Astronomie
Mişcarea în sistemul solar
Legile lui Kepler

Cristina Blaga şi Iulia Mircescu

11 ianuarie 2022

Obiectivele seminarului

- Problema celor două corpuri.
- Legile lui Kepler. Mişcarea în sistemul solar.

Problema celor două corpuri

Fie m_1 şi m_2 masele a două corpuri grele şi $\vec{r}_{12}$ vectorul de poziţie al lui m_2 în raport cu m_1.
Conform legii atracţiei universale a lui Newton, corpurile se atrag cu o forţă proporţională cu produsul maselor lor şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele.

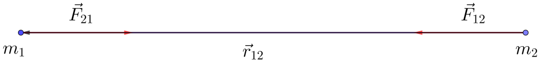


Figura: Forţele cu care corpurile se atrag sunt egale şi de sens contrar

Legea atracţiei universale

Forţa $\overrightarrow{F}_{21}$ cu care m_1 acţionează asupra lui m_2 este

$$\overrightarrow{F}_{21} = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{r}_{12}}{r}, \quad (1)$$

unde $G = 6.668 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$ este constanta atracţiei gravitaţionale, $r = ||\vec{r}_{12}||$ distanţa dintre corpuri şi $\frac{\overrightarrow{r}_{12}}{r}$ versorul vectorului $\overrightarrow{r}_{12}$.
Forţa $\overrightarrow{F}_{12}$ cu care m_2 acţionează asupra lui m_1 este egală şi de sens contrar cu $\overrightarrow{F}_{21}$,

$$\overrightarrow{F}_{21} = -\overrightarrow{F}_{12}\,. \quad (2)$$

Legea I a lui Kepler (1609)

Teoremă

Planetele descriu în jurul Soarelui elipse cu Soarele aflat într-unul dintre focare.

Legea a doua a lui Kepler sau legea ariilor (1609)

Definiţie

Fie un punct material a cărui mişcare este studiată în raport cu un reper dat. Raza vectoare punctului material este vectorul de poziţie al punctului în raport cu reperul dat.

Teoremă

Raza vectoare a planetei descrie egale arii egale în intervale de timp egale.

Elementele elipsei

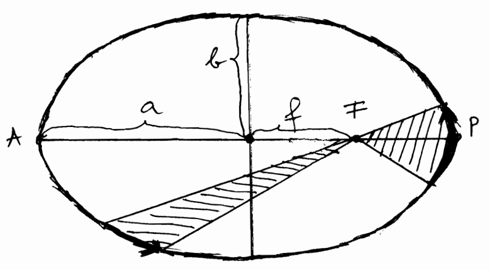


Figura: Elementele unei elipse şi legea a II-a lui Kepler

Legea a treia exactă a lui Kepler

Teoremă

Pătratul perioadei de revoluţie a corpului m_1*, respectiv* m_2*, creşte proporţional cu semiaxa mare a orbitei sale şi invers proporţional cu suma maselor corpurilor din sistem.*

Adică

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \tag{3}$$

unde T_i, $i \in \{1, 2\}$, sunt perioadele de revoluţie a celor două corpuri în jurul centrului comun de masă, a_i, $i \in \{1, 2\}$, semiaxele mari ale orbitelor, iar m_i, $i \in \{1, 2\}$, masele celor două corpuri.

Legea a III-a a lui Kepler (1617)

Teoremă

Pătratul perioadei siderale a planetelor care se mişcă în jurul Soarelui este proporţional cu cubul semiaxelor mari ale orbitelor descrise de acestea.

Ea se obţine din legea a III-a exactă, dacă la numitorul ultimului raport suma maselor celor două corpuri se înlocuieşte cu masa Soarelui, pentru că masa oricărei planete este neglijabilă în raport cu masa Soarelui. Astfel

$$\frac{T_p^2}{a_p^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \tag{4}$$

unde T_p este perioada siderală a planetei, iar a_p semiaxa mare a orbitei ei.

Dacă exprimăm perioada orbitală a corpului în ani siderali, notată cu T, şi semiaxa mare a orbitei, notată a, în unităţi astronomice atunci pe baza legii a treia a lui Kepler obţinem

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_\oplus^2}{a_\oplus^3} = 1\,, \tag{5}$$

pentru că $T_\oplus$= 1 an sideral, iar $a_\oplus$= 1 unitate astronomică.

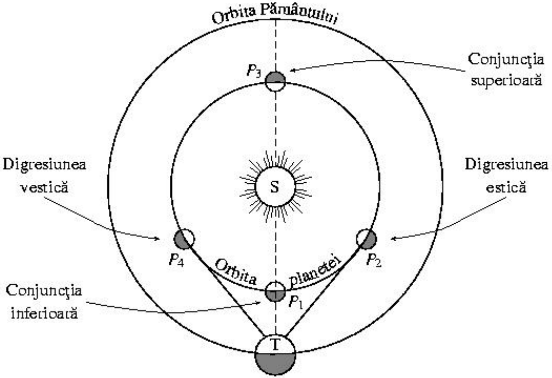
Planete interioare ($a < 1$u.a.)

Definiţie

Unghiul Soare-Pământ-planetă se numeşte elongaţia planetei.

- Observate de pe Pământ, Mercur şi Venus se văd mereu în vecinătatea Soarelui.
- Valoarea maximă a elongaţiei planetelor interioare se atinge când direcţia Pământ-planetă este tangentă orbitei descrise de planetă, *i.e.* este unghiul sub care se vede raza orbitei planetei de pe Pământ.

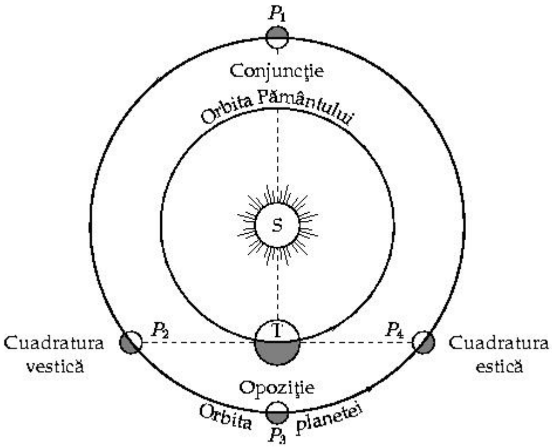
Configuraţii ale planetelor interioare



Planetele exterioare ($a > 1$u.a.)

- Planetele Marte, Jupiter, Saturn, Uranus şi Neptun au orbitele în afara orbitei terestre.
- Elongaţia planetelor exterioare variază între 0° şi 360°, *i.e.* că, în anumite perioade ale anului, aceste planete pot fi văzute la orice oră din noapte.

Configuraţii ale planetelor exterioare



Perioada sinodică a planetei

Definiţie

Timpul scurs între două configuraţii consecutive de acelaşi tip ale unei planete în raport cu Soarele, observate de pe Pământ se numeşte **perioada sinodică** a planetei.

Teoremă

Dacă notăm cu S perioada sinodică a planetei, cu T_{pl} şi $T_{\oplus}$ perioada siderală a planetei şi perioada siderală a Pământului, atunci are loc relaţia

$$\frac{1}{S} = \pm\left(\frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{pl}}\right) , \tag{6}$$

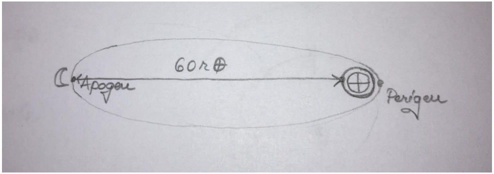
unde semnul plus este pentru planetele exterioare.

Probleme

Alegeţi varianta corectă pentru următoarea afirmaţie

1. Un satelit artificial al Pământului se mişcă astfel încât perigeul orbitei sale este la suprafaţa Pământului şi apogeul la distanţa medie Pământ-Lună (60 de raze terestre). Ştiind că un satelit care se mişcă pe o orbită circulară la suprafaţa Pământului are perioada orbitală de 84 de minute, decideţi care este perioada de mişcare a satelitului dat (a) 27,9 zile, (b) 9,9 zile, (c) 4,9, sau (d) 13,7 zile.

Figura problemei 1



Soluţia problemei 1

Pasul 1. Identificăm datele problemei:
$T_{sat} = ?$, $a_{sat} = [(60 + 2) \cdot r_P] : 2 = 31 \cdot r_P$ (semiaxa mare a satelitului, vezi figura).
$T_{sat'} = 84$ min, $a_{sat'} = \frac{2 \cdot r_P}{2} = r_P$.
Pasul 2. Aplicăm legea a treia a lui Kepler, în două sisteme satelit - Pământ,

$$\frac{T_{sat}^2}{a_{sat}^3} = \frac{T_{sat'}^2}{a_{sat'}^3} \Leftrightarrow \frac{T_{sat}^2}{31^3 r_P^3} = \frac{84^2}{r_P^3}$$
$$\Rightarrow T_{sat}^2 = 84^2 \cdot 31^3$$
$$\Rightarrow T_{sat} = 14478.24^{min} = 10.05^{zile},$$

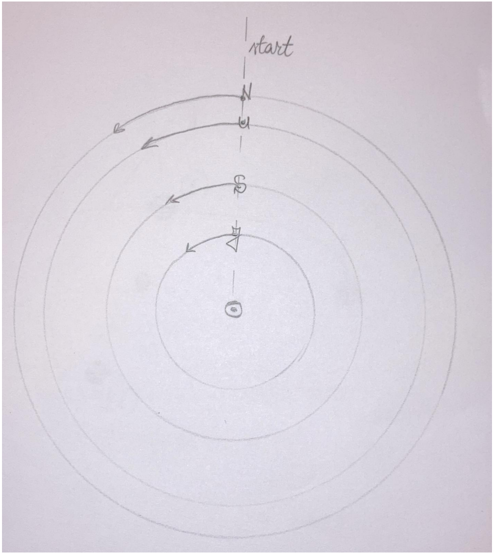
deci răspunsul corect este **b)**.

Probleme

Alegeţi varianta corectă pentru următoarea afirmaţie

2. Presupunem că planetele Jupiter, Saturn, Uranus şi Neptun se văd pe aceeaşi linie privite din Soare, spunem că se află într-o conjuncţie cvadruplă. Calculaţi cât timp va trece până la următoarea conjuncţie cvadruplă (planetele se văd la distanţă unghiulară mai mică de $\pm 10^\circ$ longitudine ecliptică). Presupuneţi că orbitele planetelor sunt circulare şi coplanare, iar perioadele lor siderale sunt de 11,852, 29,458, 84,014 şi 164,793 ani.

Figura problemei 2



Soluţia problemei 2

Observvăm că fiecare planetă ajunge din nou la "Start" (vezi figura) după un multiplu al perioadei sale orbitale (siderale). Deci, calculăm cel mai mic multiplu comun al perioadelor siderale. Putem rotunji perioadele la numere întregi, deoarece este permisă eroarea distanţei unghiulare de $\pm 10^\circ$ longitudine ecliptică. Aşadar,

$$T_J \approx 12 = 2^2 \cdot 3;$$
$$T_S \approx 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5;$$
$$T_U \approx 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7;$$
$$T_N \approx 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7, \text{ iar}$$
$$[T_J, T_S, T_U, T_N] = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840 \text{ ani.}$$

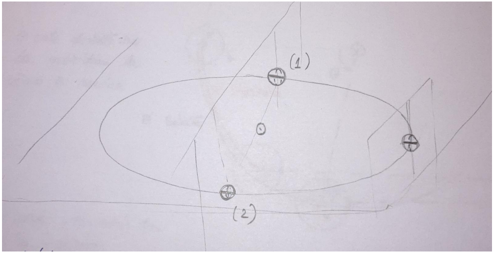
Pentru perioada lui Neptun am dedus faptul că este utilă aproximarea de 168 ani în urma descompunerii variantelor de răspuns şi căutarea factorilor comuni care apar în acestea.

Probleme

Alegeţi varianta corectă pentru următoarea afirmaţie

3. Planeta Uranus se roteşte în jurul unei axe proprii, care este inclusă în planul orbitei sale în jurul Soarelui. Uranus face o revoluţie completă în jurul Soarelui în 84 de ani. Ca urmare, Soarele traversează ecuatorul ceresc al lui Uranus, o dată la (a) 2 ani, (b) 84 de ani, (c) 42 de ani sau (d) 21 de ani.
   Indicaţie: Înclinarea planului orbitei lui Uranus faţă de ecliptică este de 0,77°, de aceea putem presupune că mişcarea lui Uranus are loc în planul eclipticii.
   Ecuatorul ceresc a lui Uranus este cercul mare de pe sfera cerească aflat la intersecţia ecuatorului planetei cu sfera cerească.

Figura problemei 3



Soluţia problemei 3

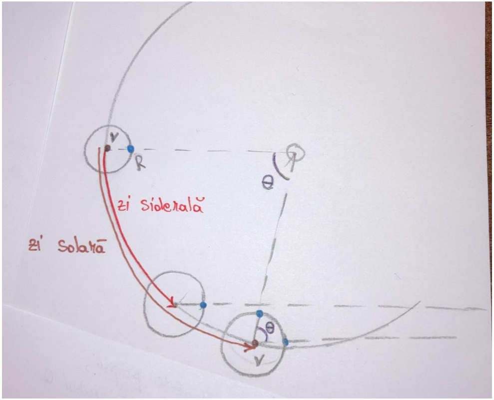
Analizând figura, axa de rotaţie a planetei este inclusă în planul orbital. Dar axa de rotaţie este perpendiculară pe planul ecuatorial, deci planul ecuatorial este perpendicular pe planul orbital şi pe axă.
Prin urmare, există un singur astfel de plan, care trece prin Soare, şi care determină poziţiile (1) şi (2) ale lui Uranus, "simetrice" în raport cu Soarele.
Aşadar, fenomenul se produce o dată la $84 : 2 = 42$ ani, deci răspunsul corect este **c)**.

Probleme

Alegeţi varianta corectă pentru următoarea afirmaţie

4. Venus se roteşte în jurul axei proprii în sens retrograd (*i.e.* în sens orar pentru un observator aflat în polul ecliptic nord) cu o perioadă de 243 de zile. Axa de rotaţie a planetei este aproximativ perpendiculară pe planul orbitei sale în jurul Soarelui. Perioada de revoluţie în jurul Soarelui este de 225 de zile. Dacă un observator de pe Venus vede Soarele la meridian la un moment dat, câte zile trec până când Soarele revine la meridian? O analiză grafică vă poate ajuta să alegeţi valoarea corectă dintre următoarele: (a) 486 zile, (b) 247 zile, (c) 117 zile sau (d) 18 zile.

Figura problemei 4



Soluţia problemei 4

Fie s durata unei zile solare, adică intervalul de timp până când Soarele revine la meridian.
În intervalul de timp s, Venus a parcurs: $\theta = \omega_{orb} \cdot s = \frac{2\pi}{T_{orb}} \cdot s$.
În intervalul de timp s, R (reperul spre Sud) a parcurs:
$\alpha = \omega_{rot} \cdot s = \frac{2\pi}{T_{rot}} \cdot s$.
Dar $\alpha = 2\pi + \theta$, adică $\frac{2\pi}{T_{rot}} \cdot s = \frac{2\pi}{T_{orb}} \cdot s + 2\pi$, de unde, prin înmulţire cu $\frac{1}{2\pi s}$, avem

$$\frac{1}{T_{rot}} = \frac{1}{T_{orb}} + \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{1}{T_{rot}} - \frac{1}{T_{orb}},$$

de unde $\frac{1}{s} = \frac{1}{-243} - \frac{1}{225} \Rightarrow s = -116,8 \approx -117$ zile. Am folosit $T_{rot} = -243$ zile deoarece Venus se roteşte în sens retrograd în jurul axei sale.
Deci, durata unei zile solare este de 117 zile. Semnul minus semnifică faptul că Soarele răsare la Vest şi apune la Est.
Răspuns: **c)**.

Probleme

5. Un asteroid are semiaxa mare egală cu 4 unităţi astronomice. Să se afle perioada siderală a asteroidului.
6. Perioada sinodică a planetei Marte este egală cu 780 zile. Calculaţi distanţa medie de la Soare la Marte, exprimată în unităţi astronomice.

Soluţia problemei 5

Se cunoaşte semiaxa mare a asteroidului şi se doreşte perioada siderală a acestuia. Prin urmare, aplicăm legea a treia a lui Kepler, cu perioada siderală exprimată în ani siderali şi cu semiaxa mare exprimată în unităţi astronomice. Astfel,

$$\frac{T_{ast}^2}{a_{ast}^3} = \frac{T_P^2}{a_P^3} = 1.$$

Deci, $T_{ast}^2 = a_{ast}^3 = 4^3$, deci $T_{ast} = 2^3 = 8$ ani siderali.

Soluţia problemei 6

Marte este planetă exterioară, prin urmare,

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_P} - \frac{1}{T_M},$$

unde S este perioada sinodică a lui Marte, dată. În urma calculelor, avem

$$T_M = \frac{T_P \cdot S}{S - T_P} = \frac{T_P}{1 - \frac{T_P}{S}}.$$

$T_P = 1$ an sideral, iar $T_M = \frac{780}{365{,}2565} = 2,135$ ani siderali, folosind regula de trei simplă.

Prin urmare, $T_M = \frac{1}{1-\frac{1}{2{,}135}} = 1,88$ ani siderali.

Dar problema cere distanţa medie de la Soare la Marte, adică semiaxa mare a planetei. Aşadar, aplicăm legea a treia a lui Kepler:

$$\frac{T_M^2}{a_M^3} = 1 \Rightarrow a_M = 1,523 \text{ u.a.}$$