

Astronomie

Mișcarea în sistemul solar

Legile lui Kepler

Cristina Blaga

23 noiembrie 2021

Obiectivele seminarului

- ▶ Problema celor două corpuri.
- ▶ Legile lui Kepler. Mișcarea în sistemul solar.

Problema celor două corpuri

Fie m_1 și m_2 masele a două corpuri grele și \vec{r}_{12} vectorul de poziție al lui m_2 în raport cu m_1 .

Conform legii atracției universale a lui Newton, corpurile se atrag cu o forță proporțională cu produsul maselor lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

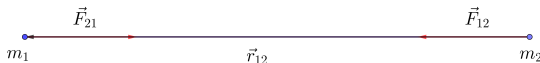


Figura: Forțele cu care corpurile se atrag sunt egale și de sens contrar

Legea atracției universale

Forța \vec{F}_{21} cu care m_1 acționează asupra lui m_2 este

$$\vec{F}_{21} = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad (1)$$

unde $G = 6.668 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ este constanta atracției gravitaționale, $r = \|\vec{r}_{12}\|$ distanța dintre corpuri și $\frac{\vec{r}_{12}}{r}$ versorul vectorului \vec{r}_{12} .

Forța \vec{F}_{12} cu care m_2 acționează asupra lui m_1 este egală și de sens contrar cu \vec{F}_{21} ,

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (2)$$

Legea I a lui Kepler (1609)

Teoremă

Planetele descriu în jurul Soarelui elipse cu Soarele aflat într-unul dintre focare.

Legea a doua a lui Kepler sau legea ariilor (1609)

Definiție

Fie un punct material a cărui mișcare este studiată în raport cu un reper dat. Raza vectoare punctului material este vectorul de poziție al punctului în raport cu reperul dat.

Teoremă

Raza vectoare a planetei descrie arii egale în intervale de timp egale.

Elementele elipsei

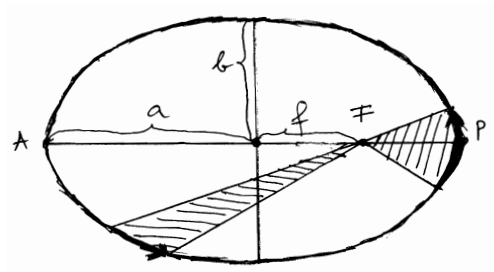


Figura: Elementele unei elipse și legea a II-a lui Kepler

Legea a treia exactă a lui Kepler

Teoremă

Pătratul perioadei de revoluție a corpului m_1 , respectiv m_2 , crește proporțional cu semiaxa mare a orbitei sale și invers proporțional cu suma maselor corpurilor din sistem.

Adică

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \quad (3)$$

unde T_i , $i \in \{1, 2\}$, sunt perioadele de revoluție a celor două corpuri în jurul centrului comun de masă, a_i , $i \in \{1, 2\}$, semiaxe mari ale orbitelor, iar m_i , $i \in \{1, 2\}$, masele celor două corpuri.

Legea a III-a a lui Kepler (1617)

Teoremă

Pătratul perioadei siderale a planetelor care se mișcă în jurul Soarelui este proporțional cu cubul semiaxelor mari ale orbitelor descrise de acestea.

Ea se obține din legea a III-a exactă, dacă la numitorul ultimului raport suma maselor celor două corpuri se înlocuiește cu masa Soarelui, pentru că masa oricărei planete este neglijabilă în raport cu masa Soarelui. Astfel

$$\frac{T_p^2}{a_p^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \quad (4)$$

unde T_p este perioada siderală a planetei, iar a_p semiaxa mare a orbitei ei.

Dacă exprimăm perioada orbitală a corpului în ani siderali, notată cu T , și semiaxa mare a orbitei, notată a , în unități astronomice atunci pe baza legii a treia a lui Kepler obținem

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^3} = 1, \quad (5)$$

pentru că $T_{\oplus} = 1$ an sideral, iar $a_{\oplus} = 1$ unitate astronomică.

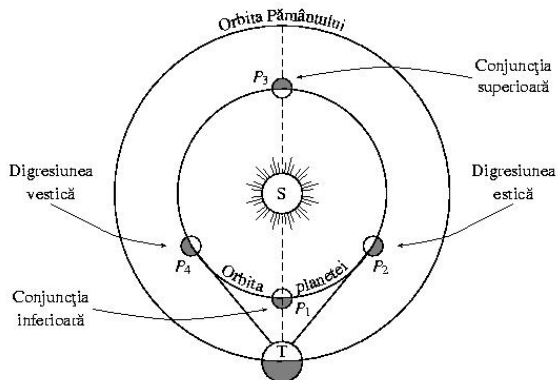
Planete interioare ($a < 1\text{u.a.}$)

Definiție

Unghiul Soare-Pământ-planetă se numește elongația planetei.

- ▶ Observate de pe Pământ, Mercur și Venus se văd mereu în vecinătatea Soarelui.
- ▶ Valoarea maximă a elongației planetelor interioare se atinge când direcția Pământ-planetă este tangentă orbitei descrise de planetă, *i.e.* este unghiul sub care se vede raza orbitei planetei de pe Pământ.

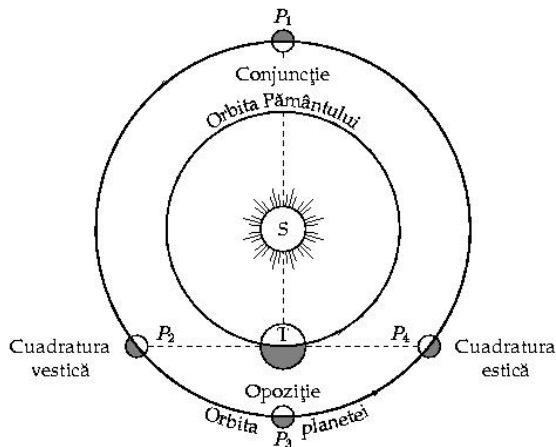
Configurații ale planetelor interioare



Planetele exterioare ($a > 1\text{u.a.}$)

- ▶ Planetele Marte, Jupiter, Saturn, Uranus și Neptun au orbitele în afara orbitei terestre.
- ▶ Elongația planetelor exterioare variază între 0° și 360° , *i.e.* că, în anumite perioade ale anului, aceste planete pot fi văzute la orice oră din noapte.

Configurații ale planetelor exterioare



Perioada sinodică a planetei

Definiție

Timpul scurs între două configurații consecutive de același tip ale unei planete în raport cu Soarele, observate de pe Pământ se numește **perioada sinodică** a planetei.

Teoremă

Dacă notăm cu S perioada sinodică a planetei, cu T_{pl} și T_{\oplus} perioada siderală a planetei și perioada siderală a Pământului, atunci are loc relația

$$\frac{1}{S} = \pm \left(\frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{pl}} \right), \quad (6)$$

unde semnul plus este pentru planetele exterioare.

Alegeți varianta corectă pentru următoarea afirmație

1. Un satelit artificial al Pământului se mișcă astfel încât perigeul orbitei sale este la suprafața Pământului și apogeul la distanța medie Pământ-Lună (60 de raze terestre). Știind că un satelit care se mișcă pe o orbită circulară la suprafața Pământului are perioada orbitală de 84 de minute, decideți care este perioada de mișcare a satelitului dat (a) 27,9 zile, (b) 9,9 zile, (c) 4,9, sau (d) 13,7 zile.

Alegeți varianta corectă pentru următoarea afirmație

2. Presupunem că planetele Jupiter, Saturn, Uranus și Neptun se văd pe aceeași linie privite din Soare, spunem că se află într-o conjuncție cvadruplă. Calculați cât timp va trece până la următoarea conjuncție cvadruplă (planetele se văd la distanță unghiulară mai mică de $\pm 10^\circ$ longitudine ecliptică). Presupuneți că orbitele planetelor sunt circulare și coplanare, iar perioadele lor siderale sunt de 11,852, 29,458, 84,014 și 164,793 ani. (a) 296 ani, (b) 840 ani, (c) 179 ani, sau (d) nici unul din răspunsurile de mai sus.

Alegeți varianta corectă pentru următoarea afirmație

3. Planeta Uranus se rotește în jurul unei axe proprii, care este inclusă în planul orbitei sale în jurul Soarelui. Uranus face o revoluție completă în jurul Soarelui în 84 de ani. Ca urmare, Soarele traversează ecuatorul ceresc al lui Uranus, o dată la (a) 2 ani, (b) 84 de ani, (c) 42 de ani sau (d) 21 de ani.

Indicație: Înclinarea planului orbitei lui Uranus față de ecliptică este de $0,77^\circ$, de aceea putem presupune că mișcarea lui Uranus are loc în planul eclipticii.

Ecuatorul ceresc al lui Uranus este cercul mare de pe sfera cerească aflat la intersecția ecuatorului planetei cu sfera cerească.

Alegeți varianta corectă pentru următoarea afirmație

4. Venus se rotește în jurul axei proprii în sens retrograd (*i.e.* în sens orar pentru un observator aflat în polul ecliptic nord) cu o perioadă de 243 de zile. Axa de rotație a planetei este aproximativ perpendiculară pe planul orbitei sale în jurul Soarelui. Perioada de revoluție în jurul Soarelui este de 225 de zile. Dacă un observator de pe Venus vede Soarele la meridian la un moment dat, câte zile trec până când Soarele revine la meridian? O analiză grafică vă poate ajuta să alegeți valoarea corectă dintre următoarele: (a) 486 zile, (b) 247 zile, (c) 117 zile sau (d) 18 zile.

Probleme

5. Un asteroid are semiaxa mare egală cu 4 unități astronomice. Să se afle perioada siderală a asteroidului.
6. Perioada sinodică a planetei Marte este egală cu 780 zile. Calculați distanța medie de la Soare la Marte, exprimată în unități astronomice.
7. Perioada orbitală a celui de-al cincilea satelit al lui Jupiter este 0,4982 zile și semiaxa mare 0,001207 *u.a.* Perioada orbitală și semiaxa mare a orbitei lui Jupiter sunt egale cu 11,86 ani, respectiv 5,203 *u.a.* Calculați raportul dintre masa planetei Jupiter și masa Soarelui.

Probleme

8. Un satelit artificial al Pământului, care se mișcă pe o orbită circulară aproape de suprafața Pământului (presupunem că este posibilă această mișcare și neglijăm frecarea cu aerul) are perioada de mișcare de 84 de minute. Care este perioada de mișcare a satelitului artificial al Pământului care are perigeul și apogeul la 3, respectiv 37 raze terestre de centrul Pământului?
9. Presupunem că astăzi Jupiter și Saturn ar fi simultan la opoziție. Care dintre aceste planete va ajunge prima din nou la opoziție, știind că perioada de revoluție a lui Jupiter este de 11,87 ani, iar a lui Saturn de 29,46 ani?

10. Cometa Halley, care s-a apropiat la 0,42 unități astronomice de Pământ în anul 1986, execută o revoluție în jurul Soarelui în 76 de ani, iar planeta Neptun, care se mișcă pe o orbită aproape circulară, în 165 de ani. Care dintre ele este mai îndepărtată de Soare la afeliul orbitei sale?