

**GEOMETRIE-Indrumar pentru examenul
licență valabil începând cu sesiunea de
finalizare a studiilor iulie 2013
specializarea Matematică informatică**

Cuprins

Geometrie analitică plană	5
Capitolul 1. Ecuatiile carteziene ale dreptelor în raport cu un reper ortonormat în plan (dreapta definită prin punct și vector director, dreapta definită prin două puncte, dreapta prin tăieturi)	7
1.1. Dreapta definită prin punct și vector director	7
1.2. Dreapta definită prin două puncte distincte	8
1.3. Unghiul dintre două drepte	10
1.4. Distanța de la un punct la o dreaptă	11
Capitolul 2.	15
2.1. Cercul	15
2.2. Elipsa	16
2.3. Hiperbola	16
2.4. Parabola	17
2.5. Probleme propuse	19
Bibliografie	21

Geometrie analitică plană

CAPITOLUL 1

Ecuatiile carteziene ale dreptelor în raport cu un reper ortonormat în plan (dreapta definită prin punct și vector director, dreapta definită prin două puncte, dreapta prin tăieturi)

1.1. Dreapta definită prin punct și vector director

Fie reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}\{0; \vec{i}, \vec{j}\}$ în plan. Fie d o dreaptă în plan care are un vector director \vec{d} de componente p și q , adică

$$\vec{d} = p \vec{i} + q \vec{j}$$

($\vec{d} \neq \vec{0}$, adică p și q nu sunt nule simultan). Pe dreapta d se consideră un punct fixat M_0 de coordonate (x_0, y_0) și un punct variabil M de coordonate (x, y) .

Fie \vec{r}_M și \vec{r}_{M_0} vectorii de poziție ai punctelor M și M_0 față de originea O .

Ecuția vectorială a dreptei d este:

$$d: \vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \lambda \vec{d}, \text{ unde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Propoziție. Ecuția carteziană a dreptei d în raport cu reperul $\mathcal{R}\{0; \vec{i}, \vec{j}\}$ este:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Demonstrație. Ecuția vectorială a dreptei $d: \vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \lambda \vec{d}$ se transcrie astfel:

$$x \vec{i} + y \vec{j} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + \lambda(p \vec{i} + q \vec{j}).$$

Deoarece versorii \vec{i} și \vec{j} sunt liniar independenți, avem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \end{cases}$$

Acestea sunt ecuațiile parametrice ale dreptei d . Eliminând λ între cele două ecuații, avem:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Observație. Dacă unul dintre numerele reale p sau q este zero atunci nu se poate face împărțirea cu el. Să presupunem că $p = 0$. Atunci din ecuațiile parametrice rezultă $x = x_0$ (și y variabil). Aceasta este ecuația unei drepte paralele cu axa Oy . Analog $y = y_0$ este ecuația unei drepte paralele cu axa Ox .

Observație. Dacă $p \neq 0$, ecuația dreptei d se poate scrie:

$$y - y_0 = \frac{q}{p}(x - x_0).$$

Dacă notăm cu $m = \frac{q}{p}$, ecuația devine:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

m se numește panta dreptei d și este egală cu $\tan \alpha$, unde α este unghiul dintre axa Ox și dreapta d .

1.2. Dreapta definită prin două puncte distincte

Fie dreapta d în planul xOy , raportată la reperul ortonormat $\mathcal{R}\{0; \vec{i}, \vec{j}\}$. Se consideră pe dreapta d punctele distincte fixate M_1 și M_2 de coordonate (x_1, y_1) respectiv (x_2, y_2) și punctul variabil M de coordonate (x, y) .

Ecuația vectorială a dreptei d este:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_1} + \alpha(\vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1}).$$

Propoziție. Ecuația carteziană a dreptei d este:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Demonstrație. Ecuația vectorială a dreptei se explicitează astfel:

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + \alpha(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} - x_1\vec{i} - y_1\vec{j}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \alpha(y_2 - y_1) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Observație. Dacă $x_2 - x_1 = 0$ atunci ecuația dreptei este $x = x_1$ și reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy , iar dacă $y_2 - y_1 = 0$, atunci ecuația dreptei este $y = y_1$ și reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Ox .

Dacă $x_2 - x_1 \neq 0$ atunci ecuația dreptei este

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

și atunci panta dreptei d este

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observație. Ecuația dreptei date prin două puncte distincte

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

se poate scrie în mod echivalent:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observație. Dacă punctul $M_3(x_3, y_3)$ aparține dreptei d determinată de punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ atunci coordonatele punctului M_3 verifică ecuația dreptei M_1M_2 , deci avem:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aceasta este condiția de coliniaritate a punctelor M_1, M_2, M_3 .

Observație. Dacă dreapta d intersectează axa Ox în punctul $A(a, 0)$ și axa Oy în punctul $B(0, b)$, atunci ecuația dreptei $d = AB$ se scrie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Această ecuație se numește ecuația dreptei prin tăieturi.

1.3. Unghiul dintre două drepte

Definiție. Unghiul dintre două drepte plane este prin definiție unghiul dintre vectorii lor directori.

Propoziție. Dacă dreptele d_1 și d_2 au vectorii directori $\vec{d}_1(p_1, q_1)$ și $\vec{d}_2(p_2, q_2)$, atunci

$$\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2}}.$$

Demonstrație. Din definiția produsului scalar avem:

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = \|\vec{d}_1\| \cdot \|\vec{d}_2\| \cdot \cos(\widehat{\vec{d}_1, \vec{d}_2}).$$

Explicitând produsul scalar și normele, adică:

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2 \quad \text{și} \quad \|\vec{d}_1\| = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}, \quad \|\vec{d}_2\| = \sqrt{p_2^2 + q_2^2},$$

rezultă formula care permite calculul cosinusului unghiului dintre două drepte.

Propoziție. Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt date prin punct și pantă, adică:

$$d_1 : y - y_1 = m_1(x - x_1) \Leftrightarrow y = m_1 x + n_1$$

$$d_2 : y - y_2 = m_2(x - x_2) \Leftrightarrow y = m_2 x + n_2$$

atunci

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

unde θ este unghiul dintre cele două drepte.

Demonstrație. $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Propoziție. (a) Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt date prin punct și vector director, adică:

$$d_1 : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1}$$

$$d_2 : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2}$$

atunci

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

(b) Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt date prin punct și pantă, adică:

$$d_1 : y = m_1 x + n_1$$

$$d_2 : y = m_2x + n_2$$

atunci $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Demonstrație. (a) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \parallel \vec{d}_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$\vec{d}_1 = \lambda \vec{d}_2 \Leftrightarrow p_1 \vec{i} + q_1 \vec{j} = \lambda(p_2 \vec{i} + q_2 \vec{j}) \Leftrightarrow$$

$$p_1 = \lambda p_2 \text{ și } q_1 = \lambda q_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

(b) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Propoziție. (a) Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt date prin punct și vector director, adică

$$d_1 : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1}$$

$$d_2 : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2}$$

atunci $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$.

(b) Dacă dreptele d_1 și d_2 sunt date prin punct și pantă, adică

$$d_1 : y = m_1x + n_1$$

$$d_2 : y = m_2x + n_2$$

atunci $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + 1 = 0$.

Demonstrație. (a) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{d}_1, \vec{d}_2}) = 0 \Leftrightarrow p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$.

(b) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg} \theta = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + 1 = 0$.

1.4. Distanța de la un punct la o dreaptă

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct și d o dreaptă dată prin ecuația carteziană generală

$$d : ax + by + c = 0.$$

Observație. Ecuația dreptei d poate fi adusă la această formă generală, prin calcule directe în toate cazurile prezentate înainte, adică dreapta prin punct și vector director, dreapta prin două puncte distincte și cazul particular, dreapta prin tăieturi. Desigur coeficienții a și b din această ecuație nu sunt aceiași ca în cazul dreptei prin tăieturi.

Propoziție. Distanța de la punctul M_0 la dreapta d este

$$d(M_0, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstrație. Panta dreptei d este

$$m_d = -\frac{a}{b}.$$

Atunci panta perpendicularei d' din M_0 pe d este

$$m_{d'} = \frac{b}{a},$$

deci ecuația perpendicularei din M_0 pe d este:

$$d' : y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Coordonatele piciorului perpendicularei din M_0 pe dreapta d , punctul M' , se obțin rezolvând sistemul format din ecuațiile dreptelor d și d'

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (d) \\ y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) & (d') \end{cases}$$

Se obține:

$$x_{M'} = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}$$

$$y_{M'} = \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

(după efectuarea unor calcule elementare).

Distanța de la punctul M_0 la dreapta d este distanța dintre punctele M_0 și M' , adică

$$d(M_0, d) = d(M_0, M') = \sqrt{(x_{M'} - x_{M_0})^2 + (y_{M'} - y_{M_0})^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(după efectuarea unor calcule elementare).

Aria triunghiului. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 3}$, trei puncte necoliniare în planul xOy .

Propoziție. *Aria triunghiului determinat de punctele necoliniare M_i , $i = \overline{1, 3}$, este:*

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Demonstrație. Ecuația dreptei M_2M_3 este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este:

$$\begin{aligned} \sigma[M_1M_2M_3] &= \frac{1}{2} \cdot M_2M_3 \cdot d(M_1, M_2M_3) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|. \end{aligned}$$

CAPITOLUL 2

2.1. Cercul

Definiție. Cercul este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centrul cercului. Distanța de la oricare punct al cercului la centru se numește raza cercului și se notează în general cu R .

Propoziție. *Ecuția carteziană a cercului cu centrul în punctul $C(a, b)$ și de rază R este:*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Demonstrație. Fie punctul oarecare $M(x, y)$ al cercului. Avem $CM = R$, din definiție. Rezultă:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R^2$$

sau

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Observație. Ecuția cercului se mai poate scrie:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

sau

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

unde s-a notat:

$$m = -2a$$

$$n = -2b$$

$$p = a^2 + b^2 - R^2.$$

2.2. Elipsa

Fie c un număr real pozitiv și F, F' două puncte fixate în plan (distincte) astfel încât $FF' = 2c$. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > c$.

Definiție. Mulțimea E a punctelor M cu proprietatea că

$$MF + MF' = 2a$$

se numește elipsă.

Observație. Dacă $c = 0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază a .

Propoziție. Punctul $M(x, y)$ aparține elipsei E dacă și numai dacă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ unde } b^2 = a^2 - c^2.$$

Demonstrație. Alegem originea reperului în mijlocul segmentului FF' , axa Ox fiind OF' , iar axa Oy fiind mediatoarea segmentului FF' . Avem: $F(-c, 0)$, $F'(c, 0)$.

$$M \in E \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Se trece un radical în membrul drept (de exemplu al doilea radical) și se ridică la pătrat fiecare membru al ecuației. Se obține:

$$\begin{aligned} 4cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx. \end{aligned}$$

Se ridică din nou la pătrat și după efectuarea unor calcule elementare se obține:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Deoarece $a > c > 0$, putem nota expresia pozitivă $a^2 - c^2$ cu b^2 . Rezultă ecuația canonică a elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.3. Hiperbola

Fie c un număr real strict pozitiv și F, F' două puncte fixate în plan (distincte) astfel încât $FF' = 2c$. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \in (0, c)$.

Definiție. Mulțimea H a punctelor M din plan cu proprietatea că

$$|MF - MF'| = 2a$$

se numește hiperbolă.

Propoziție. *Punctul $M(x, y)$ aparține hiperbolei H dacă și numai dacă:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ unde } b^2 = c^2 - a^2.$$

Demonstrație. $M \in H \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a \Leftrightarrow$

$$MF - MF' = \pm 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Am ales ca în cazul elipsei dreapta FF' drept axă Ox , O originea reperului cartezian fiind mijlocul segmentului FF' și mediatoarea segmentului FF' drept axă Oy . În aceste condiții punctele F și F' au coordonatele: $(-c, 0)$ respectiv $(c, 0)$.

Se trece al doilea radical în membrul drept, se ridică la pătrat și se obține:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2.$$

După efectuarea calculelor și după o altă ridicare la pătrat se obține ecuația hiperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde am notat expresia pozitivă $c^2 - a^2$ cu b^2 .

Observație. Punctele F și F' se numesc focare, atât în cazul elipsei cât și în cazul hiperbolei.

Observație. Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

are ca asimptote oblice drepte:

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

2.4. Parabola

Fie h o dreaptă în plan și F un punct care nu aparține lui h .

Definiție. Mulțimea \mathcal{P} a punctelor M din plan cu proprietatea că

$$d(M, h) = MF$$

se numește parabolă.

Punctul F se numește focarul parabolei, dreapta h se numește directoarea parabolei iar MF se numește raza focală corespunzătoare punctului M .

Fie A proiecția focarului F pe directoarea h și O mijlocul segmentului $[AF]$. Alegem ca axă Ox semidreapta $[OF]$, iar ca axă Oy mediatoarea segmentului AF . Notăm cu p lungimea segmentului $[AF]$. Acest număr real pozitiv p se numește parametrul parabolei.

Propoziție. *Punctul $M(x, y)$ aparține parabolei dacă și numai dacă*

$$y^2 = 2px.$$

Demonstrație. $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(M, h) = MF \Leftrightarrow$

$$d^2(M, h) = MF^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Tangenta într-un punct la parabolă. Propoziție. *Fie parabola de ecuație $y^2 = 2px$ și $M_0(x_0, y_0)$ un punct al parabolei. Tangenta la parabolă în punctul M_0 are ecuația:*

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Demonstrație. $y^2 = 2px \Rightarrow y = \pm\sqrt{2px}$

Ecuația generală a tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul (x_0, y_0) unde $y_0 = f(x_0)$ este:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

În cazul parabolei avem

$$f'(x_0) = \pm \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_0}} = \frac{p}{y_0}.$$

Deci ecuația tangentei este:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0).$$

Teoremă. (Proprietatea optică a parabolei) *Tangenta și normala la parabolă într-un punct M al ei sunt bisectoarele unghiului format de raza focală M_0F și paralela la axa Ox dusă prin punctul M_0 .*

Demonstrație. Fie $B\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ punctul de intersecție al directoarei h cu paralela dusă prin M_0 la axa Ox . Din definiția parabolei rezultă că triunghiul M_0BF este isoscel, deci pentru a demonstra că tangenta în M_0 este bisectoarea unghiului $\widehat{BM_0F}$ este suficient să demonstrăm că tangenta este mediana corespunzătoare laturii BF .

Ecuația tangentei în M_0 este

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Mijlocul lui BF are coordonatele $\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$ și se verifică imediat că aceste coordonate verifică ecuația tangentei.

2.5. Probleme propuse

1. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(\alpha, 0)$ și $B(0, \beta)$ unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Calculați lungimea segmentului AB și coordonatele mijlocului acestuia.

2. Scrieți ecuația cercului circumscris triunghiului AOB .

3. Dacă punctele A, B sunt variabile, segmentul AB are lungimea constantă, iar M este un punct fix al acestuia, să se determine locul geometric al lui M . Studiați cazul în care M este mijlocul segmentului.

2. Se dă parabola de ecuație $y^2 = 2px$.

a) Să se scrie ecuația tangentei la parabolă într-un punct oarecare al ei.

b) Să se afle coordonatele proiecției unui punct din plan pe tangentă.

c) Să se afle locul geometric al proiecțiilor focarului pe tangentele la parabolă.

3. Se dau parabolele de ecuații $y^2 = 2px$ și $y^2 = 2qx$, ($0 < q < p$). O tangentă variabilă dusă la a doua parabolă intersectează prima parabolă în punctele M_1 și M_2 . Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $[M_1M_2]$.

4. Se consideră reperul cartezian xOy și P un punct pe prima bisectoare a axelor de coordonate. Fie P_1 și P_2 proiecțiile ortogonale ale lui P pe axa absciselor respectiv pe axa ordonatelor. O dreaptă variabilă d care trece prin P intersectează axa absciselor în M și axa ordonatelor în N . Să se demonstreze că pentru orice poziție a dreptei d , dreptele MP_2, NP_1 și perpendiculara pe d care trece prin O sunt trei drepte concurente.

5. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul laturii $[BC]$. Se notează cu N un punct pe AB astfel ca $A \in (BN)$. Ortocentrul H al triunghiului ABC se proiectează pe bisectoarele unghiurilor \widehat{BAC} și \widehat{CAN} respectiv în punctele P și Q . Să se arate că punctele M, P și Q sunt coliniare.

Bibliografie

- [1] Andrica D., Țopan L., *Analytic Geometry*, Cluj University Press, 2004.
- [2] Andrica D., Varga Cs., Văcărețu D., *Teme și probleme alese de geometrie*, Editura Plus, București, 2002.
- [3] Galbură Gh., Rado F., *Geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [4] Murgulescu E., Flexi S., Kreindler O., Sacter O., Tîrnoveanu M., *Geometrie analitică și diferențială*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
- [5] Rado F., Orban B., Groze V., Vasiu A., *Culegere de probleme de geometrie*, Litografia Univ. Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 1979.