Astronomie
Trigonometrie sferică

Cristina Blaga

30 septembrie 2021

Obiectivele seminarului

- Introducerea noţiunilor elementare de trigonometrie sferică şi a formulelor lui Gauss.
- Aflarea distanţelor dintre două locuri date de pe Pământ aflate pe acelaşi meridian sau pe meridiane diferite.

Începuturile Astronomiei

- Oamenii au folosit stelele pentru a-şi găsi drumul spre casă (păstorii - pe uscat, navigatorii - pe apă).
- Observarea mişcării aştrilor le-a permis orientarea pe Pământ şi măsurarea timpului.
- Pentru a explica mişcarea aştrilor pe cer ei şi-au imaginat *modele de Univers*, în care Pământul era în centru, în jurul lui mişcându-se Soarele, Luna şi restul corpurilor cereşti.
- Astăzi, ştim că Pământul se mişcă în jurul Soarelui.

Ce formă are Pământul?

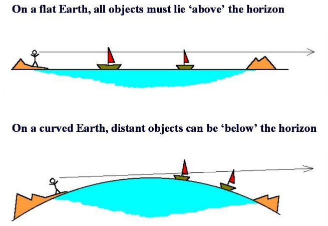


Figura: Catargul navei dispare ultimul sub orizont

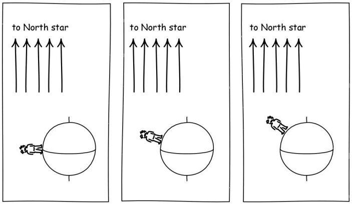


Figura: Înălţimea deasupra orizontului Polarei depinde de latitudinea observatorului

Pământul pare a fi sferic

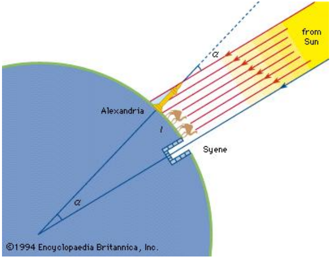
Figura: Umbra Pământului proiectată pe suprafaţa Lunii în timpul unei eclipse totale de Lună are forma unui cerc.

În sprijinul ipotezei că Pământul nu este plat, vine şi observaţia că primele sau ultimele raze de Soare, luminează vârful munţilor sau partea superioară a clădirilor foarte înalte.

Eratostene din Cirene (276 î.Hr. - 194 î.Hr.)

Figura: Eratostene (cca 200 î.Hr.) a calculat circumferinţa Pământului. Lucrarea sa *Despre măsurarea Pământului* s-a pierdut, dar metoda lui a ajuns la noi fiind descrisă în lucrările lui Cleomedes, Theon din Smirna sau Strabon.

Circumferinţa Pământului



- Eratostene a observat că la Alexandria, Soarele este la 50-a parte din cerc de verticală, când la Siena este la Zenit ($\alpha = 7°2'$).
- Distanţa Alexandria-Siena este $l \approx 500$ stadii $\Rightarrow$ circumferinţa Pământului este 250 mii stadii.
- 1 stadiu $\approx 1/6$ km $\Rightarrow$ raza Pământului este 6632 km ($R_\oplus = 6371$ km).

Proiectul Eratostene

- An de an, elevii din diferite ţări refac experienţa lui Eratostene.
- Ei sunt puşi să afle cât de sus urcă Soarele pe cer, la miezul unei zile date.
- Pentru a afla circumferinţa Pământului, folosind măsurătorile elevilor din două localităţi aflate pe acelaşi meridian, raţionamentul este asemănător cu cel al lui Eratostene. Altfel, calculele sunt mai complicate.

Raza Pământului

- Valoarea exactă a razei terestre este $R_{\oplus} = 6371$ km.
- În primă aproximaţie, Pământul este considerat un elipsoid de rotaţie, turtit la poli.
- Turtirea elipsoidului terestru este de 1/300, raza ecuatorială fiind egală cu 6378 km.

Lungimea arcului de cerc corespunzător unui unghi la centru

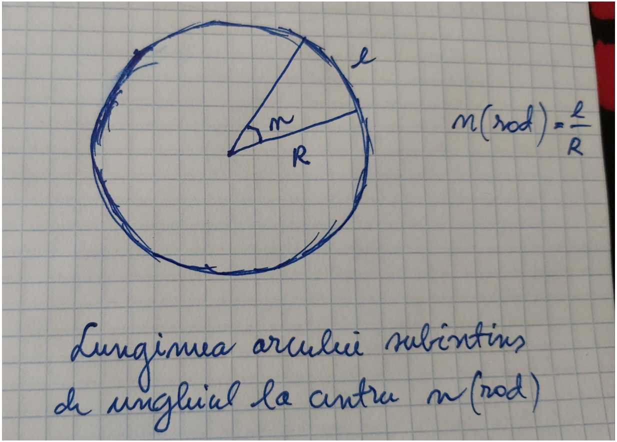
Formule: Lungimea arcului de cerc L corespunzător unghiului la centru n, exprimat în radiani $n(\text{rad})$, este:

$$L = R \cdot n(\text{rad})$$

unde R este raza cercului. Dacă unghiul este dat în grade $n(^\circ)$, atunci

$$n(\text{rad}) = \frac{n(^\circ) \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{n(^\circ)}{57.3}\,.$$

Unghi la centru



Probleme

1. Cât de lung este arcul de cerc mare al globului pământesc pentru care unghiul la centru este
   a. $40^\circ\ 10'$
   b. $160^\circ\ 08'\ 35''$.

   Raza Pământului este 6371 km.
2. Lungimea unui arc de cerc mare al globului pământesc este
   a. 10000 km.
   b. 3562 km.

   Cât de mare este unghiul la centru corespunzător?

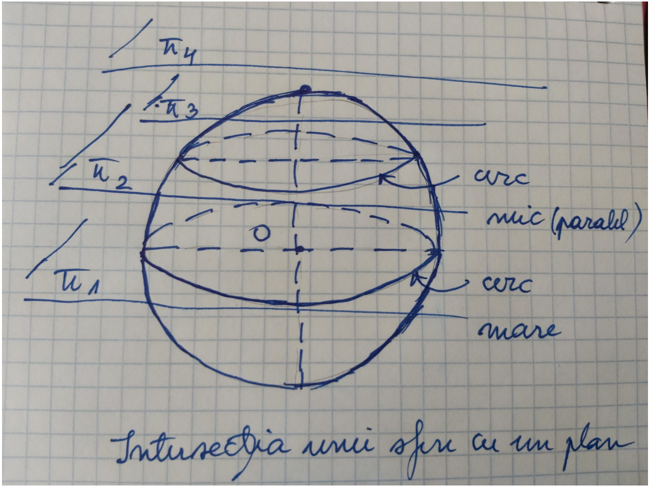
Probleme

3. Lungimea arcului *AB* de pe paralela globului pământesc la latitudinea φ este *l*. Să se afle lungimea *L* a arcului de ecuator cuprins între meridianele care trec prin punctele *A* şi *B* dacă:
   a. $\varphi = 56^\circ 17'$ şi $l = 100$ km;
   b. $\varphi = 60^\circ 02'$ şi $l = 1756,5$ km.
4. Presupunând Pământul sferic, să se calculeze, în metri, lungimea unui arc de $2^\circ\ 41'\ 24''$, măsurat pe paralelul de 45°.

Sfera, intersecţia cu un plan

- Intersecţia unei sfere cu un plan poate fi un cerc, un punct sau mulţimea vidă.
- Dacă intersecţia este un cerc şi planul trece prin centrul sferei, cercul este numit *cerc mare*, altfel este un *paralel* sau *cerc mic* al sferei.

Cercuri pe sferă



Triunghiul sferic

- Un triunghi de pe sferă care are laturile arce de cerc mare de pe sferă se numeşte *triunghi sferic*.
- Lungimea unei laturi a triunghiului sferic este egală cu măsura unghiului la centrul sferei subîntins de latura respectivă.
- Măsura unui unghi al triunghiului sferic este egală cu măsura unghiul dintre tangentele la laturile triunghiului duse în vârful triunghiului.

Elementele triunghiului sferic

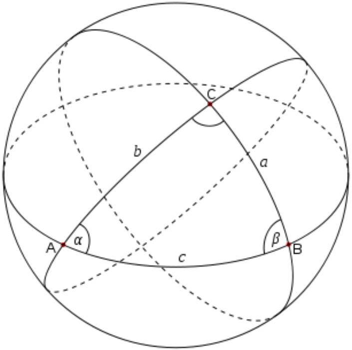
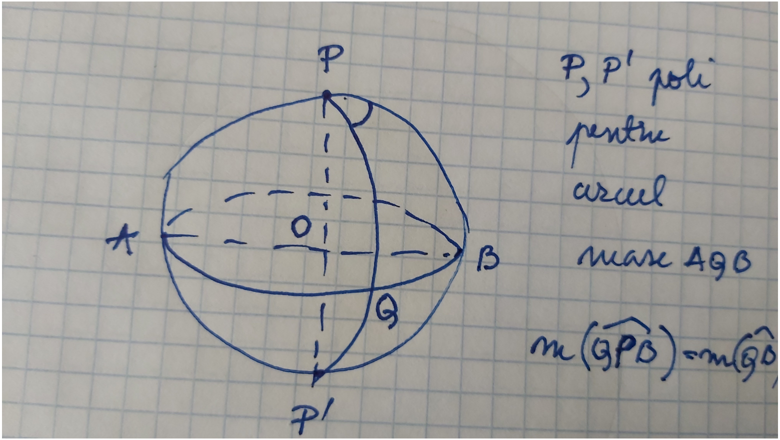


Figura: Unghiurile (α, β, γ) şi laturile unui triunghi sferic (a, b, c)

Unghiul unui triunghi sferic

- Planele perpendiculare pe un cerc mare al unei sfere au în comun o dreaptă perpendiculară pe planul cercului mare dat, care intersectează sfera în două puncte numite *polii* cercului considerat.
- Se poate demonstra că măsura unui unghi al unui triunghi sferic este egală cu măsura arcului subîntins de laturile unghiului pe cercul mare al sferei pentru care vârful unghiului este pol.

Măsura unghiului de pe sferă



Formulele lui Gauss

Relaţiile între laturile şi unghiurile triunghiului sferic sunt date de formulele lui Gauss:

$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A \ (\textit{teorema sinusului})$$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \ (\textit{teorema cosinusului})$$

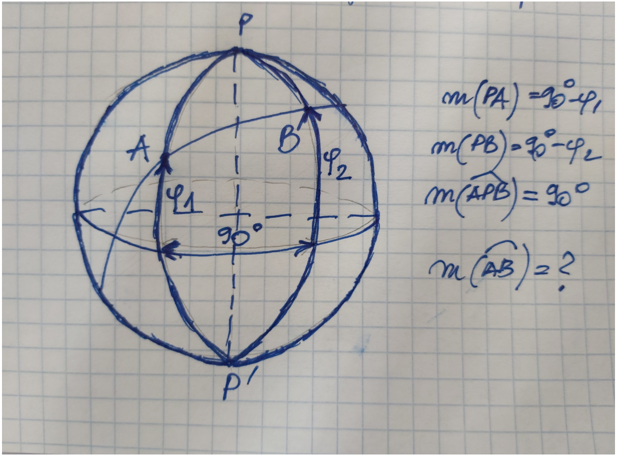
$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \ (\textit{formula celor cinci elemente})$$

unde cu litere mici s-au notat laturile triunghului, iar cu litere mari unghiurile corespunzătoare lor.

Problema 5

Care este distanţa, măsurată pe un cerc mare al globului terestru, dintre două localităţi A ($\varphi_1 = 45^\circ 9'$ N) şi B ($\varphi_2 = 60^\circ 27'$ N), dacă longitudinile lor geografice diferă cu 90°?

Triunghiul sferic pentru problema 5



Problema 6

Să se găsească distanţa D, exprimată în mile marine, pe un cerc mare care uneşte două puncte M_1 şi M_2, dacă diferenţa de longitudini este $L_2 - L_1 = 97^\circ 09'$, latitudinea locului M_2 este $\varphi_2 = 35^\circ 30'$ N, iar unghiul de cursă în M_1, notat C, este $60^\circ 34' 10''$. O *milă marină*, notată cu Mn, reprezintă lungimea arcului de meridian de un minut de arc. Prin definiţie $1\ Mn = 1852.3$ m.

Problema 7

Prin Iaşi ($\varphi = 47°10'$, $L = 23°34'.5$) se duce cercul mare care atinge în cel mai nordic punct al său cercul polar de nord ($\varphi' = 66°33'$). Sub ce unghi, fata de meridianul Iaşilor, se află acest cerc şi care este longitudinea geografică a punctului de atingere?

Apetri Ștefan Cosmin
- 831 -

1. b) $160^\circ 08' 35''$

$n(^\circ) = 160^\circ 08' 35''$

$R = 6371 km$

$L = ?$

$L = R \cdot n(rad) = R \cdot \frac{n(^\circ)}{57,3}$

$n(^\circ) = 160^\circ + \frac{8}{60} + \frac{35}{3600} = 160,14^\circ$

$n(rad) = \frac{160,14}{57,3} = 2,8 \ rad$

$L = 6371 \cdot 2,8 = 17838,8 \ km$

2. Lungimea unui arc de cerc mare al globului pământesc este : a) 10000 Km b) 3562 Km

Cât de mare este unghiul la centru corespunzător?

b) $L = 3562\ Km$

$R = 6371\ Km$

$m(°) = ?$

$L = R \cdot n(rad) \Rightarrow m(rad) = \frac{L}{R} = \frac{3562}{6371} = 0,56\ rad$

$m(°) = 57,3 \cdot n(rad)$

$= 57,3 \cdot 0,56 = 32,09° = 32°$ $\quad 0,09 \cdot 60 =$

$= 32°\ 5,4' = 32°\ 5'$ $\quad 0,4 \cdot 60$ $= \underline{32°\ 5'\ 24''}$

Tema ex 36

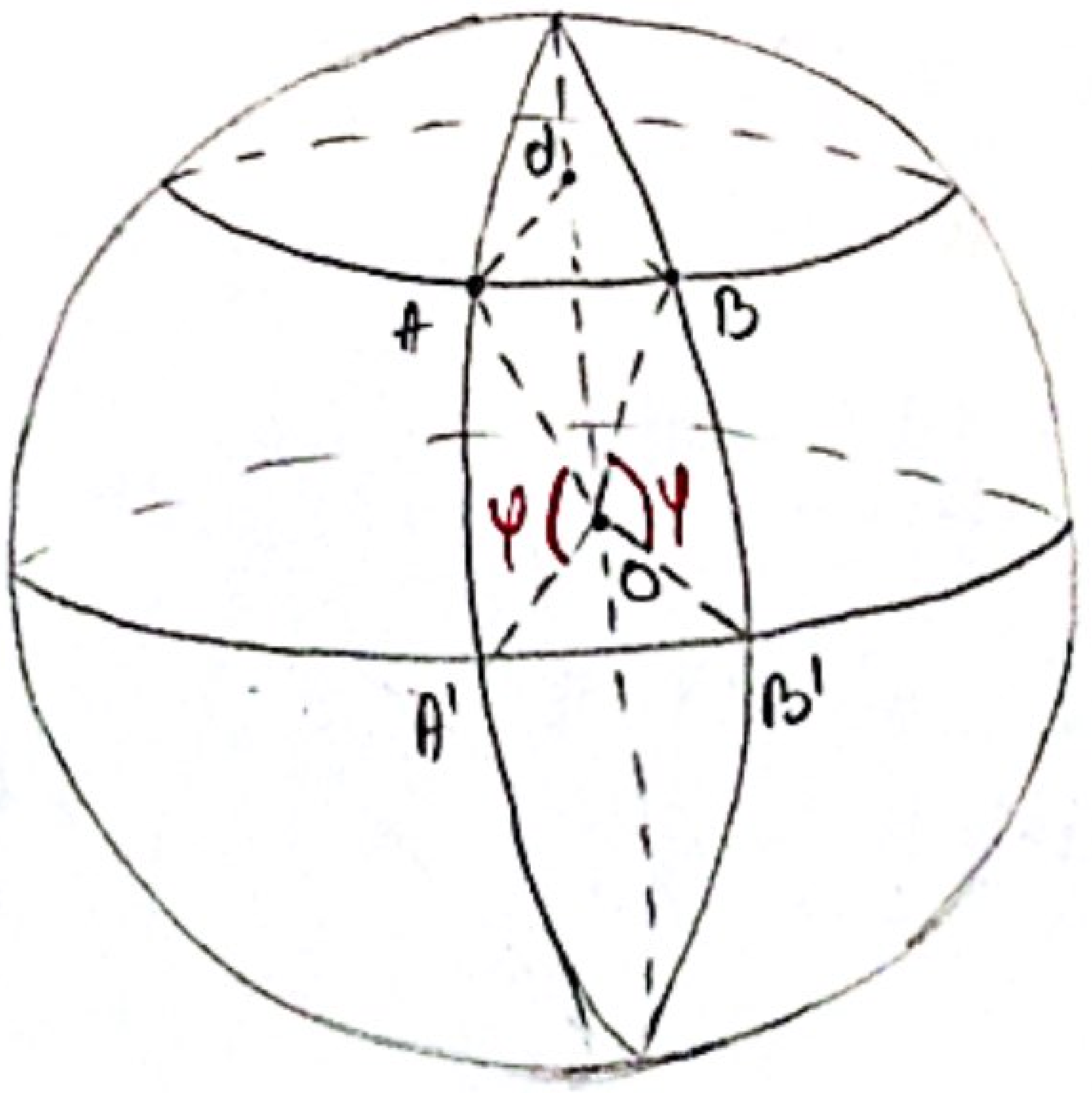
$\varphi = 60^\circ 02'$

$l = 1756{,}5\ km$

$l = L\widehat{AB} = 1756{,}5\ km$

$\varphi = 60^\circ 02'$

$R = 6371\ km$



$L = L\widehat{A'B'}$

$L = R \cdot n(rad)$ (1)

$n = m(\widehat{AO'B}) = m(\widehat{A'OB'})$

$l = R' \cdot m(\widehat{AO'B})$ (2)

$R' = O'A$

$\triangle OO'A$ - dreptunghic

$OA = R$

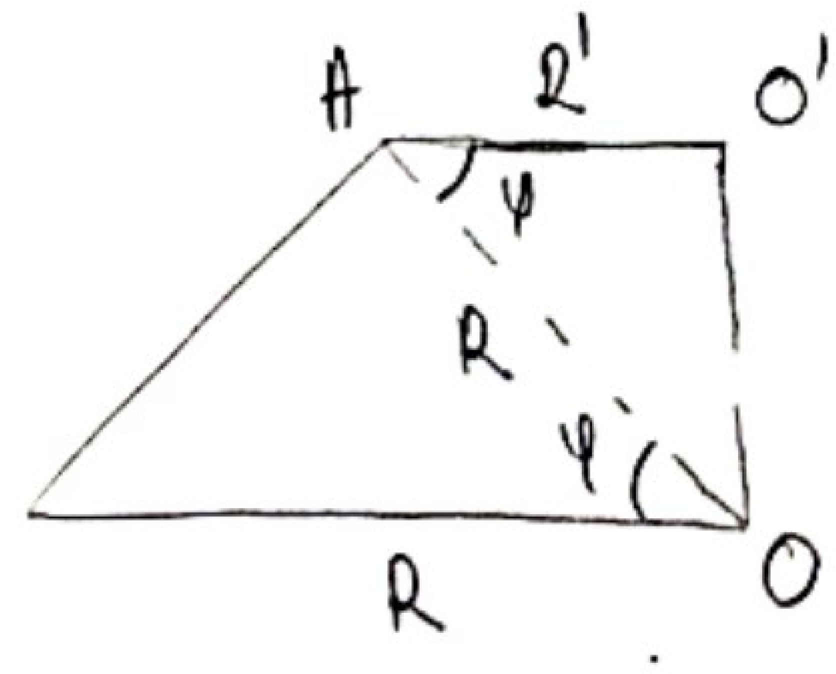
$m(\widehat{OAO'}) = \varphi$

$R' = R \cdot \cos\varphi$ (3)

$$(1),(2),(3) \Rightarrow L = R \cdot \frac{l}{R \cdot \cos\varphi} = \frac{l}{\cos\varphi} = \frac{1756{,}5}{\cos(60^\circ 02')} =$$

$$= \frac{1756{,}5}{0{,}5} = 3513\ km$$

$$\cos(60^\circ 02') = \cos\left(60 + \frac{2}{60}\right) = \cos(60{,}03)$$



← desen pentru demonstrarea formulei $L = \frac{l}{\cos\varphi}$

4. Presupunând Pământul sferic, să se calculeze, în metri, lungimea unui arc de $2^\circ 41' 24''$ măsurat pe paralelul de 45°.

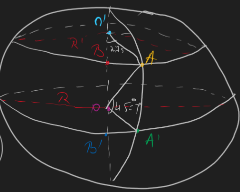
$$2^\circ 41' 24'' = 2^\circ + \frac{41}{60} + \frac{24}{3600}$$

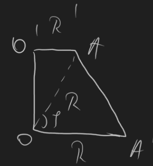
$$\simeq 2^\circ + 0{,}68 + 0{,}07 = 2{,}75^\circ$$

$R = 6371 \text{ km}$

$\varphi = 45^\circ$

$L = m(\text{rad}) \cdot R$





$\Delta O'OA$ - dr. $\Big/ m(O'OA) = m(AOA')$

$(R = O'A)$

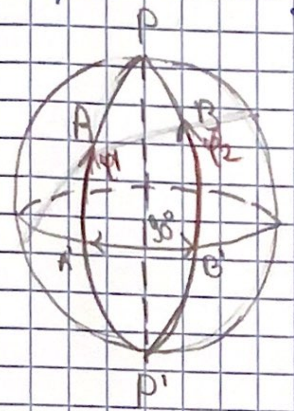
$\Rightarrow R' = R \cdot \cos\varphi = 6371 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow R' = 3185{,}5\sqrt{2} \text{ km}$

$$L = R' \cdot m(\text{rad}) = 3185{,}5\sqrt{2}^{\,\text{km}} \cdot \frac{2{,}75}{57{,}3} =$$

$$= 224{,}5775 \text{ km} = 224577{,}5 \text{ m}$$

5. Care este d măsurată pe un cerc mare al globului dintre A ($\varphi_1 = 45°9'N$) și B ($\varphi_2 = 60°27'N$) dacă longitudinile lor geografice diferă cu $90°$?



$m(PA) = 90° - \varphi_1 = 90° - 45°9' = 89°60' - 45°9'$

$m(PB) = 90° - \varphi_2 = 90° - 60°27' = 89°60' - 60°24'$

$m(\widehat{APB}) = 90°$

$m(PA) = 44°51'$

$m(PB) = 29°33'$

$m(\widehat{AB}) \Rightarrow$ teorema cosinusului

$\Rightarrow \cos \widehat{AB} = \cos(PA) \cdot \cos(PB) + \sin(PA) \cdot \sin(PB) \cdot \cos(\widehat{APB})$

$\Rightarrow \cos \widehat{AB} = \cos(44°51') \cdot \cos(29°33') + \sin(44°51') \cdot \sin(29°33') \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0}$

$= \cos(44°51') \cdot \cos(29°33') = 0{,}70 \cdot 0{,}87 = 0{,}609$

$44°51' = 44° + \frac{51}{60} = 44.85°$

$29°33° = 29° + \frac{33}{60} = 29.55°$

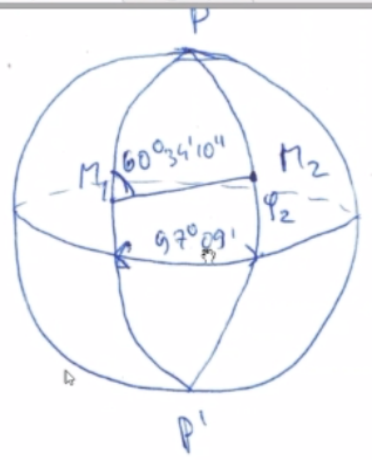
$\cos \widehat{AB} = 0{,}609 \Rightarrow \arcsin 0{,}609 = 52{,}48°$

$m(rad) = \frac{52{,}48°}{57{,}3} = 0{,}91$

$L = R \cdot 0{,}91 = 6371 \cdot 0{,}91 = 5797{,}61$ Km

Seminarul 2 grupa MIE3

Capan Matei



$$m(PM_2) = 90^\circ - \varphi_2 = 90^\circ - 35^\circ 30' = 54^\circ 30'$$

Folosim teorema sinusului pentru a afla M_1M_2

Seminarul 2 grupa MIE3

Folosind teorema sinusului pentru a afla M_1M_2

$$\sin \widehat{PM_1M_2} \cdot \sin PM_2 = \sin \widehat{M_1PM_2} \cdot \sin M_1M_2$$

$$\sin 60^\circ 34' 10'' \cdot \sin 54^\circ 30' = \sin 97^\circ 05' \cdot \sin M_1M_2$$

$$\sin M_1M_2 = \frac{\sin 60^\circ 34' 10'' \cdot \sin 54^\circ 30'}{\sin 97^\circ 09'} = \frac{0.87 \cdot 0.81}{0.99} \cancel{0.99} =$$

$$= 0.71$$

00:27:31 / 01:26:52