1 Unendliche Automaten

Ein unendlicher Automat wird beschrieben durch das Tupel

$$M = (\Sigma, \varphi, A, \delta, E, r),$$

wobei:

- Σ das Eingabealphabet ist.
- φ die Menge aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist.
- A die Menge aller Abbildungen $a : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ ist.
- $\delta : A \times \Sigma \to \varphi$ die Übergangsfunktion ist.
- $E \subseteq A$ die Menge der Endzustände ist.
- $r \in \mathbb{R}$ der Anfangswert ist.

Dabei werden die Werte $\{0, 1\}$ als Wahrheitswerte interpretiert.

1.1 Abgrenzung zum endlichen Automaten

Ein unendlicher Automat unterscheidet sich von einem endlichen Automaten dadurch, dass er keinen endlichen Zustandsraum besitzt, sondern einen Wert aus $\mathbb{R}$ speichert.

Eingabeverarbeitung. Wie bei einem herkömmlichen endlichen Automaten wird die Eingabe vom unendlichen Automaten linear abgearbeitet, d.h. für ein Eingabewort der Länge n werden die Symbole der Eingabe in der Reihenfolge $1, 2, \ldots, n$ nacheinander gelesen. Dies bedeutet nicht, dass der Automat insgesamt nur n Schritte ausführen darf, da nach jedem Schritt die Rechenfunktionen φ auf dem aktuellen Wert r beliebig komplexe Berechnungen durchführen können.

1.2 Nichtdeterministisches Beispiel

Zur Zeit n speichert der Automat eine Menge von Werten

$$W_n \subseteq \mathbb{R}.$$

Für ein $w \in W_n$ ist die aktive Zustandsmenge

$$Z(w) = \{a \in A \mid a(w) = 1\}.$$

$Z(w)$ ist ein Endzustand, falls

$$Z(w) \cap E \neq \emptyset.$$

Falls kein Endzustand erreicht ist, ergibt die Übergangsfunktion die Menge der Folgezustände:

$$W_{n+1}(w) = \{f(w) \mid f \in F\}, \qquad F = \{\delta(a, b) \mid a \in Z(w)\}.$$

2 Heuristische Wachstumsabschätzung

2.1 Wachstumsabschätzung der Zustände

Für jedes $a \in A$ betrachten wir die Menge möglicher Folgezustände

$$A'_{a,f} = \{\, a' \in A \mid a(w) = 1 \Rightarrow a'(f(w)) = 1 \,\}, \quad f = \delta(a,b).$$

Wir definieren

$$c_a = \frac{1}{|\Sigma_a|} \sum_{b \in \Sigma_a} |A'(a, \delta(a,b))|,$$

wobei

$$\Sigma_a = \{b \in \Sigma \mid \delta(a,b) \neq \emptyset\}.$$

Die Wachstumsrate des Automaten ist

$$w = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} c_a.$$

2.2 Wachstumsabschätzung von r

Für jedes $b \in \Sigma$ definieren wir

$$F_b = \delta(A \times b)$$

Wir konstruieren nun eine Funktion

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \lambda(x),$$

wobei

$$\lambda_b(x) = \frac{\prod_{f \in F_b} f(x)}{|F_b|}.$$

Dann definieren wir

$$w_r = \frac{\prod_{b \in \Sigma} \lambda_b}{|\Sigma|}$$

als Wachtumsrate von r

3 Sprachen des Automaten

Da jeder endliche Automat ein Spezialfall eines unendlichen Automaten ist, können unendliche Automaten reguläre Sprachen erkennen.

Weiterhin ist bekannt, dass Kellerautomaten (Pushdown-Automaten) kontextfreie Sprachen erkennen. Wir zeigen, dass man jeden Kellerautomaten in einen unendlichen Automaten übersetzen kann.

3.1 Kodierung von Zustand und Keller

Wir interpretieren

$$\lfloor r \rfloor \text{ als Zustand}, \qquad r \bmod 1 \text{ als Kellerinhalt.}$$

Für einen Kellerautomaten mit n Zuständen definieren wir:

$$A = \{x \mapsto (\lfloor x \rfloor = i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Es bleibt, den Kellerspeicher in $(0,1)$ zu kodieren.

3.2 Gödelisierung des Kellers

Sei Γ das Kelleralphabet. Da Γ endlich ist, existiert eine injektive Kodierung

$$\mathrm{code} : \Gamma \to \mathbb{N}.$$

Für ein Wort $g = g_1 g_2 \ldots g_n \in \Gamma$ sei

$$x_i = p_i^{\mathrm{code}(g_i)},$$

wobei (p_i) die Folge der Primzahlen ist.

Wir benutzen die Funktionen

$$\psi(x) = \frac{1}{x+1}, \qquad \psi^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 1.$$

Die Kellerkodierung ist

$$\kappa(g) = \psi\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right).$$

3.3 Stack-Operationen

Top-Operation.

$$\mathrm{top}(r) = \max\{e \mid 2^e \text{ teilt } \psi^{-1}(r)\}.$$

Pop-Operation.

$$\mathrm{pop}(r) = \frac{\psi^{-1}(r)}{2^{\mathrm{top}(r)}}.$$

Push-Operation.

$$\mathrm{push}_r(g) = \psi\big(2^{\mathrm{code}(g)} \cdot \mathrm{shift}\big(\kappa^{-1}(\psi^{-1}(r \bmod 1))\big)\big),$$

wobei

$$\mathrm{shift}(g_1 g_2 \ldots g_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{i+1}^{\mathrm{code}(g_i)}.$$

4 Übersetzung der Kellerautomaten-Übergänge

Ein Übergang des Kellerautomaten sei gegeben durch das Quintupel:

$$(z_i, a, g_i, z_j, g_j),$$

mit Zustand z_i, Eingabe a, Top-Symbol g_i, Folgezustand z_j und neuem Symbol g_j.

Wir konstruieren dazu

$$\hat{a} \in A, \qquad \hat{a}(r) = 1 \iff (\lfloor r \rfloor = z_i \text{ und } \mathrm{top}(r \bmod 1) = \mathrm{code}(g_i)) \, .$$

Die Übergangsfunktion des unendlichen Automaten ist nun

$$\delta(\hat{a}, a) = f,$$

mit

$$f(r) = z_j + \mathrm{push}_{\mathrm{pop}(r \bmod 1)}(g_j).$$

Abschließend definieren wir den Startwert

$$r = z_0 + \kappa(\#),$$

wobei # das Anfangssymbol des Kellers bezeichnet.

Damit kann zu jedem Kellerautomaten ein äquivalenter unendlicher Automat konstruiert werden. Daraus folgt, dass unendliche Automaten kontextfreie Sprachen entscheiden können.