Appunti di FIsica 1 inerenti al corso 2021/22

Fisica

Politecnico di Torino (POLITO)

45 pag.

DOMIZIO MATTIA

APPUNTI DI FISICA 1

1. METROLOGIA ("LA MISURA")

La "FISICA" studia i fenomeni naturali, ovvero gli eventi quantificabili attraverso delle grandezze, cercando di stabilire le "leggi" (ovvero le relazioni tra le varie grandezze) per descrivere la realtà; per fare ciò applica il "metodo scientifico" (fenomeno → ipotesi → esperimento → tesi [legge fisica] o altrimenti riformulazione dell'ipotesi). Ci sono 2 tipi di MISURE:

- Misura diretta = confronto diretto della proprietà fisica con un campione dell'unità di misura scelta;
- Misura indiretta = misura di grandezze note, messe in relazione quantitativa per trovare quella ignota.

Definizione operativa (necessaria a definire numericamente una grandezza) → è completa se sono definiti:

- il "criterio di confronto" → stabilisco se due grandezze della stessa specie sono uguali;
- il "criterio di somma" → stabilisco se grandezza è somma di altre 2 grandezze della stessa specie;
- "scelta dell'unità di misura standard" per la grandezza.

Per scegliere l'unità di misura, è stato istituito il "Sistema MKS", poi detto MKSΩ, MKSA ed oggi chiamato "Sistema Internazionale" [S.I.], contenente le 7 grandezze fisiche "fondamentali":

DIMENSIONE	SIMBOLO	UNITÁ DI MISURA (S.I.)	SIMBOLO UNITÁ di MISURA
Lunghezza	L	metro	m
Massa	M (m)	chilogrammo	kg
Tempo	T (t)	secondo	s
Intensità di corrente elettrica	I	ampère	A
Temperatura termodinamica (assoluta)	Θ	kelvin	K
Quantità di materia	N (n)	mole	mol
Intensità luminosa	J	candela	cd

- Metro = spazio percorso dalla luce nel vuoto in $\frac{1}{3\times 10^8}[s]$
- Secondo = 9×10^9 periodi della radiazione legata alla transizione tra i 2 livelli del Cesio137
- Chilogrammo = massa di un cilindro di platino/iridio di diametro e altezza pari a 0,039 m
- Kelvin = $\frac{1}{273{,}16}$ della temperatura del punto triplo dell'acqua (non è -273,15 °C, ovvero lo zero assoluto [0 K], per la variazione del diagramma di stato dell'acqua rispetto agli altri)
- Mole = quantità di atomi (o molecole) = al n° di atomi contenuti in 12 [g] di Carbonio12
- Ampère = misura indiretta della forza di Lorentz (forza tra due fili attraversati da corrente distanti 1 metro) → quando passa 1 [A] di corrente, si genera una forza pari a $2\times 10^{-7}[N]$

Dal prodotto/rapporto delle grandezze fisiche fondamentali, possiamo ottenere le grandezze fisiche "derivate":

- Velocità → $[v]=\frac{L}{T}=\left[\frac{m}{s}\right]$
- Accelerazione → $[a]=\frac{[v]}{T}=\frac{L}{T^2}=\left[\frac{m}{s^2}\right]$

- Forza → $[F]=M\cdot[a]=M\cdot\frac{L}{T^2}=\left[\frac{kg\cdot m}{s^2}\right]=[N]$
- Torsione → $[\tau]=[F]\cdot L=[N\cdot m]$

Nel S.I. vengono anche definiti i prefissi e i suffissi da aggiungere alle unità di misura per identificare i "multipli" e i "sottomultipli":

Prefisso	Simbolo	Valore	Valore in notazione scientifica
Yotta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000	10^{24}
Zetta	Z	1 000 000 000 000 000 000 000	10^{21}
Esa, exa	E	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
Peta	P	1 000 000 000 000 000	10^{15}
Tera	T	1 000 000 000 000	10^{12}
Giga	G	1 000 000 000	10^{9}
Mega	M	1 000 000	10^{6}
Kilo	K	1 000	10^{3}
Etto	h	100	10^{2}
Deca	da	10	10^{1}
Unità		1	10^{0}
Deci	d	1/10	10^{-1}
Centi	c	1/100	10^{-2}
Milli	m	1/1 000	10^{-3}
Micro	μ	1/1 000 000	10^{-6}
Nano	n	1/1 000 000 000	10^{-9}
Pico	P	1/1 000 000 000 000	10^{-12}
Femto	f	1/1 000 000 000 000 000	10^{-15}
Atto	a	1/1 000 000 000 000 000 000	10^{-18}
Zepto	z	1/1 000 000 000 000 000 000 000	10^{-21}
Yocto	y	1/1 000 000 000 000 000 000 000 000	10^{-24}

Per
controllare se l'equazione fisica è sbagliata o se forse è giusta (in quanto non posso controllare i valori numerici ma solo le unità di misura), posso effettuare l'ANALISI DIMENSIONALE → esempio:

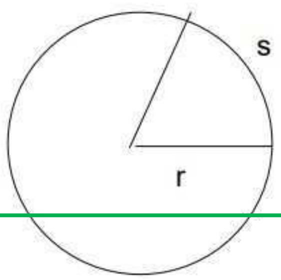
$[F]=m\cdot[a]=[kg\cdot m\cdot s^{-2}]=[N]$ → Equazione verificata perché il Newton è l'unità di misura della forza!

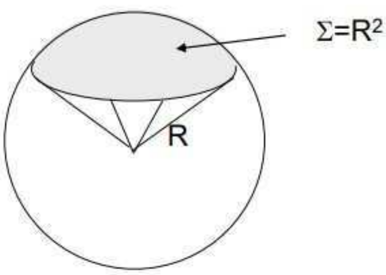
⚠Quando si sostituiscono i valori numerici nelle equazioni fisiche, è opportuno ricordarsi di riportare l'unità di misura; le unità di misura richieste sono quelle del S.I. (né multipli né sottomultipli → usare la notazione scientifica per riportare i valori nella corretta unità di misura).

⚠Oltre a convertire le unità di misura in quelle del S.I., è opportuno cercare di sostituire i valori numerici solo all'ultimo passaggio (lavorare prima con i simboli e solo alla fine con i valori numerici)!

⚠In fisica inoltre parliamo anche di ANGOLI:

- PIANI = regione di spazio delimitata da 2 segmenti con un'origine in comune; misurato in "radianti" (non è una vera e propria unità di misura, infatti l'angolo è un numero puro) → $\theta=\frac{s}{r}=\frac{arco}{raggio}$
- SOLIDI = regione di spazio delimitata da un cono; misurato in "steradiante" (non è una vera e propria unità di misura, numero puro) → $\Omega=\frac{\Sigma}{R^2}=\frac{Area}{raggio^2}$





2. LE INCERTEZZE (ERRORI DI MISURA)

Ci sono 2 tipi di INCERTEZZE SPERIMENTALI:

- Incertezze di tipo A = "errori casuali" (o statistici) → valutabili statisticamente in quanto non sono risolvibili; possono pendere sia in positivo che in negativo $[-x \leftarrow \bar{x} \rightarrow +x]$. Una misura affetta da piccoli errori casuali è detta "precisa"
- Incertezze di tipo B = "errori sistematici" (o accidentali) → non valutabili statisticamente; sono individuabili (pendono solo in una direzione $[-x \leftarrow \bar{x}\, oppure\, \bar{x} \rightarrow +x]$) ed eliminabili, in quanto sono generati da un fenomeno che posso raggirare (esempio: difetto dello strumento). Una misura con piccoli errori sistematici è detta "accurata"

⚠A volte le misurazioni possono dare risultati tutti uguali tra loro e ciò è un "errore strumentale", ovvero dovuto alla poca "sensibilità" dello strumento (oppure alla "risoluzione", ovvero la più piccola misurazione effettuabile dallo strumento).

Per rappresentare una grandezza fisica, si usa convenzionalmente la scrittura "miglior stima ± incertezza"; in questa scrittura, le cifre significative della stima devono essere uguali a quelle dell'incertezza (e l'incertezza dovrebbe essere generalmente arrotondata a 2 c.s.). Con N = numero di misurazioni della grandezza:

- Miglior stima = "valor medio":
  $$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$
- Incertezza:
  - Se N è sufficientemente grande → "incertezza media":

$$\delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

  - Se N è piccolo → "incertezza massima":

$$\delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

⚠Dunque, il risultato è esprimibile come $\bar{x} \pm \delta x$.

Se 2 misure della stessa grandezza sono diverse, abbiamo una "DISCREPANZA", che può essere:

- "non significativa" se la discrepanza è minore dell'incertezza delle grandezze (misure "consistenti"):
  $$\begin{cases} (42 \pm 8)\,\Omega \\ (40 \pm 5)\,\Omega \end{cases} \rightarrow |42 - 40| = 2 < 5$$
- "significativa" se la discrepanza è maggiore dell'incertezza delle grandezze (misure "non consistenti"):
  $$\begin{cases} (42 \pm 8)\,\Omega \\ (32 \pm 5)\,\Omega \end{cases} \rightarrow |42 - 32| = 10 > 5$$

ERRORE RELATIVO = indicazione approssimata della qualità di una misura:

- Errore relativo $\geq 10\%$ → misura "rozza"
- Errore relativo ¿ 10% → misura "accettabile"

$$\varepsilon_r (errore\ relativo) = \frac{\delta x}{|x_{best}|} = \frac{\delta x}{|\bar{x}|} \rightarrow \varepsilon_{\%} (errore\ percentuale) = \frac{\delta x}{|\bar{x}|} \cdot 100$$

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE → approssimativamente:

- se le grandezze misurate sono sommate o sottratte, le incertezze (errori, Δx) si sommano;
- se le grandezze misurate sono moltiplicate o divise, gli errori relativi (ε_r) si sommano;

Ma se vogliamo entrare più nel dettaglio e avere delle espressioni più corrette e dettagliate (in blu quelle per gli errori sistematici, in rosso quelle per gli errori casuali):

- somma e differenza:
$$\delta q \begin{cases} \approx \delta a+\delta b+\cdots+\delta z \\ \text{¿}\sqrt{(\delta a)^2+(\delta b)^2+\ldots+(\delta z)^2} \end{cases}$$
- prodotto e quoziente:
$$\frac{\delta q}{|q|} \begin{cases} \approx \frac{\delta a}{|a|}+\frac{\delta b}{|b|}+\cdots+\frac{\delta z}{|z|} \\ \text{¿}\sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\delta b}{b}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\delta z}{z}\right)^2} \end{cases}$$
- prodotto tra grandezza e valore noto:
$\delta q=|k|\delta x$
- se q è una funzione di 1 variabile $[q(x)]$:
$$\delta q=\left|\frac{dq}{dx}\right|\delta x \rightarrow \frac{dq}{dx}=derivata\, della\, funzione\, q(x)\, rispetto\, ad\, x$$
- FORMULA GENERALE → se q è una funzione di più variabili, allora:
$$\delta q=\begin{cases} \left|\frac{\partial q}{\partial a}\delta a\right|+\left|\frac{\partial q}{\partial b}\delta b\right|+\ldots+\left|\frac{\partial q}{\partial z}\delta z\right| \\ \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial a}\delta a\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial b}\delta b\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial q}{\partial z}\delta z\right)^2} \end{cases} \rightarrow la\, dicitura\, \frac{\partial q}{\partial a}\, indica\, \text{derivata parziale}$$
- <u>CASI PARTICOLARI:</u>
  - Espressioni monomie, del tipo $q=a x^{\alpha} w^{\beta} z^{\gamma}$:
$$\frac{\delta q}{q}=\begin{cases} \left|\alpha\frac{\delta x}{x}\right|+\left|\beta\frac{\delta w}{w}\right|+\left|\gamma\frac{\delta z}{z}\right| \\ \sqrt{\left(\alpha\frac{\delta x}{x}\right)^2+\left(\beta\frac{\delta w}{w}\right)^2+\left(\gamma\frac{\delta z}{z}\right)^2} \end{cases}$$
  - Espressione monomie contenenti come fattore una funzione, del tipo $q=a x^{\alpha} w^{\beta} z^{\gamma}[f(t)]^{\rho}$:

$$\frac{\delta q}{q}=\sqrt{\left(\alpha\frac{\delta x}{x}\right)^2+\left(\beta\frac{\delta w}{w}\right)^2+\left(\gamma\frac{\delta z}{z}\right)^2+\left(\rho\frac{\delta f(t)}{f(t)}\right)^2}$$

3. MECCANICA (moto dei corpi)

3.1. CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

PUNTO MATERIALE = approssimazione di un corpo le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alla distanza dell'osservatore.

CINEMATICA = descrizione del moto senza indagarsi sulle sue cause; è fondamentale che ci sia un "osservatore" (che può coincidere con l'origine del nostro sistema di riferimento). Infatti, nella fisica è essenziale avere un SISTEMA DI RIFERIMENTO (S.R.) composto da:

- OSSERVATORE
- STRUMENTO di MISURA SPAZIO [spazio uniforme (invarianza alla traslazione) e isotropo (invarianza alla rotazione)]
- STRUMENTO di MISURA TEMPO

⚠Le misure dello spazio e del tempo devono essere effettuate in relazione alle unità di misura del S.I.; inoltre spazio e tempo sono assoluti in fisica classica.

- SISTEMA DI COORDINATE (scegliere il più opportuno a seconda del problema che abbiamo di fronte):
    - CARTESIANE (assi ortogonali) [1 Dimensione, 2 Dimensioni o 3 Dimensioni a seconda che il moto sia uni-/bi-/tri-dimensionale;
    - POLARI (2D);
    - SFERICHE (3D);
    - CILINDRICHE = POLARI + CARTESIANE (3D);

⚠Useremo principalmente un sistema bidimensionale in Meccanica!

Come già sappiamo, ci sono 2 tipi di grandezze: SCALARI (numero) e VETTORIALI (ente geometrico→ segmento orientato); le vettoriali sono dotate di:

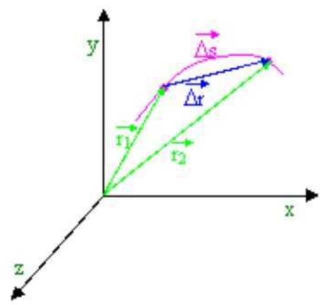
- Modulo → $\|\vec{r}\|, |\vec{r}|$ (useremo in fisica le doppie sbarrette per il modulo dei vettori)
- Direzione
- Verso
- Punto di applicazione (origine del vettore, ovvero dove viene applicato il vettore)

Operazioni con i vettori:

- Somma di vettori (regola del parallelogramma) → $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$
- Differenza di vettori (somma con l'opposto) → $\vec{w}=\vec{u}+(-\vec{v})$
- Prodotto scalare (che restituisce uno scalare): proiezione di un vettore sull'altro → $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$
- Prodotto vettoriale (che mi restituisce un vettore): i 2 vettori individuano un piano → $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\times\vec{v}$ con $\vec{w}\perp\vec{u}, \vec{w}\perp\vec{v}$ e $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$; il verso di $\vec{w}$ si ricava con la regola della mano destra (con le 3 dita della mano destra rappresento i vettori $\vec{w}=pollice, \vec{u}=medio, \vec{v}=indice$)

Indicando con $\vec{r}$ la traiettoria del punto materiale, il nostro obiettivo in cinematica è trovare l'EQUAZIONE DEL MOTO = EQUAZIONE TRAIETTORIA (solo coordinate spaziali) + LEGGE ORARIA (variazione nel tempo) = $\vec{r}(t)$

VARIAZIONE DELLA POSIZIONE DEL PUNTO MATERIALE ("spostamento"):



$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\ con \begin{cases}\vec{r}(t+\Delta t)=posizione\ finale\\ \vec{r}(t)=posizione\ iniziale\end{cases}$$

Per calcolare quanto è veloce lo spostamento, possiamo trovare la VELOCITÀ, che può essere:

- VELOCITÀ MEDIA:
$$\langle\vec{v}\rangle=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$
- VELOCITÀ ISTANTANEA:
$$\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}=\dot{r}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\equiv\vec{v}(t)$$

⚠Quello che vediamo nella formula è il limite di un rapporto incrementale, definizione della derivata prima; dunque, quando la variazione di tempo (Δt) tende a 0, tende a 0 anche la variazione di posizione del punto materiale ($\Delta\vec{r}$) e otteniamo delle "VARIAZIONI INFINITESIME" (o differenziali).

Dalla velocità, possiamo ricavarci l'ACCELERAZIONE ISTANTANEA, ovvero la rapidità con cui varia la velocità:

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Per passare invece da accelerazione a velocità e da velocità a spostamento, facciamo l'opposto della derivata, ovvero integriamo rispetto al tempo:

$$\vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t')\,dt' \rightarrow \vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t')\,dt'$$

Se vogliamo esprimere queste grandezze secondo delle COORDINATE INTRINSECHE (invarianti rispetto al S.R.) possiamo esprimerle attraverso:

- ASCISSA CURVILINEA $[s(t)]$ = distanza percorsa lungo la traiettoria; a differenza della $\Delta\vec{r}$ (che graficamente è la corda della traiettoria, ovvero la distanza tra posizione finale ed iniziale della posizione del punto materiale), la $\Delta s(t)$ [VARIAZIONE DI ASCISSA CURVILINEA] è il pezzo di traiettoria tra posizione iniziale e finale del punto materiale;
- VERSORE TANGENTE [$\vec{\tau}$] = versore ($\|\vec{\tau}\|=1$) tangente alla traiettoria con verso = verso del moto;

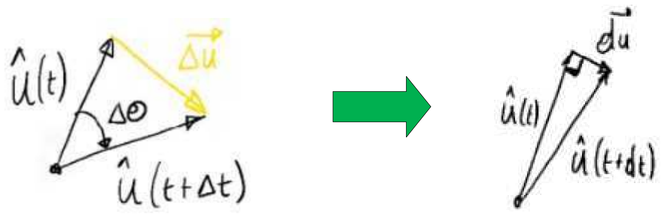
Con $\Delta t \rightarrow 0$, $d\vec{r}=ds(t)\vec{\tau}$ e quindi:

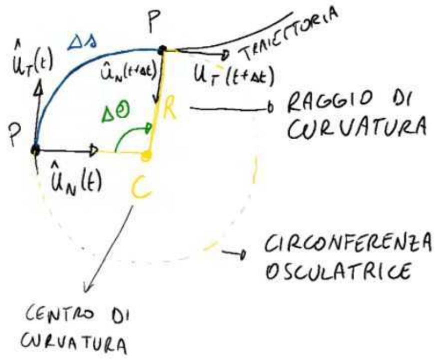
$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{ds(t)}{dt}\vec{\tau}$$

Da qui, posso ricavarmi anche l'accelerazione, derivando la nuova formula della velocità rispetto al tempo:

$$\vec{a}(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds(t)}{dt}\vec{\tau}\right)=\frac{d^2s(t)}{dt^2}\vec{\tau}+\frac{ds(t)}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Troviamo nella formula l'accelerazione tangenziale + la velocità scalare per la derivata del versore $\vec{\tau}$; per quanto riguarda il versore $\vec{\tau}$, esso può cambiare direzione (ovvero subisce una variazione angolare $\Delta\theta$ nel tempo Δt) ma il suo modulo rimane sempre 1. Indicando con $\Delta\vec{\tau}$ la distanza delle punte dei versori $\vec{\tau}(t)$ e $\vec{\tau}(t+\Delta t)$ traslati e applicati nello stesso punto, per un $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta\vec{\tau} \rightarrow d\vec{\tau}$ e $\Delta\theta \rightarrow d\theta$:





Definendo un versore $\vec{n}$ (versore "normale" ovvero perpendicolare a $\vec{\tau}$), vediamo la relazione $d\vec{\tau}\approx d\theta\,\vec{n}$; quindi:

$$\vec{a}(t)=a_T\vec{\tau}+v(t)\frac{d\vec{\tau}}{dt}=a_T\vec{\tau}+v(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{n}$$

In formula ora troviamo anche una variazione istantanea dell'ampiezza dell'angolo percorso da $\vec{\tau}$, dunque una velocità angolare; dalla definizione di angolo piano, sappiamo che $\Delta\theta=\frac{\Delta s}{R} \rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{1}{R}$ e quindi:

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{R}\frac{ds(t)}{dt}=\frac{v(t)}{R} \rightarrow \vec{a}(t)=\frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2(t)}{R}\vec{n}=a_T\vec{\tau}+a_N\vec{n}$$

Quindi l'accelerazione è ACCELERAZIONE TANGENZIALE (responsabile della variazione del modulo della velocità $v(t)$) + ACCELERAZIONE NORMALE (o centripeta, responsabile della variazione della direzione di $v(t)$).

COORDINATE CARTESIANE: nel sistema cartesiano i versori dei 3 assi hanno la relazione $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; infatti, in un sistema di riferimento cartesiano 3D, la distanza di un punto P dall'origine O, è esprimibile con:

$$(P-O)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}=\vec{r}(t)[\,posizione\,del\,punto\,materiale\,] \to \|\vec{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Dunque velocità e accelerazione sono esprimibili con:

$$\vec{v}(t)=\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dz(t)}{dt}\vec{k}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k} \to \|\vec{v}\|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}=¿\,a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \to \|\vec{a}\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

⚠Noi definiamo il sistema cartesiano come "sistema inerziale fisso"!

COORDINATE POLARI (2D):

- COORDINATA RADIALE = r → modulo della posizione;
- COORDINATA ANGOLARE (ANOMALIA) = θ → angolo tra orizzontale e $\vec{r}$;

⚠I versori del sistema polare non sono fissi e sono:

- $\vec{\lambda}$ → versore associato a r (radiale);
- $\vec{\mu}$ → versore associato a θ (ortogonale);

In questo sistema di riferimento:

$$\vec{r}(t)=r(t)\vec{\lambda}(t)$$

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{dr(t)\vec{\lambda}(t)}{dt}=\frac{dr(t)}{dt}\vec{\lambda}+r\frac{d\vec{\lambda}}{dt}=\frac{dr(t)}{dt}\vec{\lambda}+r\frac{d\vec{\theta}}{dt}\vec{\mu}=\vec{v}_r+\vec{v}_\theta$$

⚠Dunque la velocità è composta da una VELOCITÁ RADIALE e da una VELOCITÁ TRASVERSA.

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d\vec{v}_r(t)}{dt}+\frac{d\vec{v}_\theta(t)}{dt}=\frac{d(\dot{r}\vec{\lambda})}{dt}+\frac{d(r\dot{\theta}\vec{\mu})}{dt}=¿$$

$$¿\left[\frac{d^2r(t)}{dt^2}-r(t)\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2\right]\vec{\lambda}+\left[2\frac{dr(t)}{dt}\frac{d\theta(t)}{dt}+r(t)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\right]\vec{\mu}=\vec{a}_\lambda+\vec{a}_\mu$$

⚠Dunque la velocità è composta da un'ACCELERAZIONE RADIALE e da un'ACCELERAZIONE TRASVERSA.

MOTO RETTILINEO [MR] = moto del punto materiale in 1 dimensione (1D); abbiamo infatti 1 solo asse e 1 solo versore; quindi omettiamo il versore e lavoriamo con degli scalari [$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}$]. Abbiamo 4 casi:

1) $\begin{cases} x(t)=x(t_0)=x_0\,costante \\ v=0 \\ a=0 \end{cases}$ → STATO DI QUIETE

2) $\begin{cases} x(t)\neq costante \to x(t)=x_0+v_{0x}(t-t_0) \\ v=costante \to v(t)=v_{0x} \\ a=0 \end{cases}$ → MOTO RETTILINEO UNIFORME [MRU]

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO [MRUA]

3) $\begin{cases} x(t) \neq costante \rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_{0x}(t - t_0)^2 \\ v(t) \neq costante \rightarrow v(t) = v_{0x} + a_{0x}(t - t_0) \\ a = costante \rightarrow a(t) = a_{0x} \end{cases} \rightarrow$

4) $\begin{cases} x(t) \neq costante \\ v(t) \neq costante \\ a(t) \neq costante \end{cases} \rightarrow$ MOTO VARIO

CADUTA DEL GRAVE [MRUA] = caduta di un corpo a causa della gravità con accelerazione di gravità della Terra $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s}\right]$; la forza di gravità è un'interazione fondamentale (ovvero a distanza). Ci sono 3 casi:

1) VELOCITÁ INIZIALE NULLA [$v_0 = 0$]:

$$\begin{cases} t_0 = 0\,s \\ v(t_0) = v_0 = 0\,m\,s^{-1} [corpo\ fermo] \\ z(t_0) = h \\ \vec{a}(t) = \vec{g} = -g\,\vec{k} [\vec{k} = versore\ asse\ z] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')\,dt' = -¿\,\vec{k} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t \vec{v}(t')\,dt' = h - \frac{g t^2}{2} \\ t^{¿} = \sqrt{\frac{2h}{g}} [istante \in cui\ arriva\ al\ suolo, dove\ z(t^{¿}) = 0] \\ \|\vec{v}(t^{¿})\| = v(t^{¿}) = \sqrt{2gh} [\vec{v}\ con\ cui\ arriva\ al\ suolo] \end{cases}$$

2) LANCIO VERSO L'ALTO [$\vec{v}_0 = v_0 \vec{k}$]:

$$\begin{cases} t_0 = 0\,s \\ v(t_0) = v_0 \\ z(t_0) = h \\ \vec{a}(t) = \vec{g} = -g\,\vec{k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')\,dt' = (v_0 - ¿)\,\vec{k} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t \vec{v}(t')\,dt' = h + v_0 t - \frac{g t^2}{2} \\ t^{¿} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g} [istante \in cui\ arriva\ al\ suolo] \\ t_{MAX} = \frac{v_0}{g} \rightarrow z_{MAX} = h + \frac{v_0^2}{2g} [altezza\ massima\ dopo\ il\ lancio, dove\ v(t_{MAX}) = 0] \end{cases}$$

3) VELOCITÁ INIZIALE VERSO IL BASSO [$\vec{v}_0 = -v_0 \vec{k}$]:

$$\begin{cases} t_0 = 0\,s \\ v(t_0) = v_0 \\ z(t_0) = h \\ \vec{a}(t) = \vec{g} = -g\,\vec{k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t) = -\vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')\,dt' = (-v_0 - ¿)\,\vec{k} \\ z(t) = z_0 + \int_0^t \vec{v}(t')\,dt' = h - v_0 t - \frac{g t^2}{2} \\ t^{¿} = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g} \end{cases}$$

MOTO ARMONICO SEMPLICE:

$$x(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)\,con\begin{cases} A=ampiezza\rightarrow[A]=m \\ \sin\,oppure\,\cos=funzioni\,trascendenti \\ \omega_0=pulsazione\rightarrow[\omega]=s^{-1}(dipende\,dal\,sistema) \\ \varphi=fase\,iniziale\rightarrow[\varphi]\in radianti \end{cases}$$

In questo moto la velocità (derivata prima della posizione) è data da $v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\omega_0 A\cos(\omega_0 t+\varphi)$; mentre l'accelerazione è data da $a(t)=-\omega_0^2 x(t)=-\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t+\varphi)$. La velocità è in quadratura di fase rispetto alla posizione (dove $x=MAX\rightarrow v=0$ e dove $x=0\rightarrow v=MAX$); l'accelerazione è in opposizione di fase rispetto alla posizione (dove $x=MAX\rightarrow a=-MAX$ e dove $x=0\rightarrow a=0$).

Per il moto armonico semplice vale la legge: $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_0^2 x(t)=0$; se c'è un meno non ho un moto armonico.

Posso trovare:

- FASE INIZIALE $(con\,t=0)\rightarrow\frac{\omega_0 x(t)}{v(t)}=\tan(\omega_0 t+\varphi)\rightarrow\tan\varphi=\frac{\omega_0 x_0}{v_0}$
- AMPIEZZA INIZIALE $(con\,t=0)\rightarrow A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$

MOTO RETTILINEO SMORZATO ESPONENZIALMENTE [MOTO VARIO] = dovuto all'attrito viscoso:

$$a(t)=-kv(t)\,con\,[k]=s^{-1}$$

Perciò, in funzione del tempo:

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=-kv(t)\rightarrow\frac{1}{v}dv=-kdt\rightarrow\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v'}dv'=\int_{t_0}^{t}-kdt'\rightarrow v(t)=v_0e^{-k(t-t_0)}$$

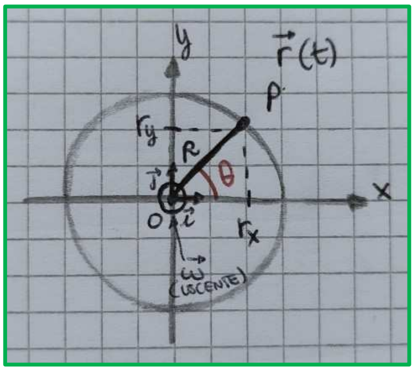
Mentre in funzione della posizione:

$$v(x)=v_0-k(x-x_0)\rightarrow a(t)=\frac{dx(t)}{dt}\frac{dv(x(t))}{dx}$$

Se invece l'accelerazione è diretta verso l'alto e abbiamo un'accelerazione di gravita $\vec{g}$ verso il basso:

$$a(t)=g-kv(t)\rightarrow v(t)=\frac{g}{k}(1-e^{-kt})\rightarrow v=\frac{g}{k}=velocità\,limite\,(asintoto)$$

MOTO CIRCOLARE [MC] = nel moto circolare, la posizione ha sempre modulo costante in quanto la traiettoria è sempre circolare $\rightarrow\|\vec{r}\|=R=raggio\,della\,circonferenza$. Possiamo esprimere il MC in:



- COORDINATE CARTESIANE: usiamo le proiezioni della posizione sui 2 assi (attraverso il prodotto scalare):
  $\vec{r}(t)=r_x\vec{i}+r_y\vec{j}=(R\cos\theta(t))\vec{i}+(R\sin\theta(t))\vec{j}$

  Dato che R è costante, varia solo θ nel tempo:

- LEGGE ORARIA:

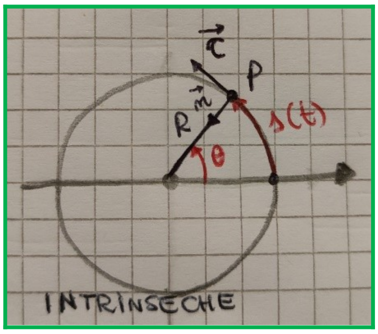
$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) \end{cases}$$

- EQUAZIONE TRAIETTORIA (elimino la variabile tempo dalla legge oraria):

$$x^2 + y^2 = R^2\left[\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta(t)\right] \rightarrow \textit{Dato che} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

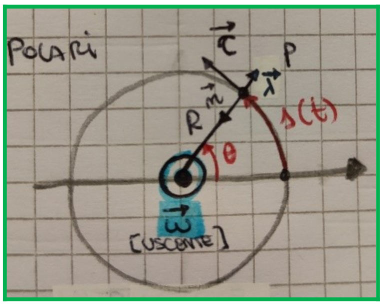
Dato che abbiamo a che fare con un $\theta(t)$, avremo:

- $\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \rightarrow$ VELOCITÁ ANGOLARE $\rightarrow [\omega] = s^{-1}$
- $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{d\omega(t)}{dt} = \alpha(t) \rightarrow$ ACCELERAZIONE ANGOLARE $\rightarrow [\alpha] = s^{-2}$



- COORDINATE INTRINSECHE:

$$\begin{cases} \theta(t) = \frac{s(t)}{R}\,[\textit{angolo piano}] \\ \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{v(t)}{R} \\ \vec{v}(t) = R\|\vec{\omega}\|(t)\,\vec{\tau} \\ \alpha(t) = \frac{a_T(t)}{R}\,[\textit{con}\; a_T = \textit{accelerazione tangenziale}] \\ \vec{a}(t) = \vec{a_T} + \vec{a_N} = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} = R\alpha(t)\vec{\tau} + R\omega^2(t)\vec{n} \end{cases}$$



- COORDINATE POLARI: nelle rotazioni del punto materiale, vale la legge $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$; $\vec{\omega}$ (velocità angolare) è un vettore centrato nel centro di rotazione ed è:
  - Uscente se la rotazione è antioraria ("positiva") $\rightarrow \odot$;
  - Entrante se la rotazione è oraria ("negativa") $\rightarrow \otimes$;

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{\lambda} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\mu} = R\omega(t)\vec{\mu} \\ \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = R\alpha\vec{\tau} + R\omega^2\vec{n} \end{cases}$$

Ci sono 2 TIPI di moto circolare:

- **MOTO CIRCOLARE UNIFORME** [MCU]:

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \omega=costante \\ \theta(t)=\theta(t_0)+\int_0^t \omega(t')\,dt'=\theta_0+\omega_0 t \\ \begin{cases} x(t)=R\cos\theta(t)=R\cos(\omega_0 t+\theta_0) \\ y(t)=R\sin\theta(t)=R\sin(\omega_0 t+\theta_0) \end{cases} \\ T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi}{\omega_0}[Periodo=tempo\ per\ percorrere\ la\ circonferenza]\ con\ [T]=s \\ f=\nu=\frac{1}{T}[Frequenza=quanti\ giri\ al\ secondo]\ con\ [f]=s^{-1}=Hz \end{cases}$$

⚠Nel MCU, la velocità angolare coincide con la pulsazione del moto armonico semplice: infatti il MCU è dato dalla <u>composizione di 2 moti armonici</u> (con lo stesso ω, lo stesso θ, in quadratura di fase (ovvero 1 sin e 1 cos) e sui 2 assi ortogonali).

- **MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO** [MCUA]:

$$\begin{cases} \alpha=costante \\ \omega(t)=\omega_0+\int_0^t \alpha(t')\,dt'=\omega_0+\alpha t \\ \theta(t)=\theta(t_0)+\int_0^t \omega(t')\,dt'=\theta_0+\omega_0 t+\frac{\alpha t^2}{2} \end{cases}$$

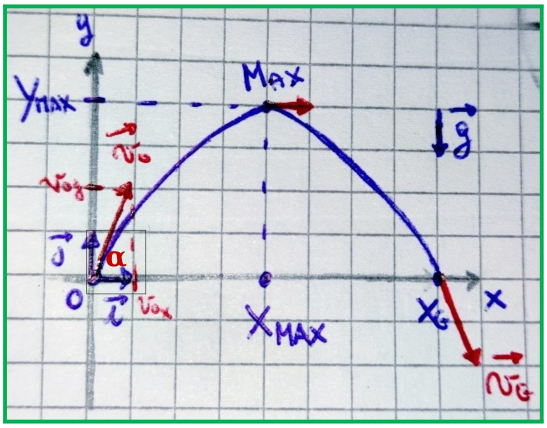
⚠Dato un qualsiasi vettore $\vec{u}$ (e in particolare utile nei versori), se il vettore ruota mantenendo il suo modulo costante si può usare la "FORMULA DI POISSON", ovvero:

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{u}$$

Nel caso precedente $\vec{v}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}$, otteniamo:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}=\|\vec{\omega}\|\|\vec{r}\|\sin\frac{\pi}{2}=\frac{d\theta(t)}{dt}\|\vec{r}\|$$

<u>MOTO PARABOLICO</u>:



$$\begin{cases} \vec{a}=\vec{g}=-g\vec{J} \\ \vec{v_0}=v_{0x}\vec{i}+v_{0y}\vec{j}=v_0\cos\alpha\,\vec{i}+v_0\sin\alpha\,\vec{j} \\ v_0=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2} \\ v(t)=v_0+\int_0^t \vec{a}(t')\,dt'=v_0\cos\alpha\,\vec{i}+(v_0\sin\alpha-¿)\vec{j} \\ Moto\ uniforme\ su\ x,\ Moto\ uniformemente\ accelerato\ su\ y \end{cases}$$

- LEGGE ORARIA:

$$\begin{cases} x(t)=v_0\cos\alpha\, t \\ y(t)=v_0\sin\alpha\, t-\frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

- EQUAZIONE TRAIETTORIA:

$$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}\rightarrow y=x\tan(\alpha)-\frac{g x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

Quando raggiungo l'altezza massima (MAX → velocità solo componente orizzontale):

$$\begin{cases} v_0\sin\alpha-g\,t_{MAX}=0\rightarrow t_{MAX}=\dfrac{v_0\sin\alpha}{g} \\ x_{MAX}=v_0\cos\alpha\,t_{MAX}=\dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} \end{cases}$$

Quando invece il punto materiale arriva al suolo (GITTATA → $y(t_G)=0$):

$$\begin{cases} t_G=2t_{MAX}=2\dfrac{v_0\sin\alpha}{g}\,[perchè\,la\,parabola\,è\,simmetrica\,rispetto\,alla\,x_{MAX}] \\ x_G=2x_{MAX}=2\dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} \\ \vec{v_G}=-\vec{v_0}\,con\,\|\vec{v_G}\|=\|\vec{v_0}\|\,[sempre\,per\,la\,simmetria] \end{cases}$$

3.2. DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Studiare le cause del moto (le forze, ovvero l'interazione tra almeno 2 corpi); le forze sono quantità vettoriali ($\vec{F}$) che si dividono in forze "a contatto" (repulsioni elettronica tra 2 corpi) e "a distanza" (o fondamentali, come la gravità). Ci sono 3 principi della dinamica (o LEGGI DI NEWTON):

1) **PRINCIPIO DI INERZIA** [1^ Legge di Newton]:

$$\Sigma_i\vec{F}_i[RISULTANTE]=0\Leftrightarrow\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a}(t)=0\begin{cases} MRU\rightarrow se\,v_0\neq 0 \\ QUIETE\rightarrow se\,v_0=0 \end{cases}$$

2) **2^ LEGGE DI NEWTON**:

$$\Sigma_i\vec{F}_i=m\frac{d\vec{v}}{dt}\rightarrow\vec{a}(t)=\frac{\Sigma_i\vec{F}_i}{m}\rightarrow\begin{cases} [a]=ms^{-2} \\ [m]=kg \\ [F]=\dfrac{kg\,m}{s^{-2}}=N \end{cases}$$

Con m = massa inerziale, ovvero quanto il corpo resiste alla variazione del suo stato di inerzia; la m inerziale vedremo poi che coinciderà con quella gravitazionale (ovvero la già vista "massa").

- COORDINATE CARTESIANE:

$$\Sigma_i\vec{F}_i=m\vec{a}\rightarrow\begin{cases} \Sigma_i\vec{F}_i\cdot\vec{i}=F_x=m\vec{a}\cdot\vec{i}=ma_x \\ \Sigma_i\vec{F}_i\cdot\vec{j}=F_y=m\vec{a}\cdot\vec{j}=ma_y \\ \Sigma_i\vec{F}_i\cdot\vec{k}=F_z=m\vec{a}\cdot\vec{k}=ma_z \end{cases}\rightarrow\begin{cases} \Sigma_i\vec{F}_i=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k} \\ \vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \end{cases}\rightarrow\begin{cases} a_x=\dfrac{F_x}{m} \\ a_y=\dfrac{F_y}{m} \\ a_z=\dfrac{F_z}{m} \end{cases}$$

- COORDINATE INTRINSECHE:

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N} = \dfrac{d^2 s}{d t^2}\vec{\tau} + \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \vec{n}}{\rho} \\ \vec{F} = \vec{F_T} + \vec{F_N} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_T = \dfrac{d^2 s}{d t^2} = \dfrac{F_T}{m} \\ a_N = \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2}{p} = \dfrac{F_N}{m} \end{cases}$$

3) **PRINCIPIO DI AZIONE-REAZIONE** [3^ Legge di Newton]:

Hp: - 2 corpi (1, 2) interagiscono: $\overrightarrow{F_{1\rightarrow 2}}$, $\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}}$;

- spazio uniforme (invarianza per traslazione) e isotropo (invarianza per rotazione)

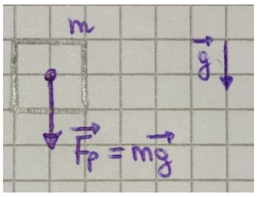
Th:

$$\overrightarrow{F_{1\rightarrow 2}} = -\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}} \rightarrow \begin{cases} ¿\,modulo \\ ¿\,direzione \\ verso\ opposto \\ stessa\ retta\ d'\ azione\,(punto\ di\ applicazione\ sulla\ stessa\ retta) \end{cases}$$

⚠Il punto materiale ha 3 gradi di libertà, mentre il corpo rigido (per cui bastano 2 punti materiali per descriverlo) ne ha 6 (3 per la traslazione e 3 per la rotazione). Inoltre se ho *n* gradi di libertà di un sistema, avrò *n* equazioni del sistema (all'esame molto probabilmente ne avremo solo 2 di componenti traslatorie). Inoltre indicheremo con 1^EQUAZIONE CARDINALE l'accelerazione scalare, mentre con 2^EQUAZIONE CARDINALE l'accelerazione angolare.

DIAGRAMMA DEL CORPO LIBERO (il quadrato rappresenta il punto materiale, in quanto usare un punto di dimensioni trascurabili è quasi impossibile dal punto di vista grafico):

1) CADUTA DEL GRAVE:



$$\vec{a} = \frac{\vec{F_p}}{m} = \frac{m\vec{g}}{m} = \vec{g}$$

2) SOLO REAZIONE VINCOLARE:

$$\Sigma_i \vec{F_i} = \vec{R} + \vec{F_p} \rightarrow \vec{R} = -\vec{F_p} \rightarrow \Sigma_i \vec{F_i} = 0\,[EQUILIBRIO] \rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{F_y}{m} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Se\ v_0 = 0 \rightarrow v(t) = 0\,[QUIETE] \\ Se\ v_0 \vec{i} \neq 0 \rightarrow \vec{v}(t) = v_0 \vec{i}\,[MRU] \end{cases}$$

3) ANCHE FORZA ORIZZONTALE:

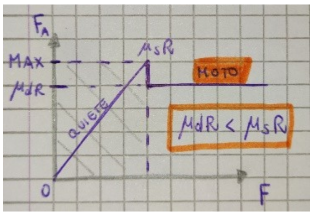
$$\Sigma_i \vec{F_i} = \vec{R} + \vec{F_p} + \vec{F} \neq 0 \rightarrow \begin{cases} m a_x = (\vec{R} + \vec{F_p} + \vec{F}) \cdot \vec{i} = F \rightarrow a_x = \dfrac{F}{m} \rightarrow \vec{v} = \vec{v_0} + a_x t \vec{i}\,[MUA] \\ m a_y = (\vec{R} + \vec{F_p} + \vec{F}) \cdot \vec{j} = 0 \rightarrow a_y = 0 \end{cases}$$

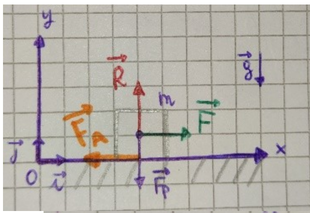
4) ANCHE FORZA DI ATTRITO → l'**ATTRITO RADENTE** (FORZA <u>RESISTENTE</u> [opposta a $\vec{v}$]) può essere:
   - STATICO: prima del moto, contro il "mettersi in moto";
   - DINAMICO: durante il moto.

   Per passare all'attrito dinamico (e dunque al movimento), bisogna prima vincere l'attrito statico, ovvero superare la soglia per cui $F_M \geq F_{As}^{Max}$ (ovvero la forza motrice abbia modulo maggiore o uguale alla forza massima di attrito statico). La forza di attrito statico non compie lavoro e dipende dalla forza motrice, ovvero il suo modulo (fino a che $F_M \leq F_{As}^{Max}$) è = a quello della forza motrice; la forza di attrito dinamico dipende invece dalla reazione vincolare (ovvero dalla risultante delle forze ortogonali cui è soggetto il punto materiale):

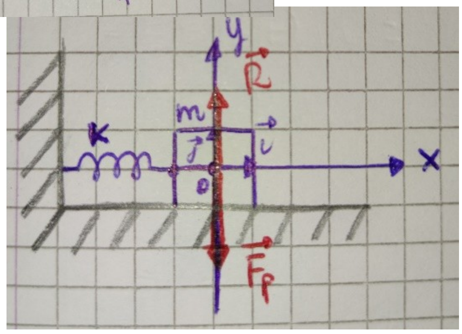
$$\begin{cases} F_{Ad} = \mu_d R \\ F_{As}^{Max} = \mu_s R \end{cases} \text{con } F_{Ad} < F_{As}^{Max} \rightarrow \begin{cases} \mu_d = \textit{coefficiente di attrito dinamico} \\ \mu_s = \textit{coefficiente di attrito statico} \end{cases} \rightarrow \textit{coefficienti adimensionali}$$

$$\Sigma_i \vec{F}_i = m\vec{a} = \vec{R} + \vec{F}_p + \vec{F} + \vec{F}_A \rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{F}{m} - \mu_d g \\ a_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v(t) = \left(\frac{F}{m} - \mu_d g\right) t \\ x(t) = \left(\frac{F}{m} - \mu_d g\right) \frac{t^2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$





5) FORZA ELASTICA → un oggetto è PLASTICO se tiene memoria della deformazione, ELASTICO se invece una volta deformato ritorna come prima; qui interviene la LEGGE DI HOOKE: se deformo di una certa quantità x, la forza di richiamo che esercita la molla è proporzionale ed opposta alla deformazione:



$$\vec{F}_E = -k\vec{\Delta x} \rightarrow \begin{cases} k = \textit{costante elastica} \\ \Delta x = \textit{deformazione} \\ \textit{segno meno} = \textit{opposta alla nostra deformazione} \end{cases}$$

⚠Conviene scegliere l'origine del sistema nella posizione del punto materiale con la molla a riposo!

$$\begin{cases} x : m a_x = -kx(t) \rightarrow a_x = \frac{-k}{m} x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = 0 \\ y : m a_y = R - mg = 0 \end{cases}$$

Dato che stiamo parlando di molla (moto armonico) $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, quindi:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = 0 \rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \rightarrow x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \, con \, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Da questa ci ricaviamo che:

$$x(0) = x_0 = A \sin\varphi \rightarrow v(0) = v_0 = \omega_0 A \cos\varphi$$

Con una perturbazione dal lato positivo ($\varphi = \frac{\pi}{2}$):

$$x_0 = A \rightarrow x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

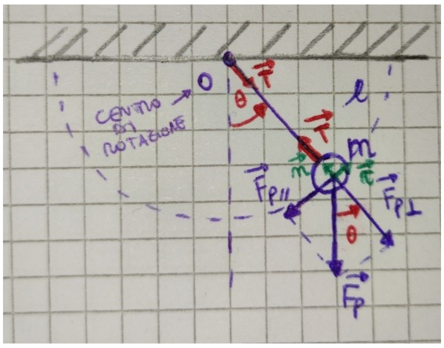
⚠La molla è ideale (no massa e no attrito)!

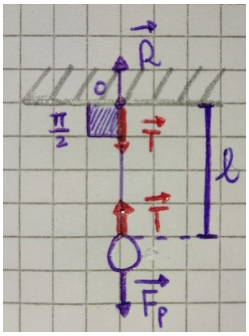
6) PENDOLO SEMPLICE → filo ideale inestensibile e di massa trascurabile; conviene scegliere come centro di rotazione (polo) un punto fisso:

$$\left\{F_{p_{\parallel}}=F_p\sin\theta \; F_{p_{\perp}}=F_p\cos\theta \rightarrow \vec{T}+\vec{F}_p=m\vec{a} \rightarrow \left\{\vec{\tau}: m\,a_T=-F_{p_{\parallel}}=-mg\sin\theta \; \vec{n}: m\,a_N=T-F_{p_{\perp}}=T-mg\cos\theta \rightarrow \begin{cases} a_T=R\alpha=l\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \\ a_N=\dfrac{v^2}{l} \end{cases}\right.\right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{g}{l}\sin\theta=0 \rightarrow con\,\theta<7°, \sin\theta \;\; \theta \rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{g}{l}\theta=0 \rightarrow Dato\,che\;\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}} \rightarrow \theta(t)=\theta_{MAX}\sin(\omega_0 t+\varphi) \\ m\dfrac{v^2}{l}=T-mg\cos\theta \rightarrow T=m\left(g\cos\theta+l\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right) \rightarrow Con\;\varphi=\dfrac{\pi}{2} \rightarrow \theta(t)=\theta_{MAX}\cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

Sempre per angoli piccoli ($\theta<7°$), vale la relazione $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\omega_0^2\theta_{MAX}^2 \rightarrow T_{MAX}$ si ha quando il pendolo passa per la posizione di riposo.

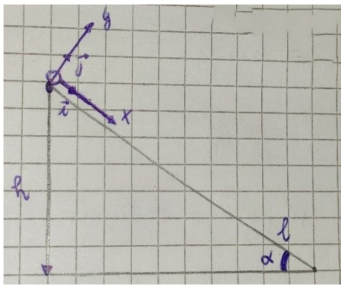


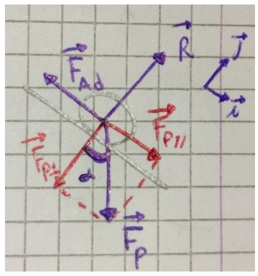


7) PIANO INCLINATO:

$$\begin{cases} \vec{i}:(\vec{R}+\vec{F}_P)\cdot\vec{i}=m\,a_x \rightarrow F_p\sin\alpha=m a_x \rightarrow a_x=g\sin\alpha \\ \vec{j}:(\vec{R}+\vec{F}_P)\cdot\vec{j}=m\,a_y=0 \rightarrow R=F_p\cos\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v(t)=v_0+a_x t=a_x t \\ x(t)=x_0+a_x\dfrac{t^2}{2}=a_x\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

Al fondo del piano:





$$\begin{cases} x(t^*)=l=g\sin\alpha\dfrac{(t^*)^2}{2} \\ t^*=\sqrt{\dfrac{2l}{g\sin\alpha}} \\ v(t^*)=\sqrt{2hg} \end{cases}$$

Se inseriamo anche l'attrito, dobbiamo prima imporre la condizione per cui il punto materiale si muova, ovvero $F_{p_{\parallel}}>F_{As}^{MAX} \rightarrow mg\sin\alpha>\mu_s mg\cos\alpha \rightarrow \tan\alpha>\mu_s$. Posta questa condizione:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha-\mu_d mg\cos\alpha=m\,a_x \rightarrow a_x=g(\sin\alpha-\mu_d\cos\alpha)>0\,(per\;la\,condizione\;imposta\;prima) \\ x(t)=a_x\dfrac{t^2}{2} \rightarrow x(t^*)=l=g(\sin\alpha-\mu_d\cos\alpha)\dfrac{(t^*)^2}{2} \\ t^*=\sqrt{\dfrac{2l}{g(\sin\alpha-\mu_d\cos\alpha)}} \\ v(t^*)=\sqrt{2hg-2lg\mu_d\cos\alpha} \end{cases}$$

QUANTITÁ DI MOTO (S.R.I):

$$\vec{p}=m\vec{v} \rightarrow \vec{p}(t)=m(t)\vec{v}(t) \rightarrow \begin{cases} Se\, m=costante \rightarrow \Sigma_i \vec{F}_i=\frac{d\vec{p}}{dt}(2^{legge}\, di\, Newton)=m\vec{a} \\ Se\, m\neq costante \rightarrow \Sigma_i \vec{F}_i=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec{v}+m\frac{d\vec{v}}{dt} \end{cases}$$

⚠Se Δt della forza è << del tempo di osservazione e $F\neq 0$, ho una "forza impulsiva", ovvero ho un "impulso della forza":

IMPULSO [$\vec{J}$] → TEOREMA DELL'IMPULSO:

$$\vec{J}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t')\,dt'=\int_{t_0}^{t}\frac{d\vec{p}}{dt'}\,dt'=\int_{t_0}^{t}d\vec{p}=\vec{p}(t)-\vec{p}(t_0)=\Delta\vec{p}$$

Per descrivere il moto rotatorio di un corpo (o sistema di punti) viene introdotto il MOMENTO ANGOLARE:

$$\begin{cases} Se\, il\, polo\, coincide\, con\, l'origine \rightarrow \vec{L}=\vec{r}\wedge\vec{p}=\vec{L}_0 \\ Se\, il\, polo\, non\, coincide\, con\, l'origine \rightarrow \begin{cases} \vec{L}_0=\vec{r}\wedge\vec{p} \\ \vec{L}_{0'}=\vec{r}'\wedge\vec{p}=\overrightarrow{OO'}\wedge\vec{p}+\vec{L}_0 \end{cases} \end{cases}$$

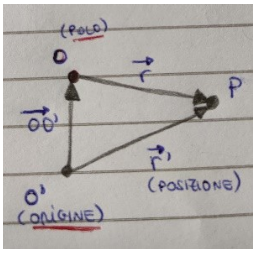
TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE:

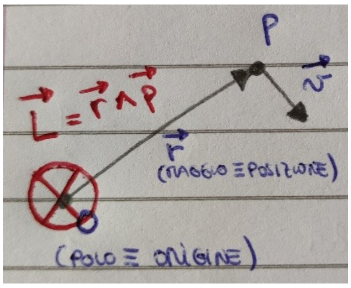
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt}=\frac{d(\vec{r}\wedge\vec{p})}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{p}+\vec{r}\wedge\frac{d\vec{p}}{dt}\rightarrow Se\, il\, polo\, è\, fisso \rightarrow =\vec{v}\wedge m\vec{v}+\vec{r}\wedge\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}_0\wedge\Sigma_i\vec{F}_i=\vec{M}_0$$

⚠$\vec{M}_0$ è il MOMENTO DELLA FORZA (rispetto al polo O) e per costruzione, sappiamo che se $\vec{F}$ ha una componente $\vec{F}_{\perp}\neq 0$ rispetto a $\vec{r}$, allora $\vec{M}_0\neq 0$ (cioè se $\vec{r}$/¿$\vec{F}$, $\vec{M}_0=0$)!

IMPULSO ANGOLARE → TEOREMA DELL'IMPULSO ANGOLARE:

$$\vec{r}\wedge\vec{J}=\vec{r}\wedge\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t')\,dt'=[con\, il\, polo\, fisso]=\int_{t_0}^{t}\vec{r}\wedge\vec{F}\,dt'=\int_{t_0}^{t}\vec{M}\,dt'=\int_{t_0}^{t}\frac{d\vec{L}}{dt'}\,dt'=\int_{t_0}^{t}d\vec{L}=\Delta\vec{L}$$



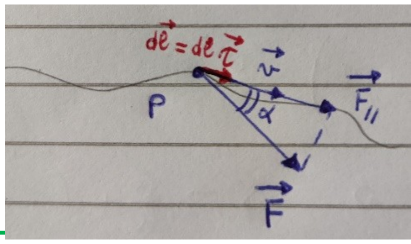


ENERGIA = ciò che viene scambiato durante l'interazione; 4 tipi:

- SCAMBIO → LAVORO [L] (+ CALORE in termodinamica);
- POSSESSO → ENERGIA CINETICA [T] (per mettere in moto un corpo);
- FORZE CONSERVATIVE (come le fondamentali e la forza elastica) → ENERGIA POTENZIALE [W]
- ENERGIA MECCANICA [E, E_M] = CINETICA + POTENZIALE

⚠Cinetica sempre ≥ 0.

LAVORO:



$$d\,L=\vec{F}\cdot d\vec{l}=Fdl\cos\alpha=F_{p¿l¿dl=\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{l}¿}$$

Sapendo che $\vec{a}=\vec{a_T}+\vec{a_N}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$, allora $\vec{F}=m\vec{a_T}+m\vec{a_N}\rightarrow m\vec{a_T}=m\frac{dv}{dt}\vec{\tau}=F_{p¿l¿}$; dunque, TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (con $m=costante$):

$$d\,L=m\frac{dv}{dt}dl\rightarrow L=\int\vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_A^B d\,L=\int_A^B m\frac{dv}{dt}dl\rightarrow Sapendo\,che\,\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dl}\frac{dl}{dt}=v\frac{dv}{dl}\rightarrow\int_A^B mv\frac{dv}{dl}dl=¿\int_A^B mv\,dv=\int_A^B m$$

Invece, TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (forma generale, m anche non costante):

$$d\,L=m\frac{dv}{dt}dl\rightarrow L=\int_A^B d\,L=\int_A^B\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{l}$$

Ora sapendo che:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\vec{p}(l(t))}{dt}=\frac{dl(t)}{dt}\frac{d\vec{p}}{dl}$$

Riscriviamo:

$$L=\int_A^B\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{l}=\int_A^B\frac{dl(t)}{dt}\frac{d\vec{p}}{dl}\cdot dl\vec{\tau}=\int_A^B\left(\frac{dl}{dt}\vec{\tau}\right)\cdot\left(\frac{d\vec{p}}{dl}dl\right)=\int_A^B\frac{\vec{p}}{m}\cdot d\vec{p}$$

Ora sapendo:

$$d\vec{p}\cdot\vec{p}=d\,p^2=d\vec{p}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot d\vec{p}=2\vec{p}\cdot d\vec{p}$$

Riscriviamo:

$$L=\int_A^B\frac{\vec{p}}{m}\cdot d\vec{p}=\int_A^B\frac{d\,p^2}{2m}=\frac{p_B^2}{2m}-\frac{p_A^2}{2m}=\Delta T\rightarrow T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}$$

⚠Chiamando Γ_1 una traiettoria e Γ_2 un'altra traiettoria con gli stessi estremi della prima, in generale $L_{\Gamma_1}\neq L_{\Gamma_2}$; invece $\vec{F}$ è conservativa ⇔ $L_{\Gamma_1}=L_{\Gamma_2}$ per qualsiasi Γ_1,Γ_2 lungo un percorso chiuso: in questo modo stiamo implicitamente dicendo che $\vec{F}\cdot d\vec{l}$ è un DIFFERENZIALE ESATTO (differenziale esatto → $\int dA=A+costante$).

⚠Per definire la prossima grandezza (energia potenziale) è necessario introdurre un "operatore differenziale vettoriale" chiamato GRADIENTE [∇ detto "nabla"] che ha componenti le derivate parziali della funzione rispetto alle 3 dimensioni spaziali:

$$\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\rightarrow\vec{\nabla}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

→ Il gradiente ci indica come varia la funzione rispetto alle coordinate spaziali (posizione).

ENERGIA POTENZIALE [W] = funzione associabile ad ogni forza conservativa secondo la relazione:

$$\overrightarrow{F_{cons}}=-\vec{\nabla}W(x,y,z)$$

Questa relazione ci dice che la forza è l'opposto alla variazione spaziale dell'energia potenziale.

⚠Da qui ci ricaviamo che il lavoro su un percorso andata-ritorno (percorso chiuso) è = 0 perché:

$$L=\oint\overrightarrow{F_{cons.}}\cdot d\vec{l}=\oint-\vec{\nabla}W(x,y,z)\cdot d\vec{l}=\oint-\left(\frac{\partial W}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial W}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial W}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k})=\oint-dW=0$$

Quando invece ci riferiamo ad una forza conservativa in generale, vale la seguente relazione:

$$L_{cons}=\int_A^B \overrightarrow{F_{cons}}\cdot d\vec{l}=\int_A^B -dW=W_A-W_B(iniziale-finale)$$

Ora vediamo i PROBLEMI che abbiamo visto in dinamica, ma questa volta da un punto di vista "energetico":

1) FORZA PESO:

$$L=\int_A^B \vec{F_p}\cdot d\vec{l}=\int_A^B m\vec{g}\cdot d\vec{l}=\int_A^B -(mg\vec{k})\cdot dz\vec{k}=\int_A^B -(mg)dz=-mgz¿_A^B=mg\,z_A-mg\,z_B=mgh$$

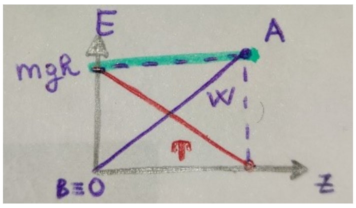
$$W(z)=mgz+cost \rightarrow Se\,considero\,B=suolo\,,W_B\,dovrà\,essere=0\,;dunque\,cost=0\,nel\,S.R.\,scelto$$

$$\vec{F_p}=-\vec{\nabla}W(z)=-mg\vec{k}$$

$$L=mgh=\Delta T=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2 \rightarrow T_0=\frac{1}{2}mv_A^2=0 \rightarrow mgh=\frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B=\sqrt{2gh}$$

Dunque con E = energia meccanica:

$$\begin{cases} W_A=W_{MAX}=mgh \\ W_B=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_A=0 \\ T_B=W_{MAX}=mgh \end{cases} \rightarrow Dunque\,se\,\vec{F}\,è\,conservativa\,vale: T+W=cost=E$$

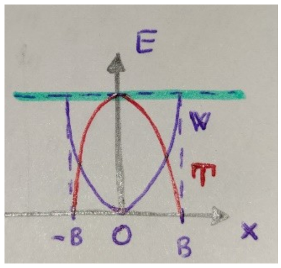


2) FORZA ELASTICA:

$$L=\int_A^B \vec{F_E}\cdot d\vec{l}=\int_A^B -(kx\vec{i})\cdot dx\vec{i}=\int_A^B -(kx)dx=-k\frac{x^2}{2}¿_A^B=\frac{1}{2}kx_A^2-\frac{1}{2}kx_B^2 \rightarrow Analogo\,a\,\vec{F_p}$$

$$W(x)=\frac{1}{2}kx^2+cost \rightarrow Anche\,qui\,fisso\,la\,cost=0$$

Visto che abbiamo una molla, avremmo una x legata ad un moto armonico:



$$x(t)=x_B\cos(\omega_0 t) \rightarrow W(x)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k(x_B\cos(\omega_0 t))^2=\frac{1}{2}kx_B^2\cos^2(\omega_0 t)$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2x_B^2\sin^2(\omega_0 t) \rightarrow \omega_0^2=\frac{k}{m} \rightarrow T=\frac{1}{2}kx_B^2\sin^2(\omega_0 t)$$

$$E=T+W=\frac{1}{2}kx_B^2(\sin^2(\omega_0 t)+\cos^2(\omega_0 t))=\frac{1}{2}kx_B^2 \rightarrow v_M=\sqrt{\frac{k}{m}}x_B=\omega_0 x_B=\omega_0 A[x_B=ampiezza]$$

3) PENDOLO:

$$L=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}=W_A-W_B \rightarrow W=mgz+cost \rightarrow z=l-l\cos(\theta(t))=l(1-\cos\theta) \rightarrow W=mgl(1-\cos\theta)$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v_{MAX}=\sqrt{2gl(1-\cos\theta_{MAX})} \rightarrow \begin{cases} W_{MAX}=mgl(1-\cos\theta_{MAX})=E \\ T_{MAX}=\frac{1}{2}m(v_{MAX})^2=E \end{cases}$$

$$E=T+W=\frac{1}{2}mv^2+mgl(1-\cos\theta)=cost \rightarrow v(\theta)=\sqrt{2gl(\cos\theta-\cos\theta_{MAX})}$$

4) ATTRITO RADENTE (ricorda che la $\vec{F}_{As}$ non compie lavoro!):

$$\overrightarrow{F_{Ad}}=-\mu_d R\vec{\tau}=-\mu_d R\vec{i}=-\mu_d mg\,\vec{i}$$

$$L=\int_{x_A}^{x_B}\overrightarrow{F_{Ad}}\cdot d\vec{l}=\int_{x_A}^{x_B}-(\mu_d mg\vec{i})\cdot dx\vec{i}=\int_{x_A}^{x_B}-(\mu_d mg)dx=-\mu_d mg\,x ¿_{x_A}^{x_B}=-\mu_d mg(x_B-x_A)$$

$$L=\int_{x_B}^{x_A}\overrightarrow{F_{Ad}}\cdot d\vec{l}=\mu_d mg(x_A-x_B)=-\mu_d mg(x_B-x_A)$$

⚠Da ciò vediamo che $L_{A\rightarrow B}+L_{B\rightarrow A}=2L_{A\rightarrow B}\neq 0$ (la forza di attrito dinamico non rispetta dunque che la somma del lavoro all'andata e del lavoro al ritorno sia = 0 → FORZA DISSIPATIVA). Quindi il LAVORO (a differenza dell'energia potenziale che è una funzione di stato) DIPENDE DAL PERCORSO! L'attrito è una forza dissipativa e dunque non posso associare una W.

⚠In generale $L_{\vec{F}_{Dissipativa}}\leq 0$

⚠Nelle forze conservative, seppur il $d\vec{l}$ rimanga sempre uguale in quanto dipende dal S.R., viene generalmente <u>invertito il versore associato alla forza</u> in gioco quando passiamo da $A\rightarrow B$ a $B\rightarrow A$ e dunque proprio per questo $L_{\oint}=0$.

Ora vediamo come calcolare la velocità:

$$\vec{v}_0=\frac{\vec{J}_0}{m}\rightarrow T(x_0)=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$L_{TOT}=\Delta T=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-\mu_d mg(x_f-x_0)\rightarrow v_f=\sqrt{v_0^2-2\mu_d g(x_f-x_0)}$$

$$a_x=-\mu_d g\rightarrow v(t)=v_0-\mu_d>\rightarrow x(t)=x_0+v_0 t-\mu_d g\frac{t^2}{2}$$

Quando $v=0$, ovvero al tempo $t^{¿}$:

$$t^{¿}=\frac{v_0}{\mu_d g}\rightarrow x(t^{¿})=x_0+\frac{v_0^2}{2\mu_d g}$$

5) PIANO INCLINATO (con attrito; $h=(x_B-x_A)\sin\alpha$ = altezza piano e $b=(x_B-x_A)\cos\alpha$ = base piano):

$$L_{TOT}=\int_A^B\Sigma_i\vec{F}_i\cdot d\vec{l}=\int_A^B(\vec{F}_p+\vec{R}+\vec{F}_A)\cdot dx\vec{i}=\int_A^B(F_p\sin\alpha-\mu_d mg\cos\alpha)dx=¿$$

$$¿\int_A^B mg\sin\alpha\,dx-\int_A^B\mu_d mg\cos\alpha\,dx=mg(x_B-x_A)\sin\alpha\left(1-\frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)=\Delta T\rightarrow v_A=0\rightarrow$$

$$\rightarrow mg(x_B-x_A)\sin\alpha\left(1-\frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)=\frac{1}{2}mv_B^2\rightarrow v_B=\sqrt{2g(x_B-x_A)\sin\alpha\left(1-\frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)}=\sqrt{2g(h-\mu_d b)}$$

⚠Relazione momento angolare-lavoro:

$$\overrightarrow{M_0}=\vec{r}\wedge\vec{F}=F\sin\alpha\, r\rightarrow L=\int_A^B F\cos\theta\, dl\rightarrow\begin{cases}dl=rd\varphi\\ \theta=\frac{\pi}{2}-\alpha\end{cases}\rightarrow L=\int_{\varphi_A}^{\varphi_B}F\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)rd\varphi=\int_{\varphi_A}^{\varphi_B}F\sin\alpha\, r\, d\varphi\rightarrow$$

$$\rightarrow L=\int_{\varphi_A}^{\varphi_B}M_0\, d\varphi$$

⚠Ricorda che l'energia è misurata in JOULE ($J=Nm$), mentre il momento angolare, seppur la sua analisi dimensionale riconduca al Joule, si preferisce indicarlo con Nm.

⚠Altra grandezza importante che vedremo è la POTENZA ($P=\frac{dL}{dt}=[Watt]$).

RIEPILOGANDO – TEOREMA DELL'ENERGIA MECCANICA:

$$L_{TOT}=L_{cons}+L_{noncons}=-\Delta W+L_{non\,cons}=\Delta T\rightarrow L_{noncons}=(T_B+W_B)-(T_A+W_A)=E_B-E_A=\Delta E$$

⚠$L_{non\,cons}=0\Leftrightarrow\Delta E=0\rightarrow$ Energia meccanica si conserva!

MOTI RELATIVI (osservatore che si muove → S.R.N.I, ovvero non-inerziale):

→ POSIZIONE di P (punto materiale):

- ASSOLUTA (rispetto a S.R.I) $\rightarrow\vec{r}=\overrightarrow{OP}=(P-O)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$;
- RELATIVA (rispetto a S.R.N.I) $\rightarrow\vec{r}=\overrightarrow{\Omega P}=(P-\Omega)=\xi\vec{\lambda}+\eta\vec{\mu}+\zeta\vec{\nu}$
- DISTANZA DELLE ORIGINI DI S.R.I E S.R.N.I (posizione assoluta di Ω) $\rightarrow(\Omega-O)=x_\Omega\vec{i}+y_\Omega\vec{j}+z_\Omega\vec{k}$;

Vale la relazione:

$$(P-O)=(P-\Omega)+(\Omega-O)$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}\rightarrow\vec{v_p}=\frac{d(P-O)}{dt}=\frac{d(P-\Omega)}{dt}+\frac{d(\Omega-O)}{dt}\rightarrow\vec{v_p}=\frac{d(\xi\vec{\lambda})}{dt}+\frac{d(\eta\vec{\mu})}{dt}+\frac{d(\zeta\vec{\nu})}{dt}+\frac{dx_\Omega}{dt}\vec{i}+\frac{dy_\Omega}{dt}\vec{j}+\frac{dz_\Omega}{dt}\vec{k}=¿$$

$$¿\frac{d\xi}{dt}\vec{\lambda}+\xi\frac{d\vec{\lambda}}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\vec{\mu}+\eta\frac{d\vec{\mu}}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\vec{\nu}+\zeta\frac{d\vec{\nu}}{dt}+\vec{v_\Omega}=\overrightarrow{v_p^{(R)}}+\xi\frac{d\vec{\lambda}}{dt}+\eta\frac{d\vec{\mu}}{dt}+\zeta\frac{d\vec{\nu}}{dt}+\vec{v_\Omega}\rightarrow\overrightarrow{v_p^{(R)}}=velocità\, relativa$$

Ora, ricordando che la derivata di un vettore è perpendicolare al vettore stesso ed è data da:

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\|\vec{u}\|\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp=\vec{\omega}\wedge\vec{u}[POISSON]$$

Allora, il TEOREMA DELLE VELOCITÁ RELATIVE mi dice che la VELOCITÁ ASSOLUTA:

$$\vec{v_p}=\overrightarrow{v_p^{(R)}}+\xi(\vec{\omega}\wedge\vec{\lambda})+\eta(\vec{\omega}\wedge\vec{\mu})+\zeta(\vec{\omega}\wedge\vec{\nu})+\vec{v_\Omega}=\overrightarrow{v_p^{(R)}}+\vec{\omega}\wedge(P-\Omega)+\vec{v_\Omega}[Velocità\, di\, trascinamento]$$

Per l'ACCELERAZIONE ASSOLUTA:

$$\vec{a}_p=\frac{d\vec{v_p}}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}=\frac{d\overrightarrow{v_p^{(R)}}}{dt}+\frac{d[\vec{\omega}\wedge(P-\Omega)]}{dt}+\frac{d\vec{v_\Omega}}{dt}=¿$$

$$¿\frac{d^2\xi}{dt^2}\vec{\lambda}+\frac{d\xi}{dt}\frac{d\vec{\lambda}}{dt}+\frac{d^2\eta}{dt^2}\vec{\mu}+\frac{d\eta}{dt}\frac{d\vec{\mu}}{dt}+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\vec{\nu}+\frac{d\zeta}{dt}\frac{d\vec{\nu}}{dt}+\vec{\alpha}\wedge(P-\Omega)+\vec{\omega}\wedge\left[\overrightarrow{v_p^{(R)}}+\xi(\vec{\omega}\wedge\vec{\lambda})+\eta(\vec{\omega}\wedge\vec{\mu})+\zeta(\vec{\omega}\wedge\vec{\nu})\right]+\vec{a_\Omega}=¿$$

$$¿\overrightarrow{a_p^{(R)}}+\left[\left(\vec{\omega}\wedge\frac{d\xi}{dt}\vec{\lambda}\right)+\left(\vec{\omega}\wedge\frac{d\eta}{dt}\vec{\mu}\right)+\left(\vec{\omega}\wedge\frac{d\zeta}{dt}\vec{v}\right)\right]+\vec{\alpha}\wedge(P-\Omega)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_p^{(R)}}+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\xi\vec{\lambda}+\vec{\omega}\wedge\eta\vec{\mu}+\vec{\omega}\wedge\zeta\vec{v})+\overrightarrow{a_\Omega}=¿$$

$$¿\overrightarrow{a_p^{(R)}}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_p^{(R)}}+\vec{\alpha}\wedge(P-\Omega)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_p^{(R)}}+\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-\Omega)]+\overrightarrow{a_\Omega}$$

$$\rightarrow\vec{a}_p=\overrightarrow{a_p^{(R)}}+2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_p^{(R)}}+\vec{\alpha}\wedge(P-\Omega)+\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-\Omega)]+\overrightarrow{a_\Omega}$$

[TEOREMA DELLE ACCELERAZIONI RELATIVE → Accelerazione assoluta = accelerazione relativa + accelerazione di Coriolis (che dipende dal moto relativo di P) + accelerazione di trascinamento (che contiene anche il contributo centrifugo)]. Dunque:

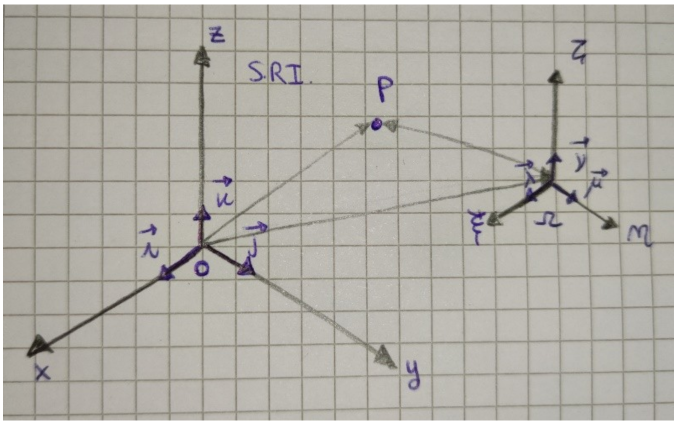
$$\begin{cases}\overrightarrow{v_p^{(R)}}=\vec{v}_p-\vec{\omega}\wedge(P-\Omega)-\overrightarrow{v_\Omega}\\ \overrightarrow{a_p^{(R)}}=\vec{a}_p-2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_p^{(R)}}-\vec{\alpha}\wedge(P-\Omega)-\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-\Omega)]-\overrightarrow{a_\Omega}\end{cases}$$

Per la FORZA, dato che siamo in un S.R.N.I:

$$\Sigma_i\vec{F}_i=m\vec{a}\rightarrow\Sigma_i\vec{F}_i=m\left(\overrightarrow{a_p^{(R)}}+2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_p^{(R)}}+\vec{\alpha}\wedge(P-\Omega)+\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-\Omega)]+\overrightarrow{a_\Omega}\right)$$

$$\Sigma_i\vec{F}_i-m\left(2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_p^{(R)}}+\vec{\alpha}\wedge(P-\Omega)+\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-\Omega)]+\overrightarrow{a_\Omega}\right)=m\overrightarrow{a_p^{(R)}}$$

Ovvero dobbiamo contare FORZE VERE – FORZE FITTIZIE (questa è la forma più generale del 2° principio di Newton con m = costante).



SISTEMI DI PUNTI MATERIALI (con N = numero di punti, avremo $3N$ gradi di libertà)

Per ogni punto del sistema avremo le sue grandezze espresse con l'indice $1\le i\le N$ ($x_i, y_i, z_i, \vec{r}_i, \vec{v}_i, \vec{a}_i, \vec{F}_i, m_i, E_i$). Un punto rilevante è il CENTRO DI MASSA [**CM**] = punto geometrico dove può essere considerata tutta la massa del sistema; caratteristiche del centro di massa:

- Massa:
  $$M=\sum_{i=1}^{N}m_i$$
- Posizione:

$$\overrightarrow{r_{CM}}=\frac{\Sigma_i m_i \vec{r}_i}{M}=x_{CM}\vec{i}+y_{CM}\vec{j}+z_{CM}\vec{k}\rightarrow\begin{cases}x_{CM}=\frac{\Sigma_i m_i x_i}{M}\\ y_{CM}=\frac{\Sigma_i m_i y_i}{M}\\ z_{CM}=\frac{\Sigma_i m_i z_i}{M}\end{cases}$$

- Velocità:
$$\overrightarrow{v_{CM}}=\frac{d\overrightarrow{r_{CM}}}{dt}=\frac{\Sigma_i m_i \vec{v}_i}{M}=\frac{\vec{P}}{M}\, con\, \vec{P}=quantità\, di\, moto\, totale\, del\, sistema$$
- Accelerazione:
$$\overrightarrow{a_{CM}}=\frac{d\overrightarrow{v_{CM}}}{dt}=\frac{\Sigma_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

Se ci riferiamo invece al sistema, avremo:

- Quantità di moto totale:
$$\vec{P}=\Sigma_i m_i \vec{v}_i=\Sigma_i \vec{p}_i=M\vec{v}_{CM}$$

- TEOREMA DI MOTO DEL CENTRO DI MASSA:
$$\Sigma_i \vec{F}_i=\overrightarrow{F_i^{(Interne)}}+\overrightarrow{F_i^{(Esterne)}}=m_i\vec{a}_i\rightarrow\Sigma_i\left(\overrightarrow{F_i^{(I)}}+\overrightarrow{F_i^{(E)}}\right)=\Sigma_i m_i \vec{a}_i=M\,\overrightarrow{a_{CM}}=\frac{d\vec{P}}{dt}$$
Dato che $\Sigma_i \overrightarrow{F_i^{(I)}}=0$ perché per ogni coppia di punti le forze interne si annullano:
$$\Sigma_i \overrightarrow{F_i^{(E)}}=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

- VARIAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE DEL SISTEMA rispetto al polo O (non coincidente con l'origine O'):
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\frac{d\left(\Sigma_i \vec{L}_i\right)}{dt}=\frac{d\left[\Sigma_i\left(\vec{r}_i\wedge\vec{p}_i\right)\right]}{dt}=\Sigma_i\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}\wedge\vec{p}_i+\vec{r}_i\wedge\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right]=¿$$
Dato che $\vec{r}_i=(P-O)=(P-O')-(O-O')$, ovvero posizione di P meno posizione del polo, allora:
$$\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{d\left[(P-O')-(O-O')\right]}{dt}=\vec{v}_i-\vec{v}_O=velocità\, punto-velocità\, polo$$

$$¿\,\Sigma_i\left[\left(\vec{v}_i-\vec{v}_O\right)\wedge m_i\vec{v}_i+\vec{r}_i\wedge\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right]=\Sigma_i\left(-\vec{v}_O\wedge\vec{p}_i\right)+\Sigma_i\left(\vec{r}_i\wedge\Sigma_k\vec{F}_{k_i}\right)=-\vec{v}_O\wedge\vec{P}+\Sigma_i\left[\vec{r}_i\wedge\left(\overrightarrow{F_i^{(I)}}+\overrightarrow{F_i^{(E)}}\right)\right]=¿$$
$$¿-\vec{v}_O\wedge\vec{P}+\Sigma_i\left(\overrightarrow{M_i^{(I)}}+\overrightarrow{M_i^{(E)}}\right)$$

Ora sappiamo che $\Sigma_i\overrightarrow{M_i^{(I)}}=0$ perché:
$$\overrightarrow{M_{i\rightarrow j}}+\overrightarrow{M_{j\rightarrow i}}=\vec{r}_j\wedge\overrightarrow{F_{i\rightarrow j}}+\vec{r}_i\wedge\overrightarrow{F_{j\rightarrow i}}\rightarrow\overrightarrow{F_{i\rightarrow j}}=-\overrightarrow{F_{j\rightarrow i}}\rightarrow\vec{r}_j\wedge\left(-\overrightarrow{F_{j\rightarrow i}}\right)+\vec{r}_i\wedge\overrightarrow{F_{j\rightarrow i}}=\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\wedge\overrightarrow{F_{j\rightarrow i}}=0\,[paralleli]$$

Dunque:
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt}=-\vec{v}_0\wedge\vec{P}+\Sigma_i\overrightarrow{M_i^{(E)}}\,[Teorema\, del\, momento\, angolare\, di\, un\, sistema\, di\, punti\, con\, polo\, mobile]$$

⚠Nei problemi, dobbiamo fare in modo che $-\vec{v}_O\wedge\vec{P}=0$ e questo accade quando:

$$-\vec{v_O} \wedge \vec{P}=0 \rightarrow \begin{cases} \vec{v_O}=0 \\ \vec{P}=0 \\ \vec{v_O} / ¿ \vec{v_{CM}} \\ Polo=CM \end{cases} \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\overrightarrow{M^{(E)}}$$

Dunque abbiamo le **2 EQUAZIONI CARDINALI DELLA MECCANICA**:

$$\Sigma_i \overrightarrow{F_i^{(E)}}=\frac{d\vec{P}}{dt}[PRIMA\ EQUAZIONE\ CARDINALE]$$

$$\Sigma_i \overrightarrow{M_i^{(E)}}=\frac{d\vec{L}}{dt}[SECONDA\ EQUAZIONE\ CARDINALE]$$

$$\begin{cases} \Sigma_i \overrightarrow{F_i^{(E)}}=0 \Leftrightarrow \vec{P}=costante \rightarrow spazio\ uniforme\,(invarianza\ traslazione) \\ \Sigma_i \overrightarrow{M_i^{(E)}}=0 \Leftrightarrow \vec{L}=costante \rightarrow spazio\ isotropo\,(invarianza\ rotazione) \end{cases}$$

Nel caso dei sistemi di punti, introduciamo il "S.R. del centro di massa" (**S.R.C.M**), che ha:

- Origine nel CM (dunque è un S.R.N.I se il CM si muove di moto non uniforme);
- Assi paralleli al S.R.I esterno fisso.

In questo sistema avremo:

$$\begin{cases} \vec{r}=\overrightarrow{r^{(R)}}+\overrightarrow{r_{CM}} \\ \vec{v}=\overrightarrow{v^{(R)}}+\overrightarrow{v_{CM}} \\ \vec{a}=\overrightarrow{a^{(R)}}+\overrightarrow{a_{CM}} \end{cases}$$

Inoltre, dato che CM = origine (ovvero non si muove rispetto a sé stesso):

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_{CM}^{(R)}}=\frac{\Sigma_i m_i \overrightarrow{r_i^{(R)}}}{M}=\Sigma_i m_i \overrightarrow{r_i^{(R)}}=0 \\ \overrightarrow{v_{CM}^{(R)}}=0 \rightarrow \Sigma_i m_i \overrightarrow{v_i^{(R)}}=\overrightarrow{P^{(R)}}=0 \\ \overrightarrow{a_{CM}^{(R)}}=0 \rightarrow \Sigma_i m_i \overrightarrow{a_i^{(R)}}=0 \end{cases}$$

Dunque il momento angolare rispetto al polo CM:

$$\overrightarrow{L_{(CM)}}=\Sigma_i\left[\overrightarrow{r_i^{(R)}} \wedge m_i\left(\overrightarrow{v_i^{(R)}}+\overrightarrow{v_{CM}}\right)\right]=\Sigma_i\left(\overrightarrow{r_i^{(R)}} \wedge m_i \overrightarrow{v_i^{(R)}}\right)+\Sigma_i\left(\overrightarrow{r_i^{(R)}} \wedge m_i \overrightarrow{v_{CM}}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \Sigma_i\left(\overrightarrow{r_i^{(R)}} \wedge m_i \overrightarrow{v_i^{(R)}}\right)=\vec{L}' \\ \Sigma_i\left(\overrightarrow{r_i^{(R)}} \wedge m_i \overrightarrow{v_{CM}}\right)=-\overrightarrow{v_{CM}} \wedge \left(\Sigma_i m_i \overrightarrow{r_i^{(R)}}\right)=0 \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{L_{(CM)}}=\vec{L}'=\Sigma_i\left(\overrightarrow{r_i^{(R)}} \wedge m_i \overrightarrow{v_i^{(R)}}\right) \rightarrow \overrightarrow{M_{CM}^{(E)}}=\frac{d\vec{L}'}{dt}$$

Rispetto ad un generico polo O [1° TEOREMA DI KÖNIG (teorema di KÖNIG del momento angolare):

$$\overrightarrow{L_{(O)}}=\Sigma_i\left[\left(\overrightarrow{r_i^{(R)}}+\overrightarrow{r_{CM}}\right) \wedge m_i\left(\overrightarrow{v_i^{(R)}}+\overrightarrow{v_{CM}}\right)\right]=¿$$

$$¿\,\Sigma_i\left(\overrightarrow{r_i^{(R)}} \wedge m_i \overrightarrow{v_i^{(R)}}\right)+\Sigma_i\left(\overrightarrow{r_i^{(R)}} \wedge m_i \overrightarrow{v_{CM}}\right)+\Sigma_i\left(\overrightarrow{r_{CM}} \wedge m_i \overrightarrow{v_i^{(R)}}\right)+\Sigma_i\left(\overrightarrow{r_{CM}} \wedge m_i \overrightarrow{v_{CM}}\right)=\overrightarrow{L'_{(CM)}}+\overrightarrow{L_{(O)}^{CM}}$$

Per l'energia cinetica:

$T=\Sigma_i \frac{1}{2} m_i \left(\overrightarrow{v_i^{(R)}}+\overrightarrow{v_{CM}}\right)^2=\Sigma_i \frac{1}{2} m_i \left[\left(v_i^{(R)}\right)^2+2\overrightarrow{v_i^{(R)}}\cdot\overrightarrow{v_{CM}}+\left(v_{CM}\right)^2\right]=T'+T_{CM}$

Per il lavoro, dato che $L_{TOT}=\Delta T$:

$đ L_i=d L_i^{(E)}+d L_i^{(I)} \rightarrow d L_i^{(I)}=\overrightarrow{F_i^{(I)}}\cdot đ \vec{l}_i$

Dati 2 punti “i” e “j”, se $\left(\vec{l}_j-\vec{l}_i\right)=0 \rightarrow d L_i^{(I)}=0$.

URTI TRA PUNTI MATERIALI (URTO = interazione impulsiva dato che $\Delta t \ll t_{osservazione}$):

Ricordando l’impulso della forza come: $\vec{J}=\int \vec{F}\, đt=\Delta \vec{p}=\vec{p}^{FIN}-\vec{p}^{¿}$, per studiare gli urti dobbiamo avere come ipotesi:

- Δt piccolo;
- $\Sigma_i \overrightarrow{F_i^{(E)}}=0 \rightarrow \vec{P}=\Sigma_i \vec{p}_i=cost$ [SISTEMA ISOLATO];
- Solo 2 corpi coinvolti nell’urto (altrimenti troppo complesso).

$\vec{P}=\vec{p_1}^{¿}+\vec{p_2}^{¿}\left[PRIMA\ DELL'URTO\right]=\vec{p_1}^{FIN}+\vec{p_2}^{FIN}\left[DOPO\ L'URTO\right]=¿$

$¿\,\Delta \vec{p_1}=\vec{p_1}^{FIN}-\vec{p_1}^{¿}=-\Delta \vec{p_2}=-\left(\vec{p_2}^{FIN}-\vec{p_2}^{¿}\right)=\int \overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}}\, đt=-\int \overrightarrow{F_{1\rightarrow 2}}\, đt$

Un urto può essere:

- ELASTICO $\rightarrow$ si conserva E ($\Delta E=0$); no deformazione cristallina (torna come prima);
- ANELASTICO $\rightarrow$ non si conserva E; deformazione apprezzabile (plastico, non elastico);
- COMPLETAMENTE ANELASTICO $\rightarrow$ corpi si fondono assieme ($M=m_1+m_2$).

1. URTO ELASTICO DI SISTEMA ISOLATO:

$\vec{P}=cost \rightarrow \Delta T=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{F^{(I)}}\ conservative$

Avendo come dati $\vec{v_1}^{¿}$ e $\vec{v_2}^{¿}$, possiamo descrivere l’urto solo in 1 dimensione (1D) e trovo le velocità con:

$$\begin{cases} m_1 v_1^{¿}+m_2 v_2^{¿}=m_1 v_1^{FIN}+m_2 v_2^{FIN} \\ \frac{1}{2} m_1 \left(v_1^{¿}\right)^2+\frac{1}{2} m_2 \left(v_2^{¿}\right)^2=\frac{1}{2} m_1 \left(v_1^{FIN}\right)^2+\frac{1}{2} m_2 \left(v_2^{FIN}\right)^2 \end{cases}$$

2. URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO:

$\vec{P}=cost=m_1 \vec{v_1}^{¿}+m_2 \vec{v_2}^{¿}=\left(m_1+m_2\right)\vec{v}_{CM} \rightarrow \vec{v}_{CM}=\frac{m_1 \vec{v_1}^{¿}+m_2 \vec{v_2}^{¿}}{m_1+m_2}$

Dunque possiamo risolvere il nostro problema in tutte le dimensioni.

$\Delta E=-T'=\frac{-1}{2}¿$

3. URTO ANELASTICO

COEFFICIENTE DI RESTITUZIONE:

$$e = \frac{-p^{(R)FIN}}{p^{(R)\in ¿} = \frac{-p_1^{(R)FIN}}{p_1^{(R)\in ¿} = \frac{-p_2^{(R)FIN}}{p_2^{(R)\in ¿} \to \begin{cases} e=1 \to \Delta E = 0 \to COMPLETAMENTE\ ELASTICO \\ e=0 \to -\Delta E \to COMPLETAMENTE\ ANELASTICO \\ 0<e<1 \to PLASTICO\,(ANELASTICO) \end{cases} ¿} ¿}}$$

$$p_1^{(R)FIN} = -e\, p_1^{(R)\in ¿ \to v_1^{(R)FIN} = -e v_1^{(R)\in ¿¿} ¿}$$

$$\to \frac{1}{2} m_1 ¿¿$$

$$\to \Delta E = ¿$$

Per trovare le VELOCITÁ FINALI:

$$v_1^{FIN} = v_1^{(R)FIN} + v_{CM} = -e\, v_1^{(R)\in ¿ + v_{CM} \to v_{CM} = \frac{m_1 v_1^{¿} + m_2 v_2^{¿}}{m_1 + m_2} \to ¿}$$

$$v_1^{FIN} = -e\left(v_1^{¿} - v_{CM}\right) + v_{CM} = -e v_1^{¿} + (1-e)\, v_{CM} = \frac{-e(m_1+m_2)v_1^{¿} + m_1(1+e)v_1^{¿} + m_2(1+e)v_2^{¿}}{m_1+m_2} = ¿$$

$$¿ \frac{(m_1 - e m_2)v_1^{¿} + m_2(1+e)v_2^{¿}}{m_1+m_2}$$

Stesso vale per:

$$v_2^{FIN} = \frac{(m_1 - e m_2)v_1^{¿} + m_2(1+e)v_2^{¿}}{m_1+m_2}$$

CORPO RIGIDO:

- DISTANZA TRA I PUNTI DEL SISTEMA = COSTANTE;
- $\begin{cases} \vec{v}\ \text{può variare punto per punto} \\ \vec{\omega}\ \text{uguale per tutti i punti} \end{cases}$

Infatti la velocità di un punto del corpo rigido è data da:

$$\begin{cases} TRASLAZIONE: \vec{v}_{CM} \\ ROTAZIONE: \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{r^{(R)}} \end{cases} \to \vec{v}_p = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{r^{(R)}} + \vec{v}_{CM}$$

Bastano dunque le 2 EQUAZIONI CARDINALI per descrivere i 6 gradi di libertà del corpo rigido:

$$\begin{cases} \Sigma_i \vec{F}_i = m\,\vec{a}_{CM} \\ \Sigma_i \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dr} \end{cases}$$

Con il corpo rigido, si passa da una "meccanica discreta" (sistema di punti) ad una "MECCANICA del CONTINUO" (ovvero passiamo dalle sommatorie agli INTEGRALI):

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \to m = \int dm$$

Essendo nella meccanica del continuo, avremo una nuova grandezza chiamata DENSITÁ (se sono in 3 dimensioni, ho la "DENSITÁ VOLUMETRICA"):

$$\rho = \frac{dm}{dV} \rightarrow [\rho] = kg\, m^{-3} \rightarrow \rho = \rho(x, y, z)$$

La densità impone come "dominio di integrazione" (estremi di integrazione) la regione di spazio dov'è definita della materia:

$$m = \int dm = \iiint \rho dV \rightarrow dV = dx\, dy\, dz \rightarrow m = \iiint \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\, [3D]$$

Se siamo in 2 dimensioni (come nelle lamine, dove lo spessore è trascurabile), parliamo di "DENSITÁ SUPERFICIALE" [2D]:

$$[\rho_S] = [\sigma] = kg\, m^{-2} \rightarrow \rho_S(x, y) = \frac{dm}{dS} \rightarrow m = \iint \rho_S dS \rightarrow dS = dx\, dy \rightarrow m = \iint \rho_S(x, y)\, dx\, dy\, [2D]$$

Se siamo in 1 dimensione, ho la "DENSITÁ LINEARE":

$$[\rho_l] = [\lambda] = kg\, m^{-1} \rightarrow \rho_l(x) = \frac{dm}{dl} \rightarrow m = \int \rho_l dl \rightarrow dl = dx \rightarrow m = \int \rho_l(x)\, dx\, [1D]$$

Dunque, il centro di massa di un corpo rigido ha come posizione:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\int_V (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \rho(x, y, z)\, dV}{\int_V \rho(x, y, z)\, dV} = \frac{\int_V x \rho dV}{m}\vec{i} + \frac{\int_V y \rho dV}{m}\vec{j} + \frac{\int_V z \rho dV}{m}\vec{k}$$

Se $\rho = cost$:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\rho \int_V x dV}{\rho \int_V dV}\vec{i} + \frac{\rho \int_V y dV}{\rho \int_V dV}\vec{j} + \frac{\rho \int_V z dV}{\rho \int_V dV}\vec{k} = \frac{\int_V x dV}{V}\vec{i} + \frac{\int_V y dV}{V}\vec{j} + \frac{\int_V z dV}{V}\vec{k} = BARICENTRO$$

In questo caso dunque, BARICENTRO ≡ CENTRO GEOMETRICO (esempio: baricentro sfera continua = centro sfera).

⚠Come le derivate parziali, l'INTEGRALE TRIPLO (operatore inverso) ha la stessa risoluzione, ovvero:

$$\frac{\partial xyz}{\partial x} = yz \rightarrow$$

$$\iiint_0^1 xyz\, dx\, dy\, dz = \left(\iint_0^1 xy\, dx\, dy \right) \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \iint_0^1 xy\, dx\, dy = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x dx \right) \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \int_0^1 x dx = \frac{1}{4} \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

Ci sono 4 CASI:

1) TRASLAZIONE;
2) ROTAZIONE ATTORNO AD ASSE FISSO;
3) ROTOTRASLAZIONE (ROTAZIONE ATTORNO AD ASSE CON DIREZIONE FISSA);
4) MOTO GIROSCOPICO (ASSE PUÓ CAMBIARE DIREZIONE, MA AVREMO 1 PUNTO FISSO).

1. **TRASLAZIONE**:

$$\begin{cases} \Sigma_i \vec{F}_i = m \vec{a}_{CM} \\ 3D \rightarrow 3\, equazioni \end{cases}$$

2. **ROTAZIONE ATTORNO AD ASSE FISSO**:

- $\vec{\omega}$ direzione fissa (sempre = all'asse di rotazione);

- $\vec{\alpha}$ direzione fissa (parallela a $\vec{\omega}$);
- Ogni punto descrive una traiettoria circolare [MC] (perché essendo l'asse fisso, il raggio per ogni punto del corpo rigido è costante).

A noi interessa calcolare qui il momento angolare:

$$d\vec{L}=d(\vec{r}\wedge\vec{p})=d\vec{r}\wedge\vec{p}+\vec{r}\wedge d\vec{p}$$

Che semplificheremo "DISCRETIZZANDO" il corpo (vedo il corpo rigido come un sistema di punti):

$$\vec{L}_i=\vec{r}_i\wedge\vec{p}_i=\vec{r}_i\wedge m_i\vec{v}_i\rightarrow\begin{cases}\vec{r}_i=r_i\cos\theta_i\vec{k}+r_i\sin\theta_i\vec{\lambda}=r_i\cos\theta_i\vec{k}+R_i\vec{\lambda}\\ \vec{v}_i=\omega R_i\vec{\mu}\end{cases}$$

$$Con\,\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu}=\vec{k}\rightarrow\vec{r}_i\wedge\vec{v}_i=\begin{vmatrix}\vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{k}\\ R_i & 0 & r_i\cos\theta_i\\ 0 & \omega R_i & 0\end{vmatrix}=-\omega R_i r_i\cos\theta_i\vec{\lambda}+R_i^2\omega\vec{k}\rightarrow\vec{L}_i=\vec{r}_i\wedge m_i\vec{v}_i=¿$$

$$¿-\omega R_i r_i\cos\theta_i m_i\vec{\lambda}+R_i^2\omega m_i\vec{k}$$

Dunque:

$$\vec{L}=\Sigma_i\vec{L}_i=-(\Sigma_i R_i r_i\cos\theta_i m_i)\omega\vec{\lambda}+(\Sigma_i R_i^2 m_i)\omega\vec{k}\rightarrow\begin{cases}I_z=\Sigma_i R_i^2 m_i=\int R^2\,dm\\ \vec{\omega}=\omega\vec{k}\end{cases}$$

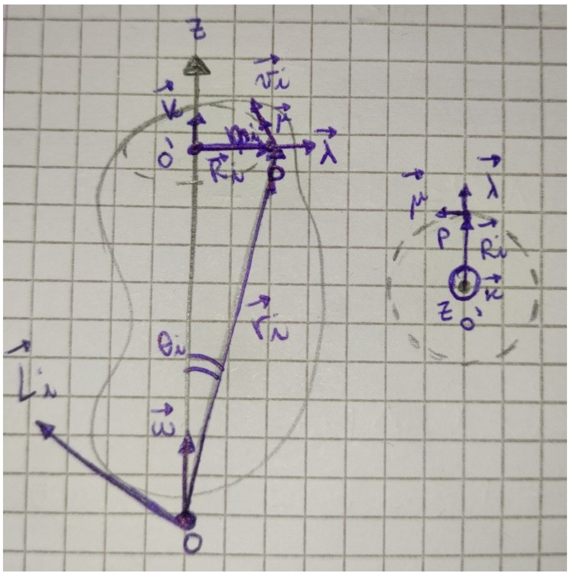
$$I_z=MOMENTO\ DI\ INERZIA\ RISPETTO\ AL\ L'\ ASSE\ Z$$

Con $L_z=I_z\omega$ indichiamo la componente del momento angolare legata all'inerzia rotazionale e derivandola:

$$\frac{dL_z}{dt}=\frac{d(I_z\omega)}{dt}=\frac{dI_z}{dt}\omega+I_z\frac{d\omega}{dt}\rightarrow\begin{cases}\frac{dI_z}{dt}=0\\ \frac{d\omega}{dt}=\alpha\end{cases}\rightarrow\frac{dL_z}{dt}=I_z\alpha=M_z=Momento\,della\,forza\,rispetto\,al\,l'\,asse\,z$$

⚠Quando un corpo rigido sta ruotando, la componente angolare lungo l'asse di rotazione "z" è $I_z\alpha$.

⚠La componente $-(\Sigma_i R_i r_i\cos\theta_i m_i)\omega\vec{\lambda}$ del momento angolare servirà in seguito a calcolare la reazione vincolare dovuta alla rotazione del corpo rigido.



Se $\vec{L}$ è parallelo all'asse z, non si ha la "PRECESSIONE DEL MOMENTO ANGOLARE"; dunque se $\vec{L}$ non è parallelo all'asse z:

$$\begin{cases} \Sigma\vec{F}=m\vec{a}_{CM} \\ \Sigma\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}\rightarrow\begin{cases}\vec{\lambda}\\ \vec{\mu}\\ \vec{k}\end{cases}\rightarrow \textit{Studiamo il momento della forza nelle 3 coordinate cilindriche:}\end{cases}$$

$$\begin{cases} M_z=\frac{dL_z}{dt}=\frac{dI_z\omega}{dt}=I_z\frac{d\omega}{dt}=I_z\alpha \\ M_\lambda=\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)\cdot\vec{\lambda}=\frac{d\left(L_\perp\vec{\lambda}+L_z\vec{k}\right)}{dt}\cdot\vec{\lambda}=\frac{d\left(L_\perp\vec{\lambda}\right)}{dt}\cdot\vec{\lambda}=L_\perp\omega\end{cases}$$

Per il momento di inerzia la DEFINIZIONE GENERALE è:

$$I_z=\int\left(x^2+y^2\right)dm$$

Da qui mi ricavo i momenti di inerzia notevoli (densità = costante):

1) ASTA:
   $$I_z=\frac{1}{12}Ml^2$$
2) LASTRA:
   $$I_z=\frac{1}{12}M\left(a^2+b^2\right)$$
3) ANELLO:
   $$I_z=MR^2$$
4) DISCO / CILINDRO:
   $$I_z=\frac{1}{2}MR^2$$
5) GUSCIO SFERICO:
   $$I_z=\frac{2}{3}MR^2$$
6) SFERA:
   $$I_z=\frac{2}{5}MR^2$$

⚠I momenti di inerzia sono additivi (si possono combinare per trovare i momenti di inerzia di forme più complesse).

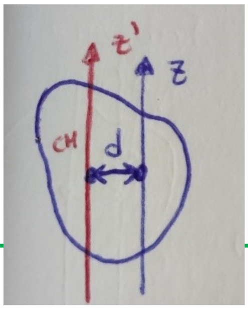
Ma da dove nascono queste formule? (Esempio: Disco / cilindro):

$$I_z=\int\left(x^2+y^2\right)dm=\int\left(x^2+y^2\right)\rho dV\rightarrow dV=dSdz\left[Area\ per\ altezza\right]\rightarrow dS=\left(rd\theta\right)dr\rightarrow$$

$$\rightarrow I_z=\int\left(x^2+y^2\right)\rho\, r d\theta\, dr\, dz\rightarrow\left(x^2+y^2\right)=r^2\rightarrow I_z=\iiint r^3\rho d\theta drdz=\int_0^h\int_0^R\int_0^{2\pi}r^3\rho d\theta\, dr\, dz=¿$$

$$¿\int_0^h\int_0^R r^3\rho 2\pi\, dr\, dz=\int_0^R r^3\rho 2\pi h\, dr=2\pi h\rho\frac{R^4}{4}\rightarrow\rho=cost=\frac{M}{V}=\frac{M}{\pi R^2 h}\rightarrow I_z=\frac{1}{z}MR^2$$

TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI (o di HUYGENS-STEINER) = calcolare il momento di inerzia rispetto ad assi paralleli a quello passante per il centro di massa:

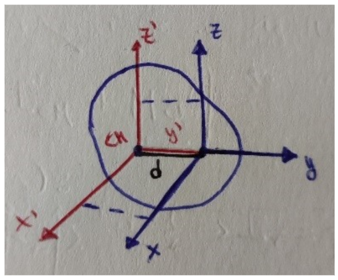


$I_z = I_{CM} + M d^2$

Esempio (asta):

$$d = \frac{l}{2} \rightarrow I_z = \frac{1}{12} M l^2 + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} M l^2$$

<u>Dimostrazione</u>:



$$I_z = \int \left(x^2 + y^2 \right) dm = \Sigma_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) m_i \rightarrow \begin{cases} x = x' \\ z = z' \\ y = y' + d \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow I_z = \Sigma_i \left[\left(x_i' \right)^2 + \left(y_i' + d \right)^2 \right] m_i = \Sigma_i \left(x_i' \right)^2 m_i + \Sigma_i \left(y_i' \right)^2 m_i + 2 \Sigma_i m_i y_i' d + \Sigma_i m_i d^2 = ¿$$

$$¿\, I_{CM} + M d^2$$

Energia cinetica:

$$T = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{L_z^2}{2 I_z}$$

3. **ROTOTRASLAZIONE**:

- ASSE DI ROTAZIONE CON DIREZIONE FISSA (PERPENDICOLARE AL PIANO DEL MOTO);
- SI ATTRITO $\rightarrow v_C = 0$ [PURO ROTOLAMENTO, con C = PUNTO DI CONTATTO].

$$\begin{cases} \Sigma_i \vec{F}_i = m \vec{a}_{CM} \\ \Sigma_i \vec{M}_i = \bar{\bar{I}} \vec{\alpha} \rightarrow M_z = I_z \alpha \end{cases}$$

Sapendo che per un generico punto:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_p^{(R)} + \vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_p^{(R)} + \vec{v}_{CM}$$

Allora, per il punto di contatto:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_C^{(R)} + \vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_C^{(R)} + \vec{v}_{CM} = 0 \rightarrow \vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \wedge \vec{r}_C^{(R)} \, [VINCOLO\, CINEMATICO]$$

Dunque per un generico punto P del corpo:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_p^{(R)} + \vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_p^{(R)} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}_C^{(R)} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{r}_p^{(R)} - \vec{r}_C^{(R)} \right)$$

$\rightarrow \left(\vec{r}_p^{(R)} - \vec{r}_C^{(R)} \right)$ è la distanza tra C (punto di contatto) e P (generico punto del corpo); dunque:

$$v_p = \omega \left\| \vec{r}_p^{(R)} - \vec{r}_C^{(R)} \right\|$$

Ho 3 casi:

- $\vec{F}$ applicata al CM:

$$\begin{cases} v_{CM}(0) = 0 \\ \omega(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x: F-F_A=m\,a_{CM_x} \\ y: R-F_p=0 \\ z(POLO\in CM): M_A=I_{CM}\alpha \rightarrow -F_A r=I_{CM}\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{CM}=\dfrac{F-F_A}{m}=\alpha r \\ \alpha=\dfrac{-F_A r}{I_{CM}} \\ F_A\le\mu_s R=\mu_s mg \end{cases} \rightarrow F\le\mu_s mg\left(\frac{I_{CM}+mr^2}{I_{CM}}\right)$$

Dunque:

$$\overrightarrow{a_{CM}}=\frac{F r^2}{I_{CM}+mr^2}\vec{i}$$

- $\vec{M}$ applicato in CM:

$$\begin{cases} x: F_A=m\,a_{CM_x} \\ y: R-F_p=0 \\ z(POLO\in C): -M=I_C\alpha \rightarrow \alpha=\dfrac{-M}{I_C} \end{cases} \rightarrow m\alpha r=\frac{mMr}{I}=F_A\le\mu_s mg \rightarrow \begin{cases} M\le\dfrac{\mu_s I_C g}{r} \\ a_{CM}=\dfrac{Mr}{I_C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x: F_A=m a_{CM_x} \\ y: R-F_p=0 \\ z(POLO\in CM): F_A r-M=I_{CM}\alpha \rightarrow \alpha=\dfrac{F_A r-M}{I_{CM}} \end{cases} \rightarrow F_A=\frac{mrM}{mr^2+I_{CM}}\le\mu_s mg \rightarrow M\le\frac{\mu_s\left(I_{CM}+mr^2\right)g}{r}$$

Questo con $I_c=I_{CM}+mr^2$.

- PIANO INCLINATO:

$$\Sigma_i\vec{F_i}=\vec{R}+\vec{F_p}+\vec{F_A}=m\overrightarrow{a_{CM}} \rightarrow \begin{cases} x: F_p\sin\alpha-F_A=m\overrightarrow{a_{CM_x}} \\ y: R-F_p\cos\alpha=0 \\ z: \begin{cases} (POLO\ CM): -F_A r\vec{k}=I_{CM}\vec{\alpha} \\ (POLO\ C): -F_p\sin\alpha r\vec{k}=I_c\vec{\alpha} \end{cases} \end{cases} \rightarrow \vec{a_c}=\frac{r^2 mg\sin\alpha}{I_c}\vec{i} \rightarrow$$

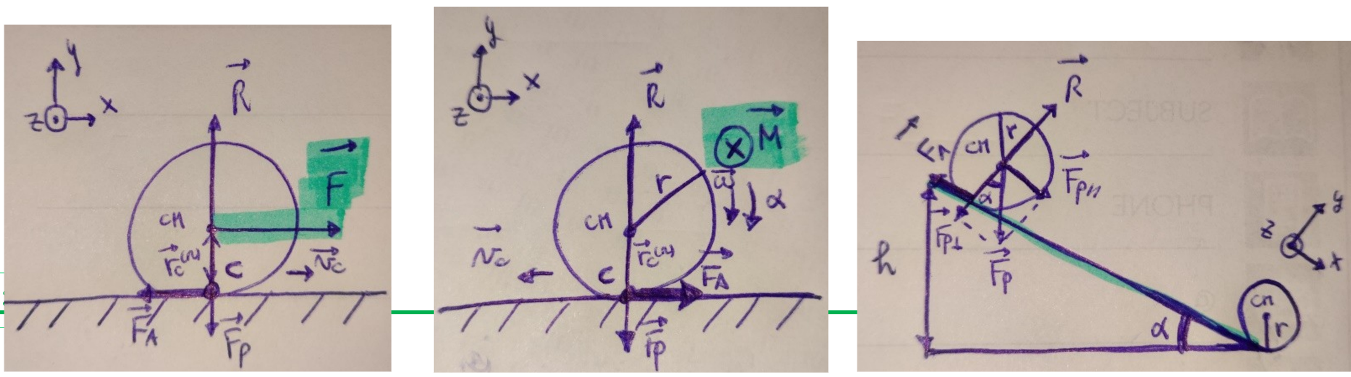
$$\rightarrow F_A=\frac{g\sin\alpha\, m I_{CM}}{mr^2+I_{CM}}\le\mu_s mg\cos\alpha \rightarrow \tan\alpha\le\mu_s\left(\frac{mr^2+I_{CM}}{I_{CM}}\right)$$

Dal punto di vista energetico:

$$E=mg(h+r)[INIZIALE]=mgr+T[FINALE]=mgr+\frac{1}{2}mv_{CM}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \rightarrow \frac{1}{2}mv_{CM}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2=mgh \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mr^2\omega^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2=\frac{1}{2}(mr^2+I_{CM})\omega^2=mgh \rightarrow mr^2+I_{CM}=I_C \rightarrow \frac{1}{2}I_C\omega^2=mgh \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{2mgh}{I_C}}=\sqrt{\frac{2mgh}{I_{CM}+mr^2}}$$

DIAGRAMMI DEI 3 CASI:



A. **PALLA DA BILIARDO**:

Se l'urto tra la stecca e la palla avviene lungo l'orizzontale passante per CM, l'urto è detto "centrale", altrimenti (caso più generale) è detto "obliquo". Il corpo è fermo all'istante $t=0^{-¿¿}$, poi viene applicato l'IMPULSO $\vec{J}_0$ al tempo $t=0^{+¿¿}$ (e dunque abbiamo un $\overrightarrow{v_{CM}}(0)$ e un $\vec{\omega}(0)$):

$$v_{CM}(0) \rightarrow \vec{J}_0 = \Delta\vec{p} = \vec{p}\,¿$$

$$\omega(0) \rightarrow \vec{r}_J \wedge \vec{J}_0 = \Delta\vec{L} = I_{CM}\,\vec{\omega}\,¿$$

$$\vec{v}_c(0) = \vec{\omega}(0) \wedge \overrightarrow{r_C^{(R)}} + \overrightarrow{v_{CM}}$$

Dunque, per capire il verso di $\vec{v}_c$, avremo $\vec{\omega}(0) \wedge \overrightarrow{r_C^{(R)}}$ che ha verso negativo e $\overrightarrow{v_{CM}}$ che ha verso positivo; se:

A. $v_{CM}(0) > \omega(0) r \rightarrow \frac{J_0}{m} > \frac{J_0 h}{I_{CM}} r \rightarrow h < \frac{I_{CM}}{mr}$, allora $\vec{v}_c$ ha il verso di $\overrightarrow{v_{CM}}$:

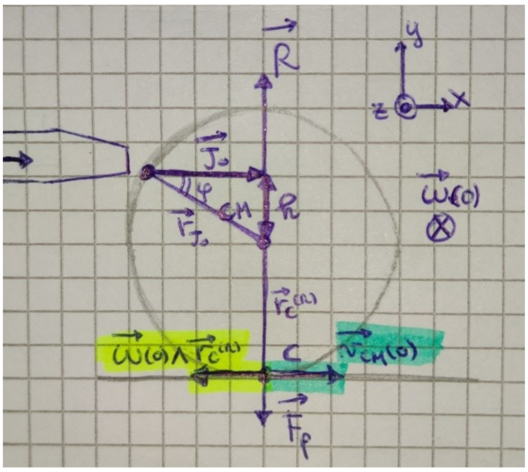
$$\begin{cases} x: -F_A = m\,a_{CM} \rightarrow F_A = \mu_d mg \\ y: R = F_p \\ z(POLO\;CM): M = I_{CM}\alpha \rightarrow -r\,F_A = I_{CM}\alpha \end{cases} \rightarrow ¿$$

Per trovare l'istante in cui inizia il puro rotolamento (ovvero $\vec{v}_C(t^{¿}) = 0$):

$$-\left(\frac{J_0 hr}{I_{CM}} + \frac{\mu_d mg r^2}{I_{CM}} t^{¿}\right) + \left(\frac{J_0}{m} - \mu_d g t^{¿}\right) = 0 \rightarrow t^{¿} = \frac{J_0\left(\frac{1}{m} - \frac{hr}{I_{CM}}\right)}{\mu_d\left(1 + \frac{mr^2}{I_{cM}}\right)}$$

B. $v_{CM}(0) < \omega(0) r \rightarrow \frac{J_0}{m} < \frac{J_0 h}{I_{CM}} r \rightarrow h > \frac{I_{CM}}{mr}$, ovvero tutto come prima, ma la $\overrightarrow{F_A}$ va presa al contrario.

C. Retta d'azione di $\vec{J}$ sta sotto CM $\rightarrow \begin{cases} \vec{\omega}(0)\;USCENTE \\ \vec{J}\;ha\;segno\;opposto \end{cases} \rightarrow ROTAZIONE\;OPPOSTA$



B. **TROTTOLA**: ASSE DI ROTAZIONE z PRINCIPALE D'INERZIA, INCLINATO DI UN ANGOLO β RISPETTO A $\vec{R}$ (con $\beta = cost$) e con ATTRITO DINAMICO:

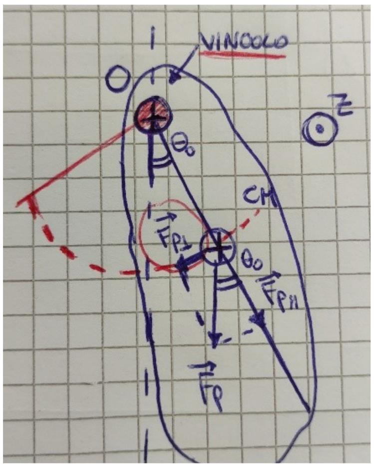
$$\Delta L \approx (L\sin\beta)\Delta\varphi \rightarrow \frac{\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\Delta L}{\Delta t} = \frac{\lim_{\Delta t\rightarrow 0} L\sin\beta\,\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \Omega \rightarrow \frac{\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\Delta L}{\Delta t} = L\sin\beta\,\Omega \rightarrow$$

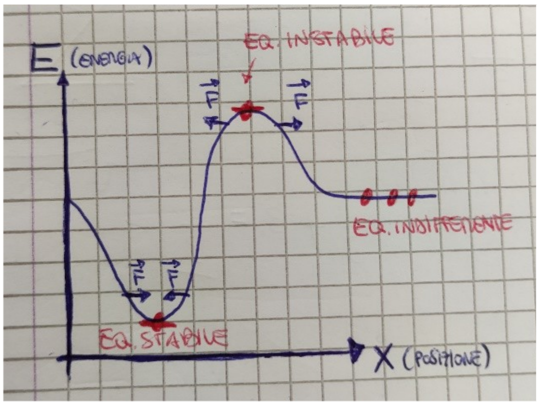
$$\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=\vec{r_{CM}} \wedge \vec{F}_p=r_{CM}\, mg \sin\beta\, \vec{\mu}=\vec{\Omega} \wedge \vec{L}=\Omega L \sin\beta\, \vec{\mu} \rightarrow \Omega=\frac{r_{CM}\, mg}{L}=\frac{r_{CM}\, mg}{I\omega}$$

C. **PENDOLO FISICO** → per il pendolo fisico, riprendiamo alcuni concetti di statica del corpo rigido → equilibrio:

- STABILE = ritorna alla situazione di equilibrio precedente alla perturbazione;
- INSTABILE = si allontana dalla situazione di equilibrio precedente alla perturbazione, cercando di instaurare un nuovo equilibrio;
- INDIFFERENTE.

Ponendo $\vec{F}=-\vec{\nabla} W \rightarrow \vec{F}=\frac{-\partial W}{\partial x}\vec{i}$, i punti stazionari del grafico "energia-posizione" che segue sono i punti di equilibrio, che classifichiamo come:





$$\vec{M}=\vec{r}_{CM} \wedge \vec{F}_p=I\vec{\alpha} \rightarrow -r_{CM}\, Fp \sin\theta=I_0\alpha \rightarrow \begin{cases} I_0=I_{CM}+r_{CM}^2 \left(T.\, assi\ paralleli\right) \\ \alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases} \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{r_{CM}\, mg}{I_0}\theta=0$$

Supponendo sempre angoli piccoli ($\theta<7°$) in modo che $\sin\theta \;\; \theta$, allora:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{r_{CM}\, mg}{I_{CM}+r_{CM}^2\, m}} \rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

Soluzioni della EDO prima vista sono:

$$\theta(t)=\theta_0\cos(\omega_0 t) \rightarrow \theta(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

Inoltre, se abbiamo una lunghezza del pendolo chiamata come "lunghezza ridotta del pendolo", ovvero

$$l'=\frac{I_0}{r_{CM}\, m}$$

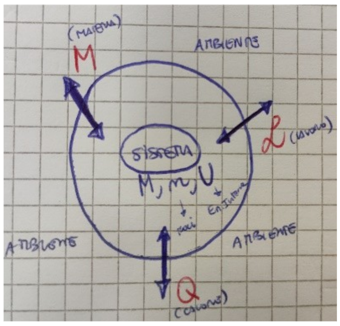
allora il pendolo fisico può essere visto come il sistema di pendolo semplice che abbiamo già studiato (infatti pendolo semplice = pendolo fisico con lunghezza del pendolo uguale a l').

⚠In tutti questi casi, così come nel pendolo che abbiamo appena visto, se abbiamo un urto, allora dobbiamo chiederci se ci sia CONSERVAZIONE DI:

- QUANTITA' DI MOTO (sui 3 assi);
- MOMENTO ANGOLARE (su almeno 1 dei 3 assi);
- ENERGIA (a seconda del tipo di urto).

Nella situazione del pendolo abbiamo anche un vincolo (ricordando che VINCOLO = interazione tra sistema e ambiente). Inoltre, in questi problemi di urti (come per esempio un proiettile che colpisce un'asta in equilibrio e si fonde ad essa), conviene scegliere il polo nella posizione a noi più comoda per annullare i momenti (per esempio nel vincolo, in modo che all'equilibrio il momento delle forze esterne sia 0, in quanto la forza-peso sta sulla verticale).

A questo punto passiamo da un approccio deterministico, ad un approccio statistico (ovvero quando N [numero di corpi] è molto grande), dove si cerca di trovare una media e si passa ad una fisica scalare:



4. TERMODINAMICA

Un sistema può essere:

- APERTO: scambio di materia e energia (es. il nostro corpo);
- CHIUSO: scambio di solo energia;
- ISOLATO: non scambio.

STATO DI EQUILIBRIO (per un sistema termodinamico, avviene quando le variabili termodinamiche sono costanti/uniformi):

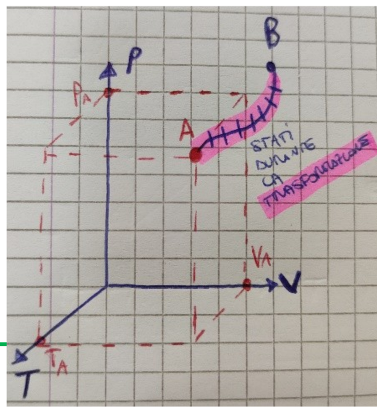
- EQUILIBRIO MECCANICO (tra sistema e ambiente, dunque $\sum_i \overrightarrow{F_i^{(E)}}=0$ e $\sum_i \overrightarrow{M_i^{(E)}}=0$) $[p=uniforme]$;
- EQUILIBRIO TERMICO (calore = quantità di energia scambiata complementare al lavoro) $[T=unif]$;
- EQUILIBRIO CHIMICO;
- EQUILIBRIO NUCLEARE (no isotopi instabili).

STATO DEL SISTEMA → variabili termodinamiche → $\begin{cases} p=pressione \\ V=volume \\ T=temperatura \end{cases}$ → FUNZIONE DI STATO: $f(p,V,T)$

EQUAZIONE DI STATO = dipendenza di una variabile termodinamica dalle altre;

TRASFORMAZIONE DI STATO = passaggio da uno stato del sistema (A) all'altro (B), tramite una sequenza di stati successivi:

- TRASFORMAZIONE REVERSIBILE = se gli stati in sequenza sono tutti stati di equilibrio;
- TRASFORMAZIONE IRREVERSIBILE = se può essere descritta come il passaggio da uno stato ad un altro, senza considerare tutti gli stati intermedi;
- TRASFORMAZIONE QUASI STATICA = durante lo scambio tra sistema e ambiente, il sistema ha il tempo (ad ogni stato) di raggiungere l'equilibrio.



⚠Per i segni di lavoro e calore vediamo che:

¿

Quando due corpi (caldo e freddo) sono messi a contatto tra loro, raggiungono dopo un certo Δt una TEMPERATURA DI EQUILIBRIO (temperatura finale del sistema); questo pone le basi del **PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA**: se 2 corpi (A e B) con temperature diverse, non a contatto tra loro [PARETI ADIABATICHE, isolante], sono messi a contatto con un terzo corpo (C) [PARETI DIATERMICHE, conduttore], allora, dopo un certo Δt, si ha $T_C = T_A = T_B = T_{eq}$.

TERMOMETRO = strumento definito da:

- PROPRIETA' TERMOMETRICA [x];
- FUNZIONE TERMOMETRICA [$\theta(x)$];

La temperatura si esprime come funzione delle proprietà termometriche [$T=\theta(x)$]; attraverso l'ESPRESSIONE TERMOMETRICA [$T=a+bx$], ricaviamo i coefficienti e calibriamo il termometro perché sappiamo che:

$$\begin{cases} 0°C = a + b\,x_{fusione} \\ 100°C = a + b\,x_{ebollizione} \end{cases}$$

CAPACITA' TERMICA = dipende dalla sostanza ed è in funzione della temperatura (maggiore è la capacità termica, minore è il variare della temperatura del corpo):

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \rightarrow [C] = \frac{J}{K} \, con \, \Delta T = T_f - T_i \rightarrow Q = C \Delta T$$

Chiamando FONONI le vibrazioni quantizzate nel reticolo cristallino, sappiamo che sotto la TEMPERATURA DI DEBYE (T_D) diventa importante la quantizzazione dei fononi, mentre sopra di essa abbiamo saturato i fononi.

Altre quantità utili sono:

- TEMPERATURA DELLO ZERO ASSOLUTO: $T = -273{,}15\,°C = 0\,Kelvin[K]$;
- COSTANTE UNIVERSALE DEI GAS: $R = 8{,}314\left[\frac{J}{mol * K}\right]$

Noi non useremo la capacità termica, bensì useremo il **CALORE SPECIFICO**:

- MASSIMO:

$$c = \frac{C}{m} \rightarrow c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} \rightarrow [c] = \frac{J}{K\,kg}$$

- MOLARE (usato molto nei problemi dei gas perfetti):

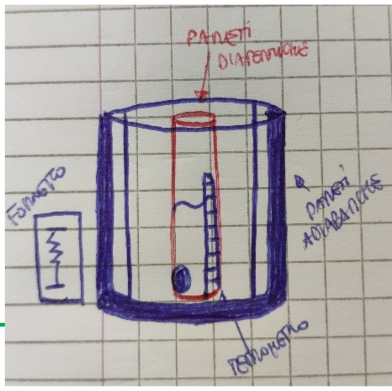
$$c = \frac{C}{n} \rightarrow c = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} \rightarrow [c] = \frac{J}{K\,mol}$$

⚠Noi consideriamo il calore specifico costante nei vari stati di aggregazione (fasi); nelle transizioni di fase invece (dove $T = costante$), parliamo di CALORE LATENTE = quantità di calore da fornire per il cambiamento di stato (dipende dalla sostanza e dalla trasformazione da effettuare):

$$Q = c_l m$$

CALORIMETRO (VASO DI DEWAR per l'esperimento di Joule) = recipiente con:

- Pareti adiabatiche;



- Intercapedine per fare il vuoto;
- Metallo schermato;
- Pareti diatermiche interne con dentro liquido, corpo e termometro;
- Fornetto per passare energia termica.

Nel calorimetro vale la relazione $\Sigma_i Q_i = 0$ e se:

- FASE = costante → $Q_i = mc\Delta T$;
- FASE CAMBIA → $Q_i = m\,c_l$.

Con queste quantità, possiamo tornare alla TEMPERATURA DI EQUILIBRIO con la formula:

$$\Sigma_i Q_i = 0 = Q_A + Q_B \rightarrow m_A c_A (T_{eq} - T_A) + m_B c_B (T_{eq} - T_B) = 0 \rightarrow T_f = T_{eq} = \frac{m_A c_A T_A + m_B c_B T_B}{m_A c_A + m_B c_B}$$

Inoltre sappiamo che lo SCAMBIO DI CALORE può avvenire per (chiamando $\dot{Q} = \frac{đQ}{đt}$ il FLUSSO TERMICO):

1) CONDUZIONE (a contatto, solido):

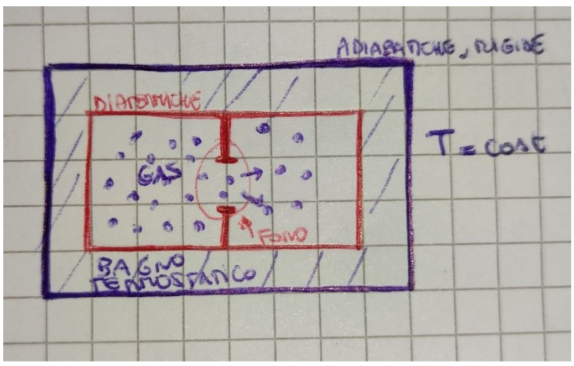
$$\dot{Q} = \frac{đQ}{đt} = k\frac{S}{l}\Delta T \; con \begin{cases} k = conducibilità \\ \Delta T = caldo - freddo \end{cases} \rightarrow đQ = k\frac{S}{l}\frac{dT}{dx}$$

2) CONVEZIONE (a contatto liquido-liquido o liquido-solido):
   - Fluido;
   - Superficie di scambio;
   - Flusso di calore $\dot{Q} \,\alpha\, T^{\frac{5}{4}}$;
   - Circoli convettivi (naturali o forzati).
3) IRRAGGIAMENTO (a distanza, es. termometro a infrarossi [tutti i corpi con T finita emettono radiazione termica]):

$$\dot{Q} = \sigma e S T^4 \; con \begin{cases} \sigma = costante\,di\,Stefan - Boltzmann = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \\ e = emissività \end{cases}$$

TRASFORMAZIONE REVERSIBILE:

- Ogni suo punto è d'equilibrio;
- No forze dissipative;
- Posso interrompere il processo e tornare indietro senza conseguenze residue.



ESPANSIONE LIBERA = aumento del volume di un gas senza che esso abbia interazioni con l'ambiente; trasformazione isoterma, adiabatica e IRREVERSIBILE:

⚠Se c'è uno scambio di calore, la trasformazione è sempre irreversibile!

TRASFORMAZIONI (POLITROPICHE): $\begin{cases} ADIABATICHE\,[Q=0] \rightarrow no\,calore\,scambiato \\ ISOTERME\,[T=cost] \\ ISOCORE\,[V=cost] \\ ISOBARE\,[p=cost] \end{cases}$

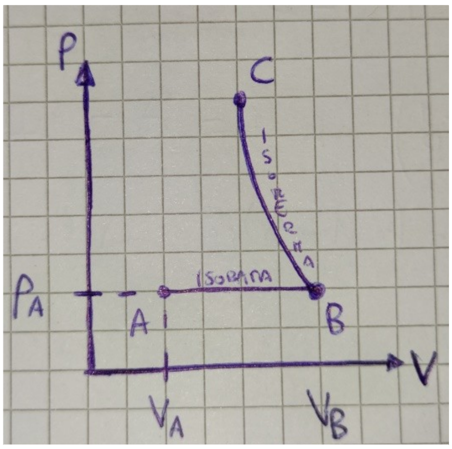
GAS IDEALE (o PERFETTO):

- Atomi/molecole come punti materiali;
- Poche Interazioni = solo urti interni tra molecole;
- Urti elastici;
- Isotropia (indipendente dalla direzione dell'urto).

LEGGI:

1) LEGGE DI BOYLE: $pV=cost \Leftrightarrow T=cost$ [ISOTERMA]
2) LEGGE DI GAY-LUSSAC: $V=V_0(1+\alpha T)\,con \begin{cases} V_0=volume\,a\,0\,°C \\ T\in °C \\ \alpha=\dfrac{1}{273{,}15\,°C} \end{cases} \Leftrightarrow p=cost$ [ISOBARA]
3) LEGGE DI GAY-LUSSAC PER LE ISOCORE: $p=p_0(1+\beta T)\Leftrightarrow V=cost$
4) AVOGADRO → con $T=0\,°C,\ p=p_{atm}=1{,}01325\cdot 10^5[Pa],\ n=\dfrac{N}{N_A}=1$ allora $V_{molare}=22{,}414[L]$

DIAGRAMMA DI CLAPEYRON:



$$\begin{cases} V_A=nV_{molare} \\ T_A=273{,}15\,K \\ p_A=p_{atm} \end{cases} \rightarrow p_C V_C=p_B V_B=p_A V_A \alpha T_C=n\,p_A v_m \alpha T_C \rightarrow \begin{cases} V_A=V_0\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha}+T[°C]\right)=V_0\alpha T[K] \\ R=8{,}314\left[\dfrac{J}{K\,mol}\right]=p_A V_m \alpha \end{cases} \rightarrow pV=nRT \rightarrow$$

$$\rightarrow pV=N k_B T\,con \begin{cases} n=\dfrac{N}{N_A} \\ k_B=\dfrac{R}{N_A}=costante\,di\,Boltzman \end{cases}$$

⚠La costante R (costante universale dei gas) vale solo nei punti di equilibrio!

FUNZIONE DI STATO $\rightarrow f=f(p,V,T) \rightarrow$ dipende solo dallo stato del sistema (punto di equilibrio); una funzione di stato è l'ENERGIA INTERNA:

$$U=U(p,V,T)$$

1°PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA:

$$\Delta U=U_B-U_A=Q_{AB}-L_{AB} \rightarrow L_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} \rightarrow p=\frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{dS}\geq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow LAVORO\,DI\,ESPANSIONE: \vec{F}\cdot d\vec{l}=\vec{F}\cdot\vec{n}\,dl=p\,dS\,dl=p\,dV \rightarrow L_{AB}=\int_A^B p\,dV$$

L'energia interna di un gas ideale dipende solo dalla temperatura, in quanto, se soggetto a variazioni di p o di V, non cambia il valore di U:

- ISOCORA $\rightarrow c_V=\frac{1}{n}\frac{dQ}{dT}=$¿ CALORE SPECIFICO A $V=cost \rightarrow Q_{AB}=n\,c_V\,\Delta T$ e $L=0 \rightarrow \Delta U=Q_{AB}$;
- ISOBARA $\rightarrow c_p=\frac{1}{n}\frac{dQ}{dT}=$¿ CALORE SPECIFICO A $p=cost \rightarrow Q_{AB}=n\,c_p\,\Delta T \rightarrow \Delta U=Q_{AB}-L_{AB}$;
- ISOTERMA $\rightarrow \Delta U=0 \rightarrow Q=L$;
- ADIABATICA $\rightarrow Q=0$.

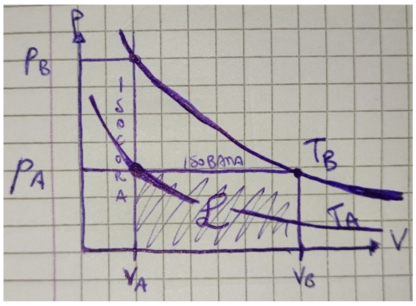
Per un GAS IDEALE:

$$\Delta U=n\,c_V\,\Delta T=n\,c_V(T_f-T_i)$$

⚠Il lavoro invece dipende dal percorso fatto (no funzione di stato); infatti:

$$dU=\delta Q-\delta L\;con\begin{cases} dU=non\,dipende\,dal\,percorso\,(f\,di\,stato),\,differenziale\,esatto \\ \begin{cases}\delta Q\\ \delta L\end{cases} \rightarrow dipendono\,dal\,percorso\,(no\,f\,di\,stato)\end{cases}$$

RELAZIONE TRA ISOBARA E ISOCORA:



Per avere la stessa ΔU, la isobara deve avere più calore dell'isocora in quanto le viene sottratto il lavoro:

$$\begin{cases}\Delta U_{isocora}=Q-0=Q\\ \Delta U_{isocora}=Q-L\end{cases}$$

$\rightarrow$ ISOBARA REVERSIBILE:

$$dU=n\,c_V\,dT=\delta Q-\delta L=n\,c_p\,dT-pdV \rightarrow [d(pV)=d(nRT) \rightarrow Vdp+pdV=nRdT \rightarrow pdV=nRdT] \rightarrow$$

$$\rightarrow n\,c_V\,dT=n\,c_p\,dT-nRdT \rightarrow c_p-c_V=R\,[Relazione\,di\,Meyer]$$

Per gas ideali:

- MONOATOMICI $\rightarrow c_V=\frac{3}{2}R;\,c_p=\frac{5}{2}R;\,\gamma=\frac{c_p}{c_V}=\frac{5}{3}$;

- BIATOMICI $\rightarrow c_V=\frac{5}{2}R;c_p=\frac{7}{2}R;\gamma=\frac{c_p}{c_V}=\frac{7}{5}.$

CICLO TERMODINAMICO:

$$\Delta U=0\rightarrow Q=L=\oint p dV$$

Le EQUAZIONI DELLE TRASFORMAZIONI sono quindi:

1) ISOTERMA:

$$T=cost\rightarrow\Delta U=0\rightarrow Q=L=\int p dV;Se\,\grave{e}\,reversibile:L=\int_A^B nRT\frac{dV}{V}=nRT\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

2) ISOCORA:

$$V=cost\Leftrightarrow\frac{p}{T}=cost\rightarrow L=0\rightarrow\Delta U=Q=nc_V\Delta T$$

3) ISOBARA:

$$p=cost\Leftrightarrow\frac{V}{T}=cost\rightarrow Q=nc_p\Delta T\rightarrow\Delta U=nc_V\Delta T\rightarrow L=nR\Delta T$$

4) ADIABATICA:

$$Q=0\rightarrow\Delta U=-L\rightarrow nc_V\Delta T=-\int p dV\rightarrow Se\,\grave{e}\,reversibile:\begin{cases}dU=-pdV=nc_V dT\\ pV=nRT\end{cases}\rightarrow-\frac{nRT}{V}dV=nc_V dT\rightarrow$$

$$-R\frac{dV}{V}=c_V\frac{dT}{T}\rightarrow[R=c_p-c_V]\rightarrow-\frac{(c_p-c_V)}{c_V}\frac{dV}{V}=\frac{dT}{T}\rightarrow-(\gamma-1)\frac{dV}{V}=\frac{dT}{T}\rightarrow-(\gamma-1)\int\frac{dV}{V}=\int\frac{dT}{T}\rightarrow$$

$$-(\gamma-1)\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)=\log\left(\frac{T_B}{T_A}\right)\rightarrow[\log=\ln]\rightarrow\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{(\gamma-1)}=\left(\frac{T_A}{T_B}\right)\rightarrow V_A^{(\gamma-1)}T_A=V_B^{(\gamma-1)}T_B\rightarrow V_A^{\gamma}p_A=V_B^{\gamma}p_B\rightarrow$$

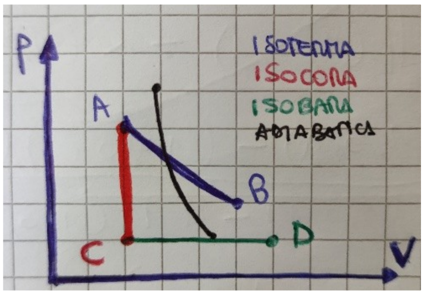
$$\left[p\frac{T^{\gamma}}{p^{\gamma}}=p^{(1-\gamma)}T^{\gamma}=cost\right]\rightarrow p_A^{(1-\gamma)}T_A^{\gamma}=p_B^{(1-\gamma)}T_B^{\gamma}$$

Dunque, per tutte le adiabatiche:

$$L_{AB}=\frac{1}{\gamma-1}(p_A v_A-p_B v_B)$$

Mentre solo per le adiabatiche reversibili:

$$\begin{cases}pV^{\gamma}=cost\\ TV^{(\gamma-1)}=cost\\ T^{\gamma}p^{(1-\gamma)}=cost\end{cases}$$



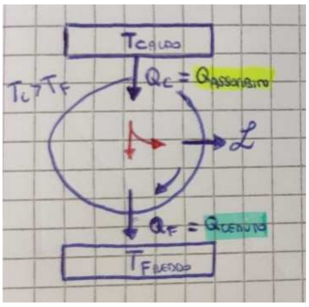
MACCHINA TERMICA = dispositivo a sistema chiuso con $Q=L(\Delta U=0 \Leftrightarrow CICLO)$ contenente gas ideale;

SORGENTE TERMICA = dispositivo che scambia Q a $T=cost$ caratterizzato da:

- Capacità termica → ∞;
- Transizione di fase;
- Termostato.

⚠Le macchine termiche possono avere più sorgenti ($\Sigma_i Q_i = L$); noi in generale vedremo macchine termiche con 2 SORGENTI:

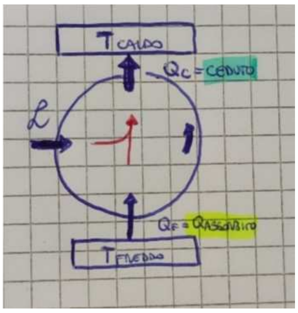
$$|Q_{Assorbito}|-|Q_{Ceduto}|=L>0$$



- CICLO DIRETTO (MOTORE):

$$\begin{cases} L>0\,[senso\,orario] \\ RENDIMENTO=\eta=\dfrac{L}{Q_{Assorbito}}=1-\dfrac{|Q_F|}{|Q_C|}=1+\dfrac{Q_F}{Q_C}\,con\,0<\eta<1 \end{cases}$$

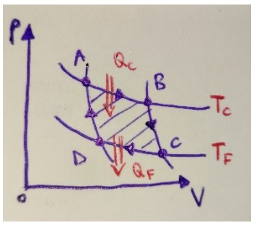
- CICLO INVERSO (FRIGORIFERO):



$$\begin{cases} L<0\,[senso\,antiorario] \\ COEFFICIENTE\,DI\,PRESTAZIONE=c.o.p=\dfrac{Q_F}{|L|}=\dfrac{Q_F}{|Q_C|-|Q_F|} \end{cases}$$

CICLI CON 4 TRASFORMAZIONI TRA 2 SORGENTI [log = ln]:

- **CARNOT** (diretto) = ciclo ideale (solo teorico) reversibile (in quanto tutte le trasformazioni sono reversibili) composto da:



  - AB = ESPANSIONE ISOTERMA → $\Delta U=0 \rightarrow Q=L=nRT_c\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$;
  - BC = ESPANSIONE ADIABATICA → $Q=0 \rightarrow \Delta U=-L=nc_V(T_F-T_c)$;
  - CD = COMPRESSIONE ISOTERMA → $\Delta U=0 \rightarrow Q=L=nRT_F\log\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$;
  - DA = COMPRESSIONE ADIABATICA → $Q=0 \rightarrow \Delta U=-L=nc_V(T_c-T_F)$.

Valgono le relazioni:

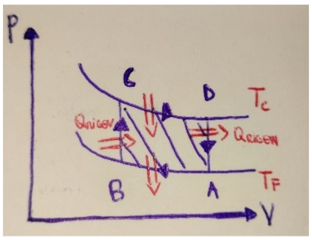
$$\begin{cases} p_A V_A = nRT_c \\ p_B V_B = nRT_c \end{cases} \rightarrow p_A V_A = p_B V_B \, e \begin{cases} T_c V_A^{(\gamma-1)} = T_F V_D^{(\gamma-1)} \\ T_c V_B^{(\gamma-1)} = T_F V_C^{(\gamma-1)} \end{cases} \rightarrow \frac{T_c V_A^{(\gamma-1)}}{T_c V_B^{(\gamma-1)}} = \frac{T_F V_D^{(\gamma-1)}}{T_F V_C^{(\gamma-1)}} \rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

Il RENDIMENTO DI CARNOT (e di tutte le macchine reversibili) è:

$$\eta_{Carnot}=1+\frac{Q_F}{Q_c}=1+\frac{nRT_F\log\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{nRT_c\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}=1+\frac{T_F\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{-1}}{T_c\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}=1-\frac{T_F\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}{T_c\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}=1-\frac{T_F}{T_c}$$

- **STIRLING** (diretto) = ciclo ideale reversibile con applicazione pratica composto da:
  - AB = COMPRESSIONE ISOTERMA $\rightarrow \Delta U=0 \rightarrow Q=L=nRT_F\log\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$;
  - BC = RISCALDAMENTO ISOCORO $\rightarrow L=0 \rightarrow \Delta U=Q=nc_V\left(T_c-T_F\right)$;
  - CD = ESPANSIONE ISOTERMA $\rightarrow \Delta U=0 \rightarrow Q=L=nRT_c\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$;
  - DA = RAFFREDDAMENTO ISOCORO $\rightarrow L=0 \rightarrow \Delta U=Q=nc_V\left(T_F-T_c\right)$.

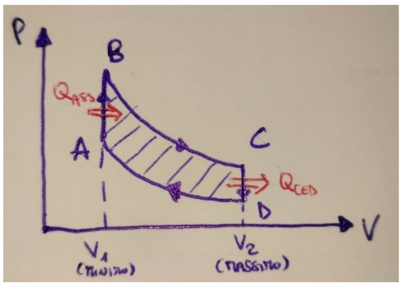
Il RENDIMENTO DI STIRLING è = a CARNOT:



$$\eta_{Stirling}=1+\frac{Q_F}{Q_c}=1+\frac{nRT_F\log\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{nRT_c\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}=1-\frac{T_F}{T_c}$$

⚠Il ciclo di Stirling non è usato nelle auto (basso numero di giri), ma viene usato in ambito criogenico!

- **OTTO** = motore a scoppio; a differenza di Carnot e Stirling, è un sistema aperto, che però idealizziamo con un sistema chiuso (prendendolo ad uno stato d'equilibrio):
  - AB = ASPIRAZIONE (RISCALDAMENTO ISOCORO) [COMBUSTIONE ISOCORA, perché avviene quando entra ossigeno];
  - BC = ESPANSIONE ADIABATICA;
  - CD = ESPULSIONE (RAFFREDDAMENTO ISOCORO);
  - DA = COMPRESSIONE ADIABATICA.



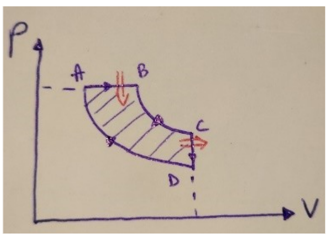
Per definire il RENDIMENTO DEL CICLO DI OTTO, introduciamo la grandezza chiamata FATTORE DI COMPRESSIONE, con il quale cercheremo di esprimere il rendimento:

$$\frac{V_2}{V_1}=Z \rightarrow \begin{cases} T_A V_1^{(\gamma-1)}=T_D V_2^{(\gamma-1)} \\ T_B V_1^{(\gamma-1)}=T_C V_2^{(\gamma-1)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_A=T_D Z^{(\gamma-1)} \\ T_B=T_C Z^{(\gamma-1)} \end{cases} \rightarrow \eta_{Otto}=1+\frac{Q_{Ceduto}}{Q_{Assaorbito}}=1+\frac{nc_V\left(T_D-T_C\right)}{nc_V\left(T_B-T_A\right)}=¿$$

$$¿1+\frac{\left(T_D-T_C\right)}{\left(T_C Z^{(\gamma-1)}-T_D Z^{(\gamma-1)}\right)}=1-\frac{1}{Z^{(\gamma-1)}}$$

⚠$\eta_{Otto\,\%}\leq 35\%$ di solito!

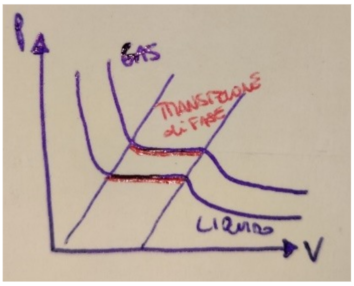
- **DIESEL** = funziona come quello di Otto, ma ha COMBUSTIONE ISOBARA:



$$\eta_{Diesel}=1+\frac{Q_{Ceduto}}{Q_{Assaorbito}}=1+\frac{n c_V\left(T_D-T_C\right)}{n c_p\left(T_B-T_A\right)}=1+\frac{\left(T_D-T_C\right)}{\gamma\left(T_B-T_A\right)}$$

⚠CD è isocora perché viene tolto il carburante usato, ma ne viene inserito altro, dunque V=cost!

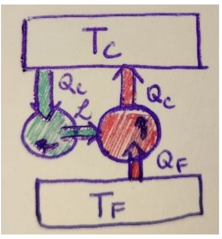
⚠Nei **CICLI CON GAS REALE**, invece, si ha anche una parte riservata alla TRASFORMAZIONE DI FASE (dove T=cost) ed allo stato liquido, il fluido è quasi incomprimibile [$V \cong cost$]; inoltre, avviene in questi sistemi l'ESPANSIONE DI JOULE-THOMPSON (gas raffreddato perché, quando esce dal sistema all'ambiente, l'ambiente ha $p_{Ambiente}<p_{sistema}$).



2° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA:

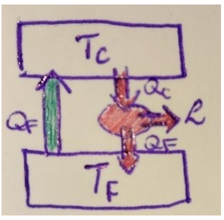
- 1° ENUNCIATO (KELVIN-PLANCK) = è impossibile realizzare una macchina termica che assorba calore da una sorgente e lo trasforma interamente in lavoro;
- 2° ENUNCIATO (CLAUSIUS) = è impossibile il passaggio spontaneo di calore da una sorgente fredda ad una calda (impossibile realizzare una macchina termica il cui unico risultato sia il passaggio di calore da una sorgente fredda ad una calda).

⚠I 2 enunciati sono "legati" e si dimostrano PER ASSURDO, usando 2 macchine termiche tra le stesse sorgenti:



1° CASO:

$$\begin{cases} Q_c=L\,[contro\,il\,1°\,enunciato] \\ Q_c^{'}+Q_F=L \end{cases} \rightarrow Q_c^{'}+Q_F=Q_c \rightarrow Q_F=Q_c-Q_c^{'}[contro\,il\,2°\,enunciato]$$



2° CASO: $L=Q_c+Q_F$

Il calore Q_F rilasciato dalla sorgente fredda [contro il 2° enunciato] si annulla con quello che ritorna alla sorgente fredda (Q_F), dunque otteniamo un sistema in cui tutto il Q_c (che sarebbe $|Q_c|-|Q_F|$), diventa lavoro, ovvero: $L=|Q_c|-|Q_F|$ [contro il 1° enunciato].

Conseguenze del 2° principio:

1) $\eta=\frac{L}{Q_{Assorbito}}<1$;
2) Se ho un ciclo diretto, devo avere 2 sorgenti altrimenti, nel caso di un CICLO MONOTERMICO DIRETTO, il calore sarebbe $Q=0$; posso avere invece un CICLO MONOTERMICO INVERSO, dove appunto $Q<0$. Perciò si ricava che per un CICLO MONOTERMICO, $Q\leq 0$;
3) $c.o.p<\infty$ [NO RAFFREDDAMENTO SENZA LAVORO APPLICATO]; non posso dunque raffreddare un corpo fino allo "zero assoluto".

⚠Dunque, posso trasformare tutto il lavoro in calore, ma non tutto il calore in lavoro.

TEOREMA DI CARNOT = nessuna macchina termica ha rendimento superiore a quello di Carnot tra = sorgenti:

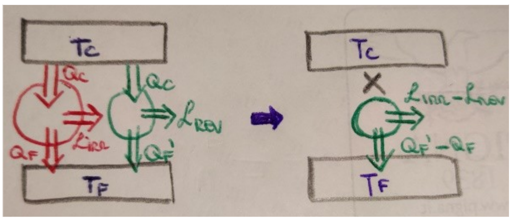
$$\eta \leq \eta_{carnot} = 1 - \frac{T_F}{T_c} \rightarrow \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0 \rightarrow \begin{cases} Se\, macchina\, reversibile \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_F}{T_c} \rightarrow \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0 \\ Se\, macchina\, irreversibile \rightarrow \eta < 1 - \frac{T_F}{T_c} \rightarrow \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} < 0 \end{cases}$$

Lo dimostriamo PER ASSURDO con questo esempio:

$$Hp: \eta_{IRR} > \eta_{REV}\, e\, Q_c = Q_c \rightarrow \eta_{IRR} = \frac{L_{IRR}}{Q_c} > \eta_{REV} = \frac{L_{REV}}{Q_c} \rightarrow L_{IRR} > L_{REV} \rightarrow 1 - \frac{|Q_F|}{Q_c} > 1 - \frac{|Q'_F|}{Q_c} \rightarrow |Q_F| < |Q'_F|$$

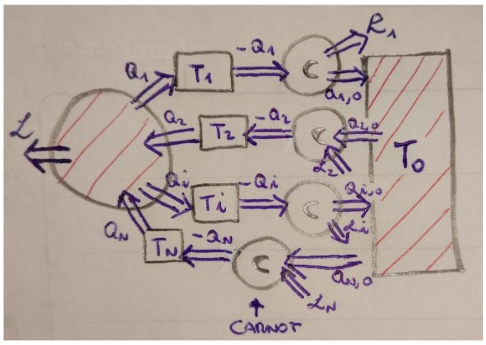
Dunque ed il COROLLARIO ci dice che $\eta_{REV} > \eta_{IRR}$

$$\eta_{REV} = \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_F}{T_c}.$$



In un CICLO DIRETTO DI UNA MACCHINA TRA 2 SORGENTI ricaviamo che:

$$\frac{T_F}{Q_c}\left(\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_c}{T_c}\right) \leq 0$$



In un CICLO TRA N SORGENTI, invece, vediamo che:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_{i,0}}{T_0}$$

Dal grafico vediamo che le sorgenti $T_1, T_2, \ldots, T_N$ non danno un contributo, bensì lavora solo la macchina termica di sinistra con la sorgente T_0, ovvero ho un CICLO MONOTERMO $[Q \leq 0]$ e quindi **TEOREMA DI CLAUSIUS**:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_{i,0}}{T_0} \leq 0$$

Per $N \rightarrow \infty$, $Q_i \rightarrow \delta Q$ e dunque:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \rightarrow \begin{cases} \oint \frac{\delta Q}{T} < 0 \, [CICLO\ IRREVERSIBILE] \rightarrow \delta Q\, no\, differenziale\, esatto \left[\oint \delta Q \neq 0\right] \\ \oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \, [CICLO\ REVERSIBILE] \rightarrow \frac{\delta Q}{T}\, differenziale\, esatto \end{cases}$$

Tramite una trasformazione reversibile, introduciamo una nuova FUNZIONE DI STATO (non dipende dal percorso) chiamata **VARIAZIONE DI ENTROPIA**:

$$dS=\left.\frac{\delta Q}{T}\right|_{REV} \to \Delta S=\int \left.\frac{\delta Q}{T}\right|_{REV}$$

Se prendo una trasformazione irreversibile, vedo che:

$$\oint \frac{\delta Q}{T}<0 \to \int_A^B \left.\frac{\delta Q}{T}\right|_{IRR}+\int_B^A \left.\frac{\delta Q}{T}\right|_{REV}<0 \to \Delta S=\int_A^B \left.\frac{\delta Q}{T}\right|_{REV}>\int_A^B \left.\frac{\delta Q}{T}\right|_{IRR}$$

Inoltre, sappiamo che:

$$\Delta S_{UNIV}=\Delta S_{SIST}+\Delta S_{AMB}\geq 0 \to \begin{cases} Trasformazione\ reversibile: \Delta S_{UNIV}=0 \to \Delta S_{SIST}=-\Delta S_{AMB} \\ Trasformazione\ irreversibile: \Delta S_{UNIV}>0 \to \Delta S_{SIST}>-\Delta S_{AMB} \end{cases}$$

$$CICLO \to \sum \Delta S_{SIST}=0 \to \begin{cases} Ciclo\ reversibile: \Delta S_{UNIV}=0 \to \sum \Delta S_{SIST}=\sum \Delta S_{AMB}=0 \\ Ciclo\ irreversibile: \Delta S_{UNIV}>0 \to \Delta S_{UNIV}=\sum \Delta S_{AMB}=\sum \left.(\Delta S_{SIST}+\Delta S_{AMB})\right|_{IRR} \end{cases}$$

⚠Trasformazione adiabatica è isoentropica [$\Delta S_{Adiabatica}=0$]!

⚠Per convenzione, indichiamo una trasformazione irreversibile con una linea tratteggiata.

⚠SCAMBIO DI CALORE = scambio di energia tra sistemi macroscopici; studiamo la variazione di entropia nei vari casi:

1) 2 SORGENTI:

$$\Delta S=\Delta S_c+\Delta S_F \to \begin{cases} \Delta S_c=\int \frac{\delta Q}{T_c}=\frac{-Q'}{T_c} \\ \Delta S_F=\int \frac{\delta Q}{T_F}=\frac{Q'}{T_F} \end{cases} \to \Delta S=Q'\left(\frac{1}{T_F}-\frac{1}{T_c}\right)$$

2) SORGENTE + CORPO:

$$\Delta S_{universo}=\Delta S_{sorgente}+\Delta S_{corpo} \to \begin{cases} \Delta S_{sorgente}=\frac{-Q}{T_c}=\frac{-mc(T_c-T_0)}{T_c} \\ \Delta S_{corpo}=\int \frac{\delta Q}{T}=\int_{T_0}^{T_c} \frac{mcdT}{T}=mc\log\left(\frac{T_c}{T_0}\right) \end{cases}$$

$$\to \Delta S_{universo}=mc\left(\log\left(\frac{T_c}{T_0}\right)-\frac{T_c-T_0}{T_c}\right)$$

3) 2 CORPI:

$$\begin{cases} \Delta S_1=\int_{T_1}^{T_F} \frac{\delta Q}{T}=mc\log\left(\frac{T_F}{T_1}\right) \\ \Delta S_2=\int_{T_2}^{T_F} \frac{\delta Q}{T}=mc\log\left(\frac{T_F}{T_2}\right) \end{cases} \to \Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=mc\log\left(\frac{T_F^2}{T_1 T_2}\right)>0 \to (T_1-T_2)^2>0$$

4) GAS IDEALE:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}\bigg|_{REV} = \int_A^B \frac{dU + \delta L}{T}\bigg|_{REV} = \int_A^B \frac{n c_v dT + p dV}{T} = \int_A^B \frac{n c_v dT}{T} + \int_A^B \frac{p dV}{T} = \text{¿}$$

$$\text{¿} n c_v \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + \int_A^B \frac{nRT dV}{V T} = n c_v \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Oppure:

$$\Delta S_{AB} = n c_v \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \log\left(\frac{nRT_B}{p_B}\frac{p_A}{nRT_A}\right) = n c_v \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + n\left(c_p - c_V\right)\left(\log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - \log\left(\frac{p_B}{p_A}\right)\right) = \text{¿}$$

$$\text{¿} n c_p \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \log\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$$

Oppure:

$$\Delta S_{AB} = n c_v \log\left(\frac{p_B V_B}{p_A V_A}\right) + nR \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = n c_v \log\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + n c_p \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

- ISOTERMA:

$$\Delta S_{ISOTERMA} = nR \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

- ISOBARA:

$$\Delta S_{ISOBARA} = n c_p \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

- ISOCORA:

$$\Delta S_{ISOCORA} = n c_V \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

- ADIABATICA:

$$\Delta S_{ADIABATICA} = 0$$

⚠Inoltre:

- SCAMBIO DI CALORE DI UNA SORGENTE:

$$\Delta S_{AMB} = \frac{-Q_{SIST}}{T_{SORG}}$$

- CAMBIO DI TEMPERATURA DI UN CORPO SENZA TRANSIZIONE DI FASE:

$$\Delta S_{AMB} = mc \log\left(\frac{T_F}{T_0}\right)$$

- CAMBIO DI TEMPERATURA DI UN CORPO CON TRANSIZIONE DI FASE:

$$\Delta S_{AB} = \frac{m c_l}{T_{Transizione}}$$

RENDIMENTO di Carnot ricavato con l'entropia:

$$\eta = 1 + \frac{Q_F}{Q_c} = 1 + \frac{(s_A - s_B) T_F}{(s_B - s_A) T_C} = 1 - \frac{T_F}{T_c}$$

APPUNTI CONTINUATI SOLO A MANO