

Astronomie Trigonometrie sferică

Cristina Blaga

30 septembrie 2021

Obiectivele seminarului

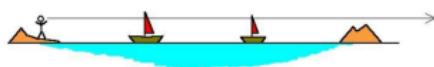
- ▶ Introducerea noțiunilor elementare de trigonometrie sferică și a formulelor lui Gauss.
- ▶ Aflarea distanțelor dintre două locuri date de pe Pământ aflate pe același meridian sau pe meridiane diferite.

Începuturile Astronomiei

- ▶ Oamenii au folosit stelele pentru a-și găsi drumul spre casă (păstorii - pe uscat, navigatorii - pe apă).
- ▶ Observarea mișcării astrilor le-a permis orientarea pe Pământ și măsurarea timpului.
- ▶ Pentru a explica mișcarea astrilor pe cer ei și-au imaginat *modele de Univers*, în care Pământul era în centru, în jurul lui mișcându-se Soarele, Luna și restul corpurilor cerești.
- ▶ Astăzi, știm că Pământul se mișcă în jurul Soarelui.

Ce formă are Pământul?

On a flat Earth, all objects must lie 'above' the horizon



On a curved Earth, distant objects can be 'below' the horizon

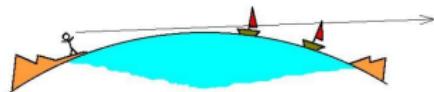


Figura: Catargul navei dispare ultimul sub orizont

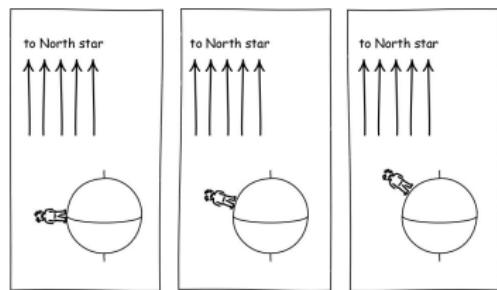


Figura: Înălțimea deasupra orizontului Polarei depinde de latitudinea observatorului

Pământul pare a fi sferic



Figura: Umbra Pământului proiectată pe suprafața Lunii în timpul unei eclipse totale de Lună are forma unui cerc.

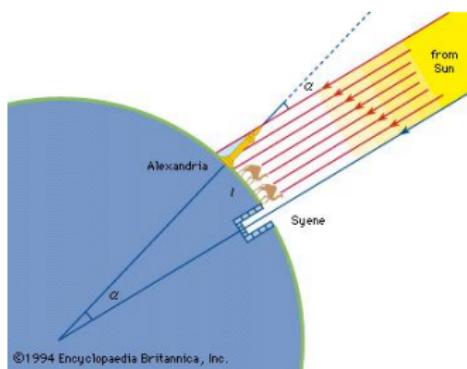
În sprijinul ipotezei că Pământul nu este plat, vine și observația că primele sau ultimele raze de Soare, luminează vârful munților sau partea superioară a clădirilor foarte înalte.

Eratostene din Cirene (276 î.Hr. - 194 î.Hr.)



Figura: Eratostene (cca 200 î.Hr.) a calculat circumferința Pământului. Lucrarea sa *Despre măsurarea Pământului* s-a pierdut, dar metoda lui a ajuns la noi fiind descrisă în lucrările lui Cleomedes, Theon din Sмирна sau Strabon.

Circumferința Pământului



- ▶ Eratostene a observat că la Alexandria, Soarele este la 50-a parte din cerc de verticală, când la Siena este la Zenit ($\alpha = 7^\circ 2'$).
- ▶ Distanța Alexandria-Siena este $l \approx 500$ stadii \Rightarrow circumferința Pământului este 250 mii stadii.
- ▶ 1 stadiu $\approx 1/6$ km \Rightarrow raza Pământului este 6632 km ($R_{\oplus} = 6371$ km).

Proiectul Eratostene

- ▶ An de an, elevii din diferite țări refac experiența lui Eratostene.
- ▶ Ei sunt puși să afle cât de sus urcă Soarele pe cer, la miezul unei zile date.
- ▶ Pentru a afla circumferința Pământului, folosind măsurătorile elevilor din două localități aflate pe același meridian, raționamentul este asemănător cu cel al lui Eratostene. Altfel, calculele sunt mai complicate.

Raza Pământului

- ▶ Valoarea exactă a razei terestre este $R_{\oplus} = 6371$ km.
- ▶ În primă aproximare, Pământul este considerat un elipsoid de rotație, turtit la poli.
- ▶ Turtirea elipsoidului terestru este de 1/300, raza ecuatorială fiind egală cu 6378 km.

Lungimea arcului de cerc corespunzător unui unghi la centru

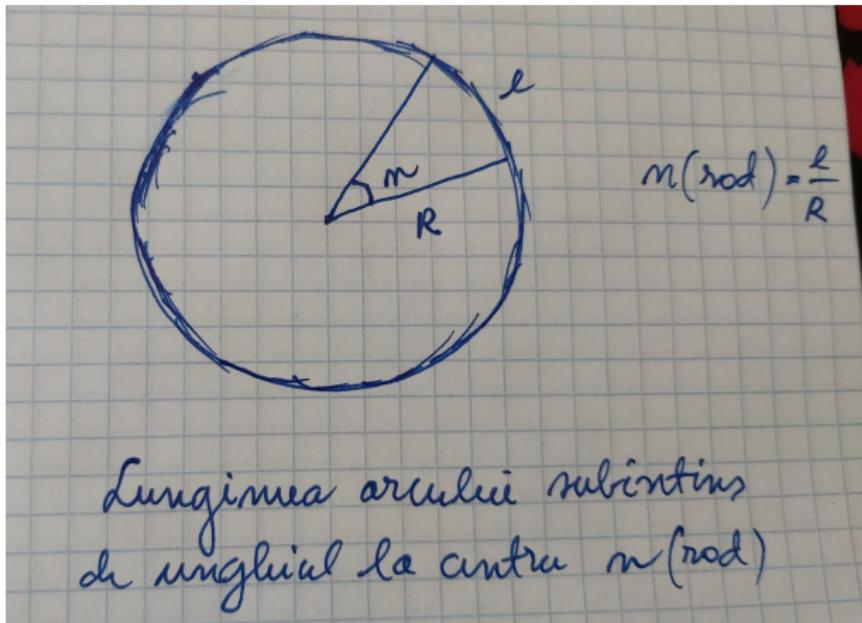
Formule: Lungimea arcului de cerc L corespunzător unghiului la centru n , exprimat în radiani $n(\text{rad})$, este:

$$L = R \cdot n(\text{rad})$$

unde R este raza cercului. Dacă unghiul este dat în grade $n(^{\circ})$, atunci

$$n(\text{rad}) = \frac{n(^{\circ}) \cdot \pi}{180^{\circ}} = \frac{n(^{\circ})}{57.3}.$$

Unghi la centru



Probleme

1. Cât de lung este arcul de cerc mare al globului pământesc pentru care unghiul la centru este
 - a. $40^\circ 10'$
 - b. $160^\circ 08' 35''$.

Raza Pământului este 6371 km.

2. Lungimea unui arc de cerc mare al globului pământesc este
 - a. 10000 km.
 - b. 3562 km.

Cât de mare este unghiul la centru corespunzător?

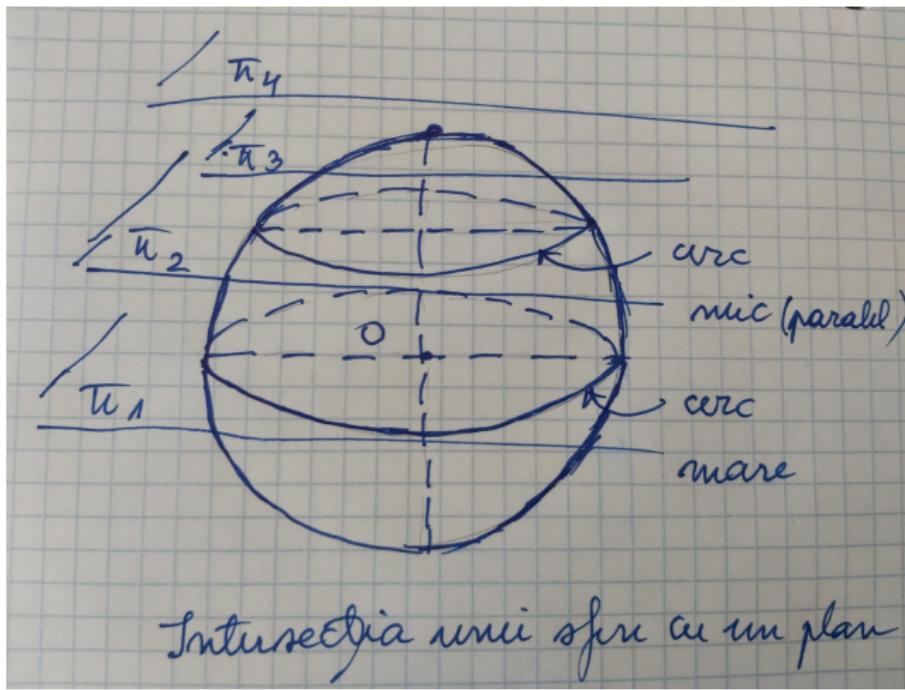
Probleme

3. Lungimea arcului AB de pe paralela globului pământesc la latitudinea φ este l . Să se afle lungimea L a arcului de ecuator cuprins între meridianele care trec prin punctele A și B dacă:
 - a. $\varphi = 56^\circ 17'$ și $l = 100$ km;
 - b. $\varphi = 60^\circ 02'$ și $l = 1756,5$ km.
4. Presupunând Pământul sferic, să se calculeze, în metri, lungimea unui arc de $2^\circ 41' 24''$, măsurat pe paralelul de 45° .

Sfera, intersecția cu un plan

- ▶ Intersecția unei sfere cu un plan poate fi un cerc, un punct sau mulțimea vidă.
- ▶ Dacă intersecția este un cerc și planul trece prin centrul sferei, cercul este numit *cerc mare*, altfel este un *parallel* sau *cerc mic* al sferei.

Cercuri pe sferă



Triunghiul sferic

- ▶ Un triunghi de pe sferă care are laturile arce de cerc mare de pe sferă se numește *triunghi sferic*.
- ▶ Lungimea unei laturi a triunghiului sferic este egală cu măsura unghiului la centrul sferei subîntins de latura respectivă.
- ▶ Măsura unui unghi al triunghiului sferic este egală cu măsura unghiul dintre tangentele la laturile triunghiului duse în vârful triunghiului.

Elementele triunghiului sferic

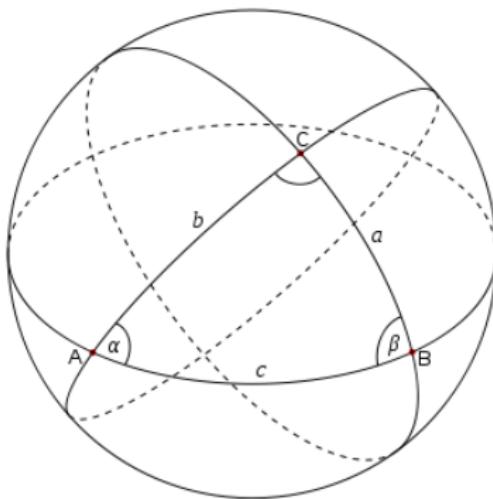
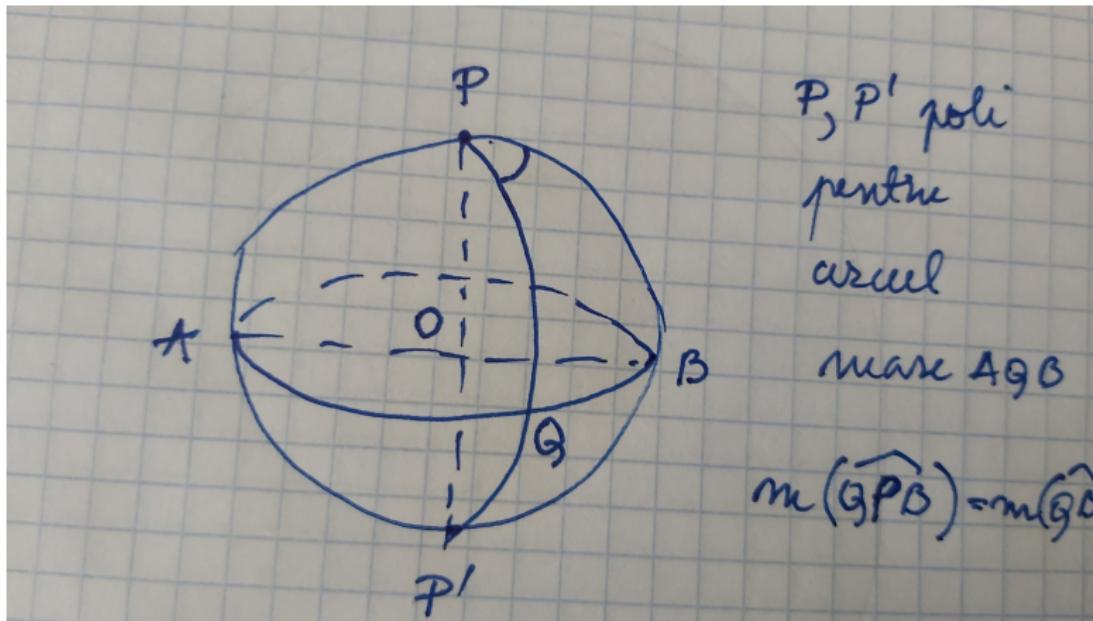


Figura: Unghiiurile (α, β, γ) și laturile unui triunghi sferic (a, b, c)

Unghiul unui triunghi sferic

- ▶ Planele perpendiculare pe un cerc mare al unei sfere au în comun o dreaptă perpendiculară pe planul cercului mare dat, care intersectează sfera în două puncte numite *polii* cercului considerat.
- ▶ Se poate demonstra că măsura unui unghi al unui triunghi sferic este egală cu măsura arcului subîntins de laturile unghiului pe cercul mare al sferei pentru care vârful unghiului este pol.

Măsura unghiului de pe sferă



Formulele lui Gauss

Relațiile între laturile și unghiurile triunghiului sferic sunt date de formulele lui Gauss:

$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A \text{ (teorema sinusului)}$$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \text{ (teorema cosinusului)}$$

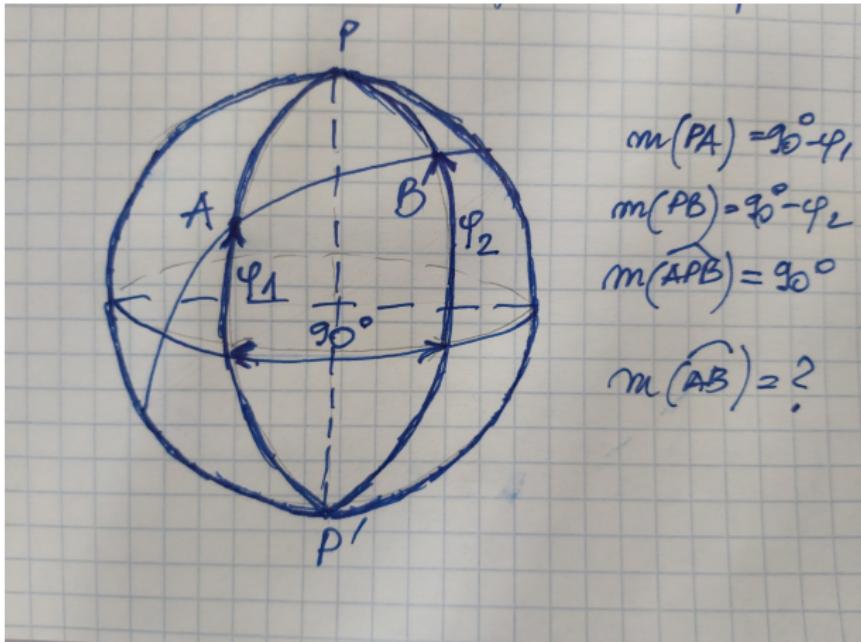
$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \text{ (formula celor cinci elemente)}$$

unde cu litere mici s-au notat laturile triunghului, iar cu litere mari unghiurile corespunzătoare lor.

Problema 5

Care este distanța, măsurată pe un cerc mare al globului terestru, dintre două localități A ($\varphi_1 = 45^\circ 9' N$) și B ($\varphi_2 = 60^\circ 27' N$), dacă longitudinile lor geografice diferă cu 90° ?

Triunghiul sferic pentru problema 5



Problema 6

Să se găsească distanța D , exprimată în mile marine, pe un cerc mare care unește două puncte M_1 și M_2 , dacă diferența de longitudini este $L_2 - L_1 = 97^\circ 09'$, latitudinea locului M_2 este $\varphi_2 = 35^\circ 30' \text{ N}$, iar unghiul de cursă în M_1 , notat C , este $60^\circ 34' 10''$. O milă marină, notată cu Mn , reprezintă lungimea arcului de meridian de un minut de arc. Prin definiție $1 Mn = 1852.3 \text{ m.}$

Problema 7

Prin Iași ($\varphi = 47^\circ 10'$, $L = 23^\circ 34'.5$) se duce cercul mare care atinge în cel mai nordic punct al său cercul polar de nord ($\varphi' = 66^\circ 33'$). Sub ce unghi, fata de meridianul Iașilor, se află acest cerc și care este longitudinea geografică a punctului de atingere?

Apostol Stefan Cosmin
- P21 -

1. b) $160^\circ 08' 75''$

$$n(^{\circ}) = 160^\circ 08' 75''$$

$$\underline{R = 6371 \text{ km}}$$

$$L = ?$$

$$L = R \cdot n(\text{rad}) = R \cdot \frac{n(^{\circ})}{57,3}$$

$$n(^{\circ}) = 160 + \frac{8}{60} + \frac{75}{3600} = 160,14^\circ$$

$$n(\text{rad}) = \frac{160,14}{57,3} = 2,8 \text{ rad}$$

$$L = 6371 \cdot 2,8 = 17838,8 \text{ km}$$

2. Lungimea unui arc de cerc mare al globului pământesc este : a) 10000 Km b) 3562 Km

Cât de mare este unghiul la centru corespunzător?

b) $L = 3562 \text{ Km}$

$$R = 6371 \text{ Km}$$

$$\alpha(\text{°}) = ?$$

$$L = R \cdot \alpha(\text{rad}) \Rightarrow \alpha(\text{rad}) = \frac{L}{R} = \frac{3562}{6371} = 0,56 \text{ rad}$$

$$\alpha(\text{°}) = 57,3 \cdot \alpha(\text{rad})$$

$$= 57,3 \cdot 0,56 = 32,09^\circ = 32^\circ 0,09 \cdot 60 =$$

$$= 32^\circ 5,4' = 32^\circ 5' 0,4 \cdot 60 = \underline{\underline{32^\circ 5' 24''}}$$

Tema ex 3b

$$\varphi = 60^\circ 02'$$

$$l = 1756,5 \text{ km}$$

$$l = L \widehat{AB} = 1756,5 \text{ km}$$

$$\varphi = 60^\circ 02'$$

$$R = 6371 \text{ km}$$

$$L = L \widehat{A'B'}$$

$$L = R \cdot n \text{ (rad)} \quad (1)$$

$$n = m(\widehat{AO'B}) = m(\widehat{A'O'B'})$$

$$l = R \cdot m(\widehat{AO'B}) \quad (2)$$

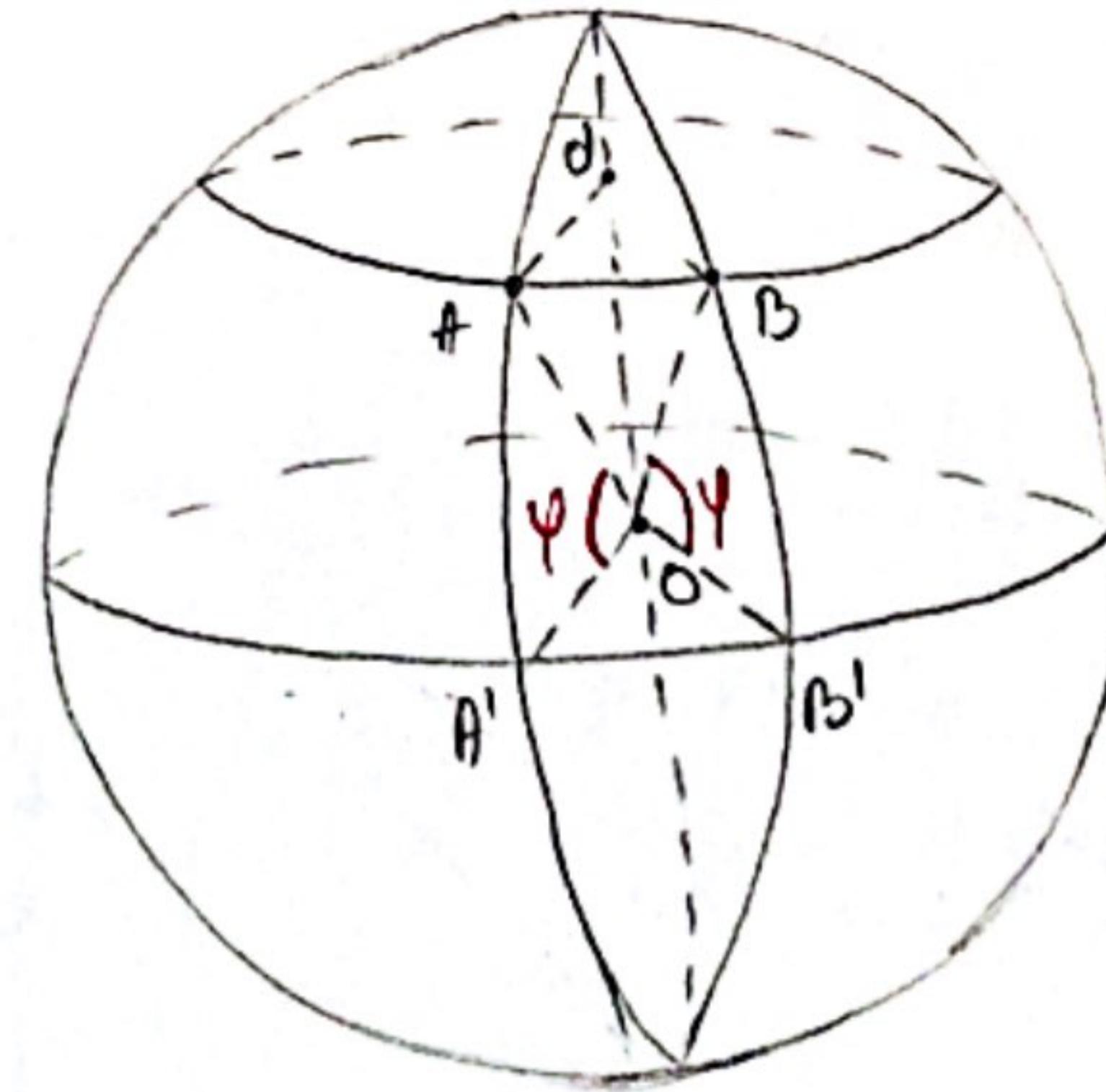
$$R' = O'A$$

$\Delta OOA'$ - dreptunghic

$$OA = R$$

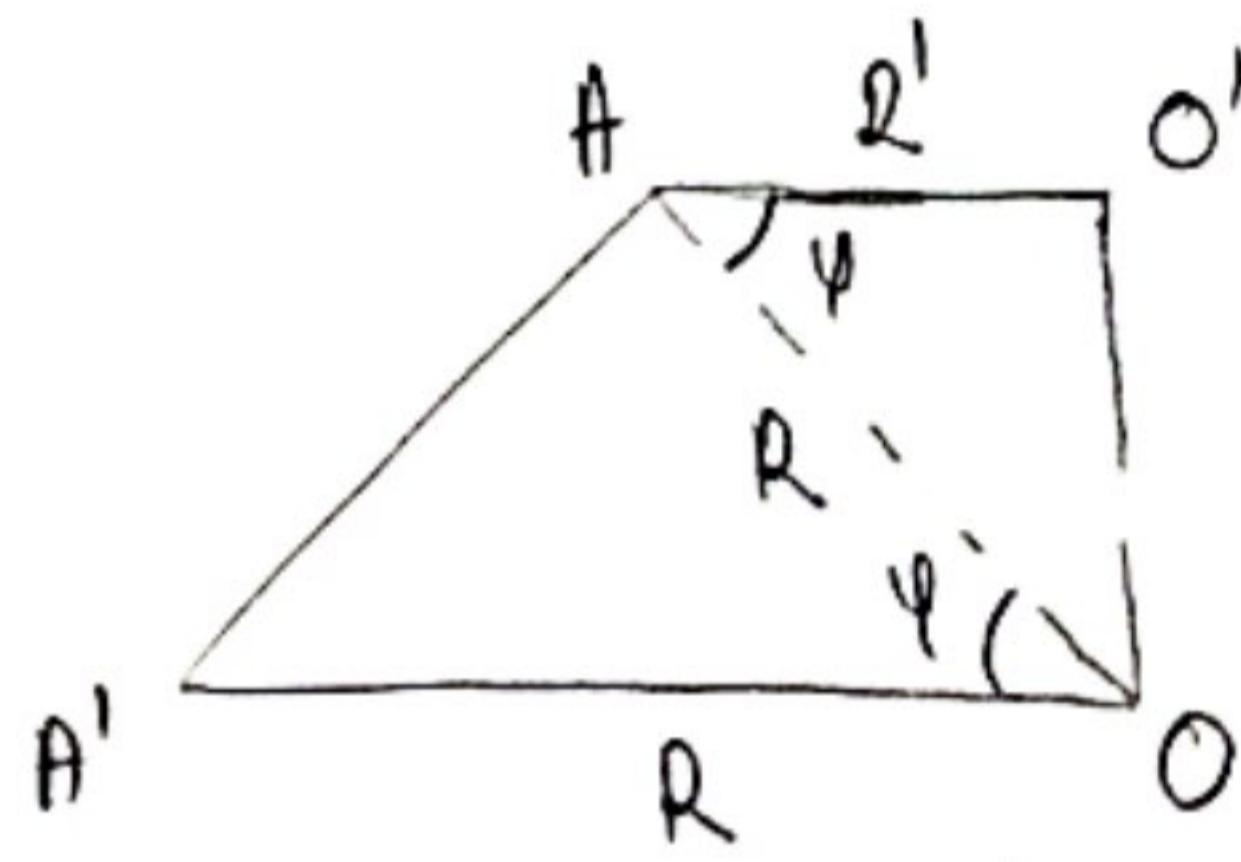
$$m(\widehat{AOA'}) = \varphi$$

$$R' = R \cdot \cos \varphi \quad (3)$$



$$(1), (2), (3) \Rightarrow L = R \cdot \frac{l}{R \cdot \cos \varphi} \Rightarrow \frac{l}{\cos \varphi} = \frac{1756,5}{\cos(60^\circ 02')} = \\ = \frac{1756,5}{0,5} = 3513 \text{ km}$$

$$\cos(60^\circ 02') = \cos(60 + \frac{2}{60}) = \cos(60,03)$$



← desen pentru demonstrarea formulei

$$L = \frac{l}{\cos \varphi}$$

4. În raport cu Pământul sféric,
să se calculeze, în același fel ca
unui arc de $2^\circ 41' 24''$ măsurat
pe paralelul de 45° .

$$2^\circ 41' 24'' = 2 + \frac{41}{60} + \frac{24}{3600}$$

$$\approx h^\circ + 0,68 + 0,07 = 2,75^\circ$$

$$R = 6371 \text{ km}$$

$$T = 45^\circ$$

$$L = m(\text{rad}) \cdot R$$

$$\Delta O^1O^1A - \text{dhr.} / m(O^1O^1) = m(AO^1)$$

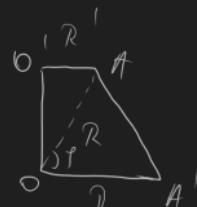
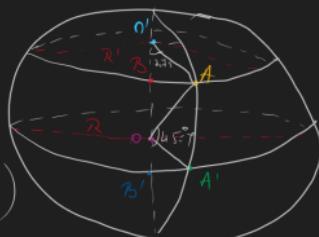
$$(R = O^1A =)$$

$$\Rightarrow R^1 = R \cdot \cos f = 6371 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

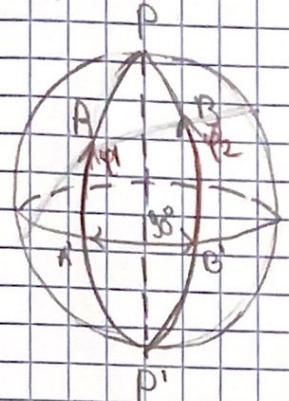
$$\Rightarrow R^1 = 3185,5\sqrt{2} \text{ km}$$

$$L = R^1 \cdot m(\text{rad}) = 3185,5\sqrt{2} \cdot \frac{2,75}{57,3} =$$

$$= 2241,5775 \text{ km} = 2241577,5 \text{ m}$$



5 Care este dăunătoarea pe un cerc măsură al globului dintr-o
A ($\varphi_1 = 45^\circ 30' N$) și B ($\varphi_2 = 60^\circ 24' N$) dacă longitudinile lor
geografice diferă cu 90° ?



$$m(PA) = 90^\circ - \varphi_1 = 90^\circ - 45^\circ 30' = 89^\circ 30' - 45^\circ 30'$$

$$m(PB) = 90^\circ - \varphi_2 = 90^\circ - 60^\circ 24' = 89^\circ 60' - 60^\circ 24'$$

$$m(\widehat{APB}) = 88^\circ$$

$$m(PA) = 44^\circ 51'$$

$$m(PB) = 29^\circ 33'$$

$m(\widehat{AB}) \Rightarrow$ teorema cosinusului:

$$\Rightarrow \cos \widehat{AB} = \cos(PA) \cdot \cos(PB) + \sin(PA) \cdot \sin(PB) \cdot \cos(\widehat{APB})$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AB} = \cos(44^\circ 51') \cdot \cos(29^\circ 33') + \sin(44^\circ 51') \cdot \sin(29^\circ 33') \cdot \cos(88^\circ)$$

$$= \cos(44^\circ 51') \cdot \cos(29^\circ 33') = 0,40 \cdot 0,84 = 0,609$$

$$44^\circ 51' = 44^\circ + \frac{51}{60} = 44.85^\circ$$

$$29^\circ 33' = 29^\circ + \frac{33}{60} = 29.55^\circ$$

$$\cos \widehat{AB} = 0,609 \Rightarrow \arcsin 0,609 = 52.48^\circ$$

$$m(\text{mod}) = \frac{52.48}{54.3} = 0,91$$

$$L = R \cdot 0,91 = 6371 \cdot 0,91 = 5734,61 \text{ Km}$$