周波数応答(2)

# 制御工学1 ⑨

機械理工学専攻

細田　耕

# 本日の授業のゴール

- ボード線図
- ボードの定理
- 折れ線近似

# ボード線図（Bode diagram）

ボード（Bode）によって1930年代に考案され，実際の制御系設計において広く利用されている極めて重要なものである.

$G(j\omega)$をゲイン$|G(j\omega)|$と位相$\angle G(j\omega)$の分けてプロットしたもの

ゲインはdB（デシベル）で表現$20\log|G(j\omega)|$

横軸は「片対数軸」を使う

# 積分系

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

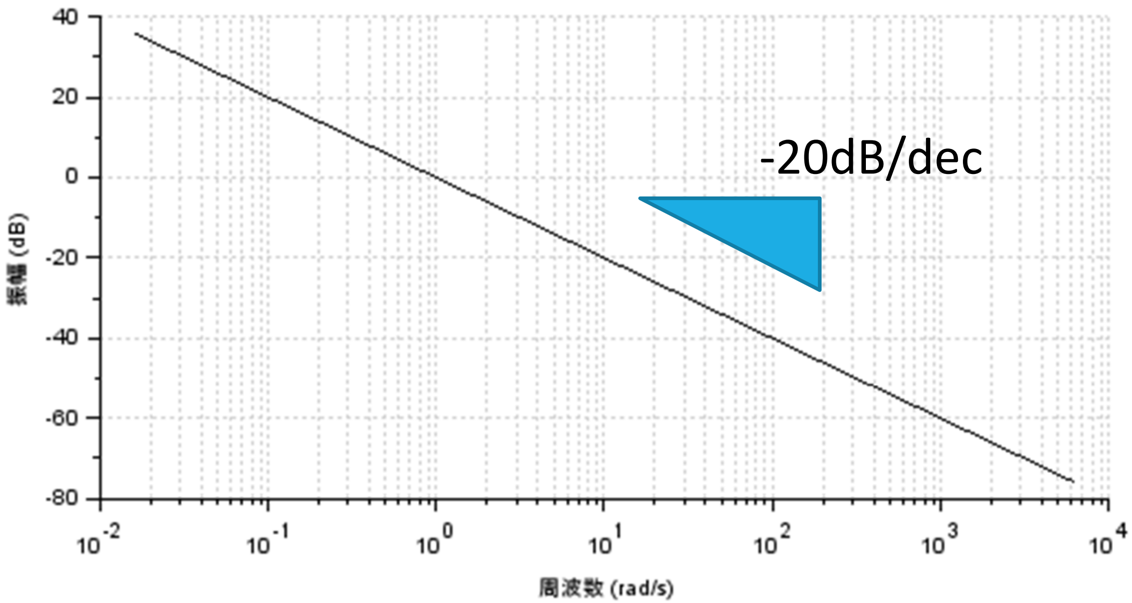
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{1}{\omega}j$$

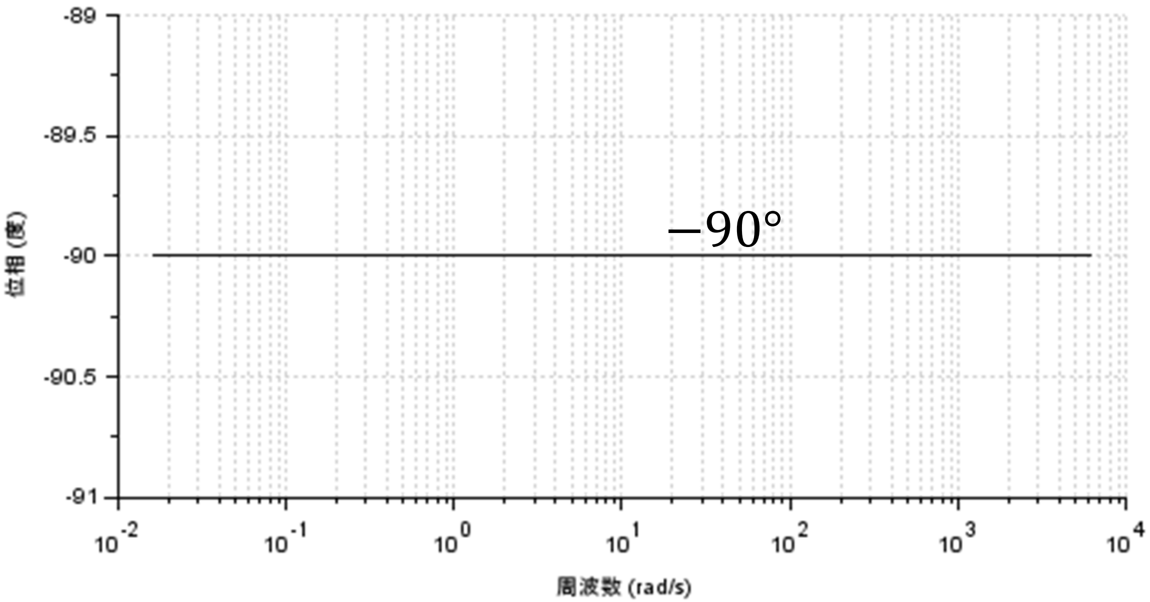
ゲインのデシベル値は

$$20\log|G(j\omega)| = -20\log\omega$$

位相は

$$\angle G(j\omega) = \angle -\frac{1}{\omega}j = -90°$$



# 2重積分系

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

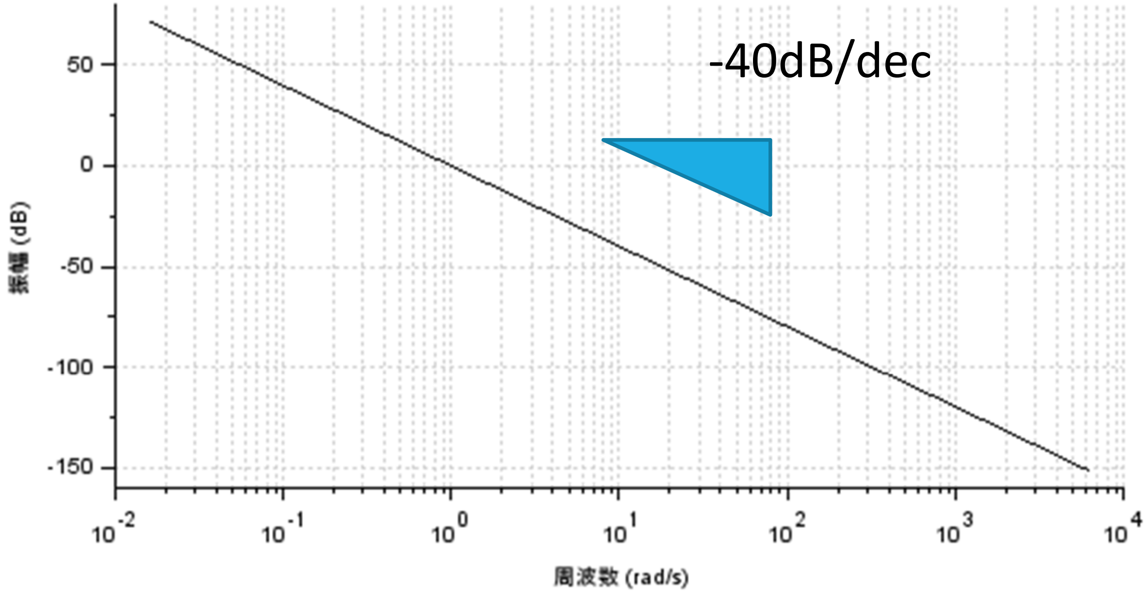
$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} = -\frac{1}{\omega^2}$$

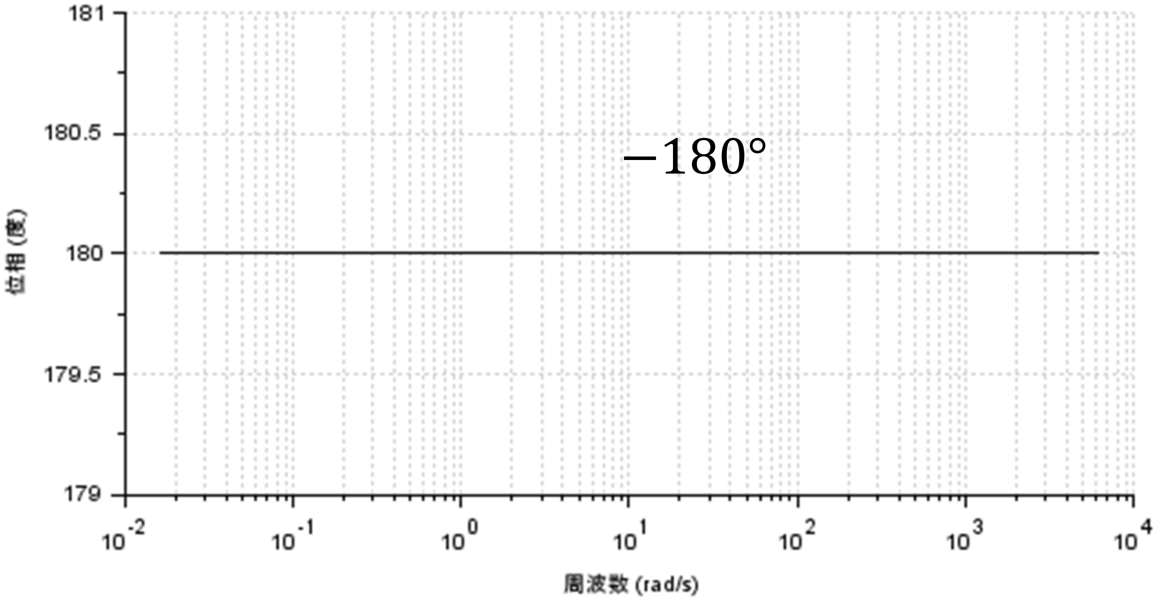
ゲインのデシベル値は

$$20\log|G(j\omega)| = -40\log\omega$$

位相は

$$\angle G(j\omega) = \angle - \frac{1}{\omega^2} = -180°$$



# 一次系

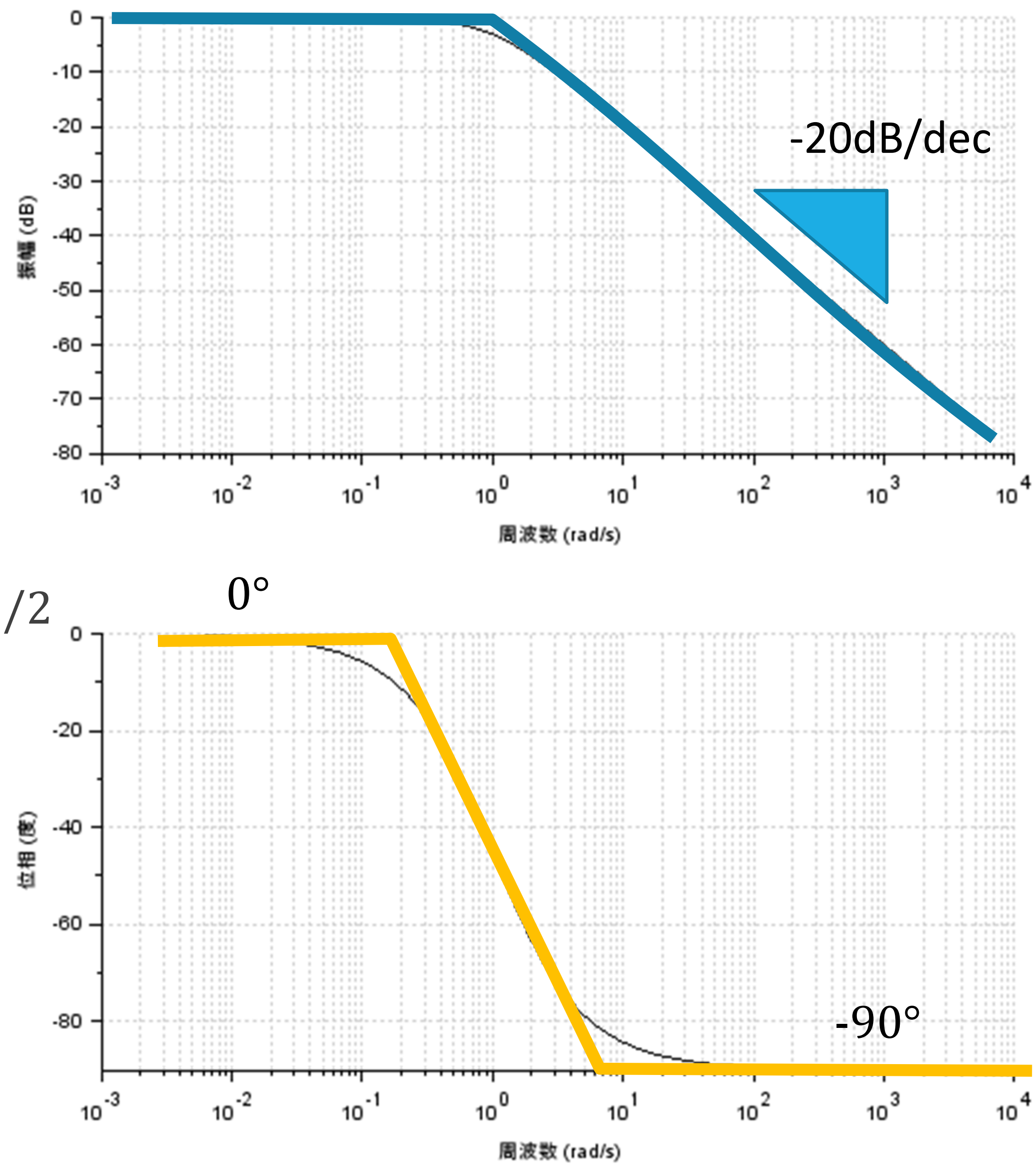
$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} = \frac{K(1-j\omega T)}{1+\omega^2 T^2}$$

$\omega T \ll 1$のとき$G(j0) = K$

$\omega T = 1$のとき$G(j\omega) = K(1-j)/2$

$\omega T \gg 1$のとき$G(j\omega) \sim -jK/\omega T$



# 2次系

$$G(s)=\frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}$$

見通しが悪いので，$K=1$の場合について考える

$$G(j\omega)=\frac{1}{1-\omega^2/{\omega_n}^2+2\zeta(\omega/\omega_n)j}=\frac{1}{(1-\Omega^2)^2+4\varsigma^2\Omega^2}\{1-\Omega^2-2\varsigma\Omega j\}$$

（$\Omega=\omega/\omega_n$）

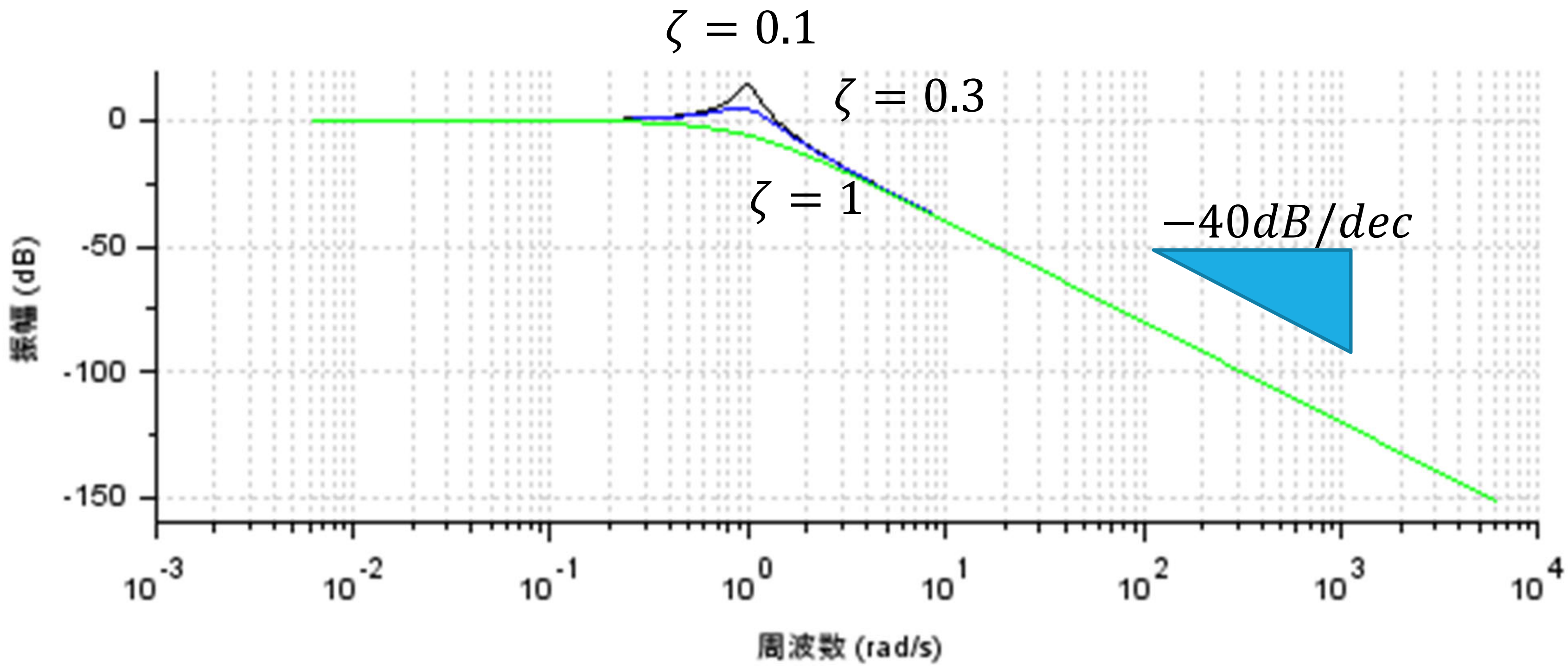
$\Omega\ll 1$のとき　$G(j\omega)\sim 1$　$20\log|G|\cong 0,$　$\angle G\cong 0$
$\Omega=1$のとき　$G(j\omega)=-j/2\zeta$　$20\log|G|=-20\log\zeta\,,$　$\angle G=-90°$
$\Omega\gg 1$のとき　$G(j\omega)\cong -1/\Omega^2$　$20\log|G|\cong -40\log\Omega,$　$\angle G\cong -180°$

# 2次系

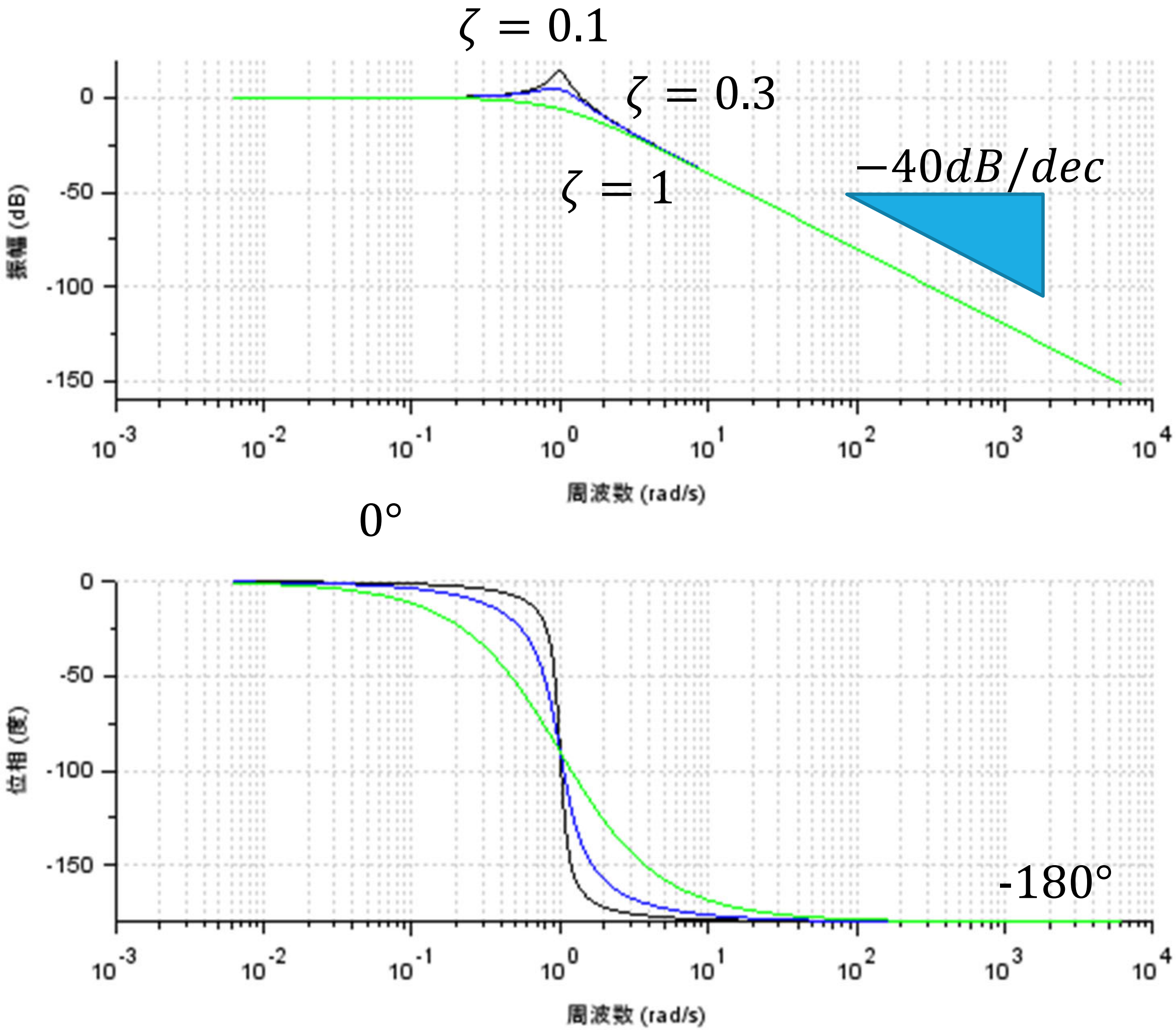
$\Omega \ll 1$のとき　$20\log|G| \cong 0, \qquad \angle G \cong 0$

$\Omega = 1$のとき　$20\log|G| = -20\log\zeta, \angle G = -90°$

$\Omega \gg 1$のとき　$20\log|G| \cong -40\log\Omega, \angle G \cong -180°$



# ２次系


$\zeta = 0.1$
$\zeta = 0.3$
$\zeta = 1$
$-40dB/dec$
振幅 (dB)
0
-50
-100
-150
$10^{-3}$
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
$10^{2}$
$10^{3}$
$10^{4}$
周波数 (rad/s)
0°
-180°
位相 (度)
0
-50
-100
-150
$10^{-3}$
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
$10^{2}$
$10^{3}$
$10^{4}$
周波数 (rad/s)

# 最小位相系

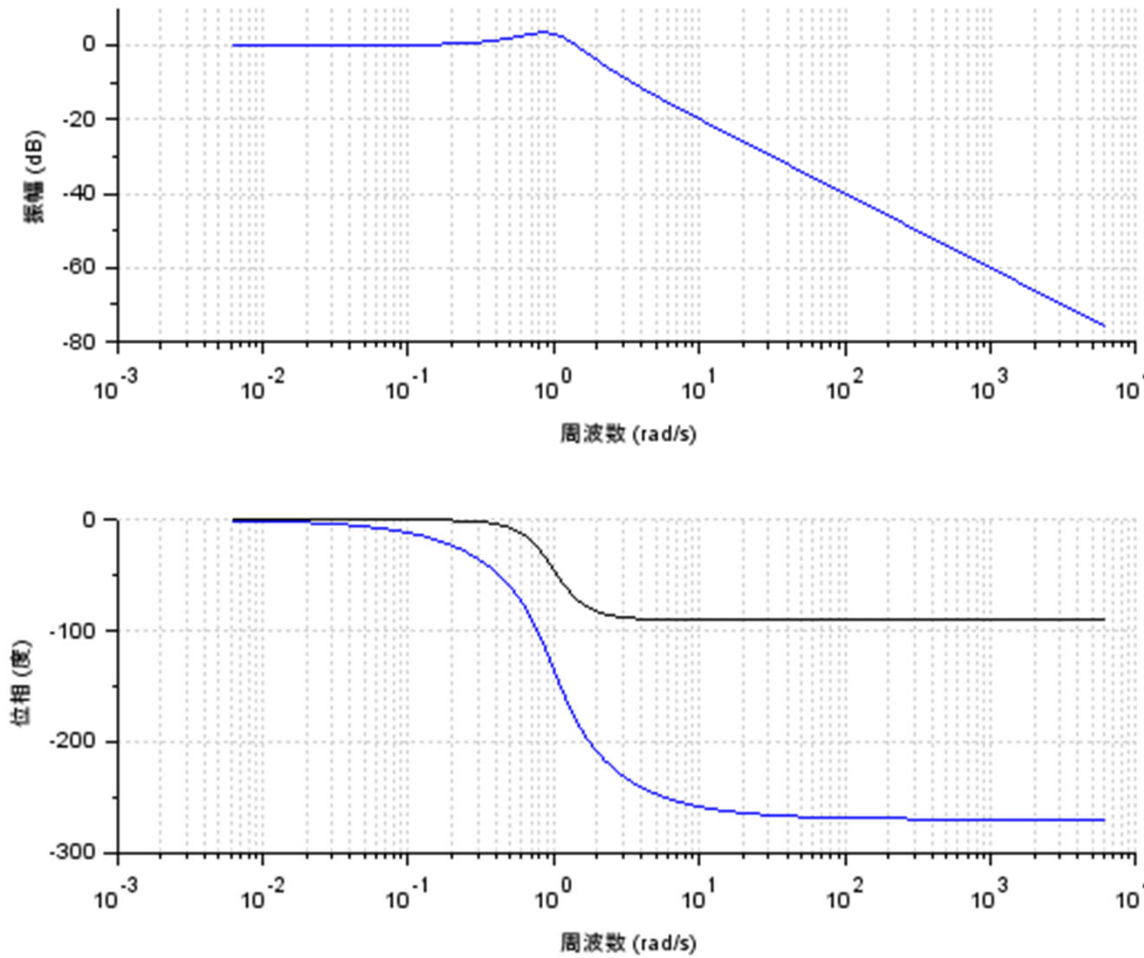
安定なシステムかつ不安定な零点をもたない

一般にはゲイン特性が等しいからといって位相特性も同じとは限らない

$$G_1(s)=\frac{1+s}{s^2+s+1},$$

$$G_2(s)=\frac{1-s}{s^2+s+1}$$

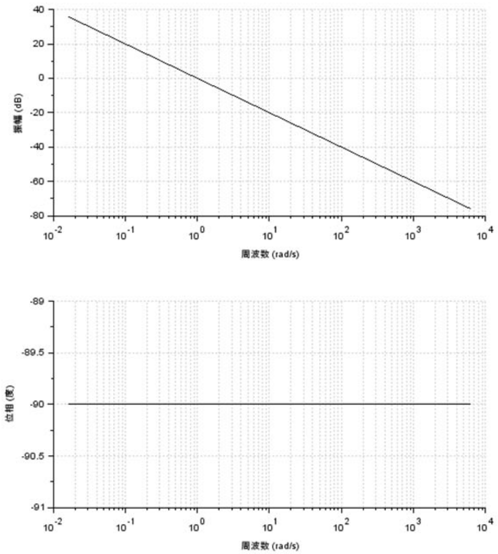
$$|G_1(j\omega)|=\left|\frac{1+j\omega}{1-\omega^2+j\omega}\right|=\left|\frac{1-j\omega}{1-\omega^2+j\omega}\right|=|G_2(j\omega)|$$

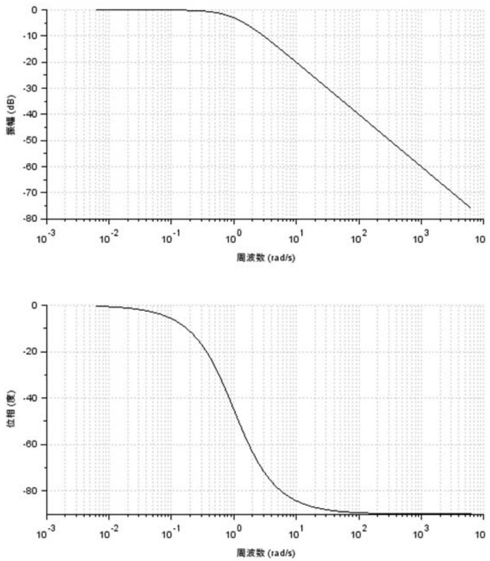


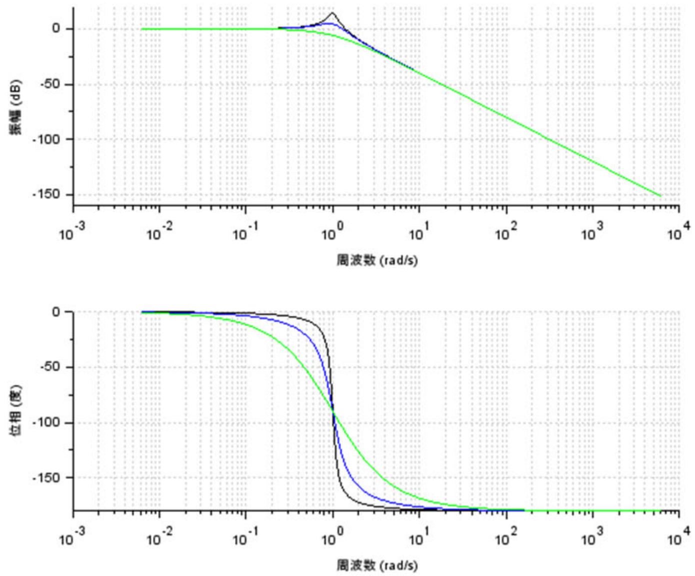
# ボードの定理

0dB/dec　0°

-20dB/dec　-90°　　-40dB/dec　-180°







# 重ね合わせの原理

伝達関数が$G(s) = G_1(s)\, G_2(s)\, G_3(s)$のボード線図を描く

各周波数伝達関数$G_i(s) = r_i e^{j\theta_i}$と極座標表示すると，

$$G(s) = r_1 e^{j\theta_1}\, r_2 e^{j\theta_2}\, r_3 e^{j\theta_3} = r_1 r_2 r_3 e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log r_1 r_2 r_3 = 20(\log|G_1| + \log|G_2| + \log|G_3|)$$

$$\angle G(j\omega) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \angle G_1 + \angle G_2 + \angle G_3$$

より，グラフ上で足し合わせることができる．

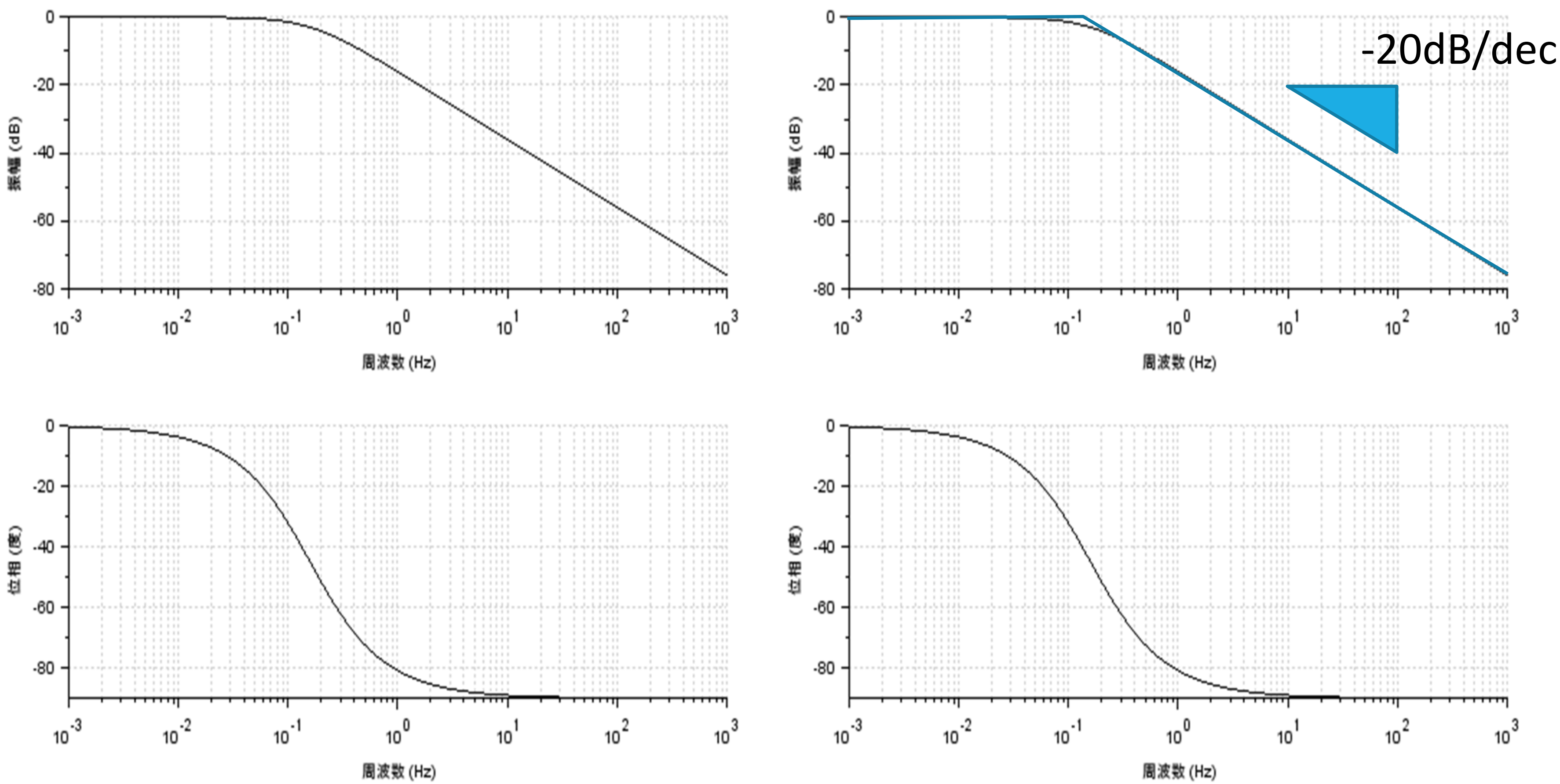
$G(s)$の逆システム$G^{-1}(s)$のボード線図は

$$20\log|G^{-1}(j\omega)| = -20\log|G(j\omega)|$$

$$\angle\frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

より符号を反転すればよい

# 折れ線近似



# 折れ線近似

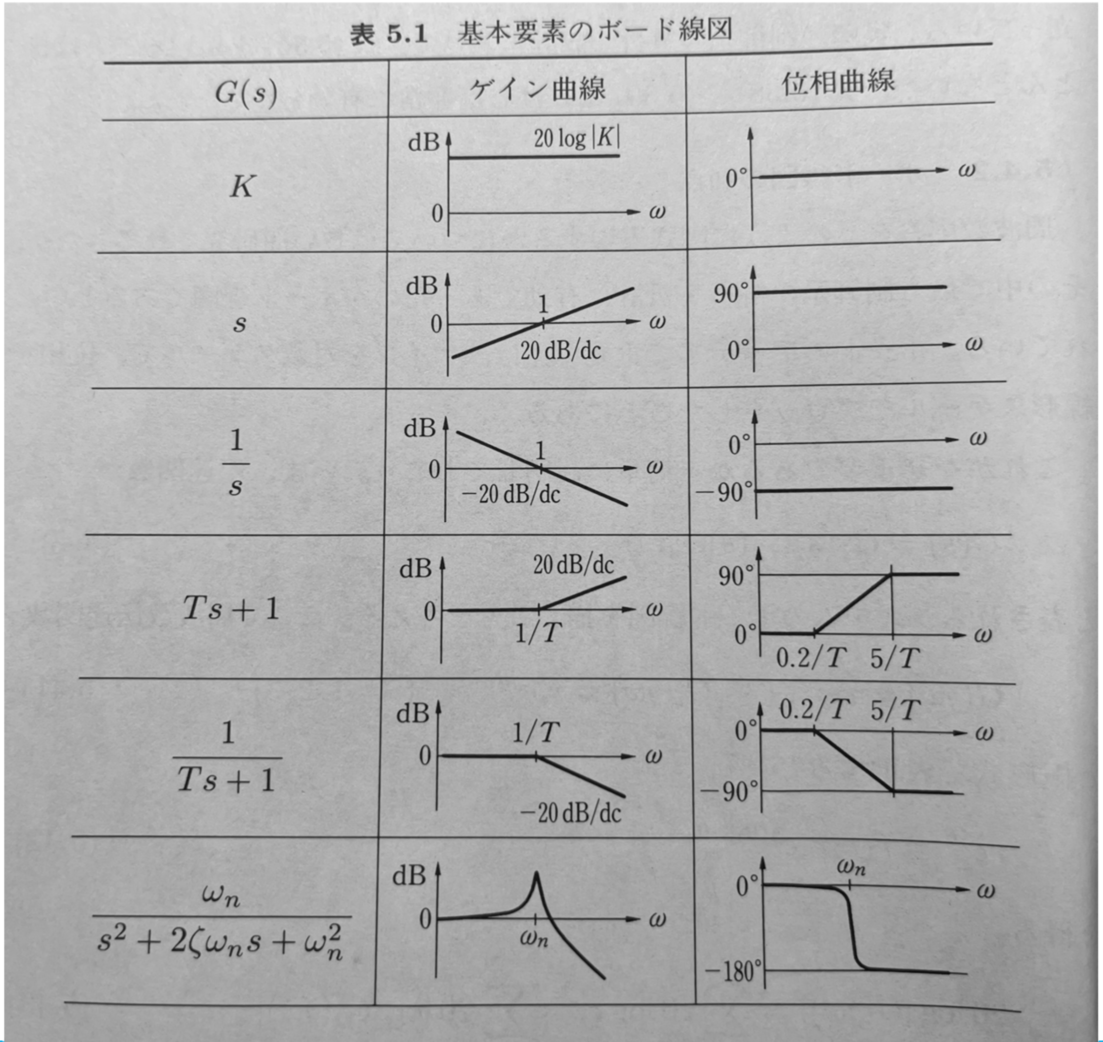
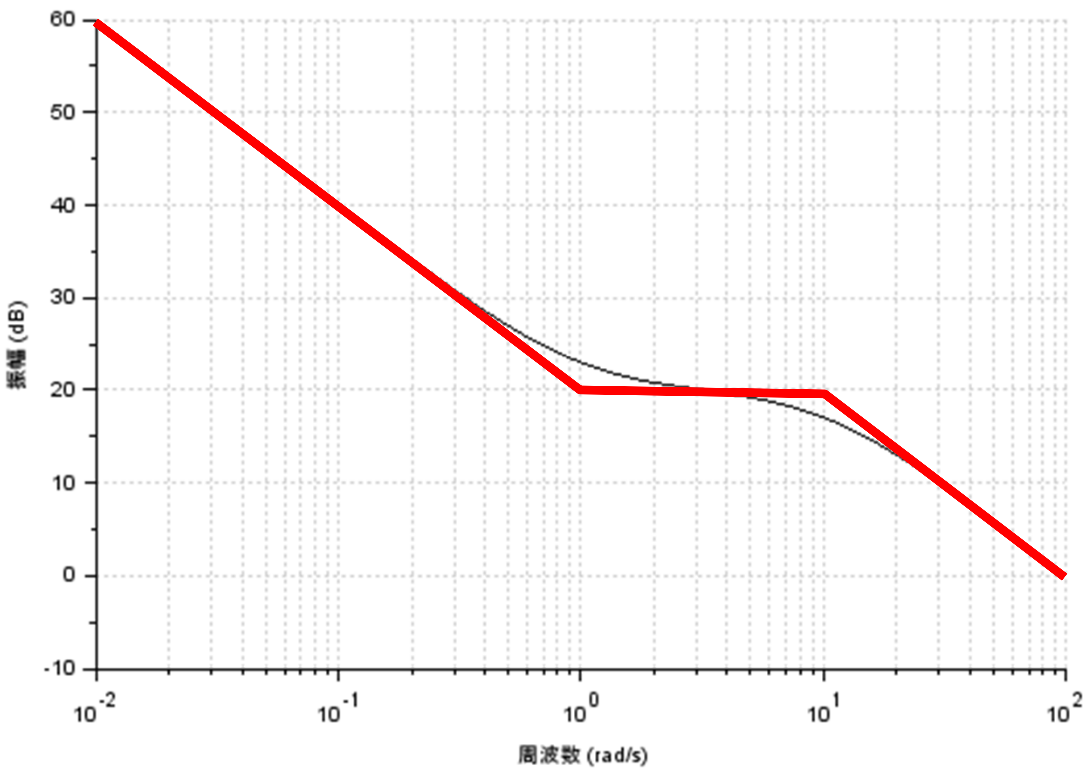


**表 5.1** 基本要素のボード線図

| $G(s)$ | ゲイン曲線 | 位相曲線 |
|---|---|---|
| $K$ | | |
| $s$ | | |
| $\frac{1}{s}$ | | |
| $Ts+1$ | | |
| $\frac{1}{Ts+1}$ | | |
| $\frac{\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ | | |

# 折れ線近似

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+10)} = 10 \cdot \frac{1}{s}\frac{1}{0.1s+1} \cdot (s+1)$$



# 本日の授業のゴール

- ボード線図
- ボードの定理
- 重ね合わせの原理⇒折れ線近似