**ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru**
**examenul licenţă,**
**manual valabil începând cu sesiunea iulie 2013**
**Specializarea Matematică informatică**

coordonator: Dorel I. Duca

# Cuprins

CAPITOLUL 1

# Serii de numere reale

Noţiunea de *serie* este extensia naturală a noţiunii de sumă finită. Studiul seriilor se reduce la studiul unor şiruri de numere. Determinarea sumei unei serii se reduce la calculul unei limite.

Însumarea progresiilor geometrice infinite cu raţia mai mică în modul decât 1 se efectua deja din antichitate (Arhimede). Divergenţa seriei armonice a fost stabilită de învăţatul italian Mengoli în 1650. Seriile apar constant în calculele savanţilor din secolul al XVIII-lea, dar neacordându-se totdeauna atenţia necesară problemelor convergenţei. O teorie riguroasă a seriilor a început cu lucrările lui Gauss (1812), Bolzano (1817) şi, în sfârşit, Cauchy (1821) care dă pentru prima dată definiţia valabilă şi azi, a sumei unei serii convergente şi stabileşte teoremele de bază.

## 1. Noţiuni generale

În acest paragraf vom defini noţiunile de serie de numere, serie convergentă, serie divergentă, sumă a unei serii de numere.

**Definiţia 1.1.1** *Se numeşte* ***serie de numere reale*** *orice pereche ordonată* $((u_n), (s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *unde* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de numere reale, iar*

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad \textit{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}. \ \Diamond$$

Prin tradiţie seria $((u_n), (s_n))$ se notează

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{sau} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \text{sau} \quad \sum_{n\geq 1} u_n \quad \text{sau} \quad u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

sau, când nu este pericol de confuzie, se notează simplu prin

$$\sum u_n.$$

Numărul real $u_n$, ($n \in \mathbb{N}$) se numeşte **termenul general** al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, iar şirul $(u_n)$ **şirul termenilor** seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Numărul real $s_n$, ($n \in \mathbb{N}$) se numeşte **suma parţială de rang** $n$ a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, iar şirul $(s_n)$ **şirul sumelor parţiale** ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

**Definiţia 1.1.2** *Spunem că seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = ((u_n), (s_n))$ *este* ***convergentă*** *dacă şirul* $(s_n)$ *al sumelor parţiale este convergent.*

*Orice serie care nu este convergentă se numeşte* ***divergentă.*** $\Diamond$

Dacă şirul $(s_n)$ al sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = ((u_n), (s_n))$ are limita $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, atunci spunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **are suma** $s$ (sau că $s$ **este suma** seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$) şi vom scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

**Exemplul 1.1.3** Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{1.1.1}$$

are termenul general $u_n = 1/(n(n+1))$, $(n \in \mathbb{N})$ şi suma parţială de rang $n \in \mathbb{N}$ egală cu

$$s_n = u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Întrucât şirul sumelor parţiale este convergent, şeria (1.1.1) este convergentă. Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 1$, suma seriei (1.1.1) este 1; prin urmare scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \ \Diamond$$

**Exemplul 1.1.4** Se numeşte **serie geometrică** (de raţie $q$) orice serie de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \tag{1.1.2}$$

unde $q$ este un număr real fixat. Evident termenul general al seriei geometrice (1.1.2) este $u_n = q^{n-1}$, $(n \in \mathbb{N})$, iar suma parţială de rang $n \in \mathbb{N}$ este

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{dacă } q \neq 1 \\ n, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}$$

De aici deducem imediat că seria geometrică (1.1.2) este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$. Dacă $|q| < 1$, atunci seria geometrică (1.1.2) are suma

$1/(1-q)$ şi scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Dacă $q \geq 1$, atunci seria geometrică (1.1.2) este divergentă; în acest caz seria are suma $+\infty$ şi scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = +\infty.$$

Dacă $q \leq -1$, atunci seria geometrică (1.1.2) este divergentă şi nu are sumă. $\Diamond$

Studiul unei serii comportă două probleme:

1) Stabilirea naturii seriei, adică a faptului că seria este convergentă sau divergentă.

2) În cazul în care seria este convergentă, determinarea sumei seriei.

Dacă pentru rezolvarea primei probleme dispunem de criterii de convergenţă şi divergenţă, pentru rezolvarea celei de a doua probleme nu dispunem de metode de determinare a sumei unei serii decât pentru câteva serii particulare.

În cele ce urmează vom da câteva criterii de convergenă şi divergenţă pentru serii.

**Teorema 1.1.5** (*criteriul general de convergenţă, criteriul lui Cauchy*) *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru fiecare număr real* $\varepsilon > 0$ *există un număr natural* $n_\varepsilon$ *cu proprietatea că oricare ar fi numerele naturale* $n$ *şi* $p$ *cu* $n \geq n_\varepsilon$ *avem*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

**Demonstraţie.** Fie $s_n = u_1 + \cdots + u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(s_n)$ al sumelor parţiale este convergent, prin urmare, în baza teoremei lui Cauchy, dacă şi numai dacă şirul $(s_n)$ este fundamental, adică dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_\varepsilon$ cu proprietatea că oricare ar fi numerele naturale $n$ şi $p$ cu $n \geq n_\varepsilon$ avem $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. Întrucât

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}, \text{ oricare ar fi } n, p \in \mathbb{N},$$

teorema este demonstrată. $\blacksquare$

**Exemplul 1.1.6** Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \tag{1.1.3}$$

numită *seria armonică*, este divergentă şi are suma $+\infty$.

**Soluţie.** Presupunem prin absurd că seria armonică (1.1.3) este convergentă; atunci, în baza criteriului general de convergenţă (teorema 1.1.5), pentru $\varepsilon = 1/2 > 0$ există un număr natural $n_0$ cu proprietatea că oricare ar fi numerele naturale $n$ şi $p$ cu $n \geq n_0$ avem

$$\left|\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right| < \frac{1}{2}.$$

De aici, luând $p = n = n_0 \in \mathbb{N}$, obţinem

$$\frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{n_0+n_0} < \frac{1}{2}. \tag{1.1.4}$$

Pe de altă parte, din $n_0 + k \leq n_0 + n_0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n_0$ deducem

$$\frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{n_0+n_0} \geq \frac{n_0}{2n_0} = \frac{1}{2}$$

şi deci inegalitatea (1.1.4) nu are loc. Această contradicţie ne conduce la concluzia că seria armonică (1.1.3) este divergentă. Deoarece şirul $(s_n)$ al sumelor parţiale este strict crescător avem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

■

**Exemplul 1.1.7** Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} \tag{1.1.5}$$

este convergentă.

**Soluţie.** Fie $u_n = (\sin n)/2^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; atunci pentru fiecare $n, p \in \mathbb{N}$ avem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Întrucât şirul $(1/2^n)$ este convergent către 0, deducem că există un număr natural $n_\varepsilon$ cu proprietatea că $1/2^n < \varepsilon$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_\varepsilon$. Atunci

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

oricare ar fi numerele naturale $n, p$ cu $n \geq n_\varepsilon$. Prin urmare seria (1.1.5) este convergentă. ■

**Teorema 1.1.8** *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă, atunci şirul* $(u_n)$ *este convergent către zero.*

**Demonstraţie.** Fie $\varepsilon > 0$; atunci, în baza criteriului general de convergenţă al lui Cauchy (teorema 1.1.5), există un număr natural $n_\varepsilon$ cu proprietatea că

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } n, p \in \mathbb{N} \text{ cu } n \geq n_\varepsilon.$$

Dacă aici luăm $p = 1$, obţinem că $|u_{n+1}| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, de unde deducem că

$$|u_n| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon + 1;$$

prin urmare şirul $(u_n)$ converge către 0. ■

**Observaţia 1.1.9** Reciproca teoremei 1.1.8, în general, nu este adevărată în sensul că există serii $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cu şirul $(u_n)$ convergent către 0 şi totuşi seria nu este convergentă. De exemplu seria armonică (1.1.3) este divergentă deşi şirul $(1/n)$ este convergent către 0. ♢

**Teorema 1.1.10** *Fie* $m$ *un număr natural. Atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă seria* $\sum_{n=m}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

**Demonstraţie.** Fie $s_n = u_1 + \cdots + u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi $t_n = u_m + \cdots + u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ $n \geq m$. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, prin urmare dacă şi numai dacă şirul $(t_n)_{n\geq m}$ este convergent, aşadar dacă şi numai dacă seria $\sum_{n=m}^{\infty} u_n$ este convergentă. ■

**Teorema 1.1.11** *Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt serii convergente şi* $a$ *şi* $b$ *sunt numere reale, atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ *este convergentă şi are suma*

$$a\sum_{n=1}^{\infty} u_n + b\sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

**Demonstraţie.** Evident, pentru fiecare număr natural $n$ avem

$$\sum_{k=1}^{n} (au_k + bv_k) = a\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + b\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right),$$

de unde, în baza proprietăţilor şirurilor convergente, obţinem afirmaţia teoremei. ■

**Exemplul 1.1.12** Întrucât seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

sunt convergente şi au suma 2 respectiv 3/2, deducem că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \right)$$

este convergentă şi are suma $(1/2) \cdot 2 - (1/3) \cdot (3/2) = 1/2$. $\diamondsuit$

**Definiţia 1.1.13** *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie convergentă cu suma* $s$, $n$ *un număr natural şi* $s_n = u_1 + \cdots + u_n$ *suma parţială de rang* $n$ *a seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. *Numărul real* $r_n = s - s_n$ *se numeşte* ***restul de ordinul*** $n$ *al seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. $\diamondsuit$

**Teorema 1.1.14** *Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă, atunci şirul* $(r_n)$ *al resturilor ei este convergent către* 0.

**Demonstraţie.** Fie $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Deoarece şirul $(s_n)$ al sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergent către $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$ şi $r_n = s - s_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, avem că şirul $(r_n)$ este convergent către 0. $\blacksquare$

## 2. Serii cu termeni pozitivi

Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este o serie de numere reale convergentă, atunci şirul $(s_n)$ al sumelor parţiale este mărginit. Reciproca acestei afirmaţii, în general nu este adevărată în sensul că există serii divergente care au şirul sumelor parţiale mărginit. Într-adevăr, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ are şirul sumelor parţiale cu termenul general $s_n$, $(n \in \mathbb{N})$ egal cu

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Evident şirul $(s_n)$ este mărginit ($|s_n| \leq 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$) deşi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ este divergentă (şirul $(s_n)$ nu este convergent).

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ are termenii numere reale pozitive, atunci şirul $(s_n)$ al sumelor parţiale este crescător; în acest caz faptul că şirul $(s_n)$ este mărginit este echivalent cu faptul că şirul $(s_n)$ este convergent.

Scopul acestui paragraf este de a da criterii de convergenţă pentru aşa numitele serii cu termeni pozitivi.

**Definiţia 1.2.1** *Se numeşte **serie cu termeni pozitivi** orice serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *care are proprietatea că* $u_n > 0$ *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$. $\Diamond$

Pentru seriile cu termeni pozitivi are loc următoarea afirmaţie.

**Teorema 1.2.2** *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi, atunci*

*$1^0$ Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *are sumă şi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

*$2^0$ Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă şirul* $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)$ *al sumelor parţiale este mărginit.*

**Demonstraţie.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ punem

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

$1^0$ Şirul $(s_n)$ este crescător şi atunci, în baza teoremei lui Weierstrass relativă la şirurile monotone, afirmaţia $1^0$ este dovedită.

$2^0$ Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci şirul sumelor parţiale $(s_n)$ este convergent şi deci mărginit.

Dacă şirul $(s_n)$ este mărginit, atunci, întrucât el este monoton, deducem că şirul $(s_n)$ este convergent şi prin urmare seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă. $\blacksquare$

**Teorema 1.2.3** (primul criteriu al comparaţiei) *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt serii cu termeni pozitivi cu proprietatea că există un număr real* $a > 0$ *şi un număr natural* $n_0$ *astfel încât*

$$u_n \leq a v_n \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \tag{1.2.1}$$

*atunci:*

$1^0$ *Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

$2^0$ *Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, fie $s_n = u_1 + ... + u_n$ şi $t_n = v_1 + ... + v_n$; atunci din (1.2.1) avem că

$$s_n \leq s_{n_0} + a\left(v_{n_0+1} + ... + v_n\right), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0. \tag{1.2.2}$$

$1^0$ Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci şirul $(t_n)$ este mărginit, prin urmare există un număr real $M > 0$ cu proprietatea că $t_n \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Acum din (1.2.2) deducem că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ au loc inegalităţile

$$s_n \leq s_{n_0} + a\left(t_n - t_{n_0}\right) \leq s_{n_0} + at_n - at_{n_0} \leq s_{n_0} + at_n \leq s_{n_0} + aM,$$

de unde rezultă că şirul $(s_n)$ este mărginit. Atunci, în baza teoremei 1.2.2, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

$2^0$ Presupunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ar fi convergentă, atunci în baza afirmaţiei $1^0$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ar fi convergentă, ceea ce contrazice ipoteza că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. Aşadar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă. ■

**Exemplul 1.2.4** Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ este divergentă. Într-adevăr, din inegalitatea $\sqrt{n} \leq n$ adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, obţinem că $n^{-1} \leq n^{-1/2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Cum seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ este divergentă, în baza teoremei 1.2.2, afirmaţia $2^0$, deducem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ este divergentă. ◊

**Teorema 1.2.5** (al doilea criteriu al comparaţiei) *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt serii cu termeni pozitivi cu proprietatea că există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \in [0, +\infty], \tag{1.2.3}$$

*atunci*

$1^0$ *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \in ]0, +\infty[,$$

*atunci seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *au aceeaşi natură.*

$2^0$ *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0,$$

*atunci:*

*a) Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

*b) Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este divergentă.*

$3^0$ *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty,$$

*atunci:*

*a) Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este convergentă.*

*b) Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** $1^0$ Fie $a := \lim\limits_{n\to\infty} (u_n/v_n) \in ]0, +\infty[$; atunci există un număr natural $n_0$ cu proprietatea că

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - a \right| < \frac{a}{2}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0,$$

de unde deducem că

$$v_n \leq (2/a)\, u_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \tag{1.2.4}$$

şi

$$u_n \leq (3a/2)\, v_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0. \tag{1.2.5}$$

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci în baza primului criteriu al comparaţiei (teorema 1.2.3), aplicabil pentru că are loc $(1.2.4)$, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă.

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci ţinând seama de $(1.2.5)$, în baza primului criteriu al comparaţiei (teorema 1.2.3) rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

$2^0$ Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n/v_n) = 0$, atunci există un număr natural $n_0$ astfel încât $u_n/v_n < 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, de unde deducem că

$$u_n \leq v_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primul criteriu al comparaţiei.

$3^0$ Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n/v_n) = +\infty$, atunci există un număr natural $n_0$ astfel încât $u_n/v_n > 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, de unde deducem că

$$v_n \leq u_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primul criteriu al comparaţiei. ■

**Exemplul 1.2.6** Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ este convergentă. Într-adevăr, din

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1 \in ]0,+\infty[,$$

deducem că seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ au aceeaşi natură. Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă (vezi exemplul 1.1.3), obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ este convergentă. $\Diamond$

**Teorema 1.2.7** (al treilea criteriu al comparaţiei) *Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt serii cu termeni pozitivi cu proprietatea că există un număr natural $n_0$ astfel încât:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \tag{1.2.6}$$

*atunci:*

$1^0$ *Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.*

$2^0$ *Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.*

**Demonstraţie.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 + 1$; atunci din (1.2.6) avem succesiv:

$$\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}$$

$$\cdots$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}},$$

de unde, prin înmulţire membru cu membru, obţinem

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \frac{v_n}{v_{n_0}}.$$

Aşadar

$$u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primului criteriu al comparaţiei (teorema 1.2.3). Teorema este demonstrată. ■

**Teorema 1.2.8** (criteriul condensării al lui Cauchy) *Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că şirul $(u_n)$ al termenilor seriei este descrescător. Atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ au aceeaşi natură.*

**Demonstraţie.** Fie $s_n := u_1 + u_2 + ... + u_n$ suma parţială de rang $n \in \mathbb{N}$ a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ şi fie $S_n := 2u_2 + 2^2 u_{2^2} + ... + 2^n u_{2^n}$ suma parţială de rang $n \in \mathbb{N}$ a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$.

Presupunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este convergentă; atunci şirul $(S_n)$ al sumelor parţiale este mărginit, prin urmare există un număr real $M > 0$ astfel încât

$$0 \leq S_n \leq M, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Pentru a arăta că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, în baza teoremei 1.2.2, este suficient să arătăm că şirul $(s_n)$ al sumelor parţiale este mărginit. Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este cu termeni pozitivi, din $n \leq 2^{n+1} - 1$, $(n \in \mathbb{N})$ deducem că

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^{n+1}-1} &= u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + \cdots + u_7) + \\ &+ (u_{2^n} + u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}). \end{aligned}$$

Întrucât şirul $(u_n)$ este descrescător, urmează că

$$u_{2^k} > u_{2^k+1} > \cdots > u_{2^{k+1}-1}, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}$$

şi deci $s_n$ se poate delimita mai departe astfel

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^{n+1}-1} &\leq u_1 + 2 \cdot u_2 + 2^2 \cdot u_{2^2} + \cdots + 2^n \cdot u_{2^n} = \\ &= u_1 + S_n \leq u_1 + M. \end{aligned}$$

Aşadar şirul $(s_n)$ este mărginit şi deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Presupunem acum că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă; atunci şirul $(s_n)$ al sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este mărginit, prin urmare există un număr real $M > 0$ astfel încât $0 \leq s_n \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Pentru a arăta că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este convergentă, este suficient să arătăm că şirul $(S_n)$ este mărginit. Fie deci $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) + \cdots + \\ &+ (u_{2^{n-1}+1} + \cdots + u_{2^n}) \geq \\ &\geq u_1 + u_2 + 2u_{2^2} + 2^2 u_{2^3} + \cdots + 2^{n-1} u_{2^n} \geq \\ &\geq u_1 + \frac{1}{2} S_n \geq \frac{1}{2} S_n, \end{aligned}$$

prin urmare avem inegalităţile

$$S_n \leq 2 s_{2^n} \leq 2M.$$

Aşadar şirul $(S_n)$ este mărginit şi deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este convergentă. ■

**Exemplul 1.2.9** Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, \text{ unde } a \in \mathbb{R},$$

numită **seria armonică generalizată**, este divergentă pentru $a \leq 1$ şi convergentă pentru $a > 1$.

**Soluţie.** Într-adevăr, dacă $a \leq 0$, atunci şirul termenilor seriei $(n^{-a})$ nu converge către zero şi deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este divergentă. Dacă $a > 0$, atunci şirul termenilor seriei $(n^{-a})$ este descrescător convergent către zero şi deci putem aplica criteriul condensării; seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a}$ au aceeaşi natură. Întrucât $2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deducem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a}$ este de fapt seria geometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^n$, divergentă pentru $a \leq 1$ şi convergentă pentru $a > 1$. Urmează că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este divergentă pentru $a \leq 1$ şi convergentă pentru $a > 1$. ■

**Teorema 1.2.10** (criteriul raportului, criteriul lui D'Alembert) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

$1^0$ *Dacă există un număr real* $q \in [0, 1[$ *şi un număr natural* $n_0$ *astfel încât:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$

*atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

$2^0$ *Dacă există un număr natural* $n_0$ *astfel încât:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$

*atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** $1^0$ Aplicăm al treilea criteriu al comparaţiei (teorema 1.2.7, afirmaţia $1^0$), luând $v_n := q^{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q = \frac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$

iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, prin urmare seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

$2^0$ Din $u_{n+1}/u_n \geq 1$ deducem că $u_{n+1} \geq u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, prin urmare şirul $(u_n)$ nu converge către 0; atunci, în baza teoremei 1.1.8, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

**Teorema 1.2.11** (consecinţa criteriului raportului) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi pentru care există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$1^0$ *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

*atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

$2^0$ *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

*atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** Fie $a := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Evident $a \geq 0$.

$1^0$ Întrucât $a \in [0,1[$ deducem că există un număr real $q \in ]a,1[$. Atunci, din $a \in ]a-1,q[$ rezultă că există un număr natural $n_0$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \in ]a-1,q[, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0.$$

Urmează că

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0.$$

Aplicând acum criteriul raportului, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

$2^0$ Dacă $1 < a$, atunci există un număr natural $n_0$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0.$$

Aplicând acum criteriul raportului, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.
■

**Exemplul 1.2.12** Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \tag{1.2.7}$$

este convergentă.

**Soluţie.** Avem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{27} < 1,$$

şi atunci, în baza consecinţei criteriului raportului, seria (1.2.7) este convergentă. ■

**Observaţia 1.2.13** Dacă pentru seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ şi este egală cu 1, atunci consecinţa criteriului raportului nu decide dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă sau divergentă; există serii convergente, dar şi serii divergente pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Într-adevăr, pentru seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ avem, în ambele cazuri, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, prima serie fiind divergentă (vezi exemplul 1.1.3) şi a doua serie fiind convergentă (vezi exemplul 1.2.6). $\diamondsuit$

**Teorema 1.2.14** (criteriul radicalului, criteriul lui Cauchy) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

$1^0$ *Dacă există un număr real* $q \in [0, 1[$ *şi un număr natural* $n_0$ *astfel încât*

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \tag{1.2.8}$$

*atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

$2^0$ *Dacă există un număr natural* $n_0$ *astfel încât*

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \tag{1.2.9}$$

*atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** $1^0$ Presupunem că există $q \in [0, 1[$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât (1.2.8) să aibă loc. Atunci

$$u_n \leq q^n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primul criteriu al comparaţiei (teorema 1.2.3, afirmaţia $1^0$), luând $v_n := q^{n-1}$,oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi $a := q$. Întrucât seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ este convergentă, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

$2^0$ Din (1.2.9) deducem că $u_n \geq 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, prin urmare şirul $(u_n)$ nu converge către 0; atunci, în baza teoremei 1.1.8, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. $\blacksquare$

**Teorema 1.2.15** (consecinţa criteriului radicalului) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi pentru care există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

$1^0$ *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1,$$

*atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

$2^0$ *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1,$$

*atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** Fie $a := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Evident $a \geq 0$.

$1^0$ Întrucât $a \in [0, 1[$ deducem că există un număr real $q \in ]a, 1[$. Atunci, din $a \in ]a-1, q[$ rezultă că există un număr natural $n_0$ astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} \in ]a-1, q[, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0.$$

Urmează că

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0.$$

Aplicând acum criteriul radicalului, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

$2^0$ Dacă $1 < a$, atunci există un număr natural $n_0$ astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0.$$

Aplicând acum criteriul radicalului, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

**Exemplul 1.2.16** Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n. \tag{1.2.10}$$

este convergentă.

**Soluţie.** Avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right) = \frac{4}{3} > 1.$$

şi deci, în baza consecinţei criteriului radicalului, seria (1.2.10) este divergentă. ■

**Observaţia 1.2.17** Dacă pentru seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ şi este egală cu 1, atunci consecinţa criteriului radicalului nu decide dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă sau divergentă; există serii convergente, dar şi serii divergente pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$. Într-adevăr, pentru seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ avem, în ambele cazuri, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, prima serie fiind divergentă (vezi exemplul 1.1.3) şi a doua serie fiind convergentă (vezi exemplul 1.2.6). $\diamondsuit$

**Teorema 1.2.18** (criteriul lui Kummer) *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

$1^0$ *Dacă există un şir* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de numere reale pozitive, există un număr real* $r > 0$ *şi există un număr natural* $n_0$ *cu proprietatea că*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq r, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \tag{1.2.11}$$

*atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

$2^0$ *Dacă există un şir* $(a_n)$, *de numere reale pozitive cu proprietatea că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *este divergentă şi există un număr natural* $n_0$ *astfel încât*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \tag{1.2.12}$$

*atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** Pentru fiecare număr natural $n$, notăm cu

$$s_n := u_1 + u_2 + ... + u_n$$

suma parţială de rang $n$ a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$1^0$ Presupunem că există un şir $(a_n)$, de numere reale pozitive, există un număr real $r > 0$ şi există un număr natural $n_0$ astfel încât (1.2.11) are loc. Să observăm că relaţia (1.2.11) este echivalentă cu

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} \geq r u_{n+1}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0. \tag{1.2.13}$$

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 + 1$; atunci din (1.2.13) avem succesiv:

$$a_{n_0} u_{n_0} - a_{n_0+1} u_{n_0+1} \geq r u_{n_0+1},$$
$$\cdots$$
$$a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n \geq r u_n,$$

de unde, prin adunare membru cu membru, obţinem

$$a_{n_0} u_{n_0} - a_n u_n \geq r(u_{n_0+1} + \cdots + u_n).$$

De aici deducem că, pentru fiecare număr natural $n \geq n_0$ avem

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq s_{n_0} + \frac{1}{r}\left(a_{n_0 u_{n_0}} - a_n u_n\right) \leq$$
$$\leq s_{n_0} + \frac{1}{r} a_{n_0} u_{n_0},$$

prin urmare şirul $(s_n)$ al sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este mărginit. În baza teoremei 1.2.2, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

$2^0$ Presupunem că există un şir $(a_n)$, de numere reale pozitive, cu proprietatea că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă şi există un număr natural $n_0$ astfel încât (1.2.12) are loc. Evident (1.2.12) este echivalentă cu

$$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0.$$

Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă, conform criteriului al III-lea al comparaţiei seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Teorema este demonstrată. ■

**Teorema 1.2.19** (criteriul lui Raabe-Duhamel) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

$1^0$ *Dacă există un număr real* $q > 1$ *şi un număr natural* $n_0$ *astfel încât*

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq q \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0, \tag{1.2.14}$$

*atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

$2^0$ *Dacă există un număr natural* $n_0$ *astfel încât*

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0, \tag{1.2.15}$$

*atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** În criteriul lui Kummer (teorema 1.2.18) să luăm $a_n := n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; obţinem

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1.$$

$1^0$ Dacă luăm $r := q - 1 > 0$, atunci, întrucât (1.2.11) este echivalentă cu (1.2.14), deducem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

$2^0$ Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ este divergentă şi (1.2.12) este echivalentă cu (1.2.15), obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

**Teorema 1.2.20** (consecinţa criteriului lui Raabe-Duhamel) *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi pentru care există limita*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right).$$

$1^0$ *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>1,$$

*atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

$2^0$ *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)<1,$$

*atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** Fie

$$b:=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right).$$

$1^0$ Din $b>1$ deducem că există un număr real $q\in]1,b[$. Atunci $b\in]q,b+1[$ implică existenţa unui număr natural $n_0$ astfel încât

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\in]q,b+1[,\ \text{oricare ar fi } n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0,$$

de unde obţinem că (1.2.14) are loc. Aplicând acum criteriul lui Raabe-Duhamel, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

$2^0$ Dacă $b<1$, atunci există un număr natural $n_0$ astfel încât (1.2.15) să aibă loc. Aplicând acum criteriul lui Raabe-Duhamel, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

**Exemplul 1.2.21** Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a\,(a+1)\cdots(a+n-1)},\ \text{unde } a>0,$$

este convergentă dacă şi numai dacă $a>2$.

**Soluţie.** Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

şi deci consecinţa criteriului raportului nu decide natura seriei. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=a-1,$$

în baza consecinţei criteriului lui Raabe-Duhamel, dacă $a > 2$, atunci seria dată este convergentă, iar dacă $a < 2$ seria dată este divergentă. Dacă $a = 2$, atunci seria dată devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ care este divergentă. Aşadar seria dată este convergentă dacă şi numai dacă $a > 2$. ■

## 3. Probleme propuse spre rezolvare

**Exemplul 1.3.1** Stabiliţi natura şi suma seriilor:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right); \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n^2+n+1}; \quad c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right);$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}; \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}; \quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

**Exemplul 1.3.2** Stabiliţi natura seriilor

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9+n}{2n+1}; \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}; \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}.$$

**Exemplul 1.3.3** Stabiliţi natura seriilor:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}; \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}; \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}};$$

$$d)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n-1}}; \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{10}}{n^{1.1}}; \quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}};$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}; \quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^2-1}}{\sqrt{n^4-1}}; \quad i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1}}{\sqrt{n^3-1}}.$$

**Exemplul 1.3.4** Stabiliţi natura seriilor:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}; \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}; \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n};$$

$$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \quad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cdot 101\cdot ...\cdot(100+n)}{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)}; \quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdot ...\cdot(4+3n)}{2\cdot 6\cdot ...\cdot(2+4n)}.$$

**Exemplul 1.3.5** Pentru fiecare $a > 0$, studiaţi natura seriei:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n+n}; \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}; \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}; \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n};$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}a\right)^n; \quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+a^n}; \quad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^a}.$$

**Exemplul 1.3.6** Pentru fiecare $a, b > 0$, studiaţi natura seriei:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^n + b^n};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^n + b^n};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n b^n}{a^n + b^n};$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2a+1)(3a+1)\cdots(na+1)}{(2b+1)(3b+1)\cdots(nb+1)}.$$

**Exemplul 1.3.7** Stabiliţi natura seriilor:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

**Exemplul 1.3.8** Pentru fiecare $a > 0$, studiaţi natura seriilor:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)...(a+n)};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}.$$

**Observaţia 1.3.9** Pentru detalii puteţi consulta [**5**]..

CAPITOLUL 2

# Formula lui Taylor

## 1. Polinomul lui Taylor: definiţie, proprietăţi

Formula lui Taylor, utilizată în special în aproximarea funcţiilor prin polinoame, este una din cele mai importante formule din matematică.

**Definiţia 2.1.1** *Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $n$ ori în punctul $x_0$. Funcţia (polinomială) $T_{n;x_0} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$(T_{n;x_0} f)(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$
$$... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

*se numeşte* ***polinomul lui Taylor de ordin*** $n$ ***ataşat funcţiei*** $f$ ***şi punctului*** $x_0$. ◊

**Observaţia 2.1.2** Polinomul lui Taylor de ordin $n$ are gradul cel mult $n$. ◊

**Exemplul 2.1.3** Pentru funcţia exponenţială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \exp x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

avem

$$f^{(k)}(x) = \exp x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \text{ şi } k \in \mathbb{N}.$$

Polinomul lui Taylor de ordin $n$ ataşat funcţiei exponenţiale, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, şi punctului $x_0 = 0$ este

$$(T_{n;0} \exp)(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. ◊

**Exemplul 2.1.4** Pentru funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{1}{1 + x}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},$$

avem

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(1 + x)^{k+1}}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \text{ şi } k \in \mathbb{N}.$$

Polinomul lui Taylor de ordin $n$ ataşat funcţiei $f$ şi punctului $x_0 = 0$ este

$$(T_{n;0}f)(x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

Evident $T_{n;x_0}f$ este o funcţie indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$\begin{aligned}(T_{n;x_0}f)'(x) &= \\ &= f^{(1)}(x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} = \\ &= \left(T_{n-1;x_0}f'\right)(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_{n;x_0}f)''(x) &= \\ &= f^{(2)}(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} = \\ &= \left(T_{n-2;x_0}f''\right)(x),\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}(T_{n;x_0}f)^{(n-1)}(x) &= \\ &= f^{(n-1)}(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x - x_0) = \\ &= \left(T_{1;x_0}f^{(n-1)}\right)(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_{n;x_0}f)^{(n)}(x) &= \\ &= f^{(n)}(x_0) = \\ &= \left(T_{0;x_0}f^{(n)}\right)(x),\end{aligned}$$

$$(T_{n;x_0}f)^{(k)}(x) = 0, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N},\ k \geq n + 1.$$

De aici deducem că

$$(T_{n;x_0}f)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \text{ oricare ar fi } k \in \{0, 1, \cdots, n\}$$

şi

$$(T_{n;x_0}f)^{(k)}(x_0) = 0, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N},\ k \geq n + 1.$$

Prin urmare, polinomul lui Taylor de ordin $n$ ataşat funcţiei $f$ şi punctului $x_0$ cât şi derivatele lui până la ordinul $n$ coincid în $x_0$ cu funcţia $f$ şi respectiv cu derivatele ei până la ordinul $n$.

## 2. Formula lui Taylor

**Definiţia 2.2.1** *Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $n$ ori în punctul $x_0$. Funcţia $R_{n;x_0} f : D \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$(R_{n;x_0} f)(x) = f(x) - (T_{n;x_0} f)(x), \text{ oricare ar fi } x \in D$$

*se numeşte **restul Taylor de ordinul** $n$ **ataşat funcţiei** $f$ **şi punctului** $x_0$.*

*Orice egalitate de forma*

$$f = T_{n;x_0} f + R_{n;x_0} f,$$

*unde pentru $R_{n;x_0} f$ este dată o formulă de calcul, se numeşte **formulă Taylor de ordinul** $n$ **corespunzătoare funcţiei** $f$ **şi punctului** $x_0$. În acest caz $R_{n;x_0} f$ se numeşte restul de ordinul $n$ al formulei lui Taylor.* $\diamondsuit$

Deoarece $f$ şi $T_{n;x_0} f$ sunt derivabile de $n$ ori în $x_0$, rezultă că şi restul $R_{n;x_0} f = f - T_{n;x_0} f$ este o funcţie derivabilă de $n$ ori în $x_0$ şi

$$(R_{n;x_0} f)^{(k)}(x_0) = 0, \text{ oricare ar fi } k \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

Pe de altă parte, funcţia $R_{n;x_0} f : D \to \mathbb{R}$ fiind derivabilă în $x_0$ este continuă în $x_0$ şi deci există

$$\lim_{x \to x_0} (R_{n;x_0} f)(x) = (R_{n;x_0} f)(x_0) = 0.$$

Aceasta înseamnă că pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr real $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in D$ pentru care $|x - x_0| < \delta$ avem

$$|f(x) - (T_{n;x_0} f)(x)| < \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru valorile lui $x \in D$, suficient de apropiate de $x_0$, valoarea $f(x)$ poate fi aproximată prin $(T_{n;x_0} f)(x)$.

În cele ce urmează, vom preciza acest rezultat.

**Teorema 2.2.2** *Fie $I$ un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $n$ ori în punctul $x_0$. Atunci*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(R_{n;x_0} f)(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

**Demonstraţie.** Aplicând de $n-1$ ori regula lui l'Hôpital şi ţinând seama că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f^{(n)}(x_0),$$

obţinem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(R_{n;x_0} f)(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (T_{n;x_0} f)(x)}{(x - x_0)^n} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - (T_{n;x_0} f)'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \cdots$$

$$\cdots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - (T_{n;x_0} f)^{(n-1)}(x)}{n!\,(x - x_0)} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!\,(x - x_0)} =$$
$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] = 0.$$

■

Dacă notăm cu $\alpha_{n;x_0} f : I \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$(\alpha_{n;x_0} f)(x) = \begin{cases} \dfrac{(R_{n;x_0} f)(x)}{(x - x_0)^n}, & \text{dacă } x \in I \backslash \{x_0\} \\ 0, & \text{dacă } x = x_0, \end{cases}$$

atunci, din teorema 2.2.2 rezultă că funcţia $\alpha_{n;x_0} f$ este continuă în punctul $x_0$. Aşadar are loc următoarea afirmaţie cunoscută sub numele de teorema lui Taylor şi Young.

**Teorema 2.2.3** (teorema lui Taylor-Young) *Fie $I$ un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă funcţia $f$ este derivabilă de $n$ ori în punctul $x_0$, atunci există o funcţie $\alpha_{n;x_0} f : I \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăţi:*

$1^0$ $(\alpha_{n;x_0} f)(x_0) = 0.$

$2^0$ *Funcţia $\alpha_{n;x_0} f$ este continuă în punctul $x_0$.*

$3^0$ *Pentru fiecare $x \in I$ are loc egalitatea:*

$$f(x) = (T_{n;x_0} f)(x) + (x - x_0)^n (\alpha_{n;x_0} f)(x). \ \Diamond$$

**Exemplul 2.2.4** Pentru funcţia exponenţială, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, formula lui Taylor-Young, pentru $x_0 = 0$, are forma:

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + x^n (\alpha_{n;0} f)(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, unde

$$\lim_{x \to 0} (\alpha_{n;0} f)(x) = (\alpha_{n;0} f)(0) = 0. \ \Diamond$$

**Exemplul 2.2.5** Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \backslash \{-1\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\},$$

formula lui Taylor-Young, pentru $x_0 = 0$, are forma:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^{n-1} x^n + x^n (\alpha_{n;0} f)(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, unde

$$\lim_{x \to 0} (\alpha_{n;0} f)(x) = (\alpha_{n;0} f)(0) = 0. \ \Diamond$$

În baza teoremei 2.2.2, dacă $I$ este un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă de $n$ ori în $x_0$, atunci, pentru fiecare $x \in I$, avem

$$f(x) = (T_{n;x_0} f)(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \text{ pentru } x \to x_0. \tag{2.2.1}$$

Aşadar următoarea teoremă are loc.

**Teorema 2.2.6** *Fie $I$ un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă funcţia $f$ este derivabilă de $n$ ori în punctul $x_0$, atunci pentru orice $x \in I$, egalitatea (2.2.1) are loc.*

Relaţia (2.2.1) se numeşte *formula lui Taylor cu restul sub forma lui Peano.* $\diamondsuit$

## 3. Forme ale restului formulei lui Taylor

Vom arăta, în continuare, că restul $R_{n;x_0} f$ al formulei lui Taylor se poate scrie sub forma

$$(R_{n;x_0} f)(x) = (x - x_0)^p K,$$

unde $p \in \mathbb{N}$ şi $K \in \mathbb{R}$.

Fie $I$ un interval din $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $(n + 1)$ ori pe $I$, $p$ un număr natural şi $x$ şi $x_0$ două puncte distincte din $I$. Fie $K \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^p K.$$

Funcţia $\varphi : I \to \mathbb{R}$, definită, pentru orice $t \in I$, prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x - t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x - t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n +$$
$$+ (x - t)^p K,$$

este derivabilă pe $I$, deoarece toate funcţiile din membrul drept sunt derivabile pe $I$.

Întrucât $\varphi(x_0) = \varphi(x) = f(x)$, deducem că funcţia $\varphi$ satisface ipotezele teoremei lui Rolle pe intervalul închis cu extremităţile $x_0$ şi $x$; atunci există cel puţin un punct $c$ cuprins strict între $x_0$ şi $x$ astfel încât $\varphi'(c) = 0$. Deoarece

$$\varphi'(t) = \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x - t)^{p-1} K, \text{ oricare ar fi } t \in I, .$$

egalitatea $\varphi'(c) = 0$ devine

$$\frac{(x - c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) - p(x - c)^{p-1} K = 0,$$

de unde rezultă

$$K = \frac{(x - c)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c).$$

Prin urmare, restul $R_{n;x_0}f$ are forma

$$\left(R_{n;x_0}f\right)(x) = \frac{(x-x_0)^p\,(x-x_0)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c).$$

Aşadar am demonstrat următoarea afirmaţie, atribuită matematicianului englez Brook Taylor (18 august 1685-29 decembrie 1731), şi cunoscută sub numele de teorema lui Taylor.

**Teorema 2.3.1** (teorema lui Taylor) *Fie $I$ un interval din $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $n+1$ ori pe $I$, $x_0 \in I$ şi $p \in \mathbb{N}$. Atunci pentru fiecare $x \in I \backslash \{x_0\}$, există cel puţin un punct $c$ cuprins strict între $x$ şi $x_0$ astfel încât*

$$f(x) = \left(T_{n;x_0}f\right)(x) + \left(R_{n;x_0}f\right)(x),$$

*unde*

$$\left(R_{n;x_0}f\right)(x) = \frac{(x-x_0)^p\,(x-c)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c). \ \Diamond \tag{2.3.1}$$

Forma generală a restului, dată în formula (2.3.1), a fost obţinută, în mod independent, de **Schlömilch** şi **Roche**, de aceea restul scris sub forma (2.3.1) se numeşte **restul lui Schlömilch-Roche**.

Două cazuri particulare fuseseră obţinute anterior de Lagrange şi Cauchy.

Cauchy obţine pentru rest formula:

$$\left(R_{n;x_0}f\right)(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c), \tag{2.3.2}$$

care, evident, este restul lui Schlömilch-Roche pentru $p = 1$.

Lagrange obţine pentru rest formula:

$$\left(R_{n;x_0}f\right)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \tag{2.3.3}$$

care, evident, este restul lui Schlömilch-Roche pentru $p = n+1$.

Dacă $f$ este o funcţie polinomială de gradul $n$, atunci, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\left(R_{n;x_0}f\right)(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Acesta a fost cazul studiat de Taylor. Tradiţia a consacrat numele de "*formula lui Taylor*" pentru toate cazurile studiate, afară de unul singur: $0 \in I$ şi $x_0 = 0$. Acest caz fusese, studiat anterior lui Taylor de Maclaurin. Tradiţia a consacrat următoarea definiţie.

**Definiţia 2.3.2** *Formula lui Taylor de ordin $n$ corespunzătoare funcţiei $f$ şi punctului $x_0 = 0$, cu restul lui Lagrange, se numeşte* ***formula lui Maclaurin.****(1698 - 1746).* $\Diamond$

**Exemplul 2.3.3** Pentru funcţia exponenţială $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formula lui Maclaurin este

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (R_{n;0}f)(x),$$

unde

$$(R_{n;0}\exp)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(c), \quad \text{cu } |c| < |x|.$$

Avem

$$|(R_{n;0}\exp)(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(c) < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp|x|, \ x \in \mathbb{R}.$$

Cum pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp|x| = 0,$$

deducem că seria

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$$

este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, şi suma ei este $\exp x$, adică

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}. \ \lozenge$$

Similar obţinem că pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$,

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + \cdots, \ x \in \mathbb{R}. \ \lozenge$$

Deoarece în teorema 2.3.1, $c$ este cuprins strict între $x$ şi $x_0$, deducem că numărul

$$\theta = \frac{c - x_0}{x - x_0} \in ]0, 1[$$

şi

$$c = x_0 + \theta(x - x_0).$$

Atunci restul $R_{n;x_0}f$ se poate exprima şi astfel:

$$(2.3.4) \quad (R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

(Schlömilch – Roche)

(2.3.5)

$$(R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad \text{(Cauchy)}$$

$$(2.3.6) \quad (R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad \text{(Lagrange).}$$

Aşadar am obţinut următoarea teoremă.

**Teorema 2.3.4** *Fie $I$ un interval din $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $n+1$ ori pe $I$, $x_0 \in I$ şi $p \in \mathbb{N}$. Atunci pentru fiecare $x \in I \backslash \{x_0\}$, există cel puţin un număr $\theta \in ]0,1[$ astfel încât să avem*

$$f(x) = (T_{n;x_0} f)(x) + (R_{n;x_0} f)(x),$$

*unde $(R_{n;x_0} f)(x)$ este dat de (2.3.4).*

*Dacă $p = 1$, obţinem (2.3.5), iar dacă $p = n+1$ atunci $(R_{n;x_0} f)(x)$ este dat de (2.3.6).* $\Diamond$

**Exemplul 2.3.5** Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \exp x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

formula lui Maclaurin este

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (R_{n;0} f)(x),$$

unde

$$R_{n;0} f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta x), \quad \theta \in ]0,1[, \ x \in \mathbb{R}. \ \Diamond$$

**Exemplul 2.3.6** Pentru funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},$$

formula lui Maclaurin are forma:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + (R_{n;0} f)(x),$$

unde

$$R_{n;0} f(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}, \ \theta \in ]0,1[, \ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}. \ \Diamond$$

## 4. Aplicaţii ale formulei lui Taylor

Folosind formula lui Taylor, putem stabili inegalităţi care altfel se deduc destul de greu.

**Teorema 2.4.1** *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

$1^0$ *Pentru fiecare număr natural $n$, avem*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < \exp x,$$

*oricare ar fi $x \in ]0, +\infty[$.*

$2^0$ *Oricare ar fi numerele naturale $n$ şi $m$, avem*

$$1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < \exp x < 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

*oricare ar fi $x \in ]-\infty, 0[$.*

**Demonstraţie.** $1^0$ În baza formulei lui Maclaurin, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, avem

$$\exp x = \left(T_{n;0} \exp\right)(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta x)\,, \text{ unde } \theta \in ]0,1[.$$

Întrucât, pentru fiecare $x \in ]0,+\infty[$,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta x) > 0,$$

deducem că

$$\exp x > \left(T_{n;0} \exp\right)(x)\,, \text{ oricare ar fi } x \in ]0,+\infty[.$$

Celelalte afirmaţii se demonstrează similar.■

**Teorema 2.4.2** *Fie $n$ şi $p$ două numere naturale, $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0$ un punct interior intervalului $I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface următoarele condiţii:*

*(i) funcţia $f$ este de $n+p$ ori derivabilă pe intervalul $I$,*

*(ii) funcţia $f^{(n+p)} : I \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0$.*

*Atunci există limita*

$$\lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x) - \left(T_{n-1;x_0} f\right)(x)}{(x-x_0)^n} \right)^{(p)}$$

*şi*

$$\lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x) - \left(T_{n-1;x_0} f\right)(x)}{(x-x_0)^n} \right)^{(p)} = \frac{p!}{(p+n)!} f^{(p+n)}(x_0).$$

**Demonstraţie.** În baza formulei lui Leibniz, pentru fiecare $x \in I$, avem

$$\left( \frac{f(x) - \left(T_{n-1;x_0} f\right)(x)}{(x-x_0)^n} \right)^{(p)} =$$

$$= \left[ \left(f(x) - \left(T_{n-1;x_0} f\right)(x)\right) \frac{1}{(x-x_0)^n} \right]^{(p)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k} \left(f - T_{n-1;x_0} f\right)^{(p-k)}(x) \left( \frac{1}{(x-x_0)^n} \right)^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k} \left(f - T_{n-1;x_0} f\right)^{(p-k)}(x) \frac{(-1)^k (n+k-1)!}{(n-1)!(x-x_0)^{n+k}} =$$

$$= \tfrac{1}{(x-x_0)^{n+p}} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \binom{p}{k} \left(f - T_{n-1;x_0} f\right)^{(p-k)}(x) (x-x_0)^{p-k}.$$

Trecând la limită şi aplicând de $n$ ori regula lui l'Hôpital obţinem:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-\left(T_{n-1;x_0}f\right)(x)}{(x-x_0)^n}\right)^{(p)}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{p!}{(n+p)!(x-a)^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k a_{p-k}f^{(p+n-k)}(x)(x-x_0)^{p-k},$$

unde

$$a_{p-k}=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{(n+k-j-1)!}{(n-1)!}\frac{(p-k+j)!}{(p-k)!}\binom{p}{k-j}\binom{n}{j},$$

oricare ar fi $k\in\{0,...,p\}$. Deoarece, pentru fiecare $k\in\{1,...,p\}$, avem

$$a_{p-k}=\frac{p!n}{(p-k)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{(n+k-j-1)!}{j!\,(n-j)!\,(k-j)!}=0,$$

deducem că

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-\left(T_{n-1;x_0}f\right)(x)}{(x-x_0)^n}\right)^{(p)}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{p!}{(n+p)!\,(x-x_0)^p}f^{(p+2)}(x)(x-x_0)^p=$$
$$=\frac{p!}{(p+n)!}f^{(p+2)}(x_0).$$

■

**Observaţia 2.4.3** Teorema 2.4.2 rămâne adevărată şi dacă punctul $x_0$ este extremitate a intervalului $I$. $\Diamond$

Formula lui Maclaurin, ne ajută, de multe ori să calculăm limite care altfel se calculează greu.

**Exemplul 2.4.4** Să se calculeze

$$L:=\lim_{x\searrow 0}\frac{\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}-\left(1+x^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}}{(\sin x)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}}}.$$

**Soluţie.** Avem

$$(1+x)^a=1+\frac{a}{1!}x+o(x),\quad\text{pentru}\quad x\to 0.$$

şi atunci

$$\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}=1+\frac{\sqrt{3}}{1!}x^{\sqrt{2}}+o\left(x^{\sqrt{2}}\right),\quad\text{pentru}\quad x\to 0,$$

şi

$$\left(1+x^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{1!}x^{\sqrt{3}}+o\left(x^{\sqrt{3}}\right),\quad \text{pentru}\quad x\to 0.$$

Întrucât

$$o\left(x^{\sqrt{2}}\right)-o\left(x^{\sqrt{3}}\right)=o\left(x^{\sqrt{2}}\right),\quad \text{pentru } x\to 0$$

urmează că

$$\frac{\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}-\left(1+x^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}}{(\sin x)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{1!}x^{\sqrt{2}}+o\left(x^{\sqrt{2}}\right)-1-\frac{\sqrt{2}}{1!}x^{\sqrt{3}}-o\left(x^{\sqrt{3}}\right)}{(\sin x)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}x^{\sqrt{2}}-\sqrt{2}x^{\sqrt{3}}+o\left(x^{\sqrt{2}}\right)}{(\sin x)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+o\left(x^{\sqrt{2}}\right)/x^{\sqrt{2}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}.$$

şi atunci

$$L:=\lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+o\left(x^{\sqrt{2}}\right)/x^{\sqrt{2}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=\sqrt{3},$$

deoarece

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{o\left(x^{\sqrt{2}}\right)}{x^{\sqrt{2}}}=0.$$

■

## 5. Probleme propuse spre rezolvare

**Exemplul 2.5.1** Scrieţi polinomul lui Taylor de ordinul $n=2m-1$ ataşat funcţiei sinus, $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, şi punctului $x_0=0$.

**Exemplul 2.5.2** Scrieţi polinomul lui Taylor de ordinul $n=2m$ ataşat funcţiei cosinus, $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi punctului $x_0=0$.

**Exemplul 2.5.3** Scrieţi formula lui Maclaurin de ordinul $n$ pentru funcţia sinus, $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

**Exemplul 2.5.4** Scrieţi formula lui Maclaurin de ordinul $n$ pentru funcţia cosinus, $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

**Exemplul 2.5.5** Scrieţi formula lui Maclaurin de ordinul $n$ pentru funcţia $f:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\ln(1+x),\ \text{oricare ar fi } x\in]-1,+\infty[.$$

**Exemplul 2.5.6** Scrieţi formula lui Maclaurin de ordinul $n$ pentru funcţia $f : ]-1,+\infty[ \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = (1+x)^r, \text{ oricare ar fi } x \in ]-1,+\infty[,$$

unde $r \in \mathbb{R}$.

**Exemplul 2.5.7** Fie $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = 1/x$, oricare ar fi $x \in ]0,+\infty[$. Să se scrie formula lui Taylor de ordinul $n$ corespunzătoare funcţiei $f$ şi punctului $x_0 = 1$.

**Exemplul 2.5.8** Să se scrie formula lui Maclaurin de ordinul $n$ corespunzătoare funcţiei:

*a)* $f : ]-1,+\infty[ \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x\ln(1+x)$, oricare ar fi $x \in ]-1,+\infty[$;

*b)* $f : ]-\infty,1[ \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x\ln(1-x)$, oricare ar fi $x \in ]-\infty,1[$;

*c)* $f : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{3x+4}$, oricare ar fi $x \in ]-1,1[$;

*d)* $f : ]-1/2,+\infty[ \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 1/\sqrt{2x+1}$, oricare ar fi $x \in ]-1/2,+\infty[$.

**Exemplul 2.5.9** Să se scrie formula lui Taylor de ordinul $n$ corespunzătoare funcţiei $f$ şi punctului $x_0$, dacă:

*a)* $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = 1/x$, oricare ar fi $x \in ]0,+\infty[$ şi $x_0 = 2$;

*b)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = \cos(x-1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi $x_0 = 1$.

**Exemplul 2.5.10** Să se determine funcţia polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de gradul 4 pentru care avem: $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -6$, $f'''(0) = -6$, $f^{iv}(0) = 72$.

**Exemplul 2.5.11** Să se calculeze următoarele limite:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x + 4\sin^3 x - 3\ln(1+x)}{(1-\mathrm{e}^x)\sin x};$$

**Exemplul 2.5.12** Să se calculeze următoarele limite:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x - 4\tan 3x}{3\sin 4x - 4\sin 3x}; \qquad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{ax^{a+1} - (a+1)x^a + 1}{x^{b+1} - x^b - x + 1};$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin^2} + \frac{1}{\ln(\cos x)}\right); \qquad d)\ \lim_{x\to 2} \left(2^x + 3^x - 12\right)^{\tan\frac{\pi}{4x}}.$$

**Observaţia 2.5.13** Pentru mai multe detalii puteţi consulta [**5**] şi [**2**].

CAPITOLUL 3

# Integrala Riemann

Noţiunea de integrală a apărut din nevoia practică de a determina aria unor figuri plane, precum şi din considerente de fizică. Calculul integral, aşa cum îl concepem azi, a fost dezvoltat în secolul al XVII-lea de către Newton şi Leibniz. Newton numeşte *fluxiune* - derivata şi *fluentă* - primitiva. Leibniz introduce simbolurile d şi $\int$ şi deduce regulile de calcul ale integralelor nedefinite.

Definiţia riguroasă a integralei, ca limita sumelor integrale, aparţine lui Cauchy (1821). Prima demonstraţie corectă a existenţei integralei unei funcţii continue este dată de Darboux în 1875. În a doua jumătate a secolului al XIX-lea, Riemann, Du Bois-Reymond şi Lebesque dau condiţii pentru integrabilitatea funcţiilor discontinue. În 1894, Stieltjes introduce o nouă integrală, iar în 1902, Lebesque formulează noţiunea mai generală de integrală.

## 1. Diviziuni ale unui interval compact

**Definiţia 3.1.1** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Se numeşte* ***diviziune a intervalului*** $[a, b]$ *orice sistem ordonat*

$$\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p)$$

*de $p + 1$ puncte $x_0, x_1, ..., x_p$ din intervalul $[a, b]$ cu proprietatea că*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-1} < x_p = b. \ \square$$

Dacă $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p)$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$, atunci $x_0, x_1, ..., x_p$ se numesc **puncte ale diviziunii $\Delta$**.

Vom nota cu Div $[a, b]$ mulţimea formată din toate diviziunile intervalului $[a, b]$, deci

$$\text{Div}\,[a, b] = \{\Delta : \ \Delta \text{ este diviziune a intervalului } [a, b]\}.$$

Dacă $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p)$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$, atunci numărul

$$\|\Delta\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_p - x_{p-1}\}$$

se numeşte **norma diviziunii $\Delta$**.

**Exemplul 3.1.2** Sistemele

$$\Delta^1 = (0, 1)\,, \quad \Delta^2 = (0, 1/3, 1)\,, \quad \Delta^3 = (0, 1/4, 1/2, 3/4, 1)$$

sunt diviziuni ale intervalului $[0,1]$. Aceste diviziuni au normele

$$\left\|\Delta^1\right\| = 1, \ \left\|\Delta^2\right\| = 2/3, \ \left\|\Delta^3\right\| = 1/4. \ \square$$

**Teorema 3.1.3** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există cel puţin o diviziune $\Delta$ a intervalului $[a, b]$ cu proprietatea că $\|\Delta\| < \varepsilon$.*

**Demonstraţie.** Fie $\varepsilon > 0$ şi $p$ un număr natural cu proprietatea că $(b-a)/p < \varepsilon$. Dacă $h = (b-a)/p$, atunci sistemul ordonat

$$\Delta = (a, a+h, a+2h, \cdots, a+(p-1)h, b)$$

este o diviziune a intervalului $[a, b]$. Mai mult $\|\Delta\| = h < \varepsilon$. $\blacksquare$

**Definiţia 3.1.4** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p)$ şi $\Delta' = \left(x_0', x_1', \cdots, x_q'\right)$ două diviziuni ale intervalului $[a, b]$. Spunem că diviziunea $\Delta$ este* ***mai fină*** *decât diviziunea $\Delta'$ şi scriem $\Delta \supseteq \Delta'$ (sau $\Delta' \subseteq \Delta$) dacă*

$$\{x_0', x_1', \cdots, x_q'\} \subseteq \{x_0, x_1, \cdots, x_p\}. \ \square$$

Teorema următoare afirmă că prin trecerea la o diviziune mai fină, norma diviziunii nu creşte.

**Teorema 3.1.5** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $\Delta$ şi $\Delta'$ două diviziuni ale intervalului $[a, b]$. Dacă diviziunea $\Delta$ este mai fină decât diviziunea $\Delta'$, atunci $\|\Delta\| \leq \|\Delta'\|$.*

**Demonstraţie.** Este imediată. $\blacksquare$

**Observaţia 3.1.6** Dacă $\Delta$, $\Delta' \in \operatorname{Div}[a, b]$, atunci din $\|\Delta\| \leq \|\Delta'\|$ nu rezultă, în general, că $\Delta' \subseteq \Delta$. $\square$

**Definiţia 3.1.7** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Dacă $\Delta' = \left(x_0', x_1', \cdots, x_p'\right)$ şi $\Delta'' = \left(x_0'', x_1'', ..., x_q''\right)$ sunt diviziuni ale intervalului $[a, b]$, atunci diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, \cdots, x_r)$ a intervalului $[a, b]$ ale cărei puncte sunt elementele mulţimii $\{x_0', x_1', ..., x_p'\} \cup \{x_0'', x_1'', \cdots, x_q''\}$, luate în ordine strict crescătoare, se numeşte* ***reuniunea*** *lui $\Delta'$ cu $\Delta''$ şi se notează cu $\Delta' \cup \Delta''$.* $\square$

**Teorema 3.1.8** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Dacă $\Delta'$ şi $\Delta''$ sunt diviziuni ale intervalului $[a, b]$, atunci*

$1^0$ $\Delta' \cup \Delta'' \supseteq \Delta'$ *şi* $\Delta' \cup \Delta'' \supseteq \Delta''$.

$2^0$ $\|\Delta' \cup \Delta''\| \leq \|\Delta'\|$ *şi* $\|\Delta' \cup \Delta''\| \, \|\Delta''\|$.

**Demonstraţie.** Este imediată. $\blacksquare$

**Definiţia 3.1.9** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p) \in Div[a, b]$. Se numeşte* ***sistem de puncte intermediare ataşat diviziunii*** *$\Delta$ orice sistem $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p)$ de $p$ puncte $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p \in [a, b]$ care satisfac relaţiile*

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \ \text{oricare ar fi } i \in \{1, ..., p\}. \ \square$$

Vom nota cu $\mathrm{Pi}(\Delta)$ mulţimea formată din toate sistemele de puncte intermediare ataşate diviziunii $\Delta$, deci

$$\mathrm{Pi}(\Delta) = \{\xi : \ \xi \text{ este sistem de puncte intermediare ataşat diviziunii } \Delta\}.$$

## 2. Integrala Riemann

**Definiţia 3.2.1** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p)$ un sistem de puncte intermediare ataşat diviziunii $\Delta$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie. Numărul real*

$$\sigma(f; \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

*se numeşte **suma Riemann ataşată funcţiei** $f$ **diviziunii** $\Delta$ **şi sistemului** $\xi$.* $\square$

**Definiţia 3.2.2** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că funcţia $f$ este **integrabilă Riemann** pe $[a, b]$ (sau, simplu, **integrabilă**) dacă oricare ar fi şirul $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \mathrm{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta^n\| = 0$ şi oricare ar fi şirul $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, şirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent.* $\square$

**Teorema 3.2.3** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funcţia $f$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă există un număr real $I$ cu proprietatea că pentru fiecare şir $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \mathrm{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta^n\| = 0$ şi pentru fiecare şir $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, şirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent către $I$.*

**Demonstraţie. Necesitatea**. Fie $\left(\widetilde{\Delta}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul de diviziuni cu termenul general:

$$\widetilde{\Delta}^n = (a, a + h, a + 2h, ...a + (n-1)h, b), \ \ (n \in \mathbb{N})$$

şi $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul cu termenul general:

$$\widetilde{\xi}^n = (a, a + h, a + 2h, ...a + (n-1)h), \ \ (n \in \mathbb{N})$$

unde

$$h := \frac{b-a}{n}.$$

Evident, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ avem:

$$\widetilde{\Delta}^n \in \mathrm{Div}[a, b], \quad \|\Delta^n\| = \frac{(b-a)}{n} \ \text{ şi } \ \widetilde{\xi}^n \in \mathrm{Pi}\left(\widetilde{\Delta}^n\right).$$

Atunci şirul $\left(\sigma\left(f;\widetilde{\Delta}^n,\widetilde{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent; fie $I\in\mathbb{R}$ limita şirului $\left(\sigma\left(f;\widetilde{\Delta}^n,\widetilde{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vom arăta că oricare ar fi şirul $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$ şi oricare ar fi şirul $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n\in\mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n\in\mathbb{N})$, şirul $(\sigma(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f;\Delta^n,\xi^n)$, $(n\in\mathbb{N})$ este convergent către $I$.

Fie deci $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de diviziuni $\Delta^n\in\mathrm{Div}[a,b]$, $(n\in\mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$ şi fie $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de sisteme $\xi^n\in\mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n\in\mathbb{N})$. Atunci şirurile $(\underline{\Delta}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\underline{\xi}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde

$$\underline{\Delta}^n=\begin{cases}\widetilde{\Delta}^k, & \text{dacă } n=2k\\ \Delta^k, & \text{dacă } n=2k+1,\end{cases}\qquad \underline{\xi}^n=\begin{cases}\widetilde{\xi}^k, & \text{dacă } n=2k\\ \xi^k, & \text{dacă } n=2k+1,\end{cases}$$

au următoarele proprietăţi:

*i)* $\underline{\Delta}^n\in\mathrm{Div}[a,b]$, $\underline{\xi}^n\in\mathrm{Pi}(\underline{\Delta}^n)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$;

*ii)* $\lim\limits_{n\to\infty}\|\underline{\Delta}^n\|=0$.

In baza ipotezei, şirul $\left(\sigma\left(f;\underline{\Delta}^n,\underline{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent; fie $\underline{I}$ limita lui. Tinând seama că şirul $\left(\sigma\left(f;\widetilde{\Delta}^n,\widetilde{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este subşir al şirului convergent $\left(\sigma\left(f;\underline{\Delta}^n,\underline{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, deducem că $\underline{I}=I$. Intrucât $(\sigma(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ este subşir al şirului convergent $\left(\sigma\left(f;\underline{\Delta}^n,\underline{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, obţinem că şirul $(\sigma(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge către $I$.

**Suficienţa** rezultă imediat din definiţie. ■

**Teorema 3.2.4** (unicitatea integralei) *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Atunci există cel mult un număr real $I$ cu proprietatea că pentru fiecare şir $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n\in\mathrm{Div}[a,b]$, $(n\in\mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$ şi pentru fiecare şir $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n\in\mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n\in\mathbb{N})$, şirul $(\sigma(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f;\Delta^n,\xi^n)$, $(n\in\mathbb{N})$ este convergent către $I$.* □

Prin urmare, fiind dată o funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ putem avea numai una din următoarele două situaţii:

*a)* există un număr real $I$ cu proprietatea că pentru fiecare şir $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n\in\mathrm{Div}[a,b]$, $(n\in\mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$ şi fiecare şir $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n\in\mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n\in\mathbb{N})$, şirul $(\sigma(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f;\Delta^n,\xi^n)$, $(n\in\mathbb{N})$ este convergent către $I$.

In acest caz, în baza teoremei 3.2.4, numărul real $I$ este unic. Numărul real $I$ se va numi **integrala Riemann a funcţiei $f$ pe intervalul** $[a,b]$ şi se va nota cu:

$$I:=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*b)* Nu există nici un număr real $I$ cu proprietatea că pentru fiecare şir $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n\in\mathrm{Div}[a,b]$, $(n\in\mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$ şi fiecare şir

$(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, şirul $(\sigma(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f;\Delta^n,\xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent către $I$. In acest caz funcţia $f$ nu este integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Prin urmare o funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nu este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul real $I$ există un şir $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \mathrm{Div}[a,b]$, $(n\in\mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\| = 0$ şi un şir $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n\in\mathbb{N})$, cu proprietatea că şirul $(\sigma(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f;\Delta^n,\xi^n)$, $(n\in\mathbb{N})$ nu converge către $I$.

**Exemplul 3.2.5** Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$. Funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x\in[a,b]\cap\mathbb{Q} \\ 1, & \text{dacă } x\in[a,b]\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

nu este integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Folosim metoda reducerii la absurd; presupunem că funcţia $f$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Atunci există un număr real $I$ cu proprietatea că oricare ar fi numărul real $\varepsilon>0$ există un număr real $\eta>0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta\in\mathrm{Div}[a,b]$ cu $\|\Delta\|<\eta$ şi pentru orice sistem $\xi\in\mathrm{Pi}(\Delta)$ avem $|\sigma(f;\Delta,\xi)-I|<\varepsilon$.

Fie $\varepsilon := (b-a)/4$. Atunci există un număr real $\eta>0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta\in\mathrm{Div}[a,b]$ cu $\|\Delta\|<\eta$ şi pentru orice sistem $\xi\in\mathrm{Pi}(\Delta)$ avem $|\sigma(f;\Delta,\xi)-I|<\varepsilon$.

$\square$

## 3. Proprietăţi de monotonie ale integralei Riemann

**Teorema 3.3.1** *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Dacă*

$$f(x)\geq 0,\ \textit{oricare ar fi } x\in[a,b],$$

*atunci*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

**Demonstraţie.** Fie $(\Delta^n)_{n\geq1}$ un şir de diviziuni

$$\Delta^n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{m_n}^n\right) \in \mathrm{Div}[a,b], (n\in\mathbb{N})$$

cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\| = 0$ şi $(\xi^n)_{n\geq1}$ un şir de sisteme

$$\xi^n = \left(\xi_1^n, \xi_2^n, ..., \xi_{m_n}^n\right) \in Pi(\Delta^n),\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

Din faptul că funcţia $f$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, avem că

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(f;\Delta^n,\xi^n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.3.1}$$

Pe de altă parte, funcţia $f$ fiind pozitivă, pentru orice număr natural $n$ avem

$$\sigma\left(f;\Delta^n,\xi^n\right)=\sum_{i=1}^{m_n} f\left(\xi_i^n\right)\left(x_i^n-x_{i-1}^n\right)\geq 0$$

şi deci, în baza teoremei de trecere la limită în inegalităţi, din (3.3.1) deducem concluzia teoremei. ■

**Teorema 3.3.2** *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii integrabile Riemann pe $[a,b]$. Dacă*

$$f\left(x\right)\leq g\left(x\right),\ \textit{oricare ar fi } x\in[a,b],$$

*atunci*

$$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\ \leq\int_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

**Demonstraţie.** Funcţia $f-g$ satisface ipotezele teoremei 3.3.1; atunci

$$\int_a^b\ (f-g)\left(x\right)\mathrm{d}x\geq 0.$$

Intrucât

$$\int_a^b\ (f-g)\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\ f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_a^b\ g\left(x\right)\mathrm{d}x$$

teorema este demonstrată. ■

**Teorema 3.3.3** *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann pe $[a,b]$ şi $m,M$ două numere reale cu proprietatea că:*

$$m\leq f\left(x\right)\leq M,\ \textit{oricare ar fi } x\in[a,b].$$

*Atunci*

$$m\left(b-a\right)\leq\int_a^b\ f\left(x\right)\mathrm{d}x\leq M\left(b-a\right).$$

**Demonstraţie.** Aplicând teorema 3.3.2 funcţiei $f$ şi funcţiilor constante $m$ şi $M$, obţinem

$$m\left(b-a\right)=\int_a^b\ m\mathrm{d}x\leq\int_a^b\ f\left(x\right)\mathrm{d}x\leq\int_a^b\ M\mathrm{d}x=M\left(b-a\right).$$

■

**Teorema 3.3.4** *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$. Dacă funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci funcţia $|f|$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ şi are loc inegalitatea*

$$\left|\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b|f|\left(x\right)\mathrm{d}x. \tag{3.3.2}$$

**Demonstraţie.** Funcţia $f$ fiind integrabilă Riemann pe $[a,b]$ este mărginită pe $[a,b]$, prin urmare există un număr real $M>0$ cu proprietatea că

$$|f(x)| \leq M, \text{ oricare ar fi } x \in [a,b].$$

Fie $g : [-M,M] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$g(t) = |t|, \text{ oricare ar fi } t \in [-M,M].$$

Deoarece pentru orice $t'$, $t'' \in [a,b]$ avem

$$\left|g(t') - g(t'')\right| = \left||t'| - |t''|\right| \leq \left|t' - t''\right|,$$

rezultă că funcţia $g$ este lipschitziană şi atunci funcţia $|f| = g \circ f$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Pentru a dovedi inegalitatea $(3.3.2)$, să considerăm un şir $(\Delta^n)_{n\geq 1}$ de diviziuni $\Delta^n \in \operatorname{Div}[a,b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta^n\| = 0$ şi un şir de sisteme $\xi^n \in Pi(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$. Din faptul că funcţiile $f$ şi $|f|$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$, rezultă

(3.3.3)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f;\Delta^n,\xi^n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \sigma(|f|;\Delta^n,\xi^n) = \int_a^b |f|(x)\,\mathrm{d}x.$$

Intrucât, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem

$$|\sigma(f;\Delta^n,\xi^n)| \leq \sigma(|f|;\Delta^n,\xi^n),$$

din $(3.3.3)$, în baza teoremei de trecere la limită în inegalităţi, deducem că inegalitatea $(3.3.2)$ are loc. ■

## 4. Primitive: definiţia primitivei şi a primitivabilităţii

În acest capitol vom introduce o clasă importantă de funcţii reale şi anume **clasa funcţiilor care admit primitive**. Conceptul de **primitivă** leagă între ele două concepte fundamentale ale Analizei Matematice: **derivata** şi **integrala**. Vom aborda probleme de natură **calitativă** privind studiul existenţei primitivelor precum şi de natura **calculatorie** relative la metode de calcul de primitive.

**Definiţia 3.4.1** *Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $I$ o submulţime nevidă a mulţimii $D$. Spunem că funcţia $f$* ***admite primitive*** *(sau că este* ***primitivabilă****) pe $I$ dacă există o funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ astfel încât:*

*i) funcţia $F$ este derivabilă pe $I$;*

*ii) $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.*

*Dacă funcţia $f$ admite primitive pe mulţimea de definiţie $D$, atunci spunem simplu că funcţia $f$* ***admite primitive*** *(sau că este* ***primitivabilă****).*

□

**Exemplul 3.4.2** Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$ deoarece funcţia derivabilă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = x^2/2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are proprietatea că $F' = f$. □

**Definiţia 3.4.3** *Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $I$ o submulţime nevidă a mulţimii $D$. Se numeşte **primitivă a funcţiei** $f$ pe mulţimea $I$ orice funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăţi:*

*i) funcţia $F$ este derivabilă pe $I$;*

*ii) $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.*

*Dacă $F$ este o primitivă a funcţiei $f$ pe mulţimea de definiţie $D$ a funcţiei $f$, atunci se spune simplu că funcţia $F$ este primitivă a funcţiei $f$.* □

**Teorema 3.4.4** *Fie $I$ un interval din $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă $F_1 : I \to \mathbb{R}$ şi $F_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcţiei $f$ pe $I$, atunci există un număr real $c$ astfel încât*

$$F_2(x) = F_1(x) + c, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

(*Oricare două primitive ale unei funcţii primitivabile diferă printr-o constantă*).

**Demonstraţie.** Funcţiile $F_1$ şi $F_2$ fiind primitive ale funcţiei $f$, sunt derivabile şi $F_1' = F_2' = f$, deci

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = 0.$$

Funcţia derivabilă $F_2 - F_1$ având derivata nulă pe intervalul $I$, este constatntă pe acest interval. Prin urmare, există un număr real $c$ astfel încât

$$F_2(x) - F_1(x) = c, \text{ oricare arfi } x \in I.$$

■

**Observaţia 3.4.5** In teorema 3.4.4, ipoteza că mulţimea $I$ este interval este esenţială. Intr-adevăr, pentru funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

funcţiile $F_1, F_2 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$F_1(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

respectiv

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

sunt primitive ale funcţiei $f$ pe $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Să observăm că nu există $c \in \mathbb{R}$ ca să avem $F_2(x) = F_1(x) + c$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Subliniem faptul că $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nu este interval. □

**Definiţia 3.4.6** *Fie $I$ un interval din $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive pe intervalul $I$. Mulţimea tuturor primitivelor funcţiei $f$ pe* *intervalul $I$ se numeşte **integrala nedefinită** a funcţiei $f$ pe intervalul $I$ şi se notează cu simbolul*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

*Operaţia de calculare a primitivelor funcţiei $f$ se numeşte **integrare**.*

**Observaţia 3.4.7** Menţionăm că simbolul $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ trebuie privit ca o notaţie indivizibilă, adică părţilor $\int$ sau $\mathrm{d}x$, luate separat, nu li se atribuie nici o semnificaţie. $\square$

Fie $I$ un interval din $\mathbb{R}$ şi $\mathfrak{F}(I;\mathbb{R})$ mulţimea tuturor funcţiilor definite pe $I$ cu valori în $\mathbb{R}$. Dacă $\mathcal{G}$ şi $\mathcal{H}$ sunt submulţimi nevide ale lui $\mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ şi $a$ este un număr real, atunci

$$\mathcal{G}+\mathcal{H}=\{f:I\to\mathbb{R}\text{: există } g\in\mathcal{G} \text{ şi } h\in\mathcal{H} \text{ astfel încât } \ f=g+h\},$$

şi

$$a\mathcal{G}=\{f:I\to\mathbb{R}\text{: există } g\in\mathcal{G} \text{ astfel încât } \ f=ag\}.$$

Dacă $\mathcal{G}$ este formată dintr-un singur element $g_0$, adică $\mathcal{G}=\{g_0\}$, atunci în loc de $\mathcal{G}+\mathcal{H}=\{g_0\}+\mathcal{H}$ vom scrie simplu $g_0+\mathcal{H}$.

In cele ce urmează vom nota cu $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor funcţiilor constante definite pe $I$ cu valori în $\mathbb{R}$, adică

$$\mathcal{C}=\{f:I\to\mathbb{R}:\ \text{există } c\in\mathbb{R} \text{ astfel încât } f(x)=c,\ \text{oricare ar fi } x\in I\}.$$

Se constată imediat că:
*a)* $\mathcal{C}+\mathcal{C}=\mathcal{C}$;
*b)* $a\mathcal{C}=\mathcal{C}$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$,
adică suma a două funcţii constante este tot o funcţie constantă, iar o funcţie constantă înmulţită cu un număr real este tot o funcţie constantă.

Cu aceste observaţii, să ne reamintim că dacă $F_0:I\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f:I\to\mathbb{R}$ pe intervalul $I\subseteq\mathbb{R}$, atunci orice altă primitivă $F:I\to\mathbb{R}$ a lui $f$ pe $I$ este de forma $F=F_0+c$, unde $c:I\to\mathbb{R}$ este o funcţie constantă, adică $c\in\mathcal{C}$. Atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\{F\in\mathfrak{F}(I,\mathbb{R}):\ F \text{ este primitivă a lui } f \text{ pe } I\}=$$

$$=\{F_0+c:\ c\in\mathcal{C}\}=F_0+\mathcal{C}.$$

**Observaţia 3.4.8** Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive pe $I$ şi fie $F_0:I\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $f$ pe $I$. Ţinând seama de observaţia 3.4.5, avem că

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\{\ F:I\to\mathbb{R}:\ F \text{ este primitivă a funcţiei } f\}=F_0+\mathcal{C}.$$

Rezultă că

$$\int f(x)\mathrm{d}x+\mathcal{C}=(F_0+\mathcal{C})+\mathcal{C}=F_0+(\mathcal{C}+\mathcal{C})=F_0+\mathcal{C},$$

deci

$$\int f(x)\mathrm{d}x + \mathcal{C} = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

**Observaţia 3.4.9** Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul $I$ şi $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f$ pe $I$, atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C}$$

sau

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C}.$$

## 5. Metode de integrare

Formula de derivare a produsului a două funcţii ne conduce la metoda de integrare cunoscută sub numele de *metoda de integrare prin părţi.*

**Teorema 3.5.1** (*formula de integrare prin părţi*) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă:*

*(i) funcţiile $f$ şi $g$ sunt derivabile pe $[a, b]$,*

*(ii) derivatele $f'$ şi $g'$ sunt continue pe $[a, b]$,*

*atunci are loc egalitatea*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = f(x)\, g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

**Demonstraţie.** Din formula de derivare a produsului a două funcţii

$$(fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x), \text{ oricare ar fi } x \in [a, b],$$

deducem că funcţia produs $fg$ este primitivă a funcţiei $f'g + fg'$. Atunci în baza formulei lui Leibniz-Newton, obţinem

$$\begin{aligned}(fg)(b) - (fg)(a) &= \int_a^b (fg)'(x)\, \mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \left[f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)\right] \mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

adică

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Teorema este demonstrată. ■

**Exemplul 3.5.2** Să se calculeze

$$I := \int_0^1 x \exp x \mathrm{d}x.$$

**Soluţie.** Avem

$$I=\int_0^1 x\,(\exp x)'\,\mathrm{d}x = x\exp x\Big|_a^b - \int_0^1 x'\exp x = \mathrm{e}-\int_0^1 \exp x\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}-\exp x\Big|_0^1 = 1.$$

■

**Teorema 3.5.3** (prima metodă de schimbare de variabilă). *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$, $I$ un interval din $\mathbb{R}$ şi $u:[a,b]\to I$ şi $f:I\to\mathbb{R}$ două funcţii. Dacă*

*(i) funcţia $u$ este derivabilă pe $[a,b]$;*
*(ii) funcţia $u'$ este continuă pe $[a,b]$;*
*(iii) funcţia $f$ este contiuă pe $I$,*

*atunci are loc egalitatea:*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\mathrm{d}t.$$

**Demonstraţie.** Funcţia $f$ fiind continuă pe $I$, admite primitive pe $I$; fie $F:I\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $f$ pe $I$. Atunci

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(u(b))-F(u(a)).$$

Pe de altă parte, funcţia compusă $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ definită prin $h(x)=F(u(x))$, oricare ar fi $x\in[a,b]$, este derivabilă pe $[a,b]$ şi

$$h'(x)=F'(u(x))\cdot u'(x)=f(u(x))u'(x)=((f\circ u)\cdot u')(x),\ \text{oricare ar fi } x\in[a,b].$$

Prin urmare funcţia $h$ este o primitivă a funcţiei $(f\circ u)\cdot u'$. Aplicând formula lui Leibniz - Newton obţinem

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = h(x)\Big|_a^b = h(b)-h(a)=$$
$$=F(u(b))-F(u(a))=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Teorema este demonstrată. ■

**Exemplul 3.5.4**

Să se calculeze integrala

$$I=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\mathrm{d}x.$$

**Soluţie.** Avem

$$I=\int_0^1 \frac{\left(1+x^4\right)'}{4\left(1+x^4\right)}\mathrm{d}x.$$

Considerăm funcţia $u : [0,1] \to [1,2]$ definită prin

$$u(x) = 1 + x^4, \text{ oricare ar fi } x \in [0,1],$$

şi $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(t) = \frac{1}{3t}, \text{ oricare ar fi } t \in [1,2].$$

Atunci

$$\frac{x^3}{1+x^4} = f(u(x))u'(x), \text{ oricare ar fi } x \in [0,1].$$

şi deci

$$I = \int_0^1 f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln t\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2.$$

■

**Teorema 3.5.5** (*a doua metodă de schimbare de variabilă*) *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $c < d$ şi $u : [a,b] \to [c,d]$ şi $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă:*

*$(i)$ funcţia $f$ este continuă pe $[c,d]$;*

*$(ii)$ funcţia $u$ este bijectivă;*

*$(iii)$ funcţiile $u$ şi $u'$ sunt derivabile pe $[a,b]$, respectiv pe $[c,d]$;*

*$(iv)$ funcţiile $u'$ şi $\left(u^{-1}\right)'$ sunt continue pe $[a,b]$, respectiv pe $[c,d]$,*

*atunci are loc egalitatea*

$$\int_a^b f(u(x))\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\left(u^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Demonstraţie.** Din $(i)$ şi $(ii)$ rezultă că funcţia $f \circ u$ este continuă pe $[a,b]$, deci admite primitive; fie $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $f \circ u$ pe $[a,b]$. Atunci, în baza formulei lui Leibniz-Newton,

$$\int_a^b f(u(x))\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Pe de altă parte, pentru orice $t \in [c,d]$, avem

$$\begin{aligned}\left(F \circ u^{-1}\right)'(t) &= F'\left(u^{-1}(t)\right)\left(u^{-1}\right)'(t) = f\left(u\left(u^{-1}(t)\right)\right)\left(u^{-1}\right)'(t) = \\ &= f(t)\left(u^{-1}\right)(t),\end{aligned}$$

de unde deducem

$$\begin{aligned}\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\left(u^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t &= \left(F \circ u^{-1}\right)(u(b)) - \left(F \circ u^{-1}\right)(u(a)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(u(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Teorema este demonstrată. ■

**Exemplul 3.5.6** Să se calculeze

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{1 + \tan x} \mathrm{d}x.$$

**Soluţie.** Considerăm funcţia $u : [0, \pi/4] \to [0, 1]$ definită prin $u(x) = \mathrm{tg}x$, oricare ar fi $x \in [0, \pi/4]$. Evident $u$ este bijectivă. Funcţia inversă $u^{-1} : [0, 1] \to [0, \pi/4]$ care este definită prin $u^{-1}(x) = \arctan x$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, este derivabilă şi $\left(u^{-1}\right)'(x) = 1/\left(1 + x^2\right)$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Obţinem:

$$I = \int_0^1 \frac{t}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left( \frac{-1}{2(1+t)} + \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2(1+t^2)} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \left[ -\frac{1}{2} \ln(1+t) + \frac{1}{4} \ln\left(1+t^2\right) + \frac{1}{2} \arctan x \right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right).$$

■

**Observaţia 3.5.7** Denumirile de prima formulă de schimbare de variabilă şi a doua formulă de schimbare de variabilă sunt pur convenţionale. În realitate avemo singură formulă de schimbare de variabilă şi mai multe variante de aplicare a ei.

**Varianta 1**. Avem de calculat

$$I = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

Atunci:

$1^0$ Punem în evidenţă, în expresia funcţiei $f$, o funcţie $u : [a, b] \to [c, d]$ derivabilă cu derivata $u'$ continuă şi o funcţie continuă $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = g(u(x))\, u'(x), \text{ oricare ar fi } x \in [a, b].$$

$2^0$ Facem înlocuirile formale $u(x) := t$ şi $u'(x)\,\mathrm{d}x := \mathrm{d}t$ şi obţinem

$$I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t)\, \mathrm{d}t.$$

**Varianta 2**. Avem de calculat

$$I = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

Atunci:

$1^0$ Punem în evidenţă un interval $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ şi o funcţie $u : [c, d] \to [a, b]$ derivabilă cu derivata $u'$ continuă pe $[c, d]$ şi $u(c) = a$ , $u(d) = b$.

$2^0$ Facem înlocuirile formale $x := u(t)$ şi $\mathrm{d}x := u'(t)\,\mathrm{d}t$; obţinem

$$I = \int_c^d f(u(t))\, u'(t)\, \mathrm{d}t.$$

**Varianta 3**. Avem de calculat

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Atunci:

$1^0$ Punem în evidenţă, în expresia funcţiei $f$, o funcţie bijectivă $u : [a,b] \to [c,d]$ astfel încât funcţiile $u$ şi $u^{-1}$ sunt derivabile cu derivatele continue şi o funcţie continuă $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = g(u(x)),\ \text{oricare ar fi } x \in [a,b].$$

$2^0$ Facem înlocuirile formale $u(x) := t$ şi $\mathrm{d}x := \left(u^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t$; obţinem

$$I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t)\left(u^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t.$$

pe care o calculăm. Fie

$$\int g(t)\left(u^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t = F(t),\ t \in u(I),$$

În toate cele trei variante ale formulei schimbării de variabilă,expuse mai sus, expresia funcţiei $u$ se impune din context, analizând expresia funcţiei $f$.

Când se dă o indicaţie asupra schimbării de variabilă folosite, se spune simplu "*se face substituţia* $x = u(t)$" sau "*se face substituţia* $t = u(x)$", celelalte elemente rezultând din context.

**Exemplul 3.5.8** Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{(1+\tan x)\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

**Soluţie.** Facem substituţia $\tan x = t$, deci

$$x := \arctan t \quad \text{şi} \quad \mathrm{d}x := \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Când $x = 0$ obţinem $t = 0$, iar când $x = \pi/4$ obţinem $t = 1$. Atunci

$$I = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \left[t - \ln(1+t)\right]\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

■

**Exemplul 3.5.9** Să se calculeze

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x.$$

**Soluţie.** Se face substituţia $e^{2x} = t$, deci $x := \frac{1}{2}\ln t$ şi $\mathrm{d}x := \frac{1}{2t}\mathrm{d}t$. Când $x = 0$ obţinem $t = 1$, iar când $x = 1$ obţinem $t = \mathrm{e}^2$. Atunci

$$I = \int_0^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{2(1+t)} dt = \frac{1}{2}\ln(1+t)\bigg|_1^{\mathrm{e}^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathrm{e}^2}{2}.$$

■

**Exemplul 3.5.10** Să se calculeze

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x.$$

**Soluţie.** Se face substituţia $\sqrt[6]{x+1} = t$, deci $x : t^6 - 1$ şi $\mathrm{d}x := 6t^5\mathrm{d}t$. Obţinem

$$I = \int_0^1 \frac{6t^8}{t^2+1}\mathrm{d}t = 6\int_0^1 \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \left(6\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctan t\right)_0^1 = -\frac{152}{35} + \frac{3\pi}{2}.$$

■

## 6. Probleme propuse spre rezolvare

**Exemplul 3.6.1** Pentru funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ ($I$ interval) să se determine o primitivă $F : I \to \mathbb{R}$ dacă:

*a)* $f(x) = x^2 + x$, oricare ar fi $x \in I = \mathbb{R}$;

*b)* $f(x) = x^3 + 2x - 4$, oricare ar fi $x \in I = \mathbb{R}$;

*c)* $f(x) = x(x+1)(x+2)$, oricare ar fi $x \in I = \mathbb{R}$;

*d)* $f(x) = 1/x$, oricare ar fi $x \in I = ]0, +\infty[$;

*e)* $f(x) = 1/x$, oricare ar fi $x \in I = ]-\infty, 0[$;

*f)* $f(x) = x^5 + 1/x$, oricare ar fi $x \in I = ]0, +\infty[$.

**Exemplul 3.6.2** Să se calculeze:

*a)* $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{x}{(x+1)(x^2+3)}\mathrm{d}x$; *b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\mathrm{d}x$;

*c)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}\mathrm{d}x$; *d)* $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3+2x^2+x+4}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

**Exemplul 3.6.3** Să se calculeze:

$a)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x;$ $\qquad b)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x;$

$c)\ \displaystyle\int_2^3 \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\mathrm{d}x;$ $\qquad d)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x.$

**Exemplul 3.6.4** Să se calculeze:

$a)\ \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x;$ $\qquad b)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x;$

$c)\ \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}}\mathrm{d}x;$ $\qquad d)\ \displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$

**Exemplul 3.6.5** Să se calculeze:

$a)\ \displaystyle\int_2^3 \sqrt{x^2+2x-7}\mathrm{d}x;$ $\qquad b)\ \displaystyle\int_0^1 \sqrt{6+4x-2x^2}\mathrm{d}x;$

$c)\ \displaystyle\int_0^{3/4} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x;$ $\qquad d)\ \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$

**Exemplul 3.6.6** Să se arate că:

$a)\ 2\sqrt{2} < \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+4x+5}\mathrm{d}x < 2\sqrt{10};$

$b)\ \mathrm{e}^2(\mathrm{e}-1) < \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{x}{\ln x}\mathrm{d}x < \frac{\mathrm{e}^3}{2}(\mathrm{e}-1);$

$c)\ \ln\frac{3}{4} < \displaystyle\int_0^1 \ln\left(x^2-x+1\right)\mathrm{d}x < 0.$

**Observaţia 3.6.7** Pentru detalii puteţi consulta [**5**] şi [**3**].

# Bibliografie


[1] D. Andrica, D.I. Duca, I. Purdea şi I. Pop: *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2004

[2] D.I. Duca şi E. Duca: *Exerciţii şi probleme de analiză matematică* (vol. 1), Editura Casa Cărţii de Stiinţă, Cluj-Napoca, 2007

[3] D.I. Duca şi E. Duca: *Exerciţii şi probleme de analiză matematică* (vol. 2), Editura Casa Cărţii de Stiinţă, Cluj-Napoca, 2009

[4] D.I. Duca şi E. Duca: *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura GIL, Zalău, 1996 (vol. 1), 1997 (vol. 2)

[5] D.I. Duca: *Analiza matematică*, Casa Cărţii de Stiinţă, Cluj-Napoca, 2013

[6] M. Megan: *Bazele analizei matematice* (vol. 1), Editura Eurobit, Timişoara 1997

[7] M. Megan: *Bazele analizei matematice* (vol. 2), Editura Eurobit, Timişoara 1997

[8] M. Megan, A.L. Sasu, B. Sasu: *Calcul diferenţial în* $\mathbb{R}$, *prin exerciţii şi probleme*, Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 2001

[9] P. Preda, A. Crăciunescu, C. Preda: *Probleme de analiză matematică*, Editura Mirton, Timişoara, 2004

[10] P. Preda, A. Crăciunescu, C. Preda: *Probleme de analiză matematică. Diferenţiabilitate*, Editura Mirton, Timişoara, 2005

[11] P. Preda, A. Crăciunescu, C. Preda: *Probleme de analiză matematică. Integrabilitate*, Editura Mirton, Timişoara, 2007

# Glosar