Geometrie analitică plană

Coordonator

Lect. univ. dr. Daniel VĂCĂREŢU

2018

Cuprins

CAPITOLUL 1

Ecuaţiile carteziene ale dreptelor în raport cu un reper ortonormat în plan (dreapta definită prin punct şi vector director, dreapta definită prin două puncte, dreapta prin tăieturi)

1.1. Dreapta definită prin punct şi vector director

Fie reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}\{0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ în plan. Fie d o dreaptă în plan care are un vector director $\overrightarrow{d}$ de componente p şi q, adică

$$\overrightarrow{d} = p\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{j}$$

($\overrightarrow{d} \neq \overrightarrow{0}$, adică p şi q nu sunt nule simultan). Pe dreapta d se consideră un punct fixat M_0 de coordonate (x_0, y_0) şi un punct variabil M de coordonate (x, y).

Fie $\overrightarrow{r}_M$ şi $\overrightarrow{r}_{M_0}$ vectorii de poziţie ai punctelor M şi M_0 faţă de originea O.

Ecuaţia vectorială a dreptei d este:

$$d: \ \overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{M_0} + \lambda\overrightarrow{d}, \text{ unde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Propoziţie. *Ecuaţia carteziană a dreptei d în raport cu reperul $\mathcal{R}\{0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ este:*

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Demonstraţie. Ecuaţia vectorială a dreptei $d: \ \overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{M_0} + \lambda\overrightarrow{d}$ se transcrie astfel:

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j} + \lambda(p\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{j}).$$

Deoarece versorii $\overrightarrow{i}$ şi $\overrightarrow{j}$ sunt liniar independenţi, avem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \end{cases}$$

Acestea sunt ecuaţiile parametrice ale dreptei d. Eliminând λ între cele două ecuaţii, avem:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Observaţie. Dacă unul dintre numerele reale p sau q este zero atunci nu se poate face împărţirea cu el. Să presupunem că $p = 0$. Atunci din ecuaţiile parametrice rezultă $x = x_0$ (şi y variabil). Aceasta este ecuaţia unei drepte paralele cu axa Oy. Analog $y = y_0$ este ecuaţia unei drepte paralele cu axa Ox.

Observaţie. Dacă $p \neq 0$, ecuaţia dreptei d se poate scrie:

$$y - y_0 = \frac{q}{p}(x - x_0).$$

Dacă notăm cu $m = \dfrac{q}{p}$, ecuaţia devine:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

m se numeşte panta dreptei d şi este egală cu $\operatorname{tg} \alpha$, unde α este unghiul dintre axa Ox şi dreapta d.

1.2. Dreapta definită prin două puncte distincte

Fie dreapta d în planul xOy, raportată la reperul ortonormat $\mathcal{R}\{0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$. Se consideră pe dreapta d punctele distincte fixate M_1 şi M_2 de coordonate (x_1, y_1) respectiv (x_2, y_2) şi punctul variabil M de coordonate (x, y).

Ecuaţia vectorială a dreptei d este:

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{M_1} + \alpha(\overrightarrow{r}_{M_2} - \overrightarrow{r}_{M_1}).$$

Propoziţie. *Ecuaţia carteziană a dreptei d este:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Demonstraţie. Ecuaţia vectorială a dreptei se explicitează astfel:

$$x\vec{i}+y\vec{j}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+\alpha(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}-x_1\vec{i}-y_1\vec{j})\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=x_1+\alpha(x_2-x_1) \\ y=y_1+\alpha(y_2-y_1) \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Observaţie. Dacă $x_2-x_1=0$ atunci ecuaţia dreptei este $x=x_1$ şi reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy, iar dacă $y_2-y_1=0$, atunci ecuaţia dreptei este $y=y_1$ şi reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Ox.

Dacă $x_2-x_1\neq 0$ atunci ecuaţia dreptei este

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

şi atunci panta dreptei d este

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Observaţie. Ecuaţia dreptei date prin două puncte distincte

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

se poate scrie în mod echivalent:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Observaţie. Dacă punctul $M_3(x_3,y_3)$ aparţine dreptei d determinată de punctele distincte $M_1(x_1,y_1)$ şi $M_2(x_2,y_2)$ atunci coordonatele punctului M_3 verifică ecuaţia dreptei M_1M_2, deci avem:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Aceasta este condiţia de coliniaritate a punctelor M_1, M_2, M_3.

Observaţie. Dacă dreapta d intersectează axa Ox în punctul $A(a,0)$ şi axa Oy în punctul $B(0,b)$, atunci ecuaţia dreptei $d = AB$ se scrie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Această ecuaţie se numeşte ecuaţia dreptei prin tăieturi.

1.3. Unghiul dintre două drepte

Definiţie. Unghiul dintre două drepte plane este prin definiţie unghiul dintre vectorii lor directori.

Propoziţie. *Dacă dreptele d_1 şi d_2 au vectorii directori $\overrightarrow{d}_1(p_1, q_1)$ şi $\overrightarrow{d}_2(p_2, q_2)$, atunci*

$$\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{p_1p_2 + q_1q_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2}}.$$

Demonstraţie. Din definiţia produsului scalar avem:

$$\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2 = \|\overrightarrow{d}_1\| \cdot \|\overrightarrow{d}_2\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2}).$$

Explicitând produsul scalar şi normele, adică:

$$\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2 = p_1p_2 + q_1q_2 \quad \text{şi} \quad \|\overrightarrow{d}_1\| = \sqrt{p_1^2 + q_1^2},\ \|\overrightarrow{d}_2\| = \sqrt{p_2^2 + q_2^2},$$

rezultă formula care permite calculul cosinusului unghiului dintre două drepte.

Propoziţie. *Dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt date prin punct şi pantă, adică:*

$$d_1 :\ y - y_1 = m_1(x - x_1) \Leftrightarrow y = m_1x + n_1$$

$$d_2 :\ y - y_2 = m_2(x - x_2) \Leftrightarrow y = m_2x + n_2$$

atunci

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

unde θ este unghiul dintre cele două drepte.

Demonstraţie. $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Propoziţie. *(a) Dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt date prin punct şi vector director, adică:*

$$d_1: \ \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1}$$
$$d_2: \ \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2}$$

atunci

$$d_1 \| d_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

(b) Dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt date prin punct şi pantă, adică:

$$d_1: \ y = m_1 x + n_1$$

$$d_2: \ y = m_2 x + n_2$$

atunci $d_1 \| d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Demonstraţie. (a) $d_1 \| d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{d}_1 \| \overrightarrow{d}_2 \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$\overrightarrow{d}_1 = \lambda \overrightarrow{d}_2 \Leftrightarrow p_1 \overrightarrow{i} + q_1 \overrightarrow{j} = \lambda(p_1 \overrightarrow{i} + q_1 \overrightarrow{j}) \Leftrightarrow$$

$$p_1 = \lambda p_2 \text{ şi } q_1 = \lambda q_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

(b) $d_1 \| d_2 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Propoziţie. *(a) Dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt date prin punct şi vector director, adică*

$$d_1: \ \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1}$$
$$d_2: \ \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2}$$

atunci $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$.

(b) Dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt date prin punct şi pantă, adică

$$d_1: \ y = m_1 x + n_1$$

$$d_2: \ y = m_2 x + n_2$$

atunci $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + 1 = 0$.

Demonstraţie. (a) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2}) = 0 \Leftrightarrow p_1p_2 + q_1q_2 = 0$.
(b) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg}\theta = 0 \Leftrightarrow m_1m_2 + 1 = 0$.

1.4. Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct şi d o dreaptă dată prin ecuaţia carteziană generală

$$d: \; ax + by + c = 0.$$

Observaţie. Ecuaţia dreptei d poate fi adusă la această formă generală, prin calcule directe în toate cazurile prezentate înainte, adică dreapta prin punct şi vector director, dreapta prin două puncte distincte şi cazul particular, dreapta prin tăieturi. Desigur coeficienţii a şi b din această ecuaţie nu sunt aceiaşi ca în cazul dreptei prin tăieturi.

Propoziţie. *Distanţa de la punctul M_0 la dreapta d este*

$$d(M_0, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstraţie. Panta dreptei d este

$$m_d = -\frac{a}{b}.$$

Atunci panta perpendicularei d' din M_0 pe d este

$$m_{d'} = \frac{b}{a},$$

deci ecuaţia perpendicularei din M_0 pe d este:

$$d' : \; y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Coordonatele piciorului perpendicularei din M_0 pe dreapta d, punctul M', se obţin rezolvând sistemul format din ecuaţiile dreptelor d şi d'

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (d) \\ y - y_0 = \dfrac{b}{a}(x - x_0) & (d') \end{cases}$$

Se obţine:

$$x_{M'} = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}$$

$$y_{M'} = \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

(după efectuarea unor calcule elementare).

Distanţa de la punctul M_0 la dreapta d este distanţa dintre punctele M_0 şi M', adică

$$d(M_0, d) = d(M_0, M') = \sqrt{(x_{M'} - x_{M_0})^2 + (y_{M'} - y_{M_0})^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(după efectuarea unor calcule elementare).

Aria triunghiului. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,3}$, trei puncte necoliniare în planul xOy.

Propoziţie. *Aria triunghiului determinat de punctele necoliniare M_i, $i = \overline{1,3}$, este:*

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Demonstraţie. Ecuaţia dreptei M_2M_3 este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este:

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2} \cdot M_2M_3 \cdot d(M_1, M_2M_3)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

CAPITOLUL 2

2.1. Cercul

Definiţie. Cercul este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centrul cercului. Distanţa de la oricare punct al cercului la centru se numeşte raza cercului şi se notează în general cu R.

Propoziţie. *Ecuaţia carteziană a cercului cu centrul în punctul $C(a, b)$ şi de rază R este:*

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Demonstraţie. Fie punctul oarecare $M(x, y)$ al cercului. Avem $CM = R$, din definiţie. Rezultă:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R^2$$

sau

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Observaţie. Ecuaţia cercului se mai poate scrie:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$$

sau

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

unde s-a notat:

$$m=-2a$$

$$n=-2b$$

$$p=a^2+b^2-R^2.$$

2.2. Elipsa

Fie c un număr real pozitiv şi F, F' două puncte fixate în plan (distincte) astfel încât $FF' = 2c$. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > c$.

Definiţie. Mulţimea E a punctelor M cu proprietatea că

$$MF + MF' = 2a$$

se numeşte elipsă.

Observaţie. Dacă $c = 0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază a.

Propoziţie. *Punctul $M(x, y)$ aparţine elipsei E dacă şi numai dacă*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ unde } b^2 = a^2 - c^2.$$

Demonstraţie. Alegem originea reperului în mijlocul segmentului FF', axa Ox fiind OF', iar axa Oy fiind mediatoarea segmentului FF'. Avem: $F(-c, 0)$, $F'(c, 0)$.

$$M \in E \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Se trece un radical în membrul drept (de exemplu al doilea radical) şi se ridică la pătrat fiecare membru al ecuaţiei. Se obţine:

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Se ridică din nou la pătrat şi după efectuarea unor calcule elementare se obţine:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Deoarece $a > c > 0$, putem nota expresia pozitivă $a^2 - c^2$ cu b^2. Rezultă ecuaţia canonică a elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.3. Hiperbola

Fie c un număr real strict pozitiv şi F, F' două puncte fixate în plan (distincte) astfel încât $FF' = 2c$. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \in (0, c)$.

Definiţie. Mulţimea H a punctelor M din plan cu proprietatea că

$$|MF - MF'| = 2a$$

se numeşte hiperbolă.

Propoziţie. *Punctul $M(x, y)$ aparţine hiperbolei H dacă şi numai dacă:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \textit{unde } b^2 = c^2 - a^2.$$

Demonstraţie. $M \in H \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a \Leftrightarrow$

$$MF - MF' = \pm 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Am ales ca în cazul elipsei dreapta FF' drept axă Ox, O originea reperului cartezian fiind mijlocul segmentului FF' şi mediatoarea segmentului FF' drept axă Oy. În aceste condiţii punctele F şi F' au coordonatele: $(-c, 0)$ respectiv $(c, 0)$.

Se trece al doilea radical în membrul drept, se ridică la pătrat şi se obţine:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2.$$

După efectuarea calculelor şi după o altă ridicare la pătrat se obţine ecuaţia hiperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde am notat expresia pozitivă $c^2 - a^2$ cu b^2.

Observaţie. Punctele F şi F' se numesc focare, atât în cazul elipsei cât şi în cazul hiperbolei.

Observaţie. Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

are ca asimptote oblice dreptele:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

2.4. Parabola

Fie h o dreaptă în plan şi F un punct care nu aparţine lui h.

Definiţie. Mulţimea $\mathcal{P}$ a punctelor M din plan cu proprietatea că

$$d(M, h) = MF$$

se numeşte parabolă.

Punctul F se numeşte focarul parabolei, dreapta h se numeşte directoarea parabolei iar MF se numeşte raza focală corespunzătoare punctului M.

Fie A proiecţia focarului F pe directoarea h şi O mijlocul segmentului $[AF]$. Alegem ca axă Ox semidreapta $[OF$, iar ca axă Oy mediatoarea segmentului AF. Notăm cu p lungimea segmentului $[AF]$. Acest număr real pozitiv p se numeşte parametrul parabolei.

Propoziţie. *Punctul $M(x, y)$ aparţine parabolei dacă şi numai dacă*

$$y^2 = 2px.$$

Demonstraţie. $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(M, h) = MF \Leftrightarrow$

$$d^2(M, h) = MF^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Tangenta într-un punct la parabolă. Propoziţie. *Fie parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$ şi $M_0(x_0, y_0)$ un punct al parabolei. Tangenta la parabolă în punctul M_0 are ecuaţia:*

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Demonstraţie. $y^2 = 2px \Rightarrow y = \pm\sqrt{2px}$

Ecuaţia generală a tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul (x_0, y_0) unde $y_0 = f(x_0)$ este:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

În cazul parabolei avem

$$f'(x_0) = \pm\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_0}} = \frac{p}{y_0}.$$

Deci ecuaţia tangentei este:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0).$$

Teoremă. (Proprietatea optică a parabolei) *Tangenta şi normala la parabolă într-un punct M al ei sunt bisectoarele unghiului format de raza focală M_0F şi paralela la axa Ox dusă prin punctul M_0.*

Demonstraţie. Fie $B\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ punctul de intersecţie al directoarei h cu paralela dusă prin M_0 la axa Ox. Din definiţia parabolei rezultă că triunghiul M_0BF este isoscel, deci pentru a demonstra că tangenta în M_0 este bisectoarea unghiului $\widehat{BM_0F}$ este suficient să demonstrăm că tangenta este mediana corespunzătoare laturii BF.

Ecuaţia tangentei în M_0 este

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Mijlocul lui BF are coordonatele $\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$ şi se verifică imediat că aceste coordonate verifică ecuaţia tangentei.

2.5. Probleme propuse

1. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(\alpha, 0)$ şi $B(0, \beta)$ unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Calculaţi lungimea segmentului AB şi coordonatele mijlocului acestuia.

2. Scrieţi ecuaţia cercului circumscris triunghiului AOB.

3. Dacă punctele A, B sunt variabile, segmentul AB are lungimea constantă, iar M este un punct fix al acestuia, să se determine locul geometric al lui M. Studiaţi cazul în care M este mijlocul segmentului.

2. Se dă parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$.

a) Să se scrie ecuaţia tangentei la parabolă într-un punct oarecare al ei.

b) Să se afle coordonatele proiecţiei unui punct din plan pe tangentă.

c) Să se afle locul geometric al proiecţiilor focarului pe tangentele la parabolă.

3. Se dau parabolele de ecuaţii $y^2 = 2px$ şi $y^2 = 2qx$, $(0 < q < p)$. O tangentă variabilă dusă la a doua parabolă intersectează prima parabolă în punctele M_1 şi M_2. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $[M_1M_2]$.

4. Se consideră reperul cartezian xOy şi P un punct pe prima bisectoare a axelor de coordonate. Fie P_1 şi P_2 proiecţiile ortogonale ale lui P pe axa absciselor respectiv pe axa ordonatelor. O dreaptă variabilă d care trece prin P intersectează axa absciselor în M şi axa ordonatelor în N. Să se demonstreze că pentru orice poziţie a dreptei d, dreptele MP_2, NP_1 şi perpendiculara pe d care trece prin O sunt trei drepte concurente.

5. Fie ABC un triunghi oarecare şi M mijlocul laturii $[BC]$. Se notează cu N un punct pe AB astfel ca $A \in (BN)$. Ortocentrul H al triunghiului ABC se proiectează pe bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{CAN}$ respectiv în punctele P şi Q. Să se arate că punctele M, P şi Q sunt coliniare.

Bibliografie

[1] Andrica D., Ţopan L., *Analytic Geometry*, Cluj University Presss, 2004.

[2] Andrica D., Varga Cs., Văcăreţu D., *Teme şi probleme alese de geometrie*, Editura Plus, Bucureşti, 2002.

[3] Galbură Gh., Rado F., *Geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[4] Murgulescu E., Flexi S., Kreindler O., Sacter O., Tîrnoveanu M., *Geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

[5] Rado F., Orban B., Groze V., Vasiu A., *Culegere de probleme de geometrie*, Litografia Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1979.