

Proba scrisă a examenului de licență, 3 iulie 2017
Specializarea Matematică Informatică

SUBIECTUL I. Algebră

- 1) a) Dați definiția corpului.
- b) Enunțați teorema de caracterizare a subinelului.
- c) Dați un exemplu de corp finit în care dați apoi un exemplu de subinel care nu este corp. Justificare.
- 2) În \mathbb{R}^3 considerăm $v_1 = (a, 1, 1)$, $v_2 = (1, a, 1)$ și $v_3 = (1, 1, a)$ ($a \in \mathbb{R}$).
 - i) Să se determine dimensiunea subspațiului $A = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ al \mathbb{R} -spațiului vectorial \mathbb{R}^3 . Discuție după a .
 - ii) Să se determine valorile parametrului real a pentru care (v_1, v_2, v_3) este o bază a \mathbb{R} -spațiului vectorial \mathbb{R}^3 .

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 - x^2)$, unde $D \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiție al lui f .

- a) Să se determine D și $f^{(n)}(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in D$.
- b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in \mathbb{R}$

$$(T_{2n}f)(x) = -2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n} \right),$$

unde $T_{2n}f$ reprezintă polinomul Taylor de ordin $2n$ atașat funcției f și punctului $x_0 = 0$.

- c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2) - 2(\cos x - 1)}{x^4}$.

SUBIECTUL III. Geometrie

- a) Deduceți ecuația algebrică a dreptei determinată de două puncte distincte.
- b) Scrieți ecuațiile parametrice ale cercului de ecuație $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- c) Fie M un punct mobil pe cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 4$ și $A(-2, 0)$ un punct pe cerc. Dreapta AM intersectează axa Oy în B iar paralela în B la Ox intersectează OM în punctul C . Să se găsească locul geometric al punctului C .

SUBIECTUL IV. Informatică

Scrieți un program într-unul din limbajele de programare Python, C++, Java, C# care:

- a) (2p) **Definește o clasă** *Vehicul* având ca atribute private: *marca* de tip șir de caractere, *pret* de tip real și *tip* de tip șir de caractere, iar ca metode publice: 1) *constructor* pentru inițializarea atributelor *marca*, *pret* și *tip*, 2) metode accesori de tip *get* pentru atributul *marca* și pentru atributul *tip*, 3) metodă accesori de tip *set* pentru atributul *pret*, 4) metoda *toString* care returnează următoarea reprezentare sub formă de șir de caractere pentru un vehicul: *marca* pret tip. Atributul *tip* din clasa *Vehicul* va avea una dintre următoarele trei valori: "Bicicleta", "Motocicleta", "Trotineta".
- b) (1.5p) **Definește o clasă** *ListaDeVehicule* având ca atribute private: 1) *nrVehicule* de tip întreg, 2) *vehicule* de tip tablou cu elemente de tipul *Vehicul*, iar ca metode publice: 1) un *constructor* fără parametri, 2) metoda *adauga* pentru adăugarea unui vehicul, specificat ca parametru al metodei, în tabloul *vehicule*, 3) metoda *elementAt* care returnează vehiculul de pe o anumită poziție, specificată ca parametru al metodei, 4) metoda *getNrVehicule()* care returnează numărul de vehicule din tablou.

- c) (1.5p) **Definește o funcție** care construiește și returnează o listă de tipul *ListaDeVehicule*, formată din 3 vehicule: una de tipul "Motocicleta", una de tipul "Trotineta" și una de tipul "Bicicleta".
- d) (1.5p) **Definește o funcție** care primește ca parametru o listă de vehicule de tipul *ListaDeVehicule* și aplică o reducere de preț de 15% tuturor vehiculelor din lista dată, care au tipul "Trotineta".
- e) (1.5p) **Definește o funcție** care primește ca parametru o listă de vehicule de tipul *ListaDeVehicule* și afișează la ieșirea standard lista dată, apelând metoda *toString()* din clasa *Vehicul*.
- f) (1p) Construiește în **funcția principală** a programului o listă de vehicule (apelând funcția de la punctul (c)), afișează lista de vehicule (apelând funcția de la punctul (e)), aplică reducerea de preț (apelând funcția de la punctul (d)), apoi afișează din nou lista de vehicule după aplicarea reducerii de preț (apelând funcția de la punctul (c)).

Notă.

- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.
- Media lucrării se calculează ca și medie ponderată: $\frac{2}{3}$ · Media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte de Matematică + $\frac{1}{3}$ · Nota de la subiectul de Informatică.
- Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Proba scrisă a examenului de licență, 3 iulie 2017
Specializarea Matematică Informatică
BAREM

SUBIECTUL I. Algebră

- Oficiu 1 pt
1) a) Definiția corpului 0,5 pt
b) Teorema de caracterizare a subinelului - enunț 0,5 pt
c) Exemplu de corp finit 0,5 pt
Exemplu de subinel care nu este corp 0,5 pt
Justificare 1 pt
Observație: Pentru exemplele care sunt construite în așa fel încât să nu fie necesare demonstrații ulterioare, se acordă punctajul complet (2 pt). **O astfel de situație ar fi:** Inelul $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo 2 are un singur element nenul care este inversabil fiind elementul unitate, deci este corp. Cum orice corp are cel puțin 2 elemente, subinelul nul $\{0\}$ nu este corp.

2) a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a+2)(a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a \in \{-2, 1\}$ 1 pt

Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ atunci v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenți,

- prin urmare $\dim A = 3$ 1 pt
Dacă $a = 1$ atunci $v_1 = v_2 = v_3$, prin urmare $\dim A = 1$ 1 pt
Dacă $a = -2$ atunci $\text{rang} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = 2$, prin urmare $\dim A = 2$ 1 pt
b) (v_1, v_2, v_3) bază în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow A = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \dim A = \dim \mathbb{R}^3$ 1 pt
 $\dim A = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ 1 pt

SUBIECTUL II. Analiză matematică

- Oficiu 1 pt
a) $D = (-1, 1)$ și $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ oricare ar fi $x \in D$ 1 pt
Intuirea formulei $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$ oricare ar fi $x \in D$ 1 pt
și demonstrarea acesteia prin inducție 2 pt
b) $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! [(-1)^n + 1] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ -2(n-1)! & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$ 1 pt
 $f(0) = 0 \Rightarrow (T_{2n}f)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{-2(2k-1)!}{(2k)!} x^{2k} = -2 \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{2k}$ 1 pt
c) Din teorema 2.2.2 din manual rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2) + x^2 + \frac{1}{2}x^4}{x^4} = 0,$$

deci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2) + x^2}{x^4} = -\frac{1}{2}$ (1) 1 pt

Se știe că

$$(T_{2n} \cos)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

deci (aplicând din nou teorema 2.2.2 din manual)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right)}{x^4} = 0,$$

de unde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1) + x^2}{x^4} = \frac{1}{12}$ (2) 1 pt

Prin scăderea relațiilor (1) și (2) obține $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2) - 2(\cos x - 1)}{x^4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = -\frac{7}{12}$ 1 pt

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1 pt

a) Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$. Fie $M(x, y)$ un punct variabil pe dreapta M_1M_2 . Ecuația vectorială a dreptei M_1M_2 este: $\vec{r}_M = \vec{r}_{M_1} + \alpha(\vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1})$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ 2pt

– Eliminarea parametrului α și scrierea ecuației 1pt

b) Ecuațiile parametrice ale cercului sunt: $x = a + r \cos t, y = b + r \sin t$ 1pt

c) Fie punctul $M(2 \cos t, 2 \sin t)$ variabil pe cerc. Ecuația dreptei AM 1pt

– Determinarea coordonatelor punctului $B(0, \frac{2 \sin t}{1 + \cos t})$ 1pt

– Determinarea coordonatelor punctului $C(\frac{2 \cos t}{1 + \cos t}, \frac{2 \sin t}{1 + \cos t})$ 1pt

– Eliminând parametrul t , locul geometric va fi parabola de ecuație: $y^2 = -4x + 4$ 2pt

SUBIECTUL IV. Informatică

Oficiu 1pt

a) Definirea clasei Vehicul 2pt

din care

– attribute 3* 0.25 = 0.75pt

– metode 5*0.25=1.25pt

b) Definirea clasei ListaDeVehicule 1.5pt

din care

– attribute 2*0.25=0.5pt

– metode 4*0.25 = 1pt

c) Construirea listei de vehicule 1.5pt

din care

– antet metodă 0.5pt

– pentru fiecare vehicul creat 3*0.25= 0.75pt

– returnare rezultat - 0.25pt

d) Funcția de aplicare a reducerii de preț 1.5pt

din care

– antet metodă 0.5 pt

– implementare metodă 1pt

e) Funcția de afișare listă de vehicule 1.5pt

din care

– antet metodă 0.5pt

– implementare metodă 1pt

f) Funcția principală 1pt

din care

pentru fiecare apel 4*0.25=1pt

Notă.

- Orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.
- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.
- Media lucrării se calculează ca și medie ponderată: $\frac{2}{3}$ · Media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte de Matematică + $\frac{1}{3}$ · Nota de la subiectul de Informatică.
- Pentru o lucrare, nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.