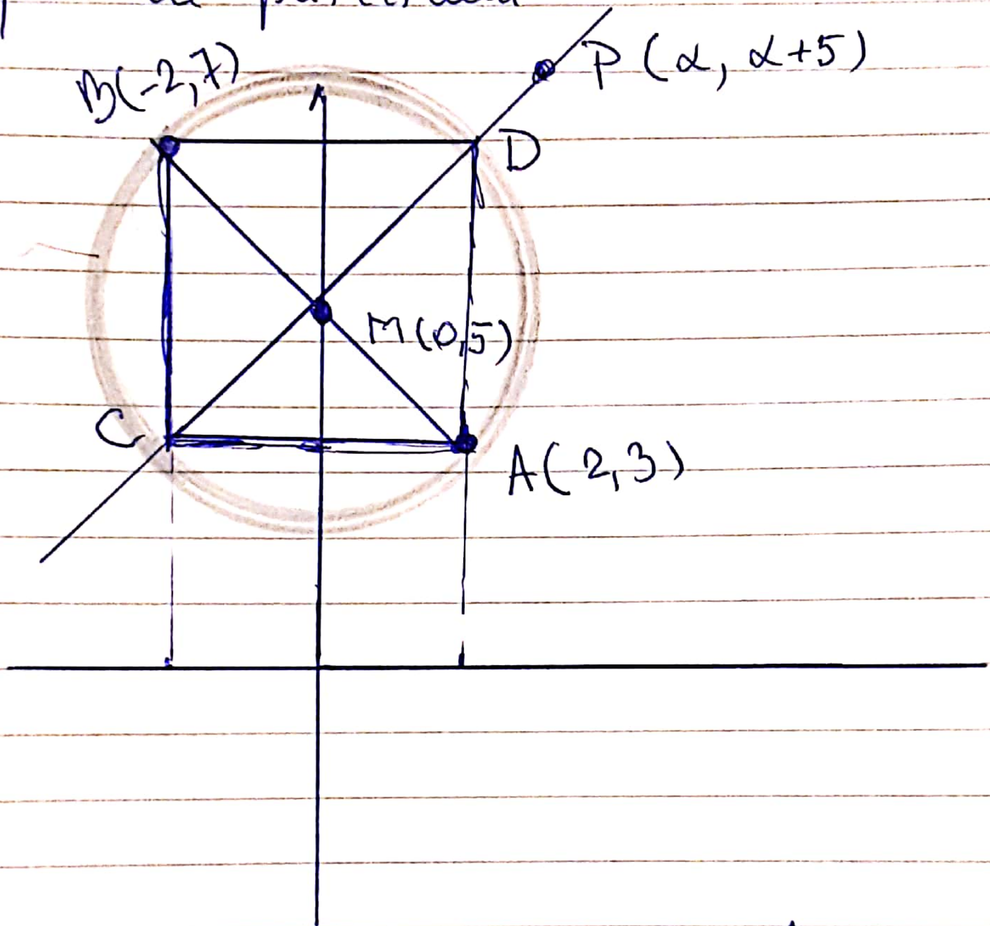
Vârfurile opuse ale unui pătrat sunt $A(2,3)$ și $B(-2,7)$. Să se afle coordonatele celorlalte vârfuri ale pătratului




Soluția 1. Mijlocul M al diagonalei AB are coordonatele $M(0,5)$.

Cealaltă diagonală este mediatoarea lui $[AB]$.

panta lui AB este $m_{AB} = \frac{7-3}{-2-2} = -1$

panta mediatoarei este $+1$.

$\Rightarrow$ Ecuația mediatoarei este $y-5=x$

sau $y=x+5$.

Orice punct P de pe mediatoare are coordonatele de forma $(\alpha, \alpha+5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$PB^2 = (\alpha+2)^2 + (\alpha+5-7)^2 \Leftrightarrow PB^2 = (\alpha+2)^2 + (\alpha-2)^2$

$PA^2 = (\alpha-2)^2 + (\alpha+5-3)^2 \Leftrightarrow PC^2 = (\alpha-2)^2 + (\alpha+2)^2$

$AB^2 = 4^2 + 4^2 = 32$.

Pentru ca P să fie vârf al pătratului trebuie ca triunghiul APB să fie dreptunghic, adică $AB^2 = PA^2 + PB^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 32 = 2[(\alpha+2)^2 + (\alpha-2)^2] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 16 = 2\alpha^2 + 8 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2.$
Deci $C(-2, 3)$ și $D(2, 7)$ sunt celelalte două vârfuri ale pătratului.

Soluția 2. C și D sunt intersecțiile mediatoarei diagonalei AB cu cercul de diametru AB (circumscris pătratului).
ecuația cercului: $(x-0)^2 + (y-5)^2 = 8$
(pentru că $R = \frac{AB}{2}$ și $AB = 2\sqrt{2}$ din soluția 1).
ecuația mediatoarei este $y = x+5$
Avem sistemul:

$$\begin{cases} y = x+5 \\ x^2 + (y-5)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

Deci celelalte vârfuri sunt $C(-2, 3)$ și $D(2, 7)$.