のサンプル点数)，三次元のベクトル波解析の場合は $4N+2$ となる．そこで三次元のビーム伝搬法においては次のような対策がとられる．

- 演算子分割の一手法である ADI 法 (Alternating Direction Implicit：交互方向陰的差分法) を用いて，バンド幅 3 の連立一次方程式を多数回解くことに帰着させる．こうすると，トーマスアルゴリズムを用いることができるので，計算は高速になる．
- 連立一次方程式を解く方法として，ガウスの消去法ではなく，反復法を用いる．共役勾配法 (Conjugate Gradient Method) の一種である Bi-CGSTAB 法 (安定化双共役勾配法) がよく用いられている．

「スカラ波解析」と「セミベクトル波解析」の違いは，屈折率の微分項が入ってくるか否かである．5.6 節 (p.116) で述べたように，屈折率の微分項を差分で表現する場合，離散化の際に注意を要する．

セミベクトルの定式化における E_x は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial\left(n^2\right)}{\partial x}E_x\right)+k_0^2n^2E_x=0 \qquad (5.43)$$

であり，左辺第二項に要注意である．

三次元のフルベクトル BPM の論文[27, 28]では式 (5.43) の左辺第二項を以下のように離散化している．なお，$n^2\to\varepsilon$, $E_x(x-\Delta x,y,z)\to E_-$, $E_x(x,y,z)\to E$, $E_x(x+\Delta x,y,z)\to E_+$, $\varepsilon(x-\Delta x,y,z)\to\varepsilon_-$, $\varepsilon(x+\Delta x,y,z)\to\varepsilon_+$, $\varepsilon(x,y,z)\to\varepsilon$ と表現している．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{dx}E_x\right)$$

屈折率の微分は差分で表現し，その他の項は平均をとる

$$\Rightarrow\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{\frac{\varepsilon_++\varepsilon}{2}}\frac{\varepsilon_+-\varepsilon}{\Delta x}\frac{E_++E}{2}-\frac{1}{\frac{\varepsilon+\varepsilon_-}{2}}\frac{\varepsilon-\varepsilon_-}{\Delta x}\frac{E+E_-}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{(\Delta x)^2}\left\{\frac{\varepsilon_+-\varepsilon}{\varepsilon_++\varepsilon}(E_++E)+\frac{\varepsilon_--\varepsilon}{\varepsilon_-+\varepsilon}(E+E_-)\right\}$$

$$=\frac{1}{(\Delta x)^2}\left\{\frac{\varepsilon_+-\varepsilon}{\varepsilon_++\varepsilon}E_++\left(\frac{\varepsilon_+-\varepsilon}{\varepsilon_++\varepsilon}+\frac{\varepsilon_--\varepsilon}{\varepsilon_-+\varepsilon}\right)E+\frac{\varepsilon_--\varepsilon}{\varepsilon_-+\varepsilon}E_-\right\}$$

式 (5.43) の左辺第一項と合わせて，

$$\frac{\partial^2E}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{dx}E_x\right)$$
$$=\left\{\frac{2\varepsilon_+}{\varepsilon_++\varepsilon}E_++\left(\frac{\varepsilon_+-\varepsilon}{\varepsilon_++\varepsilon}+\frac{\varepsilon_--\varepsilon}{\varepsilon_-+\varepsilon}-2\right)E+\frac{2\varepsilon_-}{\varepsilon_-+\varepsilon}E_-\right\}\frac{1}{(\Delta x)^2}$$

5.9.2 ADI 法

ここからは三次元導波路のビーム伝搬法として式の形がもっとも簡単なスカラ波動方程式を扱う．三次元のスカラ波動方程式は以下の形をしている． Fもzの関数.

$$\frac{\partial^2E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E}{\partial z^2}+k_0^2n^2E=0$$

これまでと同様に，$E=Fe^{-jk_0n_rz}$ とおいて代入し，$\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ の項を無視すると， 無視しないで

$$j2k_0n_r\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+k_0^2(n^2-n_r^2)F \qquad (5.44)$$ パデになる.

という近軸式が得られる．式 (5.44) を素直にクランク・ニコルソン法で差分化すると，**図 5.17** のように 10 点の関係を表す差分方程式になる．**図 5.18** のように x 方向に M 個のサンプル点，y 方向に N 個のサンプル点をとる場合を考える．クランク・ニコルソン法で定式化し，図 5.18 のようにサンプル点の番号をつけると，未知数 $M\times N$ 個，バンド幅 $2N+1$ 個の連立一次方程式が得られる．

二次元のときはバンド幅が 3 であったので，トーマスアルゴリズム (ガウスの消去法において必要な部分だけを計算する方法) を用いて高速に解くことができたが，この場合はバンド幅が $2N+1$ となり，ガウスの消去法では非常に時間がか

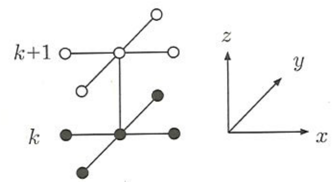

図 5.17 サンプル点の位置関係

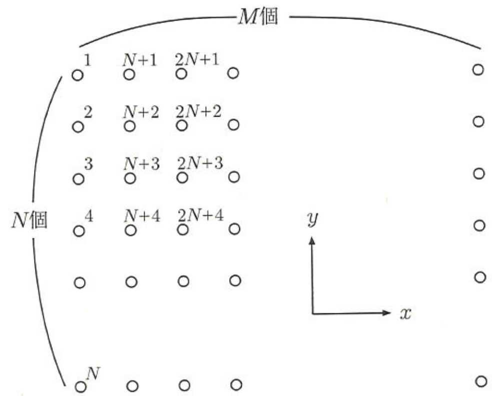

図 5.18 サンプル点番号

(Alternating Direction Implicit：交互方向陰的差分法) [29~32] が用いられる．ADI 法は「コーディングが容易である」「収束判定基準を定める必要がない」「高速である」という特長をもっているので，一番ポピュラーな方法である．

ADI 法は演算子を分割し，2 ステップに分けて解く方法である．演算子を分割することにより，バンド幅 3 の連立一次方程式を複数回解く問題に帰着させることができる．こうすると，トーマスアルゴリズムを用いることができるので計算は高速になる．

式 (5.44) において，$D_{xx} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D_{yy} = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\nu = k_0^2(n^2 - n_r^2)$ という記号を導入し，z 方向にクランク・ニコルソン法を用いて離散化する．z 方向の離散点番号を k とすると，ステップ k とステップ $k+1$ の間の関係は

$$j2k_0n_r \frac{F^{k+1} - F^k}{\Delta z} = (D_{xx} + D_{yy} + \nu)\frac{F^{k+1} + F^k}{2} \tag{5.45}$$

クランクニコルソン

移項して

$$\left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}(D_{xx} + D_{yy} + \nu)\right]F^{k+1} = \left[1 + \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}(D_{xx} + D_{yy} + \nu)\right]F^k \tag{5.46}$$

左辺を次のように近似して演算子を分割する．

$$\begin{aligned}
&\left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}(D_{xx} + D_{yy} + \nu)\right]F^{k+1} \\
&= \left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{xx} + \frac{\nu}{2}\right)\right]\left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{yy} + \frac{\nu}{2}\right)\right]F^{k+1} \\
&\quad \underline{- \left(\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\right)^2\left(D_{xx} + \frac{\nu}{2}\right)\left(D_{yy} + \frac{\nu}{2}\right)F^{k+1}} \\
&\simeq \left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{xx} + \frac{\nu}{2}\right)\right]\left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{yy} + \frac{\nu}{2}\right)\right]F^{k+1}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

無視した項 (点線のアンダーライン) は Δz が小さくなるほど，小さくなる．右辺についても同様の操作を行い式 (5.46) に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{xx} + \frac{\nu}{2}\right)\right]\left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{yy} + \frac{\nu}{2}\right)\right]F^{k+1} \\
&= \left[1 + \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{xx} + \frac{\nu}{2}\right)\right]\left[1 + \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{yy} + \frac{\nu}{2}\right)\right]F^k
\end{aligned} \tag{5.48}$$

が得られる．移項して，次式が得られる．

$$F^{k+1} = \frac{\left[1 + \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{xx} + \frac{\nu}{2}\right)\right]}{\left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{yy} + \frac{\nu}{2}\right)\right]} \cdot \underbrace{\frac{\left[1 + \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{yy} + \frac{\nu}{2}\right)\right]}{\left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{xx} + \frac{\nu}{2}\right)\right]}F^k}_{F^{k+\frac{1}{2}}} \tag{5.49}$$

点線のアンダーラインが引いてある部分を $F^{k+\frac{1}{2}}$ と置くと，次の二つの式が得られる．

$$\left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{yy} + \frac{\nu}{2}\right)\right]F^{k+1} = \left[1 + \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{xx} + \frac{\nu}{2}\right)\right]F^{k+\frac{1}{2}} \tag{5.50a}$$

$$\left[1 - \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{xx} + \frac{\nu}{2}\right)\right]F^{k+\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\left(D_{yy} + \frac{\nu}{2}\right)\right]F^k \tag{5.50b}$$

式 (5.50a), (5.50b) を x, y 方向にも離散化して書き下すと，次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\frac{j4k_0n_r}{\Delta z}F_{ij}^{k+1} - \frac{F_{i\,j-1}^{k+1} - 2F_{ij}^{k+1} + F_{i\,j+1}^{k+1}}{(\Delta y)^2} - \frac{k_0^2(n^2 - n_r^2)F_{ij}^{k+1}}{2} \\
&= \frac{j4k_0n_r}{\Delta z}F_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{F_{i-1\,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2F_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + F_{i+1\,j}^{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{k_0^2(n^2 - n_r^2)F_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{2}
\end{aligned} \tag{5.51a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{j4k_0n_r}{\Delta z}F_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{F_{i-1\,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2F_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + F_{i+1\,j}^{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} - \frac{k_0^2(n^2 - n_r^2)F_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{2} \\
&= \frac{j4k_0n_r}{\Delta z}F_{ij}^{k} + \frac{F_{i\,j-1}^{k} - 2F_{ij}^{k} + F_{i\,j+1}^{k}}{(\Delta y)^2} + \frac{k_0^2(n^2 - n_r^2)F_{ij}^{k}}{2}
\end{aligned} \tag{5.51b}$$

式 (5.51b) と式 (5.51a) は 6 点の関係を示しており，**図 5.19** の右側のような状況である．式 (5.51b) と式 (5.51a) の右辺はその時点で既知の値なので，バンド幅 3 の連立一次方程式を表している．

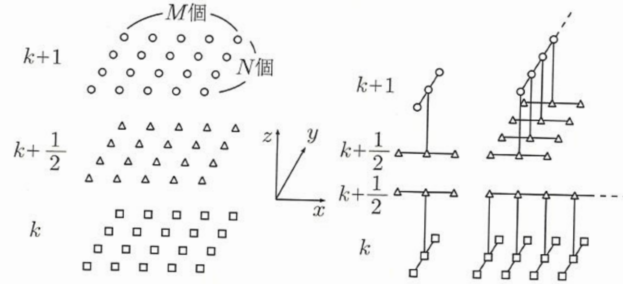

図 5.19 ADI 法

ステップ k からステップ $k+\frac{1}{2}$ の値を求めるには「未知数 M 個，バンド幅 3」の連立一次方程式を N 個解き，ステップ $k+\frac{1}{2}$ からステップ $k+1$ の値を求めるには「未知数 N 個，バンド幅 3」の連立一次方程式を M 個解けばよい．

ADI は，コーディングがやさしく収束について考える必要がないので，一番ポピュラーであると思われる．市販の三次元 BPM をサポートした光 CAD 製品は，ほとんどの製品が ADI 法を用いている．

ADI による三次元の差分 BPM は，法政大学の山内潤治先生によって 1991 年に発表された[29]．法政大学の山内潤治先生の研究室は，北海道大学の小柴正則先生の研究グループと並んで，光導波路解析に関しては世界的に有名な研究室であり，気鋭の柴山純先生を擁して，1992 年頃以降，ビーム伝搬法に関する論文を多数発表している．

その山内先生の研究室の 2001 年春の電子情報通信学会の総合大会の発表[33]によると，近軸式に基づいた三次元の差分 BPM の速度を ADI と反復法で比べたところ，同程度の精度で ADI の方が速いと報告されている．

次に ADI 法に対する Pade の適用について考える[34, 35]．Pade(1,1) 近似を用いた三次元のスカラ波動方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\dfrac{1}{j2k_0n_r}\Big(D_{xx}+D_{yy}+\nu\Big)}{1+\dfrac{1}{4k_0^2n_r^2}\Big(D_{xx}+D_{yy}+\nu\Big)}F \tag{5.52}$$

上式を z 方向にクランク・ニコルソン法を用いて離散化すると，

$$\begin{aligned}&\left[1+\frac{1}{4k_0^2n_r^2}\Big(D_{xx}+D_{yy}+\nu\Big)-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\Big(D_{xx}+D_{yy}+\nu\Big)\right]F^{k+1}\\&\quad=\left[1+\frac{1}{4k_0^2n_r^2}\Big(D_{xx}+D_{yj}+\nu\Big)+\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\Big(D_{xx}+D_{yy}+\nu\Big)\right]F^{k}\end{aligned} \tag{5.53}$$

となる．ADI 法を用いて演算子を分割すると，式 (5.53) の左辺は

$$\begin{aligned}&\left[1+\frac{1}{4k_0^2n_r^2}\Big(D_{xx}+D_{yy}+\nu\Big)-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\Big(D_{xx}+D_{yy}+\nu\Big)\right]F^{k+1}\\&\quad=\left[1+\left(\frac{1}{4k_0^2n_r^2}-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\right)\left(D_{xx}+\frac{\nu}{2}\right)\right]\\&\qquad\times\left[1+\left(\frac{1}{4k_0^2n_r^2}-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\right)\left(D_{yy}+\frac{\nu}{2}\right)\right]F^{k+1}\\&\qquad-\left(\frac{1}{4k_0^2n_r^2}+\frac{\Delta z}{4k_0n_r}\right)^2\left(D_{xx}+\frac{\nu}{2}\right)\left(D_{yy}+\frac{\nu}{2}\right)F^{k+1}\end{aligned} \tag{5.54}$$

となり，無視する項 (波線のアンダーライン) の中の $\dfrac{1}{4k_0^2n_r^2}$ の部分は Δz を 0 に近づけても 0 にはならない．

平面光導波路において，導波路の変位は水平方向 (ここでは x 方向) のみである．そこで，パデ式を水平方向にのみ適用する．式 (5.52)〜(5.54) において，Pade(1,1) 近似によって生じた項のうち y 方向の微分項 (点線のアンダーラインがある項) を無視すると，以下のような演算子分割が可能となる．

$$\begin{aligned}&\left[1+\frac{1}{4k_0^2n_r^2}\Big(D_{xx}+\nu\Big)-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\Big(D_{xx}+D_{yy}+\nu\Big)\right]F^{k+1}\\&\quad=\left[1+\left(\frac{1}{4k_0^2n_r^2}-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\right)\Big(D_{xx}+\nu\Big)\right]\left[1-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\Big(D_{yy}\Big)\right]F^{k+1}\\&\qquad-\left(\frac{1}{4k_0^2n_r^2}-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\right)\left(-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\right)\Big(D_{xx}+\nu\Big)D_{yy}F^{k+1}\end{aligned} \tag{5.55}$$

この場合，無視する項 (波線のアンダーライン) は Δz に対して一次であり，Δz を小さくすると，小さくなる．式 (5.53) の右辺に対しても同様の演算子分割を施すと以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}&\left[1+\left(\frac{1}{4k_0^2n_r^2}-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\right)\Big(D_{xx}+\nu\Big)\right]\left[1-\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\Big(D_{yy}\Big)\right]F^{k+1}\\&\quad=\left[1+\left(\frac{1}{4k_0^2n_r^2}+\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\right)\Big(D_{xx}+\nu\Big)\right]\left[1+\frac{\Delta z}{j4k_0n_r}\Big(D_{yy}\Big)\right]F^{k}\end{aligned} \tag{5.56}$$

式 (5.49) と同様の変形を施すと，バンド幅 3 の連立一次方程式を多数回解く問題に帰着する．

本節では，三次元のスカラ波解析の ADI-BPM について述べた．セミベクトル波解析の ADI-BPM は論文[36]，フルベクトル波解析の ADI-BPM は論文[37, 38] で説明されている．

また，ここまでは差分 BPM についての話であった．有限要素 BPM[12, 13]は差分に比べると，メッシュの取り方がより柔軟に行える利点がある．たとえば，図

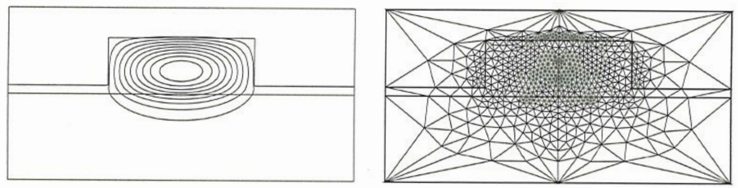

図 5.20　有限要素法によるメッシュ分割例

5.20 のようにフィールドの大きさや導波路の形状に応じて，メッシュの細かさを調節することができる．ただし，1 ステップの計算ごとに導波路のレイアウトに応じて，メッシュを自動生成するコードを開発する必要があり，コーディングの難易度は FD-BPM よりかなり高いように思われる．そのため，日本国内では三次元の FE-BPM (Finite Element Beam Propagation Method) は北海道大学の小柴先生の研究グループを除いては，どこもコーディングに成功していないようである．

5.10 ビーム伝搬法でモードを求める

ビーム伝搬法を使ってモードを求めることができる．本節の内容は，論文[39]に基づいている．式を簡単にするため，y 軸方向に一様なスラブ導波路を TE 波が z 軸方向に伝搬する場合を考える．電界 E_y を ϕ で表すと，$\phi(x,z)$ は次式を満たす．

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+k_0^2n^2\phi=0 \tag{5.57}$$

$z=0$ に $\phi_{in}(x)$ を入射し，z の正方向に計算を進める．z の関数 $P(z)$ を次のように定義する．

$$P(z)=\int\phi_{in}^*(x)\phi(x,z)\ dx \tag{5.58}$$

上式は BPM で求めたフィールド $\phi(x,z)$ と入射フィールド $\phi_{in}(x)$ の相関を，各 z 位置で求めることにより，複素関数 $P(z)$ を作ることを意味している．$P(z)$ は次のように変形することができる．

$$\begin{aligned}P(z)&=\int\phi_{in}^*(x)\phi(x,z)\ dx\\&=\int\sum_n c_n^*\phi_n^*(x)\cdot\sum_m c_m\phi_m(x)e^{-j\beta_m z}\ dx &&\text{入射フィールドと BPM フィールドをモードで展開する}\\&=\int\sum_m|c_m|^2|\phi_m(x)|^2e^{-j\beta_m z}\ dx &&\text{モードの直交性により，異なるモードの重なり積分は 0 になる}\\&=\sum_m|c_m|^2e^{-j\beta_m z} &&\text{モードフィールドは電力が 1 に正規化されていることを仮定する}\end{aligned} \tag{5.59}$$

以上のように $P(z)$ は $e^{-j\beta_m z}$ という因子を含んでいるので，フーリエ変換すると β_m の場所でピークをもつ．すなわち，$P(z)$ をフーリエ変換することにより，初期フィールドに含まれているモードの伝搬定数 β_m を求めることができる．

モードの伝搬定数 β_m が求まったなら，モードのフィールド分布 $\phi_m(x)$ は次式で求めることができる．

$$\phi_m(x)=\frac{1}{L}\int_0^L\phi(x,z)e^{j\beta_m z}\ dz \tag{5.60}$$

その理由を以下に示す．

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}\int_0^L\phi(x,z)e^{j\beta_m z}\ dz&=\frac{1}{L}\int_0^L\sum_n\phi_n(x)e^{-j\beta_n z}\cdot e^{j\beta_m z}\ dz\\&\qquad\text{$n=m$ のとき $e^{-j\beta_m}e^{j\beta_m}=1$, $n\neq m$ のとき $e^{-j(\beta_n-\beta_m)z}$ だから，m 以外の項は積分すると平均されてほぼ 0 になる}\\&\simeq\frac{1}{L}\int_0^L\phi_m(x)\ \ dz\\&=\phi_m(x)\end{aligned} \tag{5.61}$$

取り出したいモード以外の成分は，積分距離が長くなるほど相対的に小さくなる．しかし，距離が n 倍になっても相対的な大きさは $1/n$ にしか小さくならないので，モードを求めるには長い距離 (1000λ 以上) 伝搬させる必要がある．

5.11 虚軸ビーム伝搬法

5.3 節 (p.109) で，クランク・ニコルソン法で定式化した BPM を用いて，等価屈折率 n_e のモードが伝搬する状況を解析した．$F_i^{j+1}=\alpha F_i^j$ とおいて「$\alpha=$」の形に変形すると，次の式を得た．

$$\alpha=\frac{j4k_0n_r+\Delta zk_0^2(n_e^2-n_r^2)}{j4k_0n_r-\Delta zk_0^2(n_e^2-n_r^2)}$$

等価屈折率 n_e のモードが伝搬するとき，F_i^{j+1} と F_i^j は以下の関係がある．

$$\begin{bmatrix}F_1^{j+1}\\F_2^{j+1}\\F_3^{j+1}\\\vdots\\F_N^{j+1}\end{bmatrix}=\frac{j4k_0n_r+\Delta zk_0^2(n_e^2-n_r^2)}{j4k_0n_r-\Delta zk_0^2(n_e^2-n_r^2)}\begin{bmatrix}F_1^j\\F_2^j\\F_3^j\\\vdots\\F_N^j\end{bmatrix}$$

ここで，$[F_1^j\ F_2^j\ F_3^j\ \cdots F_N^j]^t$ などのベクトルは，等価屈折率 n_e のモードのフィールドパターンを表す．

いま，導波路中に放射モードと導波モードを含めて，複数のモードが励振されているとする．i はモード番号を表す．モード番号 i の振幅を c_i，等価屈折率を n_{ei}，フィールドパターンを $[{}^iF_1\ {}^iF_2\ {}^iF_3\ \cdots{}^iF_N]^t$ と表すとき，1 ステップ後のフィールドパターン $[X_1\ X_2\ X_3\ \cdots X_N]^t$ は次式で表される．