❖ ANALISI MATEMATICA 1

DOMIZIO MATTIA

APPUNTI DI ANALISI 1

INSIEMI

Prodotto cartesiano:

$A, B \neq \emptyset$

$x \in A, y \in B$

$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$

Relazione d'ordine:

$R_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_1 \leq x_2\}$ # Ordino in base a chi è più grande.

Assioma di Dedekind:

$A, B \subset \mathbb{R}$

$\forall x \in A \ \land \ \forall y \in B, \ x \leq y$

$\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$ → "c" è elemento di separazione tra A e B

INTERVALLO:

$I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se $\forall x_1, x_2 \in I : \ x_1 < x_2$, allora $J := \{x \in \mathbb{R} : \ x_1 \leq x \leq x_2\} \subseteq I$

1. Limitato:
   a. Aperto: $(a, b) \to \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   b. Chiuso: $[a, b]$
2. Illimitato:
   a. Superiormente: $(a, +\infty)$ oppure $[a, +\infty)$
   b. Inferiormente: $(-\infty, a)$ oppure $(-\infty, a]$

Complementare:

$I = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$ → $C_{\mathbb{R}} I = \mathbb{R} \setminus I$ [complementare di I in $\mathbb{R}$]

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ [completamento di $\mathbb{R}$]

Densità di un insieme:

$A \subseteq \mathbb{R}, \ A \neq \emptyset$ → Dire che "A è denso in $\mathbb{R}$" significa:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \ x_1 < x_2 , \exists x \in A : \ x_1 < x < x_2$

Esempio (il caso di densità di $\mathbb{Q}$ [insieme dei n razionali] in $\mathbb{R}$): comunque si scelgano 2 numeri reali, sarà sempre possibile trovare numeri razionali che cadono tra i 2 reali.

Estremi di insiemi:

1. Insieme limitato → $\exists m \in \mathbb{R} : \ \forall x \in A, \ x \in [-m, +m]$ {sup → $x \in (-\infty, +m]$ e inf → $x \in [-m, +\infty)$}
2. Insieme illimitato → $\forall m \in \mathbb{R}, \ \exists x \in A : \ x \in \mathbb{R} \setminus [-m, +m]$ {sup→ $x \notin (-\infty, +m]$ e inf→ $x \notin [-m, +\infty)$}

Maggiorante e Minorante di un insieme:

$A \subseteq \mathbb{R}, \ A \neq \emptyset, \ m \in \mathbb{R}$

- m è maggiorante di A se $\forall x \in A,\ x \leq m$
- m è minorante di A se $\forall x \in A,\ x \geq m$

Massimo e minimo assoluti di un insieme:

- Massimo (con A limitato superiormente): suppongo che A ammetta maggioranti;
  Un maggiorante di A ($\overline{m}$) è il suo massimo se: $\overline{m} \in A\ \wedge\ \forall x \in A,\ x \leq\ \overline{m}$ (se $\overline{m}$ è il massimo di A, deve essere il più piccolo dei suoi maggioranti) → $\overline{m} \coloneqq max\, A$
- Minimo (con A limitato inferiormente): suppongo che A ammetta minoranti;
  Un minorante di A ($\overline{m}$) è il suo minimo se: $\overline{m} \in A\ \wedge\ \forall x \in A,\ x \geq\ \overline{m}$ (se $\overline{m}$ è il minimo di A, deve essere il più grande dei suoi minoranti) → $\overline{m} \coloneqq min\, A$

→ OSS: se $m \in Min(A) \equiv "Insieme\ dei\ minoranti\ di\ A"$ e $M \in Magg(A) \equiv "Insieme\ dei\ maggioranti\ di\ A"$, allora $m \leq M$ [Min(A) e Magg(A) sono separati]

Estremi inferiori e superiori:

- $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ A$ ammette maggioranti [Magg(A) = $\{r \in \mathbb{R}: \forall x \in A,\ x \leq r\} \neq \emptyset$]
  → Estremo superiore di A = minimo dei maggioranti di A $\rightarrow supA \coloneqq minMagg(A)$
- $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ A$ ammette minoranti [Min(A) = $\{r \in \mathbb{R}: \forall x \in A,\ x \geq r\} \neq \emptyset$]
  → Estremo inferiore di A = massimo dei minoranti di A $\rightarrow inf A \coloneqq \max Min(A)$

→ OSS: se A illimitato superiormente $\rightarrow supA = +\infty$, ma $\nexists\, max\, A$; se A illimitato inferiormente $\rightarrow inf A = -\infty$, ma $\nexists\, min\, A$

TEOREMA (max, min, inf, sup):

$A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$

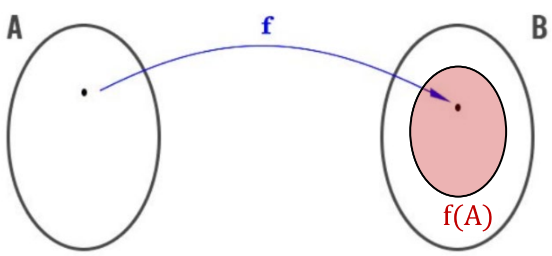
- <u>INF e MIN</u>:
  - Se $\exists\, min\, A \rightarrow \min A = \inf A$
  - Se A limitato inferiormente ($\inf A \in \mathbb{R}$) e se $\inf A \in A \rightarrow\ \inf A = \min A$
- <u>SUP e MAX</u>:
  - Se $\exists\, max\, A \rightarrow\ \max A = \sup A$
  - Se A limitato superiormente ($\sup A \in \mathbb{R}$) e se $\sup A \in A \rightarrow\ \sup A = \max A$

TEOREMA (caratterizzazione):

$A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ \exists \inf A \in \mathbb{R}\ \wedge\ \exists \sup A \in \mathbb{R}$

- Condizioni per l'inf A:
  - $\forall x \in A,\ x \geq inf\ A$
  - $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A\!: \inf A \leq x < \inf A + \varepsilon$
- Condizioni per il sup A:
  - $\forall x \in A,\ x \leq supA$
  - $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A\!: supA - \varepsilon < x \leq supA$

<u>FUNZIONI</u>



$f(A)$ = valori restituiti da f dopo l'elaborazione dei valori di A

A = $dom(f)$ / insieme di definizione [INPUT]

B = codominio di f [$f(A) \subseteq B$] $\rightarrow f(A)$ = OUTPUT

La funzione si scrive $f\!: A \rightarrow B$ con $x \in A \rightarrow y = f(x) \in f(A) \subseteq B$

→ $\forall x \in A,\ \exists 1 y \in B\!: y = f(x)$(per ogni valore di A, 1 valore di B)

Immagine $f(A)$ oppure $im(f)$:

$A, B \in \mathbb{R} \ \wedge \ A, B \neq \emptyset, \ f: A \to B$

$f(A) := \{y \in B: \exists x \in A: y = f(x)\}$ ovvero $\forall y \in f(A), \ \exists x \in A: y = f(x)$

Dominio $dom(f)$ = il più grande insieme di definizione ammissibile per f

$\forall x \in dom(f), \exists 1 y \in \mathbb{R}: y = f(x)$

Controimmagine di y

$f^{-1}(y) = \{x \in dom(f): f(x) = y\} \subseteq \text{dom}(f) \rightarrow \forall x \in f^{-1}(y), \ f(x) = y$ con $y \in f(A)$

Uguaglianza tra funzioni:

$f_1: A_1 \to B_1, \ f_2: A_2 \to B_2, \ A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R} \ \wedge \ A_1, A_2 \neq \emptyset$

$\rightarrow f_1 = f_2$ se $A_1 \equiv A_2 \ \wedge \ B_1 \equiv B_2 \ \wedge \ f_1 \equiv f_2$

⚠️ Se invece ho $f_1: A \to B \ \wedge \ f_2: A \to B \rightarrow \ f_1 \equiv f_2$ se $\forall x \in A, f_1(x) = f_2(x) \in B$

Restrizione di una funzione:

$A, B \subseteq \mathbb{R} \ \wedge \ A, B \neq \emptyset, \ f: A \to B$

$Q \subset A \ \wedge \ Q \neq \emptyset$

Restrizione di f a Q ($f_{|Q}$) $\rightarrow f_{|Q}: Q \to B$ è assegnata dalla legge $f_{|Q}(x) = f(x), \forall x \in Q$

⚠️ Fissato Q, la restrizione è unica!

Prolungamento di una funzione:

$A, B \subseteq \mathbb{R} \ \wedge \ A, B \neq \emptyset, \ f: A \to B$

$A \subseteq C \ \wedge \ C \subseteq \mathbb{R}, \ g: C \to B$

$\rightarrow$ Richiediamo che g sia il prolungamento di f a C, ovvero $g|_A \equiv f$

⚠️ Il prolungamento non è unico! (per avere un prolungamento a mia scelta, devo imporre delle condizioni)

Grafico di una funzione:

$f: A \to B, \ A, B \subseteq \mathbb{R} \ \wedge \ A, B \neq \emptyset$

$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \ \forall x \in A, \ y = f(x) \in B$

⚠️ Tutte le f(x) hanno un grafico, ma non tutti i grafici hanno una f(x)

Somma di funzioni:

$f_1: A_1 \to B_1 \subseteq \mathbb{R}, \ f_2: A_2 \to B_2 \subseteq \mathbb{R}$

Se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, allora somma di funzioni definita come $(f_1 + f_2)(x) \coloneqq f_1(x) + f_2(x)$ con $x \in A_1 \cap A_2$

Prodotto di funzioni:

$f_1: A_1 \to B_1 \subseteq \mathbb{R}, \ f_2: A_2 \to B_2 \subseteq \mathbb{R}$

Se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, allora prodotto di funzioni definito come $(f_1 \cdot f_2)(x) \coloneqq f_1(x) \cdot f_2(x)$ con $x \in A_1 \cap A_2$

Divisione di funzioni:

$f_1: A_1 \to B_1 \subseteq \mathbb{R}, \ f_2: A_2 \to B_2 \subseteq \mathbb{R}$

Se $(A_1 \cap A_2) \setminus \{x \in A_2 : f_2(x) = 0\} \neq \emptyset$, allora divisione tra funzioni definita come:

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \; con \; x \in (A_1 \cap A_2) \setminus \{x \in A_2 : f_2(x) = 0\}$$

Funzione identità:

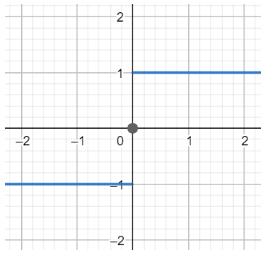
$id_A : A \to A$ → $x \in A \mapsto id_A(x) = x$

Funzione valore assoluto $abs(\cdot)$ oppure $|\cdot|$:

$abs: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$$abs(x) = \begin{cases} x & con\ x \geq 0 \\ -x & con\ x \leq 0 \end{cases}$$

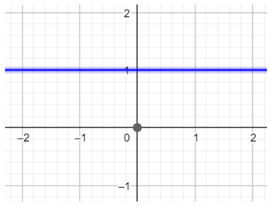
Dato $x \in \mathbb{R}$, $|x| \equiv abs(x)$ dice la distanza di x dallo zero; infatti $abs(x - x_0) = |x - x_0|$ = distanza tra x e x_0



Funzione segno $sign(\cdot)$:

$sign: \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$

Dato $x \in \mathbb{R}$, $sign(x) = \begin{cases} 1 & con\ x > 0 \\ 0 & con\ x = 0 \\ -1 & con\ x < 0 \end{cases}$



Funzione valore assoluto di segno $|sign(\cdot)|$:

$|sign(\cdot)| : \mathbb{R} \to \{0,1\}$

Dato $x \in \mathbb{R}$, $|sign(x)| = \begin{cases} 1 & con\ x \in R \setminus \{0\} \\ 0 & con\ x = 0 \end{cases}$

Composizione (o concatenazione) di funzioni:

$f_1 : A_1 \to B_1,\ f_2 : A_2 \to B_2$

$A_1, B_1, A_2, B_2 \subseteq \mathbb{R} \ \wedge \neq \emptyset$

$f_1(A_1) \subseteq B_1,\ f_2(A_2) \subseteq B_2$

$x \in A_1 \mapsto f_1(x_1) \in \hat{A}_1 \equiv (f_1(A_1) \cap A_2) \mapsto f_2\big(f_1(x)\big) \in f_2(A_2)$

Quindi, la condizione di composizione di funzioni è:

$\hat{A}_1 = f_1(A_1) \cap A_2 \neq \emptyset$ ovvero che il dominio della più esterna intersecato all'immagine della più interna $\neq \emptyset$

→ $f_2\big(f_1(x)\big) \equiv (f_2 \circ f_1)(x)$ con $(f_1 \circ f_2) : \hat{A}_1 \to B_2$

Funzione iniettiva = ad ogni y, al massimo 1 sola x

$f : A \to B,\ A, B \subseteq \mathbb{R} \ \wedge \ A, B \neq \emptyset$ → f iniettiva solo se $\forall x_1, x_2 \epsilon A : x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$

Funzione suriettiva = per ogni y, almeno 1 x

$f : A \to B,\ A, B \subseteq \mathbb{R} \ \wedge \ A, B \neq \emptyset$ → f suriettiva solo se $f(A) \equiv B$ [im(f)=codominio] → $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$

Funzione inversa = da immagine a dominio [INVERTIBILE se biunivoca, ovvero sia iniettiva che suriettiva]

Prendiamo una f suriettiva $f : A \to f(A)$

→ funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A : \ \forall y \in f(A),\ \exists 1 x \in A : \ x = f^{-1}\big(f(x)\big)$

Funzione monotona:

$f : dom(f) \to \mathbb{R}$

- f monotona crescente in $dom(f)$ se $\forall x_1, x_2 \in dom(f)$: $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$ [strettamente crescente se $f(x_1) < f(x_2)$]
- f monotona decrescente in $dom(f)$ se $\forall x_1, x_2 \in dom(f)$: $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \geq f(x_2)$ [strettamente crescente se $f(x_1) > f(x_2)$]

⚠️ La monotonia si riferisce ad intervalli quindi, anche se una funzione non è monotona in tutto il suo dominio, posso comunque dire che è monotona crescente/decrescente in un intervallo e in un altro.

⚠️ Una funzione costante può essere sia monotona crescente $[f(x_1) \leq f(x_2)]$ sia decrescente $[f(x_1) \geq f(x_2)]$ a causa dell'uguale della disuguaglianza.

TEOREMA (monotonia e iniettività):

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

Hp: f è monotona strettamente crescente in $dom(f)$ (analogo al caso di strettamente decrescente)

Th: f è iniettiva in $dom(f)$

Dimostrazione: per ipotesi f è strettamente crescente in dom(f), cioè $\forall x_1, x_2 \in dom(f)$: $x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$; dunque $\forall x_1, x_2 \in dom(f)$: $x_1 > x_2, f(x_1) > f(x_2)$ e per $x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ → f è iniettiva in $dom(f)$

⚠️ Il contrario in generale non vale, cioè se f iniettiva non per forza è monotona strettamente de/crescente.

Funzione limitata:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

- f è limitata inferiormente in dom(f) se $\exists m \in \mathbb{R}$: $\forall x \in dom(f), f(x) \geq m$ ossia $im(f) \subseteq [m, +\infty)$
- f è limitata superiormente in dom(f) se $\exists m \in \mathbb{R}$: $\forall x \in dom(f), f(x) \leq m$ ossia $im(f) \subseteq (-\infty, m]$

→ Quindi f è limitata in dom(f) se $\exists (m > 0) \in \mathbb{R}$: $\forall x \in \text{dom}(f), -m \leq f(x) \leq m$

Estremi di una funzione:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

- estremo inferiore → $inf(f) \coloneqq inf\big(im(f)\big) = \inf\{f(x), x \in \text{dom}(f)\}$
- estremo superiore → $sup(f) \coloneqq \sup\big(im(f)\big) = \sup\{\text{f(x)}, \text{x} \in \text{dom(f)}\}$

⚠️ Ricorda che inf e sup possono anche non appartenere all'im(f)!

Massimo e minimo assoluti di una funzione:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

- se f è limitata superiormente ($sup(f) \in \mathbb{R}$) e $sup(f) \in im(f)$, allora il sup si chiama massimo di f, ossia $max(f) = max\{f(x)\} \in \mathbb{R}$ con $x \in dom(f)$
  ⚠️ La controimmagine di max(f) è il punto di massimo di f (ovvero la x del massimo)
- se f è limitata inferiormente ($inf(f) \in \mathbb{R}$) e $inf(f) \in im(f)$, allora l'inf si chiama minimo di f, ossia $min(f) = min\{f(x)\} \in \mathbb{R}$ con $x \in dom(f)$
  ⚠️ La controimmagine di min(f) è il punto di minimo di f (ovvero la x del minimo)

Funzione lineare:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

Lineare se $\forall x_1, x_2 \in dom(f)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in \text{dom}(f)$, allora $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_1 f(x_1)$

→ Le funzioni lineari hanno forma $f(x) = mx$ con $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

→ Quando $f(x) = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora la f si dice affine.

Funzione pari (simmetria rispetto all'asse y) e dispari (simmetria rispetto all'origine/bisettrice [y=x]):

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$

- Funzione pari se $\forall x \in dom(f)$, $-x \in dom(f) \wedge f(x) = f(-x)$
- Funzione dispari se $\forall x \in dom(f)$, $-x \in dom(f) \wedge f(x) = -f(-x)$

Funzione periodica:

$f: dom(f) \to \mathbb{R},\ T \in \mathbb{R} \wedge T > 0$ con T = periodo della funzione

→ f è periodica in $dom(f)$ se $\forall x \in dom(f), x + kT \in dom(f)$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $\underline{f(x) = f(x + kT)}$

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}$

Intorno circolare (di x_0 e raggio r):

$x_0 \in \mathbb{R},\ r > 0 \wedge r \in \mathbb{R}$

$U(x_0; r) = U_r(x_0) := (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < r\}$

- Intorno destro → $U^+(x_0; r) = U_r^+(x_0) = (x_0,\ x_0 + r)$
- Intorno sinistro → $U^-(x_0; r) = U_r^-(x_0) = (x_0 - r,\ x_0)$

⚠ Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 = \pm\infty$, allora chiamiamo "intorno sinistro di $x_0 = +\infty$" qualunque intervallo del tipo $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$, e "intorno sinistro di $x_0 = -\infty$" qualunque intervallo del tipo $(-\infty, b)$ con $b \in \mathbb{R}$

⚠ Posso dunque studiare il comportamento di una funzione "puntualmente" ($f(x_0)$ con $x_0 \in dom(f)$) oppure "localmente" (anche quando $x_0 \notin dom(f)$, posso studiarne il comportamento in un intorno di x_0 se $(U(x_0; r) \cap dom(f)) \neq \emptyset$).

⚠ Se invece voglio definire l'intorno senza parlare di distanze, definisco l'intorno di x_0 $[U(x_0)]$ un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$, capace di contenere un intervallo aperto di cui x_0 è un elemento (ovvero (x_0, a) o (a, x_0)).

Punto interno:

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset,\ x_0 \in A$

x_0 è punto interno di A se $\exists r > 0:\ U(x_0; r) \subset A$

→ Insieme di tutti i punti interni di A = $int(A) = \mathring{A}$

Insieme aperto:

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$

A è detto aperto se $\forall x \in A$, x è punto interno di A

Insieme chiuso:

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$

A è detto chiuso se $C_{\mathbb{R}}A := \mathbb{R} \setminus A$ è aperto (cioè A è chiuso se il complementare in $\mathbb{R}$ di A è aperto)

⚠ $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono sia aperti che chiusi

Punto isolato:

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset,\ x_0 \in A$

x_0 è punto isolato di A se $\exists r > 0: (U(x_0; r) \cap A) \setminus \{x_0\} = \emptyset$, cioè $(U(x_0; r) \cap A) = \{x_0\}$ (e se escludiamo x_0, = $\emptyset$)

⚠️ Non ha senso calcolare $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se x_0 è un punto isolato!

Punto di accumulazione:

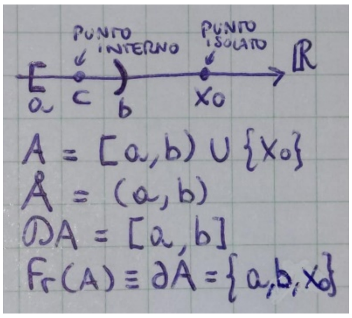
$A \subseteq \mathbb{R} \ \wedge \ A \neq \emptyset, \ \ x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 è punto di accumulazione di A se $\forall r > 0, \exists x \in A: x \in (U(x_0; r) \cap A) \setminus \{x_0\}$

⚠️ Caratterizzazione dei punti di accumulazione:

- Se $x_0 \in \mathring{A}$, allora $x \in DA$ (derivato di A = insieme di tutti i punti di accumulazione di A);
- Se x_0 è un punto isolato, non può essere di accumulazione (non ha senso calcolarne il limite);
- Se $x_0 \notin A$:
  - x_0 è isolato;
  - x_0 non è isolato, non appartiene ad A, ma è di accumulazione;
  - x_0 non è isolato, appartiene ad A ed è di accumulazione.

Punto di frontiera (bordo dell'insieme):



$A \subseteq \mathbb{R} \ \wedge \ A \neq \emptyset$

x_0 è un punto di frontiera se $\forall r > 0, \ (U(x_0, r) \cap C_{\mathbb{R}}A) \neq \emptyset \ \wedge \ (U(x_0, r) \cap A) \neq \emptyset$

→ Sono quindi i punti isolati e i punti di accumulazione non interni

$F_r(A) = \partial A$ = insieme di tutti i punti di frontiera di A

Chiusura di un insieme:

$A \subseteq \mathbb{R} \ \wedge \ A \neq \emptyset$

Chiusura di A → $\bar{A} = A \cup F_r(A)$ (nel caso dell'immagine sopra riportata, $\bar{A} = [a, b] \cup \{c\}$)

LIMITI DI FUNZIONI

Limite di una funzione:

$f: dom(f) \to \mathbb{R} \,; \ l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \,; x_0 \in D \, dom(f)$

Dire "f ha limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$" significa che:

$$\forall U(l), \exists U(x_0): \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}, f(x) \in U(l) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Pongo $U(l) \equiv U(l; \varepsilon) = (l - \varepsilon; l + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, e $U(x_0) \equiv U(x_0; \delta) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ e riscrivo la locuzione:

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta \equiv \hat{\delta}(x_0, \varepsilon) > 0: \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)\big) \setminus \{x_0\}, \ l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Deve quindi esistere questo intorno $U(x_0; \delta)$, comunque si scelga $\varepsilon > 0$, affinché esista il limite.

Esempi particolari:

- $\lim\limits_{x \to x_0 = +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ → $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R}: \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (m, +\infty)\big), l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ [Asint.Oriz]
- $\lim\limits_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = l = +\infty$ → $\forall M \in \mathbb{R} \wedge \ M > 0, \exists \delta \equiv \hat{\delta}(x_0; M): \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)\big) \setminus \{x_0\}$, $f(x) > M$
- $\lim\limits_{x \to x_0 = +\infty} f(x) = l = +\infty$ → $\forall M \in \mathbb{R}, \exists m \equiv \hat{m}(M) \in \mathbb{R}: \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (m, +\infty)\big), f(x) > M$

TEOREMA DELL'UNICITÁ DEL LIMITE:

$f: dom(f) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D\, dom(f) \ \wedge \ x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

$l \in \overline{\mathbb{R}}$

<u>Hp:</u> $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

<u>Th:</u> l è unico!

<u>Dimostrazione:</u> suppongo di avere 2 valori $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \wedge l_1 \neq l_2$ tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \wedge \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$; dalla definizione di limite (vedi sopra) ottengo che $l_1 - \varepsilon_1 < f(x) < l_1 + \varepsilon_1$ e che $l_2 - \varepsilon_2 < f(x) < l_2 + \varepsilon_2$. A questo punto, pongo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ (con $\varepsilon > 0$):

$$\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)\big) \backslash \{x_0\}, \qquad l_1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < l_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)\big) \backslash \{x_0\}, \qquad l_2 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < l_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Con $\varepsilon/2$ (e non più ε_1 ed ε_2), trovo un valore $0 < \delta < min\{\delta_1, \delta_2\}$; poi fisso $l_1 \neq l_2$, pongo $\varepsilon = l_1 - l_2 < 0$ e ottengo, $\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big) \setminus \{x_0\}$:

$$l_1 - \frac{(l_1 - l_2)}{2} < f(x) < l_1 + \frac{(l_1 - l_2)}{2} \rightarrow \frac{l_1 + l_2}{2} < f(x) < \frac{3l_1 - l_2}{2}$$

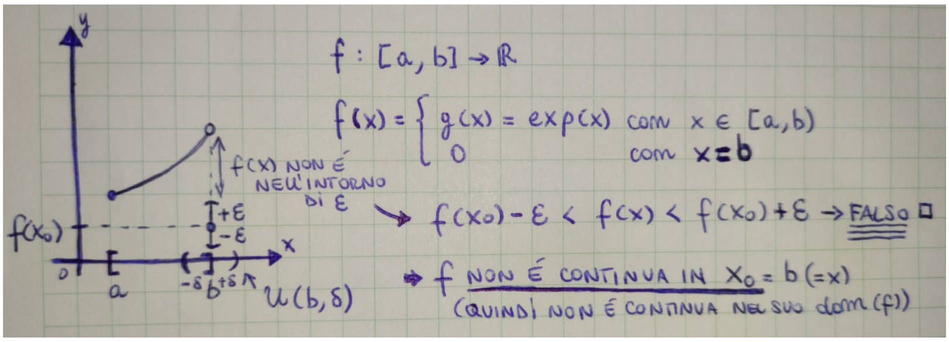
$$l_2 - \frac{(l_1 - l_2)}{2} < f(x) < l_2 + \frac{(l_1 - l_2)}{2} \rightarrow \frac{3l_2 - l_1}{2} < f(x) < \frac{l_1 + l_2}{2}$$

Da qui si trova $\frac{l_1+l_2}{2} < f(x) < \frac{l_1+l_2}{2}$ → IMPOSSIBILE!!! → Quindi $l_1 = l_2$, ovvero il <u>limite è unico</u>.

Funzione continua:

$f: dom(f) \rightarrow \mathbb{R}, \ x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ [potrebbe essere anche isolato]

→ f è continua in x_0 se $\forall U\big(f(x_0)\big), \exists U(x_0): \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap U(x_0)\big), \ f(x) \in U\big(f(x_0)\big)$; scrittura alternativa: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \equiv \hat{\delta}(x_0, \varepsilon): \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap U(x_0, \delta)\big), |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ovvero $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$



→ f è continua se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Prolungamento per continuità:

$f: dom(f) \rightarrow \mathbb{R}, \ x_0 \in D\,\mathrm{dom}(f) \ \wedge \ x_0 \notin \mathrm{dom}(f)$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

→ È possibile prolungare f in x_0 per continuità, definendo la nuova funzione:

$$\hat{f}: dom(f) \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ con la legge } \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & con\ \forall x \in \mathrm{dom}(f) \\ l = \lim_{x \to x_0} f(x) & con\ x = x_0 \end{cases}$$

⚠️ $\hat{f}$ (prolungata) ha lo stesso limite di f originaria per $x \to x_0$: $\lim_{x\to x_0} \hat{f}(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = l$; per l'unicità del limite, il prolungamento per continuità è unico.

Limite laterale:

- Destro:
  $f: dom(f) \to \mathbb{R}, x_0 \in D\big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0, +\infty)\big)$
  →limite destro $l_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0^+$ se $\forall U(l), \exists U^+(x_0): \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap U^+(x_0)\big) \setminus \{x_0\},\ f(x) \in U(l)$, ovvero $\lim_{x\to x_0{}^+} f(x) = l_+$
- Sinistro:
  $f: dom(f) \to \mathbb{R}, x_0 \in D\big(\mathrm{dom}(f) \cap (-\infty, x_0)\big)$
  →limite sinistro l_- $\in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0^-$ se $\forall U(l), \exists U^-(x_0): \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap U^-(x_0)\big) \setminus \{x_0\},\ f(x) \in U(l)$, ovvero $\lim_{x\to x_0{}^-} f(x) = l_-$

⚠️ Limiti laterali e limiti totali:

- Se $l_+ \neq l_-$, $\nexists l$ → se i limiti laterali sono diversi (o se anche uno solo dei 2 limiti laterali non esiste), il limite totale (o globale) non esiste;
- Se $\exists l_+ , \exists l_-\ \wedge\ l_+ = l_-$ → $\exists l = \lim_{x\to x_0} f(x)$ e si pone $l_+ = l_- = l$

TEOREMA (Limiti laterali e totali):

1^ PARTE (da limite totale a laterali):

Hp: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big) \backslash \{x_0\},\ |f(x) - l| < \varepsilon$ → che significa $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Dato che $\big(dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big) \backslash \{x_0\} = \big(dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0)\big) \cup \big(dom(f) \cap (x_0, x_0 + \delta)\big)$, allora abbiamo soddisfatto implicitamente anche le condizioni di limite laterale sinistro e destro, concludendo che:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

2^ PARTE (da limiti laterali a totale):

Hp: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_+ > 0: \forall x \in (\mathrm{dom}(f) \cap (x_0, x_0 + \delta_+)), |f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_- > 0: \forall x \in (\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta_-, x_0)), |f(x) - l| < \varepsilon$

Se prendiamo $0 < \delta \leq min\{\delta_-, \delta_+\}$, si avrà:

$\forall x \in dom(f) \cap \big((x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)\big) = \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big) \setminus \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$ (lim globale)

Discontinuità:

- ELIMINABILE → $\lim_{x\to x_0{}^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R} \neq f(x_0)$
  Come nel caso della funzione $|sign(x)|$ che ha in x = 0 una discontinuità "eliminabile" attraverso un prolungamento per continuità, cioè $g(x) = \begin{cases} |sign(x)|_{|\mathbb{R}\backslash\{0\}} \\ \lim_{x\to 0} |sign(x)|_{|\mathbb{R}\backslash\{0\}} \quad con\ x = 0 \end{cases} \to g(x) = 1$
- NON ELIMINABILE "SALTO FINITO" (1^specie) → $l_+ \neq l_-\ \wedge\ l_+, l_- \in \mathbb{R}$ (e quindi seppur i limiti laterali siano definiti, essendo diversi, non esiste il limite globale) [come nel caso della funzione $sign(x)$]
  Per calcolare il salto della funzione, si calcola la distanza:

$$s(x_0) = \left| \lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0{}^-} f(x) \right|$$

- NON ELIMINABILE DI 2^ SPECIE:
  $f: dom(f) \to \mathbb{R}, x_0 \in dom(f), x_0 \in D$ dom(f) (punto di accumulazione)
  x_0 è un punto di discontinuità di 2^ specie se uno dei 2 limiti laterali di f per $x \to x_0$ è = $\pm\infty$ o non esiste

Asintoti:

- VERTICALE: $f: dom(f) \to \mathbb{R}, x_0 \in D\big(\text{dom}(f) \cap (x_0, +\infty)\big)$ *oppure* $x_0 \in D\big(\text{dom}(f) \cap (-\infty, x_0)\big)$
  - Verticale destro se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$
  - Verticale sinistro se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$
  - Verticale se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$
- ORIZZONTALE: $f: dom(f) \to \mathbb{R}$, dom(f) è illimitato superiormente:
  - Orizzontale destro se $\exists l \epsilon \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \rightarrow y = l$ è asintoto orizzontale destro di f
  - Orizzontale sinistro se $\exists l \epsilon \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \rightarrow y = l$ è asintoto orizzontale destro di f

⚠ Solo se la f è monotona crescente su tutto il suo dom(f), l'asintoto orizzontale corrisponde al $sup(f)$ (e viceversa solo se f monotona decrescente su tutto dom(f), l'asintoto orizzontale = $inf(f)$).

TEOREMA DELLA LIMITATEZZA LOCALE:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}, x_0 \in D$ dom(f), $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Hp: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

Th: $\exists U(x_0)$: f limitata in $\big(dom(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$, cioè $\exists M > 0$: $|f(x)| \geq M$

Dimostrazione: per la definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U_1(x_0)$: $\forall x \in \big(\text{dom}(f) \cap U_1(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$, $|f(x) - l| < \varepsilon$ ovvero $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \rightarrow$ basta dunque prendere $U(x_0) \equiv U_1(x_0)$.

⚠ Corollario (LIMITATEZZA ALLA CONTINUITÁ di una f per punti del dom(f)):

$f: dom(f) \to \mathbb{R}, x_0 \in$ dom(f)

- Se x_0 è un punto isolato, $f(x_0) \in \mathbb{R}$ ovvero f è necessariamente limitata in $U(x_0)$;
- Se $x_0 \in dom(f) \wedge x_0 \in D\, dom(f)$, allora la continuità di f in x_0 si esprime con $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; pertanto il Teorema della limitatezza locale esiste in $U(x_0)$ in cui f è limitata, infatti:
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big), |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}, x_0 \in D$ dom(f), $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Hp: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

Th:

- Se $l > 0 \vee l = +\infty$, allora $\exists U(x_0)$: $\forall x \in \big(dom(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$, $f(x) > 0$
- Se $l < 0 \vee l = -\infty$, allora $\exists U(x_0)$: $\forall x \in \big(dom(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$, $f(x) < 0$

Dimostrazione: supponiamo $l \in \mathbb{R} \wedge l > 0$ e dimostriamo che $\exists U(x_0)$: $\forall x \in \big(dom(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$, $f(x) > 0$; fisso una $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ (poiché per Hp $l > 0$) e ottengo dalla definizione di limite che, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U_\varepsilon(x_0)$: $\forall x \in \big(\text{dom}(f) \cap U_\varepsilon(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \to l - \frac{l}{2} < f(x) < l + \frac{l}{2} \to \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}$ $\rightarrow$ basta quindi porre $U(x_0)$ dell'ipotesi = $U_{\varepsilon = \frac{l}{2}}(x_0)$.

⚠️ Se al posto di $U(x_0)$ pongo $U_+(x_0) \equiv (0, \delta)$ per il l_+ oppure $U_-(x_0) \equiv (-\delta, 0)$ per il l_-, il Teorema vale anche per i limiti laterali.

⚠️ Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ (ovvero $l = 0$), applicando la definizione di limite otteniamo $|f(x) - 0| < \varepsilon \to |f(x)| < \varepsilon$, ovvero $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$. Ciò significa che f può cambiare segno e pertanto non vale la permanenza del segno!

TEOREMA QUASI INVERSO DELLA PERMANENZA DEL SEGNO ("quasi" perché va addolcito il < o > con ≤ o ≥):

Hp: $\forall x \in \left(dom\, f(x) \cap U(x_0)\right) \setminus \{x_0\}, f(x) \geq 0 \vee f(x) \leq 0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Th:

- Se $f(x) \geq 0 \to l \geq 0$
- Se $f(x) \leq 0 \to l \leq 0$

TEOREMA (ALGEBRA DEI LIMITI):

Hp: $f, g: A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset,\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

Th:

- $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = l_1 \cdot l_2$
- Se $l_1 \neq 0,\ \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_1}$
- Se $l_2 \neq 0,\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

Dimostrazione = al teorema successivo.

TEOREMA (ALGEBRA DELLE FUNZIONI CONTINUE):

→ Per semplicità ci riferiamo solo al caso 2 del teorema precedente (gli altri casi sono analoghi)

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R}, g: dom(g) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)) \equiv \Omega$

Th: $\left(f_{|\Omega} \cdot g_{|\Omega}\right)$ è continua in x_0

Dimostrazione: $\left(f_{|\Omega} \cdot g_{|\Omega}\right): \Omega \to \mathbb{R},\ x_0 \in \Omega$ (punto dove f e g sono continue), allora dalla def di continuità:

- $|f_{|\Omega}(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1 \to f(x_0) - \varepsilon_1 < f_{|\Omega}(x)$(che da ora chiamiamo $f(x)$)$< f(x_0) + \varepsilon_1$ [in $U_{\varepsilon_1}(x_0)$]
- $|g_{|\Omega}(x) - g(x_0)| < \varepsilon_2 \to g(x_0) - \varepsilon_2 < g_{|\Omega}(x)$(che da ora chiamiamo $g(x)$)$< g(x_0) + \varepsilon_2$ [in $U_{\varepsilon_2}(x_0)$]

Ponendo $U(x_0) = U_{\varepsilon_1}(x_0) \cap U_{\varepsilon_2}(x_0)$, il prodotto $\left(f_{|\Omega} \cdot g_{|\Omega}\right)$ è t.c. $\forall x \in \left(\Omega \cap U(x_0)\right)$:

$$|f(x)g(x) - f(x_o)g(x_0)| = |f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_o)g(x_0)| =$$

$$\left|g(x)\left(f(x) - f(x_0)\right) + f(x_0)\left(g(x) - g(x_0)\right)\right| \leq \left|g(x)\left(f(x) - f(x_0)\right)\right| + \left|f(x_0)\left(g(x) - g(x_0)\right)\right| =$$

$$|g(x)|\left|\left(f(x) - f(x_0)\right)\right| + |f(x_0)|\left|\left(g(x) - g(x_0)\right)\right|$$

A questo punto mi ricordo del Teorema della limitatezza locale, soddisfatto da $f_{|\Omega}$ e da $g_{|\Omega}$ poiché sono continue in $x_0 \in \Omega$, e posso quindi determinare una costante M>0, tale per cui $\forall x \in \left(\Omega \cap U(x_0)\right)$, $\left|f_{|\Omega}(x)\right| < M \wedge \left|g_{|\Omega}(x)\right| < M$. Dunque:

$$|g(x)||(f(x)-f(x_0))|+|f(x_0)||(g(x)-g(x_0))|<M|(f(x)-f(x_0))|+M|(g(x)-g(x_0))|<M\varepsilon_1+M\varepsilon_2$$

Dato che $\varepsilon_1>0$ e $\varepsilon_2>0$ sono arbitrarie, pongo $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2M}>0$ e riscrivo la disuguaglianza come:

$$|f(x)g(x)-f(x_o)g(x_0)|<M\varepsilon_1+M\varepsilon_2=M\left(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)=\varepsilon$$

Questa scrittura afferma dunque che $\forall\varepsilon>0, \exists U(x_0): \forall x\in(\Omega\cap U(x_0)), (f_{|\Omega}\cdot g_{|\Omega})$ è continua in x_0.

TEOREMA (COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE):

Hp: $f: dom(f)\to\mathbb{R},\ \ g: dom(g)\to\mathbb{R},\ \ x_0\in dom(f)\wedge\ f(x_0)\in\hat{A}\equiv(im(f)\cap \mathrm{dom}(g))$

$f(x_0)=y_0\in dom(g)\ \wedge g$ è continua in y_0

Th: $g\circ f: \hat{A}\to\mathbb{R}$ è continua in x_0 → Composizione di funzioni continue è continua

Dimostrazione = teorema precedente (algebra di funzioni continue)

TEOREMI DEL CONFRONTO

- TEOREMA "ZERO" DEL CONFRONTO:

Hp: $f,g: A\to\mathbb{R},\ \ A\subseteq\mathbb{R}\ \wedge\ A\neq\emptyset$

$x_0\in\overline{\mathbb{R}}\ \wedge\ x_0\in DA$

$\exists U(x_0): \forall x\in(A\cap U(x_0))\setminus\{x_0\}, f(x)\leq g(x)$ ovvero "f maggiorata (limitata superiormente) da g" (g sopra f)

Th:

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$
- Se $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

Dimostrazione: dato che la funzione f in $x\to x_0$ tende a $+\infty$, allora $\forall M\in\mathbb{R}, \exists U_1(x_0): \forall x\in(A\cap U_1(x_0))\setminus\{x_0\}$, $f(x)>M$ (dato che $f(x)$ tende a $+\infty$, che è maggiore rispetto a qualsiasi valore di $\mathbb{R}$); dato che, per Hp, $\forall x\in(A\cap U(x_0))\setminus\{x_0\},\ f(x)\leq g(x)$, allora $\forall x\in(A\cap U(x_0)\cap U_1(x_0))\setminus\{x_0\},\ g(x)\geq f(x)>M$; ciò significa che $\lim_{x\to x_0} g(x)\geq\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\to\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ [la dimostrazione della 2^ tesi è analoga].

- 1° TEOREMA DEL CONFRONTO:

Hp: $f,g: A\to\mathbb{R},\ \ A\subseteq\mathbb{R}\ \wedge\ A\neq\emptyset$

$x_0\in\overline{\mathbb{R}}\ \wedge\ x_0\in DA$

$\exists U(x_0): \forall x\in(A\cap U(x_0))\setminus\{x_0\}, f(x)\leq g(x)$ ovvero "f maggiorata (limitata superiormente) da g" (g sopra f)

$\lim_{x\to x_0} f(x)=l_f\in\overline{\mathbb{R}}, \lim_{x\to x_0} g(x)=l_g\in\overline{\mathbb{R}}$

Th: $l_f\leq l_g$

Dimostrazione: suppongo prima $l_f,l_g\in\mathbb{R}$; poi introduco una funzione ausiliaria $h: (A\cap U(x_0))\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ con $h(x)=f(x)-g(x)\leq 0$ [in quanto $f(x)\leq g(x)$]. Dato che, per Hp, f e g ammettono limiti per $x\to x_0$, allora per l'Algebra dei limiti si ha che:

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)-g(x)=l_f-l_g$$

Dato che $h(x)=f(x)-g(x)\leq 0$, per il Teorema quasi inverso della permanenza del segno si ha che $\lim_{x\to x_0} h(x)=l_f-l_g\leq 0\to l_f\leq l_g$.

- 2° TEOREMA DEL CONFRONTO:

Hp: $f, h, g: A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R} \land A \neq \emptyset$

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \land x_0 \in DA$

$\exists U(x_0): \forall x \in \big(A \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$

Th: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$

Dimostrazione: dato che, per Hp, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$, allora per la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_1(x_0): \forall x \in \big(A \cap U_1(x_0)\big)\setminus\{x_0\}, \qquad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_2(x_0): \forall x \in \big(A \cap U_2(x_0)\big)\setminus\{x_0\}, \qquad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

Dato che in $\big(A \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$ vale la disuguaglianza $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, allora:

$\forall x \in \big(A \cap U_1(x_0) \cap U_2(x_0) \cap U(x_0)\big)\setminus\{x_0\}, l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon \to l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$, ovvero $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$.

TEOREMA (LIMITE DEL VALORE ASSOLUTO DI f e LIMITE di f):

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R},\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \land x_0 \in D\,\mathrm{dom}(f)$

Th: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$; se invece $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0 \to \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$ ma il viceversa non vale (non doppia implicazione!).

Dimostrazione

1^Tesi: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \to \forall \varepsilon > 0, \exists U(x_0): \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}, |f(x) - 0| < \varepsilon = |f(x)| < \varepsilon$; questa scrittura è la definizione del limite $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$. Se seguo a ritroso questa dimostrazione, dimostro anche che $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, quindi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|$

2^Tesi: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0 \to \forall \varepsilon > 0, \exists U(x_0): \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\},\ l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$; da qui abbiamo 2 casi:

- Se $f(x) \geq 0$, per il Teorema quasi inverso della permanenza del segno si ha $l \geq 0$, ma avendo, per Hp, $l \neq 0$, allora $l > 0$; data quindi la positività di $f(x)$ e di l, allora $f(x) = |f(x)|$ e $l = |l|$ e riscrivo:
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists U(x_0): \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}, \qquad |l| - \varepsilon < |f(x)| < |l| + \varepsilon \to \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$
- Se $f(x) < 0$, per il Teorema quasi inverso della permanenza del segno si ha $l \leq 0$, ma avendo, per Hp, $l \neq 0$, allora $l < 0$; riscrivo la disuguaglianza come:
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists U(x_0): \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}, -|l| - \varepsilon < -|f(x)| < -|l| + \varepsilon$$
  → cambio il segno e il verso delle disuguaglianze e ottengo: $|l| - \varepsilon < |f(x)| < |l| + \varepsilon \to \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$

Dimostro ora che, con $l \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$ non implica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ (ovvero il viceversa); lo posso fare tramite il controesempio della funzione $sign(\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dunque, con $f(x) = sign(x)$, prendo $x_0 = 0 \in Ddom(f)$ (derivato del dominio di f, dunque x_0 punto di accumulazione) e vedo che $\lim\limits_{x\to 0} |sign(x)| = 1$, mentre $\nexists \lim\limits_{x\to 0} sign(x)$; dunque con $l \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$ non implica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE

TEOREMA (CASO DELLA f PIÚ ESTERNA CONTINUA):

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R},\ g: \mathrm{dom}(g) \to \mathbb{R}$

$im(f) \subseteq \mathrm{dom}(g) \to (g \circ f): \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \land x_0 \in D\,\mathrm{dom}(f)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}} \land y_0 \in D\,\mathrm{dom}(g)$

- Se $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathrm{dom}(g)$ e g è continua in y_0; poniamo $g(y_0) = l \in \mathbb{R}$
- Se $y_0 = \pm\infty$, $\lim_{y \to y_0} g(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Th: $\lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y) = l$

TEOREMA (CASO DELLA f PIÚ INTERNA NON COSTANTE):

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R},\ g: \mathrm{dom}(g) \to \mathbb{R}$

$im(f) \subseteq \mathrm{dom}(g) \to (g \circ f): \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \land x_0 \in D\,\mathrm{dom}(f)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}} \land y_0 \in D\,\mathrm{dom}(g)$

$\lim_{y \to y_0} g(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\exists U(x_0): \forall x \in \big(dom(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}, f(x) \neq y_0$ ovvero $f(x)$ diverso dalla costante y_0, cui tende y in $dom(g)$

Th: $\lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y) = l$

⚠️ Se $f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \land y_0 \notin \mathrm{dom}(g)$, non avrebbe senso fare la composizione $g \circ f$ (e nemmeno il suo limite); se $f(x) = y_0 \in dom(g)$ [sempre $\forall x \in \big(dom(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$], ma g non è continua in y_0, allora $\lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim_{x \to x_0} g(y_0) = g(y_0)$ indipendentemente dal tendere di $x \to x_0$ (perché $f(x) = y_0 = k$), mentre invece $\lim_{y \to y_0} g(y) = l \neq g(y_0)$ (poiché per Hp g non è continua in y_0).

⚠️ Se $im(f) \nsubseteq \mathrm{dom}(g)$, prendo la composizione $(g \circ f): \hat{A} \to \mathbb{R}$ con $\hat{A} = im(f) \cap dom(g)$ e trovo che $\lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim_{y \to y_0 = x_0} g(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

CONFRONTO TRA FUNZIONI

Infinitesimi e infiniti:

$f: dom(f) \to \mathbb{R},\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \land x_0 \in D\,\mathrm{dom}(f)$

- "f è un infinitesimo per $x \to x_0$" equivale a scrivere $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$
- "f è un infinito per $x \to x_0$" equivale a scrivere $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

⚠️ Se f è infinitesima per $x \to x_0$ e, $\forall x \in \big(dom(f) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}, f(x) \neq 0$, allora $g := \frac{1}{f}$ è infinita per $x \to x_0$

Simboli di Landau (non sono uguaglianze tra funzioni, ma definiscono classe di funzioni (h) di cui f fa parte):

1) "o piccolo":
   $f, g: A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R} \land A \neq \emptyset$

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$

"f è un o piccolo di g per $x \to x_0$" equivale a scrivere $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ → "$f = o(g)\ per\ x \to x_0$" oppure "$f(x) = o(g(x))\ per\ x \to x_0$"

⚠ Se f è infinitesima per $x \to x_0$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1}$, cioè, per $x \to x_0$, $f(x) = o(1)$; quindi da ora in poi scrivere $f(x) = o(1)\ \ per\ x \to x_0$ equivale a dire che f è infinitesima per $x \to x_0$. Dunque è anche vero che, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora $f(x) = l + o(1)\ \ per\ x \to x_0$.

Funzioni trascurabili (trascurabilità):

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset\,;\ f, g: A \to \mathbb{R}\,;\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$

Supponiamo che $f = o(g), x \to x_0$

Questa relazione è equivalente a dire che "f è trascurabile rispetto a g, per $x \to x_0$"

⚠ Se $f(x) = o\big(g(x)\big), x \to x_0$, allora $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} + 1\right) = \lim_{x \to x_0} g(x)$

TEOREMA (PRINCIPIO DI ELIMINAZIONE DEI TERMINI TRASCURABILI – "PETT"):

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset;\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$

$f_1, g_1, f_2, g_2: A \to \mathbb{R}$

Hp: $f_2 = o(f_1), x \to x_0\,;\ g_2 = o(g_1), x \to x_0$

Th: $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Dimostrazione: $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} \to \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)\left[1+\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]}{g_1(x)\left[1+\frac{g_2(x)}{g_1(x)}\right]}$ ma, per Hp, $\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0 \wedge \lim_{x \to x_0} \frac{g_2(x)}{g_1(x)} = 0$; quindi, per la definizione di trascurabilità, otteniamo $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Funzioni equivalenti (equivalenza):

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset\,;\ f, g: A \to \mathbb{R}\,;\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$

Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Questa relazione è equivalente a dire che "f è equivalente a g, per $x \to x_0$" e si pone $f \sim g, per\ x \to x_0$ oppure $f(x) \sim g(x), x \to x_0$.

Funzioni asintotiche:

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset\,;\ f, g: A \to \mathbb{R}\,;\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$

"f e g sono asintotiche per $x \to x_0$" se $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0$

⚠ Se f e g sono asintotiche per $x \to x_0$, sono anche equivalenti per $x \to x_0$ (ma il viceversa non vale sempre).

Confronto tra infiniti:

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset\,;\ f, g: A \to \mathbb{R}\,;\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$

"f e g sono infiniti per $x \to x_0$", cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

- "f è un infinito di ordine superiore a g per $x \to x_0$" = a dire $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ ovvero $g(x) = o\big(f(x)\big), x \to x_0$

- "f è un infinito dello stesso ordine di g per $x \to x_0$" = equivale a dire $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ oppure $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{l}$; ridefinendo $g(x)$ come $\tilde{g}(x) = l \cdot g(x)$, otteniamo $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\tilde{g}(x)}{f(x)} = 1$

Confronto tra infinitesimi:

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset\,;\ f, g: A \to \mathbb{R}\,;\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$

"f e g sono infinitesime per $x \to x_0$", cioè $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

- "f è un infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x_0$" = a dire $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \to f(x) = o\big(g(x)\big), x \to x_0$
- "f è un infinitesimo dello stesso ordine di g per $x \to x_0$" = a dire $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \to f(x) \sim l \cdot g(x), x \to x_0$ sempre con $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Parte principale di una funzione:

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset\,;\ f, g: A \to \mathbb{R}\,;\ x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$

f è un infinito o un infinitesimo per $x \to x_0$

Infinito campione: $u(x) = \frac{1}{|x - x_0|} \to \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$

Infinitesimo campione: $v(x) = |x - x_0| \to \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = 0$

- Se $x_0 = +\infty, u(x) = x \wedge v(x) = \frac{1}{x}$
- Se $x_0 = -\infty, u(x) = -x \wedge v(x) = -\frac{1}{x}$

Chiamiamo "ordine di infinito" di $f: A \to \mathbb{R}$, rispetto all'infinito campione, un n° reale e positivo ($\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha > 0$) tale che $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{l[u(x)]^\alpha} = 1$ con $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ → la funzione $p_\alpha(x) = l[u(x)]^\alpha$ si chiama "parte principale di f, per $x \to x_0$" e $f(x) \sim p_\alpha(x), x \to x_0$.

Chiamiamo "ordine di infinitesimo" di $f: A \to \mathbb{R}$, rispetto all'infinitesimo campione, un n° reale e positivo ($\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha > 0$) tale che $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{l[v(x)]^\alpha} = 1$ con $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ → la funzione $p_\alpha(x) = l[v(x)]^\alpha$ si chiama "parte principale di f, per $x \to x_0$" e $f(x) \sim p_\alpha(x), x \to x_0$.

PROPRIETÀ E CONSEGUENZE DELLA CONTINUITÀ

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI:

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$

Hp: $f(a) \cdot f(b) < 0$

Th:

- $\exists x_0 \epsilon (a, b): f(x_0) = 0$
- Se f è monotona strettamente in $[a, b]$, allora x_0 è unico

(es. $e^x + x = 0$, studiata nell'intervallo A = [-1, 0] e poi si va a restringere per individuare lo zero)

+ Corollario:

$I \subseteq \mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$ è continua su I

Hp: $a, b \in \overline{\mathbb{R}} \wedge a, b$ estremi di I

$\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ e hanno segno opposto

Th:

- $\exists x_0 \in I: f(x_0) = 0$
- Se f strettamente monotona, x_0 è unico

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI:

Hp: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$

Th:

- Se $f(a) < f(b)$, $[f(a), f(b)] \subseteq im(f)$
- Se $f(a) > f(b)$, $[f(b), f(a)] \subseteq im(f)$
- Se $f(a) = f(b)$, $f(a) = f(b) \in im(f)$

Dimostrazione:

$f(a) < f(b) \to [f(a), f(b)] \subseteq im(f)$? Dato che f è definita in x = a e x = b, è sufficiente dimostrare che $(f(a), f(b)) \subseteq im(f)$ → perciò fisso $y \in (f(a), f(b))$ e dimostro che $y \in im(f)$, ossia $\exists x_0 \epsilon (a, b): y = f(x_0)$; ciò deve valere $\forall y \in (f(a), f(b))$. Perciò introduco la funzione ausiliaria $g: [a, b] \to \mathbb{R} \wedge g(x) = f(x) - y$ e, dato che f è continua in $[a, b]$, allora anche g lo è. Inoltre, sempre da f, sappiamo che:

- $g(a) = f(a) - y < 0$
- $g(b) = f(b) - y > 0$

Possiamo concludere dunque che g rispetta il Teorema dell'esistenza degli zeri $(g(a)g(b) < 0)$. Quindi $\exists x_0 \epsilon (a, b): g(x_0) = f(x_0) - y = 0 \to f(x_0) = y \to y \in im(f)$.

+ Corollario 1:

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e monotona su $[a, b]$

- Se f monotona crescente su $[a, b]$, $[f(a), f(b)] \equiv im(f)$
- Se f monotona decrescente su $[a, b]$, $[f(b), f(a)] \equiv im(f)$

+ Corollario 2:

$I \subseteq \mathbb{R}; f: I \to \mathbb{R}$ continua su I

$f(I) \equiv im(f)$ è anch'essa un intervallo

+ Corollario 3:

Hp: $I, J \subseteq \mathbb{R}$ (intervalli); $f: I \to J$ continua e invertibile ($\exists f^{-1}: J \to I$) su I

Th: $f^{-1}: J \to I$ continua su J

TEOREMA DI WEIERSTRASS:

Hp: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$

Th:

- $\exists \min f = m \ \wedge \ \exists \max f = M$
- $\exists x_m \in [a, b]: f(x_m) = m = \min f \ \wedge \ \exists x_M \in [a, b]: f(x_M) = M = \max f$

→ Siccome f è definita su un intervallo $[a, b]$, allora $f([a, b]) = [m, M] \subseteq [f(a), f(b)]$

TEOREMA (Iniettività e continuità per funzioni continue):

$f: I \to \mathbb{R}$ continua su I → f iniettiva $\Leftrightarrow$ f strettamente monotona

SUCCESSIONI

$A \subseteq \mathbb{N} \ \wedge A$ illimitato superiormente

$a: A \to \mathbb{R} \ \wedge \ n \in A: a_n \in \mathbb{R} \to \{a_n\}_{n\in A}$

A è l'insieme degli indici della successione ($n \in A \subseteq \mathbb{N}$), A è un insieme discreto e $DA = \{+\infty\}$

Ogni successione è una funzione, dunque ha le proprietà delle funzioni.

Limite di una successione:

Indicheremo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ solo con $\lim\limits_{n} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall U(l), \exists n_0: \forall n \geq n_0, \ a_n \in U(l)$

- Se $l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0: \forall n \geq n_0, |a_n - l| < \varepsilon \to l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$
- Se $l = +\infty$, $\lim\limits_{n} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}, \exists n_0: \forall n \geq n_0, \ a_n > b$
- Se $l = -\infty$, $\lim\limits_{n} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}, \exists n_0: \forall n \geq n_0, \ a_n < b$

Studiare il "carattere" di una successione $\{a_n\}_{n\in A}$ significa stabilire cosa fa $\lim\limits_{n} a_n$:

- Se $\lim\limits_{n} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{a_n\}_{n\in A}$ si dirà convergente a l
- Se $\lim\limits_{n} a_n = +\infty \Leftrightarrow \{a_n\}_{n\in A}$ si dirà positivamente divergente
- Se $\lim\limits_{n} a_n = -\infty \Leftrightarrow \{a_n\}_{n\in A}$ si dirà negativamente divergente
- Se $\lim\limits_{n} a_n = \pm\infty \Leftrightarrow \{a_n\}_{n\in A}$ si dirà divergente (caso più generale)
- Se $\nexists \lim\limits_{n} a_n \Leftrightarrow \{a_n\}_{n\in A}$ si dirà indeterminata

"Definitivamente" per le successioni:

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gode "definitivamente" di una proprietà se e solo se $\exists n_0: \forall n \geq n_0$, a_n soddisfa la suddetta proprietà (cioè soddisfa quella proprietà da un certo indice in poi).

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO PER SUCCESSIONI A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI):

$$\lim_{n} \frac{a_n+1}{a_n} = l$$

Se:

- $l < 1 \to \lim\limits_{n} a_n = 0$
- $l > 1 \to \lim\limits_{n} a_n = +\infty$
- $l = 1 \to$ Boh! Non so il carattere, devo usare altri metodi

TEOREMA (CRITERIO DELLA RADICE PER SUCCESSIONI A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI):

$$\lim_{n} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Se:

- $l < 1 \to \lim\limits_{n} a_n = 0$
- $l > 1 \to \lim\limits_{n} a_n = +\infty$
- $l = 1 \to$ Boh! Non so il carattere, devo usare altri metodi

⚠️ Visto che i due metodi si ricavano uno dall'altro, se usandone uno trovo $l = 1$, anche con l'altro non trovo una soluzione!

TEOREMA

Hp: $A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$; $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$; $f: A \to \mathbb{R}$

Th: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subseteq A$: $\lim\limits_n x_n = x_0$, si ha che $\lim\limits_n f(x_n) = l$

Dimostrazione

1^parte:

Hp: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Th: $\forall \{x_n\} \subseteq A$: $\lim\limits_n x_n = x_0$, si ha che $\lim\limits_n f(x_n) = l$

Parto dalla definizione di limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall U(l), \exists U(x_0): \forall x \in \big(A \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}, f(x) \in U(l)$; se considero $\{x_n\} \subseteq A: \lim\limits_n x_n = x_0$, allora $\forall U_1(x_0), \exists n_0: \forall n \geq n_0, x_n \in U_1(x_0)$. Prendendo $U_1(x_0) = U(x_0)$, avrò dunque che $\exists n_0: \forall n \geq n_0$, $x_n \in (A \cap U_1(x_0)) \setminus \{x_0\}$ e anche $f(x_n) \in U(l)$. Data la generalità di $U(l)$, posso affermare che $\forall U(l), \exists n_0: \forall n \geq n_0, f(x_n) \in U(l) \to \lim\limits_n f(x_n) = l$.

2^parte:

Hp: $\forall \{x_n\} \subseteq A$: $\lim\limits_n x_n = x_0$, si ha che $\lim\limits_n f(x_n) = l$

Th: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Dimostro per assurdo, supponendo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq l \to \exists U_1(l): \forall U(x_0), \forall x \in \big(A \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$, allora $f(x) \notin U_1(l)$; per Hp, sappiamo che ogni successione ha valori in A, tale che $\lim\limits_n x_n = x_0$ implica $\lim\limits_n f(x_n) = l$. Suppongo $x_0 \in \mathbb{R}$ e consideriamo $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $U_n(x_0) = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$: $x_n \in U_n(x_0)$. Da qui si evince che:

- Per il 2° Teorema del confronto, $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n} \to \lim\limits_n x_n = x_0$ (perché al crescere di n, $x_n \to x_0$). Quindi $\lim\limits_n f(x_n) = l \Leftrightarrow \forall U(l), \exists \overline{n_0}: \forall n \geq \overline{n_0}$, $f(x_n) \in U(l)$;
- $\forall n_1, n_2, U_{n_1}(x_0) \subset U_{n_2}(x_0)$ (perché ho $\frac{1}{n}$); dunque $\exists U_1(x_0): \forall n \geq n_0, x_n \in U_1(x_0)$.

Se considero in particolare $U_1(x_0)$, ho che $\forall x_n \in \big(A \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$ si deve avere $f(x_n) \notin U_1(l)$, ma ciò contraddice quanto riportato prima → ASSURDO!

→ Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ potevo avere $x_0 = +\infty \to U_n(x_0) = (n, +\infty)$ e $x_0 = -\infty \to U_n(x_0) = (-\infty, n)$

⚠ Questo teorema si può usare per dire che un limite non esiste! (una funzione ha limite se, passandole qualsiasi successione $\{x_n\}$ ad elementi del dominio di f, dovrebbe dare lo stesso limite $\lim\limits_n f(x_n)$).

Sottosuccessione (o successione estratta):

$\{a_n\}_{n \in A}$; $f: A \to A$ monotona strettamente crescente

Diciamo che $b_n = a_{f(n)}$ indica la sottosuccessione estratta da a_n mediante f

⚠ Le sottosuccessione possono essere usate per studiare il carattere (il limite) di una successione:

TEOREMA (Limite delle sottosuccessioni):

$\{a_n\}_{n \in A}$

Se $\lim\limits_n a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, tutte le sottosuccessioni b_n estratte da a_n sono tali che $\lim\limits_n b_n = l$ (carattere sottosuccessione deve essere lo stesso della successione)

TEOREMA (Bolzano – Weierstrass): da ogni successione limitata, si può sempre estrarre una sottosuccessione convergente

SCALA DI INFINITI (o ordini di grandezza per $n \to +\infty$) PER LE SUCCESSIONI [con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \to +\infty$]:

$log_a n$ con $n > 1$	n^k con $k > 0, k \in \mathbb{R}$	b^n con $b > 1$	$n!$	n^n

CALCOLO DIFFERENZIALE

Rapporto incrementale:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}\,;\, x_0 \in dom(f) \wedge x_0 \in D\, dom(f)$

Rapporto incrementale di f → $R_f(x, x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ con $x \neq x_0$

Derivata prima:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}\,;\, x_0 \in dom(f) \wedge x_0 \in D\, dom(f)$

Derivata prima di f in x_0 → $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} R_f(x, x_0) \in \mathbb{R}$

- Se $\exists f'(x_0)$, allora diciamo che f è derivabile in x_0
- Se $\nexists f'(x_0) \to \nexists \lim\limits_{x \to x_0} R_f(x, x_0)$ oppure $\lim\limits_{x \to x_0} R_f(x, x_0) = \pm\infty$, allora diciamo che f non è derivabile in x_0; perciò x_0 è un punto di non derivabilità per f
- Se f non è continua in x_0, allora non è derivabile in x_0

Al variare di $x_0 \in D\, dom(f)$, posso dunque definire la "derivata prima di f", ovvero f', il cui dominio sarà:

$$dom(f') = \left\{x_0 \in dom(f) \colon \lim_{x \to x_0} R_f(x, x_0) = f'(x_0)\right\} \subseteq \mathbb{R}$$

TEOREMA (Derivabilità implica continuità):

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R}\,;\, x_0 \in dom(f) \wedge x_0 \in D\, dom(f)$

$x_0 \in Int(dom(f))$ [ovvero punto interno]

Th: se f derivabile in x_0, f è continua in x_0

Dimostrazione: poiché f è derivabile in x_0, allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

- Se $f'(x_0) = 0 \to f(x) - f(x_0) = o(x - x_0)\ per\ x \to x_0$; pertanto poiché $\lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$, allora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, dunque f è continua in x_0
- Se $f'(x_0) \neq 0 \to \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{1}{f'(x_0)} = 1$, ma, poiché $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x_0)[x - x_0] = 0 \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$; quindi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, dunque f è continua in x_0

⚠️ Da tutto ciò ricaviamo anche la relazione $f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)[x - x_0]\ per\ x \to x_0$ (in quanto dalla dimostrazione, sappiamo che il loro rapporto = 1); quindi con opportuni passaggi:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)[x - x_0] + o(x - x_0)\ \ per\ x \to x_0$$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0] + o(x - x_0)\ per\ x \to x_0$, cioè la 1^ FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO.

Derivate laterali:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in dom(f)$, non isolato

Fissiamo $\delta > 0$ e consideriamo l'intorno $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Supponiamo che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathrm{dom}(f)$ e consideriamo i seguenti casi:

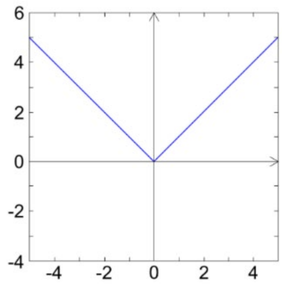
- $[x_0, x_0 + \delta) \subset dom(f)$
  f è derivabile in x_0 "da destra" se $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} R_f(x, x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$ [Derivata destra]
- $(x_0 - \delta, x_0] \subset dom(f)$
  f è derivabile in x_0 "da sinistra" se $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} R_f(x, x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$ [Derivata sinistra]

ESISTENZA DI $f'(x_0)$ IN RELAZIONE ALLE DERIVATE LATERALI:

- Se $x_0 \in Int(dom(f))$, ha senso chiedersi se esistono i limiti laterali di $R_f(x, x_0)$; se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$, allora $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) \in \mathbb{R}$
- Se $x_0 \in \mathrm{dom}(f) \wedge x_0 \notin Int(dom(f))$, allora ha senso chiedersi se esiste soltanto 1 dei due limiti laterali di $R_f(x, x_0)$ (o destro o sinistro a seconda del caso); se $f'_\pm(x_0) \in \mathbb{R}$, allora $f'_\pm(x_0) = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI DI NON DERIVABILITÁ:

- Punto angoloso:



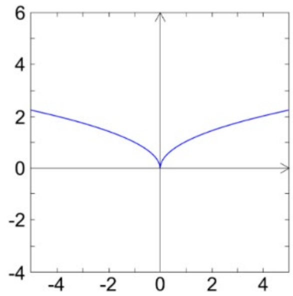
$f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int(dom(f))$

x_0 è un punto di non derivabilità di tipo "punto angoloso" se:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} R_f(x, x_0) = f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} R_f(x, x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \end{cases} \to f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$$

⚠️ In corrispondenza di un punto angoloso f è continua!

- Punto cuspidale (o cuspide):



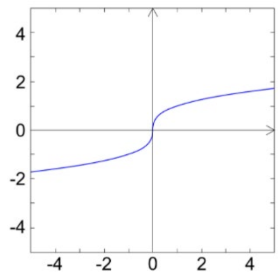
$f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int(dom(f))$

x_0 è un punto di non derivabilità di tipo "cuspidale" se:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} R_f(x, x_0) = \pm\infty \to \nexists f'_+(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} R_f(x, x_0) = \mp\infty \to \nexists f'_-(x_0) \end{cases} \to \exists, ma\ infiniti\ e\ discordi$$

⚠️ In corrispondenza di un punto cuspidale f è continua!

- Punto di flesso a tangente verticale:



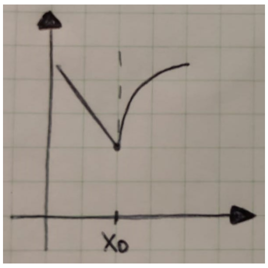
$f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int(dom(f))$

x_0 è un punto di non derivabilità di tipo "punto di flesso a tangente verticale" se:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} R_f(x, x_0) = \pm\infty \to \nexists f'_+(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} R_f(x, x_0) = \pm\infty \to \nexists f'_-(x_0) \end{cases} \to \exists, ma\ infiniti\ e\ concordi$$

⚠️ Flesso ascendente con $\lim\limits_{x \to x_0^\pm} R_f(x, x_0) = +\infty$ e discendente con $\lim\limits_{x \to x_0^\pm} R_f(x, x_0) = -\infty$

- Punto angoloso-cuspidale:

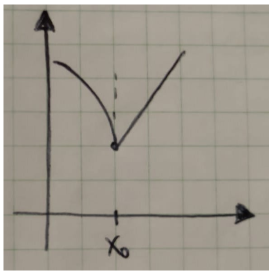


$f: dom(f) \to \mathbb{R}; x_0 \in Int(dom(f))$

x_0 è un punto di non derivabilità di tipo "angoloso-cuspidale" se:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} R_f(x, x_0) = \pm\infty \to \nexists f'_+(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} R_f(x, x_0) = f'_-(x_0) \end{cases}$$

- Punto cuspidale-angoloso:



$f: dom(f) \to \mathbb{R}; x_0 \in Int(dom(f))$

x_0 è un punto di non derivabilità di tipo "angoloso-cuspidale" se:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} R_f(x, x_0) = f'_+(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} R_f(x, x_0) = \pm\infty \end{cases}$$

⚠️ Per indagare la presenza di punti di non derivabilità, impiego la definizione di derivata prima; posso trovare anche punti di non derivabilità diversi da quelli sopra elencati; basta semplicemente che $\nexists f'_+(x_0)$ o $\nexists f'_-(x_0)$ o che esistano e siano diverse (ovviamente nel caso di punti interni al dominio).

ALGEBRA DELLE DERIVATE:

$f, g: dom(f) \cap dom(g) \to \mathbb{R}; x_0 \in Int(dom(f) \cap dom(g)); dom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset$

Hp: $\exists f'(x_0), g'(x_0)$

- E1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- E2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- E3) Se $f(x_0) \neq 0$, allora $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$
- E4) Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Dimostrazione:

E1) $(f+g)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(f(x)+g(x)) - (f(x_0)+g(x_0))}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$

E2) $(fg)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(f(x)g(x)) - (f(x_0)g(x_0))}{x - x_0} \to$ sommo al numeratore la quantità $f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) =$$
$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

E3) $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)[x - x_0]} = -\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)f(x_0)[x - x_0]} = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$

E4) Basta mettere insieme la dimostrazione di E2 e quella di E3

TEOREMA (Derivata della funzione composta):

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R}$, $g: dom(g) \to \mathbb{R}$

$im(f) \subset dom(g) \to \mathrm{dom}(g \circ f) \equiv \mathrm{dom}(f)$

$x_0 \in Int(dom(f)); f(x_0) \in Int(im(f))$

f derivabile in x_0 (e dunque anche continua); g derivabile in $y_0 = f(x_0)$

Th: $(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$ ["Chain rule"]

Dimostrazione: per la 1^ formula dell'incremento finito si ha:

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)[y - y_0] + o(y - y_0), y \to y_0$$

Poiché $y_0 = f(x_0) \in im(f) \subset \text{dom}(g)$, allora:

$$g(y) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))[y - f(x_0)] + o(y - f(x_0)), y \to f(x_0)$$

Supponendo che $y \in im(f)$, allora $\exists x \epsilon\, dom(f) : y = f(x)$ e si ha:

$$g\big(f(x)\big) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))[f(x) - f(x_0)] + o\big(f(x) - f(x_0)\big), f(x) \to f(x_0)$$

Ora riusiamo la 1^ formula dell'incremento finito per $f(x) - f(x_0)$, cioè:

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = g'\big(f(x_0)\big)[f'(x_0)[x - x_0] + o(x - x_0)] + o\big(f'(x_0)[x - x_0] + o(x - x_0)\big), x \to x_0$$

Per l'algebra dei simboli di Landau:

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)[x - x_0] + g'\big(f(x_0)\big)[o(x - x_0)] + f'(x_0)o(x - x_0), x \to x_0$$

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)[x - x_0] + o(x - x_0), x \to x_0$$

Dividendo membro a membro per $x - x_0$, si ottiene:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0) + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}, x \to x_0 \to \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$$

TEOREMA (DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA):

Hp: $f : I \to f(I), I \subset dom(f); x_0 \in Int(I)$

f è continua e invertibile su I; f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$

Th: funzione inversa ($f^{-1}: f(I) \to I$) è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e risulta:

$$(f^{-1})\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad oppure \quad f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}$$

Dimostrazione: calcoliamo il limite del rapporto incrementale della funzione inversa, ovvero $\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$

Dato che, per Hp, $x \in I$, allora $y = f(x) \in f(I)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dato che $x_0 = f^{-1}(y_0)$, allora $\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

DERIVATA PRIMA E RICERCA DI ESTREMI LOCALI (RELATIVI) DI UNA f

Punto di estremo locale/relativo (cioè la x dell'estremo):

$f : dom(f) \to \mathbb{R}; x_0 \in dom(f)$

- "x_0 è un punto di minimo locale (o relativo) per f" significa
$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \big(\text{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big), f(x) \geq f(x_0)$$
- "x_0 è un punto di massimo locale (o relativo) per f" significa

$$\exists\delta > 0: \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big), f(x) \leq f(x_0)$$

Punto stazionario (critico):

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int(dom(f))$

f derivabile in x_0, ovvero $\exists f'(x_0)$

x_0 è detto “punto stazionario” (o critico) se $f'(x_0) = 0$

TEOREMA DI FERMAT

<u>Hp</u>: $f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int(dom(f))$

f derivabile in x_0

x_0 punto di estremo locale per f

<u>Th</u>: $f'(x_0) = 0$

<u>Dimostrazione</u>: supponiamo che x_0 sia un punto di massimo locale; allora

$$\exists\delta > 0: \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big), f(x) \leq f(x_0)$$

Consideriamo il rapporto incrementale $R_f(x, x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \leq 0, & x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0, x_0 + \delta)\big) \\ \geq 0, & x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0)\big) \end{cases}$ cioè:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0+} R_f(x, x_0) = f'_+(x_0) \leq 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0-} R_f(x, x_0) = f'_-(x_0) \geq 0 \end{cases}$$

→ Cioè se x_0 è un massimo, da sinistra salgo (quindi derivata positiva) e da destra scendo (derivata negativa)

Siccome $\exists f'(x_0)$ per Hp, allora $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$.

⚠️ Il viceversa non vale!

TEOREMA DI ROLLE:

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$

<u>Hp</u>:

- f continua su tutto $[a, b]$
- f derivabile su tutto (a, b)
- $f(a) = f(b)$

<u>Th</u>: $\exists x_0 \in (a, b): f'(x_0) = 0$

<u>Dimostrazione</u>: per le Hp, vale il teorema di Weierstrass per il quale:

$\exists x_m, x_M \in [a, b]: f(x_m) = \min\{f(x)\}, f(x_M) = \max\{f(x)\}$ → x_m e x_M sono punti di minimo e massimo globali

Pertanto: $\forall x \in [a, b], f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

- Se $x_m = a$ e $x_M = b$, allora dato che $f(a) = f(b)$, $f(x_m) = f(x_M)$; questo vorrebbe dire che $f = k$, cioè $\forall x \in (a, b), f'(x) = 0$; dunque $\exists x_0 \in (a, b)$: $f'(x_0) = 0$
- Se x_m e/o $x_M \in Int([a, b]) \equiv (a, b)$, allora, dato che f è derivabile su tutto (a, b), f è derivabile anche in x_m e x_M; quindi vale Fermat, ovvero si ha un punto di estremo relativo in cui f è derivabile → x_m, x_M sono punti stazionari per f e quindi $f'(x_m) = 0$ e $f'(x_M) = 0$.

TEOREMA DI LAGRANGE:

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$

Hp:

- f continua su tutto $[a, b]$
- f derivabile su tutto (a, b)

Th: $\exists x_0 \in (a, b): f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dimostrazione: uso 2 funzioni ausiliarie:

- $h: [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b)
  $h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ con $h(a) = 0$ e $h(b) = f(b) - f(a) \to h'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- $g: [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b)
  $g(x) = f(x) - h(x)$ con $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(a) \to g(a) = g(b)$

Dato che la funzione g rispetta Rolle, allora:

$$\exists x_0 \in (a, b): g'(x_0) = 0$$

Essendo $g'(x_0) = f'(x_0) - h'(x_0) = 0$, allora avrò che:

$$g'(x_0) = f'(x_0) - h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \to f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

⚠️ Da Lagrange si ricava la 2^ FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO:

$$f(x) - f(x_0) = f'(t)[x - x_0] \to f(x) = f(x_0) + f'(t)[x - x_0] \;\; con\; t \in (x_0, x)$$

TEOREMA (Monotonia e segno della derivata):

$f: I \to \mathbb{R},\; I \subseteq \mathbb{R}$

Hp: f derivabile in I

- E1) f monotona crescente su I $\Leftrightarrow \forall x \in I,\; f'(x) \geq 0$
- E2) f monotona decrescente su I $\Leftrightarrow \forall x \in I,\; f'(x) \leq 0$
- E3) $\forall x \in I,\; f'(x) > 0 \to f$ monotona strettamente crescente su I [no viceversa]
- E4) $\forall x \in I,\; f'(x) < 0 \to f$ monotona strettamente decrescente su I [no viceversa]

Dimostrazione:

E1) Supponiamo che f sia monotona crescente su I, cioè $\forall x_0, x \in I: x_0 < x$, allora $f(x_0) \leq f(x)$. Pertanto:

$$R_f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \geq 0 \wedge \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)[\leq 0]}{x-x_0[<0]} = f'_-(x_0) \geq 0$

Dato che f è, per Hp, derivabile in x_0 → $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) \geq 0$

Viceversa: siccome x_0 è arbitrario, allora possiamo porre $\forall x \in I,\; f'(x) \geq 0$, dimostrando quindi che f è monotona crescente su I. Pongo un $x_1 < x_2$ tale che $x_1 < x < x_2$ [cioè $x \in (x_1, x_2)$]; dato che f è derivabile in $(x_1, x_2) \subset I$ e continua in $[x_1, x_2]$, allora per Lagrange e per la 2^ Formula dell'incremento finito si ha che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)[x_2 - x_1]$$

Ma dato che $f'(x) \geq 0$ e $[x_2 - x_1] > 0$, allora $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$; dunque $\forall x_1, x_2: x_1 < x_2$, f è monotona crescente su I.

E2) Analogo a E1.

E3) Prendiamo x_1, x, x_2: $x_1 < x < x_2$ e abbiamo che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)[x_2 - x_1]$$

Ma dato che $f'(x) > 0$ e $[x_2 - x_1] > 0$, allora $f(x_2) - f(x_1) > 0$; dunque $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$, f è monotona strettamente crescente su I.

E4) Analogo a E3.

COROLLARIO (Anti-Taroccamento):

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b)

- E1) Se $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) \geq 0$ → f crescente su $[a, b]$
  Se $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$ → f strettamente crescente su $[a, b]$
- E2) Se $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) \leq 0$ → f decrescente su $[a, b]$
  Se $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) < 0$ → f strettamente decrescente su $[a, b]$

Dimostrazione:

Prendo $x > a$ (intorno destro di a) e prendo una $t \in (a, x)$; applico la 2^ Formula dell'incremento finito: $f(x) - f(a) = f'(t)[x - a]$ con $f'(t) \geq 0$ e $[x - a] > 0$; dunque ottengo che:

$f(x) - f(a) \geq 0 \to f(x) \geq f(a) \to f$ monotona crescente su (a, x); facendo lo stesso $\forall x \in (a, b)$, otteniamo che f è monotona crescente su $[a, b]$

Poi prendo $x < b$ (intorno sinistro di b) e prendo una $t \in (x, b)$:

$f(b) - f(x) = f'(t)[b - x]$ con $f'(t) \geq 0$ e $[b - x] > 0$; dunque ottengo che:

$f(b) - f(x) \geq 0 \to f(b) \geq f(x) \to f$ monotona crescente su (x, b); facendo lo stesso $\forall x \in (a, b)$, otteniamo che f è monotona crescente su $[a, b]$

Determinazione dei punti di ESTREMO LOCALE per f:

$f : dom(f) \to \mathbb{R}$

- Punti di frontiera di dom(f)
- Punti di discontinuità eliminabile o di 1^specie
- Punti di non derivabilità di tipo punto angoloso, cuspidale o angoloso-cuspidale
- Punti stazionari

Detto x_0 uno di tali punti, studio nell'intorno $\left(dom(f) \cap U(x_0)\right) \setminus \{x_0\}$.

+ ALGEBRA DEI SIMBOLI DI LANDAU (VEDI APPENDICE) [+ LIMITI NOTEVOLI IN LANDAU]

ALTRI SIMBOLI DI LANDAU:

$f, g : A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset; x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x_0 \in DA$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ "f è controllata da g per $x \to x_0$" e si dice $f = O(g)\ per\ x \to x_0$ ["o grande"]

- Con $l \in \mathbb{R} \wedge l \neq 0$ si dirà che "f è dello stesso ordine di grandezza di g per $x \to x_0$" (equigrande con g):
$$f \asymp g\ per\ x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$
- Con $l = 1$ si dirà che "f è equivalente a g per $x \to x_0$" (f e g sono asintoticamente equivalenti):
$$f \sim g\ per\ x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

⚠️ Ricorda che “funzioni asintoticamente equivalenti” è diverso da dire “funzioni asintotiche”:

f, g asintotiche $per\ x \to \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

⚠️ Notiamo anche che $f \sim g\ per\ x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big)\ per\ x \to x_0$

ASINTOTI OBLIQUI (TRAMITE LANDAU):

Alle superiori, per l’asintoto obliquo, verificavo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1$ e/o $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2$ con $m_1, m_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; se trovavo queste m, procedevo a trovare la q con $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - m_1 x] = q_1$ e/o $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - m_2 x] = q_2$. Se anche queste $q \in \mathbb{R}$, allora trovavo gli asintoti obliqui $y = m_1 x + q_1$ e/o $y = m_2 x + q_2$ (eventualmente coincidenti tra loro). Ora lo facciamo più rapidamente con landau:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (m_1 x + q_1)] = 0 \Leftrightarrow f(x) = m_1 x + q_1 + o(1)\ per\ x \to +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (m_2 x + q_2)] = 0 \Leftrightarrow f(x) = m_2 x + q_2 + o(1)\ per\ x \to -\infty$$

+ DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI (VEDI APPENDICE)

RICERCA DI PUNTI DI MAX E MIN (RELATIVI):

$f: dom(f) \to \mathbb{R}; I \subseteq dom(f); x_0 \in Int(I)$

Hp:

- f è continua in I ($I \setminus \{x_0\}$)
- f è derivabile in $I \setminus \{x_0\}$

E1) $\exists U(x_0) \subseteq Int(I): \begin{cases} f'(x) > 0 & per\ \forall x \in U^-(x_0) \\ f'(x) < 0 & per\ \forall x \in U^+(x_0) \end{cases} \to x_0$ è punto di massimo locale ($f'(x)$ sale e scende)

E2) $\exists U(x_0) \subseteq Int(I): \begin{cases} f'(x) < 0 & per\ \forall x \in U^-(x_0) \\ f'(x) > 0 & per\ \forall x \in U^+(x_0) \end{cases} \to x_0$ è punto di minimo locale ($f'(x)$ scende e sale)

E3) $\exists U(x_0) \subseteq Int(I): f'(x) > 0\ \ per\ \forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\} \to x_0$ né punto di massimo né punto di minimo locale

E4) $\exists U(x_0) \subseteq Int(I): f'(x) < 0\ \ per\ \forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\} \to x_0$ né punto di massimo né punto di minimo locale

⚠️ Osservazione riguardante l’ipotesi: può essere che la funzione non sia continua in x_0, ma che (magari per una discontinuità eliminabile) in x_0 la funzione abbia un massimo o un minimo

TEOREMA (Funzioni costanti):

Hp: $I \subseteq \mathbb{R} \ \wedge\ f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$

Th: f è costante

Dimostrazione:

Fissiamo arbitrariamente 2 punti $x_1, x_2 \in I: x_1 \neq x_2$; per la 2^ formula dell’incremento finito si ha:

$$x_2 > x_1 \wedge x \in (x_1, x_2) \to f(x_2) - f(x_1) = f'(x)[x_2 - x_1]$$

Poiché $f'(x) = 0 \to f(x_2) = f(x_1)$, allora f è costante.

→ Es. l’importanza di essere definita su un intervallo:

$$f(x) = \begin{cases} -1\ \forall x \in (-\infty, 0) \\ 1\ \forall x \in (0, +\infty) \end{cases} \wedge\ f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{-1,1\} \to f'(x) = 0$$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL (per le forme indeterminate del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$):

$A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset; x_0 \in DA; f, g: A \to \mathbb{R}$

Hp:

- A) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
- B) $\exists U(x_0): \forall x \in \big(A \cap U(x_0)\big) \backslash \{x_0\}$, f e g derivabili e $g'(x) \neq 0$
- C) $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ [condizione che spesso mi mette in difficoltà ad usare de l'Hôpital]

Th: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

⚠ Nel caso di forme indeterminate del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, il teorema si riformula dando l'enunciato A) come: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

⚠ De l'Hôpital è specialmente molto utile nelle dimostrazioni di altri teoremi!

TEOREMA (Derivabilità di una funzione mediante il calcolo del limite della sua derivata):

$I \subseteq \mathbb{R}; f: I \to \mathbb{R}; x_0 \in Int(I)$

Hp:

- a) f continua su I
- b) f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$
- c) $\exists$ finito $\lim_{x\to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ [condizione che spesso mi mette in difficoltà ad usare de l'Hôpital]

Th: $f'(x_0) = l$; dunque f' continua in x_0

Dimostrazione: derivabilità di f in x_0? Devo dimostrare che $\exists$ finito $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$; l'idea è applicare il teorema di De l'Hôpital con il caso che il limite = $\left[\frac{0}{0}\right]$; quindi deve succedere che:

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left[\frac{0}{0}\right] \to \begin{cases} \lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \\ \lim_{x\to x_0} [x - x_0] = 0 \end{cases}$ → ma questa condizione è già verificata per Hp dalla continuità di f in x_0 [ovvero $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$].

Dunque sia $g(x) = f(x) - f(x_0)$ che $h(x) = x - x_0$ sono derivabili in $U(x_0) \setminus \{x_0\}$;$\forall x \in \big(Int(I) \cap U(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$ si ha che:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) - f(x_0) \to g'(x) = f'(x) \\ h(x) = x - x_0 \to h'(x) = 1 \neq 0 \end{cases} \to \frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{f'(x)}{1} = f'(x)$$

Per l'Hp c), si ha che $\exists$ finito $\lim_{x\to x_0} f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)} = l \in \mathbb{R}$; mettendo assieme i risultati ottenuti abbiamo che:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$$

Per Hp, $\exists$ finito $\lim_{x\to x_0} f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \exists$ finito $\lim_{x\to x_0} R_f(x, x_0) = l \in \mathbb{R} = f'(x_0) \to f'$continua in x_0.

⚠ Dunque, per studiare se una funzione è derivabile in un punto x_0, basta che studio il limite per $x \to x_0$ del rapporto incrementale della funzione e, se ottengo $\left[\frac{0}{0}\right]$ e ho le 3 ipotesi di De l'Hôpital verificate, basta che uso

De l'Hôpital. Se trovo poi che il limite con de l'Hôpital mi da lo stesso valore della derivata in quel punto, allora so che la derivata è continua in quel punto.

TEOREMA (Discontinuità della derivata prima):

Hp: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto; $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I

Th:

- f', se è discontinua, può esserlo solo a causa di punti di discontinuità di 2^specie, altrimenti f' continua [∄ punti di discontinuità eliminabile e ∄ punti di discontinuità di 1ˆspecie nella derivata]
- Se x_0 punto di discontinuità per f', allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x)$

Dimostrazione: $x_0 \in I$ punto di discontinuità per f'

Per assurdo, supponiamo che x_0 sia un punto di discontinuità eliminabile, ovvero $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R} \neq f'(x_0)$; ma dato che, per Hp, f derivabile in x_0, allora, per il teorema precedente, $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$ → ASSURDO!!! Dunque, x_0 non può essere punto di discontinuità eliminabile per f'

Ora supponiamo che x_0 sia un punto di discontinuità di 1^specie: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = l_1 \in \mathbb{R} \wedge \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ con $l_1 \neq l_2$; poiché, per Hp, f derivabile in x_0, allora $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) = f'(x_0)$. Applicando De l'Hôpital:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = [H] = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{1} = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

Dunque f' è continua in x_0 da sinistra! Analogamente lo posso fare con la derivata destra, trovando che:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = [H] = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = f'_+(x_0) = f'(x_0)$$

Dunque:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = f'(x_0) = l_1 \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = f'(x_0) = l_2 \end{cases} \to l_1 = l_2 \to \mathit{ASSURDO!!!}$$

Dunque, x_0 non può essere punto di discontinuità di 1^specie per f'

Resta il caso in cui f' ha un punto di discontinuità in x_0, ovvero che abbia limite (o limiti) infinito/i per $x \to x_0^{\pm}$; ma non può essere così perché, per Hp, abbiamo supposto che f' esista finita in x_0

Possiamo concludere che l'unico caso rimasto sia proprio x_0 = punto di discontinuità di 2^ specie con limite inesistente.

⚠️ Se $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, allora f' è qui continua (posso applicare tutti i teoremi delle funzioni continue) e si dice che f è derivabile con continuità in I; le funzioni continue su I, derivabili su I e con f' continua su I, vengono raggruppate in un insieme detto CLASSE FUNZIONALE:

- $C^0(I) = \{f: I \to \mathbb{R} \ t.c.\ f \ continua \ su \ I\}$
- $C^1(I) = \{f: I \to \mathbb{R} \ t.c.\ f \ continua \ su \ I \ \wedge \ \exists f': I \to \mathbb{R} \ t.c.\ f' continua \ su \ I\}$
- ...
- $C^k(I)[con \ k \in \mathbb{N}] = \{f: I \to \mathbb{R} \ t.c.\ f \ continua \ e \ derivabile \ con \ continuità \ su \ I \ fino \ all'ordine \ di \ derivazione \ k - esimo\}$
- $C^\infty(I) = \{f: I \to \mathbb{R} \ t.c.\ f \ continua \ e \ derivabile \ con \ continuità \ infinite \ volte \ su \ I\}$

FORMULA DI TAYLOR:

Costruzione della formula di Taylor:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}; x_0 \in Int(dom(f))$

f derivabile in x_0

Per la 1^formula dell'incremento finito: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0] + o\big((x - x_0)\big),\ x \to x_0$

Polinomio di Taylor di grado 1:

$$P_1(x) = T^1_{x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0] \to f(x) = T_{x_0,1} f(x) + o\big((x - x_0)\big), x \to x_0$$

Essendo un'approssimazione, va studiato l'errore:

$$E_1(x) = f(x) - T_{x_0,1} f(x) = o\big((x - x_0)\big), x \to x_0$$

Dunque E_1 è un infinitesimo di ordine > 1 per $x \to x_0$, cioè:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{o\big((x - x_0)\big)}{x - x_0} = 0$$

Per vedere se è di ordine ≥ 2, calcolo il limite (se $\exists f''(x_0)$):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_1(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{x_0,1} f(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \big[f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0]\big]}{(x - x_0)^2} = [H] = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2!} f''(x_0)$$

Se $f''(x_0) \neq 0$, allora ho che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_1(x)}{\frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0)} = 1 \to E_1(x) \sim \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2, x \to x_0 \to E_1(x) = \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), x \to x_0$$

Dunque: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), x \to x_0$

Definisco dunque il polinomio di Taylor di grado 2 di f centrato in x_0, come:

$$T^2_{x_0} f(x) = T_{x_0,2} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

In questo modo, $f(x) = T_{x_0,2} f(x) + o((x - x_0)^2), x \to x_0$ → $E_2(x) = f(x) - T_{x_0,2} f(x) = o((x - x_0)^2), x \to x_0$

Generalizzando, fino all'ordine n:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big)}$$

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}; x_0 \in Int(dom(f))$

f derivabile n volte in x_0 con $n \geq 1 \land n \in \mathbb{N}$

Chiamiamo "polinomio di Taylor di grado n di f centrato in x_0":

$$Tf_{x_0,n}(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)[x - x_0]^k \quad (cioè\ 1 \leq k \leq n)$$

Si pone: $f(x) = Tf_{x_0,n}(x) + R_n(x),\ x \to x_0$ con $R_n(x) =$ RESTO DI PEANO $= o((x - x_0)^n),\ x \to x_0$

Per il resto di Peano vale: $\lim_{n} R_n = 0$

⚠ Se $x_0 = 0 \in dom(f)$, allora si parla di POLINOMIO DI MacLaurin! [Sviluppi di MacLaurin – APPENDICE]

TEOREMA (derivata prima del polinomio di Taylor):

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int(dom(f))$

f derivabile n volte in x_0 con $n \geq 1 \wedge n \in \mathbb{N}$

$Tf_{x_0,n}(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)[x - x_0]^k$

Th: la derivata prima di $Tf_{x_0,n}(x)$ è il polinomio di Taylor di grado $(n-1)$ di $f'(x)$ centrato in x_0, cioè

$$\left(Tf_{x_0,n}\right)'(x) = Tf'_{x_0,(n-1)}(x)$$

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE):

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int(dom(f))$

$U(x_0) \subset dom(f)$

- f derivabile n volte con derivata n-esima continua in $U(x_0)$ [con $n \geq 1 \wedge n \in \mathbb{N}$]
- f derivabile $(n+1)$ volte in $U(x_0)\backslash\{x_0\}$

Th: $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$, $\exists t \in (x_0, x]$ *oppure* $[x, x_0)$ $t.c.\ f(x) = Tf_{x_0,n}(x) + R_{x_0,n}(x)$, dove:

- $Tf_{x_0,n}(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)[x - x_0]^k$
- $R_{x_0,n}(x) =$ RESTO DI LAGRANGE $= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)[x - x_0]^{(n+1)}$

⚠ Resto di Peano = approssimazione del resto; mentre resto di Lagrange = espressione del resto.

Funzione convessa:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 (cioè $\exists f'$ in x_0); $x_0 \in Int\big(dom(f)\big)$

f è convessa in x_0 se $\exists \delta > 0: \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big), f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

→ se $\exists \delta > 0: \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big), f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \to$ strettamente convessa

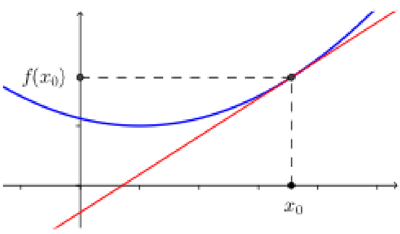
Funzione concava:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 (cioè $\exists f'$ in x_0); $x_0 \in Int\big(dom(f)\big)$

f è concava in x_0 se $\exists \delta > 0: \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big), f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

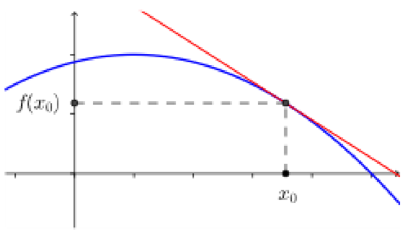
→ se $\exists \delta > 0: \forall x \in \big(\mathrm{dom}(f) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big), f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \to$ strettamente concava

Funzione derivabile convessa



La retta tangente è sotto il grafico

Funzione derivabile concava



La retta tangente è sopra il grafico

Punto di flesso ascendente e discendente:

$f: dom(f) \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 (cioè $\exists f'$ in x_0); $x_0 \in Int\big(dom(f)\big)$

- x_0 punto di flesso ascendente se $\exists\delta > 0$:
  - $\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0)\big), f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
  - $\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0, x_0 + \delta)\big), f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

  → passa dunque da concava a convessa

- x_0 punto di flesso discendente se $\exists\delta > 0$:
  - $\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0)\big), f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
  - $\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0, x_0 + \delta)\big), f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

  → passa dunque da convessa a concava

⚠ Se x_0 è punto stazionario, il flesso è ascendente / discendente a tangente orizzontale!

⚠ Se invece il flesso è a tangente verticale, non si possono applicare le regole precedenti.

TEOREMA (Condizione necessaria per i punti di flesso):

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int\big(dom(f)\big)$

- f derivabile 2 volte in x_0
- x_0 punto di flesso per f

Th: $f''(x_0) = 0$

Dimostrazione: si suppone x_0 punto di flesso ascendente e, sviluppando $f(x)$ fino al 2° ordine con Taylor, ottengo che, se $\exists\delta > 0$:

- $\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0)\big), f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- $\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0, x_0 + \delta)\big), f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), x \to x_0$; dunque ottengo:

- $\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0 - \delta, x_0)\big), f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \leq 0$
- $\forall x \in \big(dom(f) \cap (x_0, x_0 + \delta)\big), f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \geq 0$

Dunque, con $x \to x_0$, sapendo che $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\right) = 0$, ottengo che $f''(x_0) \geq$ e $\leq 0 \to$ dunque $f''(x_0) = 0$

⚠ I punti di flesso sono da ricercare tra i punti:

- di non derivabilità (flessi a tg verticale)
- in cui f è derivabile 2 volte
- in cui f'' si annulla (ma non è detto che se $f''(x_0) = 0$ abbiamo dei punti di flesso)

TEOREMA (Convessità, concavità e segno di f''):

Hp: $f: I \to \mathbb{R}$ continua su I chiuso e derivabile 2 volte su I; $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto

- E1) $\forall x \in I,\ \ f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ convessa su I chiuso
- E2) $\forall x \in I,\ \ f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ concava su I chiuso
- E3) $\forall x \in I,\ \ f''(x) > 0 \to f$ strettamente convessa su I chiuso
- E4) $\forall x \in I,\ \ f''(x) < 0 \Leftrightarrow f$ strettamente concava su I chiuso

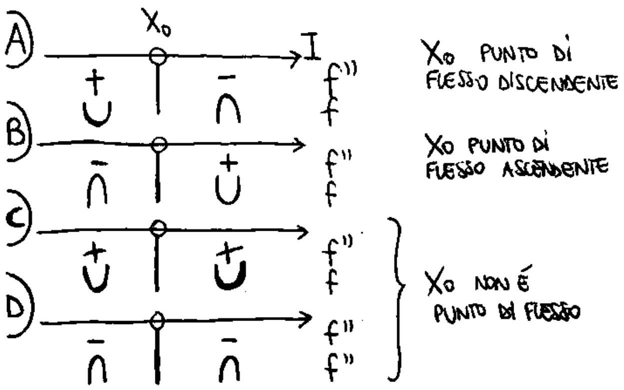
TEOREMA (Ricerca dei punti di flesso):

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $I \subseteq dom(f)$; $x_0 \in Int(I)$

- f derivabile in I

- f derivabile 2 volte in $I \setminus \{x_0\}$

Th:



TEOREMA (Estremi locali e segno di f''):

Hp: $f: dom(f) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int(dom(f))$

- x_0 punto stazionario
- f derivabile 2 volte in x_0

Th:

- Se $f''(x_0) < 0 \to x_0$ punto di massimo locale per f
- Se $f''(x_0) > 0 \to x_0$ punto di minimo locale per f

TEOREMA:

$I \subseteq \mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int(I)$

Hp:

- f derivabile k volte in x_0 con $k \geq 2 \wedge k \in \mathbb{N}$
- $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(k)}(x_0) \neq 0$

Th:

- Se k pari e:
  - $f^{(k)}(x_0) < 0 \to x_0$ punto di massimo locale
  - $f^{(k)}(x_0) > 0 \to x_0$ punto di minimo locale
- Se k dispari e:
  - $f^{(k)}(x_0) < 0 \to x_0$ punto di flesso discendente
  - $f^{(k)}(x_0) > 0 \to x_0$ punto di flesso ascendente

TEOREMA:

$I \subseteq \mathbb{R}$; $f: I \to \mathbb{R}$; $x_0 \in Int(I)$

Hp:

- f derivabile k volte in x_0 con $k \geq 3 \wedge k \in \mathbb{N}$
- $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(k)}(x_0) \neq 0$

Th:

- Se k pari e:
  - $f^{(k)}(x_0) < 0 \to f$ concava
  - $f^{(k)}(x_0) > 0 \to f$ convessa

- Se k dispari e:
  - $f^{(k)}(x_0) < 0 \to x_0$ punto di flesso discendente
  - $f^{(k)}(x_0) > 0 \to x_0$ punto di flesso ascendente

CALCOLO INTEGRALE [Integrali elementari – APPENDICE]

INTEGRALE INDEFINITO

Data f trovare una F t.c. $F' = f$

Funzione primitiva:

$f: I \to \mathbb{R}$; $F: I \to \mathbb{R}$ derivabile in $I \ \wedge \ I \subseteq \mathbb{R}$

F è detta "primitiva di f su I" se F è derivabile su I e si ha, $\forall x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

⚠️ F non è unica su I !!!

TEOREMA (Primitive e loro caratteristiche principali):

Hp: $f: I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$

f ammette primitive su I

Th:

- Se $F: I \to \mathbb{R}$ rappresenta una "primitiva di riferimento di f su I", allora $\forall c \in \mathbb{R}, G: I \to \mathbb{R}$ tale che, $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + c$, G è un'altra primitiva di f su I
- Se $F_1, F_2: I \to \mathbb{R}$ sono 2 primitive di f su I, cioè, $\forall x \in I$, $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, allora:
$$\forall x \in I, \exists c \in \mathbb{R}: F_2(x) = F_1(x) + c$$

Corollario (Come fissare le costanti?):

$f: I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in I$; $y_0 \in \mathbb{R}$

Detta $G: I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f su I, G univocamente individuabile come $G(x_0) = y_0$

Dimostrazione: $F: I \to \mathbb{R}$ primitiva di riferimento di f su I; $\exists c \in \mathbb{R}: \forall x \in I, G(x) = F(x) + c$. Dato che $G(x_0) = y_0$, allora $G(x_0) = F(x_0) + c = y_0 \to c = y_0 - F(x_0) \to \ G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0) \to$ G è unica.

INTEGRALE INDEFINITO:

$f: I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$

f ammette primitive su I → Integrale indefinito di f = famiglia di tutte le primitive di f su I

$$\int f(x)\,dx = \{F: I \to \mathbb{R}\ t.c. \forall x \in I, F'(x) = f(x)\} \equiv F(x) + c \ \ con\ c \in \mathbb{R}$$

TEOREMA (Linearità dell'integrale indefinito):

$f_1, f_2: I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}: \int \{k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\}\,dx = k_1 \int f_1(x)\,dx + k_2 \int f_2(x)\,dx$$

TEOREMA (INTEGRAZIONE PER PARTI):

Hp: $f, g: I \to \mathbb{R}; I \subseteq \mathbb{R}$

- f, g derivabili su I
- $(f'g): I \to \mathbb{R}$ possiede primitive su I

Th:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Dimostrazione: per Hp, $\exists$ primitive di $(f'g)$ su I; pertanto si ha:

$\int f'(x)g(x)\,dx = F(x) + c,\;\; c \in \mathbb{R} \to F: I \to \mathbb{R}$ è la primitiva di riferimento di $(f'g)$ su I; dunque:

$F(x)' = f'(x)g(x) \to F'(x) - (fg)'(x) = f'(x)g(x) - (fg)'(x) \to (F - fg)'(x) = f'(x)g(x) - \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)$

Da qui ricaviamo: $(F - fg)'(x) = -f(x)g'(x) \to (fg - F)'(x) = f(x)g'(x)$

→ Dunque $(fg - F)$ è una primitiva di fg' su I, cioè

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - F(x) + k,\;\; k \in \mathbb{R}$$

Isolando $F(x)$ otteniamo $F(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx + k$; sapendo che $\int f'(x)g(x)\,dx = F(x) + c$:

$$\int f'(x)g(x)\,dx - c = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx + k$$

Scegliendo $k = -c$, otteniamo:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \to \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

TEOREMA (INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE):

Hp: $f: I \to \mathbb{R}; I \subseteq \mathbb{R}$

- f possiede primitive su I
- $\exists \phi: I \to J$ (con $J \in \mathbb{R}$) tale che:
  - ϕ invertibile ($\exists \phi^{-1}: J \to I$)
  - ϕ derivabile su tutto I con $\phi'(x) \neq 0$ ($\forall x \in I$)
  - $\phi^{-1}: J \to I$ derivabile su tutto J

Th: pongo $y = \phi(x)$; faccio prima un piccolo inciso sui DIFFERENZIALI:

$$dy = \phi'(x)\,dx \to dx = \frac{1}{\phi'(x)}dy = \frac{1}{\phi'\big(\phi^{-1}(y)\big)}dy$$

Ponendo $g(y) = f\big(\phi^{-1}(y)\big) \cdot \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(y))}$ con $g = (f \circ \phi^{-1})\frac{1}{\phi' \circ \phi^{-1}}: J \to \mathbb{R}$, si ha che:

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\phi^{-1}(y)\big)\frac{1}{\phi'\big(\phi^{-1}(y)\big)}dy = \int g(y)\,dy$$

Dimostrazione:

Introduco $F: I \to \mathbb{R}$ (una primitiva di f su I), cioè $\int f(x)\,dx = F(x) + c,\;\; c \in \mathbb{R} \to \forall x \in I,\; F'(x) = f(x)$

→ Introduco poi $\phi: I \to J$ (con tutte le proprietà elencate nelle Hp) e pongo $x = \phi^{-1}(y)$ [con $x \in I, y \in J$]:

$$F(x) = F\big(\phi^{-1}(y)\big) = (F \circ \phi^{-1})(y) = G(y)$$

Derivando la funzione composta e la funzione inversa ottenuta dalla derivazione della composta, ottengo:

$$G'(y) = F'\big(\phi^{-1}(y)\big)\frac{1}{\phi'\big(\phi^{-1}(y)\big)}$$

Ma ricordando che $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, ottengo:

$$G'(y) = F'\big(\phi^{-1}(y)\big)\frac{1}{\phi'\big(\phi^{-1}(y)\big)} = f\big(\phi^{-1}(y)\big)\frac{1}{\phi'\big(\phi^{-1}(y)\big)} = g(y)$$

→ Dunque: $f\big(\phi^{-1}(y)\big) = G'(y) \cdot \phi'\big(\phi^{-1}(y)\big) \rightarrow f(x) = G'\big(\phi(x)\big) \cdot \phi'(x) = F'(x)$; dunque:

$$F = (G \circ \phi) \rightarrow G = (F \circ \phi^{-1})$$

Cioè F primitiva di f su I, G primitiva di g su J.

Trapezoide:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Trapezoide di f su $[a, b]$:

$$\tau([a, b]; f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [\min\{0, f(x)\}\,; \max\{0, f(x)\}]\}$$

Decomposizione di un intervallo:

$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$

$P_N = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\} \subseteq [a, b]$ con $N \geq 1 \land N \in \mathbb{N}$

$\forall k = 0, \dots, N-1 \rightarrow x_k \in [a, b]$

Intervalli $[x_k, x_{k+1}]$ + P_N (ovvero i punti estremi dei vari intervallini) = DECOMPOSIZIONE di $[a, b]$

⚠️ Le decomposizioni di un intervallo sono arbitrarie e sono utili per il calcolo integrale (infatti, dato che li usiamo per il calcolo integrale, la forma corretta degli intervalli è (x_k, x_{k+1}) in quanto, per il calcolo delle aree, non ci interessano gli estremi dell'intervallo [integrale di un punto = 0]). Possiamo dunque rimanere più nel generale usando gli intervalli aperti (x_k, x_{k+1}).

⚠️ Inoltre la decomposizione di un intervallo, non deve per forza restituire l'intervallo di partenza (come già detto sopra, posso togliere gli estremi ai vari intervallini).

Funzioni a scala:

$s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

s è detta funzione a scala su $[a, b]$ se posso determinare un insieme di punti (P_N con $a \equiv x_0$ e $b \equiv x_n$) t.c. $s_{|(x_k, x_{k+1})} = costante$ $(\forall k = 0, \dots, N-1)$, cioè se $\exists c_0, \dots, c_{N-1}$:

$$s_{|(x_k, x_{k+1})}(x) = c_k$$

Integrale di una funzione a scala:

$s: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\,; P_N = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ con $a = x_0$ e $b = x_n$

$\forall k = 0, \dots, N-1, \exists c_k \in \mathbb{R}$: $s_{|(x_k, x_{k+1})}(x) = c_k$

Integrale definito di s su $[a, b]$:

$$\int_{[a,b]} s = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\,[x_{k+1} - x_k] = Area_s\big(\tau([a, b]; s)\big)$$

TEOREMA (Linearità dell'integrale delle funzioni a scala):

$s_1, s_2 : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\int_{[a,b]} (\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) = \lambda_1 \int_{[a,b]} s_1 + \lambda_2 \int_{[a,b]} s_2$$

TEOREMA (Maggiorazione di integrali di funzioni a scala):

Hp: $s_1, s_2 : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni a scala

$\forall x \in [a,b]$ (eccetto un numero finito di punti [perché non mi interessa degli estremi]), $s_1(x) \leq s_2(x)$

Th: $\int_{[a,b]} s_1 \leq \int_{[a,b]} s_2$

Dimostrazione:

$$s_{1|(x_k,x_{k+1})}(x) = c_k \leq d_k = s_{2|(x_k,x_{k+1})}(x)$$

Integrale di Riemann:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata in $[a,b]$

$m = \inf(f)$ [$\in \mathbb{R}$]; $M = \sup(f)$ [$\in \mathbb{R}$]

Definiamo 2 classi di funzioni che stanno rispettivamente sopra (H_f^+) e sotto (H_f^-) f:

- $H_f^+ = \{s_a(\text{above}) : [a,b] \to \mathbb{R}\ t.c. \forall x \in [a,b]$ (eccetto un numero finito di punti), $f(x) \leq s_a(x)\}$
- $H_f^- = \{s_b(\text{below}) : [a,b] \to \mathbb{R}\ t.c. \forall x \in [a,b]$ (eccetto un numero finito di punti), $f(x) \geq s_b(x)\}$

Da qui posso definire dunque due numeri reali, chiamati:

- Integrale superiore di f:
$$\overline{\int_{[a,b]}} f = \inf\left\{\int_{[a,b]} s_a, s_a \in H_f^+\right\}$$
- Integrale inferiore di f:
$$\underline{\int_{[a,b]}} f = \sup\left\{\int_{[a,b]} s_b, s_b \in H_f^-\right\}$$

→ Integrale inferiore ≤ integrale superiore

Funzione integrabile secondo Riemann:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata in $[a,b]$

f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ se integrale superiore di f su $[a,b]$ = integrale inferiore di f su $[a,b]$

→ L'integrale di Riemann è l'elemento di separazione tra H_f^+ e H_f^-

TEOREMA (Condizione di integrabilità):

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata in $[a,b]$

f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists s_{a_0} \in H_f^+ \wedge s_{b_0} \in H_f^-\ t.c. \int_{[a,b]} (s_{a_0} - s_{b_0}) < \varepsilon$

TEOREMA (Integrabilità secondo Riemann) [+ utile a fini di calcolo]:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f è "Riemann-integrabile" se:

- f è continua
- f è limitata e presenta un n° finito di punti di discontinuità
- f è monotona su $[a, b]$ (quindi limitata)

INTEGRALE DEFINITO

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabile su $[a, b]$

Pongo:

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Proprietà</u>:

- $\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$
- Verso di percorrenza: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- dx è la "misura" con cui sommo i valori

Se f è t.c. $y = F(x)$, $dy = F'(x)dx = f(x)dx$, cioè:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{F(a)}^{F(b)} dy = [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a)$$

+ DIFFERENZIALE: si capisce bene con un esempio:

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx \to t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 \to dx = (t^2)'\, dt = 2tdt \to \int e^t\, 2tdt$$

TEOREMA (Proprietà dell'integrale definito):

$I \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e limitato

1. ADDITIVITÁ: se f è Riemann-integrabile su I, allora presi $x_0, x_1, x_2 \in I$, si ha:
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$
2. LINEARITÁ: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e date $f_1, f_2: I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabili, con $[a, b] \subseteq I$:
$$\int_a^b [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx$$
3. $[x_0, x_1] \subseteq I \land f: [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabile su $[x_0, x_1]$
→ se $x_1 > x_0$ e se $f(x) \geq 0$, allora $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \geq 0$
4. $[x_0, x_1] \subseteq I \land f_1, f_2: [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabili su $[x_0, x_1]$
→ se $\forall x \in [x_0, x_1]$, $f_1(x) \leq f_2(x)$ allora $\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx \leq \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx$
5. $[x_0, x_1] \subseteq I \land f: [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabile su $[x_0, x_1]$
$$\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx\right| \leq \int_{x_0}^{x_1} |f(x)|dx$$

MEDIA INTEGRALE:

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabile su $[a, b]$

→ Media integrale di f su $[a, b]$ = numero reale definito come:

$$\mu\ (\in \mathbb{R}) = \hat{\mu}([a, b]; f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{\int_a^b dx}\int_a^b f(x)\, dx$$

Tramite la "funzione peso" $\left(w: [a, b] \to \mathbb{R} \land w(x) > 0 \left[\forall x \in [a, b]\right]\right)$, posso anche definirla come:

$$\mu_w = \frac{1}{\int_a^b w(x)\,dx} \int_a^b f(x)w(x)\,dx$$

TEOREMA (Media integrale):

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabile su $[a,b]$

- E1) $\inf(f) \leq \mu \leq \sup(f)$
- E2) Se f continua su $[a,b]$, allora $\exists x_\mu \in [a,b]\ t.c.\ f(x_\mu) = \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Funzioni localmente integrabili:

$f: (I \subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

f è "localmente integrabile" su I se $\forall x_0, x_1 \in I$ (con $x_0 \neq x_1$), prendendo $x_0 < x_1$, allora f è Riemann-integrabile su $[x_0, x_1] \subseteq I$

FUNZIONE INTEGRALE:

$f: (I \subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su I

$x_0 \in I$

→ "Funzione integrale di f associata ad x_0 (o all'intervallo $[x_0, x]$)" = $F_{x_0}: I \to \mathbb{R}\ t.c$:

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F_{x_0}(x; f) = F(x_0, x; f)$$

Osservazioni:

- $F_{x_0}(x) = -F_x(x_0) \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = -\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt$
- $F_{x_0}(x_0) = 0 \to \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$

⚠️ Se la funzione integranda è discontinua in un punto di discontinuità di 1^specie (salto), la funzione integrale è continua in quel punto, ma non derivabile!

⚠️ Se invece la funzione integranda è discontinua in un punto di discontinuità eliminabile, la funzione integrale è continua, derivabile, ma, nel punto di discontinuità, la derivata prima non è uguale alla funzione integranda.

TEOREMA (Continuità della funzione integrale):

Hp: $f: (I \subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su I

$x_0 \in I$

Th: $F_{x_0}: I \to \mathbb{R}$ con $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è continua su I

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:

Hp: $f: (I \subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continua su tutto I

$x_0 \in I$

Th: $F_{x_0}: I \to \mathbb{R}$ con $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è derivabile su I e la sua derivata prima è $F'_{x_0}(x) = f(x)$ $[\forall x \in I]$

Dimostrazione: fisso $x_1 \in I \wedge x > x_1$ e faccio il rapporto incrementale:

$$R_{F_{x_0}}(x; x_1) = \frac{F_{x_0}(x) - F_{x_0}(x_1)}{x - x_1} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt}{x - x_1} = \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)\,dt}{x - x_1} = \hat{\mu}([x_1, x]; f) = \mu$$

Poiché f è continua su I per Hp, essa è continua anche su $[x_1, x] \subseteq I$; pertanto per l'enunciato E2 del Teorema della media integrale, $\exists \xi \in [x_1, x]\ t.c.\ f(\xi) = \hat{\mu}([x_1, x]; f) = \mu$, cioè:

$$\lim_{x \to x_1} R_{F_{x_0}}(x; x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)\, dt}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1} \hat{\mu}([x_1, x]; f) = \lim_{x \to x_1} f\left(\hat{\xi}(x)\right) = f(x_1)\ per\ continuità\ di\ f$$

Dunque F_{x_0} è derivabile in x_1 con derivata prima $F'_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_1} R_{F_{x_0}}(x; x_1) = f(x_1)$; generalizzando il risultato, otteniamo $F'_{x_0}(x) = f(x)$ $[\forall x \in I]$.

⚠️ Osservazione:

$\phi_1 : I \to \mathbb{R} \wedge \phi_1 : I \to \mathbb{R}$

$x_0 \in I$

$$F_{x_0}\big(\phi_1(x), \phi_2(x)\big) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(t)dt = F_{x_0} \circ (\phi_1, \phi_2) = \hat{F}_{x_0}$$

$$\to \hat{F}'_{x_0}(x) = f\big(\phi_2(x)\big)\phi'_2(x) - f\big(\phi_1(x)\big)\phi'_1(x)$$

TEOREMA:

$f : (I \subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continua su tutto I

$x_0 \in I$

Funzione integrale: $F_{x_0} : I \to \mathbb{R},\ F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$; F_{x_0} è una primitiva di f su I. Siccome $F_{x_0}(x_0) = 0$, allora $\exists G : I \to \mathbb{R}\ t.c.\ F_{x_0}(x) = G(x) - G(x_0)$ $[\forall x \in I]$

Corollario (Funzione integrale della derivata prima):

$f : (I \subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ derivabile su I (cioè $\exists f'$ su I)

Fissato $x_0 \in I$, se f' è continua su I, allora $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$

<u>Dimostrazione</u>: $L_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$

→ f' è continua su I, allora L_{x_0} è derivabile su I e si ha che $L'_{x_0}(x) = f'(x)$ per il TFCI; inoltre, poiché f è una primitiva di f' su I, allora $f(x) = L_{x_0}(x) + c$. Se al posto di x uso x_0, trovo che:

$$f(x_0) = L_{x_0}(x_0) + c \to L_{x_0}(x_0) = 0\ e\ dunque: f(x_0) = c \to f(x) = L_{x_0}(x) + f(x_0) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$$

TEOREMA DI TORRICELLI-BARROW:

<u>Hp</u>: $f : (I \subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continua su I

$G : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su I

<u>Th</u>: $\forall x_0, x_1 \in I \to \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt = G(x_1) - G(x_0)$

<u>Dimostrazione</u>:

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \wedge F_{x_0}(x_0) = 0$$

Introduco una nuova primitiva di f su I $(G : I \to \mathbb{R})$ e per le proprietà delle primitive, succede:

$$F_{x_0}(x) = G(x) + c \to F_{x_0}(x_0) = G(x_0) + c = 0 \to c = -G(x_0) \to F_{x_0}(x) = G(x) - G(x_0)$$

$$\rightarrow F_{x_0}(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt = G(x_1) - G(x_0)$$

TEOREMA (Comportamento della funzione integrale per $x \rightarrow x_0$):

Hp: $f: (I \subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ continua su I

$x_0 \in I$

Per $x \rightarrow x_0, f(x) = o(|x - x_0|^\alpha) \quad con\ \alpha > 0$

$F_{x_0}: I \rightarrow \mathbb{R} \ \ con\ F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$

Th: $F_{x_0}(x) = o(|x - x_0|^{\alpha+1}) \ \ per\ x \rightarrow x_0$

INTEGRALE IMPROPRIO SU INTERVALLI ILLIMITATI:

$f: (a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo $[a, c] \ \ con\ c > a$

- Se $\exists \lim\limits_{c\rightarrow+\infty} \int_a^c f(x)\, dx$ ed è:
  - FINITO $\rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente
  - INFINITO $\rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ è divergente
- Se $\nexists \rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ è indeterminato
- Se $\forall x \in [a, +\infty), f(x) \geq 0 \rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge o diverge positivamente
- Se $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty} f(x) = l \neq 0 \rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ non converge

Convergenza assoluta:

$f: (a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su $[a, c]$ con $\forall c > a$

Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ è convergente [Convergenza assoluta] $\rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente

⚠ Siano $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili su ogni intervallo $[a, c]$ con $c > a$, tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$, allora:

- Se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge $\rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge
- Se $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge a $+\infty \rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge a $+\infty$

Criterio (Confronto asintotico):

$f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili su ogni intervallo $[a, c]$ con $c > a$ e $g(x) \geq 0$:

- Se $f(x) \sim l\, g(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ [con $l \neq 0$], allora:
  - Se $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge
- Se $f(x) = o\big(g(x)\big)$ per $x \rightarrow +\infty$, allora:
  - Se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge $\rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge
  - Se $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ non converge $\rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge

REGOLA: $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

- Se $\alpha \neq 1 \rightarrow \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^{+\infty}$
  - Se $-\alpha + 1 < 0 \rightarrow \alpha > 1$ integrale converge
  - Se $-\alpha + 1 > 0 \rightarrow \alpha < 1$ integrale diverge
- Se $\alpha = 1 \rightarrow [\log|x|]_a^{+\infty} \rightarrow$ integrale diverge a $+\infty$

→ Dunque se $\alpha > 1$ converge, se $\alpha \leq 1$ diverge

INTEGRALE IMPROPRIO SU INTERVALLI LIMITATI:

$f: (a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo $[c, b]$ $con\ a < c < b$

- Se $\exists \lim\limits_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$ ed è:
  - Finito → $\int_a^b f(x)\,dx$ converge
  - Infinito → $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge
- Se $\nexists$ → $\int_a^b f(x)\,dx$ è indeterminato
- Se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ con l = infinito → $\int_a^b f(x)\,dx$ converge o diverge
- Se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge [Convergenza assoluta] → $\int_a^b f(x)\,dx$ converge

⚠ Siano $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili su ogni intervallo $[c, b]$ con $a < c < b$, tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$, allora:

- Se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge → $\int_a^b f(x)\,dx$ converge
- Se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge a $+\infty$ → $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge

⚠ Siano invece $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili su ogni intervallo $[c, b]$ con $a < c < b$, tali che $g(x) \geq 0$, allora:

- Se $f(x) \sim l\, g(x)$ per $x \rightarrow a^+$ [con $l \neq 0$], $\int_a^b f(x)\,dx$ converge ⇔ $\int_a^b g(x)\,dx$ converge
- Se $f(x) = o\big(g(x)\big)$ per $x \rightarrow a^+$, allora:
  - se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge → $\int_a^b f(x)\,dx$ converge
  - se $\int_a^b f(x)\,dx$ non converge → $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge

REGOLA: $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$

- Se $\alpha \neq 1 \rightarrow \left[\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^b$
  - Se $-\alpha + 1 > 0 \rightarrow \alpha < 1$ integrale converge
  - Se $-\alpha + 1 < 0 \rightarrow \alpha > 1$ integrale diverge
- Se $\alpha = 1 \rightarrow [\log|x-a|]_a^b$ → integrale diverge a $+\infty$

→ Dunque se $\alpha < 1$ converge, se $\alpha \geq 1$ diverge

⚠ FORMULE PARAMETRICHE:

$tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \rightarrow x = 2\arctan(t) \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

⚠ INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

1. Se grado del $N(x)$ > grado $D(x)$, posso fare divisione tra polinomi (altrimenti vado a step 2)
2. Prendo poi la frazione rimasta e ne fattorizzo il denominatore (ovvero riscrivo il denominatore come prodotto di polinomi di 1^grado o di 2^grado [ma non scomponibili])
3. Poi devo decomporre la frazione in fratti semplici (FORMULA DI HERMITE)
4. Infine integrare i vari pezzettini che si sono generati

Per capire meglio l'integrazione di funzioni razionali, consiglio i video https://youtu.be/gPNYdpLBFzM e https://youtu.be/oT2mfLMct2Q

POLINOMIO DI TAYLOR SULLA FUNZIONE INTEGRALE:

$$T_{x_1,n}F_{x_0}(x) = F_{x_0}(x_1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} F_{x_0}^{(k)}(x_1)(x-x_1)^k = F_{x_0}(x_1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k-1)}(x_1)(x-x_1)^k$$

Infatti, in base all'ordine di derivazione k-esimo si ha che:

- $F_{x_0}^{(k)}(x_1) = f^{(k-1)}(x_1)$

Dunque la funzione integrale, espressa con Taylor, è:

$$F_{x_0}(x) = T_{x_1,n}F_{x_0}(x) + o((x-x_1)^n) = F_{x_0}(x_1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k-1)}(x_1)(x-x_1)^k + o((x-x_1)^n) \quad per\ x \to x_1$$

Se pongo $x_1 = x_0$, ottengo:

$$F_{x_0}(x) = T_{x_0,n}F_{x_0}(x) + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k-1)}(x_0)(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$
$$= f(x_0)(x-x_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k-1)}(x_0)(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad per\ x \to x_0$$

NUMERI COMPLESSI

FORMA ALGEBRICA (o CARTESIANA): $z = a + ib$

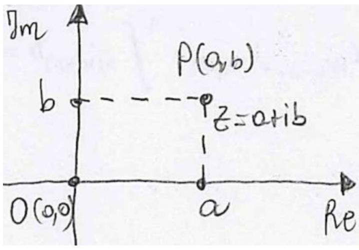
- $a \in \mathbb{R} \rightarrow$ parte reale $\rightarrow a = Re(z)$
- $b \in \mathbb{R} \rightarrow$ parte immaginaria $\rightarrow b = Im(z)$
- $i \notin \mathbb{R} \rightarrow$ unità immaginaria $[i^2 = -1]$

Con b = 0, $z = a \in \mathbb{R}$; con a = 0, $z = ib$ viene detto "numero immaginario puro"

Uguaglianze tra numeri complessi:

$z = a + ib$ e $z' = c + id \rightarrow z = z'$ se e solo se $a = c$ e $b = d$

Rappresentazione grafica: ogni numero complesso può essere rappresentato graficamente come un punto $P(a, b)$ di un piano cartesiano detto "piano di Argand-Gauss" (o piano complesso):



- Asse x = asse reale ($Re(z)$)
- Asse y = asse immaginario ($Im(z)$)
- Origine = numero complesso $z = 0$, identificato con il punto $O(0,0)$

OPERAZIONI (Forma algebrica / cartesiana):

- Somma: $z = a + ib$ e $z' = c + id \rightarrow z + z' = (a + c) + i(b + d)$ / Elemento neutro: $0 = 0 + i0$
- Prodotto: $z = a + ib$ e $z' = c + id \rightarrow zz' = (ac - bd) + i(ad + bc)$ / Elemento neutro: $1 = 1 + i0$

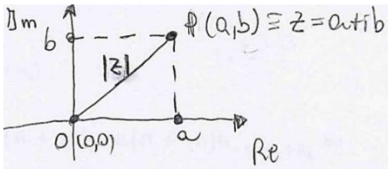
Opposto (di $z = a + ib$): $z + z' = 0 \rightarrow z' = -z = -a - ib$

- $Re(-z) = -Re(z) = -a$
- $Im(-z) = -Im(z) = -b$

Reciproco ($z \neq 0$): $zz^{-1} = 1 \rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z}$; per determinare la forma algebrica del reciproco:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

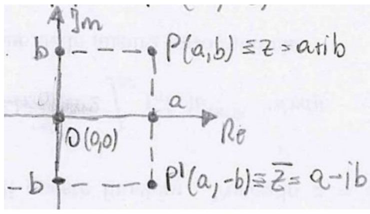
- $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2+b^2}$
- $Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{b}{a^2+b^2}$



Insieme dei numeri complessi (con anche somma e prodotto) $= \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Modulo (di $z = a + ib$): $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ ($|z| \in \mathbb{R}$)

→ Il modulo è la distanza tra $P(a, b)$ e $O(0,0)$



⚠ $z = a \in \mathbb{R} \rightarrow |z| = \sqrt{a^2} = |a|$ / $z = ib \in \mathbb{C} \rightarrow |z| = \sqrt{b^2} = |b|$

Coniugato (di $z = a + ib$): $\bar{z} = a - ib$

- $Re(\bar{z}) = Re(z) = a$
- $Im(\bar{z}) = -Im(z) = -b$

→ Se $Im(z) = 0$, dunque $z = a \in \mathbb{R}, z = \bar{z}$

PROPRIETÁ DI CONIUGATO E MODULO ($\forall w, z \in \mathbb{C}$):

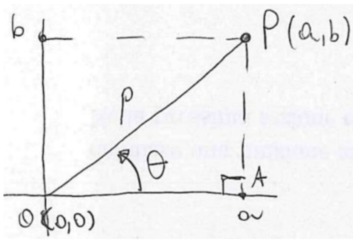
- $\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$
- $\overline{wz} = \bar{w} \cdot \bar{z}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2Im(z)i$
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|wz| = |w| \cdot |z|$
- $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$
- $|Re(z)| \leq |z|, |Im(z)| \leq |z|$
- $|w + z| \leq |w| + |z|$ (disuguaglianza triangolare del modulo)

⚠ Le disuguaglianze non hanno senso nell'estendere $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$; le scritture $z < z'$, $z > z'$, $z \leq z'$ e $z \geq z'$ non hanno senso in $\mathbb{C}$ (a meno che z e z' siano numeri reali) [questo perché $i \geq 0 \rightarrow i^2 \geq 0 \rightarrow -1 \geq 0$ ASSURDO!!!]

Per trovare la posizione univoca del numero complesso, posso usare:

- La distanza $\overline{OP} = |z| = p$ ("RO")
- L'angolo θ (misurato in radianti), compreso tra il segmento OP e l'asse orizzontale (reale)

Queste sono le COORDINATE POLARI $P(p, \theta)$.



Passaggio da coordinate polari a cartesiane:

- $a = p\cos\theta$
- $b = p\sin\theta$

Da cartesiane a polari (e trigonometriche):

- $p = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

→ Se $(a, b) = (0,0) \rightarrow p = 0, \theta \in \mathbb{R}$

FORMA TRIGONOMETRICA:

$$z = p(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)\;\; con\, p = |z| \;\; e \;\; \theta = Arg(z)$$

⚠️ 2 numeri complessi in forma trigonometrica sono uguali se hanno lo stesso modulo e l'argomento (θ) differisce di $2k\pi$

Prodotto forma trigonometrica: $zz' = pp'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$

Potenze in forma trigonometrica: $z^n = p^n(cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

FORMA ESPONENZIALE: tramite la Formula di Eulero [$x \in \mathbb{R}$ t.c. $e^{ix} = cos(x) + i\,sin(x)$] ci ricaviamo la forma esponenziale di un numero complesso $z = p(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) \rightarrow z = pe^{i\theta}$

⚠️ Come per la forma trigonometrica, 2 numeri complessi (z e z') in forma esponenziale sono = se $p = p'$ e $\theta = \theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

→ $|e^{i\theta}| = |cos\,\theta + i\,sin\,\theta| = 1$

La forma esponenziale è utile per i calcoli con le potenze: se $z = pe^{i\theta} \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, z^n = p^n e^{in\theta}$; inoltre dalla Formula di Eulero mi ricavo che:

- $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2i}$
- $sin\,\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Esponenziale complesso (con $z = a + ib$): $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$

Radici n-esime di un numero complesso: $x^n - z = 0 \rightarrow$ ammette n soluzioni (radici n-esime di z) in $\mathbb{C}$:

$$x_k = \sqrt[n]{p}\, e^{i\varphi_k} \quad con\; \varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \;\; e \;\; 0 \le k \le n-1 \rightarrow x_k = \sqrt[n]{p}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

Rappresentazione geometrica delle radici n-esime di un numero complesso: vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $|x_k| = \sqrt[n]{p}$ (con $p = |z| > 0$) e di centro $O(0,0)$; inoltre dato che $\forall k: 0 \le k \le n-2 \rightarrow \varphi_{k+1} - \varphi_k = \frac{2\pi}{n}$, allora ogni radice si dispone sulla circonferenza in modo da formare con la precedente gli estremi di un arco di ampiezza = $\frac{2\pi}{n}$.

Polinomio complesso: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ con $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \in \mathbb{C}$

→ L'insieme dei polinomi con coefficienti complessi di x viene indicato con $\mathbb{C}[x]$

Grado del polinomio: $\deg(f(x)) = n$ con n = esponente più alto della x nel polinomio

⚠️ Se $f(x) = a_0 \rightarrow \deg(f(x)) = 0$; se $f(x) = 0 \rightarrow \deg(f(x)) = -\infty$

TEOREMA DI RUFFINI:

$f \in \mathbb{C}[x], \;\; z \in \mathbb{C}$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x-z)Q(x) \;\;\; con\; Q(x) \in \mathbb{C}[x]$

→ Se $\deg(f(x)) = n \rightarrow \deg(Q(x)) = n - 1$

RADICI DI f DI MOLTEPLICITÁ $m \geq 1$: lo capiamo bene con un esempio:

ESEMPIO SE CONSIDERIAMO $f(X) = X^4 + 4X^2 - 4iX - 1$
È FACILE VERIFICARE CHE $f(i) = 0$. PERTANTO GRAZIE AL TEOREMA DI RUFFINI SI POTRÀ SCRIVERE $f(X) = (X-i)Q(X)$ E $Q(X)$ PUÒ ESSERE DETERMINATO MEDIANTE L'ALGORITMO DI DIVISIONE CON RUFFINI, TROVANDO

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & 4 & -4i & -1 \\ i & & i & -1 & 3i & 1 \\ \hline & 1 & i & 3 & -i & // \end{array} \Rightarrow Q(X) = X^3 + iX^2 + 3X - i$$

INOLTRE SI PUÒ VERIFICARE CHE $Q(i) = 0$
PERTANTO $Q(X) = (X-i)R(X)$ CON $R(X)$ ANCORA OTTENIBILE CON L'ALGORITMO DI DIVISIONE DI RUFFINI

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & i & 3 & -i \\ i & & i & -2 & i \\ \hline & 1 & 2i & 1 & // \end{array} \Rightarrow R(X) = X^2 + 2iX + 1$$

POICHÉ $R(i) = i^2 + 2i^2 + 1 = -3 + 1 = -2 \neq 0$
CONCLUDIAMO CHE $f(X) = (X-i)^2 R(X)$ CON $z = i$ RADICE DI $f(X)$ DI MOLTEPLICITÀ $m = 2$.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: ogni polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ t.c. $f(x) \neq 0 \wedge f(x) \neq k$ (cioè $\deg(f(x)) \geq 1$) ammette sempre almeno una radice complessa; inoltre se $\deg(f(x)) = n \geq 1$, allora $f(x)$ ammette n radici in $\mathbb{C}$.

→ Se $f(x)$ ammette k soluzioni distinte (di molteplicità $m_1, m_2, \cdots, m_k$), potrò scomporlo con:

$$f(x) = c(x - z_1)^{m_1}(x - z_2)^{m_2} \ldots (x - z_k)^{m_k} \quad con\ m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n \ \ e \ \ c \neq 0 \in \mathbb{C}$$

⚠ Nel caso di polinomi a coefficienti reali, la scomposizione in fattori di $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ è data da:

$$f(x) = c(x - x_1)^{m_1} \ldots (x - x_k)^{m_k}(x^2 + b_1 x + c_1)^{s_1} \ldots (x^2 + b_n x + c_n)^{s_n}$$

$$con\ m_1 + m_2 + \cdots + m_k + 2s_1 + 2s_2 + \cdots + 2s_n = n = \deg(f(x))$$

Polinomi di grado 2 a coefficienti reali con Δ<0 hanno in $\mathbb{C}[x]$ 2 soluzioni complesse coniugate, cioè:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad con\ a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a, c \neq 0 \wedge \Delta = (b^2 - 4ac) < 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}$$

Si può riscrivere con:

$$P(x) = a(x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}) \quad con\ z + \bar{z} = -\frac{b}{a} \wedge z\bar{z} = \frac{c}{a} \rightarrow z = x_1, \bar{z} = x_2$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI → $y^{(1)}(x) \equiv y'(x) = f(x, y(x))$

SOLUZIONE GENERALE (o Integrale Generale) = famiglia di tutte le funzioni che verificano l'uguaglianza

Funzione di Lipschitz:

$$\frac{|f(x_1) - f(x_0)|}{|x_1 - x_0|} \leq L \text{ con L = costante di Lipschitz}$$

PROBLEMA DI CAUCHY: cercare dalla soluzione generale la SOLUZIONE (o Integrale) PARTICOLARE

$$\begin{cases} y^{(1)}(x) = f(x, y(x)) \ \ con\ x \in I \\ y(x_0) = y_0 \ \ con\ x_0 \in I \quad \rightarrow \quad Condizione\ Iniziale \end{cases}$$

→ Se f è continua e di Lipschitz, Cauchy ha 1 sola soluzione

- Soluzione Massimale di Cauchy: quando il prolungamento della soluzione non è più soluzione di Cauchy
- Intervallo Massimale di Cauchy: I (ovvero il dominio delle x iniziale) intersecato con il dominio della soluzione generale

VARI TIPI DI "EDO" (Equazioni differenziali ordinarie):

- ELEMENTARI:
  - $y' = f(x) \rightarrow y = \int f(x)\,dx = F(x) + c$
  - $y^{(2)} = f(x) \rightarrow y' = \int f(x)\,dx = F(x) + c_1 \rightarrow y = \int F(x)\,dx + c_1 x + c_2$

- "A VARIABILI SEPARABILI":

$$y' = f(x)g(y)$$

  1.Trovo le soluzioni costanti (o stazionarie) $\rightarrow g(y) = 0$
  2.Trovo la soluzione generale:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(x)g(y) \rightarrow \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)\,dx \rightarrow y = \cdots(x)$$

- LINEARI DEL 1° ORDINE:

$$y' + a(x) \cdot y = f(x)$$

  1.Trovo la primitiva di $a(x)$: $A(x)\ tale\ che\ \ A'(x) = a(x)$
  2.Uso la formula:

$$y = e^{-A(x)} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{A(x)} dx + c\right]$$

- OMOGENEE DEL 2° ORDINE:

$$ay^{(2)} + by^{(1)} + cy = 0$$

  Uso l'equazione $az^2 + bz + c = 0$ e se:
  1. $\Delta > 0 \rightarrow z_1 \neq z_2 \rightarrow y = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}$
  2. $\Delta = 0 \rightarrow z_1 = z_2 = z \rightarrow y = C_1 e^{zx} + x \cdot C_2 e^{zx}$
  3. $\Delta < 0 \rightarrow z = \alpha \pm i\beta \rightarrow y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$

- NON OMOGENEE DEL 2° ORDINE:

$$ay^{(2)} + by^{(1)} + cy = f(x)$$

  1.Svolgo prima l'omogenea associata, ovvero $ay^{(2)} + by^{(1)} + cy = 0$ e trovo $y_0(x)$ [Soluzione Generale]
  2.Trovo poi $y_p(x)$ [Soluzione Particolare] con $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ e trovo C_1 e C_2 con:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

  3.Soluzione Cercata: $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

DI SEGUITO TROVATE DELLE FORMULE UTILI SUGLI ARGOMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1 [APPENDICE]

- -

FONTI:

- Appunti presi alle lezioni del Professor Grillo e del Professor Barbero

- "Esercizi di Analisi 1" [Lancelotti]

DISEQUAZIONI CON RADICALI (radice indice pari → $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$)

- $\sqrt[2n]{A(x)} \geq B(x) \quad con\, n \geq 1 \,\wedge\, n \in \mathbb{N}$
  $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq [B(x)]^{2n} \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$

- $\sqrt[2n]{A(x)} < B(x) \quad con\, n \geq 1 \,\wedge\, n \in \mathbb{N}$
  $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^{2n} \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$ → ma il 2° sistema = ∅ perché B(x) deve essere > di quantità +

- $\sqrt[2n+1]{A(x)} \gtreqless B(x) \Leftrightarrow A(x) \gtreqless [B(x)]^{2n+1}$

VALORE ASSOLUTO

$|x| = \begin{cases} x \quad con\, x \geq 0 \\ -x \quad con\, x < 0 \end{cases}$

Disequazioni valore assoluto (con $a \in \mathbb{R}$):

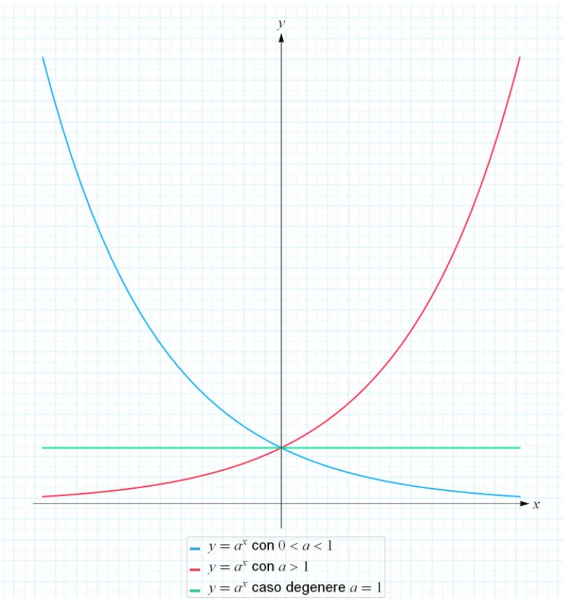
- $|f(x)| \leq a$
  - $a > 0 \to -a \leq f(x) \leq a$
  - $a = 0 \to |f(x)| \leq 0 \to f(x) = 0$
  - $a < 0 \to |f(x)| < 0 \to \nexists x \in \mathbb{R}$
- $|f(x)| \geq a$
  - $a > 0 \to f(x) \leq -a \vee f(x) \geq a$
  - $a \leq 0 \to \forall x \in \mathbb{R}$
- $|f(x)| < a$
  - $a > 0 \to -a < f(x) < a$
  - $a \leq 0 \to \nexists x \in \mathbb{R}$
- $|f(x)| > a$
  - $a > 0 \to f(x) < -a \vee f(x) > a$
  - $a = 0 \to |f(x)| > 0 \to \forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0$
  - $a < 0 \to \forall x \in \mathbb{R}$

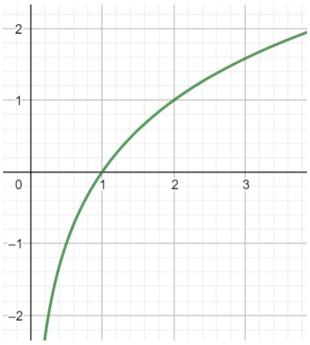
ESPONENZIALI E LOGARITMI

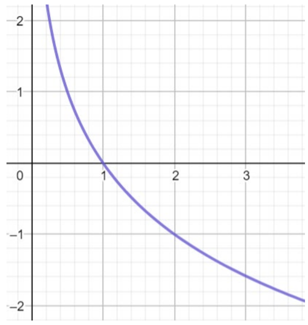
Esponenziale:

$f(x) = a^x$ con $a > 0$ (per usare le proprietà)

- Se $a > 1$ → strettamente crescente
  $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$
  $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- Se $0 < a < 1$ → strettamente decrescente
  $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
  $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$
- Se $a = 1$ → caso degenere, costante







Logaritmo:

$log_a b = c \rightarrow a^c = b$

- $f(x) = log_a x \quad con\ a > 1$
  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f monotona strettamente crescente, continua e derivabile (su tutto dominio)
  $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$
  $\lim_{x\to +\infty} log_a x = +\infty$
- $f(x) = log_a x \quad con\ 0 < a < 1$
  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f monotona strettamente decrescente, continua e derivabile (su tutto dominio)
  $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$
  $\lim_{x\to +\infty} log_a x = -\infty$

⚠️ Logaritmo è f inversa dell'esponenziale (ovvero grafico simmetrico rispetto a $y = x$)

Proprietà dei logaritmi:

$a^{log_a b} = b \quad con\ a, b > 0 \wedge a \neq 1$

$log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c \quad con\ a, b, c > 0 \wedge a \neq 1$

$log_a(b^c) = c\, log_a b \quad con\ a, b > 0 \wedge a \neq 1$

$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c \quad con\ a, b, c > 0 \wedge a \neq 1$

$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a} \quad con\ a, b, c > 0 \wedge a, c \neq 1$

$log_a b = \frac{1}{log_b a} \quad con\ a, b > 0 \wedge a, b \neq 1$

$log_{\frac{1}{a}} b = -\, log_a b$

$log_{\frac{1}{a}}(\sqrt[n]{b}) = -\frac{1}{n} log_a b$

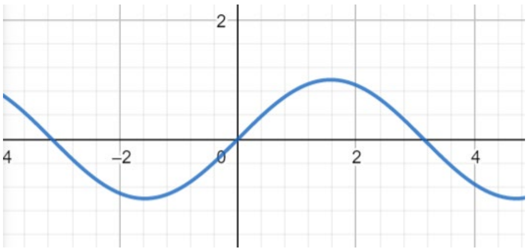
⚠️ Ricorda che $log\, x = \ln x = \log_e x$!

⚠️ Inoltre, quando base del logaritmo è $0 < a < 1$ (es. $log_{\frac{1}{2}} x$), quando confronto gli argomenti in una disequazione, cambio il verso della disuguaglianza.

⚠️ Ricorda anche che, con $a, b \in \mathbb{R} \wedge a > 0$, $a^b = e^{b\, log\, a}$; invece, con $x > 0$, $e^{log\, x} = x$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Seno:

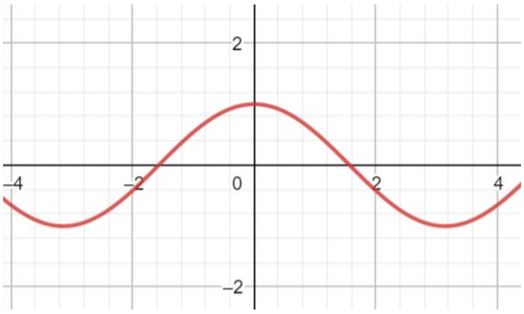


$f(x) = sin(x) \wedge f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$

Periodica con T = 2π

Dispari (simmetrica all'origine) → $f(-x) = -f(x)$

Coseno:



$f(x) = cos(x) \wedge f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$

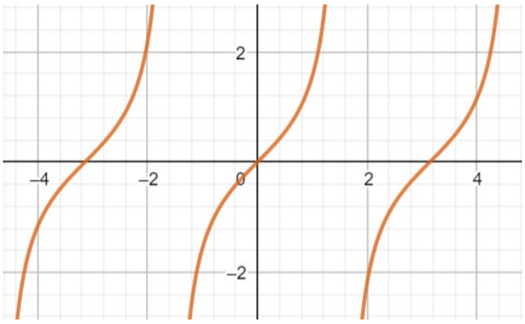
Periodica di T = 2π

Pari (simmetrica rispetto all'asse y) → $f(-x) = f(x)$

⚠️ Ricorda che $\underline{cos(n\pi) = (-1)^n}$

⚠️ Ricorda che f è periodica se $\exists T \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in \mathrm{dom}(f),\ x + T \in dom(f) \wedge\ f(x) = f(x+T)$; il valore più piccolo di T è il periodo della funzione.

Tangente:



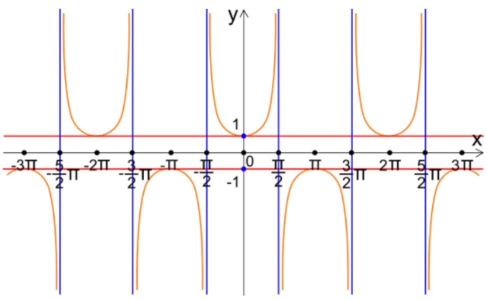
$f(x) = tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)} \wedge f: \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad con\ k \in \mathbb{N}$

Periodica di T = π

Dispari (simmetrica rispetto all'origine) → $f(-x) = -f(x)$

- RECIPROCHE

Secante:



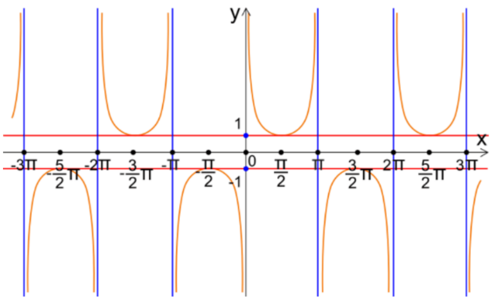
$f(x) = sec(x) = \frac{1}{cos(x)} \wedge f: \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

(con $k \in \mathbb{Z}$, cioè vengono i tolti gli zeri del coseno, al denominatore)

Periodica di T = 2π

Pari (simmetrica rispetto all'asse y) → $f(-x) = f(x)$

Cosecante:



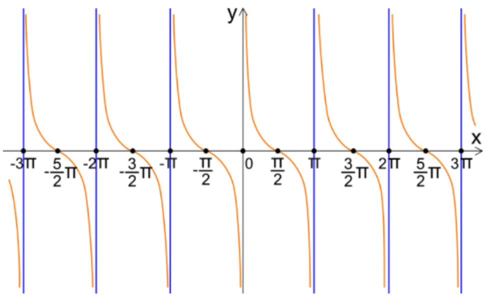
$f(x) = csc(x) = \frac{1}{sin(x)} \wedge f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \rightarrow (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

(con $k \in \mathbb{Z}$, cioè vengono tolti gli zeri del seno, al denominatore)

Periodica di T = 2π

Dispari (simmetrica rispetto all'origine) → $f(-x) = -f(x)$

Cotangente:



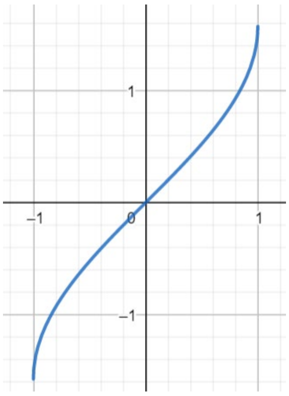
$f(x) = cot(x) = \frac{1}{tan(x)} = \frac{cos(x)}{sin(x)} \wedge f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ (con $k \in \mathbb{Z}$, cioè vengono tolti gli zeri del seno, al denominatore)

Periodica di T = π

Dispari (simmetrica rispetto all'origine) → $f(-x) = -f(x)$

- INVERSE

Arcoseno:



$f(x) = sin(x) \wedge f: \mathbb{R} \to [-1,1] \to f_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

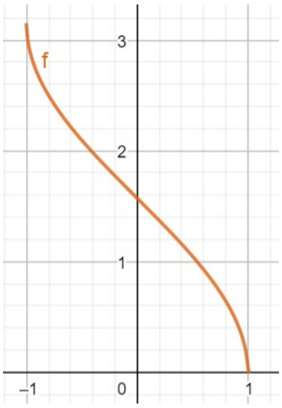
$g(x) = arcsin(x) = {f_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}}^{-1}(x) \wedge g: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Dispari (simmetrica rispetto all'origine) → $f(-x) = -f(x)$

Monotona strettamente crescente e continua (su tutto dominio)

⚠️ Limite notevole associato → $\lim_{x\to 0}\frac{arcsin(x)}{x} = 1$ (come per il seno)

Arcocoseno:



$f(x) = cos(x) \wedge f: \mathbb{R} \to [-1,1] \to f_{|[0,\pi]}: [0,\pi] \to [-1,1]$

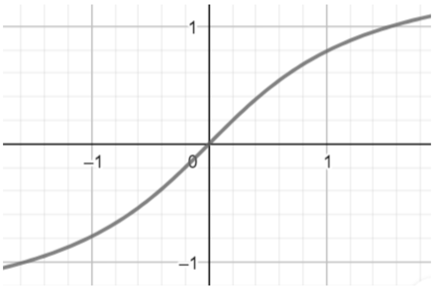
$g(x) = arccos(x) = {f_{|[0,\pi]}}^{-1}(x) \wedge g: [-1,1] \to [0,\pi]$

Né pari né dispari

Monotona strettamente decrescente e continua (su tutto dominio)

⚠️ Come $sin(arcsin(x)) = x$, anche $cos(arccos(x)) = x$

Arcotangente:



$f(x) = tan(x) \wedge f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R} \to f_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}: \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$g(x) = arctan(x) = {f_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}}^{-1}(x) \wedge g: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

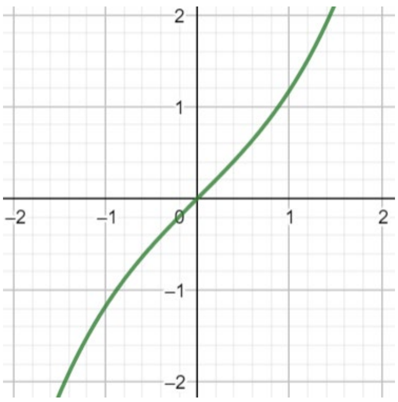
Dispari (simmetrica rispetto all'origine) → $f(-x) = -f(x)$

Monotona strettamente crescente, continua e derivabile

⚠️ Limite notevole associato → $\lim_{x\to 0}\frac{arctan(x)}{x} = 1$

SENO E COSENO IPERBOLICO

Seno iperbolico:



$f(x) = sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \wedge f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dispari (simmetrica rispetto all'origine) → $f(-x) = -f(x)$

Monotona strettamente crescente, continua e derivabile

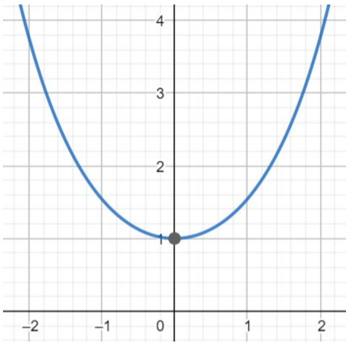
$\lim_{x\to -\infty} sinh(x) = -\infty \wedge \lim_{x\to +\infty} sinh(x) = +\infty,\ sinh(0) = 0$

Invertibile su tutto $\mathbb{R}$ → Inversa = settore seno iperbolico:

$f^{-1}(x) = settsinh(x) = log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

⚠️ Limite notevole associato → $\lim_{x \to 0} \frac{sinh(x)}{x} = 1$

Coseno iperbolico:



$f(x) = cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \wedge f: \mathbb{R} \to [1, +\infty)$

Pari (simmetrica rispetto all'asse y) → $f(-x) = f(x)$

Monotona strettamente decrescente con $x < 0$, crescente con $x > 0$

Continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} cosh(x) = +\infty, \ cosh(0) = 1$

Invertibile su tutto $\mathbb{R}$ → 2 inverse [con $\widetilde{cosh}: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ e $\widetilde{\widetilde{cosh}}: (-\infty, 0] \to [1, +\infty)$]:

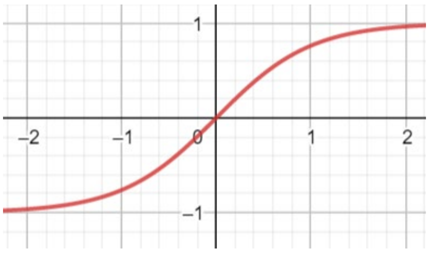
$\widetilde{cosh}^{-1}: [1, +\infty) \to [0, +\infty) \ \wedge \ \widetilde{cosh}^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$\widetilde{\widetilde{cosh}}^{-1}: [1, +\infty) \to (-\infty, 0] \ \wedge \ \widetilde{\widetilde{cosh}}^{-1}(x) = \log\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

⚠️ Limite notevole associato → $\lim_{x \to 0} \frac{cosh(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

	Funzioni goniometriche	Funzioni iperboliche
Identità fondamentale	$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
Formule di addizione e sottrazione	$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$	$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$ $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$
Formule di duplicazione	$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$	$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
Formule di bisezione	$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$ $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$	$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1 - \cosh(x)}{2}$ $\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cosh(x)}{2}$
Formule parametriche	$\sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\cos(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$	$\sinh(x) = \frac{2\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\cosh(x) = \frac{1 + \tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
Formule di prostaferesi	$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sinh(x) + \sinh(y) = 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\sinh(x) - \sinh(y) = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cosh(x) + \cosh(y) = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cosh(x) - \cosh(y) = 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$
Formule di Werner	$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$ $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$	$\sinh(x)\sinh(y) = -\frac{1}{2}[\cosh(x-y) - \cosh(x+y)]$ $\cosh(x)\cosh(y) = \frac{1}{2}[\cosh(x-y) + \cosh(x+y)]$ $\sinh(x)\cosh(y) = \frac{1}{2}[\sinh(x-y) + \sinh(x+y)]$

Tangente iperbolica:



$f(x) = tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \wedge f: \mathbb{R} \to (-1,1)$

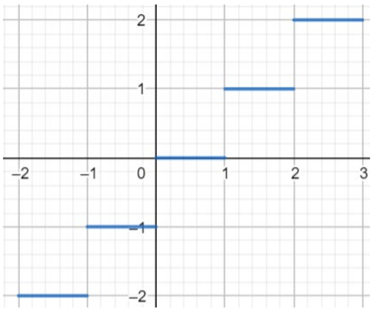
Dispari (simmetrica rispetto all'origine) → $f(-x) = -f(x)$

Monotona strettamente crescente, continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$

$tanh(0) = 0$

⚠️ Limite notevole associato → $\lim_{x \to 0} \frac{tanh(x)}{x} = 1$

PARTE INTERA



$f(x) = [x] = floor(x) = int(x) \ \wedge f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

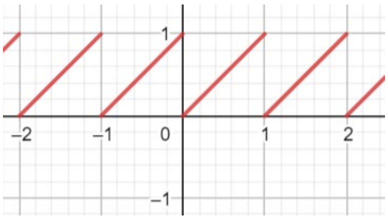
→ Dà il più grande intero minore di x (o = a x, se x è un intero $[x \in \mathbb{Z}]$)

Vale la relazione $[x] \leq x < [x] + 1$

Monotona crescente in $\mathbb{R}$

Tutti i numeri interi sono punti di discontinuità di tipo salto

MANTISSA



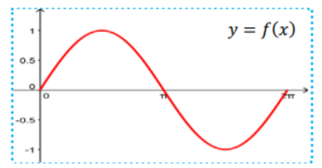
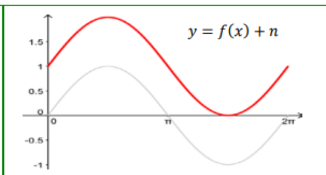
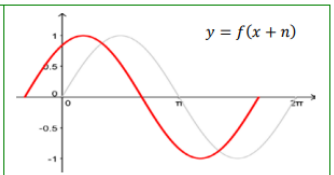
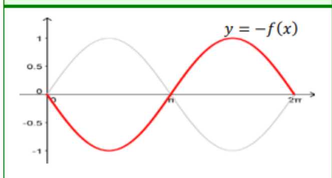
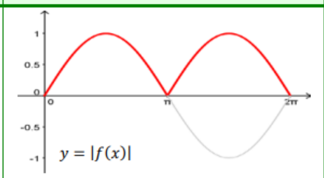
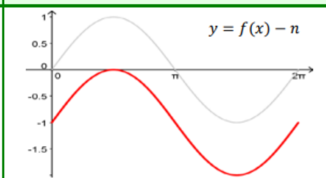
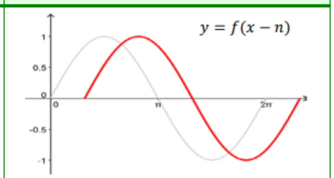
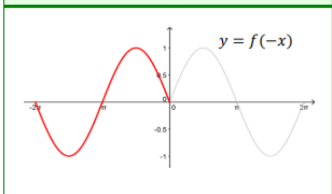
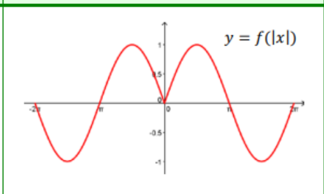
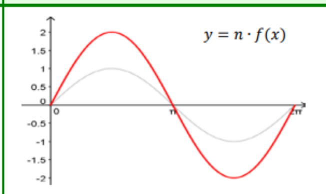
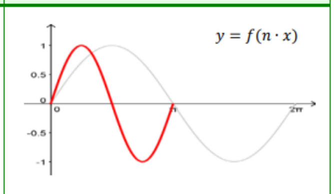
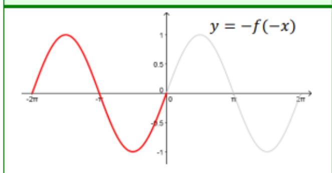
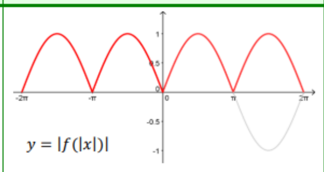
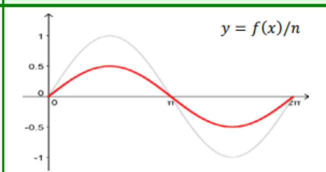
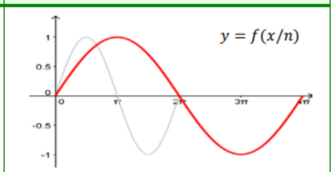
$f(x) = M(x) = \{x\} = x - [x] \wedge \ f: \mathbb{R} \to [0,1)$

Mantissa (o parte frazionaria) = x – la sua parte intera [x]

$M(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Periodica di T = 1; monotona strettamente crescente su tutti gli intervalli $[x, x+1)$ $con\ x \in \mathbb{Z}$; continua in $\mathbb{R}$; in $\forall x \in \mathbb{Z}$, presenta punti di discontinuità di 1^ specie

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI SU GRAFICI DI $f(x)$

	Noto il grafico di una funzione $y = f(x)$ in alcuni casi è possibile disegnare il grafico di una nuova funzione ottenuta da quella nota mediante semplici trasformazioni. Di seguito si riportano i casi più comuni per una **funzione con dominio positivo**		
funzione iniziale		traslazione verso l'alto di n unità	traslazione verso sinistra di n unità
			
ribaltamento rispetto all'asse x	ribaltamento della parte negativa rispetto all'asse x	traslazione verso il basso di n unità	traslazione verso destra di n unità
			
ribaltamento rispetto all'asse y	riflessione del I e IV quadrante rispetto all'asse y	dilatazione sull'asse y di un fattore n	contrazione sull'asse x di un fattore n
			
ribaltamento rispetto all'asse x e all'asse y	ribaltamento della parte negativa rispetto all'asse x e successiva riflessione rispetto all'asse delle y	contrazione sull'asse y di un fattore n	dilatazione sull'asse x di un fattore n

FORME INDETERMINATE

$[\infty - \infty], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [0 \cdot \infty], [0^0], [1^\infty], [\infty^0]$

LIMITI NOTEVOLI

funzioni goniometriche	
$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\,x}{x} = 0$	$\lim_{x \to 0} \frac{arcsen\ x}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\,x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \to 0} \frac{arctg\ x}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ mx}{sen\ nx} = \frac{m}{n}$	$\lim_{x \to 1} \frac{(arc\,cos\,x)^2}{1 - x} = 2$

$\lim_{x \to 0} \frac{sin\,x}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\,x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad con\ a > 0$
$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k \quad con\ k \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \to \pm/\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$ $con\ \forall a \in \mathbb{R}$
$\lim_{x \to \pm/\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$ $con\ a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$	$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$ $con\ a > 1, \forall k \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \to -\infty} \frac{\lvert x \rvert^k}{a^x} = 0$ $con\ 0 < a < 1, \forall k \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \to +\infty} x^k \cdot a^x = 0$ $con\ 0 < a < 1, k > 0$
$\lim_{x \to -\infty} \lvert x \rvert^k \cdot a^x = 0$ $con\ a > 1, k > 0$	$\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \quad con\ \forall a \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \to 0^+} x^k \log_a x = 0$ $con\ a \in (0,1) \cup (1, +\infty), k > 0$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{log_a\,x}{x^k} = 0$ $con\ a \in (0,1) \cup (1, +\infty), k > 0$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{x!}{x^x} = 0$

ALGEBRA DEI SIMBOLI DI LANDAU:

- $k * o(f) = o(k * f) = o(f)$ per $x \to x_0$ [ovviamente $k \neq 0$]
- $o(f) + o(f) = o(f)$ per $x \to x_0$
- $o(o(f)) = o(f)$ per $x \to x_0$
- $o(f + o(f)) = o(f)$ per $x \to x_0$
- $o(f) * o(g) = o(f * g)$ per $x \to x_0$
- $g * o(f) = o(g * f)$ per $x \to x_0$ [con $g \neq 0$]
- $[o(f)]^p = o(f^p)$ per $x \to x_0$ e per ogni p che dia senso alla potenza
- $[f + o(f)]^p = f^p + o(f^p)$ per $x \to x_0$ e per ogni p che dia senso alla potenza

⚠️ Ricorda che "o piccolo" definisce classi di funzioni trascurabili rispetto ad altre (per $x \to x_0$), dunque $o(f) - o(f) = 0$ è falso! $o(f) - o(f) = o(f)$ per $x \to x_0$

LIMITI NOTEVOLI TRASFORMATI IN LANDAU:

- $\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = x + o(x) \ \ per\ x \to 0$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$ $con\ a > 0 \wedge a \neq 1 \Leftrightarrow \log_a(1+x) = \frac{x}{\log(a)} + o(x)\ \ per\ x \to 0, a > 0 \wedge a \neq 1$
  ⚠️ Con $a = e,\ log(1+x) = x + o(x)\ \ per\ x \to 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)\ \ con\ a > 0 \Leftrightarrow a^x = 1 + x \log a + o(x)\ \ per\ x \to 0, a > 0$
  ⚠️ Con $a = e,\ e^x = 1 + x + o(x)\ \ per\ x \to 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha\ \ con\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)\ \ per\ x \to 0$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0\ \ con\ a > 1 \wedge a, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^k = o(a^x)\ \ per\ x \to +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} \frac{|x|^k}{a^x} = 0\ \ con\ 0 < a < 1 \wedge k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x|^k = o(a^x)\ \ per\ x \to -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} x^k a^x = 0\ \ con\ 0 < a < 1 \wedge k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^x = o\left(\frac{1}{x^k}\right)\ per\ x \to +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} |x|^k a^x = 0\ \ con\ a > 1 \wedge a, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^x = o\left(\frac{1}{|x|^k}\right)\ per\ x \to -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{log_a(x)}{x^k} = 0\ \ con\ a, k > 0 \wedge a, k \in \mathbb{R} \wedge a \neq 1 \Leftrightarrow \log_a(x) = o(x^k)\ per\ x \to +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} x^k\, log_a(x) = 0\ \ con\ a, k > 0 \wedge a, k \in \mathbb{R} \wedge a \neq 1 \Leftrightarrow \log_a(x) = o\left(\frac{1}{x^k}\right)\ per\ x \to 0^+$

→ Se abbiamo forme indeterminate, posso riscrivere i limiti tramite i simboli di landau:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{l[U(x)]^\alpha + o\left(\left(U(x)\right)^\alpha\right)}{k[U(x)]^\beta + o\left(\left(U(x)\right)^\beta\right)} = [PETT] = \lim_{x\to x_0} \frac{l[U(x)]^\alpha}{k[U(x)]^\beta} = \begin{cases} \lim_{x\to x_0} \frac{l}{k[U(x)]^{\beta-\alpha}} & se\ \alpha < \beta \\ \lim_{x\to x_0} \frac{l}{k} & se\ \alpha = \beta \\ \lim_{x\to x_0} \frac{l[U(x)]^{\alpha-\beta}}{k} & se\ \alpha > \beta \end{cases}$$

DERIVATE ELEMENTARI

FUNZIONE	DERIVATA
$f(x) = \text{costante}$	$f'(x) = 0$ Dimostrazione derivata di una costante
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$ Dimostrazione derivata di x
$f(x) = x^s,\ s \in \mathbb{R}$	$f'(x) = sx^{s-1}$ Dimostrazione derivata di una potenza
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$ Dimostrazione derivata dell'esponenziale
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$ Dimostrazione derivata del logaritmo
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \|x\|$	$f'(x) = \frac{\|x\|}{x}$ Dimostrazione derivata valore assoluto
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$ Dimostrazione derivata del seno
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$ Dimostrazione derivata del coseno

$f(x) = \tan(x)$ [non è elementare]	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ Dimostrazione derivata della tangente
$f(x) = \cot(x)$ [non è elementare]	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ Dimostrazione derivata della cotangente
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Dimostrazione derivata dell'arcoseno
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Dimostrazione analoga alla precedente
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ Dimostrazione derivata dell'arcotangente
$f(x) = \text{arccot}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ Dimostrazione analoga alla precedente
$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \cosh(x)$ Dimostrazione: semplici conti
$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \sinh(x)$ Idem come sopra
$y = \sqrt[n]{x}$ con $n > 0$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

SVILUPPI DI MAC LAURIN (Taylor con $x_0 = 0$)

$$e^x = \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \dots$$

$$sin(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \dots$$

$$cos(x) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - (n-1))}{n!}x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = x^n + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 \dots$$

$$log(1+x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \dots$$

$$arctan(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \dots$$

$$arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)\ [Sviluppo\ ridotto\ per\ semplicità]$$

$$sinh(x) = \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \dots$$

$$cosh(x) = \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \dots$$

$$tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\ [Sviluppo\ ridotto\ per\ semplicità]$$

INTEGRALI ELEMENTARI

$\int k\, dx = kx + c$

$\int x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$

$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log(a)} + c \ \Leftrightarrow \int e^x\, dx = e^x + c$

$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + c$

$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + c$

$\int \sinh(x)\, dx = \cosh(x) + c$

$\int \cosh(x)\, dx = \sinh(x) + c$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c = -\arccos(x) + c$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \int (1 + \tan^2(x))\, dx = \tan(x) + c$

$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \int (-1 + \cot^2(x))\, dx = -\cot(x) + c$

$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + c$

$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + c$

$\int \sinh^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(\sinh(x)\cosh(x) - x) + c$

$\int \cosh^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(\sinh(x)\cosh(x) + x) + c$