速度演算子の定義って当たり前？

理学部物理学科 3 年 05251536 杉原浩一

2025 年 10 月 14 日

Schrödinger 描像では演算子のほうは時間変化しないから

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{r}} = 0 \tag{0.1}$$

になってしまう（自明)。それでは速度演算子はどう定義するのがいいだろう？ ここで Heisenberg 描像に行くと

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{H}}(t) \coloneqq e^{i\hat{H}t}\hat{\boldsymbol{r}}e^{-i\hat{H}t} \tag{0.2}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{H}}(t) \coloneqq \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{H}}(t) = e^{i\hat{H}t}i[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{r}}]e^{-i\hat{H}t} \tag{0.3}$$

$$\tag{0.4}$$

より Schrödinger 描像での速度演算子は

$$\hat{\boldsymbol{v}} \coloneqq e^{-i\hat{H}t}\hat{\boldsymbol{v}}_{H}(t)e^{i\hat{H}t} \tag{0.5}$$

$$= i[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{r}}] \tag{0.6}$$

とすればよい。どう「よいか」というと、たとえば以下の式が成り立つことをもってそう言っている：

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{r}}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{v}}|\psi(t)\rangle \tag{0.7}$$

$$\tag{0.8}$$

これがなりたつことは、Schrödinger 描像と Heisenberg 描像の「等価性」から直ちに従う：

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{r}}|\psi(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi(0)|\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{H}}(t)|\psi(0)\rangle \tag{0.9}$$

$$= \langle\psi(0)|\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{H}}(t)|\psi(0)\rangle \tag{0.10}$$

$$= \langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{v}}|\psi(t)\rangle \tag{0.11}$$

■