Secţia matematică-informatică

Algebră

1. Să se definească noţiunea de subgrup al unui grup. Dacă H_1 şi H_2 sunt subgrupuri ale unui grup $(G, \cdot)$, atunci $H_1 \cap H_2$ şi $H_1 \cup H_2$ sunt subgrupuri ale lui G? Justificare.

2. Fie $GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ şi $f : \mathbb{C}^* \to GL_2(\mathbb{R})$ definită prin $f(a+b\mathrm{i}) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Să se arate că $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ şi $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ sunt grupuri, f este un morfism de grupuri între $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ şi $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$, şi să se determine nucleul său.

Analiză matematică

1. Teorema lui Fermat (enunţ şi demonstraţie)
2. Se dă funcţia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{dacă } x \in]0, +\infty[\\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

a) Calculaţi $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$.

b) Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f pe $[0, +\infty[$; calculaţi derivata funcţiei f' pe mulţimea maximă de derivabilitate.

c) Determinaţi punctele de optim (extrem) local ale funcţiei f relative la $[0, +\infty[$.

d) Determinaţi o primitivă $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a funcţiei f pe $[0, +\infty[$.

Geometrie

1. Distanţa de la un punct la un plan
2. Fie cubul $[ABCDA'B'C'D']$ de muchie "a" raportat la reperul ortonormat având ca axe Ox, Oy, Oz dreptele AB, AD, $AA\prime$. Se consideră punctele M , N şi P, aparţinând

segmentelor (AB), (BC) si $(CC\prime)$ astfel incat $(MA) = (MB)$, $NB/NC = 1/2$, $PC/PC\prime = 1/3$.

a) Să se determine distanţa de la punctul $C\prime$ la planul (MNP).

b) Dreptele DD' si AA' intersectează planul (MNP) în punctele Q şi R. Să se determine unghiul dintre dreptele QR şi $B'C'$.