

Astronomie

Cursul 8 - Mișcarea în sistemul solar

Problema celor două corpuri

Cristina Blaga

18 noiembrie 2021

Mișcarea corpurilor în sistemul solar

Mișcare directă și retrogradă

- ▶ Corpurile din sistemul solar se mișcă în câmpul gravitațional al Soarelui.
- ▶ Observată de pe Pământ, mișcarea planetelor este complicată.
- ▶ În cea mai mare parte a timpului, ele se mișcă spre răsărit, sens cunoscut în astronomie ca *direct*.
- ▶ La un moment dat se opresc, după care se mișcă în sens *retrograd*, *i.e.* înspre apus.
- ▶ După o nouă oprire, planetele își reiau mișcarea directă.

Puncte de întoarcere

Definiție

Punctele în care planetele își schimbă direcția de deplasare se numesc *stații* sau *puncte de întoarcere*.

Observație

În prima aproximație, pentru a explica mișcarea observată a planetelor folosim problema celor două corpuri.

Problema celor două corpuri

Fie m_1 și m_2 masele a două corpuri grele și \vec{r}_{12} vectorul de poziție al lui m_2 în raport cu m_1 . Conform legii atracției universale a lui Newton, corpurile se atrag cu o forță proporțională cu produsul maselor lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

Forța \vec{F}_{21} cu care m_1 acționează asupra lui m_2 este

$$\vec{F}_{21} = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad (1)$$

unde $G = 6.668 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ este constanta atracției gravitaționale, $r = \|\vec{r}_{12}\|$ distanța dintre corpuri și $\frac{\vec{r}_{12}}{r}$ versorul vectorului \vec{r}_{12} .

Mișcarea planetelor sistemului solar

Soarele, planetele, Luna sunt corpuri grele, de aceea pentru a le explica mișcarea folosim legea atracției universale.

Dacă distanța dintre corpuri este foarte mare în raport cu dimensiunile lor, dacă ele au simetrie sferică și masa este uniform distribuită în interiorul lor, le putem considera a fi puncte materiale.

Presupunem că întreaga masă a lor este concentrată în centrul de masă și distanța dintre corpuri este egală cu distanța dintre centrele de masă.

Soarele și planetele din sistemul solar îndeplinesc aceste condiții, de aceea pentru a explica mișcarea de revoluție a planetelor, ele sunt considerate puncte materiale.

Legile lui Kepler

Rezolvând problema celor două corpuri regăsim legile lui Kepler. Ele au fost deduse empiric la începutul secolului al XVII-lea de Johannes Kepler, în urma analizei pozițiilor precise ale planetei Marte, determinate din observații de Tycho Brahe în a doua jumătate a secolului al XVI-lea.

Legea I a lui Kepler (1609)

Teoremă

Planetele descriu în jurul Soarelui elipse cu Soarele aflat într-unul dintre focare.

Dacă rezolvăm problema celor două corpuri obținem că acestea descriu secțiuni conice (elipse, parabole sau un arc de hiperbolă) în jurul centrului comun de masă.

Mișcarea în jurul Soarelui

În cazul particular al sistemului solar, corpurile se mișcă în câmpul gravitațional al Soarelui, care are masă mult mai mare decât masa altor corpuri din sistem, centrul de masă al oricărei perechi Soare - corp din sistemul solar este aproape de centrul de masă al Soarelui. De aceea putem afirma că: *corpurile din sistemul solar descriu conice cu Soarele aflat într-unul dintre focare*. Focarul în care se găsește Soarele este considerat *focarul principal* al secțiunii conice.

Evadarea din sistemul solar

Pe conice deschise (parabole sau o ramură de hiperbolă) se mișcă corpurile care ar putea părăsi sistemul solar (*i.e.* comete sau asteroizi). Forma orbitei unui corp din sistemul solar se poate modifica dacă acesta trece prin apropierea unui corp de masă mare.

Parametrii secțiunii conice

Pentru a descrie forma orbitei unui corp ce se mișcă în sistemul solar se pot folosi diferiți parametri ai conicei, de exemplu *semiaxa mare*, notată cu a și *semiaxa mică* a orbitei, notată cu b , sau cu ajutorul *semiaxe mari* și a *excentricității* orbitei, notată cu e . Între semiaxa mare, semiaxa mică și excentricitatea unei conice există relația:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (2)$$

Dacă notăm cu f distanța dintre centrul conicei și focarul ei, atunci $f = a \cdot e$. Dacă $e = 0$ elipsa este un cerc, pentru $e \in (0, 1)$ conica este o elipsă, pe măsură ce e crește elipsa este din ce în ce mai alungită. Dacă $e = 1$ secțiunea conică este o parabolă, iar dacă $e > 1$ este o hiperbolă.

Conice în coordonate polare

Ecuția conicelor în coordonate polare (r, θ) , unde r este distanța dintre focarul principal și punctul de pe conică iar θ unghiul dintre dreapta determinată de focarele secțiunii conice și vectorul de poziție al planetei cu originea în focarul principal al secțiunii conice, este:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (3)$$

unde $p = b^2/a = a(1 - e^2)$ este parametrul conice.

Linia apsidelor

Cel mai apropiat punct de Soare situat pe orbita unui corp din sistemul solar se numește *periheliu*¹ și se notează cu P , iar cel mai îndepărtat *afeliu*², notat A .

Distanța Soare - planetă când aceasta trece la periheliul orbitei sale este $a(1 - e)$, iar când ea se află la afeliu este $a(1 + e)$.

Dreapta determinată de punctele P și A se numește *linia apsidelor*.

¹Denumirea vine din limba greacă, *peri* înseamnă cel mai apropiat, iar *Helios* este numele grecesc al Soarelui.

²Numele acestui punct derivă din cuvintele grecești *apo* cel mai îndepărtat și *Helios* numele grecesc al Soarelui.

Legea a doua a lui Kepler sau legea ariilor (1609)

Teoremă

Raza vectoare³ a unui corp din sistemul solar descrie în intervale de timp egale arii egale.

Această lege este echivalentă cu conservarea momentului cinetic în problema celor două corpuri.

³Prin *raza vectoare a corpului* înțelegem vectorul de poziție al corpului în raport cu un reper cu originea în focarul principal al secțiunii conice descrise de corp și axa Ox de-a lungul liniei apsidelor.

Elementele elipsei

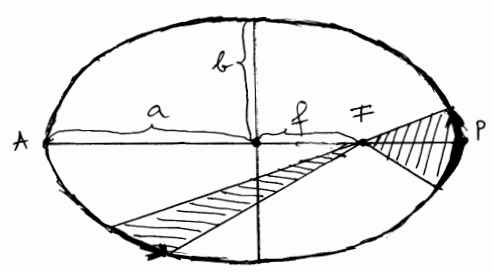


Figura: Elementele unei elipse și legea a II-a lui Kepler

Consecințe

⇒ mișcarea de revoluție în jurul Soarelui a corpurilor sistemului solar este neuniformă.

- ▶ Corpurile se mișcă cu viteză mai mare la periheliu și cu viteză mai mică la apropierea de afeliu.
- ▶ În periheliu, respectiv afeliu sunt atinse viteza maximă, respectiv minimă cu care corpul se mișcă pe traiectoria lui în jurul Soarelui.

Legea a treia exactă a lui Kepler

Teoremă

Pătratul perioadei de revoluție a corpului m_1 , respectiv m_2 , crește proporțional cu semiaxa mare a orbitei sale și invers proporțional cu suma maselor corpurilor din sistem.

Adică

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \quad (4)$$

unde T_i , $i \in \{1, 2\}$, sunt perioadele de revoluție a celor două corpuri în jurul centrului comun de masă, a_i , $i \in \{1, 2\}$, semiaxe mari ale orbitelor, iar m_i , $i \in \{1, 2\}$, masele celor două corpuri.

Legea a III-a a lui Kepler (1617)

Teoremă

Pătratul perioadei siderale a planetelor care se mișcă în jurul Soarelui este proporțional cu cubul semiaxelor mari ale orbitelor descrise de acestea.

Ea se obține din legea a III-a exactă, dacă la numitorul ultimului raport suma maselor celor două corpuri se înlocuiește cu masa Soarelui, pentru că masa oricărei planete este neglijabilă în raport cu masa Soarelui. Astfel

$$\frac{T_p^2}{a_p^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \quad (5)$$

unde T_p este perioada siderală a planetei, iar a_p semiaxa mare a orbitei ei.

Dacă exprimăm perioada orbitală a corpului în ani siderali, notată cu T , și semiaxa mare a orbitei, notată a , în unități astronomice atunci pe baza legii a treia a lui Kepler obținem

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^3} = 1, \quad (6)$$

pentru că $T_{\oplus} = 1$ an sideral, iar $a_{\oplus} = 1$ unitate astronomică. Această aproximație nu poate fi folosită într-un sistem de două corpuri în care masele au valori apropiate, cum se întâmplă, de exemplu, în cazul sistemelor binare alcătuite din stele cu mase comparabile.

Orbitele planetelor din sistemul solar

În prima aproximație mișcarea corpurilor din sistemul solar poate fi descrisă cu ajutorul legilor lui Kepler.

Mișcarea planetelor este plană, orbitele lor se află în plane înclinate puțin față de planul eclipticii. Pentru majoritatea planetelor înclinarea planului orbital pe ecliptică este mai mică decât 3° . Cea mai mare înclinare, 7° față de ecliptică, o are planul orbitei lui Mercur.

Planetele se mișcă pe orbită de la apus la răsărit, sens considerat *direct* în astronomie. Orbitele planetelor mari sunt aproape circulare. Cu excepția planetei Mercur, a cărei excentricitate este de 0,21, excentricitatea orbitelor planetelor este mai mică decât 0,1.

Legea Titius-Bode

Pentru a obține aproximativ semiaxa mare a orbitelor planetelor sistemului solar se poate folosi șirul 0, 3, 6, 12, 24, Dacă adunăm 4 la fiecare termen din șir și suma obținută o împărțim la 10, găsim, cu o aproximație bună, semiaxa mare a orbitelor planetelor, exprimată în unități astronomice. Termenii șirului de mai sus se obțin cu ajutorul formulei de recurență:

$$a_n(\text{ u.a.}) = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n \quad (7)$$

unde $n = -\infty, 0, 1, 2, \dots, 6$.

- ▶ Pentru $n = -\infty$ se obține valoarea aproximativă a semiaxe lui Mercur $a(\text{ u.a.}) = 0,4$. Valoarea exactă a semiaxe planetei Mercur este 0,38 unități astronomice.
- ▶ Al doilea termen al șirului, corespunzător lui $n = 0$, este $a = 0,7 \text{ u.a.}$ este în bună concordanță cu distanța medie de la Soare la Venus, care este egală cu 0,72 unități astronomice.
- ▶ Dacă continuăm să dăm valori lui n găsim semiaxa mare a Pământului, a planetei Marte.

Descoperirea brâului principal de asteroizi

Pe când s-a publicat legea Titius-Bode la distanța corespunzătoare lui $n = 3$, $a = 2,8$ unități astronomice de Soare, nu se cunoștea nici o planetă.

În 1800, încurajați de descoperirea planetei Uranus la o distanță medie de Soare apropiată de cea dată de legea Titius-Bode, astronomii au început căutarea planetei dintre Marte și Jupiter, acțiune care a dus descoperirea brâului principal de asteroizi⁴.

⁴Primul corp descoperit în această regiune, în 1801, numit Ceres, se mișcă pe o elipsă cu semiaxa mare egală cu 2,77 unități astronomice. Din august 2006, conform deciziei Uniunii Astronomice Internaționale, Ceres este o planetă pitică. De la descoperirea ei până la adoptarea acestei decizii, Ceres a fost considerată cea mai mare planetă mică din sistemul solar.

Orbita terestră

Pământul descrie o elipsă situată în planul eclipticii, cu Soarele într-unul dintre focare.

Semiaxa mare a orbitei terestre este egală cu 149,6 milioane km, excentricitatea ei este 0,0167.

Distanța dintre Soare și Pământ variază între 147 milioane de km și 152 milioane de km.

Pământul descrie orbita în jurul Soarelui într-un an sideral.

Viteza medie cu care Pământul se mișcă pe orbită este de 30 km/s. El trece prin *periheliul* orbitei în apropierea zilei de 3 ianuarie, iar prin *afeliul* orbitei după o jumătate de an în apropierea zilei de 3 iulie⁵. Conform cu legea a II-a a lui Kepler, viteza Pământului la periheliu este maximă, egală cu 30,3 km/s, iar la afeliu minimă, egală cu 29,3 km/s. Axa de rotație terestră este înclinată față de ecliptică cu $66^{\circ} 33'$.

⁵Mișcarea Pământului nu este uniformă, perioada orbitală nu are un număr întreg de zile de aceea momentul din an la care Pământul trece printr-un punct dat al orbitei sale diferă de la un an la altul.

Orientarea axei terestre față de ecliptică la trecerea Pământului prin punctele apsidale este reprezentată în figura următoare. Când Pământul trece prin periheliul orbitei, în emisfera nordică este iarnă, iar în cea sudică vară. În timpul verii din emisfera sudică, Pământul se găsește mai aproape de Soare decât atunci când în emisfera nordică este vară, de aceea valorile medii ale temperaturii înregistrate vara sunt mai mari în verile din emisfera sudică decât în verile din emisfera nordică.

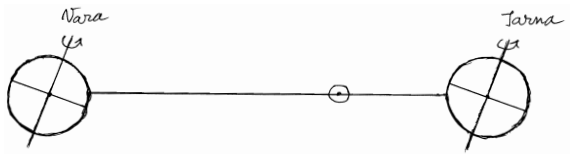


Figura: Poziția axei de rotație terestră și a ecuatorului terestru în raport cu ecliptica

Pentru un observator din emisfera nordică⁶ la trecerea Soarelui din emisfera cerească australă în cea boreală începe primăvara astronomică. Începutul ei este marcat de trecerea Soarelui prin *punctul vernal* sau al *echinocțiului*⁷ de primăvară, în apropierea zilei de 21 martie, numită *ziua echinocțiului de primăvară*.

⁶În continuare dăm evenimentele care marchează începutul anotimpurilor astronomice pentru un observator din emisfera nordică. Pentru observatorii din emisfera sudică când începe primăvara astronomică în emisfera nordică începe toamna astronomică.

⁷Echinocțiu este un cuvânt de origine latină, compus din *equi* = egal și *noctis* = noapte.

La traversarea ecuatorului ceresc declinația Soarelui este egală cu zero și pentru observatorii de la ecuator Soarele răsare la ora șase dimineața și apune la ora șase seara, ziua⁸ fiind egală cu noaptea. În timpul primăverii astronomice declinația Soarelui și durata zilei cresc.

⁸Prin *zi* înțelegem aici intervalul de timp în care Soarele este deasupra orizontului. iar *noaptea* intervalul în care Soarele este sub orizontul locului. ☰ 🔍 ↺

Când declinația Soarelui este maximă, egală cu înclinarea eclipticii pe ecuator, spunem că Soarele a ajuns în *punctul solstițiului*⁹ de vară. Acest fenomen are loc în apropierea zilei de 21 iunie, *ziua solstițiului de vară* și marchează începutul verii astronomice.

⁹Numele provine din limba latină și este compus din *sol*/ care înseamnă Soare și *stat* care înseamnă a se opri, a sta pe loc. Înainte ca Soarele să ajungă în acest punct de pe orbita lui aparentă, înălțimea deasupra orizontului a Soarelui la culminația superioară crește de la o zi la alta. După ce Soarele a trecut de acest punct de pe ecliptică, culminează superior la înălțimi deasupra orizontului din ce în ce mai mici. În ziua când Soarele trece prin acest punct culminează superior la aceeași înălțime deasupra orizontului ca în ziua dinaintea ei și în ziua care va urma, de aceea spunem că *Soarele stă*.

Când Soarele se află la declinație pozitivă maximă el descrie cel mai lung arc deasupra orizontului, înregistrându-se cea mai lungă zi a anului. Durata zilei scade apoi, ea devine egală cu noaptea când Soarele ajunge în *punctul autumnal* sau al *echinoctiului de toamnă*, în apropierea zilei de 23 septembrie, *ziua echinoctiului de toamnă*. Atunci, Soarele traversează ecuatorul ceresc trecând din emisfera cerească nordică în cea sudică, moment care marchează începutul *toamnei astronomice*.

Declinația Soarelui și durata zilei continuă să scadă până când Soarele ajunge în punctul *solstițiului de iarnă*, în apropierea zilei de 22 decembrie, *ziua solstițiului de iarnă*. Declinația Soarelui are atunci valoarea cea mai mică, Soarele descrie cel mai scurt drum deasupra orizontului și se înregistrează cea mai scurtă zi a anului. Trecerea Soarelui prin acest punct marchează începutul *iernii astronomice* în emisfera nordică.

Durata anotimpurilor astronomice diferă de cea a anotimpurilor obișnuite. Pentru un observator din emisfera nordică¹⁰ primăvara astronomică are 92, 75 zile, vara 93, 65 de zile, toamna 89, 85 de zile și iarna 88, 99 de zile¹¹. Observăm că, în emisfera nordică, iarna are durata cea mai mică, atunci distanța Soare-Pământ este minimă și viteza de deplasare aparentă a Soarelui atinge valoarea ei maximă.

¹⁰În emisfera sudică este toamnă când în cea nordică este primăvară, de aceea toamna astronomică are 92, 75 zile, iarna 93, 65 de zile, ș.a.m.d..

¹¹Suma duratei lor este egală cu un an tropic, deoarece anotimpurile astronomice se definesc folosind mișcarea aparentă a Soarelui.

Declinația Soarelui variază în cursul unui an între $[-\varepsilon, \varepsilon]$, unde ε este unghiul diedru între ecliptică și ecuator. Acum ε este egal cu $23^\circ 27'$. Înălțimea deasupra orizontului la care culminează și azimutul unui astru observat de la o latitudine geografică dată depind de declinația lui. Un astru de declinație δ observat de la latitudinea geografică nordică φ , care culminează superior la Sud de Zenit, traversează meridianul locului spre Sud la înălțimea deasupra orizontului, notată h , calculată cu ajutorul relației

$$h = \delta + (90^\circ - \varphi).$$

De aceea pentru un observator de pe Pământ, Soarele a cărui declinație variază continuu în cursul unui an culminează superior la înălțimi diferite deasupra orizontului. În localitățile situate pe tropicul Racului, la latitudinea geografică $\varphi = +23^{\circ}27'$, Soarele culminează superior la Zenitul localității o dată pe an, când Soarele trece prin punctul solstițiului de vară. Numele paralelului geografic este dat de constelația în care intra Soarele la producerea acestui fenomen în urmă cu 2000 de ani¹².

¹²În prezent datorită precesiei Soarele intră în constelația Gemenii la începutul verii astronomice.

Când Soarele trece prin punctul solstițiului de iarnă, el culminează superior la Zenitul localităților de pe tropicul Capricornului, de latitudine geografică $\varphi = -23^{\circ}27'$. Pentru observatorii de pe Pământ aflați între cele două tropice Soarele culminează superior la Zenit de două ori pe an. Soarele nu ajunge niciodată la Zenitul localităților situate între tropice și poli. În emisfera nordică el culminează superior la înălțime deasupra orizontului maximă în ziua solstițiului de vară.

Azimutul astronomic al punctelor de răsărit și apus ale astrului de declinație δ observat de la latitudinea φ sunt date de formula:

$$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}. \quad (8)$$

Declinația Soarelui variază în cursul unui an, de aceea pentru un observator de la latitudinea geografică dată, Soarele răsare și apune, de regulă, din puncte diferite de pe orizont în zile diferite din an. Când Soarele este în punctele echinoctiale, declinația lui este zero, azimutul lui la răsărit fiind 90° , iar la apus 270° . În aceste zile Soarele răsare din punctul cardinal est și apune în vest.

Pentru un observator din emisfera nordică, între echinocțiul de primăvară și solstițiul de vară punctul de răsărit al Soarelui se mișcă pe orizont spre nord-est, iar cel de apus spre nord-vest. Când declinația Soarelui este maximă între punctele de răsărit și de apus ale Soarelui distanța măsurată pe orizont prin sud este maximă. Apoi, punctul de răsărit al Soarelui migrează spre sud-est, trecând prin est la echinocțiul de toamnă. Soarele răsare din punctul de pe orizont cel mai apropiat de sud când Soarele este în punctul solstițiului de iarnă.

Atunci distanța dintre punctele de răsărit și de apus ale Soarelui, măsurată pe orizont prin sud este minimă și Soarele descrie pe boltă arcul de lungime minimă, pentru că apune în punctul de apus cel mai apropiat de sud. După solstițiul de iarnă punctele de răsărit și apus ale Soarelui se deplasează pe orizont spre est, nord-est, respectiv vest, nord-vest.

Mișcarea geocentrică a planetelor

Mișcarea planetelor observată de pe Pământ este destul de complicată. Ea este rezultatul suprapunerii mișcării lor față de Soare cu mișcarea Pământului în jurul Soarelui. Pentru a explica mai ușor mișcarea planetelor văzută de pe Pământ presupunem că planete și Pământul se mișcă pe cercuri situate în planul eclipticii. În funcție de poziția orbitei planetei față de cea terestră planetele se împart în planete *interioare* și *exterioare*. Planetele interioare se mișcă între Soare și Pământ, iar cele exterioare în afara orbitei terestre.

Semiaxa mare a orbitei **planetelor interioare** este mai mică decât o unitate astronomică. Observate de pe Pământ ele se văd mereu în vecinătatea Soarelui. Unghiul Soare-Pământ-planetă este numit *elongația* planetei. În cazul planetelor interioare elongația planetei nu poate lua orice valoare, ea este mai mică decât 23° în cazul planetei Mercur și mai mică decât 46° pentru planeta Venus. Valoarea maximă a elongației planetelor interioare se atinge când direcția Pământ-planetă este tangentă orbitei descrise de planetă, *i.e.* este unghiul sub care se vede raza orbitei planetei de pe Pământ.

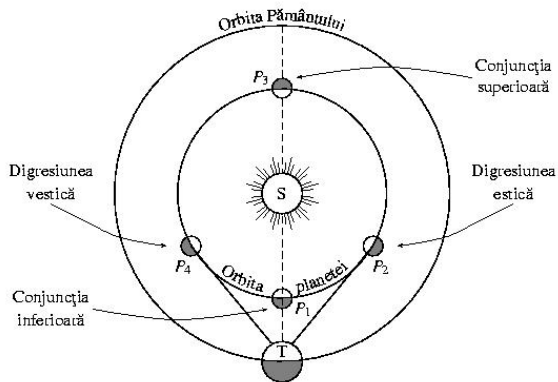


Figura: Configurații ale planetelor interioare

Planetele exterioare au orbitele în afara orbitei terestre, *i.e.* semiaxa mare a orbitelor lor este mai mare decât o unitate astronomică. Elongația planetelor exterioare variază între 0° și 360° , *i.e.* că, în anumite perioade ale anului, aceste planete pot fi văzute la orice oră din noapte.

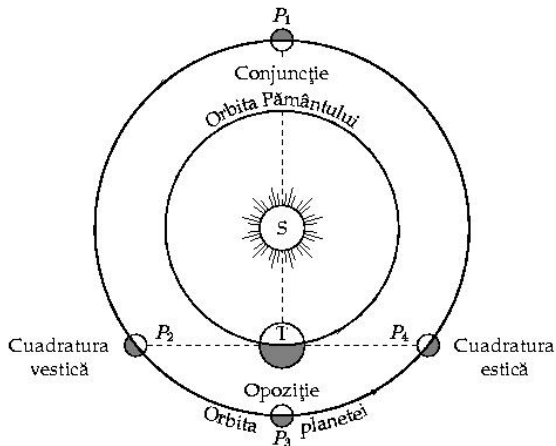


Figura: Configurații ale planetelor exterioare

Observată de pe Pământ mișcarea planetelor printre stele nu are loc întotdeauna în sens direct. La schimbarea sensului de mișcare planetele descriu bucle pe bolta cerească. În figura următoare este reprezentată mișcarea unei planete exterioare (P) observată de pe Pământ (T). Perioada orbitală a Pământului este mai mică decât a planetelor exterioare, de aceea în intervale de timp egale Pământul descrie arce mai mari decât planeta. Traectoria planetei observată de pe Pământ este compusă din proiecțiile planetei pe cer, puncte notate cu P' . Când planeta se găsește în P_i , $i = \overline{1, 7}$, pentru un observator de pe Pământ ea pare a fi în poziția P'_i , $i = \overline{1, 7}$. Din figură se observă că planeta descrie o buclă atunci când depășește planeta, cu alte cuvinte *stațiile* sau *punctele de întoarcere* ale planetelor exterioare se produc în apropierea opoziției planetei în raport cu Soarele.

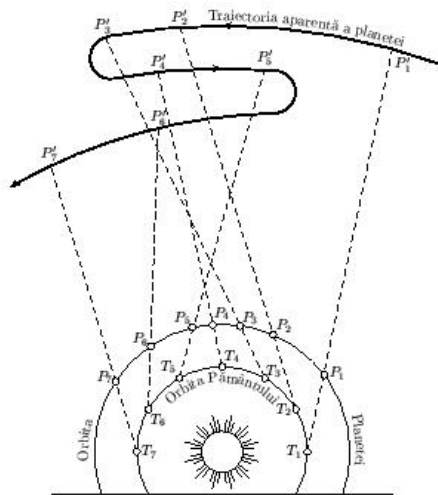


Figura: Mișcarea directă și retrogradă a planetelor exterioare