周波数応答（1）

制御工学１⑧

機械理工学専攻

細田　耕

本日の授業のゴール

- 周波数応答
- ベクトル軌跡

周波数応答

安定な線形システムに一定周波数の正弦波を加え続けると，定常状態ではその出力も同じ周波数の正弦波になる．

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s-j\omega}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-j\omega}\cdot\frac{\cdots}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_0}{s-j\omega}+\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}\right]$$

k_0は

$$k_0=\lim_{s\to j\omega}\frac{\cdots}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\lim_{s\to j\omega}G(s)=G(j\omega)$$

なので，

$$=G(j\omega)e^{j\omega t}+\sum_{i=1}^{n}k_i e^{p_i t}$$

$G(s)$は安定な線形システムなので，第2項は十分時間がたつと0になる．

周波数応答

安定な線形システム$G(s)$に，正弦波入力$e^{j\omega t}$が与えられたとき，十分時間がたった（定常応答）ときの出力$y(t)$は，

$$
\begin{aligned}
y(t) &= G(j\omega)e^{j\omega t} \\
&= |G(j\omega)|e^{\angle G(j\omega)}e^{j\omega t}
\end{aligned}
$$

$G(j\omega)$を「周波数伝達関数」と呼ぶ

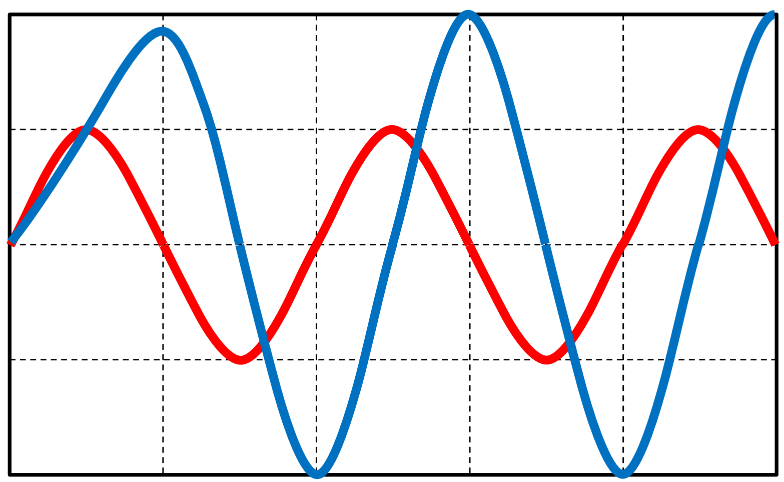
周波数応答の例

$$G(s) = \frac{2}{s^2+s+1}$$

に正弦波入力$u(t) = \sin t$を加えたときの応答を考える．極は$-1/2 \pm \sqrt{3}/2i$なので安定．

$$|G(j)| = \left|\frac{2}{j}\right| = 2$$

$$\angle G(j) = \angle\frac{2}{j} = -90°$$



ベクトル軌跡

$G(j\omega)$を複素平面にプロットしたもの

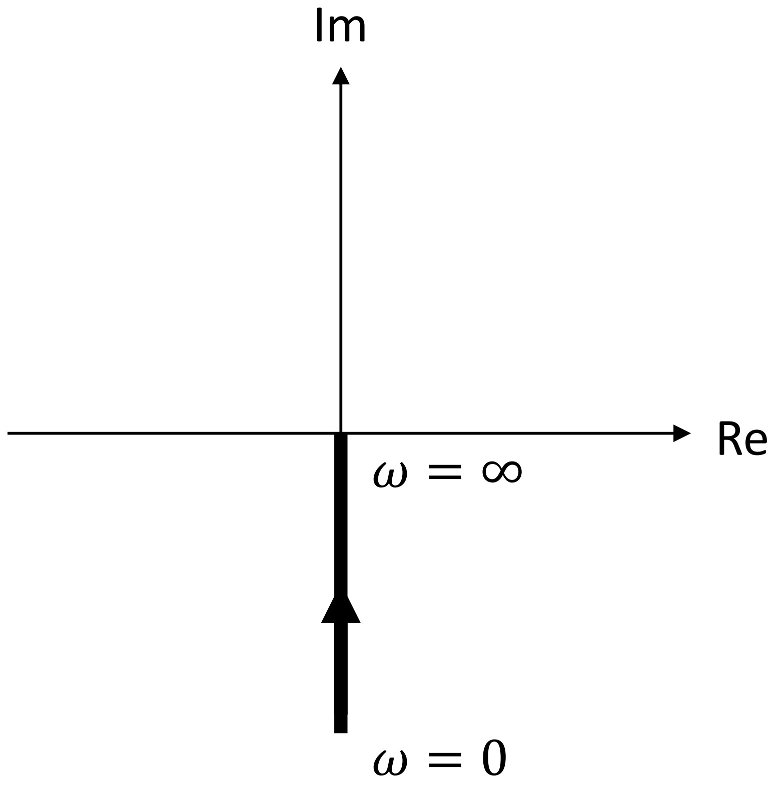
後述する「ナイキストの安定判別法」で重要になる

例①:積分系$G(s) = \frac{1}{s}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(-j) = 90°$$

例①‘: $G(s) = \frac{1}{s^2}$



ベクトル軌跡

例②: 一次系$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$

ベクトル軌跡

例②: 二次系$G(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n+{\omega_n}^2}$