古典制御でキーとなる，ラプラス変換について学ぶ

制御工学1 ②

機械理工学専攻

細田　耕

本日の授業のゴール

- ラプラス変換の定義を学ぶ.
- 与えられた関数をラプラス変換できるようになる, ラプラス逆変換できるようになる.

ラプラス変換の定義

時間$t \geq 0$で定義された実数値および複素数値関数$f(t)$に対して，sを複素数として

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

なる積分を考える．この積分値があるsについて収束するとき

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

によって定義されるsの関数$F(s)$を$f(t)$のラプラス変換といい，$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$と略記する．

ラプラス変換の性質

(L1) 線形性

(L2) t領域での微分

(L3) t領域での積分

(L4) s領域での推移

(L5) t領域での推移

(L6) 初期値定理

(L7) 最終値定理

(L8) 合成積

(L1)線形性

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = aF(s)+bG(s)$$

証明は定義にしたがって

$$\int_0^\infty \{af(t)+bg(t)\}e^{-st}dt = \int_0^\infty af(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty bg(t)e^{-st}dt$$

$$= aF(s)+bG(s)$$

(L2) t領域での微分

$$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

これも証明は定義に従う

$$\int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty + \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$= -f(0) + sF[s]$$

（L3）t領域での積分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

（L4）s領域での推移

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

証明

$$F(s-a) = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-st}dt$$

(L5) t領域での推移

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

証明

$$\int_0^\infty f(t-a)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t-a)e^{-s(t-a)}e^{-as}dt$$
$$= \int_{-a}^\infty f(t)e^{-st}e^{-as}dt$$

$f(t)$が$-a \leq t \leq 0$で0なら

$$= e^{-as}F(s)$$

(L6)初期値定理

$$\lim_{t \to +0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

証明

$$\int_0^\infty \dot{f}(t) e^{-st} dt = sF[s] - f(0)$$

$s \to \infty$とすると左辺は0になるので,

$$\lim_{t \to +0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

（L7）最終値定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

ただし，これが成立するのは$sF(s)$が安定（＝分母多項式を0とする根の実部がすべて負）のときだけ

（L8）合成積

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$$

基本的な関数のラプラス変換

$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(s)}$	$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(s)}$
$\delta(t)$	1	te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$u_s(t) = 1(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

逆ラプラス変換

ラプラス変換$F(s)$から元の時間関数$f(t)$を求めることを逆ラプラス変換といい，$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$と表す．逆ラプラス変換は，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds, \quad c > 0$$

によって計算される．古典制御で扱われるのは，$F(s)$が有理関数の場合がほとんど．

有利関数の場合

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

の分母を0とする根を$p_1, p_2, \cdots, p_n$とする．つまり，

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}$$

$$=\frac{k_{11}}{s-p_1}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^2}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_{n-1}}{s-p_{n-1}}$$

有利関数の場合

重根なし

$$f(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \cdots + k_n e^{p_n t}$$

重根あり

$$f(t) = k_{11} e^{p_1 t} + k_{12} t e^{p_1 t} + \ k_2 e^{p_2 t} + \cdots$$
$$+ k_{n-1} e^{p_{n-1} t}$$

逆ラプラス変換例題

本日の授業のゴール

- ラプラス変換の定義を学ぶ.
- 与えられた関数をラプラス変換できるようになる，ラプラス逆変換できるようになる.