

ダイナミカルシステムについて学ぶ

制御工学1 ③

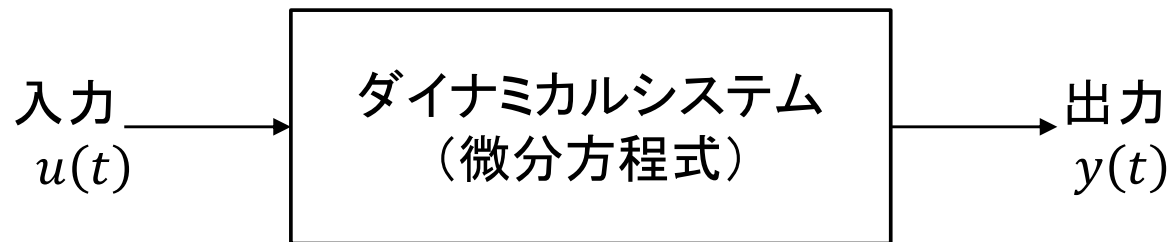
機械理工学専攻

細田 耕

本日の授業のゴール

- 微分方程式で表現されるダイナミカルシステム
- 伝達関数
- ブロック線図
- ブロック線図の等価変換

微分方程式で表現される ダイナミカルシステム



出力 $y(t)$ が現在の入力 $u(t)$ だけでなく、過去の履歴にも依存する

例

質量・ばね・ダンパ系

RLC回路

水位系

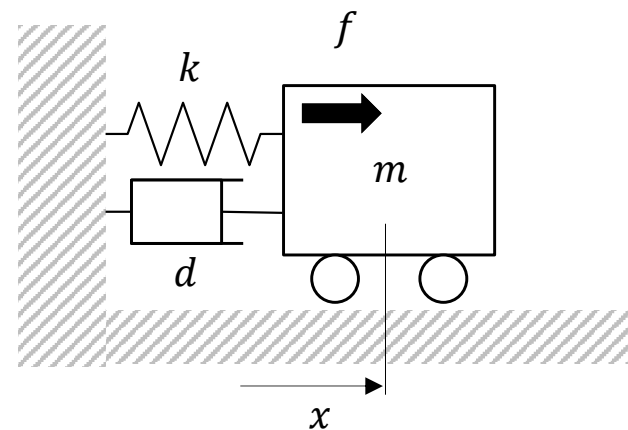
質量・ばね・ダンパ系

運動方程式

$$m\ddot{x}(t) = f - kx(t) - d\dot{x}(t)$$

整理すると

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = f$$



入力
 $f(t)$

(微分方程式)

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = f$$

出力
 $x(t)$

RLC回路

コンデンサの両端の電圧

$$e_o(t) = e_o(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

微分すると

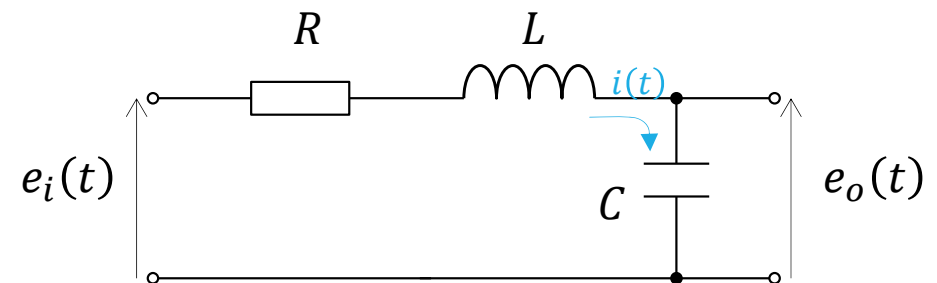
$$C \dot{e}_o(t) = i(t)$$

入力電圧 $e_i(t)$ は

$$e_i(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + e_o(t)$$

より

$$LC \ddot{e}_o(t) + RC \dot{e}_o(t) + e_o(t) = e_i(t)$$



入力
 $e_i(t)$

(微分方程式)

$$LC \ddot{e}_o(t) + RC \dot{e}_o(t) + e_o(t) = e_i(t)$$

出力
 $e_o(t)$

水位系

体積変化は流入－流出なので,

$$\frac{d}{dt} Ah(t) = q_i - q_o$$

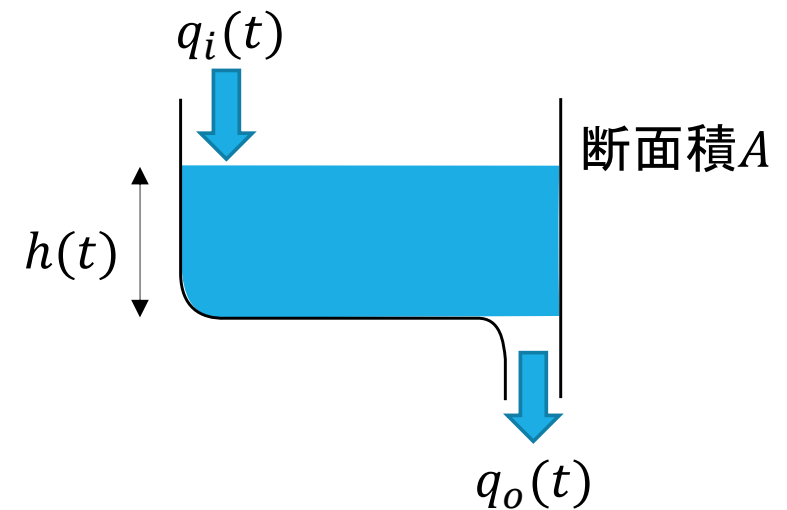
ベルヌーイの定理より

$$q_o = k\sqrt{h(t)}$$

$$A\dot{h} + k\sqrt{h} = q_i$$

平衡点 h_0 周りに線形化すると

$$A \frac{d}{dt} \delta h(t) + \frac{k}{2\sqrt{h_0}} \delta h(t) = \delta q_i(t)$$



入力
 $\delta q_i(t)$

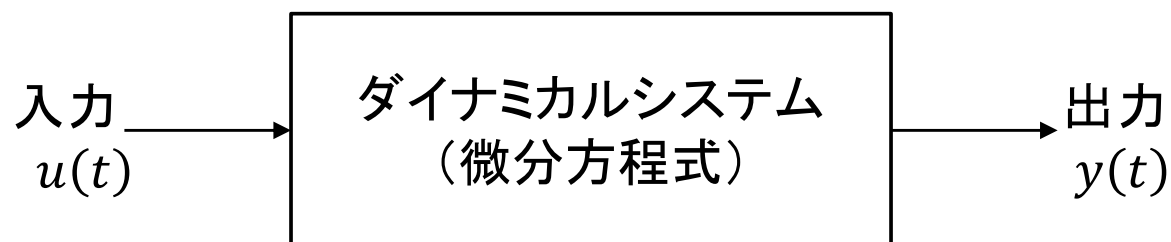
(微分方程式)

$$A \frac{d}{dt} \delta h(t) + \frac{k}{2\sqrt{h_0}} \delta h(t) = \delta q_i(t)$$

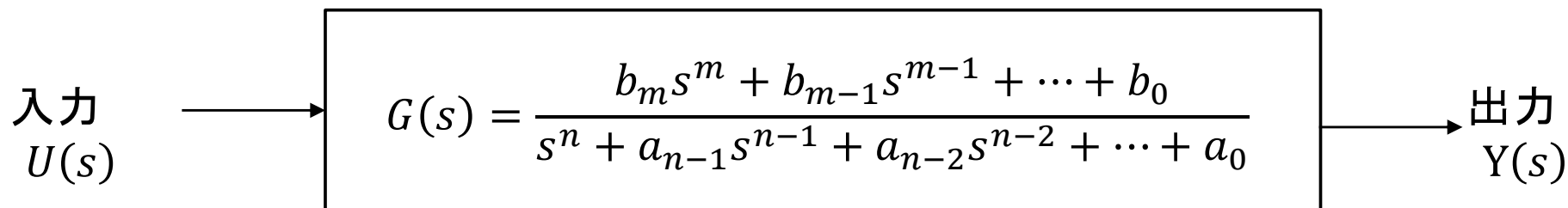
出力
 $\delta h(t)$

伝達関数

$$\text{伝達関数} = \frac{\text{出力のラプラス変換 } Y(s)}{\text{入力 of ラプラス変換 } U(s)}$$



時間領域



周波数領域

むだ時間要素

$$y(t) = u(t - l/v)$$

$$G(s) = e^{-sL}$$

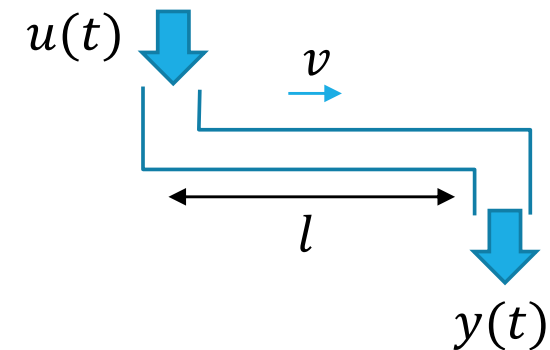
パデー近似

$$e^{-sL} \sim \frac{1 - Ls/2}{1 + Ls/2}$$

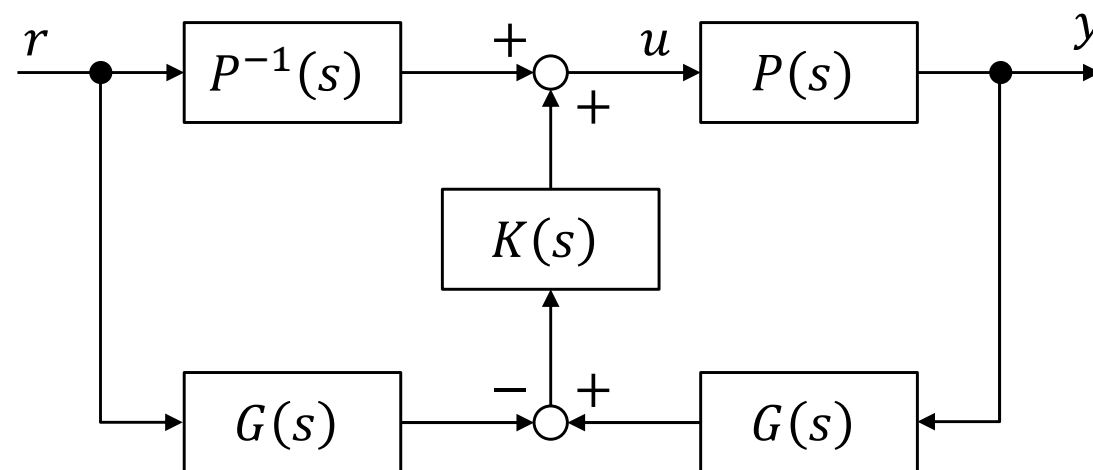
数学においてパデ近似（パデきんじ、英: Padé approximant）とは、関数を近似する「最良」の有理関数のこと（Wikipediaより）

ここで使われているのはexp関数の[1/1]近似

多くの場合、パデ近似は、テイラー級数を有限項で切り捨てるより良い近似を与える（Wikipediaより）

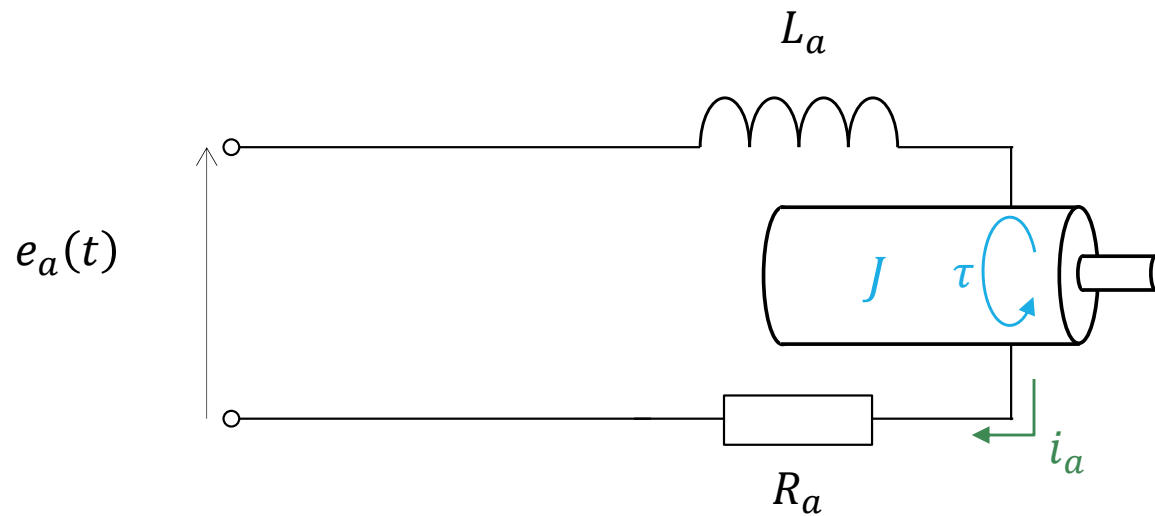


ブロック線図



ブロック線図の例題

DCモータ



ブロック線図の例題

DCモータ

電圧の関係

$$e_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_b(t)$$

$e_b(t)$ は逆起電力

$$e_b(t) = K_b \omega(t)$$

モータで発生するトルク $\tau(t)$ は電流に比例

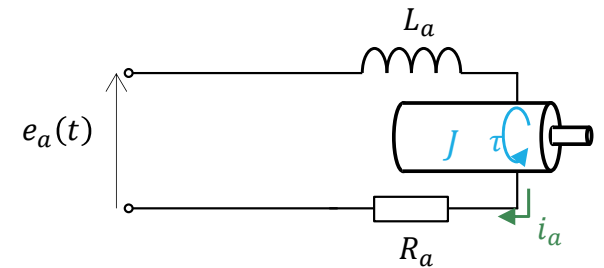
$$\tau(t) = K_\tau i_a(t)$$

回転子の運動方程式

$$\tau(t) = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega(t)$$

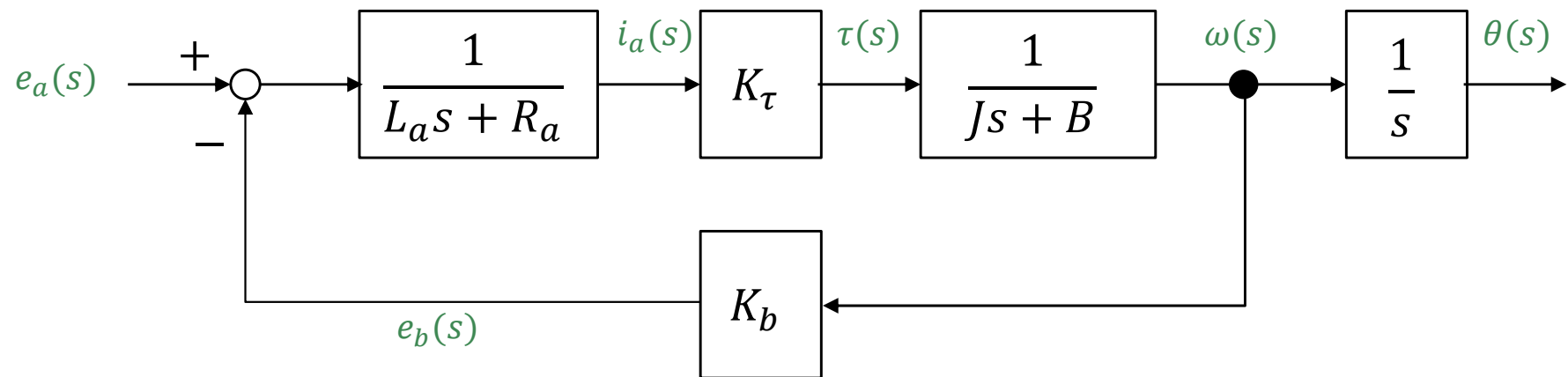
回転角 $\theta(t)$ と $\omega(t)$ の関係

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \theta(t)$$

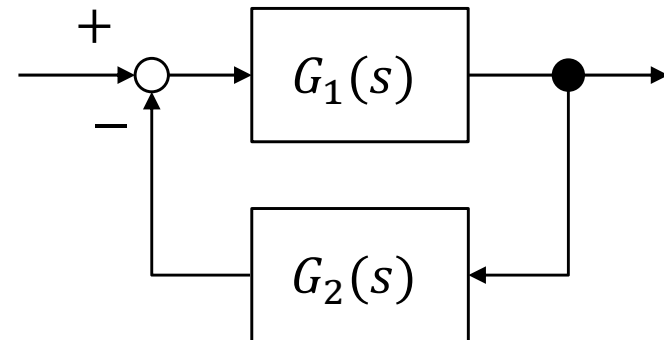
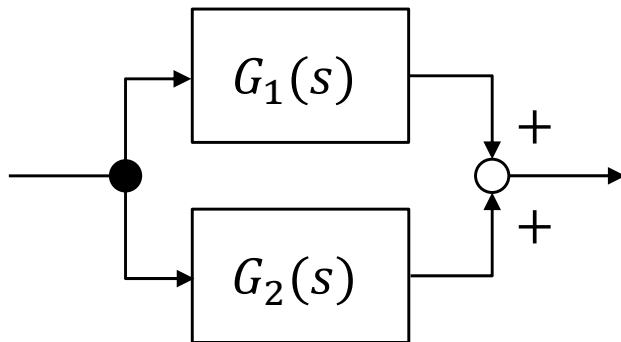
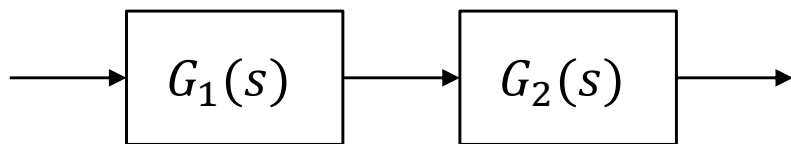


ブロック線図の例題

DCモータ



ブロック線図の簡略化



ブロック線図の例題

DCモータ

