フィードバック制御系の安定性（１）

制御工学１ ⑩

機械理工学専攻

細田　耕

本日の授業のゴール

- フィードバック系の内部安定性
- 不安定な極零相殺
- ナイキストの安定判別

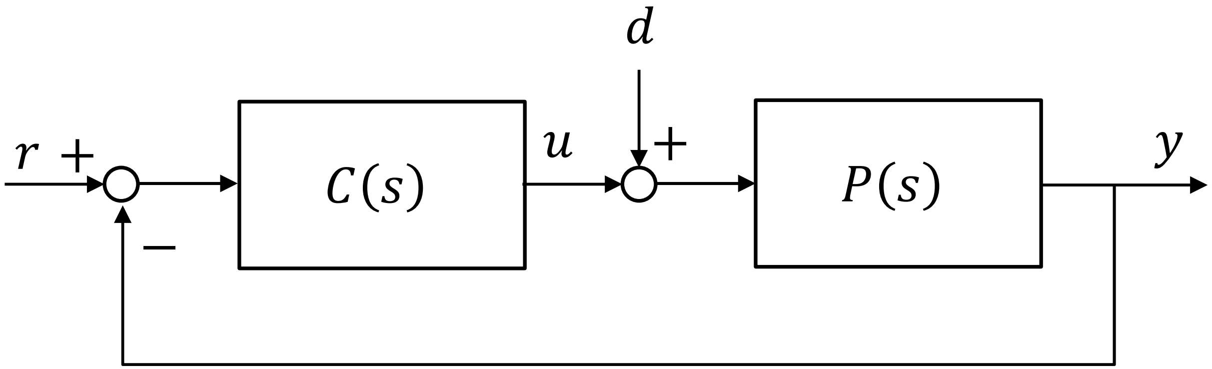
（復習）ダイナミカルシステムの安定性

ダイナミカルシステムにおいて，有界な大きさの任意の入力$|u(t)| < \infty$に対して，その出力がやはり有界$|y(t)| < \infty$であるとき，**安定**と呼ぶ．

安定でないシステムを**不安定**と呼ぶ

全ての種類の入力についてその応答を調べることは不可能であるが，実際には，ステップ入力に対する出力が（過渡状態を含めて）無限大に発散することなく，一定値に収束することが入出力安定と等価であることが知られている．

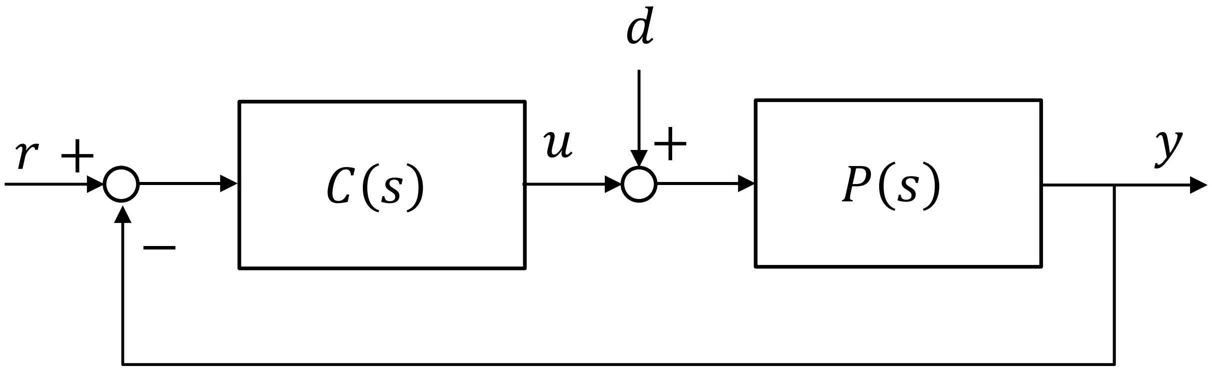
フィードバック制御系



$C(s)$: プロパー

$P(s)$: 厳密にプロパー

フィードバック系の内部安定性



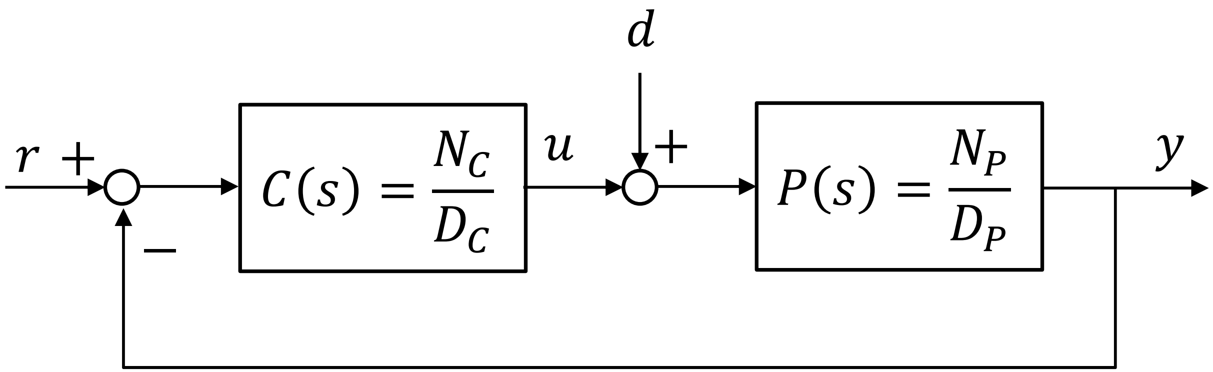
外部から加わる信号$\{r(s), d(s)\}$から各要素の出力$\{u(s), y(s)\}$への四つの伝達関数がすべて安定

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{N_P(s)N_C(s)}{\phi(s)} \qquad G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{N_P(s)D_C(s)}{\phi(s)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{D_P(s)N_C(s)}{\phi(s)} \qquad G_{ud}(s) = -\frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{-N_P(s)N_C(s)}{\phi(s)}$$

$$\phi(s) \coloneqq D_P(s)D_C(s) + N_P(s)N_C(s)$$

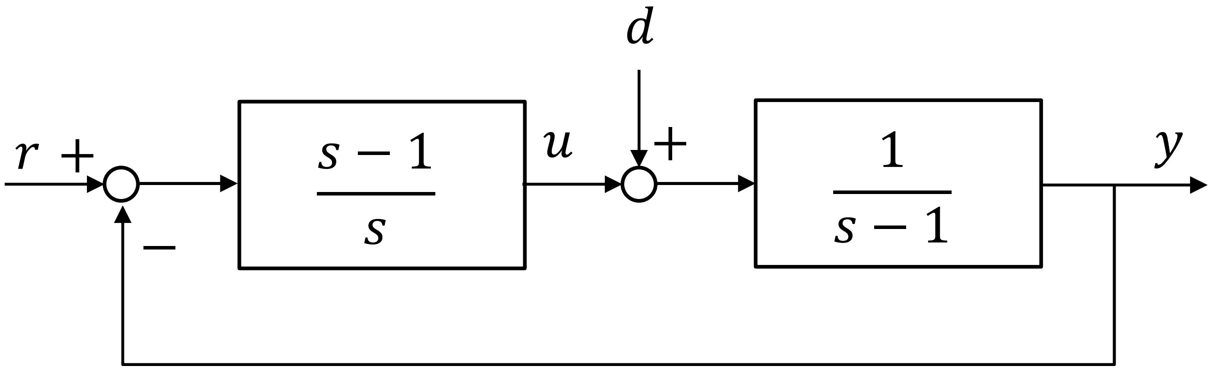
特性方程式



$$\phi(s) := D_P(s)D_C(s) + N_P(s)N_C(s)$$

四つの伝達関数の分母は共通なので，この多項式=0の根の実部がすべて正であれば，四つの伝達関数はすべて安定となる→内部安定

不安定な極零相殺



$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{1}{s+1} \qquad G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{s}{(s+1)(s-1)}$$

$$G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{s-1}{s+1} \qquad G_{ud}(s) = -\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = -\frac{1}{s+1}$$

不安定な極零相殺

$P(s)$と$C(s)$の間に不安定な極零相殺が存在するとき，フィードバック制御系は内部安定ではない

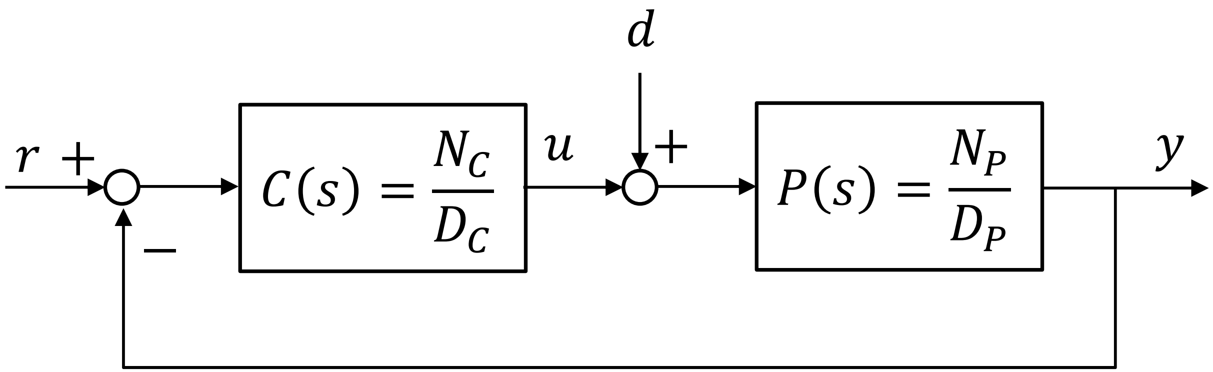
$P(s)$と$C(s)$の間に不安定な極零相殺が存在しないとき，以下の三つは等価である.

(1) フィードバック制御系が内部安定

(2) $G_{yr}(s)$が安定（閉ループ伝達関数が安定）

(3) $1 + P(s)C(s)$の零点がすべて安定（その実部が負）

フィードバック制御系の安定性



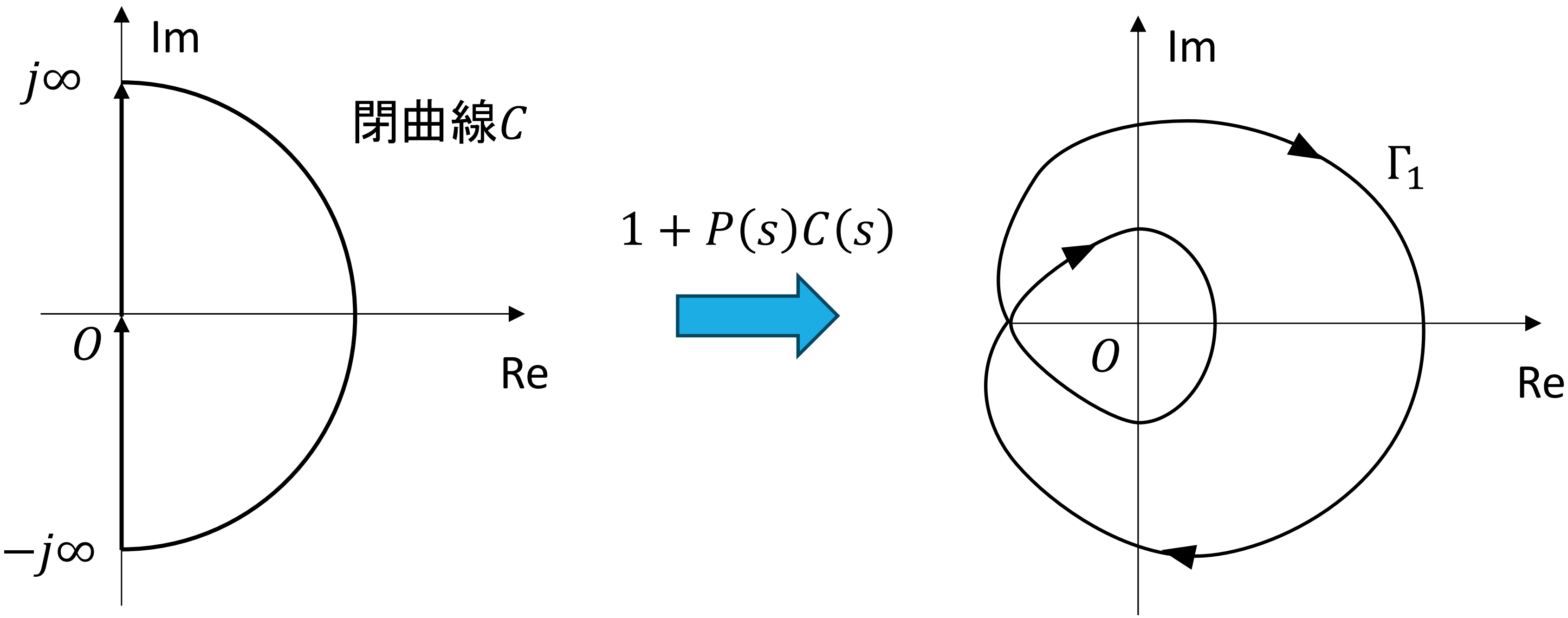
$$\phi(s) := D_P(s)D_C(s) + N_P(s)N_C(s)$$

特性方程式$\phi(s) = 0$の解の実部がすべて正かどうか，で安定性判別可

ラウス･フルビッツの方法でできるけど，$\phi(s)$を計算する必要がある.

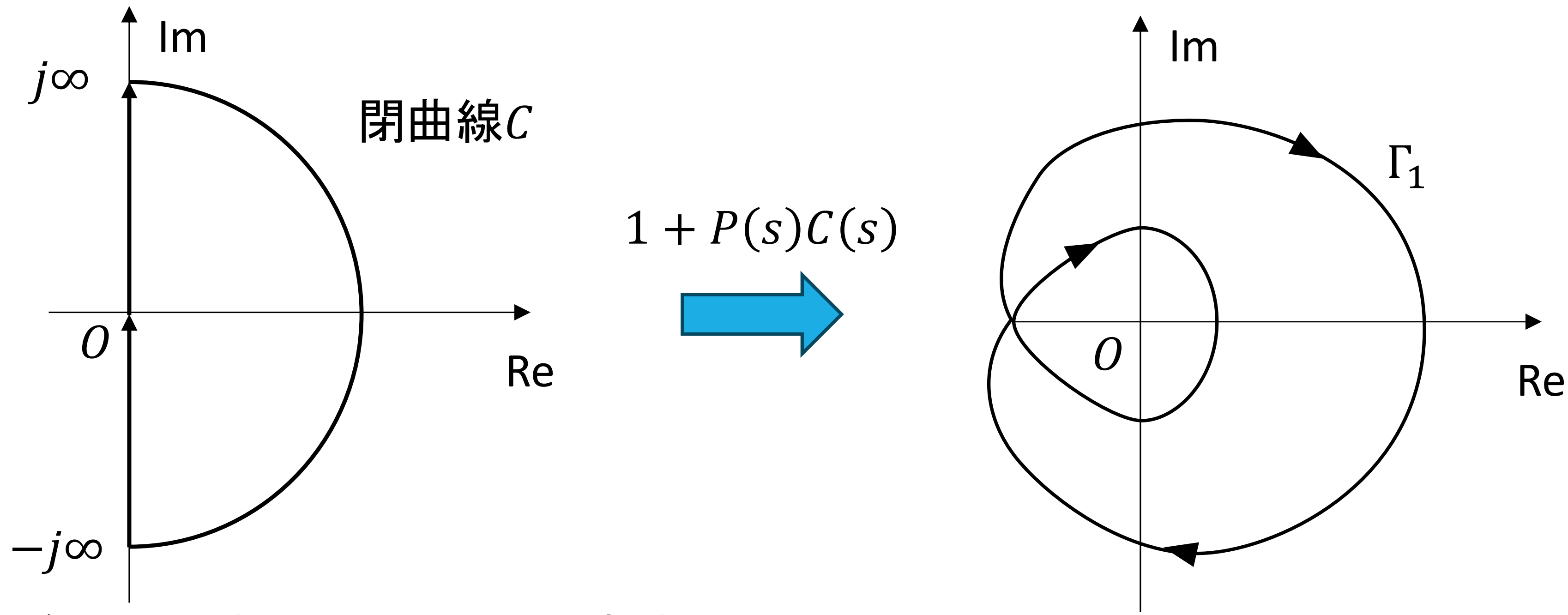
開ループ伝達関数$P(s)C(s)$の周波数特性だけを使って判別できないか？

ナイキストの安定判別法



sが虚軸上$-j\infty \to j\infty$と半径∞の半円でできる閉曲線Cを時計方向に動くとき，$w = 1 + P(s)C(s)$が描く像を考える

ナイキストの安定判別法



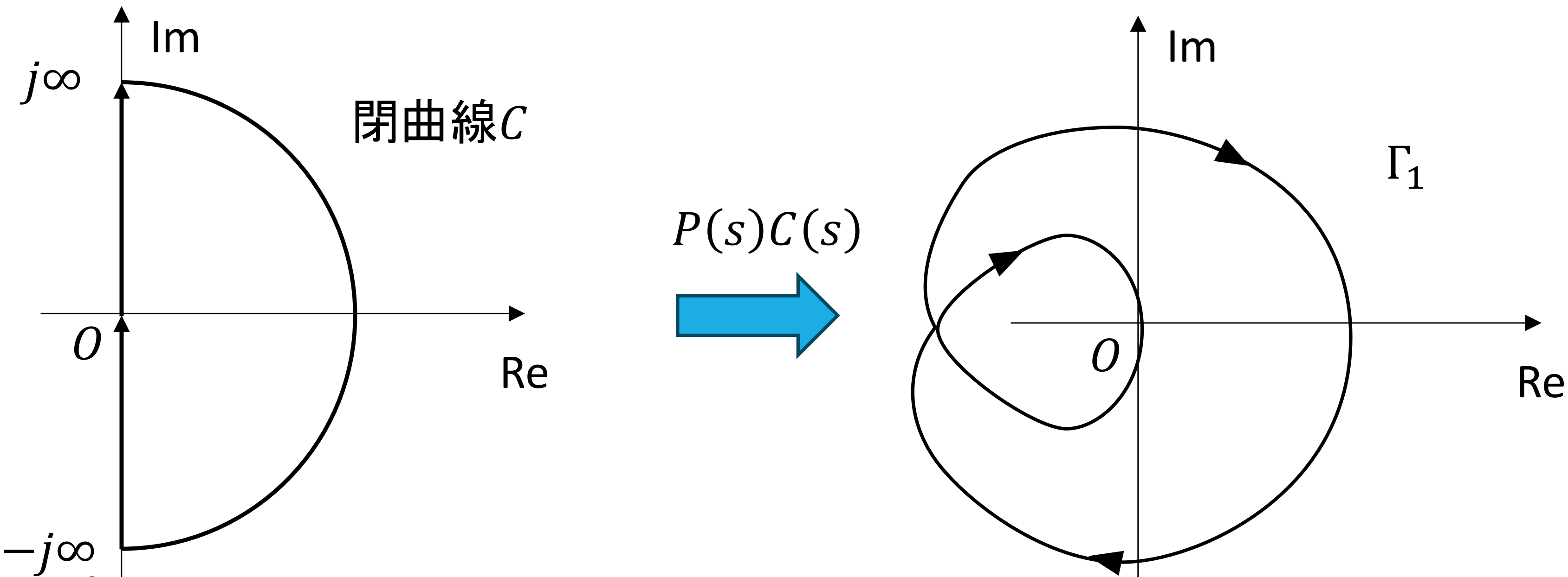
N : Γ_1が原点を時計回りに回る回転数

Π : 閉曲線Cの内部のある開ループ伝達関数の極（開ループ系の不安定極）

Z : 閉曲線Cの内部にある特性多項式の根（閉ループ系の不安定極）

とすると，$Z=N+\Pi$

ナイキストの安定判別法



開ループ伝達関数のベクトル軌跡$P(j\omega)C(j\omega)$を$\omega: 0 \to \infty$で描き，実軸に対称にすることでナイキスト軌跡を描く

ナイキスト軌跡が-1を時計回りに回る回数をNとする

開ループ伝達関数の不安定極の数をΠとすると，$Z = N + \Pi$なので，$Z = 0$ならフィードバック系は安定

例題

$$C(s)=\frac{1}{s+1},\ P(s)=\frac{1}{s+2}$$

のフィードバック系の安定性をナイキストの安定判別法を使って調べる.

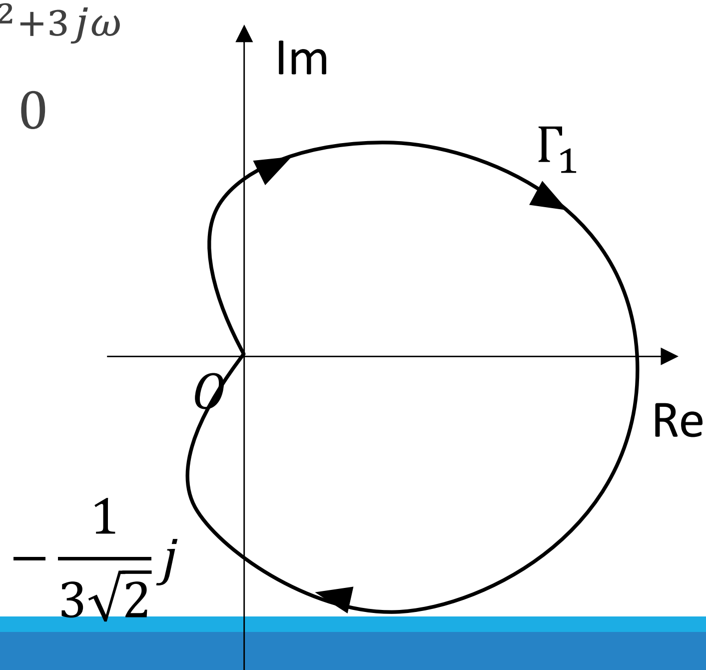
$$L(s)=P(s)C(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$L(j\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)(s+j\omega)}=\frac{1}{2-\omega^2+3j\omega}$$

開ループ伝達関数には不安定極がないので$\Pi=0$

ナイキスト軌跡は右図のようになるので，$N=0$

$Z=N+\Pi$なので，$Z=0$つまり安定となる.



本日の授業のゴール

- 内部安定
- 不安定な極零相殺
- ナイキストの安定判別