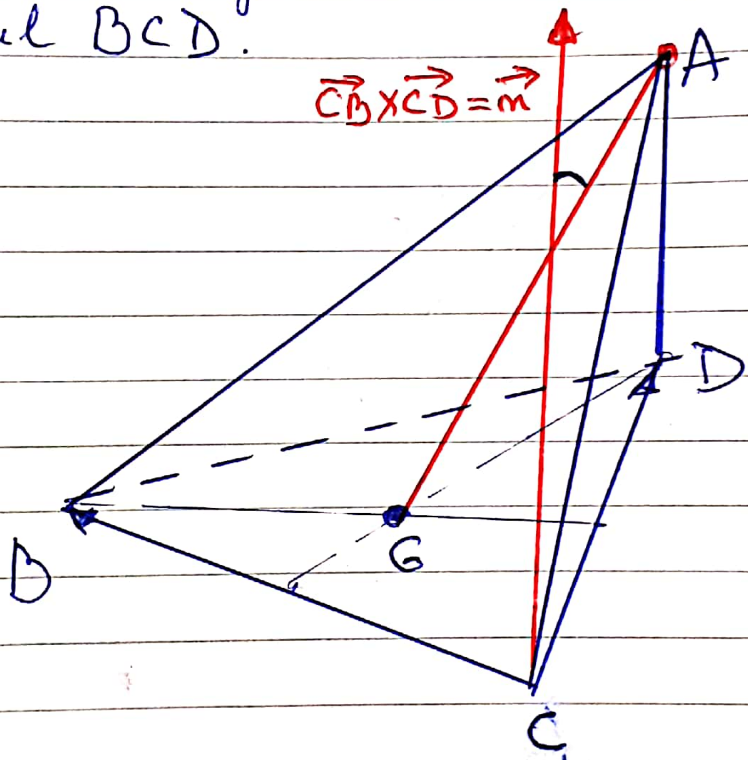
Model subiect Geometrie Matematică 2021
Varianta 1

Fie tetraedrul ABCD cu vârfurile A(3,4,2), B(5,14,4), C(−3,−4,0) respectiv D(1,−4,−1). Dacă G este centrul de greutate al triunghiului BCD să se scrie ecuația dreptei AG și să se calculeze unghiul dintre dreapta AG și planul BCD.



$$G\left(\frac{5-3+1}{3}, \frac{14-4-4}{3}, \frac{4+0-1}{3}\right) \Leftrightarrow G(1,2,1)$$

$$\vec{AG} = (1-3)\vec{i} + (2-4)\vec{j} + (1-2)\vec{k} \Leftarrow$$

$$\boxed{\vec{AG} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}}$$

Vectorul normal al planului este

$$\vec{m} = \vec{CB} \times \vec{CD}$$

$$\vec{CB} = 8\vec{i} + 18\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{CD} = 4\vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{CB}\times\vec{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 18 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

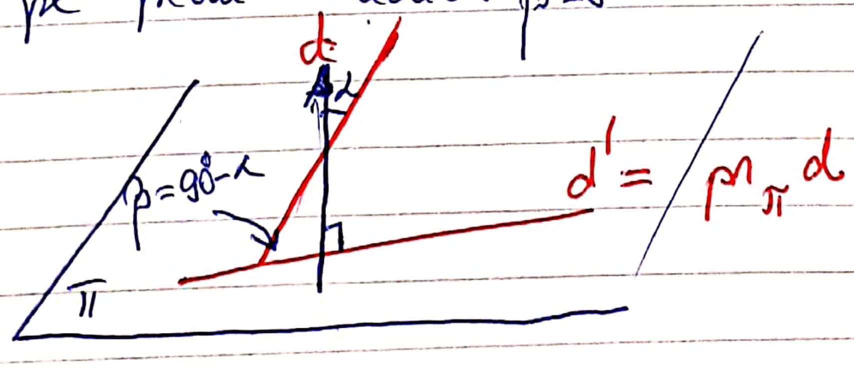
$$= -18\vec{i} + 24\vec{j} - 72\vec{k}$$

Fie $\alpha = m\left(\sphericalangle\left(\vec{AG}, \vec{n}\right)\right)$

$$\cos\alpha = \frac{-2\cdot(-18) - 2\cdot 24 - 1(-72)}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{18^2+24^2+72^2}} =$$

$$= \frac{+\cancel{6}(6-8+12)}{3\cdot\cancel{6}\cdot\sqrt{9+16+144}} = \frac{10}{39}$$

Dar unghiul dintre dreaptă și plan este unghiul dintre dreaptă și proiecția ei pe plan adică $\beta = 90^\circ - \alpha$



$$\Rightarrow \sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \frac{10}{39}.$$

Răspuns. Unghiul dintre AG și planul BCD este $\boxed{\beta = \arcsin\frac{10}{39}}$.