Dobre Delia
Grupa 131

Tema 4

1) Fie $(G,\cdot)$ grup;

$A, B \leq G \overset{?}{\Rightarrow} A \cap B \leq G$

$A, B \leq G \Rightarrow 1 \in A$ și $1 \in B \Rightarrow 1 \in A \cap B$ (1)

Fie $x, y \in A \cap B \Rightarrow x, y \in A$ și $x, y \in B \Rightarrow$

$x \cdot y^{-1} \in A$ și $x \cdot y^{-1} \in B \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in A \cap B$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow A \cap B \leq G$

În general, $A \cup B \not\leq G$

Exemplu: $2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z}, +)$, dar $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \not\leq \mathbb{Z}$, pentru că „+" nu e parte stabilă pentru $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$3 + 5\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ inversabil $\Leftrightarrow \exists\, a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a.î.

$(3+5\sqrt{2}) \cdot (a + b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2}) \cdot (3 + 5\sqrt{2}) = 1$

$(3+5\sqrt{2})(a+b\sqrt{2}) = 3a + 3b\sqrt{2} + 5a\sqrt{2} + 10b = 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3a + 10b = 1 \mid \cdot(-5) \\ 5a + 3b = 0 \mid \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15a - 50b = -5 & (1) \\ 15a + 9b = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$(1) + (2) \Rightarrow -41b = -5 \Rightarrow b = \frac{5}{41} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow 5a = -\frac{15}{41} \Rightarrow a = -\frac{3}{41} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow 3 + 5\sqrt{2}$ este inversabil în $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ și

$(3+5\sqrt{2})^{-1} = -\frac{3}{41} + \frac{5}{41}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

3) În ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$:

e_1, e_2 sunt liniar independenți, pentru că

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$x_1 = (2,2)$, $x_2 = (1,1)$ sunt liniar dependenți, pentru că $\exists\, \alpha = 2 \in \mathbb{R}$ a.î. $x_1 = \alpha x_2$, adică x_1 se scrie ca o combinație liniară de x_2.