} \tag{2.26}$$

versehen mit der co-induzierten Topologie von den Abbildungen

$$X_j \to \coprod_{i \in I} X_i, \quad x \mapsto (x, j), \quad j \in J \tag{2.27}$$

heißt *Summe der* X_i. Ist $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ endlich schreiben wir manchmal auch $X_1 + \cdots + X_n$.

(2.28) Bemerkung. Die offenen Mengen der Summe $\coprod_{i \in I} X_i$ sind Mengen der Form $\coprod_{i \in I} U_i$, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen ist, weil

$$\mathcal{T}^{\text{co}} = \left\{ U \subseteq \coprod_{i \in I} X_i \;\middle|\; f_i^{-1}[U] \subseteq X_j \text{ offen für alle } j \in I \right\}.$$

Die Funktionen $f_j : X_j \to \coprod_{i \in I} X_i$ sind durch (2.27) definiert und sind Einbettungen deren Bilder offen und Abgeschlossen in der Bildmenge sind. Diese Bilder bilden eine Partition der Summe.

Kapitel 3
Zusammenhang und Trennung

3.1. Zusammenhang

(3.1) Notation. Sind zwei topologische Räume X, Y homöomorph, dann schreiben wir $X \cong Y$.

(3.2) Definition. Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum. X heißt *zusammenhängend* falls

$$X \cong X_1 + X_2 \implies X_1 = \emptyset \text{ oder } X_2 = \emptyset.$$

Der nächste Satz ist sehr nützlich, um Zusammenhang festzustellen.

(3.3) Satz. *Sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) X ist zusammenhängend;
(ii) X und $\emptyset$ sind die einzigen Mengen die offen und *abgeschlossen sind;*
(iii) Jede stetige Funktion $f : X \to \{\pm 1\} = \mathbb{S}^0$ ist konstant.

Beweis. „*(i)* $\implies$ *(ii)*“: Sei $A \subseteq X$ offen *und* abgeschlossen. $X \setminus A$ ist auch offen und abgeschlossen. Wir definieren

$$f : X \to A + X \setminus A, \quad x \mapsto \begin{cases} (x,1), & x \in A \\ (x,2), & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Dies ist ein Homöomorphismus, denn f ist bijektiv und für jedes $U \subseteq X$ ist U offen genau dann wenn $U \cap A \subseteq A$ *und* $U \cap (X \setminus A) \subseteq X \setminus A$ in den jeweiligen Teilraumtopologie offen ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $f[U] = U \cap A + U \cap X \setminus A$ in $A + X \setminus A$ offen ist.

Weil aber X zusammenhängend ist, gilt $A = X$ oder $A = \emptyset$.

„*(ii)* $\implies$ *(iii)*“: Sei $x \in X$ und $f : X \to \mathbb{S}^0$ stetig. Da $\{f(x)\} \subseteq \mathbb{S}^0$ offen und abgeschlossen ist, ist $f^{-1}[\{f(x)\}]$ offen und abgeschlossen, daher nach Voraussetzung gilt $f^{-1}[\{f(x)\}] \in \{X, \emptyset\}$. Da x arbiträr war, folgt, dass f konstant sein muss.

„*(iii)* $\implies$ *(i)*“: Sei $X \cong X_1 + X_2$. Die Funktion

$$X_1 + X_2 \to \mathbb{S}^0, \quad (x,i) \mapsto \begin{cases} 1, & i = 1, \\ -1, & i = 2 \end{cases}$$

ist stetig und daher konstant. Es folgt damit entweder $X_1 = \emptyset$ oder $X_2 = \emptyset$. □

Erinnerung. $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt Intervall, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ gilt:

$$a, c \in M \implies b \in M$$

Der Beweis der nächsten Behauptung ist ein Beispiel, wie Satz 3.3 anzuwenden ist.

(3.4) Behauptung. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. M ist genau dann ein Intervall, wenn es zusammenhängend ist.*

Beweis. „ $\Longleftarrow$ “: Sei M ein Intervall, $f : M \to \mathbb{S}^0$ stetig und seien $a, c \in M$. Dann ist $f|_{[a,c]}\ [a, c] \to \mathbb{S}^0 \subseteq \mathbb{R}$ stetig und wegen dem Zwischenwertsatz konstant. Weil a, c arbiträr waren, ist f konstant d.h. M ist zusammenhängend (Satz 3.3).

„ $\Longrightarrow$ “: Seien $a, c \in M$ und $b \in (a, c)$, wobei M zusammenhängend ist. Wäre nun $b \notin M$, dann wäre

$$M = (M \cap (-\infty, b)) \,\dot{\cup}\, (M \cap (b, +\infty)).$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass dann M nicht zusammenhängend wäre. Widerspruch. $\square$

(3.5) Korollar. *Sei $f : X \to Y$ stetig und X zusammenhängend. Dann ist $f[X]$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $g : f[X] \to \mathbb{S}^0$ stetig. Dann ist aber $f \circ g$ auch stetig und konstant. Da f surjektiv auf $f[X]$ abbildet muss also auch g konstant sein. Aus Satz 3.3 folgt, dass $f[X]$ zusammenhängend ist. $\square$

(3.6) Korollar. *Seien $Z_i \subseteq X$, $i \in I$ wobei jedes Z_i zusammenhängend ist. Falls $Z_i \cap Z_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$ ist auch $\bigcup_{i \in I} Z_i$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $f : \bigcup_i Z_i \to \mathbb{S}^0$ stetig. Die Einschränkung $f|_{Z_i}$ ist konstant und da $Z_i \cap Z_j \neq \emptyset$ ist auch $f|_{Z_i \cup Z_i}$ konstant. Es folgt, dass f konstant ist. $\square$

(3.7) Übung. Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ zusammenhängend. Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ auch zusammenhängend ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine stetige Funktion $f : \overline{A} \to \mathbb{S}^0$.

(3.8) Korollar. *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann gibt es eine größte Menge $Z(x) \subseteq X$ mit $x \in Z(x)$ und $Z(x)$ ist zusammenhängend. $Z(x)$ ist außerdem abgeschlossen.*

(3.9) Definition. Wir nennen $Z(x)$ aus Korollar 3.8 die *Zusammenhangskomponente* von x. Falls $Z(x) = \{x\}$ für alle $x \in X$, heißt X *total unzusammenhängend*.

Beweis von Korollar 3.8. Sei für $x \in X$

$$\mathcal{Z}(x) = \{Z \subseteq X \mid x \in Z, Z \text{ zusammenhängend}\}.$$

Dann ist nach Korollar 3.8 $Z(x) := \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}(x)} Z$ zusammenhängend und enthält x und ist offensichtlich die größte Menge mit dieser Eigenschaft. Wegen Übung 3.7 ist $\overline{Z(x)}$ zusammenhängend, damit gilt aber $Z(x) = \overline{Z(x)}$, weil $Z(x)$ die größte zusammenhängende Menge ist, die x enthält. $\square$

(3.10) Beispiel. Sei $X = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in X$. Dann ist $Z(x) = \{x\}$, denn: $Z(x) \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Intervall und $Z(x) \subseteq \mathbb{Q}$, also $Z(x) = [x, x] = \{x\}$. Damit ist $\mathbb{Q}$ total unzusammenhängend, aber *nicht* der diskrete Raum.

(3.11) Beispiel. Wir konstruieren in diesem Beispiel die Kantor-Menge und zeigen, dass sie total unzusammenhängend und überabzählbar ist. Sei dazu

$$
\begin{aligned}
A_0 &:= [0,1]\\
A_1 &:= \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]\\
A_2 &:= \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},\frac{9}{9}\right]\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend definieren wir die Menge A_n durch

$$A_n := f_1[A_{n-1}] \cup f_2[A_{n-1}], \quad \text{wobei} \quad f_i : [0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{i}{3}$$

für $i = 1,2$. Wir definieren nun die *Kantor-Menge* durch

$$\mathcal{C} := \bigcap_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_i.$$

Wir bemerken weiterhin, dass jedes $a \in [0,1]$ in der Form

$$a = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \frac{1}{3^i}, \quad a_i \in \{0,1,2\} \tag{3.12}$$

geschrieben kann und das $\mathcal{C}$ genau jene Elemente enthält deren Ternärdarstellung keine Einsen besitzt. Wir schreiben für a in der Form (3.12) $a =: 0.a_1a_2a_3\ldots_3$. Es ist von hier aus leicht zu sehen, dass

$$\mathcal{C} = \{a \in [0,1] \mid a = 0.a_1a_2a_3\ldots_3\,, a_i \in \{0,2\}, i \in \mathbb{N}\}\,. \tag{3.13}$$

Wir behaupten nun

(3.14) $\mathcal{C}$ ist überabzählbar.

Um (3.14) nachzuweisen bemerken wir, dass wegen (3.13) $\mathcal{C}$ die gleiche Kardinalität hat wie $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\{0,2\})$. Wir nehmen nun an, dass $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\{0,2\})$ eine Bijektion ist und leiten einen Widerspruch her. Setze

$$f : \mathbb{N} \to \{0,1\}, \quad i \mapsto \begin{cases} 2, & \text{falls } \varphi(i)(i) = 0 \\ 0, & \text{falls } \varphi(i)(i) = 2. \end{cases}$$

Dann gilt aber $\varphi(i) \neq f$ für alle $i \in \mathbb{N}$, Widerspruch.

Um das Beispiel abzuschließen zeigen wir eine letzte Behauptung:

(3.15) $\mathcal{C}$ ist total unzusammenhängend.

Sei dazu $x \in \mathcal{C}$ und $Z(x)$ die Zusammenhangskomponente von x in $\mathcal{C}$. Mit Behauptung 3.4 folgt, $Z(x)$ ist ein Intervall. Wegen der Konstruktion von $\mathcal{C}$ folgt

$$|Z(x)| \leq \frac{1}{3^i} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt $Z(x) = [x,x] = \{x\}$. Dies schließt das Beispiel ab.

(3.16) Korollar. *Sei X ein topologischer Raum bestehend aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten $\{Z_1,\ldots,Z_N\}$. Dann ist jede Zusammenhangskomponente offen und abgeschlossen.*

Beweis. Wegen Korollar 3.8 ist $Z_i \subseteq X$ abgeschlossen für alle $i = 1, \dots, N$. Wegen

$$Z_i = X \setminus \left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} Z_j \right)$$

ist Z_i als Komplement einer abgeschlossenen Menge auch offen. □

(3.17) Korollar. *Seien X, Y topologische Räume. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $X \times Y$ ist zusammenhängend;
(ii) X und Y sind beide zusammenhängend.

Beweis. „*(i)* $\implies$ *(ii)*“: Seien π_X und π_Y die Projektionen auf jeweils auf die X- und Y-Koordinaten. Dies sind stetige Surjektionen, daher folgt mit Korollar 3.5, dass X und Y zusammenhängend sind.

„*(ii)* $\implies$ *(i)*“: Seien $(x, y), (u, v) \in X \times Y$. Die Mengen $\{u\} \times Y \cong Y$ und $X \times \{y\} \cong X$ sind zusammenhängend, also ist $\{u\} \times Y \cup X \times \{y\}$ zusammenhängend (Korollar 3.6). Dann liegen aber die beiden Punkte $(x, y), (u, v)$ in der gleichen Zusammenhangskomponente von $X \times Y$. Da die Punkte arbiträr gewählt wurden, muss $X \times Y$ zusammenhängend sein. □

(3.18) Definition. Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenhängend*, falls für alle $x \in X$ und jede Umgebung U von x eine zusammenhängende Umgebung V von x mit $V \subseteq U$ existiert.

3.2. Trennung und stetige Fortsetzbarkeit

Trennungseigenschaften sichern die Existenz genügend vieler offener Mengen, um gewisse Teilmengen des Raumes voneinander zu trennen.

(3.19) Definition. Sei X ein topologischer Raum. Wir führen folgende Eigenschaften ein:

T1 Für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ existieren Umgebungen U_x, U_y von jeweils x, y sodass $y \notin U_x$ und $x \notin U_y$.
T2 Für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ existieren Umgebungen U_x, U_y von jeweils x, y sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$
T3 Für alle $x \in X$ und $U \subseteq X \setminus \{x\}$ in X abgeschlossen existieren disjunkte Umgebungen. (Eine Umgebung einer Teilmenge ist eine Obermenge einer offenen Menge, welche die Teilmenge enthält).
T4 Zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Mengen von X gibt es disjunkte Umgebungen.

Ein topologischer Raum X ist ein *Hausdorff-Raum*, wenn er die Eigenschaft **T2** hat. Erfüllt ein topologische Raum alle Trennungseigenschaften, so nennt man ihn *normal*.

(3.20) Übung. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(1) **T1** $\iff$ für alle $x \in X$ ist $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen.
(2) **T2** $\implies$ **T1**.

(3.21) Beispiel. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist X **T2**. Wir definieren weiter für alle $M \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ abgeschlossen

$$d_M(x) := \inf_{a \in M} d(x,a).$$

Für zwei disjunkte abgeschlossene Mengen $A, B \subseteq X$ können wir die stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}$ definieren. Dann sind die Mengen $f^{-1}[[0, \frac{1}{2})] \supseteq A$, . Also erfüllt X **T4** und ist weiter normal.

(3.22) Bemerkung. Falls ein topologischer Raum X **T1** erfüllt, dann wird **T4** durch **T3** impliziert.

(3.23) Definition. Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ heißt *Urysohn-Funktion* zu A, B, falls $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$ ist.

(3.24) Beispiel. Die Funktion f aus Beispiel 3.21 ist auch eine Urysohn-Funktion.

(3.25) Übung. Sei X ein topologischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die punktweise in $\mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion wieder stetig ist.

(3.26) Satz (Tietze-Urysohn). *Sei X ein topologischer Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) Der Raum X erfüllt **T4***;*
(2) Für alle $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$ existiert eine Urysohn-Funktion.
(3) Für alle $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to [0,1]$ stetig existiert eine stetige Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$, die mit F auf A übereinstimmt.

Beweis. „(1) $\Longrightarrow$ (2)“: Sei X **T4** und $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Wegen **T4** finden wir $C \subseteq X$, sodass

$$A \subseteq \mathring{C} \subseteq \overline{C} \subseteq X \setminus B.$$

Dafür trennt man A, B durch disjunkte Umgebungen C, D. Man kann nun diese Prozedur wieder auf A und $\overline{C}$ anwenden. Macht man das weiter erhält man eine Kette von Mengen. Wir nennen eine Kette der Länge $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A} := (A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq X \setminus B)$$

zulässig, falls stets $\overline{A_i} \subseteq \mathring{A}_{i+1}$ und $\overline{A_k} \subseteq X \setminus B$. Durch obiges Argument kann man die Kette auf die doppelte Länge verfeinern. Wir finden somit eine folge $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von zulässigen Ketten, wobei $\mathcal{A}_{n+1}$ eine solche doppelt so lange Verfeinerung von $\mathcal{A}_n$ ist und $\mathcal{A}_0 = (A \subseteq X \setminus B)$. Zu $\mathcal{A}_n = (A_0 \subseteq \cdots \subseteq A_{2^n-1})$ definieren wir eine Treppenfunktion durch

$$f_k(x) := k2^{-n} \quad \text{für alle } x \in A_k \setminus A_{k-1}, \quad A_{-1} = \emptyset \text{ und } A_{2^n} = X.$$

Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt und konvergiert daher punktweise gegen eine Grenzfunktion

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Es gilt $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$. Wir zeigen noch, dass f stetig ist. Nun gilt

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq 2^{-(n+1)}$$

und bezüglich der Kette $\mathcal{A}_n$ gilt

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq 2^{-n} \quad \text{für alle } x, y \in \overset{\circ}{A}_{k+1} \setminus \overline{A_{k-1}}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \sum_{k \geq n+1} 2^{-k} + 2^{-n} + \sum_{k \geq n+1} 2^{-k} = 3 \cdot 2^{-n}. \end{aligned}$$

Wählt man $\varepsilon > 3 \cdot 2^{-n}$, kann man x in der offenen Umgebung $\overset{\circ}{A}_{k+1} \setminus \overline{A_{k-1}}$ variieren ohne Schwankungen größer als ε zu erhalten.

„(2) $\Longrightarrow$ (3)“: Sei $f : A \to [-1, 1]$ stetig, A abgeschlossen. Sei G eine Urysohn-Funktion auf X zu den disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $f^{-1}[[-1, \frac{1}{3}]]$ und $f^{-1}[[\frac{1}{3}, 1]]$. Dann erfüllt die Funktion $F_1 := \frac{2}{3}G - \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} |f(x) - F_1(x)| &\leq \frac{2}{3} \quad \text{für } x \in A \text{ und} \\ |F_1(x)| &\leq \frac{1}{3} \quad \text{für } x \in X, \end{aligned}$$

was sich durch Betrachten von x in den Urbildern von $[-1, \frac{-1}{3}]$, $(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$ und $[\frac{1}{3}, 1]$ unter f prüfen lässt. Die Funktion F_1 nähert f allerdings nur an. Für eine bessere Näherung, wenden wir das Verfahren auf die Fehlerfunktion

$$f' : A \to [\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}], \quad x \mapsto f(x) - F_1(x)$$

an, womit wir $F_2 : X \to \mathbb{R}$ erhalten, welches

$$|f'(x) - F_2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{für } x \in A \text{ und}$$

$$|F_2| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \quad \text{für } x \in X$$

erfüllt. Indem wir dieses Verfahren weiter treiben, erhalten wir eine Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} F_j \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für } x \in A \text{ und}$$

$$|F_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{für } x \in X.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} F_n$ gleichmäßig gegen eine stetig Funktion F mit $F|_A \equiv f$. $\square$

(3.27) Satz. *Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossene zueinander homöomorphe Teilmengen. Dann sind die Komplemente von $A \cong A \times \{0\}$ und $B \cong \{0\} \times B$ in $\mathbb{R}^{n+m}$ homöomorph.*

Beweis. Sei $\varphi : A \to B$ ein Homöomorphismus. Gemäß Satz 3.26 finden wir eine stetige Erweiterung $\Phi : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$. Sei analog $\Psi : \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}^a$ eine stetige Erweiterung von $\psi := \varphi^{-1}$. Dann sind

$$\begin{aligned} L &: \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b, \quad (x, y) \mapsto (x, y - \Phi(x)) \quad \text{und} \\ R &: \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b, \quad (x, y) \mapsto (x - \Psi(y), y) \end{aligned}$$

Homöomorphismen. L bildet den Graphen von φ homoömorph auf $A \times \{0\}$ ab und R homöomorph auf $\{0\} \times B$. Also ist $R \circ L^{-1}|_{A \times \{0\}} \to \{0\} \times B$ ein Homöomorphismus. $\square$

(3.28) KOROLLAR. *Knoten in* $\mathbb{R}^3$ *sind äquivalent in* $\mathbb{R}^5$ *d.h. falls* $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ *abgeschlossen mit* $K_1, K_2 \cong \mathbb{S}^1$ *sind, existiert ein Homömorphismus* $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *welcher* $K_1 \times \{0\}$ *auf* $K_2 \times \{0\}$ *abbildet.*

BEWEIS. Nach Satz 3.27 existiert ein Homöomorphismus $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$, sodass

$$K_1 \times \{0\} \xrightarrow{\sim} \{0\} \times \mathbb{S}^1 \xleftarrow{\sim} K_2 \times \{0\}.$$

□

Kapitel 4
Kompaktheit

4.1. Definition und erste Eigenschaften

(4.1) Definition. Sei X ein topologischer Raum. X heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

(4.2) Bemerkung. Kompaktheit ist invariant unter Homöomorphie

(4.3) Beispiel. Das Intervall $[0,1]$ ist kompakt. Um dies einzusehen nehmen wir eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$. Wir definieren nun

$$\mathcal{M} := \left\{ s \in [0,1] \;\middle|\; \exists E \subseteq I \text{ endlich, s.d. } \bigcup_{e\in E} U_e \supseteq [0,s] \right\}.$$

Sei $t := \sup \mathcal{M}$. Offensichtlich gilt $t > 0$, da $0 \in U_i$ für ein $i \in I$ aber U_i ist offen. Wäre nun $t < 1$, dann fänden wir U_j sodass $(t+\varepsilon, t-\varepsilon) \subseteq U_j$ für ein $\varepsilon > 0$. Weiter würde wegen der Definition von t ein endliches $E \subseteq I$ existieren, sodass $\bigcup_{e\in E} U_e \supseteq [0, t-\varepsilon/2]$. Dann wäre aber $\{U_e\}_{e\in E\cup\{j\}}$ eine offene Überdeckung von $[0, t+\varepsilon/2]$. Widerspruch zur Maximalität von t.

Von hier aus sieht man leicht, dass $[0,1]$ sich endlich überdecken lässt.

(4.4) Satz. *Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist auch A kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Für alle $i \in I$ finden wir also $V_i \subseteq X$ offen mit $V_i \cap A = U_i$. Dann ist aber $\{V_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von X. Aus der Kompaktheit von X folgt die Existenz von $I' \subseteq I$ endlich, sodass $\{V_i\}_{i\in I'} \cup \{X \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von X ist. Dann ist aber $\{U_i\}_{i\in I'}$ eine endliche Überdeckung von A. □

Falls X ein Hausdorff-Raum ist, ist die Umkehrung des obigen Satzes auch wahr:

(4.5) Satz. *Sei X **T2** und $A \subseteq X$. Falls A kompakt ist, ist A abgeschlossen in X.*

Beweis. Fixiere $x \in X \setminus A$. Für jedes $a \in A$ finden wir $U_a, V_a \subseteq X$ offen und disjunkt mit $a \in U_a$, $x \in V_a$. Da A kompakt ist und $\bigcup_{a\in A} U_a \supseteq A$ finden wir $E \subseteq A$ endlich sodass $\bigcup_{e\in E} U_e \supseteq A$. Dann ist $V := \bigcap_{e\in E} V_e \subseteq X$ offen und V und $\bigcup_{e\in E} U_e$ sind disjunkt, d.h. insbesondere sind V und A disjunkt. Da wir $x \in X \setminus A$ arbiträr gewählt haben, können wir $X \setminus A$ als Vereinigung von Mengen der Form V schreiben und erhalten, dass $X \setminus A$ offen ist. □

(4.6) Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass ein kompakter Raum der **T2** ist automatisch auch **T3** ist.

(4.7) Satz. *Sei $f : X \to Y$ stetig und X kompakt. Dann ist auch $f[X]$ kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f[M]$ (d.h. U_i ist in der Teilraumtopologie von $f[X]$ offen). Für alle $i \in I$ finden wir $V_i \subseteq X$ offen mit $U_i = V_i \cap f[X]$. Nun ist $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[U_i]$ kompakt, d.h. wir finden $E \subseteq I$ endlich sodass $X = \bigcup_{e\in E} f^{-1}[U_e]$.

Dann ist aber

$$f[X] = \bigcup_{e \in E} V_e \cap f[X] = \bigcup_{e \in E} U_e. \qquad \square$$

(4.8) KOROLLAR. *Sei $f : X \to Y$ stetig und X kompakt Sei weiter Y* **T2**. *Dann ist f abgeschlossen.*

BEWEIS. Dies ist eine direkte Konsequenz von Satz 4.4 und Satz 4.5. $\square$

Die nächste Folgerung wird in Beweisen häufiger verwendet und ist sehr nützlich:

(4.9) KOROLLAR. *Sei $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, X kompakt und Y* **T2**. *Dann ist f ein Homöomorphismus.*

BEWEIS. Wegen Korollar 4.8 ist f abgeschlossen, also f^{-1} stetig. $\square$

(4.10) KOROLLAR. *Sei X kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt sein Minimum und Maximum an.*

BEWEIS. Nach Satz 4.7 ist auch $f[X] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Weiter ist $\{(f(x) - 1, f(x) + 1)\}_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von $f[X]$. Wir finden also $E \subseteq X$ endlich, sodass $\{(f(x) - 1, f(x) + 1)\}_{x \in E}$ die Menge $f[X]$ überdeckt. Dann gilt

$$\min_{y \in E} f(y) - 1 \leq f(x) \leq \max_{y \in E} f(x) + 1 \quad \text{für alle } x \in X,$$

d.h. f ist beschränkt. Um die verbleibende Aussage zu zeigen sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $f[X]$ mit $x_n \to \sup f[X]$ für $n \to +\infty$. Indem wir die Menge mit Bällen mit Radius 1 überdecken, sehen wir aus der Kompaktheit von $f[X]$, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist. Wegen Bolzano Weierstrass existiert eine konvergente Teilfolge. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die ganze Folge konvergiere. Nach Satz 4.5 ist $f[X]$ abgeschlossen (da $\mathbb{R}$ ein Hausdorff-Raum ist), damit liegt der Grenzwert der Folge in $f[X]$, also wird das Supremum angenommen.

Der Beweis, dass das Infimum angenommen wird ist analog. $\square$

(4.11) SATZ (Tychonoff). *Seien X_i, $i \in I$ kompakte Räume. Dann ist auch $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt.*

BEWEIS. Wir zeigen den Satz hier nur für endliche Produkte. Per Induktion reicht es zu zeigen:

$$X, Y \text{ sind kompakt} \implies X \times Y \text{ ist kompakt.} \tag{4.12}$$

Sei $U = \{U_i \times V_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$, wobei $U_i \subseteq X$, $V_i \subseteq Y$ offen sind.

Weil $X \times \{y\} \cong X$ für jedes $y \in Y$ kompakt ist, finden wir $I_y \subseteq I$ endlich mit $\bigcup_{i \in I_y} U_i \times V_i \supseteq X \times \{y\}$. Wir definieren weiter $V(y) := \bigcap_{i \in I_y} V_i \subseteq Y$, eine offene Menge. Weil Y kompakt ist, finden wir $y_1, \ldots, y_n \in Y$, sodass $Y = \bigcup_{k=1}^n V(y_k)$. Also ist $\{U_i \times V_i \mid i \in I_{y_k}\}$ eine Überdeckung von $X \times Y(y_k)$ und damit

$$\bigcup_{k=1}^{n} \{U_i \times V_i \mid i \in I_{y_k}\}$$

eine offene und endliche Überdeckung von $X \times Y$. Dies schließt den Beweis ab. $\square$

(4.13) KOROLLAR (Heine-Borel). *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann:*

(4.14) $$A \text{ kompakt} \iff A \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.}$$

BEWEIS. „$\implies$“: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Wegen Korollar 4.10 nimmt $\|\cdot\|$ Maximum und Minimum auf A an, d.h. A ist beschränkt. Da $\mathbb{R}^n$ **T2** ist, folgt auch, dass A abgeschlossen ist (Satz 4.5).

„$\impliedby$“: Wir hatten in Beispiel 4.3 gezeigt, dass $[0,1]$ kompakt ist. Mit der stetigen Abbildung

$$f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (2x-1)\cdot T, \quad T > 0$$

sehen wir, dass $[-T,T] = f_T[[0,1]]$ kompakt für alle $T > 0$ ist (Satz 4.7) und mit Satz 4.11 ist auch $[-T,T]^n$ kompakt. Wählen wir nun $T > 0$ groß genug, sodass $A \subseteq [-T,T]$ ist A also eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes und damit selbst kompakt (Satz 4.4). □

(4.15) DEFINITION. Ein metrischer Raum (X,d) heißt *totalbeschränkt*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele ε-Bälle X überdecken.

(4.16) BEMERKUNG. Falls X beschränkt ist, ist es auch totalbeschränkt, denn: Wir finden $x_1,\dots,x_n \in X$ sodass $X = \bigcup_{i=1}^n B_{1/2}(x_i)$. Für $x, y \in X$ gilt nun

$$d(x,y) \le 1 + \max_{i \neq j} d(x_i, x_j).$$

(4.17) DEFINITION. Ein metrischer Raum (X,d) heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.

(4.18) ÜBUNG. Es sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem total beschränkten metrischen Raum (X,d). Zeigen Sie:

a) Ein 1-Ball B_1 und eine unendliche Teilmenge $J_1 \subseteq \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_j \in B_1$ für alle $j \in J_1$.
b) Es existieren $\frac{1}{n}$-Bälle B_n für $n \in \mathbb{N}$ und eine Kette von unendlichen Teilmengen $\mathbb{N} \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots \supseteq J_n \supseteq \dots$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_j \in B_n$ für alle $j \in J_n$.
c) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ kann ein $j_n \in J_n$ gewählt werden, so dass $j_k < j_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
d) Für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $n, m \ge N$ gilt $d(x_{j_n}, x_{j_m}) \le \frac{2}{N}$. Also ist $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Folgern Sie nun, dass in einem total beschränkten vollständigen metrischen Raum jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

(4.19) SATZ. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) X ist kompakt;
(ii) X ist totalbeschränkt und vollständig.

BEWEIS. „*(i)* $\implies$ *(ii)*“:

Schritt 1: Vollständigkeit: Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge in X. Dann hat $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Sonst würde für jedes x eine Umgebung U_x existieren, die nur endlich viele Folgenglieder enthälte. Mit der Kompaktheit würde dies implizieren, dass $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nur endlich viele Folgenglieder hat. Dann würde es aber eine konvergente Teilfolge enthalten, was ein Widerspruch wäre.

Sei daher $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to+\infty} x_{i_k} =: x$. Für ein $\varepsilon > 0$ folgt mit der Cauchy-Eigenschaft für $n, k \in \mathbb{N}$ groß genug, dass

$$d(x_n, x) \leq d(x_{i_k}, x_n) + d(x_{i_k}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h. $x_n \to x$ für $n \to +\infty$.

Schritt 2: Totalbeschränktheit: Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x) = X$. Weil X kompakt ist, finden wir $x_1, \dots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.

„*(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*“:

Schritt 1: Reduktion auf eine abzählbare Überdeckung: Weil X totalbeschränkt ist, finden wir für alle $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge $E_n \subseteq X$ sodass $\bigcup_{e\in E_n} B_{1/n}(e)$. Die Menge $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq X$ ist abzählbar und dicht und jede offene Menge von X ist eine Vereinigung von Elementen aus

$$\left\{ B_{1/n}(e) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, e \in E \right\},$$

was eine abzählbare Menge ist.

Also reicht es, für eine abzählbare offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung zu finden.

Schritt 2: Reduktion auf Folgenkompaktheit: Sei $U = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene und abzählbare Überdeckung von X. Falls U keine endliche Teilüberdeckung enthält, kann man eine Folge $x_i \in X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_i)$ wählen. Hat $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Limespunkt $x \in U_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann wäre dies ein Widerspruch nach Konstruktion.

Wir sind also fertig, wenn wir Folgenkompaktheit zeigen.

Schritt 3: Folgenkompaktheit: Der Beweise verbleibt dem Leser zur Übung, siehe Übung 4.18. □

4.2. Identifizierung und Quotiententopologie

(4.20) Definition. Sei X ein topologischer Raum und $p : X \to Y$ surjektiv. p heißt *Quotientenabbildung*, falls Y die von p co-induzierte Topologie trägt, d.h. für jedes $U \subseteq Y$ gilt

$$U \text{ offen} \iff p^{-1}[U] \subseteq X \text{ offen}.$$

Dies bedeutet, dass p sicher stetig ist.

(4.21) Beispiel. Sei $\mathbb{R}P^n$ die Mengen der Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ die durch 0 gehen. Wir definieren

$$p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n, \quad x \mapsto \mathbb{R}x = \{tx \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{4.22}$$

Dann heißt $\mathbb{R}P^n$ mit der von p co-induzierten Topologie *reeller projektiver Raum*. Analog lässt sich $\mathbb{C}P^n$ definieren.

(4.23) Beispiel. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Dann heißt die Menge aller Äquivalenzklassen $X/\sim$ Quotientenraum von X nach $\sim$, wenn X mit der co-induzierten Topologie bezüglich der kanonischen Projektion

$$p : X \to X/\sim, \quad x \mapsto [x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

versehen ist. Hier ist p eine Quotientenabbildung.

Konvention: Dies ist die Standardtopologie auf $X/\sim$.

(4.24) Bemerkung. Sei $p : X \to Y$ eine Quotientenabbildung und T ein topologischer Raum. Dann sind für alle $g : Y \to T$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- g ist stetig;
- die Komposition $g \circ p : X \to T$ ist stetig.

Dies ist ein Spezialfall der universellen Eigenschaft der co-induzierten Topologie vgl. Satz 2.23.

(4.25) Beispiel. Sei $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation durch

$$t \sim s :\Longleftrightarrow \begin{cases} \{t,s\} = \{0,1\} & \text{oder} \\ t = s. \end{cases}$$

Dann ist der Quotientenraum gegeben durch

$$X/\sim = \left\{ \{0,1\} \right\} \cup \{\{t\} \mid t \in (0,1)\}.$$

Wir können nun $X/\sim \cong \mathbb{S}^1$ zeigen. Wir definieren $\varphi : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ durch $\varphi(t) := \mathrm{e}^{2\pi i t}$. Dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "t \mapsto [t]_\sim"] \arrow[dr, "\varphi"'] & {[0,1]/\sim} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

g ist stetig und bijektiv (stetig, wegen der universellen Eigenschaft der co-induzierten Topologie), $X/\sim$ ist kompakt und $\mathbb{S}^1$ ist **T2**. Wegen Korollar 4.9 ist g also ein Homöomorphismus.

(4.26) Beispiel. Sei $X = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation durch

$$(t,s) \sim (t',s') :\Longleftrightarrow \begin{cases} \{t,t'\} = \{0,1\} \text{ und } s = s', \\ \{s,s'\} = \{0,1\} \text{ und } t = t', \\ (t,s) = (t',s'). \end{cases}$$

Durch die Äquivalenzrelation werden gegenüberliegende Seiten des Quadrates X identifiziert. Wir zeigen nun $X/\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Sei dazu $p : X \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ mit $p(t,s) = (\mathrm{e}^{2\pi i t}, \mathrm{e}^{2\pi i s})$ und $g : X/\sim \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ mit $g([(t,s)]_\sim) := p(t,s)$. Dann ist g wohldefiniert, weil $p(s,t) = p(s',t')$ genau dann wenn $(t,s) \sim (t',s')$. Es kommutiert also folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} {[0,1]^2} \arrow[r, "(t,s) \mapsto [(t,s)]_\sim"] \arrow[dr, "p"'] & {[0,1]^2/\sim} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass g eine bijektive Abbildung ist. Weiterhin ist g stetig, wegen der universellen Eigenschaft der co-induzierten Topologie (Satz 2.23). Wegen Korollar 4.9 ist g ein Homöomorphismus, was die Behauptung zeigt.

(4.27) Satz. *Sei $p : X \to Y$ eine stetige Surjektion. Ist p entweder offen oder abgeschlossen, dann ist p eine Quotientenabbildung.*

Beweis. Sei p offen, der Fall p abgeschlossen wird analog gezeigt. Sei $U \subseteq Y$ offen, dann ist wegen der Stetigkeit $p^{-1}[U] \subseteq X$ offen. Benutzen wir die Surjektivität von p erhalten wir

$$U \overset{p \text{ surjektiv}}{=} p\left[p^{-1}[U]\right] \subseteq Y$$

offen, weil p offen ist. □

(4.28) Bemerkung. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch: Definieren wir zum Beispiel

$$p : \mathbb{R} \to Y := \{a, b\}, \quad x \mapsto \begin{cases} a, & x < 0 \\ b, & x \leq 0, \end{cases}$$

wobei Y die Topologie $\{\emptyset, X, \{a\}\}$ trägt. Dann ist p eine Quotientenabbildung. Aber p ist nicht offen, denn $p[(0,1)] = \{b\}$ und p ist nicht abgeschlossen, denn $p[[-2,-1]] = \{a\}$. Dieses Beispiel zeigt auch: X **T2** impliziert *nicht*, dass $X/\sim$ **T2** ist.

(4.29) Definition. Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$ abgeschlossen und sei $f : A \to Y$ stetig. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $X + Y$ durch die Äquivalenzklassen

$$\begin{cases} f^{-1}[\{y\}] + \{y\} & \text{für } y \in f[A] \\ \{p\} & \text{für } p \in X \setminus A + Y \setminus f[A]. \end{cases}$$

Der Raum $X +_f Y := X + Y/\sim$ heißt *Verklebung von X und Y entlang von f*.

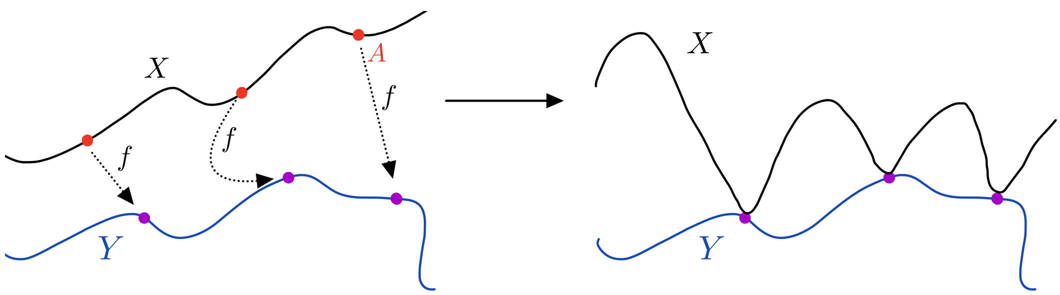


Abbildung 1. Illustration von Definition 4.29. Die Menge $X +_f Y$ erhalten wir, indem wir die disjunkte Vereinigung $X + Y$ am Graphen von f zusammenkleben.

(4.30) Bemerkung. Sei $\iota : Y \to X + Y$ und $\pi : X + Y \to X +_f Y$ die kanonischen Einbettungen. Dann ist $\pi \circ \iota : Y \to X +_f Y$ eine abgeschlossene Einbettung. Um dies zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $\pi \circ \iota$ injektiv, stetig und abgeschlossen ist.

(4.31) Beispiel. Sei $X = Y = \mathbb{D}_n := \{x \in \mathbb{R}_n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$. Sei weiter $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ die Identität. Wir behaupten nun

(4.32) $\quad X +_f Y \cong \mathbb{S}^n$

Um die Behauptung zu zeigen betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{tikzcd} X+Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathbb{S}^n, \\ \underbrace{X+_f Y}_{\text{kompakt}} \arrow[ur, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

wobei φ durch

$$\varphi : \mathbb{D}^n + \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n, \quad p \mapsto \begin{cases} \left(p, \sqrt{1-\|p\|^2}\right), & p \in X; \\ \left(p, -\sqrt{1-\|p\|^2}\right), & p \in Y \end{cases}$$

gegeben ist. Wegen Korollar 4.9 folgt also die Behauptung.

(4.33) Definition. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und nicht leer. Wir definieren eine Äquivalenzrelation

$$\sim := \{(x,y) \in X \times X \mid x, y \in A\} \cup \{(x,x) \mid x \in X\}.$$

Wir setzen nun $X/A := X/\sim$ und sagen, X/A *entsteht durch Zusammenschlagen von* A.

(4.34) Beispiel. Sei $X = \mathbb{S}^2$ und $\sim := \{(x,y) \mid x = \pm y \text{ mit } x, y \in \mathbb{S}^2\}$. Dann gilt $\mathbb{S}^2/\sim \cong \mathbb{R}P^2$, denn: $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^2$ ($\mathbb{S}^2/\sim$ ist **T2**, weil die Äquivalenzklassen stetig sind und $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$**T4** ist).

4.3. Homotopien

(4.35) Definition. Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y$ heißt *Homotopie*. Für zwei stetige Funktionen $f, g : X \to Y$, dass sie *homotop* sind, falls eine Homotopie $H : [0,1] \times X \to Y$ gibt, sodass

$$H(0,x) = f(x) \quad H(1,x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

In diesem Falle sagen wir, dass H eine *Homotopie von f nach g* ist.

(4.36) Übung. Zeigen Sie, dass

$$f \sim g :\iff f, g \text{ sind homotop}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\hom(X,Y)$ definiert.
Hinweis:

$$\hom(X,Y) := \{f \in \mathrm{Abb}(X,Y) \mid f \text{ ist stetig}\}.$$

(4.37) Beispiel. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{R}$ sind immer homotop mit der Homotopie

$$H : X \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x).$$

Allgemeiner gilt dies, wenn $\mathbb{R}$ durch eine beliebige konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ersetzt wird.

(4.38) Satz. *Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf* $\hom(X,Y)$.

Beweis. Siehe Übung 4.36. □

(4.39) Definition. Wir definieren $[X,Y] := \hom(X,Y)/\sim$, wobei $\sim$ die Homotopieäquivalenzrelation ist. Die Elemente von $[X,Y]$ heißen dann *Homotopieäquivalenzklassen*. Weiter heißt $f : X \to Y$ *nullhomotop*, falls $f \sim \text{const}$.

(4.40) Definition. Eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ heißt *Weg* von $\gamma(0)$ nach $\gamma(1)$.

Einen Weg können wir stets als Homotopie $[0,1] \times \{x\} \to X$ auffassen. Daher ist die Existenz eines Weges zwischen zwei Punkten eine Äquivalenzrelation auf X. Diese Äquivalenzklassen heißen *Wegzusammenhangskomponenten von X*. X heißt *wegzusammenhängend*, falls es aus einer Wegzusammenhangskomponenten besteht, d.h. falls es von $x \in X$ zu allen Punkten von X einen Weg gibt.

(4.41) Übung. Zeigen Sie: Ist X wegzusammenhängend, dann ist es auch zusammenhängend. Die umgekehrte Implikation ist nicht wahr.

(4.42) Satz. *Seien $f_0, f_1 : X \to Y$ stetig und homotop und auch $g_0, g_1 : Y \to Z$ stetig und homotop. Dann sind $g_0 \circ f_0$ und $g_1 \circ f_1$ stetig und homotop.*

Beweis. Sei F eine Homotopie von f_0 nach f_1 und G eine Homotopie von g_0 nach g_1, d.h. F und G sind stetig und erfüllen

$$F(0,\cdot) \equiv f_0, \quad F(1,\cdot) \equiv f_1, \quad G(0,\cdot) \equiv g_0, \quad G(1,\cdot) \equiv g_1.$$

Nun ist $g_0 \circ F$ eine Homotopie von $g_0 \circ f_0$ nach $g_0 \circ f_1$. Weiter ist

$$[0,1] \times X \xrightarrow{\mathrm{id} \times f} [0,1] \times Y \xrightarrow{G} Z$$

eine Homotopie von $g_0 \circ f_1$ nach $g_1 \circ f_1$. Weil die Homotopie zweier Funktionen eine Äquivalenzrelation ist (Satz 4.38), folgt das Resultat. □

Falls $g : Y \to Z$ stetig ist, dann ist

$$g_\star : [X,Y] \to [X,Z], \quad [f] \mapsto [g \circ f]$$

eine Abbildung (d.h es ist wohldefiniert). Ist weiter $h : Z \to W$ auch stetig, dann finden wir leicht, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} {[X,Y]} \arrow[r, "g_\star"] \arrow[rr, bend right, "(h\circ g)_\star"'] & {[X,Z]} \arrow[r, "h_\star"] & {[X,W]}. \end{tikzcd}$$

Außerdem gilt $(\mathrm{id}_Y)_\star = \mathrm{id}_{[X,Y]}$.

(4.43) Satz. *Sind $g, g' : Y \to Z$ homotop, dann ist $g_\star = (g')_\star$.*

Beweis. Es gilt

$$g_\star([f]) = [g \circ f] \overset{\text{Satz 4.42}}{=} [g' \circ f] = g_\star([f]). \qquad \square$$

(4.44) Bemerkung. Sei $X = \{x\}$. Dann ist $\hom(\{x\}, Y) = Y$ und $[X,Y]$ sind die Wegzusammenhangskomponenten von Y.

(4.45) Definition. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Homotopieäquivalenz* falls ein stetiges $g : Y \to X$ existiert, sodass $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$. Hier ist

$$a \sim b :\iff \exists \text{Homotopie von } a \text{ nach } b.$$

Ist X homotopieäquivalent zu $\{x\}$, dann heißt X *zusammenziehbar.*

(4.46) Bemerkung. Homöomorphismen sind Homotopieäquivalenzen, die Umkehrung dieser Aussage ist allerdings falsch: $f : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ ist eine Homotopieäquivalent. Dies ist der Fall, da für

$$g : \{0\} \to \mathbb{R}^n, \quad 0 \mapsto 0$$

gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{\{0\}}$ und $g \circ f \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ mit der Homotopie

$$[0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (t,x) \mapsto tx.$$

(4.47) Beispiel. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls es $a_0 \in A$ gibt sodass

$$(1-t)a_0 + tb \in A \quad \text{für alle } t \in [0,1] \text{ und } b \in A.$$

Wir behaupten nun, dass $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig auch zusammenziehbar ist. Um dies zu überprüfen setzen wir $f : A \to \{c\}$ und $g : \{c\} \to A$ mit $g(c) = a_0$, wobei a_0 wie oben zu wählen ist. Dann gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{\{c\}}$ und $g \circ f \sim \mathrm{id}_A$ (d.h. sind homotop) mit der Homotopie

$$[0,1] \times A, \quad (t,x) \mapsto (1-t)a_0 + tx.$$

(4.48) Beispiel. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ mit $f(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$ ist eine Homotopieäquivalenz. Denn $g := \mathrm{id} : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist eine stetige Einbettung. Dann ist $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ und $g \circ f \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ mit der Homotopie

$$[0,1] \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (t,x) \mapsto (1-t)\frac{x}{\|x\|_2} + tx \quad (\neq 0).$$

(4.49) Übung. Zeigen Sie: Falls X zusammenziehbar ist, dann ist $\#[Z,X] = 1$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) X ist zusammenziehbar;
ii) id_X ist nullhomotop.

(4.50) Definition. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *Retrakt von X*, falls es eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$ gibt.

(4.51) Behauptung. *Sei $A \subseteq X$ ein Retrakt von X und X zusammenziehbar. Dann ist auch A zusammenziehbar.*

Beweis. Sei $\iota \hookrightarrow X$ die Inklusion und $r : X \to A$ stetig mit $r|_A = \mathrm{id}_A$. Dann gilt $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$ und daher kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} {[A,A]} \arrow[r, "\iota_\star"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & {[A,X]} \arrow[r, "r_\star"] & {[A,A]}. \end{tikzcd}$$

X ist zusammenziehbar also $\#[A,X] = 1$. Da $r_\star$ surjektiv ist, ist auch $\#[A,A] = 1$. Es folgt: id_A ist nullhomotop; dies impliziert, dass A zusammenziehbar ist. $\square$

Kapitel 5
Selbstabbildungen des Kreises

Das Ziel dieses Kapitels ist das Studium der Menge $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$. Sei

$$(5.1) \qquad p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad s \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} s}$$

und sei weiterhin $f : X \to \mathbb{S}^1$ eine stetige Funktion.

(5.2) Definition. Eine stetige Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ (in Zeichen $h \in \hom(X, \mathbb{R})$) heißt *Hochhebung* von f (bezüglich p), falls $p \circ h = f$ d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

(5.3) Satz (Hochhebungssatz). *Sei X ein topologischer Raum und $h : X \to \mathbb{R}$ stetig. Sei weiter $F : [0,1] \times X \to \mathbb{S}^1$ stetig mit $F(0, \cdot) \equiv p \circ h$. Dann gibt es genau eine stetige Funktion $H : [0,1] \times X \to \mathbb{R}$ sodass $p \circ H = F$ und $H(0, \cdot) \equiv h$ (p ist durch (5.1) gegeben).*

Der Satz besagt, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$(5.4) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "x \mapsto (x,0)"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1] \times X} \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dotted, "\exists ! H"] & \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

Beweis von Satz 5.3. *Schritt 1: Eindeutigkeit.* Seien $H', H : [0,1] \times X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, sodass (5.4) kommutiert. Dann

$$\begin{aligned} \Big(p \circ (H - H')\Big)(t,x) &= \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\Big(H(t,x) - H'(t,x)\Big)} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}H(t,x)}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}H'(t,x)}} \\ &= \frac{p(H(t,x))}{p(H'(t,x))} = \frac{F(x,t)}{F(x,t)} = 1 \in \mathbb{S}^1 \end{aligned}$$

für alle $(t,x) \in [0,1] \times X$. Also ist $(H - H')(t,x) \in p^{-1}[\{1\}] \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Sei nun X' eine Zusammenhangskomponente von X d.h. $[0,1] \times X'$ ist zusammenhängend. Da $H - H'$ stetig ist und der Bildraum diskret, muss $H - H'|_{[0,1]\times X'} \equiv \text{const}$ sein. Es gilt nun

$$H(0,x) = h(x) = H'(0,x) \quad \text{für alle } x \in X',$$

also $H - H'|_{[0,1]\times X'} \equiv 0$. Aber X' wurde arbiträr gewählt, daher gilt $H = H'$ überall.

Schritt 2: Existenz falls $X = \{x\}$. Sei zunächst $X = \{x\}$. Dann können wir F als Weg $[0,1] \to \mathbb{S}^1$ und h als Element von $\mathbb{R}$ auffassen. Sei

$$\mathcal{M} := \left\{ s \in [0,1] \;\middle|\; F\Big|_{[0,s]} \text{ hat eine Hochhebung zum Anfangswert } h \right\}.$$

Zuerst bemerken wir, dass $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist, denn: Falls $F|_{[0,s)}$ eine Hochhebung $\tilde{F}$ zum Anfangswert h hat, muss

$$\lim_{t \nearrow s} \tilde{F}(t)$$

existieren (das heißt, $\tilde{F}$ weist kein Unendlichkeitsstreben auf), ansonsten wäre der Grenzwert

$$\lim_{t \nearrow s} F(t) = \lim_{t \nearrow s} (p \circ \tilde{F})(t)$$

nicht definiert, was ein Widerspruch zu der Stetigkeit von F wäre.

Wir zeigen $\sup \mathcal{M} = 1$. Offensichtlich ist $0 \in \mathcal{M}$. Sei $t_0 := \sup \mathcal{M}$. Wir zeigen nun per Widerspruch, dass $t_0 = 1$ ist. Wir nehmen also an, dass $t_0 < 1$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $F(t_0) \neq 1$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ sodass

$$F\left[B_\varepsilon^{\mathbb{R}}(t_0) \cap [0,1]\right] \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad \varepsilon + t_0 \leq 1$$

und falls $t_0 > 0$ auch $t_0 - \frac{\varepsilon}{2} \geq 0$. Setze

$$t_1 := \begin{cases} 0, & \text{falls } t_0 = 0, \\ t_0 - \frac{\varepsilon}{2}, & \text{falls } t_0 > 0. \end{cases}$$

Wir finden nun eine Hochhebung $\tilde{H} : [0, t_1] \to \mathbb{R}$ von $F|_{[0,t_1]}$ zum Anfangswert h. Da

$$p^{-1}\left[\mathbb{S}^1 \setminus \{0\}\right] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$$

finden wir ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}$ sodass $\tilde{H}(t_1) \in (n, n+1)$. Setzen wir $p_n := p|_{(n,n+1)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \setminus \{0\}$ für dieses n und $\tilde{H}' : [t_0, t_0+\varepsilon] \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto p_n^{-1}(F(t))$ (p_n ist bijektiv), erhalten wir durch

$$[0, t_0 + \varepsilon] \ni t \mapsto \begin{cases} \tilde{H}(t), & t \leq t_1, \\ \tilde{H}'(t) & t \geq t_1 \end{cases}$$

eine Hochhebung von $F|_{[0,t_0+\varepsilon]}$ im Widerspruch zur Wahl von t_0. Also folgt $\sup \mathcal{M} = 1$.

Schritt 3: Existenz für allgemeines X. Für jedes $x \in X$ wählen wir eine Hochhebung $H_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ von $[0,1] \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto F(t,x)$ zum Anfangswert $h(x)$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$H : [0,1] \times X \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto H_x(t)$$

stetig ist. □

Als nächstes wollen wir jeder Funktion $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ eine Zahl $\deg f \in \mathbb{Z}$ zuordnen. Sei dazu $q := p|_{[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ und $F := f \circ q$. Nach Satz 5.3 existiert eine Hochhebung $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ von F. Für jedes Urbild von $f(1)$ unter p gibt es genau eine Hochhebung mit diesem Anfangswert, d.h. sind alle Hochhebungen von der Form $\tilde{f} + n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Die Zahl $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ hängt nicht von der Wahl der Hochhebung ab. Mit

$$p\left(\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)\right) = \frac{p(\tilde{f}(1))}{p(\tilde{f}(0))} = \frac{f(q(1))}{f(q(0))} \overset{q(1)=q(0)}{=} 1,$$

sehen wir, dass $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) \in p^{-1}\{1\} = \mathbb{Z}$ liegen muss.

(5.5) Definition. Wir setzen $\deg f := \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) \in \mathbb{Z}$ und nennen dies den *Abbildungsgrad von f.*

(5.6) Beispiel. Sei $e_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $e_n(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R} \arrow[d, "p=\exp\{2\pi\mathrm{i}\cdot\}"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "q"] \arrow[urr, "\tilde{e}_n(t)"] & \mathbb{S}^1 \arrow[r, "e_n"] & \mathbb{S}^1 \\
t & \mapsto & \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nt},
\end{tikzcd}$$

wobei $\tilde{e}_n(t) = nt$, also ist $\deg e_n = n$.

(5.7) Satz. *Seien $f, g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig und homotop. Dann gilt*

$$\deg f = \deg g,$$

das heißt, deg *ist invariant bezüglich Homotopien.*

Beweis. Sei $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Hochhebung von $f \circ q$ und sei $H : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ eine Homotopie von f nach g. Nach Satz 5.3 finden wir genau ein $F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, eine Hochhebung von $H \circ (\mathrm{id}_{[0,1]} \times q)$ mit Anfang $\tilde{f}$ d.h. es kommutiert

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[d, "{(0,\mathrm{id}_{[0,1]})}"'] & & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
{[0,1] \times [0,1]} \arrow[r, "\mathrm{id}_{[0,1]} \times q"'] \arrow[urr, dotted, "F"] & {[0,1] \times \mathbb{S}^1} \arrow[r, "H"'] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

Dann ist $F(1,\cdot)$ eine Hochhebung von $H(1,\cdot) \equiv g \circ q$, das heißt

$$\deg g = F(1,1) - F(1,0).$$

Wegen $q(1) = q(0)$ gilt auch $H \circ (\mathrm{id} \times q)(\cdot, 1) \equiv H(\mathrm{id} \times q)(\cdot 0)$, also sind $F(\cdot, 0)$ und $F(\cdot, 1)$ Hochhebungen desselben Weges. Daher ist $F(\cdot,1) - F(\cdot,0)$ eine konstante Funktion und

$$\deg g = F(1,1) - F(1,0) = F(0,1) - F(0,0) = \deg f. \qquad \square$$

Die Abbildung $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \to \mathbb{Z}$, $[f] \to \deg f$ ist also wohldefiniert (d.h. es ist eine Abbildung) und außerdem surjektiv wegen Beispiel 5.6.

Die Menge $\hom(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ wird zu einer Gruppe durch die Verknüpfung

$$f \star g := (z \mapsto f(z) \cdot g(z)),$$

wobei $\cdot$ hier die gewöhnliche Multiplikation in $\mathbb{C}$ bezeichnet. Das neutrale Element dieser Gruppe ist die konstante Funktion $z \mapsto 1$.

(5.8) Übung. Obige Gruppenstruktur induziert eine Gruppenstruktur auf den Homotopieklassen $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$.

(5.9) Satz. $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \to \mathbb{Z}$ *ist ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$ gilt. Falls $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Hochhebung von $f \circ q$ ist und $\tilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Hochhebung von $g \circ q$ ist, dann ist $\tilde{f} + \tilde{g}$ eine Hochhebung von $(f \cdot g) \circ q$. Daher

$$\deg(f \cdot g) = (\tilde{f} + \tilde{g})(1) - (\tilde{f} + \tilde{g})(0) = \cdots = \deg f + \deg g. \qquad \square$$

(5.10) Lemma ([**1**, S.165, Hochhebung von Homotopien]). *Sei X ein topologischer Raum, $F : [0,1] \times X \to \mathbb{S}^1$ stetig und $H : [0,1] \times X \to \mathbb{R}$ sodass $p \circ H = F$ und*

- $H|_{\{0\}\times X}$ *ist stetig und*
- $H|_{[0,1]\times\{x\}}$ *ist stetig für alle $x \in X$.*

Dann ist H stetig.

Beweis. Für ein $t_0 \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$ setze $I_\varepsilon(t_0) := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1]$. Ein offenes Kästchen $I_\varepsilon(t_0) \times U$ nennen wir *klein*, falls $F[I_\varepsilon(t_0) \times U] \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$. Wir nennen $I_\varepsilon(t_0) \times U$ *gut*, falls es ein $t_1 \in I_\varepsilon(t_0)$ gibt, sodass $H|_{\{t_1\}\times U}$ stetig ist.

Wir behaupten nun:

(5.11) Ist $I_\varepsilon(t_0)$ ein kleines gutes Kästchen, dann ist $\Phi := H\Big|_{I_\varepsilon(t_0)\times U}$ stetig.

Gemäß Voraussetzung finden wir $z \in \mathbb{S}^1$ mit $F[I_\varepsilon \times U] \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{z\}$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z = 1$ an und definiere $W := \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$. Dann kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z} \\
I_\varepsilon(t_0) \times U \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "\Phi"] \arrow[dr, "F \text{ stetig}"'] & p^{-1}[W] = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1) \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"'] \arrow[d, "p"] & W \times \mathbb{Z} \arrow[u, "(w,m)\mapsto m"'] \arrow[dl, "(w,m)\mapsto w"] \\
 & W. &
\end{tikzcd}$$

Wir betrachten hier $\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie. Um (5.11) nachzuweisen, reicht es zu zeigen, dass Φ stetig ist.

Da $H|_{I_\varepsilon(t_0)\times\{u\}}$ stetig ist für alle $u \in U$, folgt dass $\Phi|_{I_\varepsilon(t_0)\times\{u\}}$ stetig ist. Weiter ist $I_\varepsilon(t_0) \times \{u\}$ zusammenhängend d.h. ist obige Einschränkung von Φ sogar konstant. Weil das Kästchen gut ist d.h. $H|_{\{t_1\}\times U}$ stetig für ein $t_1 \in I_\varepsilon(t_0)$ folgt, dass $\Phi|_{\{t_1\}\times U}$ stetig ist.

Weil $\Phi|_{I_\varepsilon(t_0)\times\{u\}}$ konstant ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I_\varepsilon(t_0) \times U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\substack{(t,u)\mapsto(t_1,u)\\ \text{(stetig)}}"'] & \mathbb{Z} \\
\{t_0\} \times U, \arrow[ur, "\substack{\Phi|_{\{t_1\}\times U}\\ \text{(stetig)}}"'] &
\end{tikzcd}$$

also ist Φ stetig, was (5.11) zeigt.

Sei nun $x \in X$. Wegen (5.11) reicht es zu zeigen, dass es für alle $t \in [0,1]$ ein kleines gute Kästchen $I_\varepsilon(t_0) \times U$ gibt. Sei daher

$$T := \{t \in [0,1] \mid \exists \text{ kleines gutes Kästchen, welches } (t,x) \text{ enthält}\}.$$

Es reicht, nachzuweisen, dass $T = [0,1]$ ist. Weil $H|_{\{0\}\times X}$ stetig ist, muss $0 \in T$ gelten. T ist offen in $[0,1]$ nach Definition, also reicht es zu zeigen, dass:

(5.12) T ist abgeschlossen in $[0,1]$.

Sei $t_0 \in \overline{T} \subseteq [0,1]$. Da F stetig ist, finden wir $U \subseteq X$, eine offene Umgebung von x und ein $\varepsilon > 0$ sodass

$$F[I_\varepsilon(t_0) \times U] \subsetneq \mathbb{S}^1$$

d.h. $I_\varepsilon(t_0) \times U$ ist ein kleines Kästchen. Da $t_0 \in \overline{T}$, folgt $I_\varepsilon(t_0) \cap T \neq 0$. Sei $t_1 \in I_\varepsilon(t_0) \cap T$. Definitionsgemäß gibt es also ein kleines gutes offenes Kästchen, dass (t_1, x) enthält. Wegen (5.11) existiert $U_1 \subseteq X$, eine Umgebung von x, sodass $H|_{\{t_1\} \times U}$ stetig ist. Das heißt, $I_\varepsilon(t_0) \times U_1 \cap U$ ist eine kleines gutes offenes Kästchen, welches (t_0, x) enthält. Daher ist $t_0 \in T$. □

(5.13) Bemerkung. Diese Aussage gilt auch für viel allgemeinere Abbildungen p, nämlich für sogenannte *Überlagerungen*. Eine stetige Abbildung $p : E \to Y$ heißt *Überlagerung*, falls ein diskreter Raum F existiert und wir für alle $y \in Y$ eine offene Umgebung $U \subseteq Y$ von y finden, sodass

$$\begin{tikzcd} p^{-1}[U] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "p"'] & U \times F \arrow[dl, "(u,f) \mapsto u"] \\ U. & \end{tikzcd}$$

Der angepasste Beweis ist nicht viel schwieriger, als der, den wir bereits gemacht haben.

(5.14) Korollar. *Die Menge $\mathbb{S}^1$ ist nicht zusammenziehbar und insbesondere* kein *Retrakt von $\mathbb{D}_2$.*

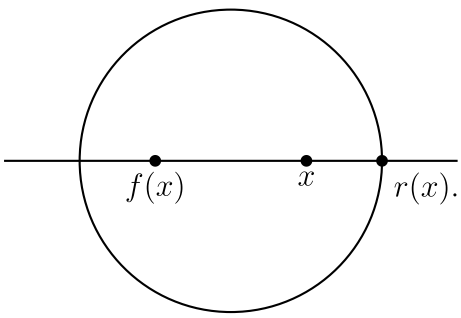
Beweis. Wäre $\mathbb{S}^1$ zusammenziehbar, wäre $\#[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] = 1$, siehe Übung 4.49. Da aber deg surjektiv ist, ergibt sich ein Widerspruch.

Weiter ist $\mathbb{D}_2$ sternförmig und damit zusammenziehbar (Beispiel 4.47). Wäre $\mathbb{S}^1$ ein Retrakt von $\mathbb{D}_2$, dann wäre $\mathbb{S}^1$ nach Behauptung 4.51 zusammenziehbar. Widerspruch. □

(5.15) Korollar (Brower's Fixpunktsatz für $\mathbb{D}_2$). *Sei $f : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{D}_2$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert $x \in \mathbb{D}_2$ sodass $f(x) = x$.*

(5.16) Bemerkung. Die Aussage gilt für alle $\mathbb{D}_n$, $n \in \mathbb{N}$, wir können sie hier aber nur für $n = 2$ zeigen.

Beweis von Korollar 5.15. Wir nehmen an, dass f keinen Fixpunkt hat. Dann können wir für alle $x \in \mathbb{D}_2$ die Zahl $r(x)$ gemäß



Es lässt sich leicht überprüfen, dass diese Zuordnung stetig ist. Es gilt nun $r(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^1$, d.h. $\mathbb{S}^1$ ist ein Retrakt von $\mathbb{D}_2$. Widerspruch zu Korollar 5.14. □

(5.17) Satz. *Die Abbildung* deg : $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \to \mathbb{Z}$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis. Wir müssen nur noch die Injektivität zeigen, alles andere wurde bereits bewiesen. Sei $f \in \ker(\deg)$ und sei $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Hochhebung von $f \circ q : [0,1] \to \mathbb{S}^1$, wobei $q : t \in [0,1] \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ wie üblich ist. Dann gilt $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0)$ weil $\deg f = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]} \arrow[urr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "q"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & \\
 & \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"] & \mathbb{S}^1.
\end{tikzcd}$$

q ist eine Quotientenabbildung, weil q stetig und abgeschlossen ist (Satz 4.27). Also finden wir wegen Satz 5.3 ein stetiges $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ mit $h \circ q = f$. Es gilt $p \circ h = f$, weil $p \circ h \circ q = p \circ \tilde{f} = f \circ q$ und q surjektiv ist. Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, muss h nullhomotop sein (Übung 4.49), also ist $p \circ h = f$ nullhomotop (Satz 4.42) und $[f] = [0]$. $\square$

Kapitel 6
Satz von Borsuk Ulan

Dieses Kapitel basiert auf [3] .

(6.1) Definition. Für $x \in \mathbb{S}^n$ heißt $-x$ *Antipode von* x und $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ heißt *antipodenerhaltend*, falls $h(-x) = -h(x)$.

(6.2) Satz. *Sei $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig und antipodenerhaltend. Dann ist h nicht nullhomotop.*

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir zuerst folgendes Resultat:

(6.3) Lemma. *Sei $f : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ stetig mit $f(0) = 1$ und $f(1) = -1$. Wir definieren g gemäß folgendem Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q:t\in[0,1]\mapsto e^{2\pi i t}"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "z\mapsto z^2"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "g"] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung g ist dann stetig (weil $[0,1]$ kompakt ist und $\mathbb{S}^1$ **T2** *ist folgt, dass q abgeschlossen ist). Dann ist g* nicht *nullhomotop, d.h.* $\deg g \neq 0$.

Beweis. Sei $\tilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Hochhebung von $g \circ q$ entlang von $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$. Wir setzen $\tilde{f} := \frac{\tilde{g}}{2}$ und behaupten

(6.4) $\tilde{f}$ ist eine Hochhebung von f oder $-f$ entlang p.

Für jedes $t \in [0,1]$ gilt

$$(p \circ \tilde{f}(t))^2 = e^{2\pi i \tilde{g}(t)} = f(t)^2,$$

somit ist die Abbildung

$$[0,1] \to \mathbb{S}^1, \quad t \mapsto p(\tilde{f}(t)) \cdot f(t)^{-1}$$

konstant (entweder 1 oder -1) und stetig. Weil $[0,1]$ zusammenhängend ist, folgt $h \equiv \pm 1$. Dies zeigt (6.4). Nun gilt

$$p\left(\frac{1}{2}\big(\tilde{g}(t) + 1\big)\right) = \underbrace{p\left(\frac{1}{2}\right)}_{=-1} p\left(\frac{1}{2}\tilde{g}(t)\right) = -p\left(\frac{1}{2}\tilde{g}(t)\right).$$

Beachte, dass $\tilde{g}+1$ auch eine Hochhebung von $g \circ q$ ist. Falls $\tilde{f}$ eine Hochhebung von $-f$ ist, ersetzen wir $\tilde{f}$ einfach durch $\tilde{f} + \frac{1}{2}$ bzw. $\tilde{g}$ durch $\tilde{g}+1$, dann ist $\tilde{f}$ eine Hochhebung von f dank (6.4).

Wir nehmen nun an, dass g nullhomotop sei und leiten einen Widerspruch her. Ist dies der Fall, dann ist $\deg g = 0$ also $\tilde{g}(0) = \tilde{g}(1)$. Daraus folgt $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1)$ und

$$1 = f(0) = p\left(\tilde{f}(0)\right) = p\left(\tilde{f}(1)\right) = f(1) = -1,$$

Widerspruch. $\square$

Beweis von Satz 6.2. Sei $x_0 := h(1) \in \mathbb{S}^1$ und $k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $x \mapsto x_0^{-1}$. Dann ist $h \cdot k$ antipodenerhaltend, $h \cdot k$ und k sind homotop, und $h \cdot k(1) = 1$. Wir nehmen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $h(1) = 1$ an. Die Abbildung

$$f : [0,1] \to \mathbb{S}^1, t \mapsto h\left(\mathrm{e}^{\pi i t}\right)$$

erfüllt $f(0) = h(1) = 1$ und $f(1) = h(-1) = -h(1) = -1$. Nun kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[dr, "t\mapsto \mathrm{e}^{\pi i t}"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& \mathbb{S}^1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e_2:z\mapsto z^2"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "e_2:z\mapsto z^2"] \\
& \mathbb{S}^1 \arrow[r, "g"] & \mathbb{S}^1.
\end{tikzcd}$$

Bemerkung: Es gilt $h(x)^2 = h(-x)^2$, weil h antipodenerhaltend ist und g ist stetig, weil $\mathbb{S}^1 \ni z \mapsto z^2$ eine Quotientenabbildung ist. Wegen Lemma 6.3 ist g *nicht* nullhomotop, das heißt, $\deg g \neq 0$ und aus dem Diagramm entnehmen wir, dass

$$\deg(h)\deg(e_2) = \deg(g)\deg(e_2)$$

gilt. Wegen $\deg e_2 = 2$ folgt, dass die rechte Seite obiger Gleichung nicht null ist und damit $\deg h \neq 0$. ☐

(6.5) Satz. *Es gibt keine stetige antipodenerhaltende Abbildung $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$.*

Beweis. Um einen Widerspruch herzuleiten, nehmen wir an, $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ wie im Satz existiert. Sei $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ der Äquator, dann ist ist $h := g|_{\mathbb{S}^1}$ eine stetige antipodenerhaltende Abbildung. Wegen Satz 6.2 ist h nicht nullhomotop. Wir definieren

$$\tilde{f} : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{S}^2, \quad x \mapsto \left(x, \sqrt{1 - \|x\|_2^2}\right) \quad \text{und} \quad f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto g\left(\tilde{f}(x)\right).$$

Allerdings lässt sich nun einfach zeigen, dass $f|_{\mathbb{S}^1} \equiv h$ und damit h nullhomotop ist. ☐

(6.6) Satz (Borsuk-Ulan). *Sei $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig. Dann finden wir $x \in \mathbb{S}^2$ sodass $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^2$ gilt. Wir können daher die Abbildung

$$g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|_2}$$

definieren, welche stetig und antipodenerhaltend ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu Satz 6.5. ☐

(6.7) Satz. *Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ beschränkte Mengen und es bezeichne $\mathcal{L}^2$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^2$. Dann existiert eine Gerade L mit*

$$\mathcal{L}^2(A_i \cap L_+) = \mathcal{L}^2(A_i \cap L_-) \quad i = 1, 2,$$

wobei L_+ und L_- die Halbebenen die durch Trennung von $\mathbb{R}^2$ entlang der Geraden L entstehen, das heißt $\partial L_+ = \partial L_- = L$.

Beweis. Wir betrachten A_1, A_2 als Mengen in $\mathbb{R}^2 \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Weiter nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\mathcal{L}^2(A_i) > 0$ für $i = 1, 2$, ansonsten folgt die Aussage durch den Zwischenwertsatz.

Für jeweils $u \in \mathbb{R}^3$ ist

$$H_u := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, v \rangle \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ein Halbraum dessen Rand eine Gerade ist. Wir setzen nun für $i = 1, 2$

$$f_i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \mathcal{L}^2(A_i \cap H_u),$$

dies ist eine stetig Abbildung. Weiter gilt $f_i(u) + f_i(-u) = \mathcal{L}^2(A_i)$ wegen der σ-Additivität des Lebesgue-Maßes. Die Abbdildung

$$f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2, \quad u \mapsto (f_1(u), f_2(u))$$

ist stetig, also folgt aus Satz 6.6 die Existenz von $u \in \mathbb{S}^2$ mit $f(u) = f(-u)$. Somit haben wir eine derartige Gerade gefunden. $\square$

Die Fundamentalgruppe

X top. Raum, $x_0 \in X$

Ziel Zusammenhang zwischen der Fund.grp. $\pi_1(X, x_0)$ und $[S^1, X]$

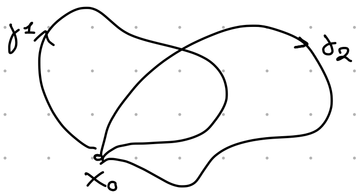
Schleifenraum $\Omega := \{ \gamma : [0,1] \to X \mid \gamma \text{ ist ein Weg und } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \}$

Fundamentalgruppe $\pi(X, x_0) := \Omega / \sim_{\text{rel}\{0,1\}}$

Gruppenstruktur

$\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega$ definiere die Komposition $\gamma_1 \gamma_2 \in \Omega$ ab:

$$(\gamma_1 \gamma_2)(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



Neutrales Element

Homotopieklasse von $e : [0,1] \to X$, $s \mapsto x_0$

Inverses von $[\gamma]$ $(\gamma \in \Omega)$

$[\gamma^-]$, wobei $\gamma^- \in \Omega$ durch $\gamma^-(s) = \gamma(1-s)$ def. ist.

Bem Falls $\gamma \in \Omega$, dann gibt es genau ein $\tilde{\gamma} : S \to X$, stetige Abb. mit

$\gamma = \tilde{\gamma} \circ q$ wobei $q : [0,1] \to S^1$, $s \mapsto e^{2\pi i s}$

Lemma 1 Die Abb. $\Omega \to [\mathbb{S}^1, X]$, $\gamma \longmapsto [\bar{\gamma}]$ induziert eine Abb.

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \to [\mathbb{S}^1, X]$$

Bew Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega$ homotop rel $\{0,1\}$ durch eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$. H erfüllt $H(0,t) = H(1,t) = x_0$

Also ind. H eine Abb. $\bar{H}$ so, dass folgendes Diagramm kommutiert:

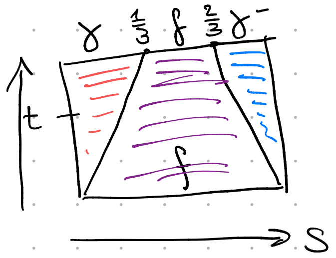
$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times [0,1]} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q \times id"'] & X \\
\mathbb{S}^1 \times [0,1] \arrow[ur, "\bar{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ $q \times id$ ist Quotientenabb.

$\Rightarrow$ $\bar{H}$ stetig und Homotopie von $\bar{\gamma}_1$ nach $\bar{\gamma}_2$

Lemma 2 Für $\gamma, f \in \Omega$ gilt $\overline{\gamma f \gamma^-} \sim \bar{f}$ ($\sim$ homotop)

Bew



$$H(s,t) = \begin{cases} \gamma(3s + 1 - t) &, \ 0 \leq s \leq \frac{t}{3} \\ f\left(\frac{3s - t}{3 - 2t}\right) &, \ \frac{t}{3} \leq s \leq 1 - \frac{t}{3} \\ \gamma(3(1-s) + 1 - t) &, \ 1 - \frac{t}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Hcw

H ist eine Abb., weil

$$\gamma\left(3\frac{t}{3}+1-t\right) = \gamma(1) = x_0$$

$$f\left(\frac{3\frac{t}{3}-t}{3-2t}\right) = f(0) = x_0$$

$$f\left(\frac{3(1-\frac{t}{3})-t}{3-2t}\right) = f(1) = x_0$$

$$\gamma\left(3\left(1-\left(1-\frac{t}{3}\right)\right)+1-t\right) = \gamma(1) = x_0$$

H ist stetig, weil die Abb. eingeschränkt auf die Mengen

$$\left\{0 \le s \le \frac{t}{3}\right\},\ \left\{\frac{t}{3} \le s \le 1-\frac{t}{3}\right\},\ \left\{1-\frac{t}{3} \le s \le 1\right\}$$

stetig ist und diese $[0,1] \times [0,1]$ überdecken.

$$\left.\begin{aligned} H(s,0) &= f(s) \\ H(s,1) &= (\gamma f \bar{\gamma})(s) \end{aligned}\right\} \forall s \in [0,1]$$

$$H(0,t) = \gamma(1-t) = H(1,t) \quad \forall t \in [0,1]$$

Wie in Lemma 1 liefert H eine Homotopie von $\overline{\gamma f \bar{\gamma}}$ nach $\bar{f}$. ▨

Folgerung aus Lemma 2

$$\Phi([\gamma][f][\gamma^-]) = \Phi([\gamma f \gamma^-]) = [\overline{\gamma f \gamma^-}] \overset{\text{Lemma 2}}{=} [\bar{f}] = \Phi[f]$$

Also ist Φ konstant auf $\pi_1(X, x_0)$ - Konjugationsklassen

→ [G Gruppe. Für $g \in G$ heisst $\{hgh^{-1} \mid h \in G\}$ Konjugationsklasse von g]

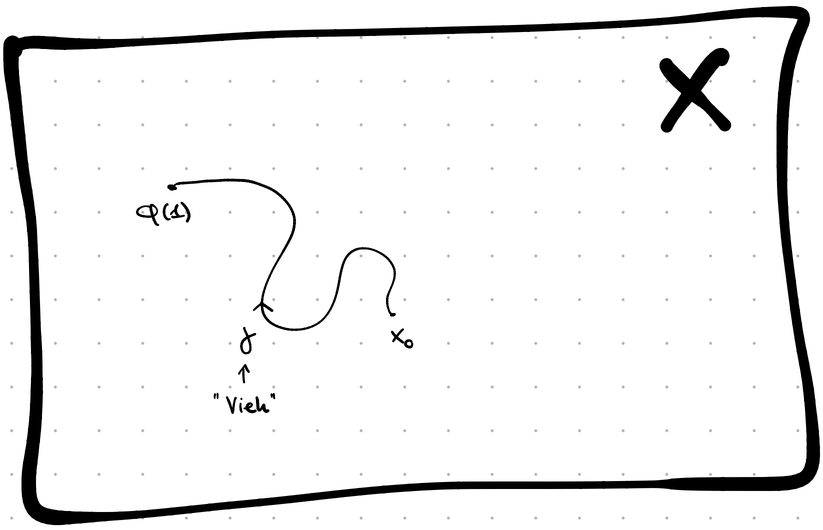
Satz Sei X wegzsmh. Dann ist $\Phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow [S^1, X]$ der Quotient nach den $\pi_1(X, x_0)$ – Konjugationsklassen, d.h.

(a) Φ ist surjektiv

(b) Für $f, g \in \Omega$ gilt

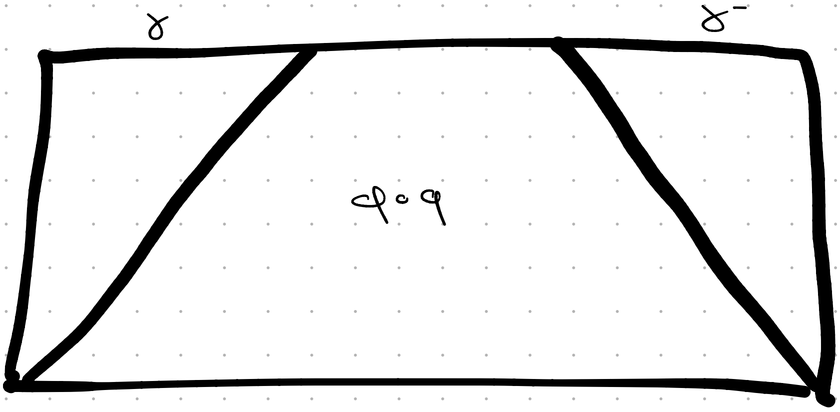
$$\Phi([f]) = \Phi([g]) \iff \exists \gamma \in \Omega \text{ s.d. } [\gamma][f][\gamma^-] = [g]$$

Bew (a) Sei $\varphi : S^1 \longrightarrow X$ stetig



γ sei ein Weg von x_0 nach $\varphi(1)$. Dann ist

$$\eta := \gamma(\varphi \circ q)\gamma^- \in \Omega \quad \text{(Schleife in } x_0\text{)}$$



Das Bild liefert wie in Lemma 2 eine Homotopie von $\varphi \circ q$ nach η, wobei wieder $H(0,t) = H(1,t)$. Dieses H liefert dann wie in Lemma 1 eine Homotopie

$$\bar{H} : S^1 \times [0,1] \to X \text{ von } \overline{\varphi \circ q} \text{ nach } \bar{\eta}$$

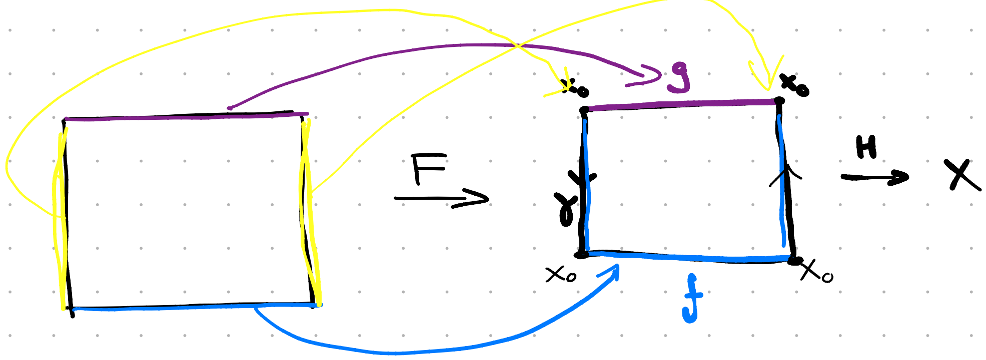
$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\varphi \circ q"] \arrow[d, "q"'] & X \\ S^1 \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \implies \Phi([\eta]) = [\bar{\eta}] = [\varphi]$$

(b) "$\Rightarrow$" Folgt aus Lemma 2.

"$\Leftarrow$" $f, g \in \Omega$ mit $\bar{f} \sim \bar{g}$, dann sind $[\bar{f}], [\bar{g}]$ in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert.

Es gibt also eine Homotopie $\bar{H} : S^1 \times [0,1] \to X$ von $\bar{f}$ nach $\bar{g}$.

$H := \bar{H} \circ (q \times \mathrm{id}) : [0,1] \times [0,1] \to X$ ist eine Homotopie von f nach g.



$\to \gamma \in \Omega$ ist durch $\gamma(t) := \underbrace{H(0,t)}_{H(1,t)}$ definiert.

Traum: Stetige Abb. $(F_1, F_2) = F : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ die wie im Bild aussieht. Wir können F_i auf $\partial([0,1] \times [0,1])$ wie im Bild definieren und mittels Tietze-Urysohn zu einer stetigen Abb. nach

$[0,1]$ fortsetzen.

$\Rightarrow$ $H \circ F$ ist eine Homotopie von $\gamma f \gamma^-$ nach g rel. $\{0,1\}$.

Also sind $[f], [g]$ in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert ▨

Bsp $X = S^1$, $x_0 = 1$,

•) $\Phi : \pi_1(S^1, 1) \to [S^1, S^1]$ ist surj. nach dem Satz.

•) Φ ist auch injektiv, denn $f, g \in \Omega$ mit $\bar{f} \sim \bar{g}$. Insb. $\bar{f}(1) = \bar{g}(1) = 1$

Aufgabe 4 Blatt 11 $\Rightarrow$ $\exists$ Homotopie $\bar{H}$ von $\bar{f}$ nach $\bar{g}$ mit $H(1,t) = 1 \; \forall t \in [0,1]$.

$\Rightarrow$ $H := \bar{H} \circ (q \times id)$ eine Homotopie von f nach g rel $\{0,1\}$.

$\Rightarrow$ $[f] = [g]$ in $\pi_1(S^1, 1)$.

•) Φ ist ein Gruppenhom., denn:

Notation: $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega$, definiere $\gamma_1 * \gamma_2$ durch $(\gamma_1 * \gamma_2)(s) = \gamma_1(s) \overset{\text{komplexe Mult.}}{\cdot_{\mathbb{C}}} \gamma_2(s) \in S^1$.

Beachte: $e : [0,1] \to S^1$, $s \mapsto 1$

Dann gilt: $(\gamma_1 e) * (e \gamma_2) = \gamma_1 \gamma_2$

Es gilt: $\gamma_1 e \sim_{\text{rel } \{0,1\}} \gamma_1$, sagen wir H_1

$e \gamma_2 \sim_{\text{rel } \{0,1\}} \gamma_2$, sagen wir H_2

Dann ist

$$H : [0,1] \times [0,1] \to S^1$$
$$(s,t) \longmapsto H_1(s,t) \cdot_{\mathbb{C}} H_2(s,t)$$

eine Homotopie von $\underbrace{(\gamma_1 e) * (e \gamma_2)}_{\gamma_1 \gamma_2}$ nach $\gamma_1 * \gamma_2$.

H ist auch eine Homotopie rel $\{0,1\}$.

$\Rightarrow$ Wie in Lemma 1 induziert H eine Homotopie $\bar{H} : S^1 \times [0,1] \to S^1$ von $\overline{\gamma_1 \gamma_2}$ nach $\overline{\gamma_1 * \gamma_2}$, also

$$\Phi([\gamma_1 \gamma_2]) = [\overline{\gamma_1 \gamma_2}] = [\overline{\gamma_1 * \gamma_2}] = [\bar{\gamma}_1] \overset{\text{Mult. in } [S^1, S^1]}{\cdot} [\bar{\gamma}_2] = \Phi([\gamma_1]) \cdot \Phi([\gamma_2]) \quad \Rightarrow \Phi \text{ Hom.}$$