Astronomie
Sisteme de coordonate cereşte şi transformări de coordonate

Cristina Blaga

12 octombrie 2021

Obiectivele seminarului

- Fixarea sistemelor de coordonate cereşti (orizontale, orare şi ecuatoriale).
- Transformarea coordonatelor orizontale în orare, când latitudinea observatorului este cunoscută şi reciproc.
- Transformarea coordonatelor orare în ecuatoriale, când timpul sideral este cunoscut şi reciproc.

Răspundeţi la următoarele întrebări:

1. Care este punctul de pe bolta cerească a cărui declinaţie este egală cu -90°?
2. Steaua Polară este la 58 minute depărtare de Polul ceresc Nord. Ce declinaţie are steaua Polară?
3. Care este azimutul astronomic al punctelor cardinale nord, sud, est şi vest?
4. Cu cât este egală declinaţia punctului Zenit la latitudinea de 42°?
5. Care sunt coordonatele orizontale ale Polului ceresc Nord la latitudinea geografică egală cu $+23^\circ 27'$?
6. Care este ascensia dreaptă α şi declinaţia δ a punctului echinocţiului de primăvară?

Formulele lui Gauss

Relaţiile între laturile şi unghiurile triunghiului sferic sunt date de formulele lui Gauss:

$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A$$

teorema sinusului

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

teorema cosinusului

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A$$

respectiv *formula celor cinci elemente*, unde cu litere mici s-au notat laturile triunghului, iar cu litere mari unghiurile corespunzătoare lor.

Problema 7

Să se găsească distanţa D, exprimată în mile marine, pe un cerc mare care uneşte punctele A şi B, de longitudini $L_A = 45^\circ$ estică şi $L_B = 52^\circ 09'$ vestică, latitudinea locului B este $\varphi_B = 35^\circ 30'$ N, iar unghiul dintre meridianul care trece prin punctul A şi cercul mare al sferei care uneşte punctele A şi B este egal cu $60^\circ 34' 10''$. O *milă marină*, notată cu Mn, reprezintă lungimea arcului de meridian de un minut de arc. Prin definiţie $1\ Mn = 1852.3$ m. Raza Pământului este egală cu 6371 km.

Înălţimea Polului ceresc nord deasupra orizontului

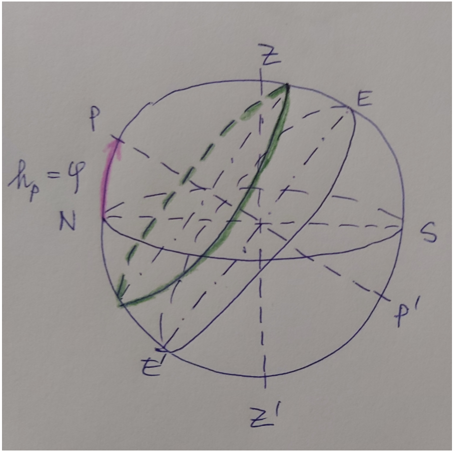
Teoremă

Pentru un observator aflat în emisfera nordică la latitudinea nordică φ*, înălţimea Polului ceresc nord deasupra orizontului este egală cu latitudinea observatorului.*

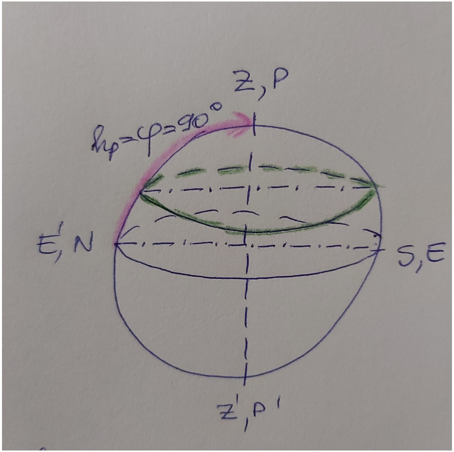
Observaţie

Paralelul diurn al astrului este înclinat faţă de ecuator sub unghiuri diferite la latitudini diferite.

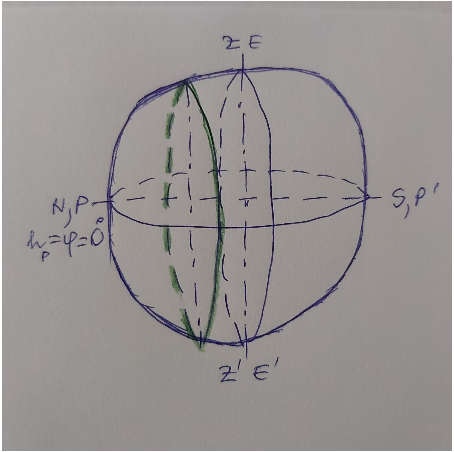
Paralelul diurn al astrului pentru un observator aflat la latitudinea $\varphi \in (0^\circ, 90^\circ)$



Paralelul diurn al astrului pentru un observator aflat la polul geografic nord



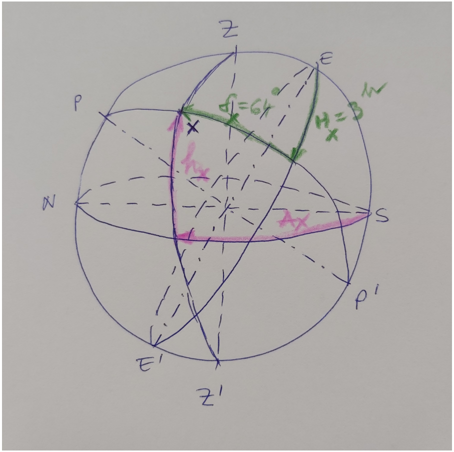
Paralelul diurn al astrului pentru un observator aflat la ecuator



Problema 8

Desenaţi sfera cerească pentru un observator aflat la latitudinea 30° N, reprezentaţi orizontul matematic, ecuatorul ceresc, punctul aflat la Zenitul observatorului, Polul ceresc nord, Polul ceresc sud şi meridianul locului.
Desenaţi poziţia stelei X de coordonate: unghi orar 3^h, declinaţie 64° N.
De pe desen estimaţi azimutul şi înălţimea deasupra orizontului pentru steaua X. Verificaţi rezultatul obţinut cu ajutorul formulelor lui Gauss.

Sfera cerească pentru problema 8



Soluţia problemei 8

Lucrăm în triunghiul nautic al stelei X, în care cunoaştem $m(PZ) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $m(PX) = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$ şi $m(\widehat{ZPX}) = 3^h = 3^h \cdot \frac{360^\circ}{24^h} = 45^\circ$.
Aplicând teorema cosinusului pentru latura ZX obţinem

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos H = 0.718,$$

de unde $h = 45^\circ 52' 36.18''$.
Utilizând celelalte două formule a lui Gauss obţinem

$$\mathrm{tg} A = \frac{\sin H}{\sin\varphi \cdot \cos H - \mathrm{tg}\delta \cdot \cos\varphi} = -0.497, \qquad (1)$$

de unde $A = 153^\circ 33' 41.7''$

Problema 9

În ziua de 23 septembrie, la momentul de timp sideral θ= 10^h 45^m s-a observat din Cluj-Napoca un obiect luminos de azimut $A = 334°59'$ şi înălţime deasupra orizontului $h = 40°27'$.

1. Calculaţi unghiul orar şi declinaţia astrului.
2. Aflaţi ascensia dreaptă a astrului. Ce astru ar fi putut fi?

Latitudinea localităţii Cluj-Napoca este $\varphi = 46°45'47''$ N.
Indicaţie: $\theta = H + \alpha$.

Problema 10

La un moment dat s-au măsurat coordonatele unui satelit artificial al Pământului şi s-a obţinut azimutul $A = 304^\circ 16' 42''$ şi distanţa zenitală $z = 28^\circ 17' 41''$. Cunoscând latitudinea geografică a observatorului ($\varphi = 46^\circ 45' 47''$), calculaţi coordonatele orare ale satelitului la momentul observaţiei.

Problema 11

Să se determine distanţa zenitală şi unghiul paralactic al stelei 61 *Cygni* (Lebăda), atunci când ea se află la 3^h spre vest de meridian, declinaţia ei fiind $\delta = 38°9'$ şi latitudinea locului de observaţie $\varphi = 53°23'$.

Problema 12

O stea de declinaţie $42^{\circ}21'$ N este observată când unghiul ei orar este $8^{h}16^{m}42^{s}$. Dacă latitudinea observatorului este 60° N, calculaţi azimutul şi înălţimea stelei deasupra orizontului la momentul observaţiei.

Problema 13

Desenaţi sfera cerească pentru un observator aflat la Cluj-Napoca, reprezentaţi orizontul matematic, ecuatorul ceresc, punctul aflat la Zenitul observatorului, Polul ceresc nord, Polul ceresc sud şi meridianul locului.
Ştiind că latitudinea localităţii Cluj-Napoca este egală cu $46^\circ 46'$ N, aflaţi înălţimea Polului ceresc nord deasupra orizontului.
Desenaţi poziţia stelei Y de azimut 120° şi 20° înălţime deasupra orizontului.
De pe desen estimaţi unghiul orar şi declinaţia stelei Y, iar apoi, utilizând formulele lui Gauss, aflaţi coordonatele orare ale stelei Y.

Problema 9

În ziua de 23 septembrie, la momentul de timp sideral $\theta = 10^h 45^m$ s-a observat din Cluj-Napoca un obiect luminos de azimut $A = 334°59'$ și înălțime deasupra orizontului $h = 40°27'$.

1. Calculați unghiul orar și declinația astrului.
2. Aflați ascensia dreaptă a astrului. Ce astru ar fi putut fi? Latitudinea localității Cluj-Napoca este $\varphi = 46°45'47''N$.

Indicație: $\theta = H + \alpha$.

Soluție:

1. Declinația astrului se calculează din teorema sinusului:

$\sin\delta = \sin h \cdot \sin\varphi - \cos h \cdot \cos\varphi \cdot \cos A$

$\sin\delta = \sin(40{,}45°) \cdot \sin(46{,}76°) - \cos(40{,}45°) \cdot \cos(46{,}76°) \cdot \cos(334{,}98°)$

$\sin\delta = 0{,}64 \cdot 0{,}72 - 0{,}76 \cdot 0{,}68 \cdot 0{,}9$

$\sin\delta = -0{,}0043$

$\delta = \arcsin(-0{,}0043)$

$\delta = -0{,}247°$

Unghiul orar se calculează cu ajutorul formulelor:

$$\begin{cases} \cos\delta \cdot \sin H = \cos h \cdot \sin A \\ \cos\delta \cdot \cos H = \sin h \cdot \cos\varphi + \cos h \cdot \sin\varphi \cdot \cos A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(-0{,}247°) \cdot \sin H = \cos(40{,}45°) \cdot \sin(334{,}98°) \\ \cos(-0{,}247°) \cdot \cos H = \sin(40{,}45°) \cdot \cos(46{,}76°) + \cos(40{,}45°) \cdot \sin(46{,}76°) \cdot \cos(334{,}98°) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}999 \cdot \sin H = 0{,}76 \cdot (-0{,}422) \\ 0{,}999 \cdot \cos H = 0{,}64 \cdot 0{,}68 + 0{,}76 \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}9 \quad (\text{all} \neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}999 \cdot \sin H = -0{,}32 \\ 0{,}999 \cdot \cos H = 0{,}927 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} H = \frac{\sin A}{\sin \varphi \cdot \cos A + \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} h}$$

$$\operatorname{tg} H = \frac{-0,422}{0,72 \cdot 0,9 + 0,68 \cdot 0,85} = \frac{-0,422}{1,226}$$

$\operatorname{tg} H = -0,344$

$H = \operatorname{arctg}(-0,344)$

$H = -18,98^\circ$

$24h \ldots\ldots 360^\circ$

$x\,h \ldots\ldots -18,98^\circ$

$$x = \frac{24 \cdot (-18,98^\circ)}{360^\circ} = -1,2653\,h$$

$A = 334^\circ 59' \approx 335^\circ$

$H = 24^h - 1,2653^h$

$H = 22,7347^h$

$H = 22^h \cdot 0,73 \cdot 60$

$H = 22^h\ 43,8^m$

$H = 22^h\ 43^m\ 0,8 \cdot 60$

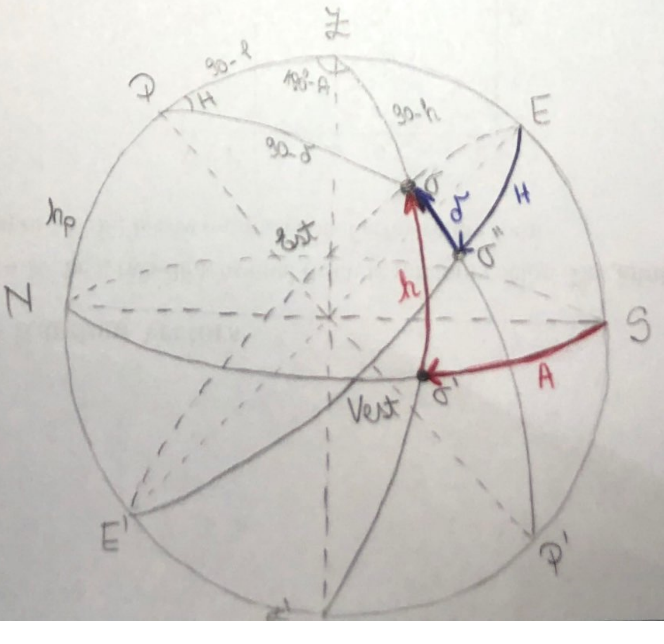
$H = 22^h\ 43^m\ 48^s$

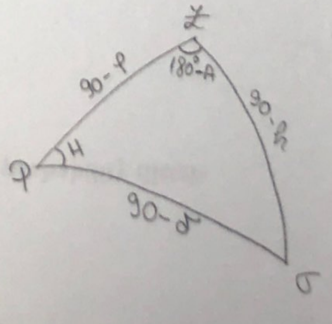
2. $\theta = H + \alpha \Rightarrow \alpha = \theta - H$

$\alpha = 10\,h\,45' - 22\,h\,43'48''$

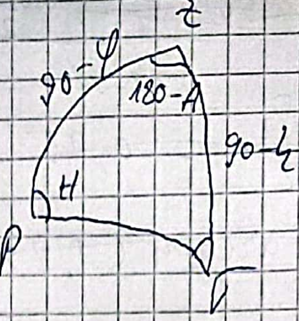
$\Rightarrow \alpha \approx 12\,h$

Știind că în data de 23 sept. soarele trece prin punctul autumnal $\Rightarrow$ astrul este soarele





Problema 11



$\delta = 38^\circ 9'$

$\varphi = 53^\circ 23'$

$z = 90 - h = ?$

$24h \; \ldots \; 360^\circ$

$3h \; \ldots \; x^\circ$ $\Rightarrow x = \dfrac{360 \cdot 3}{24} = 45^\circ$

$H = 45^\circ$

$$tg\, A = \frac{\sin H}{\sin\varphi \cdot \cos H - tg\,\delta \cdot \cos\varphi}$$

$\sin H = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\varphi = \sin 53^\circ 23' = 0.8$

$\cos H = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\,\delta = tg\, 38^\circ 9' = 0.79$

$\cos\varphi = \cos 53^\circ 23' = 0.6$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow tg\, A = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0.79 \cdot 0.6} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0{,}56 - 0{,}47} = \frac{0.7}{0.09} =$$

$= 0.61 \Rightarrow A = arctg(0.61) = 31{,}38^\circ$

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos H$$
$$= 0{,}8 \cdot \sin 38^\circ 9' + 0{,}6 \cdot \cos 38^\circ 9' \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= 0{,}8 \cdot 0{,}62 + 0{,}6 \cdot 0{,}79 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= 0{,}49 + 0{,}47 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= 0{,}49 + 0{,}33$$
$$= 0{,}82$$

$\Rightarrow h = \arcsin(0{,}82) = 55{,}08$

$z = 90 - 55{,}08 = 34{,}92^\circ$

Teorema sinusurilor:

$$\frac{\sin(90-\varphi)}{\sin \widehat{ZOP}} = \frac{\sin(90-h)}{\sin H} \Leftrightarrow \frac{\sin(36^\circ 37')}{\sin \widehat{ZOP}} = \frac{\sin(34{,}92^\circ)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow$$

$$\cancel{\sin Z\widehat{G}P = \frac{36^{\circ}34' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{34{,}92^{\circ}} = \frac{36{,}61^{\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{34{,}92^{\circ}}} =$$

$$\cancel{= 1{,}04^{\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}73^{\circ} \Rightarrow}$$

$$\cancel{\Rightarrow Z\widehat{G}P = \arcsin(0{,}73) = 46{,}88^{\circ}}$$

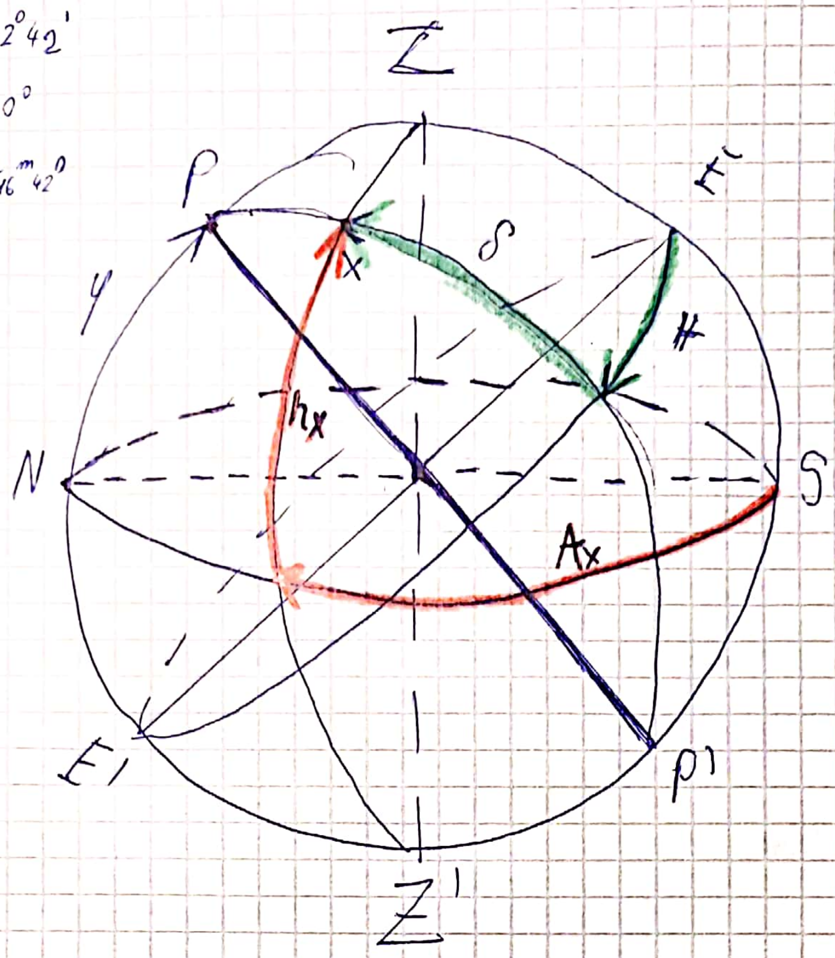
$$\sin Z\widehat{G}P = \frac{0{,}55 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{0{,}59} = 0{,}65 \Rightarrow Z\widehat{G}P = \arcsin(0{,}65)$$

$$= 40{,}54^{\circ}$$

12. $\delta = 42^\circ 42'$

$\varphi = 60^\circ$

$H = 8^h 16^m 42^s$



$1^h = 15^\circ$

$H = 8^h 16^m 42^s$

$H = 8^h \, 16 + \frac{42}{60}^m$

$H = 8^h \, 16{,}7^m$

$H = 8 + \frac{16{,}7}{60}^h$

$\boxed{H = 8{,}278^h}$

$\delta = 42^\circ 42'$

$\delta = 42 + \frac{42}{60}^\circ$

$\boxed{\delta = 42{,}7^\circ}$

$$\left.\begin{array}{l} 1^h = 15^\circ \\ 8{,}278^h = y \end{array}\right| \Rightarrow y = \frac{8{,}278 \cdot 15}{1} = 124{,}17^\circ \Rightarrow \boxed{H = 124{,}17^\circ}$$

Folosind teorema cosinusului obținem

$\sin h_x = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos H$

$\sin h_x = \sin(60^\circ) \cdot \sin(42{,}7^\circ) + \cos(60^\circ) \cdot \cos(42{,}7^\circ) \cdot \cos(124{,}17^\circ)$

$\sin hx = 0{,}38$ $\qquad \arcsin(0{,}38) \simeq 0{,}3897$ rad

$hx = 0.3897 \cdot 57{,}3$

$hx = 22{,}32981^\circ$

$\Rightarrow \boxed{hx = 22^\circ \, 19' \, 47{,}3\cancel{16}''}$

$0{,}32981 \cdot 60 = 19{,}\boxed{7886}$

$0{,}7886 \cdot 60 = 47{,}316$

$$\operatorname{tg} A_x = \frac{\sin H}{\sin\varphi \cdot \cos H - \operatorname{tg}\delta \cdot \cos\varphi} = -0{,}8729$$

$\operatorname{arctg}(-0{,}8729) = -0{,}7176$ rad

$A_x = -0{,}7176 \cdot 57{,}3 = -41{,}118^\circ$

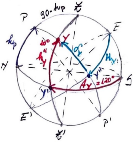
$\Rightarrow A_x = 180^\circ - 41{,}118^\circ = 138{,}882^\circ = \boxed{138^\circ 52' 55{,}2''}$

Jugariu Isabela
831

Problema 13

Desenați sfera cerească pentru un observator aflat la Cluj-Napoca, reprezentați orizontul matematic, ecuatorul ceresc, punctul aflat la zenitul observatorului, Polul ceresc nord, Polul ceresc sud, meridianul locului.

Știind că latitudinea localității Cluj-Napoca este 46°46'N, aflați înălțimea Polului ceresc nord deasupra orizontului. Desenați poziția stelei Y de azimut 120° și 20° înălțime deasupra orizontului. De pe desen estimați unghiul orar și declinația stelei Y, iar apoi, utilizând formulele lui Gauss, aflați coordonatele orare ale stelei Y.



$\varphi = 46°46'N$

$A_Y = 120°$

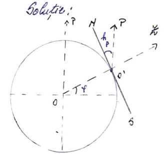
$h_Y = 20°$

$h_P = ?$

$H_Y = ?$

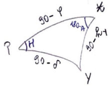
$\delta_Y = ?$

Soluție:



Pentru a afla cât este h_P, folosim teorema care spune că pentru un observator din emisfera nordică (46°46'N), aflat la latitudinea geografică φ, înălțimea deasupra orizontului a Polului ceresc nord este egală cu latitudinea observatorului, deci:

$$h_P = \varphi = 46°46'N$$



Lucrăm în triunghiul nautic al stelei Y unde știm:

$m(PZ) = 90 - 46°46' = 89°60' - 46°46' = 43°14'$

$m(ZY) = 90° - 20° = 70°$

$m(\widehat{PZY}) = 180° - 120° = 60°$

Teorema cosinusului pentru latura PY ne conduce la:

$\varphi = 46°46'$

$\varphi = 46 + \frac{46}{60}$

$\varphi = 46 + 0.77 = 46.77$

$\sin\delta = \sin h_Y \cdot \sin\varphi - \cos h_Y \cdot \cos\varphi \cdot \cos A$

$= \sin 20° \sin(46.77°) - \cos 20° \cos(46.77°) \cos 120$

$= 0.34 \cdot 0.72 - 0.93 \cdot 0.68 \cdot (-0.5) = 0.24 + 0.31 = 0.55 \Rightarrow \delta = \arcsin(0.55)$

$\Rightarrow \delta = 33.4^\circ \Rightarrow \delta = 33^\circ,\ 0.4 \cdot 60 = \boxed{33^\circ 24' = \delta}$

$$tg\, H = \frac{\sin A}{\sin\varphi \cos A + \cos\varphi \cdot tg\, h_\gamma} = \frac{\sin(120^\circ)}{\sin(46.47^\circ)\cos(120^\circ) + \cos(46.47^\circ)\, tg(20^\circ)}$$

$$= \frac{0.86}{0.72\cdot(-0.5) + 0.68 \cdot 0.36} = \frac{0.86}{-0.36+0.24} = -\frac{0.86}{0.12} = -7.16$$

$\Rightarrow H = arctg(-7.16)$

$H = -82.04^\circ$

$24^h \ldots 360^\circ$

$x^h \ldots -82.04^\circ$

$x^h = \frac{-82.04^\circ \cdot 24^h}{360^\circ}$

$x^h = -5.46^h$

$A = 120^\circ \Rightarrow H \in [0^h, 12^h] \Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow H = 12^h - 5.46^h$

$H = 12^h - 5^h\ 0.46 \cdot 60$

$H = 12^h - 5^h\ 27.6^m$

$H = 12^h - 5^h 27^m 36^s$

$H = 11^h 59^m 60^s - 5^h 27^m 36^s$

$\boxed{H = 6^h 32^m 24^s}$