

**Topologia Algebrica**  
**Computazionale**  
*Andrea Barletta*

# Contents

<b>I</b>	<b>Teoria dei Gruppi</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Algebra</b>	<b>4</b>
1.1	Introduzione . . . . .	4
1.2	Anello degli interi modulo $n$ . . . . .	5
1.2.1	Divisione con resto . . . . .	5
1.3	Congruenza e classi di resto . . . . .	6
1.4	Operazioni con classi di resto . . . . .	7
1.5	Classi di resto invertibili . . . . .	8
1.5.1	Algoritmo di Euclide . . . . .	10
1.6	Sottostrutture algebriche . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Omomorfismi</b>	<b>13</b>
2.1	Omomorfismi e quozienti . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Confronto tra <math>\mathbb{Z}</math> e <math>\mathbb{Z}_n</math></b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Assemblare, costruire e decomporre gruppi</b>	<b>18</b>
4.1	Assemblare gruppi . . . . .	18
4.2	Problemi di rappresentazione . . . . .	19
4.3	Costruire nuovi gruppi . . . . .	20
4.4	Decomposizione di gruppi . . . . .	22
4.5	Costruire un gruppo libero generato da elementi . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Complementi</b>	<b>26</b>
<b>II</b>	<b>Simplessi e complessi simpliciali</b>	<b>28</b>
<b>6</b>	<b>K-Simplessi</b>	<b>29</b>
6.1	Proprietà generali . . . . .	32
6.1.1	Proprietà 1 . . . . .	32
6.1.2	Proprietà 2 . . . . .	32
6.2	Confronto combinatorio-topologico . . . . .	35
6.3	Proprietà topologiche k-simplessi . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Complessi simpliciali</b>	<b>40</b>
<b>8</b>	<b>Sottospazi particolari di un poliedro</b>	<b>44</b>

<b>9</b>	<b>Complessi simpliciali astratti</b>	<b>49</b>
<b>III</b>	<b>Omologia simpliciale</b>	<b>52</b>
<b>10</b>	<b>Omologia simpliciale</b>	<b>53</b>
10.1	Gruppi di omologia simpliciale . . . . .	53
10.2	Esempio completo . . . . .	61
10.2.1	Step 1: Calcolo p-catene . . . . .	61
10.2.2	Step 2: Operatori bordo . . . . .	61
10.2.3	Step 3: Determinare p-cicli e p-bordi . . . . .	61
10.2.4	Conclusione . . . . .	64
10.3	Esempio completo 2 . . . . .	64
10.3.1	$H_0(K)$ . . . . .	64
10.3.2	$H_2(K)$ . . . . .	64
10.3.3	$H_1(K)$ . . . . .	65
10.3.4	Conclusione . . . . .	65
10.3.5	Interpretazione topologica . . . . .	65
10.4	Gruppo di omologia ridotta . . . . .	67
<b>11</b>	<b>Metodo di calcolo dei gruppi di omologia simpliciale</b>	<b>69</b>
11.1	Esempio . . . . .	70
11.2	Esempio particolare - Nastro di Möbius . . . . .	73
<b>12</b>	<b>Piano proiettivo</b>	<b>79</b>
12.1	Piano proiettivo . . . . .	79
12.1.1	Prima idea . . . . .	82
12.1.2	Seconda idea . . . . .	82
<b>13</b>	<b>Gruppi di omologia a coefficienti arbitrari</b>	<b>88</b>
13.1	Casi $G = \mathbb{Z}_n$ . . . . .	88
13.1.1	Caso speciale $n = 2$ . . . . .	89
13.1.2	Piano proiettivo in $\mathbb{Z}_2$ . . . . .	89
<b>14</b>	<b>Omologia del cono</b>	<b>92</b>
14.1	Omomorfismo delle p-catene e delle p-catene del cono . . . . .	95
<b>15</b>	<b>Interpretazione geometrica/topologica dei gruppi di omologia</b>	<b>98</b>
15.1	Interpretazione geometrica/topologica . . . . .	100
<b>16</b>	<b>Omomorfismi indotti da mappe simpliciali</b>	<b>102</b>
16.1	Esempio . . . . .	103
16.1.1	Omomorfismi indotti . . . . .	103
16.2	Cosa succede se passo ai gruppi di omologia? . . . . .	103

Part I

Teoria dei Gruppi

# Chapter 1

## Algebra

### 1.1 Introduzione

**Definizione 1** (Anello commutativo con identità). *Un insieme  $A$  dotato di due operazioni*

$$+ : A \times A \rightarrow A$$

$$\cdot : A \times A \rightarrow A$$

*che soddisfano per  $+$  le proprietà di*

- *associatività*
- *commutatività*
- *esistenza dell'elemento neutro*
- *esistenza dell'opposto*

*e per  $\cdot$  le proprietà di*

- *associatività*
- *commutatività*
- *esistenza dell'elemento neutro*
- *distributività su  $+$*

*si dice anello commutativo con identità*

**Osservazione** Un anello commutativo con identità è "quasi" un campo (manca invertibilità degli elementi non nulli)

**Osservazione**  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  si può interpretare come  $(\mathbb{Z}, +)$

## 1.2 Anello degli interi modulo n

### 1.2.1 Divisione con resto

**Teorema 1** (Lemma della divisione euclidea). *Per ogni coppia di elementi  $a, b \in \mathbb{Z}$   $b \neq 0$ , esistono e sono unici i numeri interi  $q$  (quoziente) e  $r$  (resto) tali che*

$$a = qb + r$$

$$(r \in [0, |b|))$$

*Proof.* Possiamo supporre che  $a \geq 0$  e  $b > 0$ , senza ledere di generalità, infatti

- Se  $b < 0$ , ottengo

$$a = q(-b) + r \Leftrightarrow a = (-q)b + r$$

- Se  $a < 0$ , ottengo

$$-a = bq + r \Leftrightarrow a = (-q)b - r$$

che posso correggere come

$$a = (-q - 1)b + (b - r)$$

$$(0 \leq r < |b| \text{ implica } 0 \leq b - r < |b|)$$

Procediamo per induzione:

- Base dell'induzione:  $a = 0$

$$0 = 0b + 0 \quad q = r = 0$$

- Passo induttivo: Suppongo di essere in grado di calcolare divisione per tutti gli interi  $a' \in [0, a) \subset \mathbb{Z}$

$$a < b \rightarrow a = 0b + a \quad q = 0 \quad r = a$$

$a' = a - b$  ricade nei casi dell'ipotesi induttiva

$$a' = q'b + r' \Leftrightarrow a - b = q'b + r' \Leftrightarrow a = (q' + 1)b + r'$$

otteniamo  $q = q' + 1$   $r = r'$

Manca da dimostrare l'unicità. supponiamo di avere due differenti scomposizioni per  $a$  (indicate con  $a_1$  e  $a_2$ )

$$a_1 = qb + r$$

$$a_2 = q'b + r'$$

$$0 = a_1 - a_2 = (qb + r) - (q'b + r') = (q - q')b + (r - r')$$

riarrangiando i termini

$$(q - q')b = r' - r$$

inoltre

$$0 \leq r', r < |b| \rightarrow 0 \leq |r - r'| < |b|$$

$b$  divide  $r' - r$ , ma  $|r' - r| < |b|$ , ossia  $r' - r = 0$ , quindi  $r' = r$ .

Quindi

$$(q - q')b = 0$$

ricordando che  $b \neq 0$ ,  $q - q' = 0$ , quindi  $q = q'$  ■

### 1.3 Congruenza e classi di resto

**Definizione 2** (Insieme degli interi multipli di  $n$ ). Sia  $n \geq 2$  un intero fissato, indichiamo con  $n\mathbb{Z}$  l'insieme

$$n\mathbb{Z} := \{t \in \mathbb{Z} | t = na\}$$

e lo chiameremo insieme degli interi multipli di  $n$

**Definizione 3** (Congruenza modulo  $n$ ). La congruenza modulo  $n$  è la relazione

$$a \sim_n b \text{ sse } b - a \in n\mathbb{Z}$$

Diremo che  $a$  e  $b$  sono congrui modulo  $n$  e scriveremo

$$a \equiv b \pmod{n}$$

**Esempio**  $n=2$ ,  $a \sim_2 b$  sse  $a - b \in 2\mathbb{Z}$ , ossia se  $a - b$  è un multiplo di 2 (pari).  $a - b$  è pari sse  $a$  e  $b$  sono entrambi pari, o entrambi dispari

**Osservazione** Se  $a \equiv b \pmod{n}$ , allora le divisioni di  $a$  e  $b$  rispetto a  $n$  hanno lo stesso resto, infatti

$$a = qn + r$$

$$a - b \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow a - b = kn$$

$$b = a - kn = qn + r - kn = (q - k)n + r$$

Vale inoltre il viceversa

$$a = qn + r \quad b = q'n + r$$

$$a - b = qn + r - q'n + r = (q - q')n = kn \in n\mathbb{Z}$$

La congruenza modulo  $n$  ha le seguenti proprietà:

- Riflessiva:  $a \sim_n a \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad (a - a = 0 \in n\mathbb{Z})$
- Simmetrica:  $a \sim_n b \Rightarrow b \sim_n a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$
- Transitiva:  $a \sim_n b \wedge b \sim_n c \Rightarrow a \sim_n c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

La congruenza modulo  $n$  è quindi una relazione di equivalenza

**Definizione 4** (Classi di resto). Sia  $\sim_n$  la relazione di congruenza con  $n \geq 2$ . Per ogni elemento  $a \in \mathbb{Z}$ , definiamo classi di resto di  $a$  l'insieme formato da

$$[a] := \{b \in \mathbb{Z} | b \sim_n a\}$$

Ogni elemento della classe di resto si chiama rappresentante della classe di resto

**Osservazione** In generale, tra i rappresentanti di una classe non ce ne sono di preferiti, ma solitamente (per semplicità) per le classi di resto si usano

$$0, 1, \dots, n - 1$$

**Definizione 5** (Insieme delle classi di resto). Indichiamo con  $\mathbb{Z}_n$  o  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  l'insieme delle classi di resto modulo  $n$  (chiamato anche insieme quoziente di  $\mathbb{Z}$  rispetto alla relazione di congruenza modulo  $n$ ).

Esplicitamente,

$$\mathbb{Z}_n := \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\}$$

**Osservazione** In generale, quante classi di resto ho al variare di  $n$ ?

$$a = qn + r \quad 0 \leq r < |n|$$

quindi  $r = 0, 1, \dots, n-1$ , ossia ho  $n$  classi di resto

**Osservazione** Prese due qualunque classi di resto (rispetto allo stesso  $n$ ), ottengo

$$[a]_n \cap [b]_n = \begin{cases} [a]_n & a \equiv b \pmod{n} \\ \emptyset & a \not\equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

inoltre

$$[0]_n \cup [1]_n \cup \dots \cup [n-1]_n = \mathbb{Z}$$

ossia le classi di resto formano una partizione di  $\mathbb{Z}$

## 1.4 Operazioni con classi di resto

Siamo interessati ora a definire delle operazioni (somma e prodotto) tra classi di resto, che siano compatibili con le usuali operazioni di somma e prodotto su  $\mathbb{Z}$

**Proposizione 1.** Sia  $n \geq 2$  un intero fissato,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  tali che

$$a \equiv b \pmod{n} \quad c \equiv d \pmod{n}$$

allora

$$(a + c) \equiv (b + d) \pmod{n} \tag{1.1}$$

$$(ac) \equiv (bd) \pmod{n} \tag{1.2}$$

*Proof.* (Somma)  $a - b = kn$   $c - d = hn$ , segue che

$$(a - b) + (c - d) = kn + hn = (k + h)n = (a + c) - (b + d)$$

ossia  $(a + c) - (b + d) \in n\mathbb{Z}$ , quindi  $a + c \equiv b + d \pmod{n}$  ■

*Proof.* (Prodotto)

$$ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c - d) + (a - b)d = a(hn) + (kn)d = (ah + kd)n$$

ossia  $ac - bd \in n\mathbb{Z}$ , quindi  $ac \equiv bd \pmod{n}$  ■

Abbiamo definito quindi due nuove operazioni

$$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

$$([a]_n, [b]_n) \mapsto [a + b]_n$$

$$\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

$$([a]_n, [b]_n) \mapsto [ab]_n$$



+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

·	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

**Esempio**  $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$

**Osservazione** Per  $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$  non vale la legge di annullamento del prodotto

## 1.5 Classi di resto invertibili

**Definizione 6** (Zerodivisore). *Sia  $(A, +, \cdot)$  un anello commutativo con identità, diciamo che un elemento  $a \in A$ , non nullo, è divisore dello zero (o zerodivisore) se*

$$\exists b \in A, b \neq 0 \text{ a} \cdot b = 0$$

**Definizione 7** (Elemento invertibile). *Sia  $(A, +, \cdot)$  un anello commutativo con identità, diciamo che un elemento  $a \in A$ , non nullo, è unità (o elemento invertibile) se*

$$\exists b \in A, b \neq 0 \text{ a} \cdot b = 1$$

**Proposizione 2.** *Se  $n \in \mathbb{Z}$  ( $n \geq 2$ ) non è un numero primo, allora  $\mathbb{Z}_n$  ha divisori dello zero*

*Proof.* Se  $n \geq 2$  non è primo, allora

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ a} \cdot b = n$$

dalla definizione delle operazioni su classi di equivalenza otteniamo

$$[a]_n [b]_n = [a \cdot b]_n = [n]_n = [0]_n$$

■

**Osservazione** Una domanda sorge ora spontanea: "Cosa succede se  $n$  è primo?". Per rispondere a questa domanda bisogna introdurre prima altre nozioni

**Definizione 8** (Massimo Comune Divisore). *Siano  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Un elemento  $d \in \mathbb{Z}$  è chiamato massimo comune divisore tra  $a$  e  $b$  se:*

- $d|a$  e  $d|b$  ( $d$  divide  $a$  e  $d$  divide  $b$ )
- Se  $\exists d' \in \mathbb{Z}$  tale che  $d'|a$  e  $d'|b$ , allora  $d'|d$  (ossia  $d$  è il massimo divisore)

**Teorema 2** (Identità di Bézout). *Data una coppia di numeri interi  $a, b$  non nulli, il massimo comune divisore  $MCD(a, b) = d$  esiste sempre. Inoltre esistono due interi  $s, t \in \mathbb{Z}$  tale che*

$$d = sa + tb$$

*Proof.* Consideriamo l'insieme

$$S := \{xa + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}, xa + yb > 0\} \subseteq \mathbb{N}$$

L'insieme  $S$  è sicuramente non vuoto, poichè se prendo un qualunque  $a > 0$

$$a = (1)a + (0)b \in S$$

se invece  $a < 0$

$$-a = (-1)a + 0b \in S$$

L'insieme  $\mathbb{N}$  ha la proprietà che ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un elemento minimo.

Sia  $d = \min S$ , voglio dimostrare che  $d|a$  e  $d|b$ .

Considero

$$a = qd + r \implies r = a - qd$$

poichè  $0 \leq r < d$ ,  $0 \leq a - qd < d$

Rioorganizzando i termini ottengo

$$a - qd = a - q(x_0a + y_0b) = (1 - qx_0)a - (qy_0)b = r$$

quindi  $r \in S \cup \{0\}$ . Tuttavia, poichè  $d$  è l'elemento minimo di  $S$ , e  $r < d$ , ottengo che per forza  $r = 0$ , ossia  $d|a$ .

Ragionamento analogo si può fare per  $b$ .

Manca da dimostrare che  $d$  è il massimo divisore.

Consideriamo ora un divisore comune di  $a$  e  $b$ , ossia un  $c$  tale che  $a = cu$  e  $b = cv$ . Otteniamo

$$d = sa + tb = scu + tcv = c(su + tv)$$

quindi  $c$  è un divisore di  $d$ , e poichè  $d > 0$ ,  $c \leq d$  ■

**Proposizione 3.** *Sia  $n \geq 2$  un numero primo. L'insieme delle classi di resto modulo  $n$  è un campo (tutti gli elementi non nulli sono invertibili rispetto alla moltiplicazione)*

*Proof.* Devo far vedere che

$$[a]_n \neq [0]_n \implies \exists [b]_n [a]_n [b]_n = [1]_n$$

Se  $a \notin n\mathbb{Z}$  e  $MCD(a, n) = 1$ , allora per il teorema precedente esistono  $s, t \in \mathbb{Z}$  tali che

$$1 = sa + tn$$

ossia

$$[s]_n [a]_n = [sa]_n = [1 - tn]_n = [1]_n - [tn]_n = [1]_n - [t]_n [n]_n = [1]_n - [t]_n [0]_n = [1]_n$$

quindi

$$[a]_n^{-1} = [s]_n$$

■

**Lemma 1.** Siano  $a, b$  due interi non nulli, e sia  $r$  il resto della divisione tra  $a$  e  $b$ , allora

$$MCD(a, b) = MCD(b, r)$$

### 1.5.1 Algoritmo di Euclide

L'algoritmo di euclide è in metodo efficace per calcolare il massimo comune divisore tra due numeri  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

Condizione sugli input è che  $a, b \in \mathbb{Z}$  e che non siano entrambi nulli.

L'algoritmo ricorsivo ha i seguenti casi base:

- $a < 0$  restituisco  $MCD(-a, b)$
- $b < 0$  restituisco  $MCD(a, -b)$
- $a < b$  restituisco  $MCD(b, a)$
- $b = 0$  restituisco  $MCD(a, 0) = a$

a questo punto posso supporre  $a \geq b > 0$ , dall'algoritmo ottengo

$$a = qb + r \longrightarrow MCD(b, r)$$

**Esempio** Supponiamo di avere  $a = 3522$  e  $b = 321$ , e di voler calcolare  $MCD(a, b)$ . L'algoritmo viene eseguito come segue: Posso utilizzare questo

$3522 = 10 * 321 + 312$	$MCD(3522, 321) = MCD(321, 312)$
$321 = 1 * 312 + 9$	$MCD(321, 312) = MCD(312, 9)$
$312 = 34 * 9 + 6$	$MCD(312, 9) = MCD(9, 6)$
$9 = 1 * 6 + 3$	$MCD(9, 6) = MCD(6, 3)$
$6 = 2 * 3$	$MCD(6, 3) = MCD(3, 0) = 3$

metodo per calcolare il coefficiente  $s$  dell'identità di Bézout, ma lo applichiamo ad un esempio più significativo

**Esempio** Qual'è l'inverso moltiplicativo di  $[12]_{29}$ ?  
Poichè 29 è primo, segue che

$$1 = MCD(12, 29)$$

Applicando l'algoritmo di Euclide otteniamo

$$29 = 2 * 12 + 5$$

$$12 = 2 * 5 + 2$$

$$5 = 2 * 2 + 1$$

proseguiamo ora col procedimento inverso

$$1 = 5 + (-2)2$$

$$1 = 5 + (-2)(12 + (-2)5) = (5)5 + (-2)12$$

$$1 = (29 - (2)12) + (-2)12 = (5)29 + (-12)12$$

Otteniamo quindi che

$$[12]_{29}[-12]_{29} = [1]_{29}$$

quindi

$$[12]_{29}^{-1} = [-12]_{29}$$

che normalizzato diventa  $[17]_{29}$

## 1.6 Sottostrutture algebriche

Sia  $(G, +)$  un gruppo abeliano. Un sottoinsieme  $H \subseteq G$  si dice sottogruppo di  $G$  se  $H$ , con l'operazione di somma ristretta agli elementi di  $H$ , è un gruppo

**Esempio** Consideriamo  $\mathbb{Z}_4$  con l'usuale operazione di somma, e restringiamo il dominio delle operazioni ai soli elementi  $[0]_4$  e  $[2]_4$

+	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[\emptyset]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[\emptyset]$	$[1]$	$[2]$

Consideriamo ora  $\mathbb{Z}_2$  con la stessa operazione

$\cdot$	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$
$[1]$	$[1]$	$[0]$

Possiamo notare una relazione tra la struttura di  $(\mathbb{Z}_4, +)$  e  $(\mathbb{Z}_2, +)$

**Idea** Gli insiemi delle classi di resto sono in relazione

**Osservazione**  $H \subset G$  sottogruppo di  $(G, +)$  significa che l'insieme  $H$  è chiuso rispetto alla somma, quindi

$$\forall h \in H \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad \underbrace{ah}_{h+h+\dots+h} \in H$$

quindi ho necessariamente che  $0_G \in H$

**Definizione 9** (Relazione di equivalenza compatibile). *Sia  $(G, +)$  un gruppo abeliano. Una relazione di equivalenza  $\sim$  sul gruppo  $G$  si dice compatibile con l'operazione di  $G$  se vale*

$$g_1 \sim g'_1, g_2 \sim g'_2 \implies g_1 + g_2 \sim g'_1 + g'_2$$

**Proposizione 4.** *Sia  $H \subset G$  un sottogruppo, allora posso definire una relazione di equivalenza  $\sim$  compatibile*

$$g_1 \sim_H g_2 \iff g_1 - g_2 \in H$$

*Proof.* La dimostrazione è identica alla dimostrazione per le classi di resto ■

**Definizione 10** (Gruppo quoziente). *Sia  $G$  un gruppo e  $H$  un suo sottogruppo. Posso definire un nuovo gruppo, chiamato gruppo quoziente ( $G$  modulo  $H$ ) definito come*

$$G/H := \{\text{classi di equivalenza di } G \text{ rispetto alla relazione } \sim_H\}$$

*La classe di equivalenza di  $a \in G$  rispetto a  $\sim_H$  viene indicata come  $a + H$ .*

*L'operazione di somma del gruppo quoziente viene definita come*

$$\begin{aligned} + : G/H \times G/H &\rightarrow G/H \\ (a + H) + (b + H) &\mapsto (a + b + H) \end{aligned}$$

**Esempio** Sia  $G = \mathbb{Z}_4$  e  $H = \{[0]_4, [2]_4\}$ .

Chi sono gli elementi di  $\mathbb{Z}_4/H$ ?

$$[0] + H = \{[0] + [0], [0] + [2]\} = H$$

$$[1] + H = \{[1] + [0], [1] + [2]\} = \{[1], [3]\}$$

ossia

$$\mathbb{Z}_4/H = \{[0] + H, [1] + H\}$$

La tabella della somma risulta

+	$[0]+H$	$[1]+H$
$[0]+H$	$[0]+H$	$[1]+H$
$[1]+H$	$[1]+H$	$[0]+H$

Che risulta praticamente identica alla tabella di somma di  $\mathbb{Z}_2$ .

Prima di vedere che relazione c'è tra queste strutture algebriche, occorre introdurre altre nozioni

**Proposizione 5.** *Sia  $\sim$  una relazione di equivalenza compatibile con un gruppo  $G$ , posso costruire un sottogruppo corrispondente*

$$H = \{g \in G \mid g \sim 0_G\}$$

*Proof.* Devo far vedere che  $H$  è chiuso rispetto all'operazione di somma

$$g_1, g_2 \in H \quad g_1 \sim 0_G \quad g_2 \sim 0_G$$

Per ipotesi di relazione compatibile

$$g_1 + g_2 \sim 0_G + 0_G = 0_G$$

quindi  $g_1 + g_2 \in H$

Faccio ora vedere che ogni elemento è invertibile

$$\forall g \in H \quad g \sim 0_G$$

per riflessività inoltre

$$-g \sim -g$$

Per compatibilità

$$0_G = g + (-g) \sim 0_G + (-g) = -g$$

quindi  $-g \in H$  ■

## Chapter 2

# Omomorfismi

Sia ora interessati a vedere come si comportano le funzioni tra strutture algebriche, in particolare tra gruppi abeliani

**Definizione 11** (Omomorfismo di gruppi). *Siano  $(G, +)$  e  $(G', \Delta)$  due gruppi abeliani. Una funzione  $f : G \rightarrow G'$  si definisce omomorfismo di gruppi se*

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad f(g_1 + g_2) = f(g_1) \Delta f(g_2)$$

Dato un omomorfismo, possiamo inoltre definire alcuni sottogruppi importanti

**Definizione 12** (Nucleo). *Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi*

$$\text{Ker } f := \{g \in G \mid f(g) = 0_{G'}\}$$

*Il nucleo è un sottogruppo del dominio*

**Definizione 13** (Immagine). *Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi*

$$\text{Im } f := \{g' \in G' \mid \exists g \in G \ f(g) = g'\}$$

*L'immagine è un sottogruppo del codominio*

**Definizione 14** (Co-nucleo). *Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi*

$$\text{CoKer } f := G' / \text{Im } f$$

**Nomenclatura** Per gli omomorfismi viene utilizzata la seguente nomenclatura

- Omomorfismo iniettivo viene chiamato monomorfismo
- Omomorfismo suriettivo viene chiamato epimorfismo
- Omomorfismo biiettivo viene chiamato isomorfismo
- Omomorfismo di  $G$  in se stesso viene chiamato endomorfismo
- Endomorfismo biiettivo viene chiamato automorfismo

**Proprietà** Alcune proprietà sono già note dalle applicazioni lineari

- $f(0_G) = 0_{G'}$
- $f(-g) = -f(g) \quad \forall g \in G$
- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall g \in G \quad f(\underbrace{ng}_{g+g+\dots+g}) = \underbrace{nf(g)}_{f(g)\triangle f(g)\triangle\dots\triangle f(g)}$
- $f$  monomorfismo  $\iff Ker f = \{0_G\}$

**Osservazione** Per i morfismi di gruppi, in generale non è vero che un endomorfismo iniettivo è anche suriettivo (come accade con gli spazi vettoriali)

## 2.1 Omomorfismi e quozienti

Supponiamo di avere un omomorfismo di gruppi  $f : G \rightarrow G'$ , sappiamo che  $K = Ker f$  è un sottogruppo di  $G$ .

Come si comportano gli elementi di una classe di equivalenza rispetto a  $f$ ?

Prendiamo le classi di equivalenza indotte da  $K$

$$G/K := \{\text{classi di equivalenza di } \sim_K\}$$

E prendiamo  $g_1, g_2 \in G$  tali che  $g_1 \sim_K g_2$  ossia  $g_1 - g_2 \in K$  dal quale segue

$$g_1 - g_2 \in K \iff f(g_1 - g_2) = 0_{G'}$$

Poichè  $f$  omomorfismo

$$f(g_1 - g_2) = f(g_1) - f(g_2) = 0_{G'}$$

ossia

$$f(g_1) = f(g_2)$$

Ho quindi che tutti gli elementi di una classe di equivalenza ha la stessa immagine tramite  $f$ , equivalente al teorema della fibra per gli spazi vettoriali

**Teorema 3** (Teorema fondamentale di isomorfismo tra gruppi). *Siano  $G$  e  $G'$  due gruppi abeliani, e  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo. Allora, esiste un unico isomorfismo*

$$f^* : G/Ker f \rightarrow Im f$$

*tale che*

$$f = f^* \circ \pi$$

*dove  $\pi$  denota la proiezione canonica*

$$\pi : G \rightarrow G/Ker f \quad g \mapsto g + Ker f$$

Il teorema viene spesso enunciato con il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & Im f \\ \pi \downarrow & \nearrow f^* & \\ G/Ker f & & \end{array}$$

*Proof.* Definisco una procedura per calcolare  $f^*$

$$f^* : G / \text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$$

tale che  $\forall g \in G$

$$f^*(g + \text{Ker } f) = f(g)$$

inoltre poichè vale sempre

$$g + \text{Ker } f =: \pi(g) \implies f^* \circ \pi = f$$

$f^*$  è ben definita poichè l'immagine di  $g + \text{Ker } f$  non dipende dal rappresentante. Devo far vedere ora che:

- $f^*$  è un omomorfismo
- $f^*$  è un isomorfismo

Il primo punto è banale. Considero  $(g_1 + \text{Ker } f), (g_2 + \text{Ker } f) \in G / \text{Ker } f$ ,

$$\begin{aligned} f^*((g_1 + \text{Ker } f) + (g_2 + \text{Ker } f)) &= f^*((g_1 + g_2) + \text{Ker } f) = \\ &= f(g_1 + g_2) \stackrel{f \text{ om.}}{=} f(g_1) + f(g_2) = f^*(g_1 + \text{Ker } f) + f^*(g_2 + \text{Ker } f) \end{aligned}$$

Per il secondo punto bisogna dimostrare iniettività e suriettività:

- Iniettività: Prendo  $g_1 + \text{Ker } f$  e  $g_2 + \text{Ker } f$  tali che

$$f^*(g_1 + \text{Ker } f) = f^*(g_2 + \text{Ker } f) \Leftrightarrow f(g_1) = f(g_2)$$

ossia

$$\Leftrightarrow f(g_1 - g_2) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow g_1 + \text{Ker } f = g_2 + \text{Ker } f$$

- Suriettività:  $\forall g' \in \text{Im } f \exists g \in G$  tale che  $f(g) = g'$

$$f^*(g + \text{Ker } f) = f(g) = g'$$

■

**Esempio** Consideriamo i gruppi  $(\mathbb{Z}_4, +)$  e  $(\mathbb{Z}_2, +)$  e il morfismo

$$[0]_4, [2]_4 \mapsto [0]_2$$

$$[1]_4, [3]_4 \mapsto [1]_2$$

La verifica che  $f$  sia un omomorfismo è banale. Otteniamo inoltre

$$\text{Im } f = \mathbb{Z}_2$$

$$\text{Ker } f = \{[0]_4, [2]_4\}$$

Per il t.f. dell'isomorfismo tra gruppi  $\exists f^*$  isomorfismo, ossia

$$\mathbb{Z}_4 / \text{Ker } f \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_2$$



## Chapter 3

# Confronto tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_n$

**Definizione 15** (Ordine di un elemento). *Sia  $(G, +)$  un gruppo abeliano,  $g \in G$  fissato. Definiamo **ordine di  $g$**  il più piccolo intero positivo  $n$  tale che*

$$\underbrace{g + g + \cdots + g}_{n \text{ volte}} = 0_G$$

*Se non esiste un intero  $n$  con queste proprietà, diciamo che l'ordine di  $g$  è infinito*

**Esempio** Consideriamo  $G = \mathbb{Z}$ , abbiamo 2 casi possibili

$$\text{ordine di } k = \begin{cases} \infty & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

**Osservazione**  $0_G$  è sempre l'unico elemento di ordine 1

**Proprietà** Per gruppi finiti, l'ordine di un elemento di  $\mathbb{Z}_n$  è un divisore di  $n$

**Definizione 16** (Gruppi ciclico). *Un gruppo  $G$  si dice ciclico se esiste un elemento  $g \in G$  tale che*

$$\{ng \mid n \in \mathbb{Z}\} = G$$

**Proprietà**  $\mathbb{Z}_p$  con  $p$  primo, allora ogni classe non nulla ha tutti gli elementi di  $\mathbb{Z}_p$  tra i suoi multipli, quindi  $\mathbb{Z}_p$  è ciclico e l'ordine di un qualsiasi elemento non nullo è  $p$

**Definizione 17** (Ordine di un gruppo ciclico). *Sia  $G$  un gruppo ciclico, l'**ordine di  $G$**  è l'ordine del suo elemento  $g \in G$  tale che  $G$  è generato dai multipli di  $g$ , ossia*

$$G = \{ng \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

**Esempi**  $\mathbb{Z}$  è un gruppo ciclico di ordine  $\infty$  (è generato da 1 o  $-1$ ).  
 $\mathbb{Z}_n$  è un gruppo ciclico di ordine  $n$ .

**Proposizione 6.** *Ogni gruppi ciclico di ordine  $\infty$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}$*

*Proof.* Per ipotesi,  $\exists g \in G$  tale che  $G = \{ng \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .  
Definiamo il morfismo  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$  come

$$ng \mapsto n$$

E' banale dimostrare che  $f$  è un isomorfismo:

- Suriettività immediata:  $\forall n \in \mathbb{Z} \ f(ng) = n$  (il fatto che sia ciclico ci assicura che  $ng$  sia nel gruppo  $G$ )
- Iniettività: Prendo  $ng, mg \in G$  tali che  $f(ng) = f(mg)$   
ossia  $nf(g) - mf(g) = 0 \implies (n - m)f(g) = 0 \implies n = m$

■

## Chapter 4

# Assemblare, costruire e decomporre gruppi

### 4.1 Assemblare gruppi

Sia  $\{(G_\alpha, +_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  una collezione di gruppi, indicizzati con  $\mathcal{I}$  (che può avere cardinalità infinita), abbiamo due operazioni principali che possiamo definire

**Definizione 18** (Prodotto diretto). *Il **prodotto diretto**  $\prod_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha$  è il gruppo con insieme di sostegno il prodotto cartesiano degli insiemi di sostegno dei  $G_\alpha$ , e l'operazione somma definita componente per componente*

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha := (G_{\alpha_1} \times G_{\alpha_2} \times \dots, +)$$

$$+ : \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha \times \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha$$

$$(g_1, g_2, \dots), (g'_1, g'_2, \dots) \mapsto (g_1 +_1 g'_1, g_2 +_2 g'_2, \dots)$$

**Definizione 19** (Somma diretta esterna). *La **somma diretta esterna**  $\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha$  è il gruppo con insieme di sostegno le  $n$ -uple del prodotto cartesiano degli insiemi di sostegno dei  $G_\alpha$  con un numero finito di elementi non nulli, e l'operazione somma definita come sopra, componente per componente*

$$+ : \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha \times \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha$$

$$(0, \dots, g_1, \dots, g_n, 0, \dots), (0, \dots, g'_1, \dots, g'_n, 0, \dots) \mapsto (0, \dots, g_1 +_1 g'_1, \dots, g_n +_n g'_n, 0, \dots)$$

**Osservazione** In generale

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha$$

ma se l'insieme degli indici è finito, allora

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha = \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha$$

## 4.2 Problemi di rappresentazione

**Definizione 20** (Insieme di generatori). Sia  $(G, +)$  un gruppo abeliano, diciamo che la collezione di elementi  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  è un **insieme di generatori** del gruppo se ogni elemento del gruppo  $g \in G$  si può scrivere come somma finita di multipli dei generatori, ossia

$$\forall g \in G \quad g = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha g_\alpha \quad a_\alpha \in \mathbb{Z}$$

dove intendiamo

$$a_\alpha g_\alpha = \begin{cases} \underbrace{g_\alpha + g_\alpha + \cdots + g_\alpha}_{a_\alpha \text{ volte}} & a_\alpha \geq 0 \\ \underbrace{(-g_\alpha) + (-g_\alpha) + \cdots + (-g_\alpha)}_{-a_\alpha \text{ volte}} & a_\alpha < 0 \end{cases}$$

**Definizione 21** (Gruppo finitamente generato). Se la collezione di generatori è formato da un numero finito di elementi, diremo che il gruppo è **finitamente generato**

**Definizione 22** (Base di un gruppo). Una collezione di elementi  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  si dice **base di un gruppo**  $G$ , se ogni elemento  $g \in G$  si può scrivere **in modo unico**

$$g = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha g_\alpha \quad a_\alpha \in \mathbb{Z}$$

In questo caso  $G$  si dice gruppo libero di rango  $|\mathcal{I}|$

**Osservazione** Viene usato il termine "rango" invece che "dimensione" poichè non è garantito che da un insieme di generatori sia possibile estrarre una base di rango  $n$ , nonostante esistano altre basi di rango  $n$ . Inoltre un gruppo libero di rango  $n$  può avere sottogruppi (propri) liberi di rango  $n$ , cosa che non accade per esempio con gli spazi vettoriali

### 4.3 Costruire nuovi gruppi

**Definizione 23** (Gruppo abeliano generato). *Sia  $S$  un insieme qualsiasi. Il gruppo abeliano generato da  $S$  è l'insieme di funzioni*

$$\langle S \rangle := \{f : S \rightarrow \mathbb{Z} \mid f^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \text{ ha cardinalità finita}\}$$

*(ossia funzioni che mandano in elementi non nulli un numero finito di valori) con l'operazione*

$$\begin{aligned} + : \langle S \rangle \times \langle S \rangle &\rightarrow \langle S \rangle \\ (f + g)(s) &\mapsto f(s) + g(s) \end{aligned}$$

**Proposizione 7.**  $(\langle S \rangle, +)$  è un gruppo libero di rango  $|S|$

*Proof.* Voglio costruire una base. Per ogni  $s \in S$ , considero la funzione caratteristica di  $s$

$$\chi_s(x) = \phi_s(x) = \begin{cases} 1 & s = x \\ 0 & s \neq x \end{cases}$$

se le prendo tutte, ossia la collezione  $\{\chi_s\}_{s \in S}$ , esse formano una base. Infatti

$$\forall f \in \langle S \rangle \quad f = \sum_{s \in S} f(s) \chi_s$$

■

**Lemma 2.** *Sia  $(G, +)$  un gruppo libero (con base  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ ). Ogni funzione*

$$f : \{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}} \rightarrow G'$$

*dove  $G'$  è un gruppo, si estende in modo unico ad un omomorfismo  $\tilde{f} : G \rightarrow G'$*

*Proof.*  $\forall g \in G$ ,  $g$  si può scrivere un modo unico come

$$g = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha g_\alpha$$

quindi

$$\tilde{f}(g) = \tilde{f}\left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha g_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha \tilde{f}(g_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha f(g_\alpha)$$

■

**Proposizione 8.** *Sia  $(G, +)$  un gruppo libero con base  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ ,  $G$  è isomorfo a*

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{|\mathcal{I}|}$$

*Proof.* Considero la funzione  $f : \{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}} \rightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathbb{Z}$  definita come segue

$$g_\alpha \mapsto (0, \dots, 0, \underset{i=\alpha}{\uparrow} 1, 0, \dots, 0)$$

per il lemma precedente,  $f$  si estende a  $\tilde{f} : G \rightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathbb{Z}$  e  $\tilde{f}$  è iniettiva e suriettiva (dimostrazione banale) ■

### Osservazioni

- Se  $G$  ha rango finito,  $G \simeq \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathbb{Z}$
- $G = \langle S \rangle \simeq \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}$  indipendentemente dalla cardinalità di  $S$

## 4.4 Decomposizione di gruppi

**Definizione 24** (Somma i Gruppi). Sia  $(G, +)$  un gruppo abeliano, e sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  una collezione di sottogruppi di  $G$ . Diremo che  $G$  è la somma dei  $G_\alpha$ , e scriveremo

$$G = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha$$

se ogni elemento  $g \in G$  si può scrivere come

$$g = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} g_\alpha \quad g_\alpha \in G_\alpha$$

**Definizione 25** (Somma diretta interna). Sia  $(G, +)$  un gruppo abeliano, e sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  una collezione di sottogruppi di  $G$ . Diremo che  $G$  è la somma diretta interna dei  $G_\alpha$ , e scriveremo

$$G = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{I}} G_\alpha$$

se ogni elemento  $g \in G$  si può scrivere in modo **unico** come

$$g = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} g_\alpha \quad g_\alpha \in G_\alpha$$

**Osservazioni** Per la somma diretta interna è immediato verificare le seguenti proposizioni:

- $\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} a_\alpha g_\alpha = 0 \iff a_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}$  (deriva dall'unicità nello scrivere l'elemento nullo)
- $\forall \alpha \in \mathcal{I} \quad G_\alpha \cap \left( \sum_{\beta \neq \alpha} G_\beta \right) = \{0\}$

**Esempio**  $\mathbb{Z}$  con i generatori  $\{4, 7\}$ , è facile vedere come

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n = (2n)4 + (-n)7$$

ossia

$$\mathbb{Z} = (4\mathbb{Z}) + (7\mathbb{Z})$$

La somma è diretta? Usiamo le proposizioni:

- $0 = (-7)4 + (4)7$ , non ok!
- $(4\mathbb{Z}) \cap (7\mathbb{Z}) = 28\mathbb{Z} \neq \{0\}$  non ok!

**Esempio**  $G = \mathbb{Z}$ , prendo  $H = 3\mathbb{Z}$  sottogruppi di  $\mathbb{Z}$ .  $3\mathbb{Z}$  è un possibile addendo diretto di  $\mathbb{Z}$ ?

Ossia, esiste un  $K \subseteq \mathbb{Z}$  tale che  $3\mathbb{Z} \oplus K = \mathbb{Z}$ ?

Supponiamo che esista, vuol dire che univocamente

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n = 3m + k \quad k \in K$$

prendo il morfismo

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow K$$

tale che

$$n = 3m + k \mapsto k$$

(proiezione sul secondo addendo)

E' facile verificare che

$$\text{Ker } f = \{3m + 0\} = 3\mathbb{Z}$$

$$\text{Im } f = K$$

Il teorema fondamentale di isomorfismo tra gruppi mi dice che (se  $K$  esiste), ho un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \text{Im } f = K \\ \downarrow \pi & \nearrow f^* & \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3 & & \end{array}$$

Ossia che  $\mathbb{Z}$  contiene elementi di ordine 3, Assurdo!

Quindi  $K$  non esiste

## 4.5 Costruire un gruppo libero generato da elementi

**Osservazione** Abbiamo visto che, dato un insieme  $S$  qualsiasi,

$$\langle S \rangle := \{f : S \rightarrow \mathbb{Z} \mid f^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \text{ ha cardinalità limitata}\}$$

Più in generale, fissato un gruppo  $(G, +)$

$$\langle S \rangle_G := \{f : S \rightarrow G \mid f^{-1}(G \setminus \{0_G\}) \text{ ha cardinalità limitata}\}$$

diamo quindi la seguente definizione

**Definizione 26** (Gruppo di torsione). *Sia  $(G, +)$  un gruppo abeliano qualsiasi. Gli elementi di  $G$  con ordine finito formano un sottogruppo di  $G$ , detto gruppo di torsione di  $G$ , indicato con  $T_G$ . Se il gruppo di torsione è il sottogruppo banale  $\{0_G\}$  appartiene sempre al gruppo di torsione), allora il gruppo  $G$  si dice privo di torsione*



**Osservazione**  $T_G$  è veramente un gruppo? Affinchè lo sia, dobbiamo mostrare che la somma è chiusa su  $T_G$

$$T_G := \{g \in G \mid \exists \quad mg = 0_G\}$$

Prendiamo due elementi  $g_1, g_2 \in T_G$ , ossia esistono due interi  $m_1, m_2$  tali che

$$m_1 g_1 = m_2 g_2 = 0_G$$

prendiamo ora un intero  $m = \text{mcm}(m_1, m_2)$ , ossia

$$m = a_1 m_1 = a_2 m_2$$

Per essere un gruppo, devo avere che dati  $g_1 + g_2$  esiste un  $m$  tale che  $m(g_1 + g_2) = 0_G$

$$m(g_1 + g_2) = m g_1 + m g_2 = a_1 m_1 g_1 + a_2 m_2 g_2 = a_1 (m_1 g_1) + a_2 (m_2 g_2) = a_1 0_G + a_2 0_G = 0_G$$

che dimostra che l'operazione è interna al gruppo di torsione. Inoltre ricaviamo che l'ordine della somma è l'mcm dell'ordine dei due addendi

**Teorema 4** (Teorema fondamentale dei gruppi abeliani finitamente generati).  
Sia  $(G, +)$  un gruppo abeliano finitamente generato, e  $T_G$  il suo gruppo di torsione. Allora:

1. Esiste un gruppo libero di rango finito, tale che

$$G = H \oplus T_G$$

2. Il gruppo di torsione  $T_G$  si decompone come somma diretta

$$T_G = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_K$$

dove i  $T_i$  sono gruppi ciclici di ordine  $t_i > 1$  e vale la seguente relazione

$$t_1 | t_2 | \dots | t_k$$

3. Il rango di  $H$  e gli ordini dei gruppi ciclici sono univocamente determinati da  $G$

**Nomenclatura** Datemo i seguenti nomi ai coefficienti:

- Il rango di  $H$  si dice Numero di Betti di  $G$
- Gli ordini dei gruppi ciclici  $t_1, t_2, \dots, t_k$  si dicono Coefficienti di torsione di  $G$

**Osservazione** Se  $H$  è un gruppo libero di rango  $r$ , allora

$$H \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ volte}} = \mathbb{Z}^r$$

Se  $T$  è un gruppo ciclico di ordine finito  $t < +\infty$ , allora

$$T \simeq \mathbb{Z}/_t \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_t$$

segue quindi il corollario

**Corollario 1.** *Se  $(G, +)$  è un gruppo abeliano finitamente generato, allora*

$$G \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \mathbb{Z}_{t_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_k}$$

*tale che*

$$t_1 | t_2 | \dots | t_k$$

## Chapter 5

# Complementi

In seguito vengono illustrati alcuni risultati della teoria dei gruppi nell'ambito della teoria dei numeri, ed in particolare il suo utilizzo nella crittografia

**Teorema 5** (Teorema di Fermat). *Preso  $p$  numero primo e  $[a]_p \neq [0]_p$ , allora*

$$[a]^{p-1} = [1]_p$$

**Corollario 2.**

$$[a]_p^{p-1} = [a]_p [a]_p^{p-1} = [1]_p$$

*ossia*

$$[a]_p^{-1} = [a]_p^{p-2}$$

Il teorema di Fermat è un caso specifico del teorema di Eulero, che per essere introdotto è necessario prima definire una funzione

**Definizione 27** (Funzione di Eulero). *Definiamo funzione di eulero la funzione*

$$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \text{numero di elementi in } \{1, 2, \dots, n-1\} \text{ coprimi con } n$$

**Proprietà** Sono banali da dimostrare le seguenti proprietà

- Se  $p$  primo,  $\phi(p) = p - 1$
- Se  $p$  primo,  $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$
- Se  $p, q$  coprimi,  $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$
- Se  $p, q$  primi,  $\phi(pq) = (p - 1)(q - 1)$

**Teorema 6** (Teorema di Eulero). *Sia  $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$  un elemento invertibile ( $MCD(a, n) = 1$ ), allora*

$$[a]_m^{\phi(m)} = [1]_m$$

**Corollario 3.** *Se  $[a]$  è invertibile in  $\mathbb{Z}_n$ , allora*

$$[a]_m^{-1} = [a]_m^{\phi(m)-1}$$

**Esempio** Supponiamo di voler calcolare

$$[857342^{124}]_7$$

L'approccio di calcolare  $857342^{124}$  e poi calcolare il resto ha buone probabilità di fallire su un calcolatore, in quanto causerebbe immediatamente overflow. Possiamo procedere come segue

- Trasferisco l'esponente all'esterno

$$[857342^{124}]_7 = [857342]_7^{124}$$

- Scelgo un rappresentante più appropriato

$$[857342]_7 = [3]_7$$

- Sfrutto il teorema di Fermat / Eulero

$$[3]_7^6 = [3]_7$$

quindi fattorizzo 124 come

$$124 = 6q + r$$

ottengo quindi

$$[3]_7^{124} = [3]_7^{6q+r} = [3]_7^{6q} [3]_7^r = [3]_7^r$$

ottengo quindi

$$[857342^{124}]_7 = [3]_7^4 = [4]_7$$

**Utilizzo** Il teorema di eulero è alla base della crittografia asimmetrica

- Prendo due numeri primi  $p, q$  e ottengo un  $n = pq$ , da cui ottengo

$$\phi(n) = (p-1)(q-1)$$

- Prendo un  $h$  coprimo con  $\phi(n)$ , ossia dall'identità di Bezout

$$1 = ah + b\phi(n) \implies ah = 1 + (-b)\phi(n)$$

- $n$  e  $h$  sono le chiavi pubbliche
- Dato un messaggio  $M$ , calcolo  $[M^h]_n$  col metodo visto nell'esempio precedente
- Il ricevente usa la chiave  $a$  come segue

$$[M^h]_n^a = [M^{ah}]_n = [M^{1+(-b)\phi(n)}]_n = [M]_n$$

## Part II

# Simplessi e complessi simpliciali

## Chapter 6

# K-Simplessi

**Definizione 28** (Insieme geometricamente indipendente). *Un insieme di punti  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  in  $\mathbb{R}^n$  è detto insieme di punti geometricamente indipendente (o in posizione generale) se le due equazioni*

$$\sum_{i=0}^k t_i P_i = (0, 0, \dots, 0) \quad \sum_{i=0}^k t_i = 0$$

*implica che  $t_0 = t_1 = \dots = t_k = 0$*

**Lemma 3.** *Se  $k \geq 1$ , i  $P_0, P_1, \dots, P_k$  sono geometricamente indipendenti se e solo l'insieme*

$$\{\underline{v}_1 = P_1 - P_0, \underline{v}_2 = P_2 - P_0, \dots, \underline{v}_k = P_k - P_0, \}$$

*è in insieme di vettori linearmente indipendenti*

**Corollario 4.** *Condizione necessaria affinché i punti  $\{P_0, \dots, P_k\}$  sono geometricamente indipendenti in  $\mathbb{R}^n$  è che*

$$k \leq n$$

### Descrizione geometrica

- $k=0$ :  $\{P_0\}$  è sempre geometricamente indipendente
- $k=1$ :  $\{P_0, P_1\}$  è geometricamente indipendente sse  $P_0 \neq P_1$
- $k=2$ :  $\{P_0, P_1, P_2\}$  è geometricamente indipendente sse i tre punti non sono allineati
- $k=3$ :  $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  è geometricamente indipendente sse i punti non sono complanari
- ...

**Osservazione**  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  sono geometricamente indipendenti sse non sono contenuti in un sottospazio affine di dimensione  $k - 1$

**Proposizione 9.** Siano  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  punti geometricamente indipendenti in  $\mathbb{R}^n$ , allora  $P_0, \dots, P_k$  sono contenuti in uno spazio affine di dimensione  $k$  descritto dalle seguenti coordinate

$$x = \sum_{i=0}^k t_i P_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^k t_i = 1$$

*Proof.* 1) Sicuramente i punti  $P_i$  appartengono allo spazio, infatti

$$\forall i = 0, \dots, k \quad P_i = 0P_0 + 0P_1 + \dots + 0P_{i-1} + 1P_i + 0P_{i+1} + \dots + 0P_k$$

$$\sum_{i=0}^k t_i = 0 + 0 + \dots + 0 + 1 + 0 + \dots + 0$$

2)

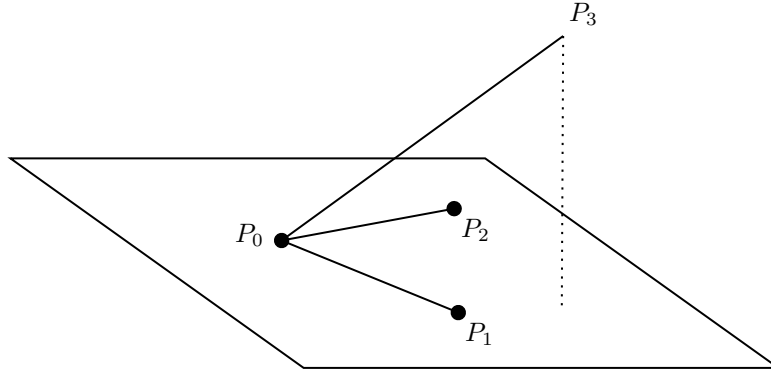
$$\sum_{i=0}^k t_i = 1 \iff t_0 = 1 - \sum_{i=1}^k t_i$$

otteniamo quindi

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=0}^k t_i P_i &= t_0 P_0 + \sum_{i=1}^k t_i P_i = \left(1 - \sum_{i=1}^k t_i\right) P_0 + \sum_{i=1}^k t_i P_i \\ &= P_0 + \sum_{i=1}^k t_i (P_i - P_0) \end{aligned}$$

Per ipotesi,  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  generano uno spazio vettoriale di dimensione massima  $k$ , quindi  $x$  appartiene ad uno spazio affine di dimensione  $k$  ■

**Lemma 4.** Se ho  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  punti geometricamente indipendenti, allora  $\{P_0, P_1, \dots, P_k, Q\}$  sono punti geometricamente indipendenti sse  $Q$  non appartiene al sottospazio affine identificato da  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$



**Definizione 29** (K-simplesso). Siano  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  punti geometricamente indipendenti in uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , chiamiamo  $k$ -simplesso generato da  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  l'insieme di tutti i punti  $x \in \mathbb{R}^n$  tali che

$$x = \sum_{i=0}^k t_i P_i \quad \sum_{i=0}^k t_i = 1 \quad t_i \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, k$$

**Nomenclatura** I coefficienti  $t_i$  sono univocamente determinati da  $x$  e vengono detti coordinate baricentriche di  $x$  rispetto all'insieme  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$

### Interpretazione geometrica

k=0)  $\{P_0\}$  Uno 0-simplesso è un punto  $P_0$  di  $\mathbb{R}^n$

k=1)  $\{P_0, P_1\}$  Un 1-simplesso è l'insieme dei punti

$$x = t_0 P_0 + t_1 P_1 \quad t_0 + t_1 = 1 \quad t_0, t_1 \geq 0$$

ossia, considerando  $t_0 = 1 - t_1$ ,

$$x = (1 - t_1) P_0 + t_1 P_1$$

con  $t_1 \geq 0$   $1 - t_1 \geq 0$ , ossia  $t_1 \in [0, 1]$ .

L'1-simplesso è il segmento  $\overline{P_0 P_1}$

k=2)  $\{P_0, P_1, P_2\}$  Un 2-simplesso è l'insieme dei punti

$$x = t_0 P_0 + t_1 P_1 + t_2 P_2 \quad t_0 + t_1 + t_2 = 1 \quad t_0, t_1, t_2 \geq 0$$

osservo che  $P_0 = 1P_0 + 0P_1 + 0P_2$ , e con un ragionamento analogo posso concludere che  $P_0, P_1, P_2$  appartengono al 2-simplesso.

Considero un  $x \neq P_0$ , ossia  $t_0 \neq 1$

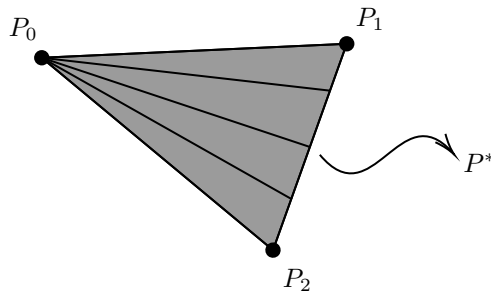
$$x = t_0 P_0 + \frac{1-t_0}{1-t_0} (t_1 P_1 + t_2 P_2) = t_0 P_0 + (1-t_0) \underbrace{\left( \frac{t_1}{1-t_0} P_1 + \frac{t_2}{1-t_0} P_2 \right)}_{P^*}$$

ossia  $x$  è il segmento tra  $P_0$  e  $P^*$ .

Capiamo ora come è fatto  $P^*$

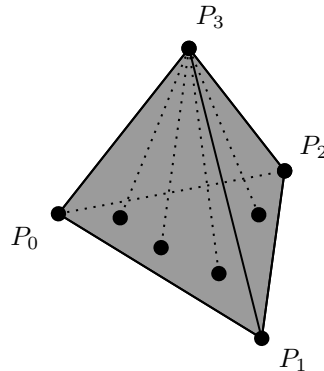
- $\frac{t_1}{1-t_0} + \frac{t_2}{1-t_0} = \frac{t_1+t_2}{1-t_0} = \frac{1-t_0}{1-t_0} = 1$
- $\frac{t_1}{1-t_0}, \frac{t_2}{1-t_0} \geq 0$

Quindi  $P^*$  è l'1-simplesso generato da  $\{P_1, P_2\}$ . Segue che il 2-simplesso generato da  $\{P_0, P_1, P_2\}$  è il triangolo con vertici  $P_0, P_1, P_2$





k=3)  $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  Un 3-simplesso è una piramide a base triangolare (tetraedro)



## 6.1 Proprietà generali

**Definizione 30** (Trasformazione affine). *Una trasformazione affine in  $\mathbb{R}^n$  è una composizione di una traslazione e di una trasformazione lineare invertibile*

### 6.1.1 Proprietà 1

Le trasformazioni affini conservano le proprietà di indipendenza geometrica, ossia dato un insieme di punti  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  geometricamente indipendenti, e una trasformazione affine

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

allora

$$\{T(P_0), T(P_1), \dots, T(P_k)\}$$

è un insieme di punti geometricamente indipendenti

### 6.1.2 Proprietà 2

Per ogni insieme di punti  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  geometricamente indipendenti, esiste una trasformazione affine  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che

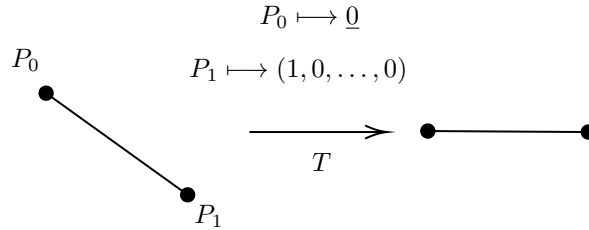
- $T(P_0) = (0, \dots, 0)$
- $\forall i = 1, \dots, k \ T(P_i - P_0) = \underline{e}_i$  (elemento  $i$ -esimo della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ )

#### Intepretazione geometrica

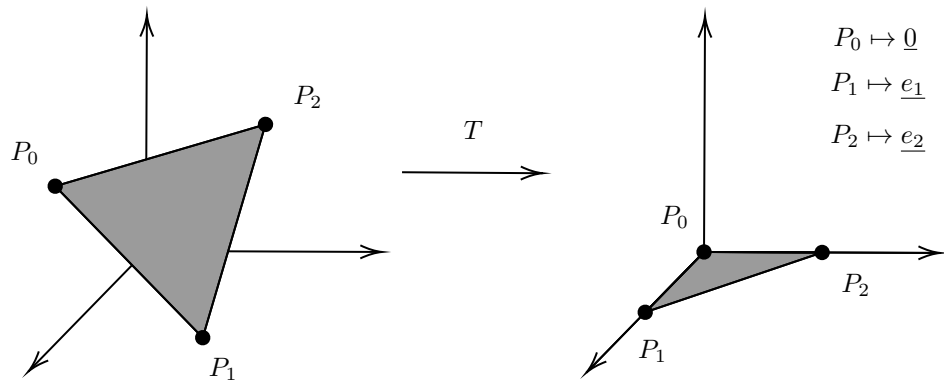
k=0) Basta una traslazione del punto

$$P_0 \xrightarrow{T} \underline{0}$$

k=1) Serve una traslazione e una trasformazione lineare



k=2) Serve una traslazione e una trasformazione lineare



**Definizione 31** (K-simplesso standard). In  $\mathbb{R}^n$ , il  $k$ -simplesso standard è il  $k$ -simplesso generato dai punti

$$\begin{aligned}
 P_0 &= (0, \dots, 0) \\
 P_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\
 &\vdots \\
 P_k &= (0, \dots, 0, \underset{(pos. \ k)}{1}, 0, \dots, 0)
 \end{aligned}$$

**Proprietà 3** Due  $k$ -simplessi  $\tau, \sigma$  qualsiasi sono tra loro omeomorfi, infatti, prendiamo la trasformazione affine

$$T_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che i punti  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  che generano  $\sigma$  vengono mandati nel  $k$ -simplesso standard  $\omega$ .

Le restrizioni

$$T_\sigma|_\sigma \rightarrow \omega$$

$$T_\tau|_\tau \rightarrow \omega$$

le quali sono biunivoche.

Una trasformazione affine è continua per definizione, quindi le due restrizioni sono omeomorfismi. Inoltre

$$\begin{array}{ccccc}
 \sigma & \xrightarrow{T_\sigma} & \omega & \xrightarrow{T_\tau^{-1}} & \tau \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & T_\sigma \circ T_\tau^{-1} & & 
 \end{array}$$

ossia  $\sigma$  e  $\tau$  sono omeomorfi

**Proprietà 4** Le funzioni

$$t_i : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

che corrispondono alle coordinate baricentriche del semplice  $\sigma$ , sono funzioni continue (punti nel semplice vicini tra loro hanno coordinate vicine tra loro)

**Proprietà 5** Il  $k$ -simple  $\sigma$  è l'unione di tutti i segmenti che uniscono un vertice di  $\sigma$  e un punto del  $k-1$  semplice generato dagli altri punti

**Proprietà 6** Per ogni  $k$ -simple, esiste un unico insieme di punti geometricamente indipendenti che lo generano

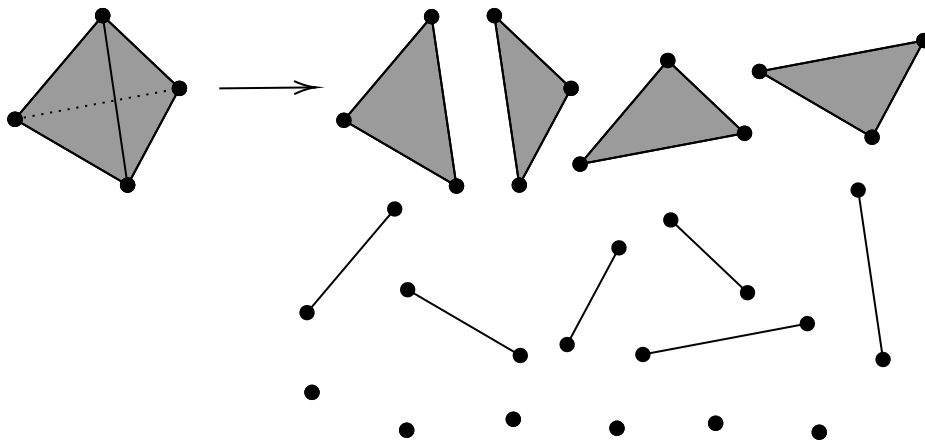
**Proprietà 7** Un semplice è un insieme connesso di  $\mathbb{R}^n$

- $\sigma$  è il più piccolo insieme connesso di  $\mathbb{R}^n$  contenente i punti  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  che generano  $\sigma$
- $\sigma$  è l'insieme di tutti gli insiemi connessi di  $\mathbb{R}^n$  contenenti  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$
- $\sigma$  è l'involuppo convesso (convex hull) dei punti  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$

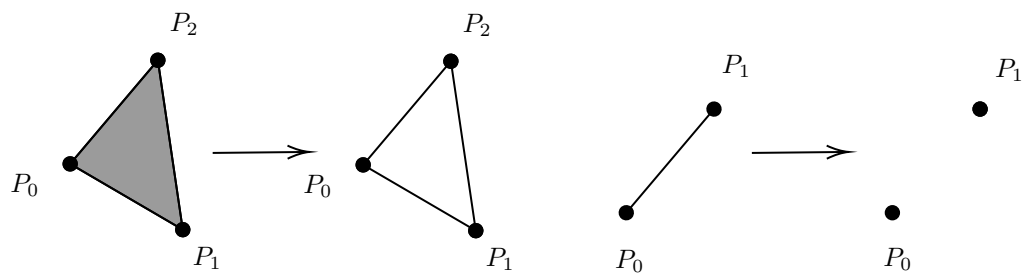
## 6.2 Confronto combinatorio-topologico

Consideriamo un  $k$ -simpleso  $\sigma$  fissato generato da  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  punti geometricamente indipendenti

- I punti  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  si dicono vertici di  $\sigma$
- $k$  si dice dimensione di  $\sigma$
- Ogni simpleso generato da un sottoinsieme proprio di  $h + 1$  punti di  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  si dice faccia del  $k$ -simpleso
  - Le facce di dimensione 2 sono gli spigoli
  - Le facce di dimensione 1 sono i vertici

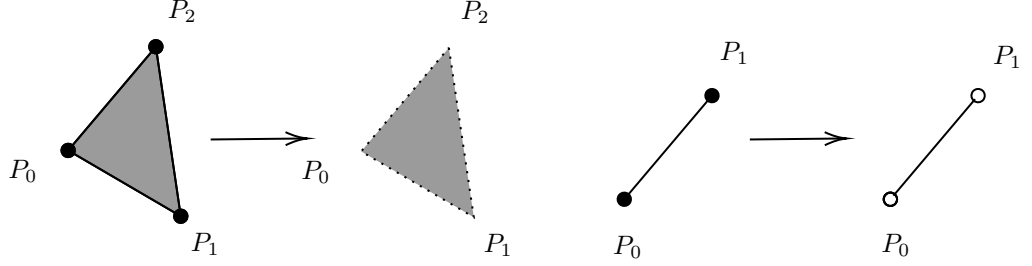


- Le facce di dimensione  $k - 1$  si dicono facce massimali (o facet)
- Dato un simpleso  $\sigma$ , l'unione di tutte le facce di  $\sigma$  si dice bordo di  $\sigma$  ( $Bd(\sigma)$ )



- Dato un semplice  $\sigma$ , chiamiamo parte interna o interno di  $\sigma$  la differenza tra  $\sigma$  e il suo bordo

$$Int(\sigma) := \sigma \setminus Bd(\sigma)$$



Possiamo riscrivere le definizioni di bordo e interno come segue

$$\begin{aligned} \sigma &:= \left\{ x = \sum_{i=0}^k t_i P_i \mid \sum_{i=0}^k t_i = 1, \quad t_i \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, k \right\} \\ Int(\sigma) &:= \left\{ x = \sum_{i=0}^k t_i P_i \mid \sum_{i=0}^k t_i = 1, \quad t_i > 0 \quad \forall i = 0, \dots, k \right\} \\ Bd(\sigma) &:= \left\{ x = \sum_{i=0}^k t_i P_i \mid \sum_{i=0}^k t_i = 1, \quad \prod_{i=0}^k t_i = 0 \right\} \end{aligned}$$

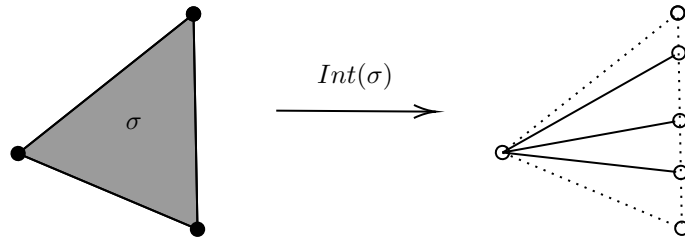
**Osservazione** Il numero di coefficienti nulli ci informano della dimensione della faccia che stiamo considerando

- 1 coefficiente nullo  $\rightarrow$  faccia massimale
- 2 coefficienti nulli  $\rightarrow$  faccia di dimensione  $k - 2$

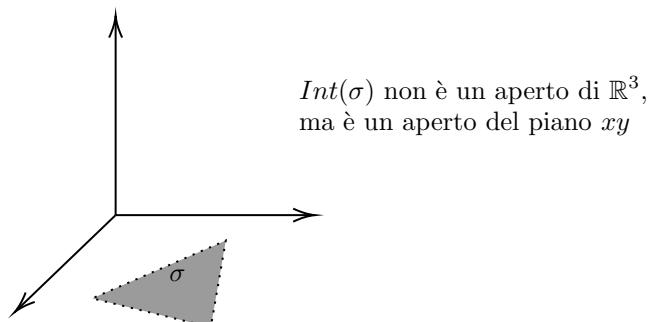
### 6.3 Proprietà topologiche k-simplessi

Sia  $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  un k-simpleso

- $\sigma$  è connesso, chiuso, limitato (ossia compatto)
- $Int(\sigma) \subseteq \mathbb{R}^n$  è l'unione di tutti i segmenti aperti (senza i due estremi) che collegano un vertice e i punti interni alla faccia massimale opposta.



Non abbiamo perso la convessità, è  $Int(\sigma)$  è aperto rispetto alla topologia dell'unico spazio affine di dimensione  $k$  che contiene  $\sigma$



- $Int(\sigma) = \sigma$  ossia  $Bd(\sigma)$  è la frontiera del semplice  $\sigma$

**Idea** Non ho una uguaglianza, ma posso dire che il  $k$ -simpleso è omeomorfo a

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \mid \|\underline{x}\| \leq 1\}$$

**Teorema 7.** Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un sottoinsieme aperto, connesso, limitato, e sia  $P \in U$  un punto. Allora

- Ogni semiretta uscente da  $P$  interseca la frontiera  $Bd(U) = \bar{U} \setminus U$  esattamente in un punto
- C'è un omeomorfismo

$$\varphi : \bar{U} \rightarrow B_n(1) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| \leq 1\}$$

tale che

$$\varphi|_{Bd(U)} : Bd(U) \rightarrow S^{n-1} := Bd(B_n(1))$$

è un omeomorfismo tra i due bordi

*Proof.* 1. Sia  $r$  una semiretta uscente da  $P$  punto del sottoinsieme

$$r = \{\underline{x} \in P + t\underline{v} \mid t \geq 0\}$$

$r \cap U \subseteq r$  è un sottoinsieme aperto di  $r$ , ed è anche convesso e limitato

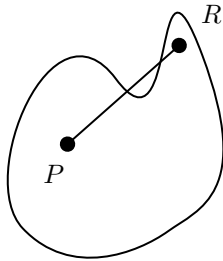
$$r \cap U = \{\underline{x} \in P + t\underline{v} \mid t \in [0, a)\}$$

il punto  $Q$  ottenuto come  $Q = P + a\underline{v}$  è un punto di frontiera  $Q \in Bd(U) = \bar{U} \setminus U$

Devo mostrare che  $\{Q\} = r \cap Bd(U)$

Supponiamo che  $r$  intersechi il bordo di  $U$  anche in un'altro punto  $R$

56 Il punto  $Q$  è compreso tra  $P$  e  $R$ .



Non è più connesso

In coordinate  $R = P + b\underline{v}$  con  $b > a$

Quali sono le coordinate baricentriche di  $Q$  rispetto all'1-simplesso generato da  $P$  e  $R$ ?

$$Q = t_0 R + t_1 P \quad t_0 + t_1 = 1$$

$$Q = (1 - t)R + tP$$

$$Q = P + a\underline{v}$$

$$b\underline{v} = R - P$$

$$a\underline{v} = \frac{a}{b}b\underline{v} = \frac{a}{b}R - P$$

da cui

$$Q = P + \frac{a}{b}R - \frac{a}{b}P = \left(1 - \frac{a}{b}\right)P + \frac{a}{b}R$$

esplicitando  $P$

$$bQ = (b - a)P + aR \longleftrightarrow P = \frac{1}{b - a}(bQ - aR)$$

$R \in Bd(U)$  sse esiste una successione di punti  $\{R_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  tale che

$$R_N \in U, \quad \text{ma} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} R_N = R$$

Vado a sostituire i punti  $R_N$  nella relazione che definisce  $P$  in funzione di  $Q$  e  $R$

$$P_N = \frac{1}{b - a}(bQ - aR_N)$$

Per ipotesi,  $U$  è aperto, quindi esiste un valore  $N_0 \in \mathbb{N}$  tale che

$$\forall N \geq N_0, \quad P_N \in U$$

Per  $N \geq N_0$ ,  $P_N$  e  $R_N \in U$ .

$U$  è connesso,  $Q \in U$  ( $Q$  unione di  $R_N$  e  $P_N$ )

Contraddizione, poichè per ipotesi  $Q \in Bd(U)$

$$R \neq q \in Bd(U)$$

non può esistere

2. A meno di traslazioni, posso supporre che  $P \in U$   $P = \underline{0}$   
 Considero la funzione  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \rightarrow S^{n-1}$  definita da

$$\underline{x} \mapsto \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$$

Ogni semiretta passante per l'origine, interseca sia  $S^{n-1}$  che il bordo  $Bd(U)$  in un unico punto

$$f|_{Bd(U)} : Bd(U) \rightarrow S^{n-1}$$

$f$  è biettiva, quindi  $f|_{Bd(U)}$  è un omeomorfismo tra  $Bd(U)$  e  $Bd(B_n(1)) = S^{n-1}$

Sia  $g : S^{n-1} \rightarrow Bd(U)$  la funzione inversa di  $f$ .

Voglio estendere  $g$  ad una funzione  $\bar{g} : B_n(1) \rightarrow U$

L'idea è di dilatare/contrarre ogni segmento di estremi  $\underline{0}$  e  $\underline{y}$  nel segmento di estremi  $\underline{0}$  e  $g(\underline{y})$

$\forall Q \in B_n(1)$   $Q = t\underline{v}$  con  $\underline{v}$  versore, quindi  $t \in (0, 1]$

Il segmento tra  $\underline{0}$  e  $\frac{Q}{\|Q\|}$  viene mandato nel segmento tra  $\underline{0}$  e  $g\left(\frac{Q}{\|Q\|}\right)$

Il fattore di scala è dato da

$$\left\| g\left(\frac{Q}{\|Q\|}\right) \right\|$$

quindi  $Q = t\underline{v}$  viene mandato in

$$t \left\| g\left(\frac{Q}{\|Q\|}\right) \right\| \underline{v}$$

$\bar{g} : B_n(1) \rightarrow U$  è definito da

$$\bar{g}(z) = \begin{cases} (0, \dots, 0) & z = \underline{0} \\ \left\| g\left(\frac{Q}{\|Q\|}\right) \right\| z & z \neq \underline{0} \end{cases}$$

$\bar{g}$  è invertibile ed è continua sicuramente per  $z \neq \underline{0}$ .

Cosa posso dire di  $\underline{0}$ ? Osservo che

$$\|g\| : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da  $\|g\|(x) = \|g(x)\|$  è limitata, quindi posso prendere  $M = \max_{S^{n-1}} \|g\|$

$$0 \leq \|z - \underline{0}\| \leq \delta \implies \|\bar{g}(z) - g(\underline{0})\| < M\delta$$

$\bar{g}$  è continua anche in  $\underline{0}$

■

**Per riassumere** Dal punto di vista topologico, i k-simplessi di  $\mathbb{R}^n$  ha le stesse proprietà di una palla n-dimensionale.

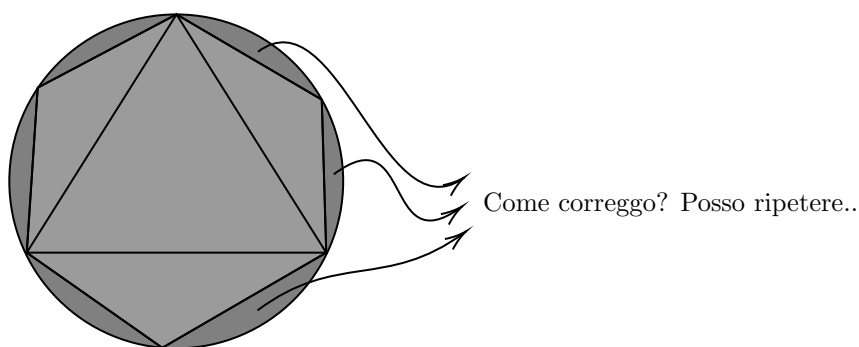
Dal punto di vista metrico invece, le proprietà sono molto diverse, ad esempio l'area contenuta è diversa



## Chapter 7

# Complessi simpliciali

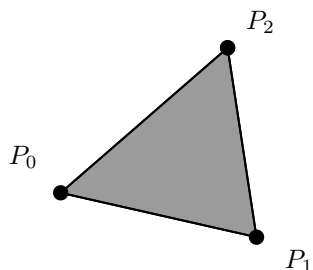
Una domanda sorge spontanea: Posso utilizzare i semplici per approssimare una forma qualsiasi



**Definizione 32** (Complesso simpliciale). *Un complesso simpliciale (simplicial complex)  $K$  di  $\mathbb{R}^n$  è una collezione di semplici tali che*

1. *Ogni faccia di un semplice di  $K$  appartiene a  $K$*
2. *L'intersezione di due semplici di  $K$  è una faccia di entrambi, oppure è vuota*

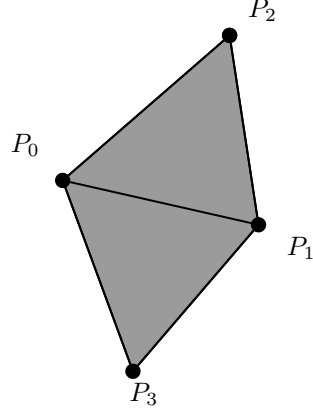
**Esempio 1** Consideriamo il semplice  $\sigma = [P_0, P_1, P_2]$  generato da  $\{P_0, P_1, P_2\}$



$K = \{\sigma\}$  non è un complesso simpliciale poichè non rispetta la prima regola. Il più piccolo complesso simpliciale che contiene  $\sigma$  è la collezione

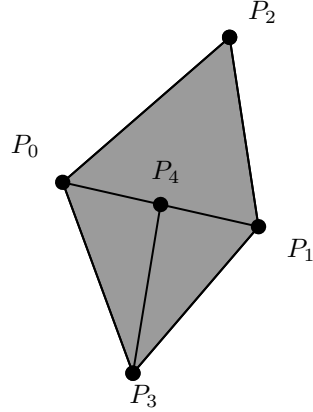
$$K = \{\sigma, \underbrace{[P_0, P_1], [P_0, P_2], [P_1, P_2]}_{1\text{-simplessi}}, \underbrace{[P_0], [P_1], [P_2]}_{0\text{-simplessi}}\}$$

### Esempio 2



$$K = \left\{ \begin{array}{l} [P_0, P_1, P_2], [P_0, P_1, P_3], \\ [P_0, P_1], [P_1, P_2], [P_0, P_2], [P_0, P_3], [P_1, P_3], \\ [P_0], [P_1], [P_2], [P_3] \end{array} \right\}$$

### Esempio 3



Non è un complesso simpliciale, infatti

$$[P_0, P_1, P_2] \cap [P_0, P_3, P_4] = [P_0, P_4]$$

non è una faccia di  $[P_0, P_1, P_2]$

**Lemma 5.** *Condizione equivalente per essere un complesso simpliciale:*

Una collezione  $K$  di simplessi di  $\mathbb{R}^n$  è un complesso simpliciale se:

- Ogni faccia di un semplice di  $K$  appartiene a  $K$
- Due simplessi distinti hanno interno disgiunto

$$\sigma \neq \tau, \quad \text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau) = \emptyset, \quad \forall \sigma, \tau \in K$$

**Nell'esempio**

$$[P_0, P_1] \neq [P_0, P_4]$$

ma

$$\text{Int}([P_0, P_1]) \cap \text{Int}([P_0, P_4]) = \text{Int}([P_0, P_4]) \neq \emptyset$$

**Definizione 33** (Sottocomplesso simpliciale). *Sia  $K$  un complesso simpliciale, una collezione  $L$  di semplici di  $K$  che contiene anche le facce di tutti i suoi elementi è ancora un complesso simpliciale. Diciamo che  $L$  è un sottocomplesso di  $K$*

**Definizione 34** (P-scheletro). *Dato un complesso simpliciale  $K$ , definiamo p-scheletro di  $K$  il sottocomplesso*

$$K^{(p)} := \{\sigma \in K \mid \dim \sigma \leq p\}$$

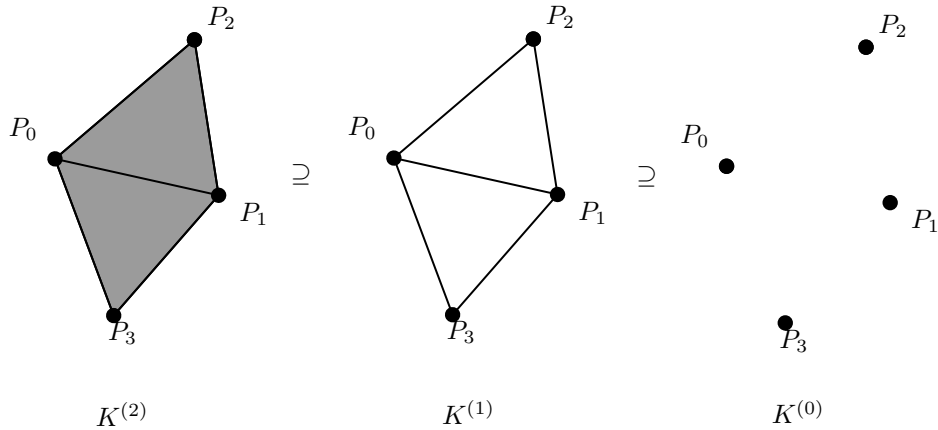
~

**Definizione 35** (Dimensione di un complesso). *Dato un complesso simpliciale  $K$ , chiamiamo dimensione di  $K$  il numero*

$$\dim K = \max_{\sigma \in K} (\dim \sigma)$$

**Osservazione** In particolare, lo 0-scheletro è l'insieme dei vertici e ogni scheletro

$$K^{(0)} \subseteq K^{(1)} \subseteq K^{(2)} \subseteq \dots \subseteq K^{(\dim K)} = K$$



**Definizione 36** (Spazio soggiacente). *Sia  $K$  un complesso simpliciale di  $\mathbb{R}^n$ , indichiamo con  $|K|$  il sottoinsieme  $\mathbb{R}^n$  formato dall'unione di punti contenuti nei semplici di  $K$ , e lo chiameremo spazio soggiacente di  $K$  (o politopo / poliedro di  $K$ )*

**Definizione 37** (Topologia del complesso). *Dato lo spazio soggiacente, la topologia è definita dai chiusi seguenti:*

$$A \subset |K| \text{ insieme chiuso di } |K| \iff A \cap \sigma \text{ insieme chiuso di } \sigma \quad \forall \sigma \in K$$

**Nota bene** Alcuni testi utilizzano *politopo* per indicare lo spazio soggiacente solo nel caso in cui  $K$  sia una collezione finita

**Proposizione 10.** *Se  $K$  è una collezione finita, la topologia del complesso coincide con la topologia euclidea. In generale, la topologia indotta dal complesso simpliciale è più fine della topologia indotta dalla topologia euclidea di  $\mathbb{R}^n$  (ho più chiusi / aperti)*

**Osservazione** Se  $L$  è un sottocomplesso di  $K$ , allora lo spazio soggiacente di  $|L|$  è un chiuso dello spazio soggiacente di  $|K|$ .  
In particolare

$$\forall \sigma \in K \quad |\sigma| \text{ chiuso}$$

infatti

$$\forall \sigma \in K \quad |L| \cap \sigma = \begin{cases} \emptyset & \sigma \notin L \\ \sigma & \sigma \in L \end{cases}$$

**Lemma 6.** *Sia  $K$  complesso simpliciale,*

- *Se  $K$  è una collezione finita, allora  $|K|$  è compatto*
- *Se  $A \subset |K|$  compatto, allora esiste un sottocomplesso  $K_0$  finito tale che*

$$A = |L_0 K|$$

**Osservazione** Se  $K$  è una collezione finita, allora la topologia è quella euclidea, e ogni elemento  $\sigma$  di  $K$  è compatto, quindi  $K$  è unione finita di compatti, ossia  $|K|$  è compatto

**Proposizione 11.** *Una funzione*

$$f : |K| \rightarrow X$$

*è continua se e solo se*

$$f|_{\sigma} : \sigma \rightarrow X$$

*è continua  $\forall \sigma \in K$*

*Proof.*  $f$  continua se e solo se

$$\forall C \subset X \text{ chiuso, } f^{-1}(C) \text{ è un chiuso di } |K|$$

$\implies$ )  $f : |K| \rightarrow X$  continua.  $f|_{\sigma} : \sigma \rightarrow X$  è continua poichè  $\sigma$  è un chiuso di  $|K|$

$\impliedby$ )  $C \subset X$  chiuso,  $f|_{\sigma} : \sigma \rightarrow X$  continua  $\forall \sigma \in K$ . Per ipotesi,  $f^{-1}|_{\sigma}(C)$  è un chiuso (poichè continua), e  $f^{-1}|_{\sigma}(C) = f^{-1}(C) \cap \sigma$ , chiuso  $\forall \sigma \in K$ .  
 $f^{-1}(C) \cap \sigma$  è chiuso  $\forall \sigma \in K$ , quindi  $f^{-1}(C)$  è un chiuso di  $|K|$  per definizione di chiuso, quindi  $f$  è continua

■

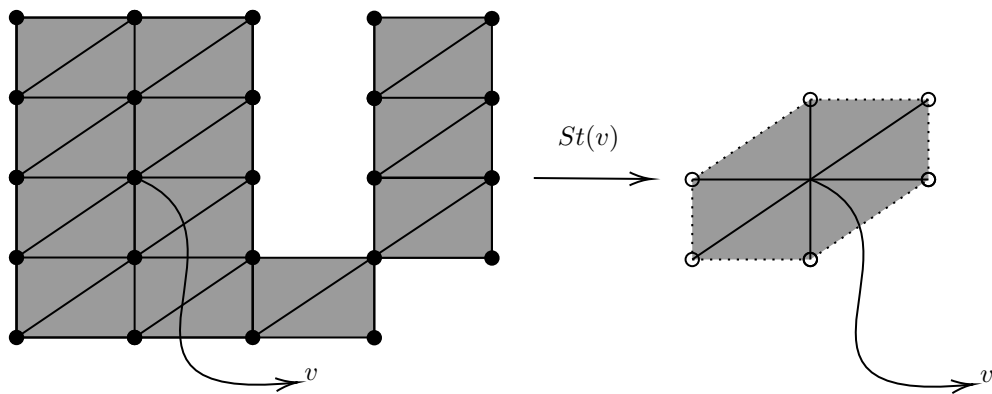
## Chapter 8

# Sottospazi particolari di un poliedro

Sia  $K$  un complesso simpliciale

**Definizione 38** (Star di un vertice). *Per ogni vertice  $v \in K^{(0)}$ , definiamo star di  $v$  l'unione della parte interna di tutti i simplessi di  $K$  che hanno  $v$  come vertice, ossia*

$$St(v) = St(v, K) = \bigsqcup_{v \in \sigma \in K} Int(\sigma)$$



**Proprietà**  $St(v)$  è un insieme aperto di  $|K|$

*Proof.*  $|K| \setminus St(v)$  è l'unione di tutti i simplessi di  $K$  che non hanno  $v$  come vertice.

$|K| \setminus St(v) = |L|$ , con  $L$  sottocomplesso di  $K$ , il quale è un chiuso rispetto alla topologia di  $|K|$  ■

**Morale**  $St(v)$  è il più piccolo intorno aperto di  $v$  deducibile dalla struttura combinatoriale di  $K$

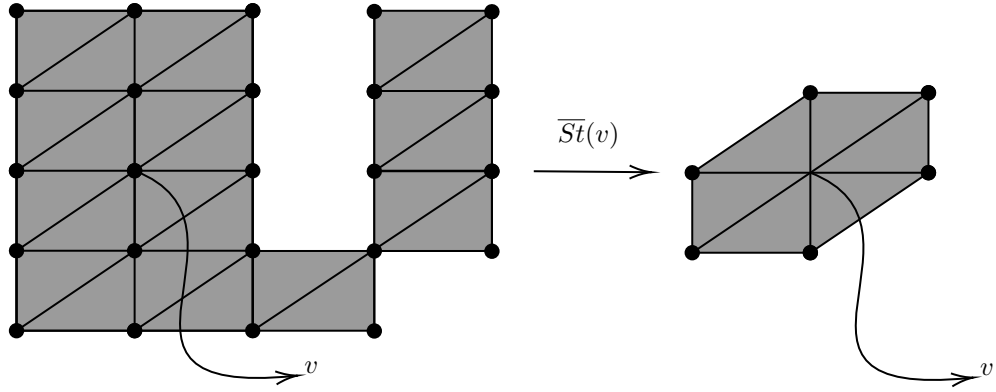
**Definizione 39** (Star chiusa). Per ogni vertice  $v \in K^{(0)}$ , definiamo star chiusa di  $v$  la chiusura (nel senso topologico) della star di  $v$ .

Useremo una delle seguenti notazioni

$$\overline{St}(v) \quad \overline{St(v)} \quad ClSt(v)$$

o per specificare il complesso

$$\overline{St}(v, K) \quad \overline{St(v, K)} \quad ClSt(v, K)$$

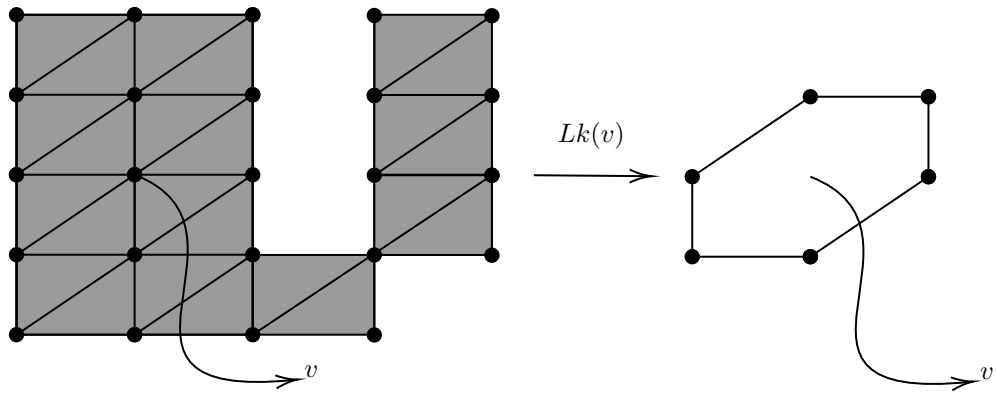


**Proprietà**

- $\overline{St}(v)$  è un insieme chiuso di  $|K|$  (con la topologia di  $|K|$ )
- $\overline{St}(v)$  è lo spazio soggiacente del sottocomplesso  $L' \subseteq K$  formato da tutti i cimplessi con  $v$  come vertice

**Definizione 40** (Link). Per ogni vertice  $v \in K^{(0)}$ , definiamo link di  $v$  la differenza tra

$$Lk := \overline{St}(v) \setminus St(v)$$

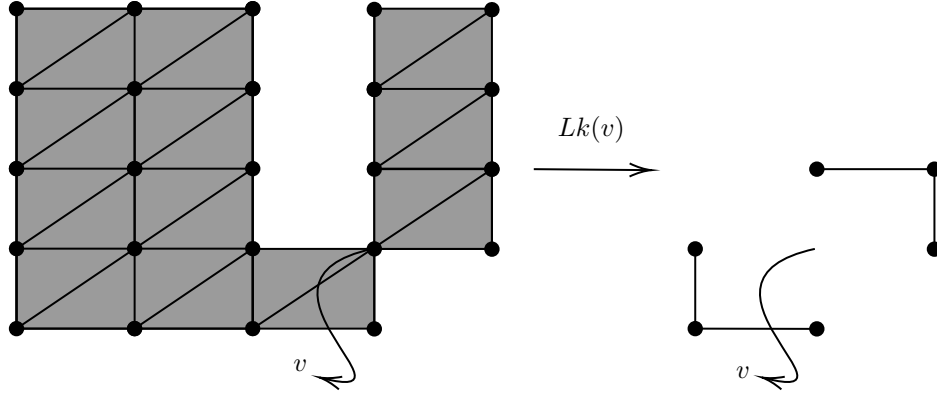


**Proprietà**  $Lk$  è un chiuso di  $|K|$ , infatti

$$Lk := \overline{St}(v) \setminus St(v) = \overline{St}(v) \cap (|K| \setminus St(v))$$

entrambi sono sottocomplessi, quindi chiusi, da cui  $Lk$  chiuso

**Osservazione**  $St(v)$  e  $\overline{St}(v)$  sono in genere insiemi connessi per archi, ciò non è invece vero per  $Lk(v)$ . Ad esempio



**Definizione 41** (Mappa simpliciale). Siano  $K$  e  $L$  due complessi simpliciali e sia

$$f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$$

una funzione tale che per ogni insieme di vertici  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  di  $K$  che generano un semplice di  $K$ , i punti corrispondenti

$$\{f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_k)\}$$

devono essere vertici di un semplice di  $L$ .

Allora la funzione  $f$  si può estendere ad una funzione continua

$$\tilde{f} : |K| \rightarrow |L|$$

tale che

$$x \in \sigma \in K \quad x = \sum_{i=0}^k t_i P_i \quad \tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^k t_i f(P_i)$$

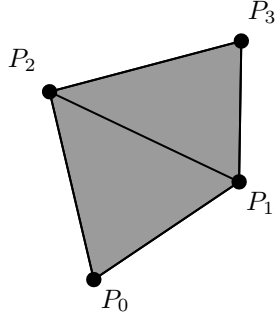
Chiamiamo  $\tilde{f}$  mappa simpliciale (lineare) indotta da  $f$

**Osservazione** Per ogni  $x \in |K|$ , esiste un unico  $\sigma \in K$  tale che  $x$  sia un punto della parte interna di  $\sigma$

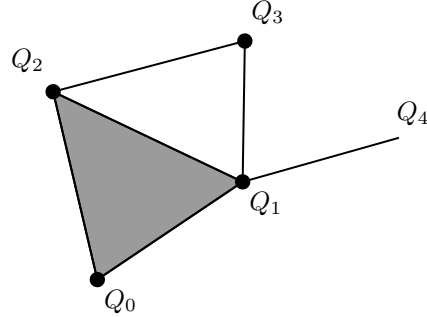
**Osservazione** Non stiamo chiedendo che i punti che otteniamo siano distinti

### Esempio 1

$K$



$L$



Consideriamo la funzione

$$f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$$

definita come

$$\begin{aligned} P_0 &\mapsto Q_0 & P_1 &\mapsto Q_1 \\ P_2 &\mapsto Q_2 \text{ oppure } P_2 \mapsto Q_0 \text{ oppure } P_2 \mapsto Q_1 \\ x \in [P_0, P_1, P_2] &\implies x = t_0 P_0 + t_1 P_1 + t_2 P_2 \end{aligned}$$

Caso 1)

$$\tilde{f}(x) = t_0 f(P_0) + t_1 f(P_1) + t_2 f(P_2) = t_0 Q_0 + t_1 Q_1 + t_2 Q_2 \in [Q_0, Q_1, Q_2]$$

Caso 2/3)

$$\tilde{f}(x) = t_0 f(P_0) + t_1 f(P_1) + t_2 f(P_2) = (t_0 + t_2) Q_0 + t_1 Q_1 \in [Q_0, Q_1]$$

**Esempio 2** Un esempio di funzione che non si estenda a una mappa simpliciale è

$$\begin{aligned} P_0 &\mapsto Q_1 & P_1 &\mapsto Q_1 & P_2 &\mapsto Q_2 \\ P_3 &\mapsto Q_3 \text{ oppure } P_3 &\mapsto Q_4 \end{aligned}$$

$\{P_1, P_2, P_3\}$  generano un 2-simplesso di  $K$ , ma

$$\{f(P_1), f(P_2), f(P_3)\} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$$

non sono vertici di un simplesso di  $L$

**Utilità** Questa possibilità permette di dimostrare che la composizione di mappe simpliciali è una mappa simpliciale

$$\begin{array}{ccccc} K^{(0)} & \xrightarrow{f} & L^{(0)} & \xrightarrow{g} & M^{(0)} \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

$$x = \sum_{i=0}^k t_i P_i \mapsto \tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^k t_i f(P_i) \mapsto \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \sum_{i=0}^k t_i g(f(P_i))$$



**Osservazione**  $\tilde{f} : |K| \rightarrow |L|$  è continua, ossia  $\tilde{f}|_{\sigma} : \sigma \rightarrow |L|$  è continua  $\forall \sigma \in K$

$$\sigma = [P_0, \dots, P_k] \xrightarrow{\tilde{f}} [f(P_0), \dots, f(P_k)]$$

è continua poichè è una mappa di inclusione

$$i : [f(P_0), \dots, f(P_k)] \hookrightarrow |L|$$

**Proposizione 12.** *Siano  $K$  e  $L$  due complessi simpliciali e sia  $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$  una funzione biettiva tale che i vertici  $P_0, \dots, P_k \in K^{(0)}$  generano un semplice di  $K$  se e solo se  $f(P_0), \dots, f(P_k) \in L^{(0)}$  generano un semplice di  $L$ . Allora la mappa simpliciale indotta  $\tilde{f} : |K| \rightarrow |L|$  è un omeomorfismo*

*Proof.* Se  $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$  è biettiva, allora  $\exists g : L^{(0)} \rightarrow K^{(0)}$  tale che

$$g \circ f = f \circ g = id$$

quindi  $g = f^{-1}$ . Segue che

$$\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x)) = \tilde{f}^{-1}\left(\sum_{i=0}^k t_i f(P_i)\right) = \sum_{i=0}^k t_i f^{-1}(f(P_i)) = \sum_{i=0}^k t_i P_i = x$$

■

**Corollario** Condizioni necessarie per essere omeomorfismi via mappe simpliciali

- $K$  finito,  $|K|$  compatto, e  $|L|, |K|$  omeomorfi (via m.s.)  $\implies L$  finito,  $|L|$  compatto
- $|K| |L|$  omeomorfi  $\implies K^{(0)}$  e  $L^{(0)}$  hanno la stessa cardinalità
- $|K| |L|$  omeomorfi  $\implies K$  e  $L$  hanno lo stesso numero di  $p$ -simplessi  $\forall p$

**Corollario 5.** *Sia  $K$  un complesso simpliciale finito, allora  $|K|$  è omeomorfo allo spazio soggiacente di un sottocomplesso del complesso simpliciale formato dal semplice standard  $\Delta^N$  con le sue facce, per un  $N$  sufficientemente grande*

*Proof.* Prendiamo  $P_0, \dots, P_n$  vertici di  $K$ , i vertici del semplice standard  $\Delta^N$  sono

$$\{0, \underline{e_1}, \underline{e_2}, \dots, \underline{e_n}, \}$$

Prendiamo la funzione

$$f : K^{(0)} \rightarrow \Delta^{N^{(0)}}$$

che associa

$$P_0 \mapsto \underline{0}$$

$$P_i \mapsto \underline{e_i}$$

Il sottocomplesso  $L \subset \Delta^N$  con spazio soggiacente omeomorfo a  $|K|$  è

$$L = \{\sigma \in \Delta^N \mid \sigma = [f(P_0), \dots, f(P_k)]\}$$

per  $[P_0, \dots, P_k] \in K$

■

## Chapter 9

# Complessi simpliciali astratti

Abbiamo quindi visto come l'omomorfismo topologico è controllato completamente dalle proprietà combinatoriali, e non da quelle geometriche. Inoltre, le coordinate dei vertici non influiscono sugli enunciati e sui teoremi, ma quello che conta è la struttura astratta. Possiamo quindi dare una struttura algebrica più raffinata ai complessi simpliciali.

**Definizione 42** (Complesso simpliciale astratto). *Un complesso simpliciale astratto è una collezione  $\mathcal{S}$  di insiemi finiti non vuoti tali che*

$$A \in \mathcal{S} \implies \mathcal{O}(A) \in \mathcal{S}$$

**Nomenclatura** Abbiamo una equivalenza tra la nomenclatura dei complessi simpliciali geometrici e dei complessi simpliciali astratti

- Ogni  $A \in \mathcal{S}$  si dice **simplex astratto**
- La **dimensione** di  $A \in \mathcal{S}$  è pari al numero di elementi meno 1
- Ogni sottoinsieme di  $A \in \mathcal{S}$  si dice **faccia** di  $A$
- La **mensione** di  $\mathcal{S}$  è la dimensione massima di un suo sottoinsieme
- L'insieme dei vertici di  $\mathcal{S}$  (l'insieme dei singoletti) si dice **0-scheletro** di  $\mathcal{S}$ , l'insieme dei sottoinsiemi di 1 elemento si dice **1-scheletro** di  $\mathcal{S}$  ecc.
- Due complessi simpliciali astratti  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$  si dicono **isomorfi** se c'è una corrispondenza biunivoca tra gli 0-scheletri tale che

$$\{a_0, a_1, \dots, a_k\} \in \mathcal{S} \iff \{f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_k)\} \in \mathcal{T}$$

**Definizione 43** (Vertex scheme). *Sia  $K$  un complesso simpliciale (geometrico) e sia  $V = K^{(0)}$  l'insieme dei vertici di  $K$ . La collezione di sottoinsiemi di  $V$*

$$\mathcal{K} := \{\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \in V \mid [v_0, \dots, v_n] \in K\}$$

*è un complesso simpliciale astratto detto vertex scheme di  $K$*

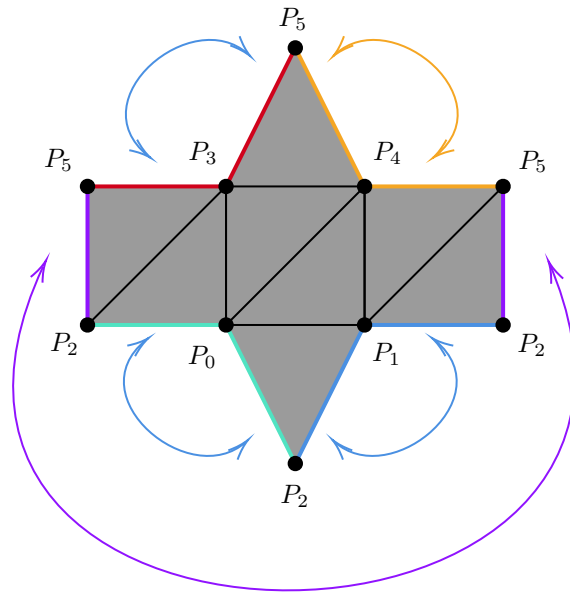
**Teorema 8.**     • *Ogni complesso simpliciale astratto è isomorfo ad un vertex scheme di un complesso simpliciale geometrico*

- *Due complessi simpliciali (geometrici) sono isomorfi (e gli spazi soggiacenti omeomorfi) se e solo se i vertex scheme sono isomorfi*

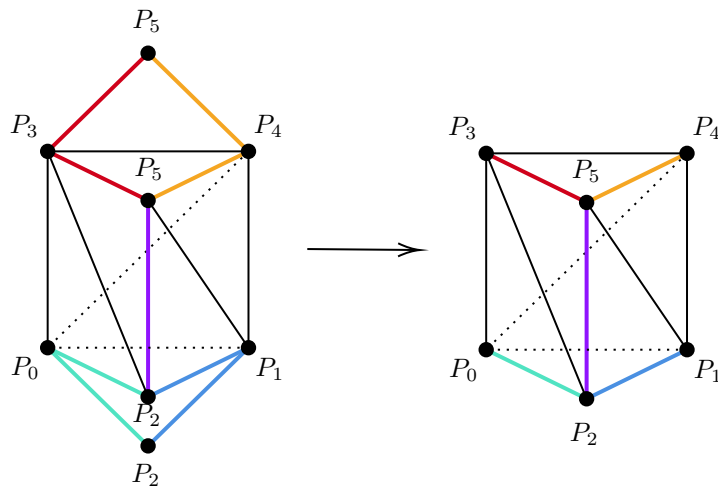
**Esempio** Consideriamo il complesso simpliciale astratto

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \\ \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \text{e tutti i sottoinsiemi} \end{array} \right\}$$

Qual'è il complesso simpliciale geometrico che ha  $S$  come vertex scheme?



Ho disegnato i 2-simplessi in  $\mathbb{R}^2$ , ma con ripetizione di lati. Per realizzare  $S$  devo "incollare" assieme i lati



$S$  è isomorfo al vertex scheme di un complesso simpliciale in  $\mathbb{R}^3$

## Part III

# Omologia simpliciale

## Chapter 10

# Omologia simpliciale

### 10.1 Gruppi di omologia simpliciale

**Definizione 44** (Gruppo delle p-catene). *Sia  $K$  un complesso simpliciale (geometrico o astratto), chiamiamo gruppo delle p-catene di  $K$  il gruppo libero generato dai p-simplessi di  $K$ , ossia l'insieme*

$$C_p(K) := \{c : \{p\text{-simplessi di } K\} \rightarrow \mathbb{Z} \mid c^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \text{ ha cardinalità finita}\}$$

con l'operazione somma

$$+ : C_p(K) \times C_p(K) \rightarrow C_p(K)$$

$$(C + C')(\sigma) = C(\sigma) + C'(\sigma) \quad \forall \sigma \text{ p-simplesso}$$

**N.B.** Per convenzione si ha

$$C_p(K) = \{0\}$$

per  $p > \dim K$  oppure  $p < 0$

#### Osservazioni

- Posso considerare la stessa costruzione anche rispetto ad altri gruppi, ossia

$$C_p(K) := \{c : \{p\text{-simplessi di } K\} \rightarrow G \mid c^{-1}(G \setminus \{0_G\}) \text{ ha cardinalità finita}\}$$

casi interessanti sono  $C_p(K, \mathbb{Z}_n)$

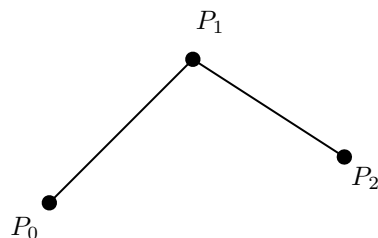
- Una base di  $C_p(K)$  è formato dalle funzioni caratteristiche dei simplessi

$$\forall \sigma \text{ p-simplesso, } C_\sigma(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = \sigma \\ 0 & \tau \neq \sigma \end{cases}$$

D'ora in poi,  $\sigma$  indicherà il semplice o la funzione caratteristica associata  $C_\sigma$

**Domanda** Che significato ha l'elemento opposto nel gruppo delle p-catene? Partiamo dall'elemento opposto degli elementi della base

**p=1**



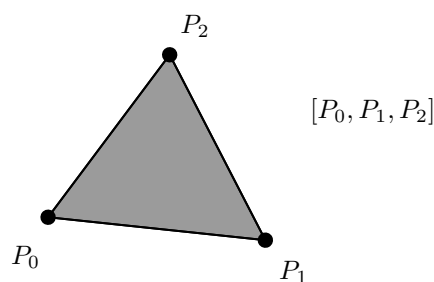
Consideriamo il simpleso  $\sigma = [P_0, P_1]$ , otteniamo

$$\sigma_{[P_0, P_1]}([P_0, P_1]) = 1$$

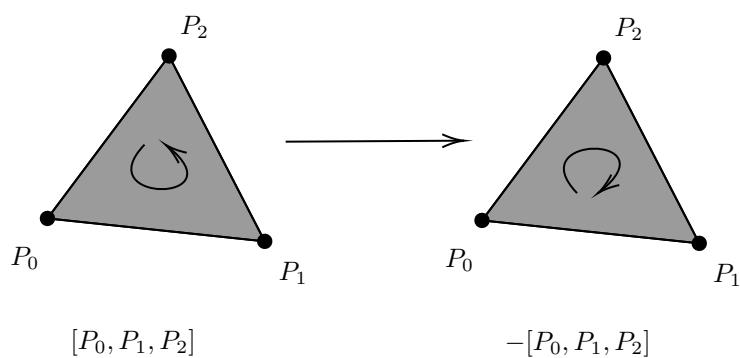
$$\sigma_{[P_1, P_2]}([P_0, P_1]) = 0$$

cosa vuol dire  $-\sigma_{[P_0, P_1]}$ ? Idea intuitiva: cambiamo il verso di percorrenza!

**p=2**



Cosa significa  $-\sigma_{[P_0, P_1, P_2]}$ ? Nel nostro esempio,  $[P_0, P_1, P_2]$  corrisponde all'esplorare i vertici in senso antiorario, quindi  $-[P_0, P_1, P_2]$  potrebbe significare esplorare i vertici in senso orario



Ossia intendiamo

$$-[P_0, P_1, P_2] = [P_0, P_2, P_1]$$

**In generale** In generale è difficile estendere intuitivamente il concetto a  $p$ -simplessi di dimensione superiore (e nemmeno a 0-simplessi)

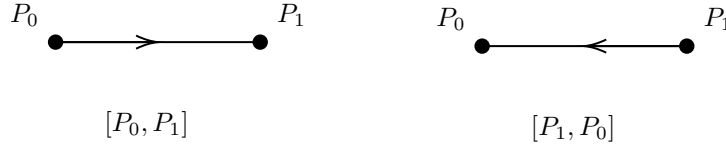
**Definizione 45** (Ordinamenti equivalenti). *Sia  $\sigma$  un  $p$ -simpleso. Diciamo che due ordinamenti dei vertici di  $\sigma$  sono equivalenti se differiscono per un numero pari di scambi (cioè per una permutazione pari).  
Le due classi di equivalenza si dicono ordinamenti di  $\sigma$*

**Definizione 46** (Simpleso orientato). *Un simpleso orientato è un simpleso con una delle sue orientazioni fissata*

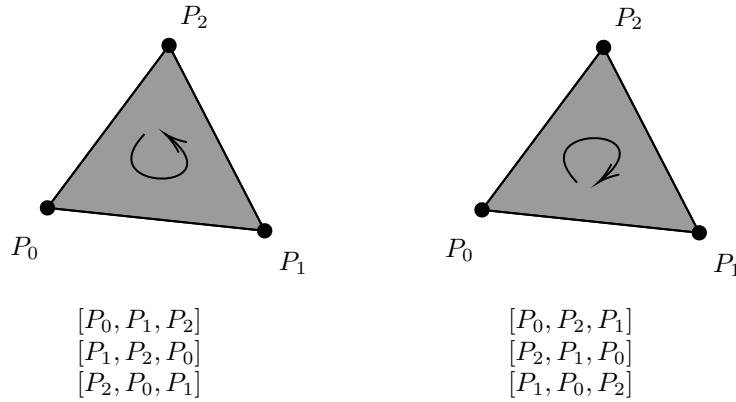
### Esempi

**p=0**  $\{0\}$  ha una sola orientazione

**p=1**  $[P_0, P_1]$ . Ho due orientamenti possibili, che differiscono per uno scambio



**p=2** Possiamo dividere gli ordinamenti in due classi di equivalenza, corrispondenti ad una visita dei vertici in senso orario o antiorario



Possiamo ora migliorare la nostra definizione di gruppo delle  $p$ -catene di un complesso simpliciale

**Definizione 47** (Gruppo delle  $p$ -catene v2). *Sia  $K$  un complesso simpliciale (geometrico o astratto), con una orientazione fissata per ogni simpleso, chiamiamo gruppo delle  $p$ -catene di  $K$  il gruppo libero generato dai  $p$ -simplessi di  $K$ , ossia l'insieme*

$$C_p(K) := \{c : \{p\text{-simplessi di } K\} \rightarrow \mathbb{Z} \mid c^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \text{ ha cardinalità finita}\}$$

con l'operazione somma

$$+ : C_p(K) \times C_p(K) \rightarrow C_p(K)$$

$$(C + C')(\sigma) = C(\sigma) + C'(\sigma) \quad \forall \sigma \text{ } p\text{-simpleso}$$



**Definizione 48** (P-esimo operatore di bordo). Sia  $K$  un complesso simpliciale, definiamo  $p$ -esimo operatore di bordo l'omomorfismo di gruppi

$$\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$$

definito come

$$\sigma = [P_0, P_1, \dots, P_p] \mapsto \sum_{i=0}^p (-1)^i [P_0, \dots, P_{i-1}, \hat{P}_i, P_{i+1}, \dots, P_p]$$

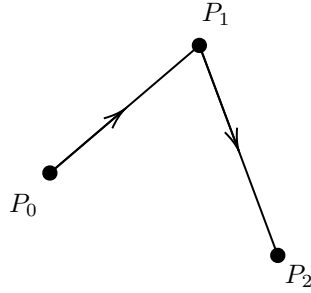
dove con  $\hat{P}_i$  intendiamo che l'elemento  $P_i$  viene rimosso dalla collezione di punti che generano il semplice

**Osservazione**

$$C_p(K) = \{0\} \quad p < 0 \implies \partial_p = 0 \quad p \leq 0$$

**Esempio**

**p=1** Consideriamo il complesso simpliciale



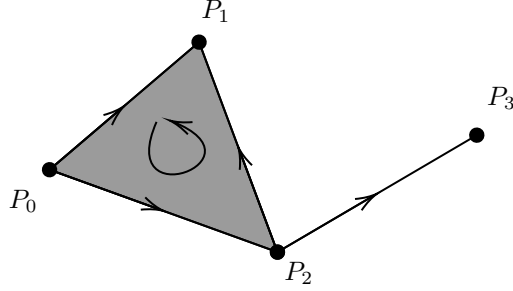
$$\partial_1[P_0, P_1] = (-1)^0[P_1] + (-1)^1[P_0] = [P_1] - [P_0]$$

$$\partial_1[P_1, P_2] = (-1)^0[P_2] + (-1)^1[P_1] = [P_2] - [P_1]$$

$$\partial_1([P_1, P_2] + [P_0, P_1]) = \partial_1[P_0, P_1] + \partial_1[P_1, P_2] = P_1 - P_0 + P_2 - P_1 = P_2 - P_0$$

**Osservazione** Posso rappresentare gli operatori di bordo come matrici.  
Consideriamo il complesso simpliciale  $K$

$$K = \{[P_0, P_1, P_2], [P_0, P_1], [P_1, P_2], [P_0, P_2], [P_1, P_3], [P_0], [P_1], [P_2], [P_3]\}$$



I gruppi delle p-catene risultano essere

$$C_p(K) = \{0\} \quad p < 0 \vee p > 2$$

$$C_0(K) = \langle \{P_0, P_1, P_2, P_3\} \rangle \simeq \mathbb{Z}^4$$

$$C_1(K) = \langle \{[P_0, P_1], [P_1, P_2], [P_0, P_2], [P_1, P_3]\} \rangle \simeq \mathbb{Z}^4$$

$$C_2(K) = \langle [P_0, P_1, P_2] \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

Gli operatori bordo risultano essere

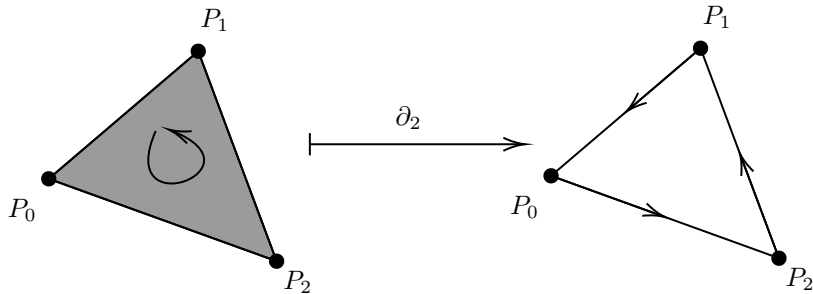
$$\partial_p = 0 \quad p \leq 0 \vee p > 2$$

$$\partial_2 : C_2(K) \rightarrow C_1(K)$$

$$\begin{aligned} \partial_2[P_0, P_1, P_2] &= (-1)^0[P_1, P_2] + (-1)^1[P_0, P_2] + (-1)^2[P_0, P_1] = \\ &= [P_0, P_1] + [P_1, P_2] - [P_0, P_2] \end{aligned}$$

posso rappresentare l'operatore tramite una matrice

$$\mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{Z}) \ni \partial_2 = \begin{bmatrix} [P_0, P_1, P_2] \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P_0, P_1] \\ [P_1, P_2] \\ [P_0, P_2] \\ [P_1, P_3] \end{bmatrix}$$



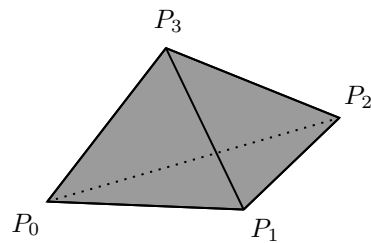
$$\partial_1 : C_1(K) \rightarrow C_0(K)$$

$$\begin{aligned} \partial_1[P_0, P_1] &= P_1 - P_0 & \partial_1[P_1, P_2] &= P_2 - P_1 \\ \partial_1[P_1, P_2] &= P_2 - P_1 & \partial_1[P_1, P_3] &= P_3 - P_1 \end{aligned}$$

oppure, sotto forma di matrice

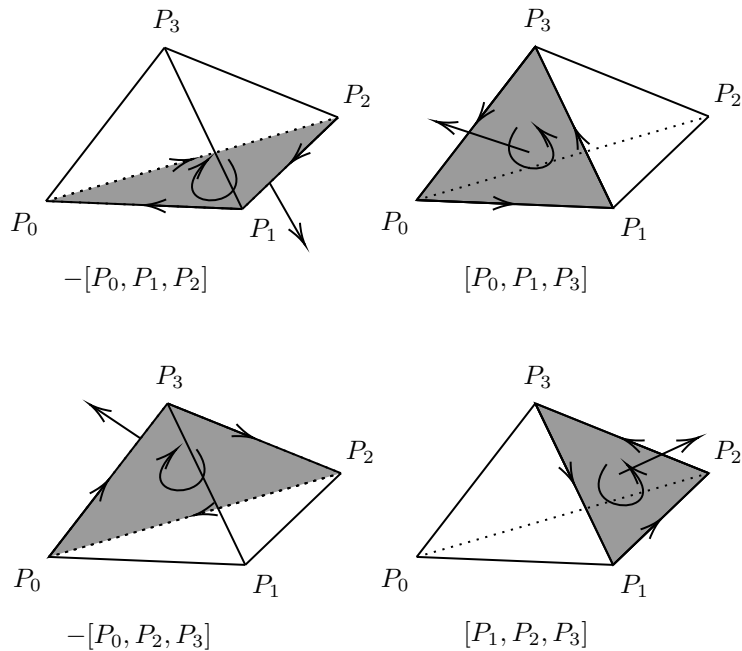
$$\mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{Z}) \ni \partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Esempio di operatore di bordo  $\partial_3$**  Consideriamo il complesso simpliciale generato da  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$



$$\partial_3[P_0, P_1, P_2, P_3] = -[P_0, P_1, P_2] + [P_0, P_1, P_3] - [P_0, P_2, P_3] + [P_1, P_2, P_3]$$

consideriamo i singoli termini



L'operatore di bordo rappresenta un flusso uscente dal solido

**Osservazione** Ogni lato del 3-bordo di  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$  è percorso due volte, in versi opposti

**Teorema 9.** *Sia  $K$  un complessso simpliciale, la composizione di due operatori bordo consecutivi è uguale all'omomorfismo nullo*

$$\partial_{p_1} \circ \partial_p = 0 \quad \forall p$$

*Proof.* Osservo che se  $p > \dim K$  oppure  $p - 1 \leq 0 \implies p \leq 1$ , allora uno dei due omomorfismi  $\partial$  oppure  $\partial_{p-1}$  è l'omomorfismo nullo, la composizione è quindi banalmente l'omomorfismo nullo

Nel caso  $1 < p \leq \dim K$ , studio gli effetti la composizione degli operatori bordo sulla base del gruppo  $C_p(K)$

$$\begin{aligned} \partial_{p-1} (\partial_p [P_0, \dots, P_p]) &= \partial_{p-1} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i [P_0, \dots, P_{i-1}, \hat{P}_i, P_{i+1}, \dots, P_p] \right) = \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1} [P_0, \dots, P_{i-1}, \hat{P}_i, P_{i+1}, \dots, P_p] \end{aligned}$$

possiamo spezzare la somma nei due casi possibili dell'applicazione del secondo operatore bordo (rimuovo un punto prima di  $P_i$ , oppure dopo  $P_i$ )

$$\begin{aligned} &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j [P_0, \dots, \hat{P}_j, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_p] + \\ &+ \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} [P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, \hat{P}_j, \dots, P_p] \end{aligned}$$

(poichè rimuovo un elemento prima di  $P_j$ , l'indice risulta spostato)

Otengo quindi

$$\begin{aligned} &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} [P_0, \dots, \hat{P}_j, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_p] \\ &- \sum_{j > i} (-1)^{i+j} [P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, \hat{P}_j, \dots, P_p] \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Segue quindi un corollario, facilmente rappresentabile con un diagramma

**Corollario 6.** *Sia  $K$  un complesso simpliciale, il seguente diagramma commuta*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \curvearrowright & & & & \curvearrowright & & & & \curvearrowright & & & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_{p+2}} & C_{p+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p(K) & \xrightarrow{\partial_p} & \dots & \xrightarrow{\partial_4} & C_3(K) & \xrightarrow{\partial_3} & C_2(K) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(K) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(K) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \\
 & & & & \curvearrowleft & & & & \curvearrowleft & & & & \curvearrowleft & & & & \\
 & & & & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

*Inoltre*

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0 \implies \text{Im}(\partial_p) \subseteq \text{Ker}(\partial_{p-1})$$

**Domanda** "Misurare" la differenza tra  $\text{Im}(\partial_p)$  e  $\text{Ker}(\partial_{p-1})$  ci dà delle informazioni sulla topologia del complesso?

**Definizione 49** (Gruppo dei p-cicli). *Il nucleo dell'operatore bordo  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  su un complesso simpliciale  $K$  si dice gruppo dei p-cicli di  $K$  e viene denotato con*

$$Z_p(K)$$

**Definizione 50** (Gruppo dei p-bordi). *L'immagine dell'operatore bordo  $\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K)$  su un complesso simpliciale  $K$  si dice gruppo dei p-bordi di  $K$  e viene denotato con*

$$B_p(K)$$

**Osservazione** Per il corollario, abbiamo

$$B_p(K) \subseteq Z_p(K) \subseteq C_p(K)$$

il che spiega la scelta degli indici diversi per i p-cicli e i p-bordi

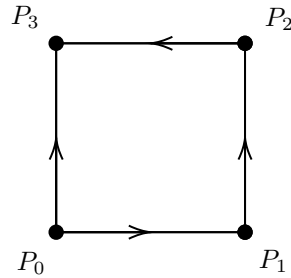
**Definizione 51** (Gruppi di omologia). *Dato un complesso simpliciale  $K$ , chiamiamo p-esimo gruppo di omologia (simpliciale) di  $K$  il gruppo*

$$H_p(K) := Z_p(K) / B_p(K)$$

## 10.2 Esempio completo

Calcolare i gruppi di omologia simpliciale del complesso simpliciale

$$K = \{[P_0, P_1], [P_1, P_2], [P_2, P_3], [P_0, P_3], P_0, P_1, P_2, P_3\}$$



### 10.2.1 Step 1: Calcolo p-catene

- $C_0(K) = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle \simeq \mathbb{Z}^4$
- $C_1(K) = \langle [P_0, P_1], [P_1, P_2], [P_2, P_3], [P_0, P_3] \rangle \simeq \mathbb{Z}^4$
- $C_p(K) = \{0\} \quad \forall p \neq 0, 1$

Avrò quindi 2 gruppi di omologia

### 10.2.2 Step 2: Operatori bordo

- $\partial_p = 0 \quad \forall p \neq 1$
- $\partial_1 : C_1(K) \rightarrow C_0(K)$

$$\partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 10.2.3 Step 3: Determinare p-cicli e p-bordi

**p=0**

$$H_0(K) = Z_0(K) / B_0(K) = \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_1$$

$$\partial_0 : C_0(K) \rightarrow \{0\} \implies \partial_0 = 0 \implies Z_0(K) = C_0(K)$$

Per quanto riguarda  $B_0(K)$ , esso è generato dalle immagini della base di  $C_1(K)$  tramite  $\partial_1$

$$\partial_1[P_0, P_1] = P_1 - P_0$$

$$\partial_1[P_1, P_2] = P_2 - P_1$$

$$\partial_1[P_2, P_3] = P_3 - P_2$$

$$\partial_1[P_0, P_3] = P_3 - P_1$$

Questi generatori sono minimali? Dobbiamo risolvere

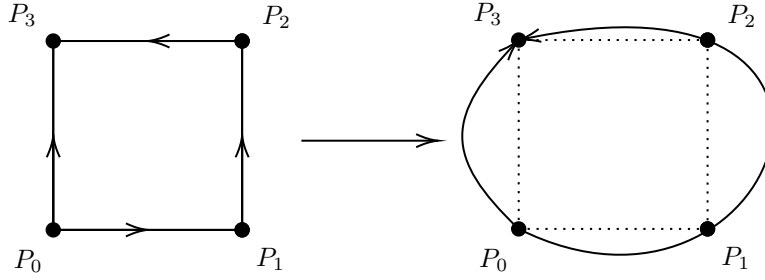
$$m_1(P_1 - P_0) + m_2(P_2 - P_1) + m_3(P_3 - P_2) + m_4(P_0 - P_3) = 0$$

e troviamo che il quarto generatore è rindondante.

Abbiamo quindi

$$B_0(K) = \langle P_1 - P_0, P_2 - P_1, P_3 - P_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}^3$$

**Osservazione** Dal disegno si intuiva che  $[P_0, P_3]$  era ridondante, infatti



$[P_0, P_3]$  non è l'unico modo per passare da  $P_0$  a  $P_3$

Come calcolo il quoziente?

$$C_0(K)/B_0(K) = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle / \langle P_1 - P_0, P_2 - P_1, P_3 - P_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}^4 / \mathbb{Z}^3$$

Ricordo che gli elementi di  $C_0(K)/B_0(K)$  sono le classi di equivalenza della relazione

$$a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 \sim b_0P_0 + b_1P_1 + b_2P_2 + b_3P_3$$

$$\Downarrow$$

$$(a_0 - b_0)P_0 + (a_1 - b_1)P_1 + (a_2 - b_2)P_2 + (a_3 - b_3)P_3 \in B_0(K)$$

per descrivere le classi di equivalenza è utile determinare un rappresentante canonico ("speciale")

$$[a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3] \in H_0(K)$$

$$\Downarrow$$

$$[a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + \underbrace{(P_3 - P_2)(-a_3)}_{\in B_0(K)}] \in H_0(K)$$

$$\Downarrow$$

$$[a_0P_0 + a_1P_1 + (a_2 + a_3)P_2 - \underbrace{(a_2 + a_3)(P_2 - P_1)}_{\in B_0(K)}] \in H_0(K)$$

$$\Downarrow$$

$$[a_0 P_0 + (a_1 + a_2 + a_3) P_1 - \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3)(P_1 - P_0)}_{\in B_0(K)}] \in H_0(K)$$

$\Updownarrow$

$$[(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) P_0] \in H_0(K)$$

ho (non rigorosamente) dimostrato che il quoziente ha un solo generatore, ossia  $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ .

Per una dimostrazione algebrica, utilizzo il teorema fondamentale di isomorfismo. Considero il morfismo

$$f : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 \mapsto a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

la suriettività è banale. Segue inoltre che

$$\text{Im } f = \mathbb{Z} \quad \text{Ker } f = \langle P_3 - P_0, P_2 - P_1, P_3 - P_2 \rangle$$

da cui

$$H_0(K) = C_0(K) / B_0(K) = C_0(K) / \text{Ker } f \simeq \mathbb{Z}$$

**p=1**

$$H_1(K) = Z_1(K) / B_1(K) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2$$

$$\partial_2 : C_2(K) \rightarrow C_1(K)$$

poichè  $C_2(K) = \{0\}$ , è immediato  $\text{Im } \partial_2 = \{0\}$ , da cui

$$H_1(K) = Z_1(K) / \{0\} = Z_1(K)$$

Calcoliamo il gruppo degli 1-cicli

$$Z_1(K) = \text{Ker } \partial_1 =$$

$$= \{c : m_{01}[P_0, P_1] + m_{12}[P_1, P_2] + m_{23}[P_2, P_3] + m_{03}[P_0, P_3] \in C_1(K) \mid \partial_1 c = 0\}$$

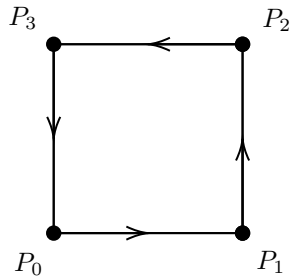
$$\partial_1 c = (-m_{01} - m_{03})P_0 + (m_{01} - m_{12})P_1 + (m_{12} - m_{23})P_2 + (m_{23} + m_{03})P_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{01} \\ m_{12} \\ m_{23} \\ m_{03} \end{bmatrix} = \underline{0} \implies \begin{cases} m_{01} = 1 \\ m_{12} = -1 \\ m_{23} = -1 \\ m_{03} = -1 \end{cases}$$

ho quindi

$$Z_1(K) = \text{Ker } \partial_1 = \langle [P_0, P_1] + [P_1, P_2] + [P_2, P_3] - [P_0, P_3] \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

Cosa rappresenta  $Z_1(K)$ ?



Descrive un ciclo tra  
dei vertici di  $K$



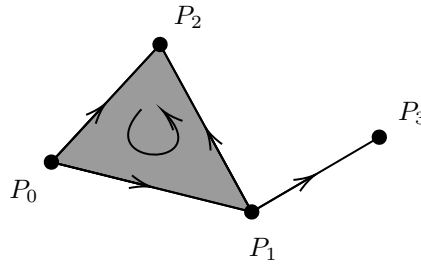
### 10.2.4 Conclusione

Abbiamo quindi

$$H_p(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, 1 \\ \{0\} & p \neq 0, 1 \end{cases}$$

## 10.3 Esempio completo 2

Calcolare i gruppi di omologia simpliciale di



$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = C_0(K)/B_0(K)$$

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2$$

$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) = \text{Ker } \partial_2 / \text{Im } \partial_3 = \text{Ker } \partial_2$$

### 10.3.1 $H_0(K)$

$\text{Im } \partial_2$  è generato dalle immagini degli elementi della base di  $C_2(K)$ , ossia

$$P_1 - P_0 \quad P_2 - P_1 \quad P_2 - P_0 \quad P_3 - P_1$$

E' immediato verificare che

$$1(P_1 - P_0) + 1(P_2 - P_3) - 1(P_2 - P_0) + 0(P_3 - P_1) = 0$$

ossia

$$B_0(K) = \langle P_1 - P_0, P_2 - P_3, P_3 - P_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}^3$$

$$H_0(K) = C_0(K)/B_0(K) \simeq \mathbb{Z}$$

### 10.3.2 $H_2(K)$

$$\partial_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ossia

$$a[P_0, P_1, P_2] \xrightarrow{\partial_2} a([P_0, P_1] + [P_1, P_2] - [P_0, P_2])$$

$$a[P_0, P_1, P_2] \in \text{Ker } \partial_2 \iff a = 0 \implies \text{Ker } \partial_2 = \{0\}$$

da cui

$$H_2(K) = \{0\}$$

### 10.3.3 $H_1(K)$

$$H_1(K) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2$$

è facile verificare che

$$\text{Ker } \partial_1 = \langle [P_0, P_1] + [P_1, P_2] - [P_0, P_2] \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

Inoltre,  $\text{Im } \partial_2$  è generato dall'immagine della base di  $C_2(K)$

$$\partial_2[P_0, P_1, P_2] = [P_0, P_1] + [P_1, P_2] - [P_0, P_2]$$

$$\text{Im } \partial_2 = \langle [P_0, P_1] + [P_1, P_2] - [P_0, P_2] \rangle \simeq \mathbb{Z} \simeq \text{Ker } \partial_1$$

da cui

$$H_1(K) = \{0\}$$

### 10.3.4 Conclusione

Abbiamo quindi

$$H_p(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ \{0\} & p \neq 0 \end{cases}$$

### 10.3.5 Interpretazione topologica

**Osservazione** Il gruppo di omologia  $H_0(K)$  ha una interpretazione molto utile, riassumibile nel seguente teorema

**Teorema 10.** *Sia  $K$  un complesso simpliciale, allora*

1. *Il gruppo  $H_0(K)$  è un gruppo libero*
2. *Sia  $\{P_\alpha\}$  una collezione di vertici di  $K$  ( $\subseteq K^{(0)}$ ) tali che ne ho uno per ogni componente connessa di  $|K|$ . Allora le classi di omologia delle funzioni caratteristiche dei punti selezionati formano una base dello 0-esimo gruppo di omologia*

**In poche parole** Il rango di  $H_0(K)$  ci dice il numero di componenti connesse di  $|K|$

*Proof.* 2. Definisco la seguente relazione di equivalenza tra i vertici di  $K$ :  
 $P \sim Q$  se e solo se esiste una sequenza di vertici  $P_0, P_1, \dots, P_n$  tali che  $P_0 = P$ ,  $P_n = Q$  e  $\{P_{i-1}, P_i\}$  sia un 1-simplexso di  $K$  per ogni  $i$  (scriviamo  $\{P_{i-1}, P_i\}$  invece di  $[P_{i-1}, P_i]$  per indicare l'1-simplexso privo di orientazione)  
 Per ogni vertice  $P \in K^{(0)}$ , definisco

$$C_P = \bigcup_{Q \sim P} \text{St}(Q) \subseteq |K|$$

Voglio far vedere che gli insiemi  $C_P$  (al variare della classe di equivalenza) descrivono le componenti connesse di  $|K|$

**Osservazioni**

- (a)  $C_P$  è un sottoinsieme aperto di  $|K|$ , poichè unione di aperti
- (b)  $P \sim Q \implies C_P = C_Q$
- (c)  $C_P$  è un insieme connesso (per archi), infatti, se prendo  $P \sim Q$  e  $x \in St(Q)$ , per definizione della relazione di equivalenza, esiste una successione

$$P = P_0, P_1, \dots, P_n = Q \quad P_{i-1}, P_i \in K \text{ 1-simplessi}$$

La spezzata di vertici  $P_0, P_1, \dots, P_n, x$  appartiene a  $C_P$ , infatti

$$P_i \sim P \implies St(P_i) \subset C_P$$

in particolare

$$\{P_i, P_{i+1}\} \subseteq \overline{St(P_i)} \subseteq C_P$$

Inoltre

$$\{P_n, x\} \subseteq \overline{St(P_n)} \subseteq C_P$$

Mettendo tutto insieme ho mostrato che un qualsiasi punto  $x \in St(Q)$  con  $Q \sim P$  è collegato a  $P$  tramite una spezzata contenuta in  $C_P$

- (d) Voglio far vedere che  $P \approx Q$  implica che  $C_P \cap C_Q = \emptyset$   
Supponiamo che ci sia un  $x \in C_P \cap C_Q$

$$x \in C_P \cap C_Q \implies \begin{cases} x \in C_P \implies x \in St(P') \text{ con } P' \sim P \\ x \in C_Q \implies x \in St(Q') \text{ con } Q' \sim Q \end{cases}$$

$x$  deve quindi appartenere ad un simpleso  $\sigma$  che ha  $P'$  e  $Q'$  tra i suoi vertici, ossia  $\{P', Q'\}$  è una faccia del simpleso  $\sigma$ . Quindi  $P' \sim Q'$ , ma allora

$$P \sim P' \sim Q' \sim Q \implies P \sim Q \implies C_P = C_Q$$

Quindi  $\{C_P\}$  sono insiemi aperti, connessi, e a due a due disgiunti, ossia  $\{C_P\}$  sono le componenti connesse di  $|K|$

1. Sia  $\{P_\alpha\}$  una collezione di vertici, presi uno per ogni componente connessa di  $|K|$ . Inizio mostrando che le classi di omologia di  $\{P_\alpha\}$  formano un insieme di generatori di  $H_0(K)$ .

Per ogni  $Q \in K^{(0)}$ , esiste un unico  $P_\alpha$  tale che  $Q \sim P_\alpha$ , cioè  $Q \in C_{P_\alpha}$ , quindi esiste una successione di vertici di  $K$  tali che

$$P_\alpha = P_0, P_1, \dots, P_n = Q \quad \{P_{i+1}, P_i\} \in K$$

Considero la 1-catena che descrive il cammino da  $P_\alpha$  a  $Q$

$$\sigma = [P_\alpha, P_1] + [P_1, P_2] + \dots + [P_{n-1}, Q]$$

$$\partial_1 \sigma = Q - P_\alpha$$

da cui segue

$$H_0(K) = Z_0(K) / B_0(K) = C_0(K) / \text{Im } \partial_1$$

$$Q - P_\alpha \in B_0(K) \implies [Q - P_\alpha] = 0 \text{ in } H_0(K)$$

quindi

$$[Q] = [P_\alpha] \implies \{[P_\alpha]\} \text{ generatore di } H_0(K)$$

Rimane da far vedere che non ci sono relazioni tra le classi  $\{[P_\alpha]\}$

Sia

$$c = \sum n_\alpha P_\alpha \in C_0(K)$$

e supponiamo che  $c = \partial_1 \sigma$  per qualche  $\sigma \in C_1(K)$ , ossia

$$c \in \text{Im } \partial_1 \implies c \in B_0(K) \implies [c] = 0_{H_0(K)}$$

Ogni 1-simplessso può appartenere a una sola componente connessa, quindi decompongo  $\sigma$  secondo le componenti connesse di  $|K|$

$$\sigma = \sum \sigma_\alpha$$

dove  $\sigma_\alpha$  coinvolge 1-simplessi nella componente connessa corrispondente  $C_{P_\alpha}$

$$\partial_1 \sigma = \sum \partial_1 \sigma_\alpha$$

ossia  $\partial_1 \sigma_\alpha$  è una 0-catena che coinvolge 0-simplessi (vertici) appartenenti a  $C_{P_\alpha}$

$$c = \partial_1 \sigma \iff \partial_1 \sigma_\alpha = n_\alpha P_\alpha \quad \forall \alpha$$

ossia

$$c \in B_0(K)$$

quindi l'unica possibilità è  $n_\alpha = 0$

"L'unico modo che ho per costruire un bordo a partire dai vertici  $\{P_\alpha\}$  delle componenti connesse di  $|K|$  è considerare la 0-catena con tutti i coefficienti nulli"

■

## 10.4 Gruppo di omologia ridotta

**Definizione 52** (Augmentation map). *Sia  $K$  un complesso simpliciale, definisco l'omomorfismo*

$$\varepsilon : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$$

*come l'omomorfismo*

$$P \mapsto 1 \quad \forall P \in C_0(K)$$

*e lo chiamerò augmentation map di  $C_0(K)$ , e per ogni*

$$\sum n_j P_j \in C_0(K)$$

*abbiamo*

$$\varepsilon \left( \sum n_j P_j \right) = \sum n_j \varepsilon(P_j) = \sum n_j$$

Lo scopo dell'augmentation map è quella di allungare la successione di gruppi e omomorfismi di omologia simpliciale, infatti da

$$\dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

passiamo a

$$\dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$$

**Proposizione 13.**

$$\forall \sigma \in C_1(K) \quad \varepsilon(\partial_1 \sigma) = 0$$

*Proof.* Verifico che  $\varepsilon(\partial_1 \sigma) = 0$  per  $\sigma$  elemento della base di  $C_1(K)$

$$\sigma = [P, Q]$$

$$\partial_1[P, Q] = Q - P$$

$$\varepsilon(\partial_1 \sigma) = \varepsilon(Q - P) = \varepsilon(Q) - \varepsilon(P) = 1 - 1 = 0$$

■

**Osservazione** Otteniamo quindi che

$$\varepsilon \circ \partial_1 = 0 \implies \text{Im } \partial_1 \subseteq \text{Ker } \varepsilon$$

Possiamo quindi definire un nuovo gruppo

**Definizione 53** (Gruppo di omologia simpliciale ridotta). *Dato un complesso simpliciale  $K$ , definiamo gruppo di omologia ridotta di  $K$  di dimensione 0 il gruppo quoziente*

$$\tilde{H}_0(K) := \text{Ker } \varepsilon / \text{Im } \partial_1$$

**Osservazione** Dalla definizione, risulta che

$$\forall p > 0 \quad \tilde{H}_p(K) = H_p(K)$$

## Chapter 11

# Metodo di calcolo dei gruppi di omologia simpliciale

Siamo ora interessati a trovare un metodo algebrico efficace per il calcolo dei gruppi di omologia simpliciale

**Teorema 11** (Forma normale di Smith). *Sia  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$  un omomorfismo di gruppi liberi. Esistono due basi  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{Z}^n$  e  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{Z}^m$  tali che la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  è della forma*

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & \\ \hline & & & 0 & 0 \end{array} \right]$$

dove

$$a_{11} | a_{22} | \dots | a_{nn} \quad a_{ii} \in \mathbb{Z}_{>0}$$

**Calcolo della forma di Smith** Per il calcolo della forma di Smith, si procede in modo simile al metodo di eliminazione di Gauss.

Le operazioni consentite sono:

- Scambi di righe o colonne

$$C_i \longleftrightarrow C_j \quad R_i \longleftrightarrow R_j$$

- Cambio di segno di righe o colonne

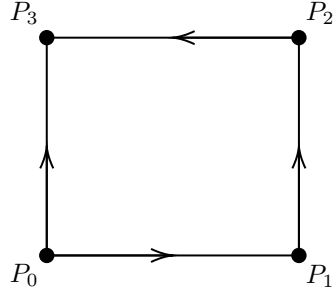
$$-C_i \longrightarrow C_i \quad -R_i \longrightarrow R_i$$

- Somma di una riga o una colonna con il multiplo di un'altra

$$C_i + qC_j \longrightarrow C_i \quad R_i + qR_j \longrightarrow R_i$$

con  $q \in \mathbb{Z}$

## 11.1 Esempio



$$\partial_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [P_0, P_1] & [P_1, P_2] & [P_2, P_3] & [P_0, P_3] \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \end{array}$$

$$R_1 \longleftrightarrow R_2$$

$$\partial_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [P_0, P_1] & [P_1, P_2] & [P_2, P_3] & [P_0, P_3] \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} P_1 \\ P_0 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \end{array}$$

$$R_2 + R_1 \longrightarrow R_2$$

$$\partial_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [P_0, P_1] & [P_1, P_2] & [P_2, P_3] & [P_0, P_3] \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} P_1 \\ P_0 + P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \end{array}$$

$$R_2 \longleftrightarrow R_3$$

$$\partial_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [P_0, P_1] & [P_1, P_2] & [P_2, P_3] & [P_0, P_3] \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_0 + P_1 \\ P_3 \end{array} \end{array}$$

$$R_3 + R_2 \longrightarrow R_3$$

$$\partial_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [P_0, P_1] & [P_1, P_2] & [P_2, P_3] & [P_0, P_3] \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_0 + P_1 + P_2 \\ P_3 \end{array} \end{array}$$

$$R_3 \longleftrightarrow R_4$$

$$\partial_1 = \begin{array}{cccc} [P_0, P_1] & [P_1, P_2] & [P_2, P_3] & [P_0, P_3] \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_0 + P_1 + P_2 \end{array} \end{array}$$

$$R_4 + R_3 \longrightarrow R_4$$

$$\partial_1 = \begin{array}{cccc} [P_0, P_1] & [P_1, P_2] & [P_2, P_3] & [P_0, P_3] \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \end{array} \end{array}$$

$$C_2 + C_1 \longrightarrow C_2$$

$$\partial_1 = \begin{array}{cccc} [P_0, P_1] & [P_1, P_2] & [P_2, P_3] & [P_0, P_3] \\ & +[P_0, P_1] & & \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \end{array} \end{array}$$

$$C_3 + C_2 \longrightarrow C_3$$

$$\partial_1 = \begin{array}{cccc} [P_0, P_1] & [P_0, P_1] & [P_0, P_1] & [P_0, P_3] \\ & +[P_1, P_2] & +[P_1, P_2] & \\ & & +[P_2, P_3] & \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \end{array} \end{array}$$

$$C_4 - C_3 \longrightarrow C_4$$

$$\partial_1 = \begin{array}{cccc} [P_0, P_1] & [P_0, P_1] & [P_0, P_1] & [P_0, P_3] \\ & +[P_1, P_2] & +[P_1, P_2] & -[P_0, P_1] \\ & & +[P_2, P_3] & -[P_1, P_2] \\ & & & -[P_2, P_3] \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \end{array} \end{array}$$

$$\partial_1 : C_1(K) \rightarrow C_0(K)$$



ossia, dalla matrice

$$\langle [P_0, P_1], \dots, [P_0, P_3] - [P_0, P_1] - [P_1, P_2] - [P_2, P_3] \rangle \rightarrow \langle P_1, P_2, P_3, P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \rangle$$

$$H_1(K) = Z_1(K) = \text{Ker } \partial_1 = \langle [P_0, P_3] - [P_0, P_1] - [P_1, P_2] - [P_2, P_3] \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

(guardo le colonne con entrate tutte nulle)

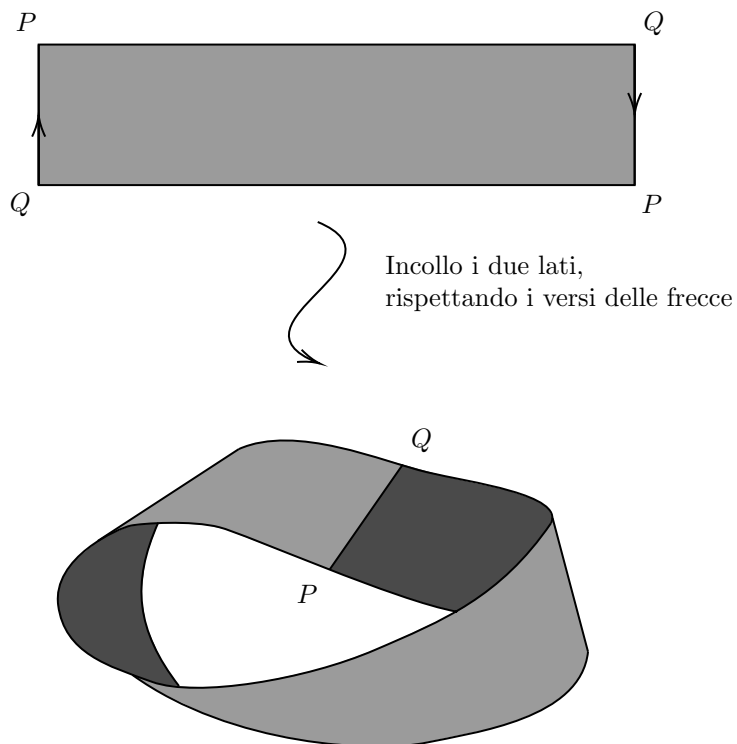
$$\begin{aligned} H_0(K) = C_0(K) /_{\text{Im } \partial_1} &= \langle \cancel{P_1}, \cancel{P_2}, \cancel{P_3}, P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \rangle /_{\langle \cancel{P_1}, \cancel{P_2}, \cancel{P_3} \rangle} \simeq \\ &\simeq \langle P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \rangle \end{aligned}$$

notiamo come  $P_1 + P_2 + P_3$  è l'elemento che genera il gruppo per cui quozientiamo, da cui segue

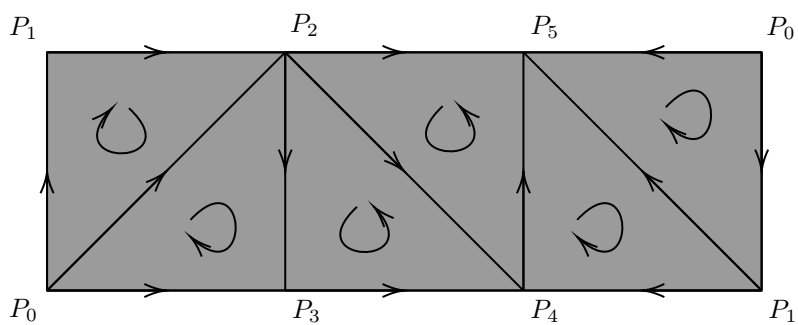
$$[P_0 + P_1 + P_2 + P_3]_{\langle P_1, P_2, P_3 \rangle} = [P_0]_{\langle P_1, P_2, P_3 \rangle} \implies \langle P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \rangle \simeq \langle P_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

## 11.2 Esempio particolare - Nastro di Möbius

Prendo una striscia di carta ed eseguo la seguente costruzione



Ripeto lo stesso processo ma a partire da un complesso simpliciale orientato



**Catene**

$$C_2(M) = \langle [P_0, P_1, P_2], [P_0, P_1, P_5], [P_0, P_2, P_3], \\ x [P_1, P_4, P_5], [P_2, P_3, P_4], [P_2, P_4, P_5] \rangle \simeq \mathbb{Z}^6$$

$$C_1(M) = \langle [P_0, P_1], [P_0, P_2], [P_0, P_3], [P_0, P_5], [P_1, P_2], [P_1, P_4], \\ [P_1, P_5], [P_2, P_3], [P_2, P_4], [P_2, P_5], [P_3, P_4], [P_4, P_5] \rangle \simeq \mathbb{Z}^{12}$$

$$C_0(M) = \langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle \simeq \mathbb{Z}^6$$

**Operatori bordo**

$$\partial_2 : C_2(M) \rightarrow C_1(M)$$

$$\partial_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} [P_0, P_1, P_2] & [P_0, P_1, P_5] & [P_0, P_2, P_3] & [P_1, P_4, P_5] & [P_2, P_3, P_4] & [P_2, P_4, P_5] \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} [P_0, P_1] \\ [P_0, P_2] \\ [P_0, P_3] \\ [P_0, P_5] \\ [P_1, P_2] \\ [P_1, P_4] \\ [P_1, P_5] \\ [P_2, P_3] \\ [P_2, P_4] \\ [P_2, P_5] \\ [P_3, P_4] \\ [P_4, P_5] \end{array} \end{array}$$

$$\partial_1 : C_1(M) \rightarrow C_0(M)$$

$$\partial_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} [P_0, P_0] & [P_0, P_0] & [P_0, P_0] & [P_0, P_0] & [P_0, P_0] & [P_0, P_0] & [P_0, P_0] & [P_0, P_0] & [P_0, P_0] & [P_0, P_0] & [P_0, P_0] & [P_0, P_0] \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccccccccccc} -1 & -1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} P_0 \\ P_0 \\ P_0 \\ P_0 \\ P_0 \\ P_0 \\ P_0 \\ P_0 \\ P_0 \\ P_0 \\ P_0 \\ P_0 \end{array} \end{array}$$

### Calcolo i gruppi di omologia

$$H_0(M) = Z_0(M)/B_0(M) = C_0(M)/B_0(M) = C_0(M)/\text{Im } \partial_1 (\simeq \mathbb{Z} \text{ per connessione di } |M|)$$

$$H_1(M) = Z_1(M)/B_1(M) = \text{Ker } \partial_1/\text{Im } \partial_2$$

$$H_2(M) = Z_2(M)/B_2(M) = Z_2(M)/\{0\} = \text{Ker } \partial_2$$

$\partial_2$ ) Riducendo la matrice di  $\partial_2$  in forma di Smith ottengo:

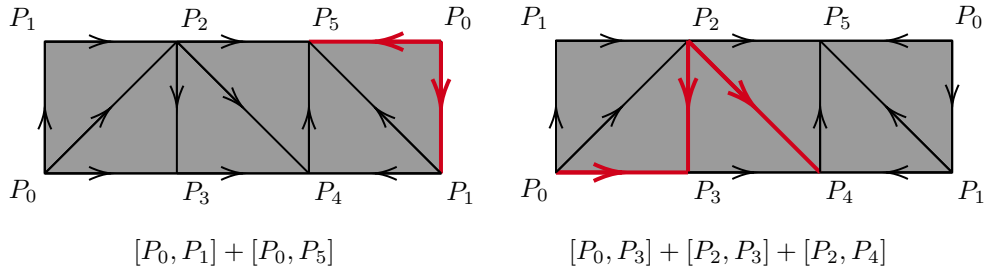
$$\partial_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} [P_0, P_1, P_2] & [P_0, P_1, P_5] & [P_0, P_2, P_3] & [P_1, P_4, P_5] & [P_2, P_3, P_4] & [P_2, P_4, P_5] \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \begin{array}{l} [P_0, P_1] + [P_0, P_5] \\ -[P_0, P_5] \\ -[P_0, P_3] \\ [P_0, P_2] + [P_0, P_1] + [P_0, P_5] + [P_0, P_3] \\ [P_1, P_2] - [P_0, P_1] - [P_0, P_5] \\ [P_1, P_4] \\ [P_1, P_5] + [P_0, P_5] + [P_1, P_4] \\ [P_2, P_3] + [P_0, P_3] \\ [P_2, P_4] + [P_2, P_3] + [P_0, P_3] \\ [P_2, P_5] + [P_2, P_4] + [P_2, P_3] + [P_0, P_3] \\ [P_3, P_4] - [P_2, P_3] - [P_0, P_3] \\ [P_4, P_5] - [P_1, P_4] - [P_2, P_4] - [P_2, P_3] - [P_0, P_3] \end{array} \end{array}$$

Ottengo quindi

$$H_2(M) = \text{Ker } \partial_2 = \{0\}$$

$$\text{Im } \partial_2 = \langle [P_0, P_1] + [P_0, P_5], -[P_0, P_5], -[P_0, P_3], [P_1, P_4], \\ [P_2, P_3] + [P_0, P_3], [P_2, P_4] + [P_2, P_3] + [P_0, P_3] \rangle$$

**Attenzione**  $\text{Im } \partial_2 = B_1(M)$ , ma la forma normale di Smith nasconde la natura geometrica del bordo



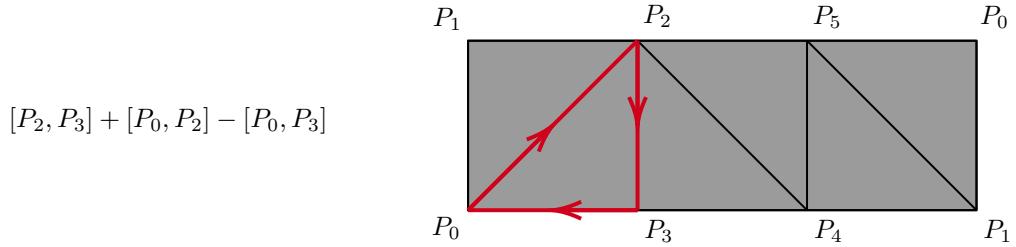
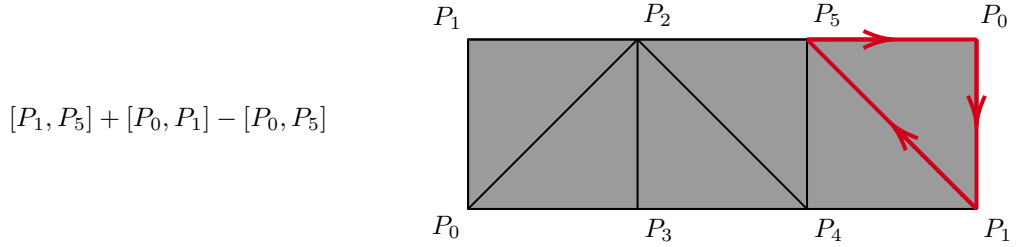
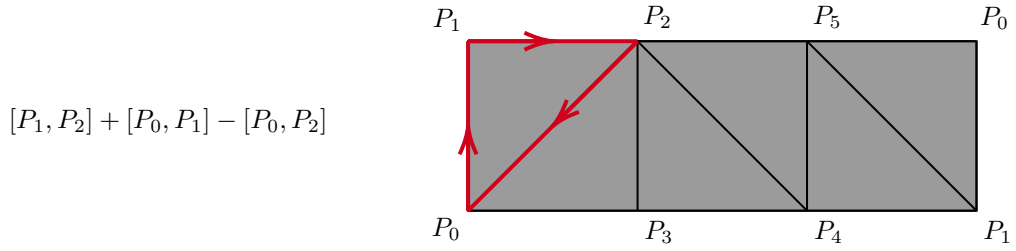
Non è facile trovare il giusto equilibrio tra efficienza algebrica e interpretazione geometrica

$\partial_1$ ) Riducendo la matrice di  $\partial_1$  in forma di Smith (senza cancellare le colonne che non contengono pivot) ottengo:

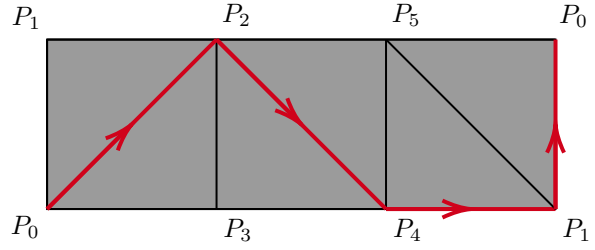
$$\partial_1 = \begin{bmatrix} [P_0, P_1] & [P_0, P_2] & [P_0, P_3] & [P_0, P_5] & [P_1, P_2] & [P_1, P_4] & [P_1, P_5] & [P_2, P_3] & [P_2, P_4] & [P_2, P_5] & [P_3, P_4] & [P_4, P_5] \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ottengo quindi

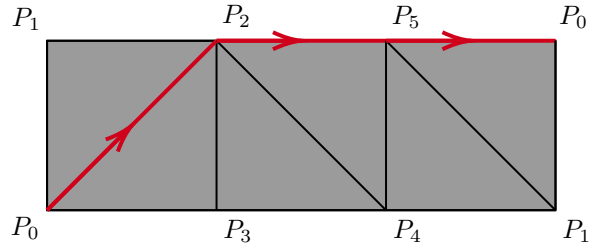
$$\begin{aligned} \text{Ker } \partial_1 = \langle & [P_1, P_2] + [P_0, P_1] - [P_0, P_2], [P_1, P_5] + [P_0, P_1] - [P_0, P_5], \\ & [P_2, P_3] + [P_0, P_2] - [P_0, P_3], [P_2, P_4] - [P_0, P_1] + [P_0, P_2] - [P_1, P_4], \\ & [P_2, P_5] + [P_0, P_2] - [P_0, P_5], [P_3, P_4] - [P_0, P_1] + [P_0, P_3] - [P_1, P_4], \\ & [P_4, P_5] + [P_0, P_1] - [P_0, P_5] + [P_1, P_4] \rangle \simeq \mathbb{Z}^7 \end{aligned}$$



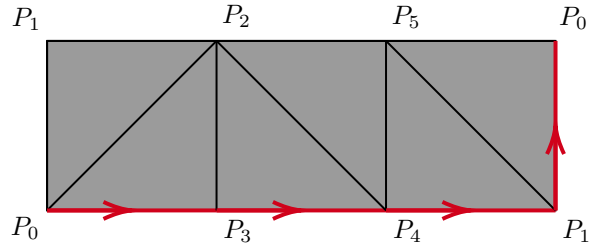
$$[P_2, P_4] - [P_0, P_1] + [P_0, P_2] - [P_1, P_4]$$



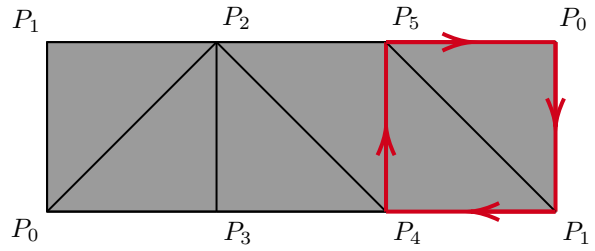
$$[P_2, P_5] + [P_0, P_2] - [P_0, P_5]$$



$$[P_3, P_4] - [P_0, P_1] + [P_0, P_3] - [P_1, P_4]$$



$$[P_4, P_5] + [P_0, P_1] - [P_0, P_5] + [P_1, P_4]$$



Riepilogo:

$$H_2(M) = \text{Ker } \partial_2 = \{0\}$$

$$H_1(M) = \langle P_0 \rangle \simeq \mathbb{Z} \quad (\text{prevedibile, dato che } |M| \text{ è connesso})$$

$$H_0(M) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = Z_1(M) / B_1(M) \simeq \mathbb{Z}^7 / \mathbb{Z}^6$$

**Osservazione** Ho 6 bordi provenienti dai 2-simplessi di  $M$ , tuttavia

$$Z_1(M) \simeq \mathbb{Z}^7$$

ho quindi un 1-ciclo che non proviene da una 2-catena mediante  $\partial_2$

I tre cammini chiusi da  $P_0$  a  $P_0$

$$[P_2, P_4] - [P_0, P_1] + [P_0, P_2] - [P_1, P_4]$$

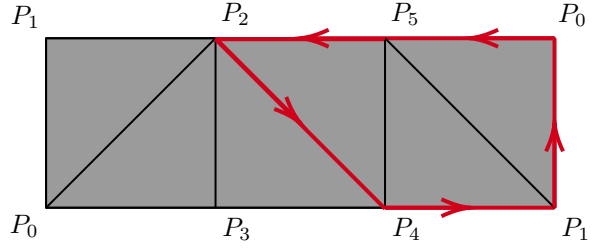
$$[P_2, P_5] + [P_0, P_2] - [P_0, P_5]$$

$$[P_3, P_4] - [P_0, P_1] + [P_0, P_3] - [P_1, P_4]$$

differiscono per un elemento nel sottogruppo degli 1-bordi, non sono quindi indipendenti nel gruppo  $H_1(M)$

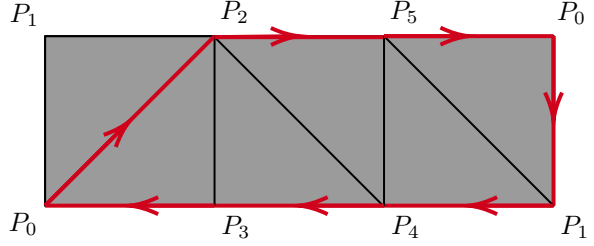
$$\begin{aligned} & ([P_2, P_4] - [P_0, P_1] + [P_0, P_2] - [P_1, P_4]) - ([P_2, P_5] + [P_0, P_2] - [P_0, P_5]) = \\ & = -[P_0, P_1] + [P_0, P_5] - [P_1, P_4] + [P_2, P_4] - [P_2, P_5] \in B_1(M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -[P_0, P_1] + [P_0, P_5] - [P_1, P_4] \\ & + [P_2, P_4] - [P_2, P_5] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & ([P_2, P_5] + [P_0, P_2] - [P_0, P_5]) - ([P_3, P_4] - [P_0, P_1] + [P_0, P_3] - [P_1, P_4]) = \\ & [P_2, P_5] + [P_0, P_2] - [P_0, P_5] - [P_3, P_4] + [P_0, P_1] - [P_0, P_3] + [P_1, P_4] \in B_1(M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [P_2, P_5] + [P_0, P_2] - [P_0, P_5] \\ & - [P_3, P_4] + [P_0, P_1] - [P_0, P_3] \\ & + [P_1, P_4] \end{aligned}$$



$$H_1(M) = \langle [P_2, P_5] + [P_0, P_2] - [P_0, P_5] \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

## Chapter 12

# Piano proiettivo

### 12.1 Piano proiettivo

Prima di definire il piano proiettivo, partiamo dall'analogo di dimensione 1: la retta proiettiva

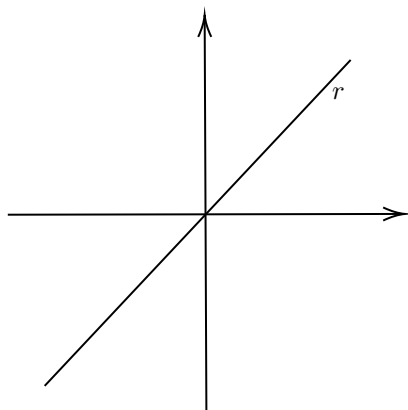
**Definizione 54** (Retta proiettiva). *Abbiamo due definizioni equivalenti per la retta proiettiva:*

- La retta proiettiva reale è l'insieme delle rette passanti per l'origine di  $\mathbb{R}^2$
- La retta proiettiva reale è l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 di  $\mathbb{R}^2$

Dal punto di vista della notazione, indicheremo la retta proiettiva come

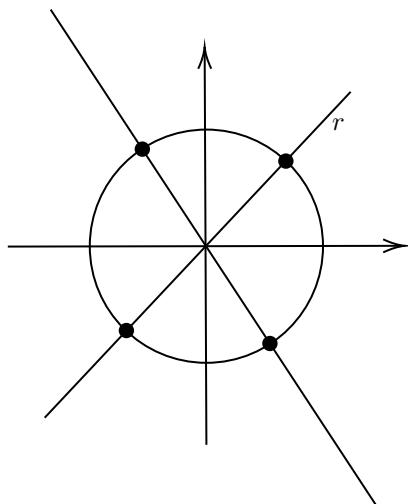
$$\mathbb{RP}^1 \quad \text{oppure} \quad \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$$

**Obiettivo** Vogliamo rappresentare efficacemente questo insieme (possibilmente introducendo una topologia)

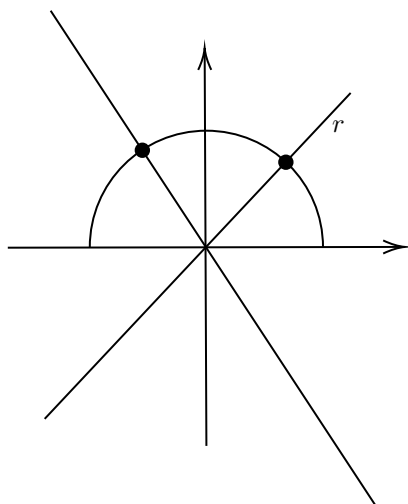


1. Per ogni retta, scelgo un vettore che definisce la direzione
2. Per semplicità, scelgo un versore per ogni retta

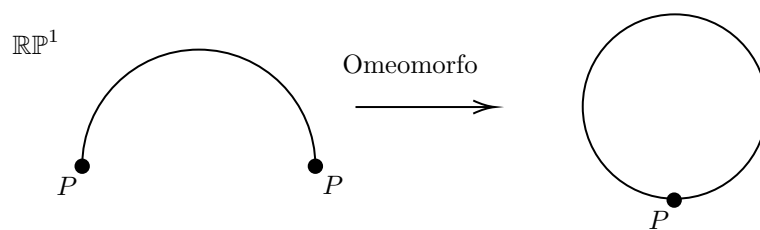




3. Per ogni retta non orizzontale, scelgo il versore che giace nel semipiano superiore  $y > 0$



Ho il problema della retta orizzontale, tuttavia, i due punti possono essere "in-collati"



Dal punto di vista topologico

$$\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$$

Possiamo fare un ragionamento analogo con il piano proiettivo

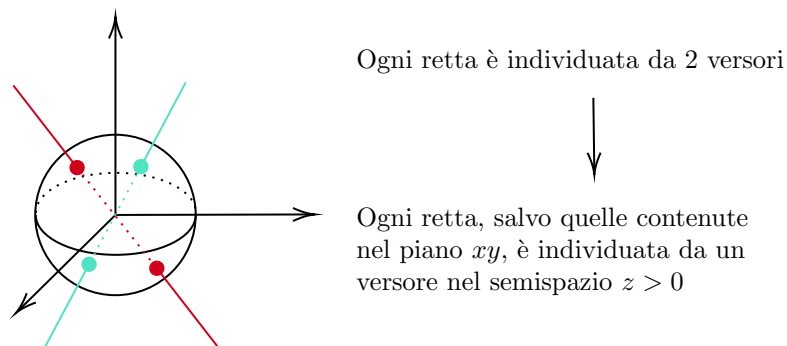
**Definizione 55** (Piano proiettivo). Abbiamo due definizioni equivalenti per il piano proiettivo:

- Il piano proiettivo reale è l'insieme delle rette passanti per l'origine di  $\mathbb{R}^3$
- Il piano proiettivo reale è l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 di  $\mathbb{R}^3$

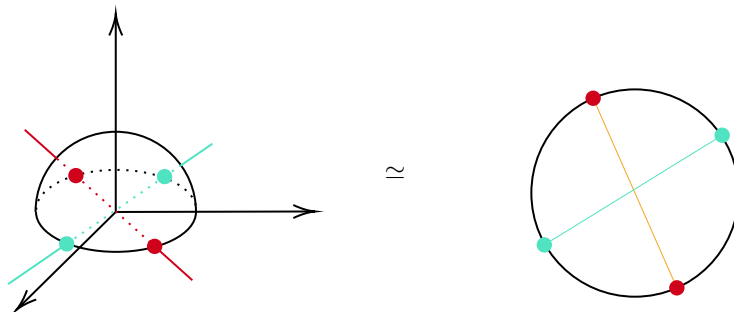
Dal punto di vista della notazione, indicheremo il piano proiettivo come

$$\mathbb{RP}^2 \quad \text{oppure} \quad \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

**Obiettivo** Rappresentare  $\mathbb{RP}^2$  come spazio topologico. Facciamo una costruzione analoga a quella per la retta proiettiva



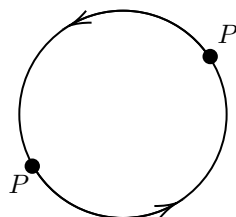
Considero ora una retta che giace nel piano  $xy$ , è facile da intire l'omomorfismo descritto da



Indicando con  $D$  il disco, e con  $\sim$  la relazione di equivalenza che lega due punti se antipodali, risulta semplice descrivere il piano proiettivo come

$$\mathbb{RP}^2 \simeq D/\sim$$

Sui libri di testo, questa costruzione viene rappresentata indicando i versi di percorrenza sul disco

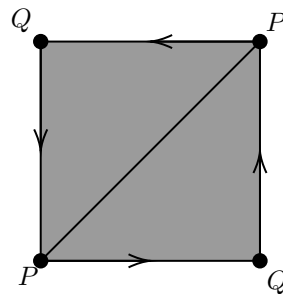


**Domanda** In quale spazio vive  $\mathbb{RP}^2$ ? Si può dimostrare che non si riesce a costruire un oggetto in  $\mathbb{R}^3$

Posso cercare di indagare le proprietà topologiche di  $\mathbb{RP}^2$  mediante l'omologia simpliciale.

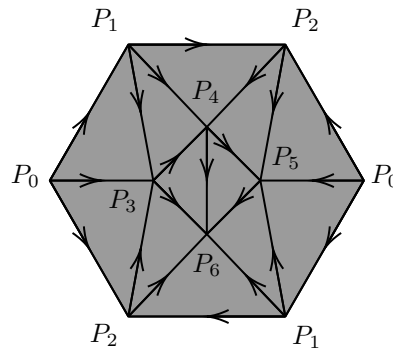
Devo quindi "approssimare" il disco con un complesso simpliciale, e imporre le stesse condizioni di orientamento e incollatura.

### 12.1.1 Prima idea



Funziona? Pensiamo al vertex scheme:  $P$  e  $Q$  sono ripetuti, quindi non esiste un complesso simpliciale astratto associato (i tre vertici del 2-simplesso devono essere in una posizione generale)

### 12.1.2 Seconda idea



Ho costruito un complesso simpliciale in  $\mathbb{R}^2$  omeomorfo al disco, tale che nessuna coppia di 2-simplessi è identificata dalla stessa relazione antipodale (la scelta dei versi di percorrenza è arbitraria, l'importante è rispettare le relazioni antipodali)

### Catene

$$C_2(K_{\mathbb{RP}^2}) \simeq \mathbb{Z}^{12}$$

$$C_1(K_{\mathbb{RP}^2}) \simeq \mathbb{Z}^{18}$$

$$C_0(K_{\mathbb{RP}^2}) \simeq \mathbb{Z}^7$$

$$\{0\} \longrightarrow C_2(K_{\mathbb{RP}^2}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K_{\mathbb{RP}^2}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K_{\mathbb{RP}^2}) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

## Operatori bordo

[illegible]

$$\partial_1 = \begin{bmatrix} [P_0, P_1] & [P_0, P_2] & [P_0, P_3] & [P_0, P_4] & [P_1, P_2] & [P_1, P_3] & [P_1, P_4] & [P_2, P_3] & [P_2, P_4] & [P_3, P_4] \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & . \\ . & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix}$$

## Calcolo i gruppi di omologia

$$H_0(K_{\mathbb{RP}^2}) = C_0(K_{\mathbb{RP}^2})/B_0(K_{\mathbb{RP}^2}) = \langle P_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

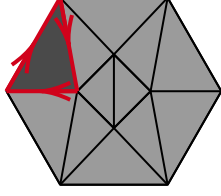
$$H_1(K_{\mathbb{RP}^2}) = Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}) / B_1(K_{\mathbb{RP}^2}) = Ker \partial_1 / Im \partial_2$$

$$H_2(K_{\mathbb{RP}^2}) = Z_2(K_{\mathbb{RP}^2})/B_2(K_{\mathbb{RP}^2}) = Z_2(K_{\mathbb{RP}^2})/\{0\} = Ker \partial_2$$

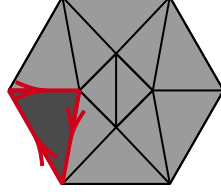
Riduco la matrice di  $\partial_2$

[illegible]

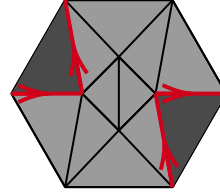
$$\text{Im } \partial_2 = \mathbf{B}_1(\mathbf{K}_{\mathbb{RP}^2})$$



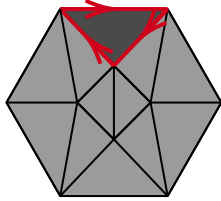
$$\begin{aligned} &+[P_0, P_1] \\ &+[P_1, P_3] \\ &-[P_0, P_3] \end{aligned}$$



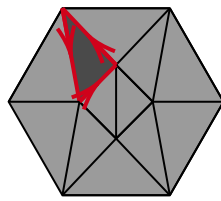
$$\begin{aligned} &+[P_0, P_2] \\ &+[P_2, P_3] \\ &-[P_0, P_3] \end{aligned}$$



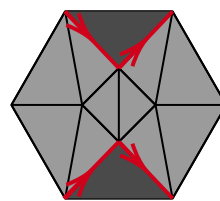
$$\begin{aligned} &+[P_0, P_3] \\ &-[P_0, P_5] \\ &-[P_1, P_3] \\ &+[P_1, P_5] \end{aligned}$$



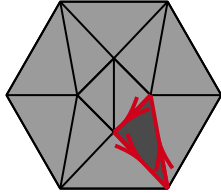
$$\begin{aligned} &+[P_1, P_2] \\ &+[P_2, P_4] \\ &-[P_1, P_4] \end{aligned}$$



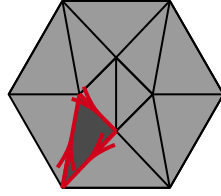
$$\begin{aligned} &+[P_1, P_3] \\ &+[P_3, P_4] \\ &-[P_1, P_4] \end{aligned}$$



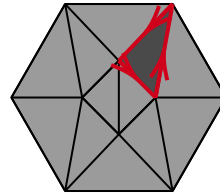
$$\begin{aligned} &+[P_1, P_4] \\ &-[P_2, P_4] \\ &+[P_2, P_6] \\ &-[P_1, P_6] \end{aligned}$$



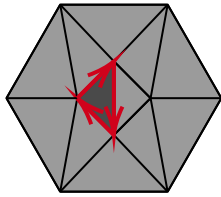
$$\begin{aligned} &+[P_1, P_5] \\ &+[P_5, P_6] \\ &-[P_1, P_6] \end{aligned}$$



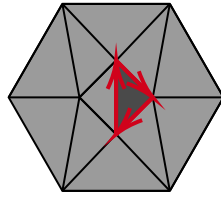
$$\begin{aligned} &+[P_2, P_3] \\ &+[P_3, P_6] \\ &-[P_2, P_6] \end{aligned}$$



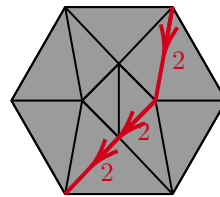
$$\begin{aligned} &+[P_2, P_4] \\ &+[P_4, P_5] \\ &-[P_2, P_5] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &+[P_3, P_4] \\ &+[P_4, P_6] \\ &-[P_3, P_6] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &+[P_4, P_5] \\ &+[P_5, P_6] \\ &-[P_4, P_6] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &+2[P_2, P_5] \\ &+2[P_5, P_6] \\ &-2[P_2, P_6] \end{aligned}$$

L'ultimo caso è quello che risulta dall'ultima colonna della matrice dell'operatore bordo, ed è anche quello interessante

$$Im \partial_2 \simeq \mathbb{Z}^{12}$$

$$Ker \partial_2 = \{0\} \implies H_2(K_{\mathbb{RP}^2}) = \{0\}$$

**Riduco la matrice di  $\partial_1$**

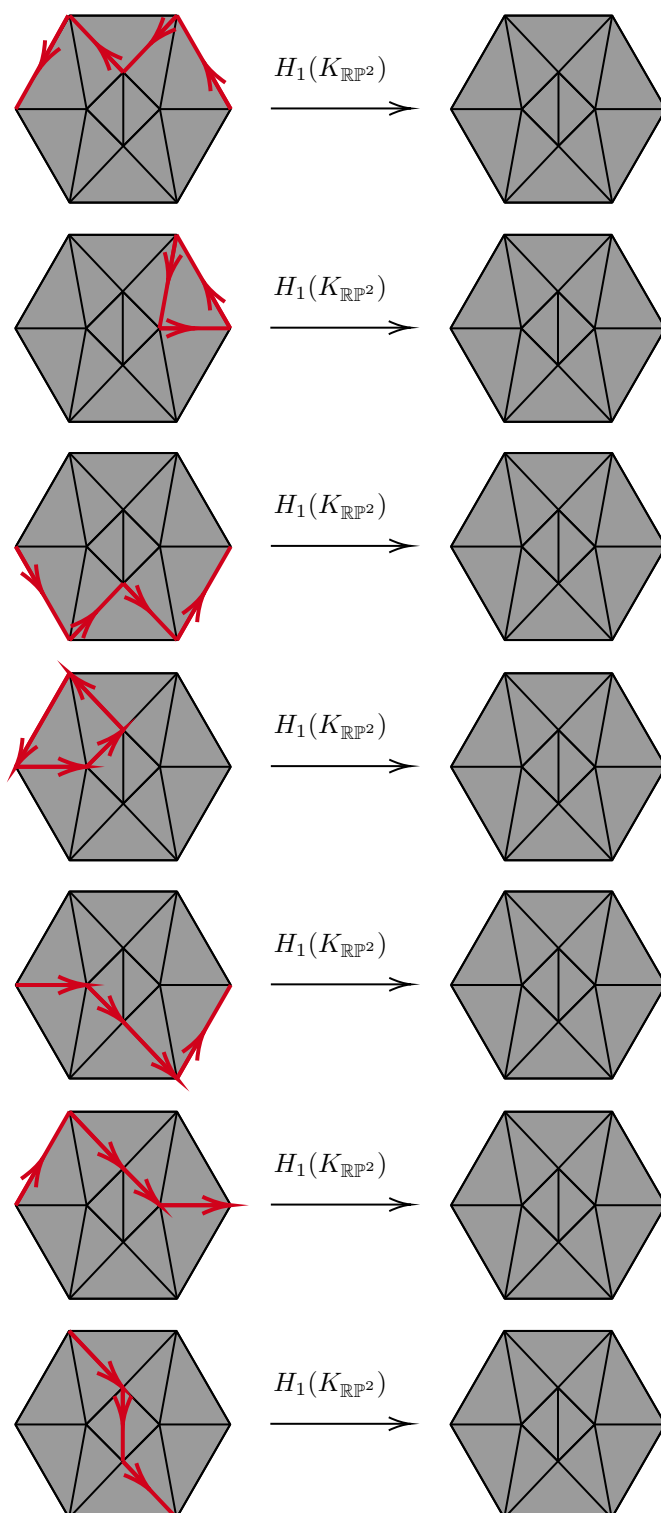
$$\partial_1 = \begin{bmatrix} [P_0, P_1] & [P_0, P_2] & [P_0, P_3] & [P_0, P_4] & [P_0, P_5] & [P_0, P_6] & [P_1, P_2] & [P_1, P_3] & [P_1, P_4] & [P_1, P_5] & [P_1, P_6] & [P_2, P_3] & [P_2, P_4] & [P_2, P_5] & [P_2, P_6] & [P_3, P_4] & [P_3, P_5] & [P_3, P_6] & [P_4, P_5] & [P_4, P_6] & [P_5, P_6] \\ 1 & . & . & . & -1 & -1 & . & . & -1 & . & . & . & 1 & . & 1 & 1 & 1 & -1 & . & . & 1 \\ . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & -1 & -1 & -1 & -1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & 1 & . & 1 & . & . & -1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & -1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & -1 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 \\ . & . \end{bmatrix} \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix}$$

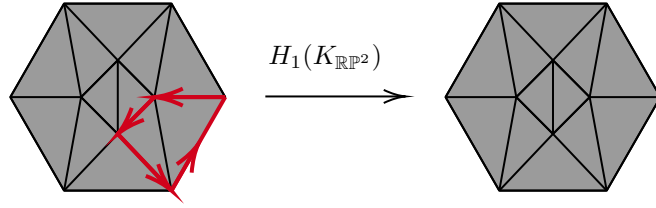
Ho 6 pivot, quindi ho 12 generatori in  $Ker \partial_1$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Hexagon with red arrows on edges } (P_0, P_1), (P_1, P_2), (P_0, P_2) \end{array} & \xrightarrow{H_1(K_{\mathbb{RP}^2})} & \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Hexagon with red arrows on edges } (P_0, P_3), (P_1, P_3), (P_1, P_2), (P_0, P_2) \end{array} \\ \begin{array}{c} +[P_0, P_1] \\ +[P_1, P_2] \\ -[P_0, P_2] \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} +[P_0, P_3] \\ -[P_1, P_3] \\ +[P_1, P_2] \\ -[P_0, P_2] \end{array} \end{array}$$

Tutti gli altri 1-cicli sono combinazione di 1-bordi, quindi in  $H_1(K_{\mathbb{RP}^2})$  sono nella classe di equivalenza dell'elemento nullo

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Hexagon with red arrows on edges } (P_0, P_1), (P_1, P_2), (P_0, P_2) \end{array} & \xrightarrow{H_1(K_{\mathbb{RP}^2})} & \begin{array}{c} \text{Diagram 4: Hexagon with no red arrows} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Diagram 5: Hexagon with red arrows on edges } (P_1, P_2), (P_2, P_3), (P_1, P_3) \end{array} & \xrightarrow{H_1(K_{\mathbb{RP}^2})} & \begin{array}{c} \text{Diagram 6: Hexagon with no red arrows} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Diagram 7: Hexagon with red arrows on edges } (P_0, P_1), (P_1, P_2), (P_0, P_2) \end{array} & \xrightarrow{H_1(K_{\mathbb{RP}^2})} & \begin{array}{c} \text{Diagram 8: Hexagon with no red arrows} \end{array} \end{array}$$





Eliminando i generatori di  $C_1(K_{\mathbb{RP}^2})$  con le relazioni di  $B_1(K_{\mathbb{RP}^2})$  si scopre che

$$Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}) = (Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}) \cap B_1(K_{\mathbb{RP}^2})) \oplus \langle [P_2, P_5] - [P_2, P_6] + [P_5, P_6] \rangle \simeq \mathbb{Z}^{12}$$

quindi 11 generatori sono anche 1-bordi.

Analogamente

$$B_1(K_{\mathbb{RP}^2}) = (Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}) \cap B_1(K_{\mathbb{RP}^2})) \oplus \langle 2[P_2, P_5] - 2[P_2, P_6] + 2[P_5, P_6] \rangle \simeq \mathbb{Z}^{12}$$

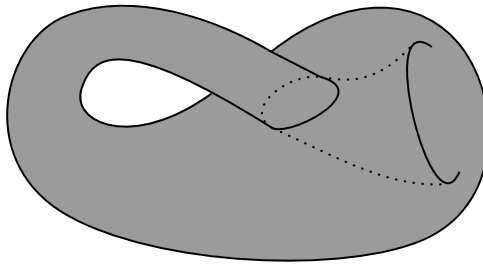
Ottengo quindi

$$\begin{aligned} H_1(K_{\mathbb{RP}^2}) &= Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}) / B_1(K_{\mathbb{RP}^2}) = \\ &= \frac{(Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}) \cap B_1(K_{\mathbb{RP}^2})) \oplus \langle [P_2, P_5] - [P_2, P_6] + [P_5, P_6] \rangle}{(Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}) \cap B_1(K_{\mathbb{RP}^2})) \oplus \langle 2[P_2, P_5] - 2[P_2, P_6] + 2[P_5, P_6] \rangle} = \\ &= \frac{(Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}) \cap B_1(K_{\mathbb{RP}^2})) \oplus \langle [P_2, P_5] - [P_2, P_6] + [P_5, P_6] \rangle}{(Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}) \cap B_1(K_{\mathbb{RP}^2})) \oplus 2 \langle [P_2, P_5] - [P_2, P_6] + [P_5, P_6] \rangle} = \\ &= \mathbb{Z}^{11} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z}^{11} \oplus 2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^{11} / \mathbb{Z}^{11} \oplus \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} = \{0\} \oplus \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Riepilogando

$$\begin{cases} H_0(K_{\mathbb{RP}^2}) \simeq \mathbb{Z} & (\text{per connessione}) \\ H_1(K_{\mathbb{RP}^2}) \simeq \mathbb{Z}_2 \\ H_2(K_{\mathbb{RP}^2}) \simeq \{0\} \end{cases}$$

Una rappresentazione del piano proiettivo è data dalla bottiglia di Klein, oggetto che non può essere costruito in  $\mathbb{R}^3$ , ma la cui proiezione in  $\mathbb{R}^3$  (proiettata a sua volta in  $\mathbb{R}^2$ ) è la seguente



(L'autointersezione non è presente in  $\mathbb{R}^4$  o superiori)



## Chapter 13

# Gruppi di omologia a coefficienti arbitrari

**Definizione 56** (Gruppo delle p-catene a coefficienti arbitrari). *Sia  $K$  un complesso simpliciale e  $G$  un gruppo, definiamo gruppo delle p-catene su  $G$  l'insieme*

$$C_p(K, G) := \{c : \{p\text{-simplessi di } K\} \rightarrow G \mid c^{-1}(G \setminus \{0_G\}) \text{ ha cardinalità finita}\}$$

$C_p(K, G)$  non è in genere un gruppo libero, ma

$$C_p(K, G) \simeq \underbrace{G \oplus G \oplus \cdots \oplus G}_{\text{numero di p-simplessi}}$$

Cosa succede all'operatore bordo?

$$\partial_p = \sum_{i=0}^p (-1_G)^i [P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_p]$$

L'operazione  $(-1_G)^i$  non ha senso nel gruppo  $G$ , poichè non abbiamo definito l'operazione prodotto. Posso tuttavia assegnare  $\pm$  guardando solo la posizione del vertice che sto rimuovendo.

### 13.1 Casi $G = \mathbb{Z}_n$

I casi più interessanti sono quelli con  $G = \mathbb{Z}_n$  poichè

- $\mathbb{Z}_n$  è un anello, quindi ho il prodotto e posso scrivere  $(-1)^i$
- $\mathbb{Z}_n$  è un anello quoziente rispetto a  $\mathbb{Z}$ , posso quindi reinterpretare tutto nelle classi di resto

$$\partial_p [P_0, \dots, P_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_p] \quad \text{in } \mathbb{Z}$$

↓

$$\partial_p [P_0, \dots, P_p] = \sum_{i=0}^p [-1]_n^i [P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_p] \quad \text{in } \mathbb{Z}_n$$

equivalentemente

$$\sigma = m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \dots m_k\sigma_k \quad \text{in } C_p(K, \mathbb{Z})$$

$$\sigma = [m_1]_n\sigma_1 + [m_2]_n\sigma_2 + \dots [m_k]_n\sigma_k \quad \text{in } C_p(K, \mathbb{Z}_n)$$

### 13.1.1 Caso speciale $n = 2$

In  $\mathbb{Z}_2$   $[1] = [-1]$ , quindi  $[-1]^i = [1] \quad \forall i$ , da cui

$$\partial_p[P_0, \dots, P_p] = \sum_{i=0}^p [-1]_2^i [P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_p] = \sum_{i=0}^p [P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_p]$$

Una possibile interpretazione geometrica è la seguente: Calcolando i gruppi di omologia in  $\mathbb{Z}_2$ , non distinguo le orientazioni

**Convenzione** Nel caso  $C_p(K, \mathbb{Z}_2)$ , utilizziamo la seguente convenzione

$$[P_0, \dots, P_p] \longrightarrow \{P_0, \dots, P_p\}$$

### 13.1.2 Piano proiettivo in $\mathbb{Z}_2$

$$[\partial_2]_2 = \begin{bmatrix} [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [-1]_2 & [-1]_2 & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & [-1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [1]_2 & \cdot & [-1]_2 & \cdot & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [-1]_2 & [-1]_2 & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [-1]_2 & [-1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & [1]_2 & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & \cdot & [-1]_2 & \cdot & \cdot & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [-1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & [2]_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & \cdot & [-1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [-2]_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & [-1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & \cdot & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & [-1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & \cdot & \cdot & \cdot & [1]_2 & [2]_2 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} =$$

---

$$\begin{aligned} Ker [\partial_2]_2 &\simeq \mathbb{Z}_2 \implies H_2(K_{\mathbb{RP}^2}) \simeq \mathbb{Z}_2 \\ Im [\partial_2]_2 &\simeq \mathbb{Z}_2^{11} \end{aligned}$$
$$[\partial_1]_2 = \begin{bmatrix} [1]_2 & . & . & . & [1]_2 & [1]_2 & . & [1]_2 & . & . & [1]_2 & . & [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 & . & [1]_2 \\ . & [1]_2 & . & . & [1]_2 & . & . & . & [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 & . & . & . & . & [1]_2 \\ . & . & [1]_2 & . & . & [1]_2 & . & . & [1]_2 & . & [1]_2 & . & [1]_2 & [1]_2 & . & . & . \\ . & . & . & [1]_2 & . & . & [1]_2 & . & . & . & . & . & . & [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 \\ . & . & . & . & . & [1]_2 & . & . & [1]_2 & . & . & . & [1]_2 & . & [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 \\ . & . & . & . & . & . & [1]_2 & . & . & . & [1]_2 & . & [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}$$
$$Ker [\partial_1]_2 \simeq \mathbb{Z}_2^{12}$$
$$Z_1 = (K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2) = (Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2) \cap B_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2)) \oplus \mathbb{Z}_2 \langle \{P_2, P_5\} + \{P_2, P_6\} + \{P_5, P_6\} \rangle$$

$$B_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2) = Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2) \cap B_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2)$$
$$Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2) \simeq B_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \langle \{P_2, P_5\} + \{P_2, P_6\} + \{P_5, P_6\} \rangle$$
$$H_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2) \simeq \frac{B_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \langle \{P_2, P_5\} + \{P_2, P_6\} + \{P_5, P_6\} \rangle}{B_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2)} \simeq \mathbb{Z}_2$$

**Attenzione**

$$H_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_2) = H_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$$

ma il messaggio è diverso:

- Su  $\mathbb{Z}$  sto dicendo che c'è un 1-ciclo che non è un 1-bordo, ma il suo doppio lo è
- Su  $\mathbb{Z}_2$  sto dicendo che c'è un 1-ciclo che non è un 1-bordo

Semplificando i coefficienti posso ottenere informazioni di minore rilevanza, ma ridurre notevolmente il numero di calcoli.

Cosa succede se prendo come gruppo  $G = \mathbb{Z}_3$ ?  $[2]_3 = [-1]_3$ , quindi 2 è un elemento invertibile. Ho quindi

$$\text{Ker } [\partial_2]_3 = \{0\} \implies H_2(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_3) = \{0\}$$

$$\begin{aligned} H_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_3) &= \frac{Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_3) \cap B_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_3)}{Z_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_3) \cap B_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_3)} \oplus \frac{\mathbb{Z}_3 \langle [P_2, P_5] - [P_2, P_6] + [P_5, P_6] \rangle}{\mathbb{Z}_3 \langle [2]_3 [P_2, P_5] - [2]_3 [P_2, P_6] + [2]_3 [P_5, P_6] \rangle} = \\ &= \frac{\mathbb{Z}_3 \langle [P_2, P_5] - [P_2, P_6] + [P_5, P_6] \rangle}{\mathbb{Z}_3 \langle [2]_3 [P_2, P_5] - [2]_3 [P_2, P_6] + [2]_3 [P_5, P_6] \rangle} \end{aligned}$$

Attenzione però,  $[2]_3$  e  $[1]_3$  sono entrambi generatori di  $\mathbb{Z}_3$ , quindi

$$H_1(K_{\mathbb{RP}^2}, \mathbb{Z}_3) \simeq \{0\}$$

Per riassumere

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$
$H_0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{0\}$
$H_1$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\{0\}$
$H_2$	$\{0\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{0\}$

## Chapter 14

# Omologia del cono

Siamo ora interessati a calcolare i gruppi di omologia del semplice  $n$ -dimensionale, e del suo bordo

**Richiamo**  $\sigma = [P_0, \dots, P_n]$  semplice geometrico (vertici in uno spazio euclideo in posizione generale) ha come formulazione equivalente:

” $\sigma$  = L’insieme di tutti i segmenti che uniscono uno dei vertici (fisso  $P_0$ ) con un qualsiasi punto del semplice di dimensione  $n - 1$  generato da  $[P_1, \dots, P_n]$ ”

Come traduco ciò in termini di catene?

**Definizione 57** (Cono su  $K$  con vertice  $Q$ ). *Sia  $K$  un complesso simpliciale geometrico, e sia  $Q$  un punto tale che ogni semiretta uscente da  $Q$  intersechi  $|K|$  in al più un punto.*

*Definiamo cono su  $K$  con vertice in  $Q$  la collezione di semplici  $[Q, P_0, \dots, P_k]$  (dove i punti  $[P_0, \dots, P_k]$  definiscono un semplice di  $K$ ), più tutte le sue facce. Denotiamo questo nuovo complesso simpliciale come*

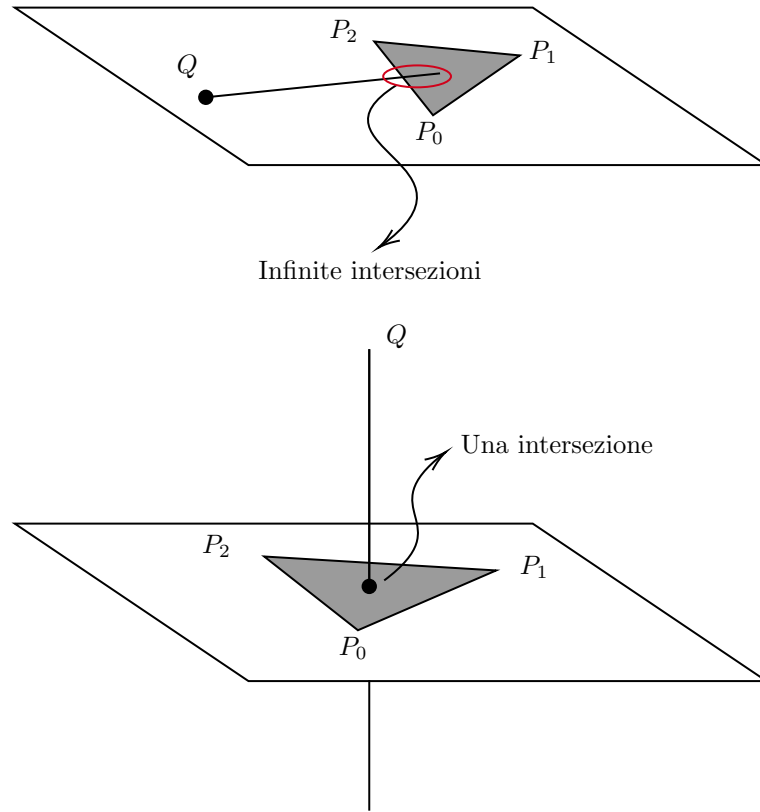
$$Q * K$$

**Proposizione 14.**  $Q * K$  è un complesso simpliciale che contiene  $K$  come sottocomplesso

*Proof.* 1. Per ogni semplice  $[P_0, \dots, P_k]$  di  $K$ , voglio mostrare che aggiungendo  $Q$  ottengo  $Q, P_0, \dots, P_k$  punti geometricamente indipendenti. Supponiamo che  $Q$  appartenga allo spazio affine individuato da  $P_0, \dots, P_k$ . Prendo un punto  $R \in \text{Int}([P_0, \dots, P_k])$  e considero il segmento  $\bar{QR}$ .

- Poichè  $Q$  e  $R$  sono nello spazio affine di  $P_0, \dots, P_k$ , lo è anche  $\bar{QR}$
- $\text{Int}([P_0, \dots, P_k])$  è un insieme aperto dello spazio affine di  $P_0, \dots, P_k$

Segue che  $\bar{QR} \cap \text{Int}([P_0, \dots, P_k])$  contiene un intervallo contenuto in  $\bar{QR}$ . Questo non può accadere poichè ogni semiretta uscente da  $Q$  ha al più una intersezione con  $|K|$ . La contraddizione è originata dalla supposizione che  $Q$  appartenga allo spazio affine di  $P_0, \dots, P_k$ , quindi  $Q$  è geometricamente indipendente da  $P_0, \dots, P_k$



2. Per la proprietà di incollamento, devo far vedere che l'intersezione della parte interna di due semplici è vuota.

Abbiamo 3 tipi di coppie di semplici da confrontare

- $[P_0, \dots, P_k] \in K$
- $[Q, P_0, \dots, P_k] \in Q * K \setminus K$
- $Q$
- $K$  è un complesso simpliciale, quindi due semplici del primo tipo soddisfa la proprietà di incollamento
- Due semplici del secondo tipo  $[Q, P_0, \dots, P_k]$  e  $[Q, R_0, \dots, R_h]$ 
  - $Int([Q, P_0, \dots, P_k])$  è l'unione dei segmenti aperti da  $Q$  ad un punto di  $Int([P_0, \dots, P_k])$
  - $Int([Q, R_0, \dots, R_h])$  è l'unione dei segmenti aperti da  $Q$  ad un punto di  $Int([R_0, \dots, R_h])$  I due insiemi sono disgiunti
- Visto che ogni semiretta di piede  $Q$  interseca  $|K|$  in al più un punto,

$$Int([Q, P_0, \dots, P_k]) \cap Int([Q, R_0, \dots, R_h]) = \emptyset$$

■

**Esempio 1** Consideriamo il complesso simpliciale

$$K_0 = \{[P_0]\}$$

otteniamo che

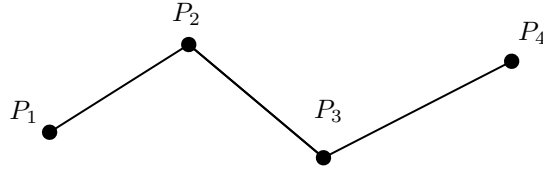
$$K_1 = P_1 * K_0 = \{[P_1, P_0], [P_1, P_0]\}$$

$$K_2 = P_2 * K_1 = \{[P_2, P_1, P_0], [P_2, P_1], [P_2, P_0], [P_2, P_1, P_0]\}$$

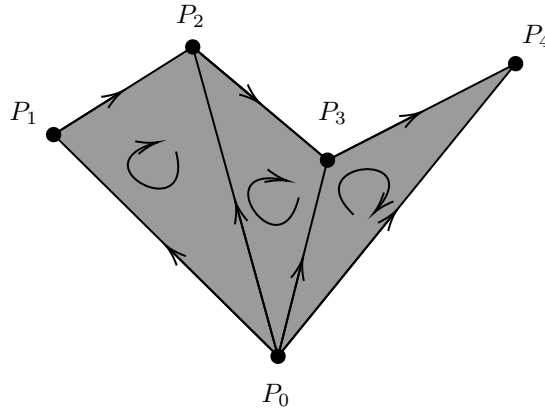
Iterando il processo possiamo vedere come otteniamo complessi simpliciali generati da semplici di dimensione crescente. L'idea è quella di costruire i gruppi di omologia in modo ricorsivo, equivalentemente come costruivamo i complessi simpliciali.

**Esempio 2**

$$K = \{[P_1, P_2], [P_2, P_3], [P_3, P_4], [P_1, P_2, P_3, P_4]\}$$



$$P_0 * K = \{[P_0, P_1, P_2], [P_0, P_2, P_3], [P_0, P_3, P_4], [P_0, P_1], [P_0, P_2], [P_0, P_3], [P_0, P_4]\} \cup K \cup \{P_0\}$$



**Lemma 7.** Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  limitato e convesso e  $Q \in U$  un punto. Supponiamo che esista un complesso simpliciale  $K$  finito tale che

$$|K| = \delta U$$

(frontiera di  $U$ )

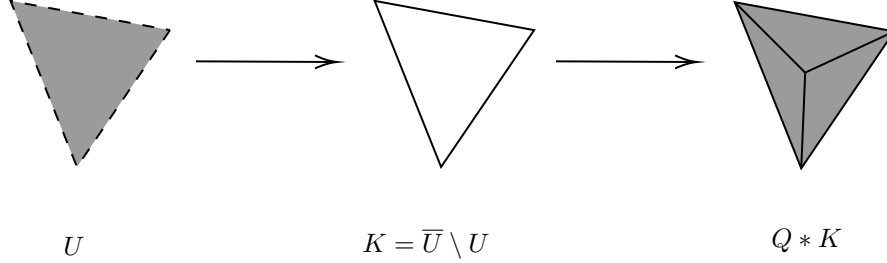
Allora  $Q * K$  è un complesso simpliciale finito tale che

$$|Q * K| = \delta U$$

*Proof.* Per ipotesi di convessità su  $U$ , ogni semiretta uscente da  $U$  che interseca  $\delta U$  in un solo punto.

$\delta U = K$  per ipotesi, abbiamo quindi che  $Q * K = \bar{U}$  poichè considero l'unione di tutti i segmenti da  $Q$  ad un punto della frontiera ■

### Esempio



**Osservazione** Dato  $K$  complesso simpliciale,  $Q * K$  cono su  $K$  con vertice  $Q$ , la costruzione fatta si comporta bene rispetto all'orientazione, cioè se condiero

$$[P_0, \dots, P_k] \in K \quad [Q, P_0, \dots, P_k] \in Q * K$$

e cambio l'orientazione del primo

$$-[P_0, P_1, \dots, P_k] = [P_1, P_0, \dots, P_k]$$

ottengo un analogo cambio di orientazione nel cono  $Q * K$

$$[Q, P_1, P_0, \dots, P_k] = -[Q, P_0, P_1, \dots, P_k]$$

## 14.1 Omomorfismo delle p-catene e delle p-catene del cono

**Definizione 58.** Dato un complesso simpliciale  $K$  e il cono  $Q * K$  di vertice  $Q$ , definisco l'omomorfismo di catene

$$[Q, \cdot] : C_p(K) \rightarrow C_{p+1}(Q * K)$$

$$\sum n_\alpha \sigma_\alpha \mapsto [Q, \sum n_\alpha \sigma_\alpha] = \sum n_\alpha [Q, \sigma_\alpha]$$

Come si computa l'operatore bordo? Può essere utile il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & C_p(K) & \xrightarrow{\partial_p} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(K) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(K) & \xrightarrow{\partial_0} & \{0\} \\
 \swarrow [Q, \cdot] & & \swarrow [Q, \cdot] & & \swarrow [Q, \cdot] & & \swarrow [Q, \cdot] & & & \\
 C_{p+1}(Q * K) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p(Q * K) & \xrightarrow{\partial_p} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(Q * K) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(Q * K) & \xrightarrow{\partial_0} & \{0\}
 \end{array}$$

Prendo un  $\sigma \in C_p(K)$   $\sigma$  p-simplesso (orientato) di  $K$ .

$$\partial_{p+1}[Q, \sigma] = \begin{cases} \sigma - Q & p = 0 \\ \sigma - [Q, \partial_p \sigma] & p > 0 \end{cases}$$

$\sigma \in C_p(K)$  catena qualsiasi

$$p = 0) \quad \sigma = \sum n_\alpha P_\alpha$$

$$\begin{aligned}
 \partial_1[Q, \sigma] &= \partial_1[Q, \sum n_\alpha P_\alpha] = \partial_1 \sum n_\alpha [Q, P_\alpha] = \\
 &= \sum n_\alpha \partial_1[Q, P_\alpha] = \sum n_\alpha (P_\alpha - Q) = \sum n_\alpha P_\alpha - (\sum n_\alpha) Q = \\
 &= \sigma - \varepsilon(\sigma) Q = \sigma - Q
 \end{aligned}$$



$p > 0$ )  $\partial[Q, \sigma] = \sigma - [Q, \partial\sigma]$  e procedo come prima

**Teorema 12.** Sia  $Q * K$  il cono di vertice  $Q$  su un complesso simpliciale  $K$ . Allora

$$H_p(Q * K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ \{0\} & p \neq 0 \end{cases}$$

oppure, rispetto all'omologia ridotta,

$$\tilde{H}_p(K) = \{0\} \quad \forall p$$

*Proof*  $p = 0$ )  $H_0(Q * K) = \mathbb{Z}$  poichè  $Q * K$  è connesso per archi (per definizione di cono)

$p > 0$ )

$$H_p(Q * K) = Z_p(Q * K) / B_p(Q * K)$$

dal teorema, segue che

$$H_p(Q * K) = \{0\} \implies Z_p(Q * K) = B_p(Q * K)$$

Sia  $Z_p$  un  $p$ -ciclo di  $Q * K$ . Decompongo  $Z_p$  come

$$Z_p = C_p + [Q, d_{p-1}]$$

con  $C_p \in C_p(K)$   $d \in C_{p-1}(K)$ .

$Z_p$  è un ciclo, quindi

$$\begin{aligned} 0 = \partial Z_p &= \partial C_p + \partial[Q, d_{p-1}] = \\ &= \begin{cases} \partial C_p + d_{p-1} - \varepsilon(d_{p-1})Q & p = 1 \\ \partial C_p + d_{p-1} - [Q, d_{p-1}] & p \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Voglio far vedere che  $Z_p \in B_p(Q * K)$ , ossia che  $Z_p = \partial[Q, C_p]$

$$Z_p - \partial[Q, C_p] = C_p + [Q, d_{p-1}] - (C_p - [Q, \partial C_p]) = [Q, d_{p-1}] - [Q, \partial C_p] =$$

(per omomorfismo)

$$[Q, \underbrace{d_{p-1} - \partial C_p}_{e_{p-1}}]$$

Voglio far vedere che  $e_{p-1} = 0$ . Osservo che

$$\partial(Z_p - \partial[Q, C_p]) = \partial Z_p - \cancel{\partial^2[Q, C_p]} = \partial[Q, e_{p-1}]$$

$\partial Z_p = 0$  poichè  $Z_p$  bordo. Ottengo quindi

$$0 = \begin{cases} e_{p-1} - \varepsilon(e_{p-1})Q & p = 1 \\ e_{p-1} - [Q, \partial e_{p-1}] & p \neq 1 \end{cases}$$

In entrambi i casi,  $e_{p-1} \in C_{p-1}(K)$  (non coinvolge  $Q$ ), quindi per ottenere 0 devono essere 0 entrambi gli addendi (poichè il gruppo è libero).

Da ciò segue che

$$e_{p-1} = 0$$

$$[Q, \sigma] = 0 = Z_p - \partial[Q, C_p] \implies Z_p = \partial[Q, C_p]$$

■

**Corollario 7.** *Se  $K$  è il complesso simpliciale associato all' $n$ -simpleso,*

$$H_p(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ \{0\} & p \neq 0 \end{cases}$$

*oppure, rispetto all'omologia ridotta,*

$$\tilde{H}_p(K) = \{0\} \quad \forall p$$

*Proof.* La dimostrazione si può fare per induzione, osservando che gli  $n$ -simplessi vengono generati dai coni degli  $(n-1)$ -simplessi ■

## Chapter 15

# Interpretazione geometrica/topologica dei gruppi di omologia

**Definizione 59** (Complessi simpliciale aciclico). *Un complesso simpliciale  $K$  con  $\tilde{H}_p(K) = \{0\} \forall p$  si dice complesso simpliciale aciclico*

**Teorema 13.** *Sia  $K_n$  il complesso simpliciale corrispondente ad un  $n$ -simpleso ( $n > 0$ ) e sia  $\Sigma^{n-1}$  il sottocomplesso formato dalle facce proprie di  $K_n$ . Allora*

$$H_p \sigma^{n-1} = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ \{0\} & p \neq 0, p \neq n-1 \\ \mathbb{Z} = \langle \partial_n, \Delta_n \rangle & p = n-1 \end{cases}$$

dove  $\Delta_n$  è l'unico  $n$ -simpleso di  $K_n$

*Proof.*  $\Sigma^{n-1}$  è l'(n-1)-scheletro di  $K_n$ . Se prendo  $p \leq n-1$

$$\{\text{Insieme dei } p\text{-simplessi di } K_n\} = \{\text{Insieme dei } p\text{-simplessi di } \Sigma^{n-1}\}$$

Quindi abbiamo due successioni di catene

$$\begin{array}{ccccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & C_n(K_n) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K_n) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(K_n) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(K_n) & \xrightarrow{\partial_0} & \{0\} \\ = & & & & = & & = & & = & & = & & \\ \{0\} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & C_{n-1}(\Sigma^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(\Sigma^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(\Sigma^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_0} & \{0\} \end{array}$$

$p = 0$ ) ( $\Sigma^{n-1}$  è connesso per  $n \geq 2$ )

$$\begin{aligned} H_0(\Sigma^{n-1}) &= C_0(\Sigma^{n-1}) / B_0(\Sigma^{n-1}) = C_0(K_n) / \underset{(In \Sigma^{n-1})}{Im \partial_1} = \\ &= C_0(K_n) / \underset{(In K_n)}{Im \partial_1} = H_0(K_n) \simeq \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$0 < p < n - 1)$$

$$\begin{aligned} H_p(\Sigma^{n-1}) &= Z_p(\Sigma^{n-1})/B_p(\Sigma^{n-1}) = \text{Ker } \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1} = \\ &= Z_p(K_n)/B_p(K_n) = H_p(K_n) = \{0\} \implies H_p(\Sigma^{n-1}) = \{0\} \end{aligned}$$

$$p = n - 1)$$

$$\begin{aligned} H_{n-1}(\Sigma^{n-1}) &= Z_{n-1}(\Sigma^{n-1})/B_{n-1}(\Sigma^{n-1}) = \text{Ker } \partial_{n-1} / \text{Im } \partial_n = \\ &= \text{Ker } \partial_{n-1} / \{0\} = \text{Ker } \partial_{n-1} \end{aligned}$$

in  $K_n$  ho che

$$H_{n-1}(K_n) = Z_{n-1}(K_n)/B_{n-1}(K_n) = \{0\}$$

$$\downarrow$$

$$Z_{n-1}(K_n) = B_{n-1}(K_n)$$

$$\downarrow$$

$$\text{Ker } \partial_{n-1} = \text{Im } \partial_n$$

Poichè

$$\text{Ker } \partial_{n-1} = Z_{n-1}(\Sigma^{n-1}) = \text{Im } \partial_n = \langle \partial_n \Delta_n \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

ho che

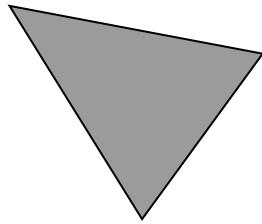
$$H_{n-1}(\Sigma^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$$

■

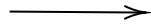
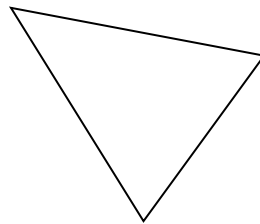
### Esempio

$$n = 2$$

$$K_2$$



$$\Sigma^1$$



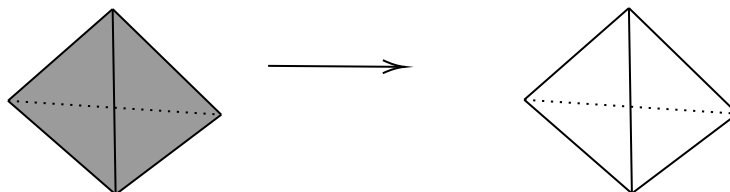
aciclico

$$H_p(\Sigma^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, 1 \\ \{0\} & p \neq 0, 1 \end{cases}$$

$$n = 3$$

$$K_3$$

$$\Sigma^2$$



aciclico

#### Osservazione

- $\Sigma^1$  omeomorfo a  $S^1$
- $\Sigma^2$  omeomorfo a  $S^2$

### 15.1 Interpretazione geometrica/topologica

Il rango di  $H_p(K)$  corrisponde al numero di  $p$ -cicli indipendenti che non sono  $p$ -botdi, ossia il numero di buchi  $p$ -dimensionali di  $K$

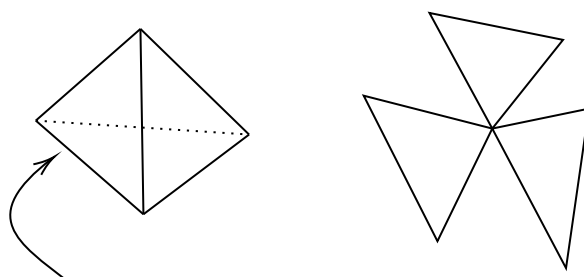
**Esempio** Supponiamo di avere un complesso  $K$  tale che

$$H_0(K) = \mathbb{Z}^2 \implies 2 \text{ componenti}$$

$$H_1(K) = \mathbb{Z}^3 \implies 3 \text{ fori}$$

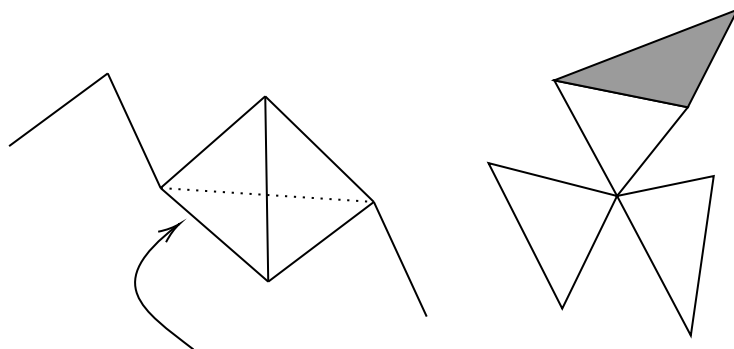
$$H_2(K) = \mathbb{Z} \implies 1 \text{ cavità}$$

A che oggetto corrisponde?



con le facce proprie

La struttura omologica non varia se cambio posizione ai 4 elementi fondamentali (bordo del 2-simplesso e i bordi dei 3 1-simplessi) e se aggiungo dei complessi simpliciali

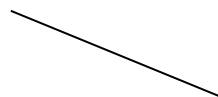


con le facce proprie

**Attenzione** Cosa succede nel caso  $n = 1$ ? Abbiamo detto che, in generale,

$$H_p(\Sigma^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ \{0\} & p \neq 0, n-1 \\ \mathbb{Z} & p = n-1 \end{cases}$$

nel caso  $n = 1$ , abbiamo



$$K_1 = \{[P_0, P_1], P_0, P_1\}$$

$$\Sigma^0 = \{P_0, P_1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$$

Da cui risulta che

$$H_0(\Sigma^0) = \mathbb{Z}^2$$

l'indice 0 e l'indice  $n - 1$  coincidono, e portano ad avere  $\mathbb{Z}^2$ . Rispetto ai gruppi di omologia ridotta, invece questo caso non si presenta, in quando avremmo

$$\tilde{H}_0(\Sigma^0) = \mathbb{Z}$$

che nei gruppi di omologia ridotta corrisponde a 2 componenti connesse

## Chapter 16

# Omomorfismi indotti da mappe simpliciali

**Domanda** Cosa posso dire dell'effetto di una mappa simpliciale rispetto all'omologia simpliciale?

**Definizione 60** (Omomorfismo sulle catene indotto da una mappa simpliciale).

*Sia  $f : K \rightarrow L$  una mappa simpliciale, definiamo l'omomorfismo*

$$(f_{\#})_p : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$$

*come*

$$(f_{\#})_p([P_0, \dots, P_p]) = \begin{cases} [f(P_0), \dots, f(P_p)] & \text{se } f(P_0), \dots, f(P_p) \text{ distinti} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Osservazione** La mappa  $(f_{\#})_p$  è ben definita, poichè se cambio orientazione sul dominio, induco un cambio di direzione anche sul codominio

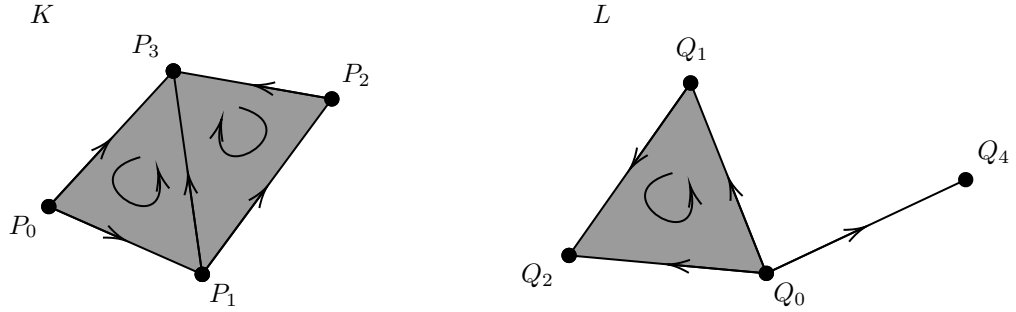
$$-[P_0, P_1, \dots, P_p] = [P_1, P_0, \dots, P_p]$$

$$\begin{aligned} (f_{\#})_p(-[P_0, P_1, \dots, P_p]) &= (f_{\#})_p([P_1, P_0, \dots, P_p]) = [f(P_1), f(P_0), \dots, f(P_p)] = \\ &= -[f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_p)] = (f_{\#})_p([P_0, P_1, \dots, P_p]) \end{aligned}$$

**Nomenclatura**  $f_{\#}$  si dice mappa tra catene indotta da  $f$

**Attenzione** Con  $f_{\#}$  indichiamo una collezione di omomorfismi, uno per ogni  $p$ -catena

## 16.1 Esempio



$f : K \rightarrow L$  definita da

$$\begin{array}{ll} P_0 \mapsto Q_0 & P_1 \mapsto Q_1 \\ P_2 \mapsto Q_0 & P_3 \mapsto Q_2 \end{array}$$

### 16.1.1 Omomorfismi indotti

$$(f_{\#})_0 : C_0(K) = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle \rightarrow C_0(L) = \langle Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$$

$$(f_{\#})_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{array} \end{array}$$

$$(f_{\#})_1 : C_1(K) = \langle [P_0, P_1], [P_0, P_2], [P_1, P_2], [P_1, P_3], [P_2, P_3] \rangle$$

$\downarrow$

$$(f_{\#})_1 = \begin{array}{c} C_1(L) = \langle [Q_0, Q_1], [Q_0, Q_2], [Q_0, Q_3], [Q_1, Q_2] \rangle \\ \begin{array}{ccccc} [P_0, P_1] & [P_0, P_2] & [P_1, P_2] & [P_1, P_3] & [P_2, P_3] \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [Q_0, Q_1] \\ [Q_0, Q_2] \\ [Q_0, Q_3] \\ [Q_1, Q_2] \end{array} \end{array}$$

$$(f_{\#})_2 : C_2(K) = \langle [P_0, P_1, P_2], [P_1, P_2, P_3] \rangle \rightarrow C_2(L) = \langle [Q_0, Q_1, Q_2] \rangle$$

$$(f_{\#})_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} [P_0, P_1, P_2] & [P_1, P_2, P_3] \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [Q_0, Q_1, Q_2] \end{array} \end{array}$$

## 16.2 Cosa succede se passo ai gruppi di omologia?