フィードバック制御系の定常特性

制御工学１ ⑦

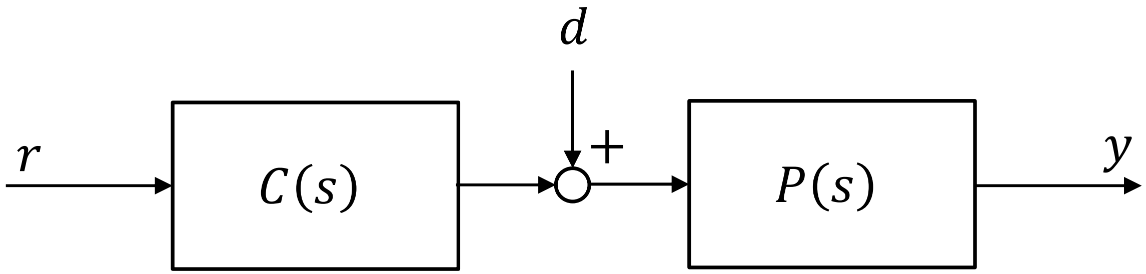
機械理工学専攻

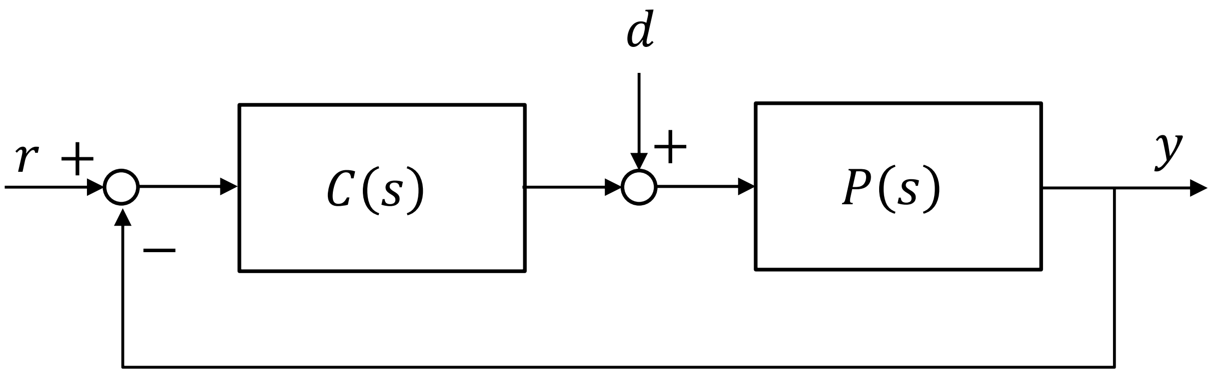
細田　耕

本日の授業のゴール

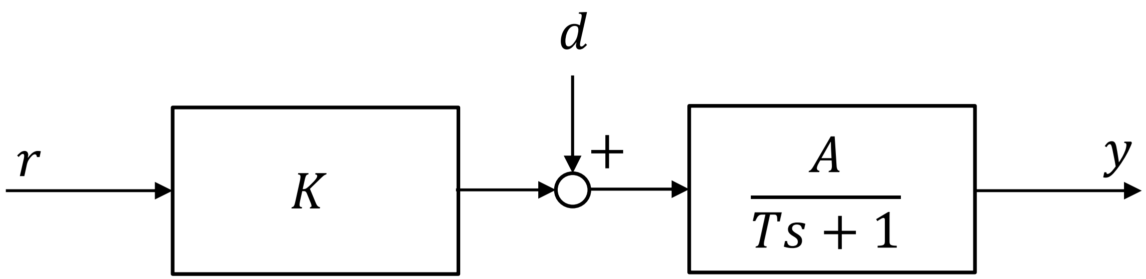
- フィードバック制御系
- モデル化誤差，感度関数
- 定常偏差

フィードフォワード制御系と フィードバック制御系

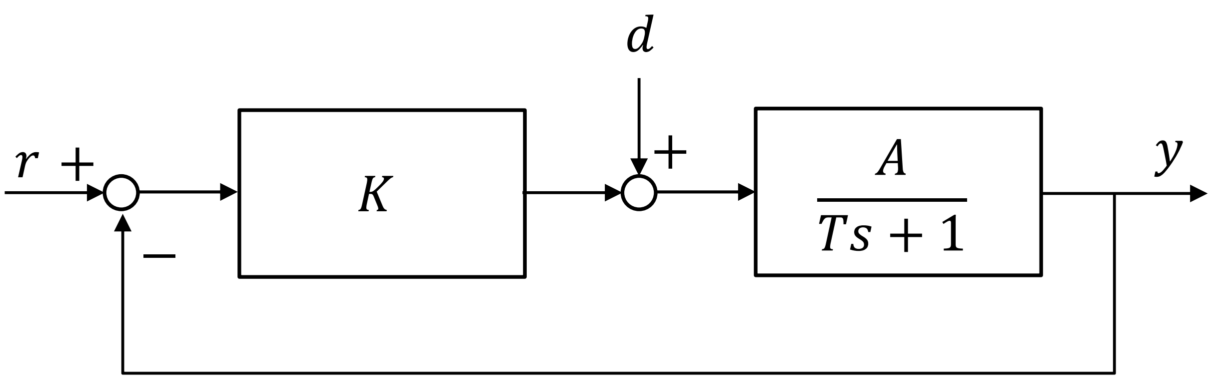




一次遅れ系＋定数ゲイン
FF制御系とFB制御系

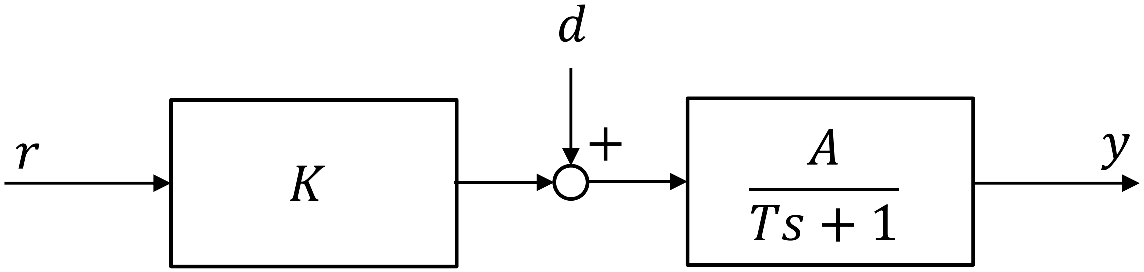


$$y(s) = P(s)C(s)r(s) = \frac{AK}{Ts+1}r(s)$$



$$y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}r(s) = \frac{AK}{Ts+1+AK}r(s)$$

一次遅れ系＋定数ゲイン フィードフォワード制御系



$$y(s) = P(s)C(s)r(s) = \frac{AK}{Ts+1}r(s)$$

ステップ応答は

$$y(t) = AK\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

となるので，

$$y(\infty) = AK$$

$K = 1/A$とすれば，$y(\infty) = r(\infty) = 1$となって，めでたしめでたし

一次遅れ系＋定数ゲイン フィードフォワード制御系

$$y(\infty) = AK$$

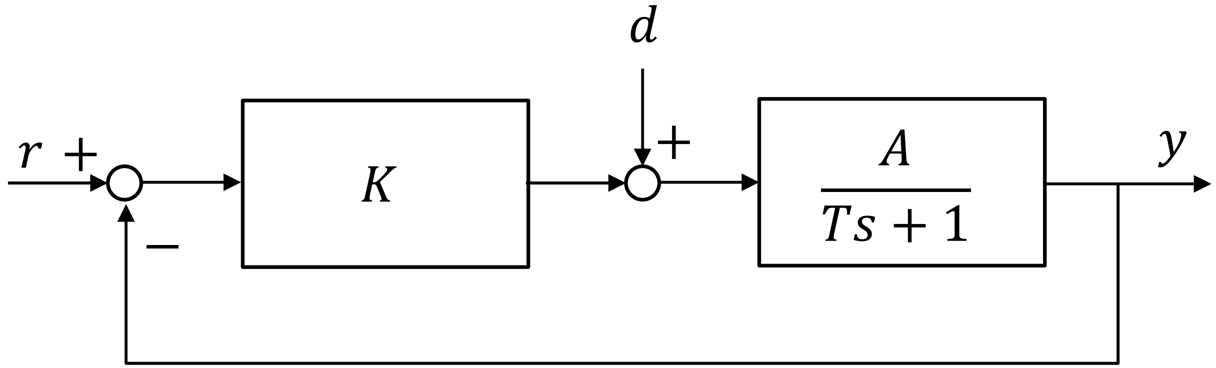
Aが正確にわかっているときには$K = 1/A$とすればいいのだけど，たとえば1%狂ってて$1.01A$だったとすると，

$$y(\infty) = 1.01$$

モデル化誤差

となって「定常偏差」が残る

一次遅れ系＋定数ゲイン フィードバック制御系



$$y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}r(s) = \frac{AK}{Ts+1+AK}r(s)$$

ステップ応答は

$$y(t) = \frac{AK}{AK+1}\left(1 - e^{-(AK+1)t/T}\right)$$

となるので，

$$y(\infty) = \frac{AK}{AK+1}$$

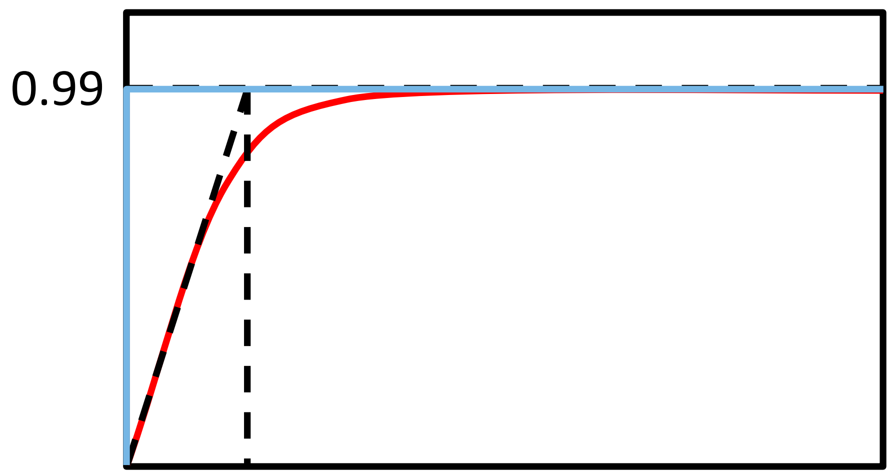
一次遅れ系＋定数ゲイン フィードバック制御系

$$y(\infty) = \frac{AK}{AK+1}$$

Aが1%狂ってて$1.01A$だったとしても，$K = 100$なら

$$y(\infty) = 101/102$$

で，ほぼ1になり，定常偏差は限りなく０になる.



モデル化誤差と感度関数

制御対象（プラント）の伝達関数が$P(s) \to \tilde{P}(s)$と変化したとする

相対的な変動率Δ_Pを

$$\Delta_P = \frac{P(s) - \tilde{P}(s)}{\tilde{P}(s)}$$

とし，その結果，閉ループ伝達関数が$T(s) \to \tilde{T}(s)$と変化したとすると

同じように相対的な変動率Δ_Tを

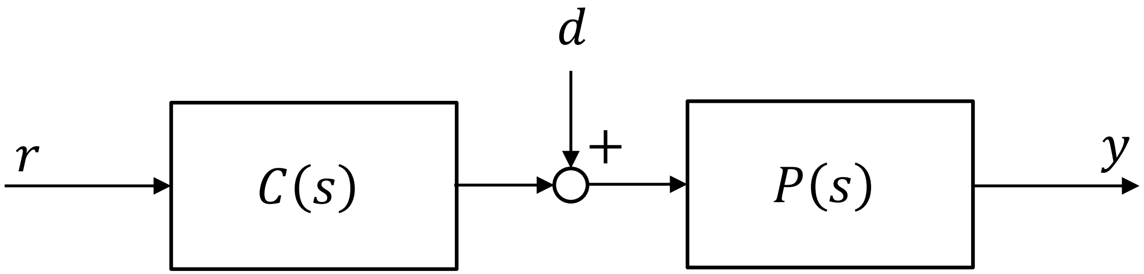
$$\Delta_T = \frac{T(s) - \tilde{T}(s)}{\tilde{T}(s)}$$

として，

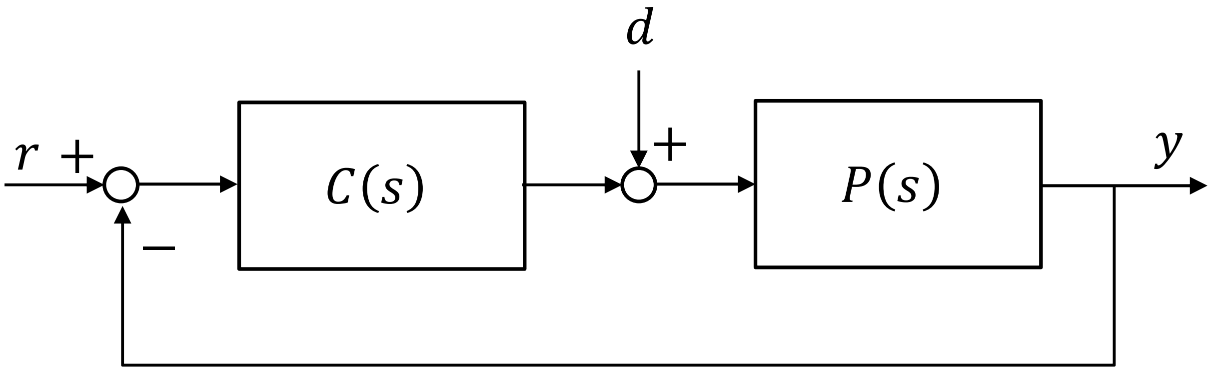
$$\Delta_T = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \Delta_P$$

となる．この係数を感度関数という

外乱に対する感度



$$y(s) = P(s)C(s)r(s) + P(s)d(s)$$

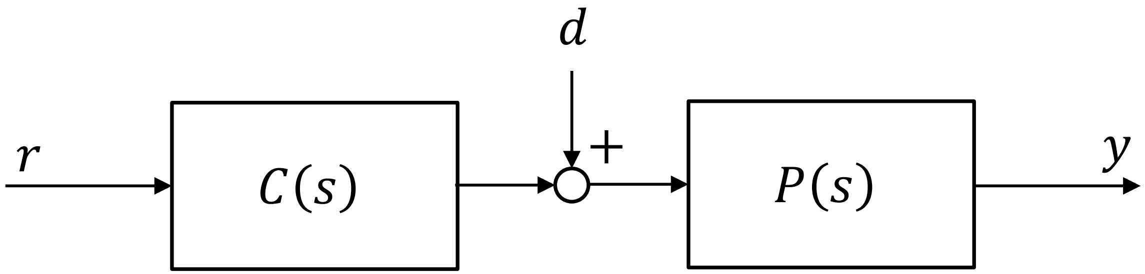


$\frac{1}{1+P(s)C(s)}$倍

（「感度関数」倍）

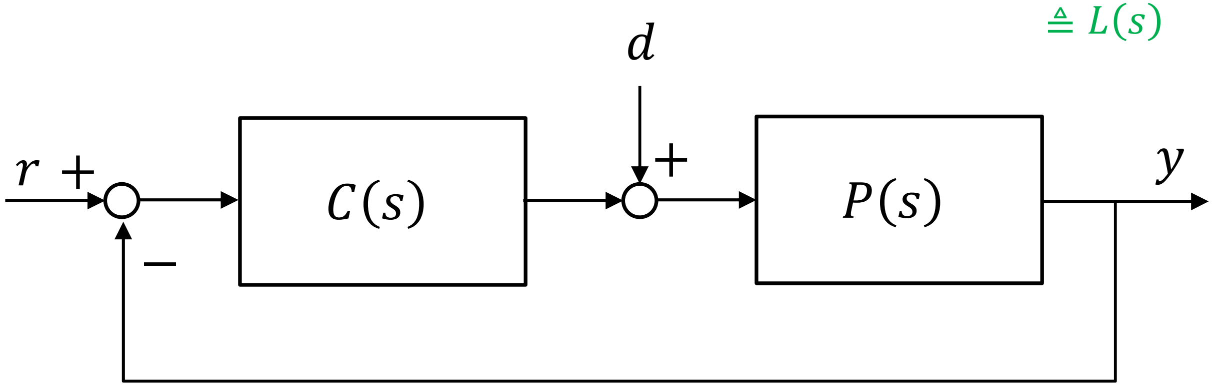
$$y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}r(s) + \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}d(s)$$

一巡伝達関数と閉ループ伝達関数



$$y(s) = P(s)C(s)r(s)$$
$$\triangleq L(s)$$

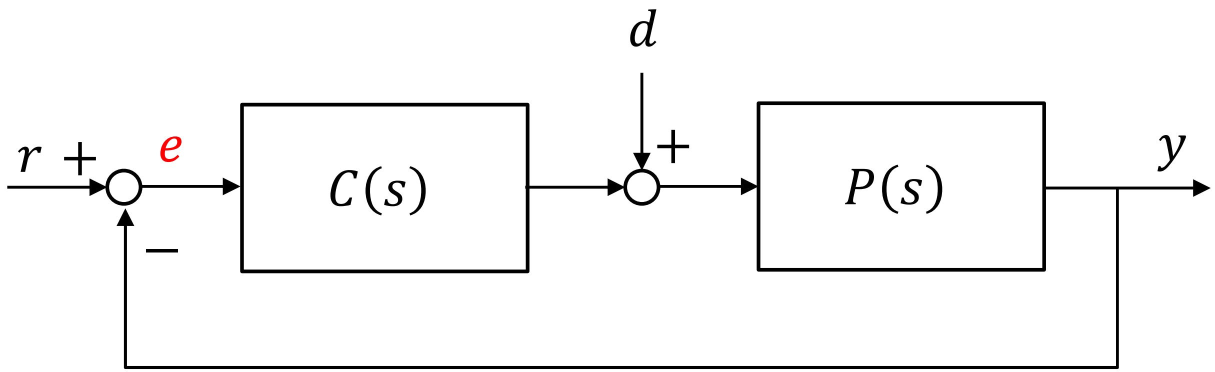
一巡伝達関数
（開ループ伝達関数）



$$y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} r(s)$$

閉ループ伝達関数

（フィードバック制御系の）目標値に対する定常偏差



$$e(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)} r(s) = \frac{1}{1+L(s)} r(s)$$

$\frac{1}{1+L(s)} r(s)$が安定であるとき，最終値定理より

$$e_s := \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s e(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+L(s)} r(s)$$

を「定常偏差」という.

（フィードバック制御系の）目標値に対する定常偏差

1. 入力がステップ$r(s) = 1/s$の場合

$$e_s = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} L(s)}$$

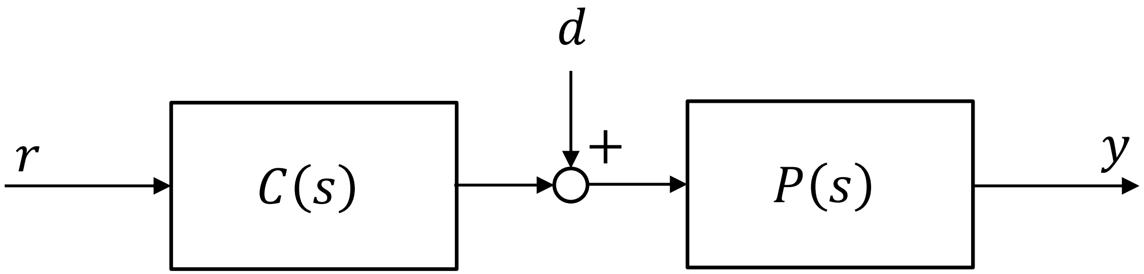
2. 入力がランプの場合

$$e_s = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sL(s)}$$

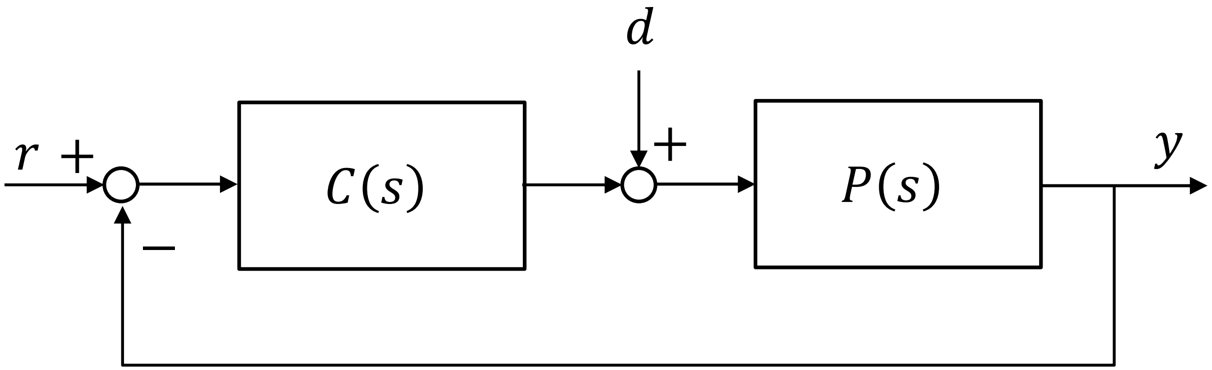
3. 入力が一定加速度の場合

$$e_s = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2 L(s)}$$

外乱に対する感度



$$y(s) = P(s)C(s)r(s) + P(s)d(s)$$



$$y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}r(s) + \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}d(s)$$

（フィードバック制御系の）外乱に対する定常偏差

外乱がステップだとすると$d(s) = 1/s$として，

$$\mathrm{y}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} d(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \frac{1}{s}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sy(s) = \lim_{s \to 0} \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}$$

これを0にするには，$P(0) = 0$か，$C(0) = \infty$

プラントが微分要素を持つ

制御器が積分器を持つ