

CONTROLLI AUTOMATICI (1^a parte)

0) INTRODUZIONE

Un **SISTEMA** è un ente per cui vale il principio “azione-reazione” ($u \rightarrow y$):



Con $S = \text{insieme di relazioni matematiche che descrivono il sistema, legando ingresso e uscita. Nello studio dei sistemi ci interessa:}$

- **Previsione** → trovo y partendo da S e u ;
- **Controllo** → trovo u , partendo da S e y ;
- **Identificazione** → trovo S partendo da u e y .

⚠ La notazione che useremo è $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ per le funzioni e $u(t), y(t)$ i valori delle funzioni all’istante t .

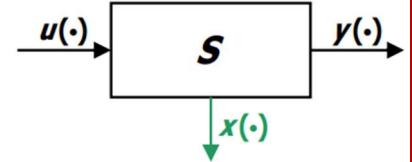
Un **SISTEMA** si dice:

- **STATICO** = uscita all’istante t dipende solo dal valore dell’ingresso all’istante $t \rightarrow y(t) = g(u(t))$ [es. un resistore ideale, dove $y = v(t) = R_i(t)$ (il modello più preciso di un resistore ideale è in realtà un induttore in serie a causa degli ingressi sinusoidali)];
- **DINAMICO** = uscita all’istante t dipende da tutti i valori dell’ingresso fino a $t \rightarrow y(t) = g(u((-\infty, t]))$ [es. un condensatore ideale con $v_c(-\infty) = 0$, ovvero $y(t) = v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(t) dt$). Qui definiamo **STATO** $x(\tau)$ la memoria passata dell’oggetto, perciò:

$$y(t) = g(x(\tau), u([\tau, t])) \quad \text{per } \forall t \geq \tau$$

Un esempio è sempre il condensatore ideale con $v_c(-\infty) = 0$:

$$y(t) = v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\tau} i_c(t) dt + \frac{1}{C} \int_{\tau}^t i_c(t) dt = x(\tau) + \frac{1}{C} \int_{\tau}^t u(t) dt = g(x(\tau), u([\tau, t]))$$



Un **SISTEMA DINAMICO** è definito dai seguenti insiemi $\rightarrow S(T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta)$:

- **T** = insieme ordinato dei tempi;
- **U** = insieme dei valori assunti dall’ingresso u ;
- **Ω** = insieme delle funzioni di ingresso $u(\cdot): T \rightarrow U$;
- **X** = insieme dei valori assunti dallo stato x ;
- **Y** = insieme dei valori assunti dall’uscita y ;
- **Γ** = insieme delle funzioni d’uscita $y(\cdot): T \rightarrow Y$.

Da cui sono definite le funzioni φ e η che determinano **RAPPRESENTAZIONE DI STATO** (o ingresso-stato-uscita):

- **FUNZIONE DI TRANSIZIONE DELLO STATO** (evoluzione temporale dello stato) [non istantanea]:

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x(\tau), u(\cdot))$$

dove t = istante finale, τ = istante iniziale con $\tau \leq t$, $x(\tau)$ = valore iniziale dello stato del sistema, $u(\cdot)$ = funzione d’ingresso definita in $[\tau, t]$;

- **FUNZIONE DI USCITA** (evoluzione dell’uscita) [istantanea]:

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \rightarrow \text{SISTEMA IMPROPRI}$$
 (non fisicamente realizzabile)

$$y(t) = \eta(t, x(t)) \rightarrow \text{SISTEMA PROPRIO}$$
 (fisicamente realizzabile)

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI:

- **A TEMPO CONTINUO** → $T \subseteq \mathbb{R}$ (analogici);
- **A TEMPO DISCRETO** → $T \subseteq \mathbb{Z}$ (si usa k come variabile temporale);
- **A INGRESSI E USCITE “QUANTIZZATE”** → INSIEMI U e Y DISCRETI;
- **SISO** (Single Input – Single Output, o MONOVARIABILE) → $U \subseteq \mathbb{R}^1, Y \subseteq \mathbb{R}^1$;
- **MIMO** (Multiple Input – Multiple Output, o MULTIVARIABILE) → $U \subseteq \mathbb{R}^p, Y \subseteq \mathbb{R}^q$;
- **A STATI FINITI** → INSIEME X DISCRETO;
- **A DIMENSIONE FINITA** (o A PARAMETRI CONCENTRATI) → $X \subseteq \mathbb{R}^n$, con $n = \text{finito}$;
- **A DIMENSIONE INFINITA** (o A PARAMETRI DISTRIBUITI) → $X \subseteq \mathbb{R}^n$, con $n = \text{infinito}$;
- **LINEARE** → se:
 - U, Ω, X, Y, Γ sono spazi vettoriali;
 - φ è lineare in x e in u ;
 - η è lineare in x e in u .
- **NON-LINEARE** altrimenti.
- **STAZIONARIO** (o **TEMPO-INVARIANTE**) se partendo dallo stesso stato iniziale e con lo stesso ingresso indipendentemente dall'istante in cui lo applico, ottengo la stessa uscita;
- **NON STAZIONARIO** altrimenti.

CASI PARTICOLARI DI SISTEMI DINAMICI A DIMENSIONE FINITA:

- **A TEMPO CONTINUO**:

$$x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \quad [\text{EQUAZIONE DI STATO}]$$

$$y(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad [\text{EQUAZIONE DI USCITA}]$$

- **A TEMPO CONTINUO e LINEARE**:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad [\text{EQUAZIONE DI STATO}] \rightarrow \begin{cases} A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{matrice di stato} \\ B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \text{matrice degli ingressi} \end{cases}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad [\text{EQUAZIONE DI USCITA}] \rightarrow \begin{cases} C(t) \in \mathbb{R}^{q \times n} \rightarrow \text{matrice delle uscite} \\ D(t) \in \mathbb{R}^{q \times p} \rightarrow \text{matrice ingresso – uscita} \end{cases}$$

- **A TEMPO CONTINUO, LINEARE e TEMPO-INVARIANTE [LTI]**:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad [\text{EQUAZIONE DI STATO}] \rightarrow q \text{ equazioni lineari in } x(t), u(t) \text{ a coefficienti costanti}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad [\text{EQUAZIONE DI USCITA}] \quad \text{con } A, B, C, D \text{ matrici costanti}$$

⚠ **A TEMPO DISCRETO** (+ lineare, + lineare e tempo invariante) è **analogo** a ciò visto sopra per il tempo continuo, cambia solo che prendo k al posto di t e metto l'equazione di stato come $x(k+1)$ al posto di $x(t)$!

1) SISTEMI DINAMICI ELETTRICI

Nei sistemi dinamici elettrici troviamo come **ELEMENTI FONDAMENTALI**:

- **RESISTORE IDEALE** → elemento passivo (convenzione utilizzatori) con equaz costitutiva statica (istantanea):
 $v_R(t) = Ri_R(t)$ [TEMPO] oppure $V_R(s) = RI_R(s)$ [LAPLACE]
 - **CONDENSATORE IDEALE** → elemento passivo (convenzione utilizzatori) con memoria di capacità C , con equaz costitutiva differenziale (dove quindi si sceglie v_C come variabile di stato):
 $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$ [TEMPO] oppure $I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(t=0^-)$ [LAPLACE]
- ⚠ Le variabili di stato devono essere indipendenti (non combinazioni lineari di altre); se ho maglie di condensatori, le reti sono degeneri quindi non posso usare la derivata come stato!
- **INDUTTORE IDEALE** → elemento passivo (convenzione utilizzatori) con memoria di induttanza L , con equaz costitutiva differenziale (dove quindi si sceglie i_L come variabile di stato):

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad [\text{TEMPO}] \text{ oppure } V_L(s) = sL I_L(s) - L i_L(t=0^-) \quad [\text{LAPLACE}]$$

- GENERATORE IDEALE DI TENSIONE → elemento attivo (convenzione dei generatori) [ingresso];
- GENERATORE IDEALE DI CORRENTE → elemento attivo (convenzione dei generatori) [ingresso].

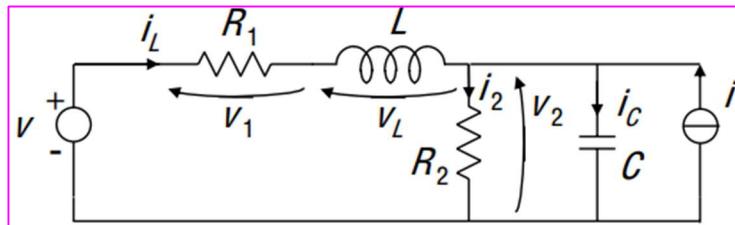
Per quanto riguarda la **RAPPRESENTAZIONE IN VARIABILI DI STATO**, si scrivono le **EQUAZIONI COSTITUTIVE** solo per i componenti con memoria; si scrivono quindi le leggi di Kirchhoff (ai nodi e alle maglie) o qualsiasi altra legge per l'analisi circuitale. Poi si introduce una **VARIABILE DI STATO** x_i per ogni componente con memoria (verificando l'indipendenza tra queste variabili) [v_C e i_L] e una **VARIABILE DI INGRESSO** u_i per ogni generatore ideale di tensione/corrente. Da qui si ricavano le **EQUAZIONI DI STATO** usando solo variabili di stato e ingresso, del tipo:

$$x'_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x(t), u(t))$$

Da qui si ricavano le **EQUAZIONI DI USCITA** sempre usando solo variabili di stato e ingresso, del tipo:

$$y_K(t) = g_k(t, x(t), u(t))$$

Vediamo degli **ESEMPI**:



Ci ricaviamo le equazioni costitutive + topologiche:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{dv_2(t)}{dt}$$

$$v(t) = v_1(t) + v_L(t) + v_2(t)$$

$$i_L(t) + i(t) = i_2(t) + i_C(t)$$

Ci ricaviamo la rappresentazione in variabili di stato [ovvero i_L dell'induttore e $v_C = v_2$ del condensatore] (come variabili di interesse v_1 e v_2):

- Variabili di stato → $x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$
- Variabili di ingresso → $u(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$

Da cui ci ricaviamo le **2 equazioni di stato**:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_L}{L} = \frac{v - v_1 - v_2}{L} = \frac{u_1 - v_1 - x_2}{L} = -\frac{R_1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_1 = f_1(t, x, u) \\ x'_2 = \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{i_L + i - i_2}{C} = \frac{x_1 + u_2 - i_2}{C} = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_2 C}x_2 + \frac{1}{C}u_2 = f_2(t, x, u) \end{cases}$$

E poi mi ricavo le **equazioni di uscita**:

$$\begin{cases} y_1 = v_1 = R_1 i_L = R_1 x_1 = g_1(t, x, u) \\ y_2 = v_2 = x_2 = g_2(t, x, u) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Quindi se R_1, R_2, L e C sono costanti, il sistema è LTI e quindi posso RAPPRESENTARLO USANDO VARIABILI DI STATO nel seguente modo:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⚠ Se mi si aggiungono delle equazioni nel testo dell'esercizio (delle hp iniziali), basta aggiungerle all'elenco di equazioni costitutive e topologiche iniziali!

⚠ Se ho 3 componenti dinamici (induttori/condensatori) ma 2 condividono la stessa VARIABILE DI STATO (es. 2 induttori in serie o 2 condensatori in parallelo), avrò solo 2 variabili di stato (equazioni di stato). Questo avviene nelle **RETI DEGENERI**, dove ho **maglie di condensatori** (quindi le tensioni dei vari condensatori dipendono l'una dall'altra) e/o **tagli di induttore** (dove le correnti dei vari induttori sono legate tra loro). Qui la dimensione n del sistema è pari al numero di variabili di stato indipendenti.

2) SISTEMI DINAMICI MECCANICI

Partiamo da **SISTEMI MECCANICI IN TRASLAZIONE**; un corpo puntiforme di massa m in traslazione su asse orizzontale ha equazione del moto descritta dalla **2^ LEGGE DI NEWTON**:

$$F_{TOT}(t) = \sum_i F_i(t) = ma = m \frac{d^2 p(t)}{dt^2}$$

Con le forze con segni positivi se si sommano, negativi se si oppongono ($p = x$ = posizione).

Per quanto riguarda a **COLLEGAMENTI DI CORPI**, avremo collegamenti mediante:

- **MOLLA IDEALE** $\rightarrow F(t) = K \Delta l = K \Delta p = K[p_+(t) - p_-(t)]$;
- **SMORZATORE IDEALE** (attrito) $\rightarrow F(t) = \beta \Delta v = \beta[v_+(t) - v_-(t)] = \beta[p'_+(t) - p'_-(t)]$.

⚠ Conviene scegliere dei sistemi di riferimento (assi di riferimento) orientati in modo che tutti gli oggetti siano orientati coerentemente con gli assi!

I **punti materiali** hanno velocità e posizione, ma non hanno massa (sistema ideale); perciò per questi punti, come faccio a scrivere la 2^ Legge di Newton? (perché se hanno massa 0, si annulla tutto):

$$m_i p''_i(t) = \sum_k F_k^{esterne}(t) - \sum_j^{j \neq i} F_{ij}^{interne}(t)$$

Con le forze esterne quelle viste prima (esercitate sulle masse), mentre quelle interne tengono conto dell'interazione reciproca tra i corpi. Quindi le forze esterne mettono in moto la massa m_i incrementando o riducendo la forza d'inerzia; le forze interne invece mettono il moto gli altri corpi m_j usando molle o smorzatori, riducendo la forza di inerzia di m_i .

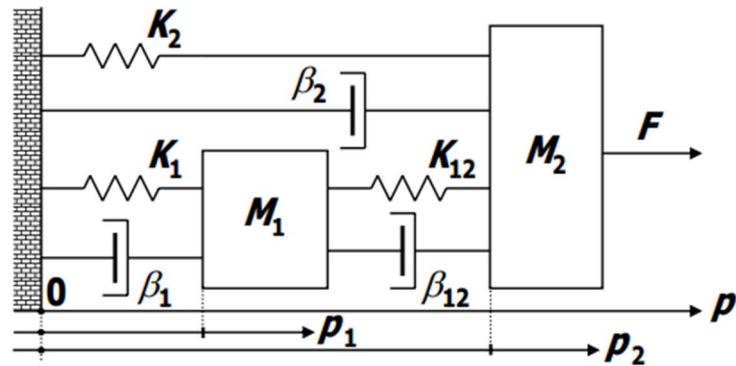
Detto questo vediamo le **EQUAZIONI DEL MOTO** (1 per ogni M_i) di questo sistema, scegliendo come **VARIABILI DI STATO** per ogni elemento in traslazione la **posizione** p_i e la **velocità** $v_i = p'_i$ (così passiamo da un'equazione differenziale del 2° ordine [LEGGE DI NEWTON] ad una coppia di equazioni differenziali del 1° ordine) e associando una **VARIABILE DI INGRESSO** ad ogni forza esterna applicata. Si ricavano le **EQUAZIONI DI STATO**:

$$x'_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x(t), u(t))$$

partendo dalle precedenti equazioni del moto; infine si ricavano le **EQUAZIONI DI USCITA** [sempre istantanee] (usando solo variabili di stato $x(t)$ e di ingresso $u(t)$) del tipo

$$y_k(t) = g_k(t, x(t), u(t))$$

Vediamo degli **ESEMPI**:



Troviamo le **equazioni del moto**:

- 1) $m_1 p_1'' = 0 - [K_1(p_1 - 0) + \beta_1(p'_1 - 0) + K_{12}(p_2 - p_1) + \beta_{12}(p'_1 - p'_2)]$
- 2) $m_2 p_2'' = F - [K_2(p_2 - 0) + \beta_2(p'_2 - 0) + K_{12}(p_2 - p_1) + \beta_{12}(p'_2 - p'_1)]$

Poniamo le **variabili di stato** (prima le posizioni e poi le velocità; le scrivo come trasposte per averle orizzontali):

$$x(t) = [p_1(t) \ p_2(t) \ p'_1(t) \ p'_2(t)]^T = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$$

Scriviamo quindi le **variabili di ingresso** (le forze esterne applicate):

$$u(t) = [F(t)]$$

A questo punto troviamo le **equazioni di stato** (1 per ogni variabile di stato):

$$x'_1 = p'_1 = \frac{dp_1}{dt} = p'_1 = x_3 = f_1(t, x, u)$$

$$x'_2 = p'_2 = \frac{dp_2}{dt} = p'_2 = x_4 = f_2(t, x, u)$$

$$x'_3 = p'_1 = \frac{dp'_1}{dt} = -\frac{1}{m_1} [K_1 p_1 + \beta_1 p'_1 + K_{12}(p_1 - p_2) + \beta_{12}(p'_1 - p'_2)] =$$

$$= -\frac{K_1 + K_{12}}{m_1} p_1 + \frac{K_{12}}{m_1} p_2 - \frac{\beta_1 + \beta_{12}}{m_1} p'_1 + \frac{\beta_{12}}{m_1} p'_2 = -\frac{K_1 + K_{12}}{m_1} x_1 + \frac{K_{12}}{m_1} x_2 - \frac{\beta_1 + \beta_{12}}{m_1} x_3 + \frac{\beta_{12}}{m_1} x_4 = f_3(t, x, u)$$

$$x'_4 = p''_2 = \frac{dp'_2}{dt} = \frac{F}{m_2} - \frac{1}{m_2} [K_2 p_2 + \beta_2 p'_2 + K_{12}(p_2 - p_1) + \beta_{12}(p'_2 - p'_1)] =$$

$$= [\text{salto passaggio intermedio}] = \frac{K_{12}}{m_2} x_1 - \frac{K_2 + K_{12}}{m_2} x_2 + \frac{\beta_{12}}{m_2} x_3 - \frac{\beta_2 + \beta_{12}}{m_2} x_4 + \frac{1}{m_2} u = f_4(t, x, u)$$

Poi trovo le **equazioni di uscita** (mi sono state richieste dal problema $y_1 = p_1$ e $y_2 = p_2$):

$$y_1 = p_1 = x_1 = g_1(t, x, u)$$

$$y_2 = p_2 = x_2 = g_2(t, x, u)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Se $m_1, m_2, K_1, K_{12}, \beta_1, \beta_{12}$ sono tutte costanti, il sistema è LTI e ha **rappresentazione di stato**:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

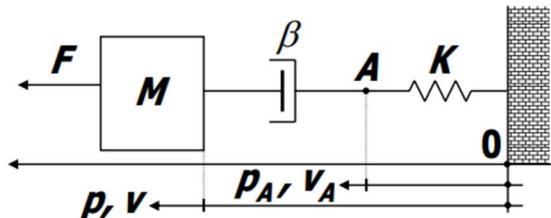
Con matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1 + K_{12}}{M_1} & \frac{K_{12}}{M_1} & -\frac{\beta_1 + \beta_{12}}{M_1} & \frac{\beta_{12}}{M_1} \\ \frac{K_{12}}{M_2} & -\frac{K_2 + K_{12}}{M_2} & \frac{\beta_{12}}{M_2} & -\frac{\beta_2 + \beta_{12}}{M_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⚠ Si può modellizzare l'attrito usando lo SMORZATORE EQUIVALENTE!

⚠ Se una grandezza applicata è costante nel tempo, non la metto negli ingressi!

Altro **ESEMPIO** (dove ci viene detto che $y(t) = v(t) = p'(t)$):



Trovo le **equazioni del moto** (A = punto materiale quindi massa nulla):

$$\begin{aligned} 1) \quad m_A p''_A &= 0 \cdot p''_A = 0 - [\beta(p'_A - p') + K(p_A - 0)] \\ 2) \quad mp'' &= F - [\beta(p' - p'_A)] \end{aligned}$$

⚠ Dato che la **1^a equazione del moto è del 1° ordine e non del 2°**, basterà una **variabile di stato** (ora ne mettiamo 2, ma vedremo dopo che ne servirà solo 1); infatti si mettono 2 variabili di stato per 1 singola equazione solo se è del 2° ordine per fare in modo di passare al 1° ordine!

Quindi le **variabili di stato** sono:

$$x(t) = [p_A(t) \ p(t) \ p'_A(t) \ p'(t)] = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]$$

E le **variabili di ingresso** sono:

$$u(t) = [F(t)]$$

Perciò le **equazioni di stato** saranno:

$$\begin{aligned} x'_1 &= p'_A = \frac{dp_A}{dt} = p'_A = x_3 = f_1(t, x, u) \\ x'_2 &= p' = \frac{dp}{dt} = p' = x_4 = f_2(t, x, u) \\ x'_3 &= \frac{dp'_A}{dt} = p''_A = ? \end{aligned}$$

Vediamo che infatti p_A si può esprimere come **combinazione lineare** di p' e p_A , ovvero:

$$0 = -[\beta(p'_A - p') + K(p_A - 0)] \rightarrow p'_A = p' - \frac{K}{\beta} p_A$$

Quindi le **vere variabili di stato** saranno:

$$x(t) = [p_A(t) \ p(t) \ p'(t)] = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]$$

Da cui le **vere equazioni di stato** sono:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{dp_A}{dt} = p'_A = p' - \frac{K}{\beta} p_A = -\frac{K}{\beta} x_1 + x_3 = f_1(t, x, u) \\ x'_2 &= \frac{dp}{dt} = p' = x_3 = f_2(t, x, u) \\ x'_3 &= \frac{dp'}{dt} = p'' = \frac{F}{m} - \frac{\beta}{m}(p' - p'_A) = \frac{1}{M} u - \frac{\beta}{m}(x_3 - x'_1) = \frac{1}{M} u - \frac{\beta}{m} \left(x_3 - \left(-\frac{K}{\beta} x_1 + x_3 \right) \right) = \\ &= -\frac{K}{m} x_1 + \frac{1}{m} u = f_3(t, x, u) \end{aligned}$$

E quindi le **equazioni di uscita** saranno:

$$y = p' = x_3 = g(t, x, u)$$

⚠ Inoltre, dato che $x_2 = p$ non compare né nelle equazioni di stato né in quelle di uscita, possiamo eliminarla dal vettore di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ p(t) \\ \cancel{p(t)} \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_A(t) \\ p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{K}{\beta} x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{M} x_1 + \frac{1}{M} u \\ y = x_2 \end{cases}$$

Perciò:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{K}{\beta} & 1 \\ -\frac{K}{m} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = 0$$

→ CALCOLO DEL MOTO DI SISTEMI DINAMICI LTI:

Come abbiamo già detto per **sistemi dinamici LTI TC** (tempo continuo), abbiamo:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Si vuole calcolare la soluzione $\mathbf{x}(t)$ [chiamato **MOVIMENTO DELLO STATO**] partendo dallo stato iniziale $x(t = 0^-) = x_0$ (che è noto a causa dell'andamento dell'ingresso $u(t)$), usando la **FORMULA DI LAGRANGE**:

$$x(t) = e^{At}x(0^-) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{At}x(0^-) + e^{At} * Bu(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

Con $x_l(t)$ = **MOVIMENTO LIBERO** (dipende solo da $x(0^-)$), e $x_f(t)$ = **MOVIMENTO FORZATO** (dipende solo da $u(t)$); questo movimento forzato è una **CONVOLUZIONE**.

Analogamente si può calcolare l'andamento di $y(t)$ [chiamato **MOVIMENTO DELL'USCITA**] sostituendo in $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, l'**espressione di $x(t)$ ricavata da LAGRANGE**:

$$y(t) = Ce^{At}x(0^-) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

⚠ Noi questa formula di Lagrange non la useremo, ma useremo al suo posto la **TRASFORMATA DI LAPLACE**; vediamo dei **RICHIAMI** matematici su questa (in questo corso noi useremo la **TRASFORMATA DI LAPLACE UNILATERA**, ovvero da 0^- a $+\infty$ [e non da $-\infty$]!).

La **TRASFORMATA DI LAPLACE UNILATERA** passa dallo spazio reale allo spazio complesso (funzione complessa di variabile complessa s):

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

Questa è lineare e ha derivata:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-) \rightarrow \mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

Mentre ha integrale:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Altre proprietà sono:

- ritardo nel tempo → $\mathcal{L}[f(t - \tau)] = F(s)e^{-s\tau}$
- prodotto e convoluzione → $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$

Le principali **trasformate notevoli** che useremo sono ($\varepsilon(t)$ = funzione gradino perché qui con $u(t)$ indichiamo l'ingresso) e si riferiscono solo a funzioni nel tempo unilaterale (definite solo per $t \geq 0$, cioè moltiplicate per $\varepsilon(t)$):

Segnale Polinomiale →

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$

$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^n e^{at}}{n!}$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$

$f(t)$	$F(s)$
e^{At}	$(sI - A)^{-1}$

Detto questo vediamo il **CALCOLO DELLA SOLUZIONE NEL DOMINIO DI LAPLACE** (e non nel tempo come sopra), più facile per 2 motivi: non bisogna fare la convoluzione (perché per Laplace la convoluzione diventa un prodotto) e non bisogna calcolare la matrice e^{At} (difficile da trovare). Questo calcolo per trovare $x(t)$ e $y(t)$ con Laplace è così strutturato: si trasformano le equazioni dal dominio del tempo al dominio di Laplace; si trova quindi la soluzione nel dominio di Laplace $X(s)$ e $Y(s)$; si antitrasformano queste soluzioni nel tempo. Vediamolo:

1. Trasformo le equazioni di ingresso-stato-uscita con Laplace:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \mathbf{U}(s) \end{cases}$$

2. Da qui mi **calcolo le 2 variabili di interesse $\mathbf{X}(s)$ e $\mathbf{Y}(s)$** [facendo caso però di moltiplicare lo scalare s con la matrice identità I_n perché devo sommare s ad una matrice quadrata A e non ad uno scalare] [inoltre $(sI - A)$ è una matrice, quindi non posso trattarlo come uno scalare e dividerlo dall'altra parte, ma porto all'altro membro la sua INVERSA (se esiste), ovvero $(sI - A)^{-1}$]:

$$\mathbf{X}(s) = (sI_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0^-) + (sI_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s) = \mathbf{H}_0^x(s) \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{H}_f^x(s) \mathbf{U}(s)$$

E analogamente:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(sI_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{C}(sI_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \mathbf{U}(s) = \mathbf{H}_0(s) \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{H}(s) \mathbf{U}(s)$$

Dove indichiamo con $\mathbf{H}(s) = \mathbf{MATRICE DI TRASFERIMENTO}$.

⚠️ Da qui vediamo che il risultato ottenuto è la trasformata di Laplace della formula di Lagrange (infatti dalle tavole vediamo che la matrice e^{At} , se trasformata, ci dà $(sI_n - A)^{-1}$).

⚠️ Affinché esista però effettivamente la matrice **SIMMETRICA** $(sI_n - A)^{-1}$, occorre che il determinante $\det(sI_n - A) \neq 0$, ovvero con:

$$sI_n - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & -a_{1n} \\ -a_{21} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & s - a_{nn} \end{bmatrix}$$

Allora:

$$\det(sI_n - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_n = \text{polinomio caratteristico di } A$$

Quindi la formula con la matrice simmetrica vale per $\forall s \neq \text{autovalori}$ (ovvero dai valori che annullano il polinomio caratteristico).

3. Antitrasformo e trovo $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}_0^x(s) \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{H}_f^x(s) \mathbf{U}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t)$$

Con $\mathbf{x}_l = \text{MOVIMENTO LIBERO}$, e $\mathbf{x}_f = \text{MOVIMENTO FORZATO}$.

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}_0(s) \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{H}(s) \mathbf{U}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t)$$

Con $\mathbf{y}_l = \text{RISPOSTA LIBERA}$, e $\mathbf{y}_f = \text{RISPOSTA FORZATA}$.

⚠️ La risposta $\mathbf{Y}(s)$ dipende solo da $\mathbf{H}(s)$ (che è quello che abbiamo fatto finora anche a TES) solo se la risposta libera è nulla, ovvero se il sistema è **inizialmente a riposo** [$\mathbf{x}(0^-) = 0$!]

Nel caso di un sistema **MIMO** (indicando con $p = \#\text{ingressi} \geq 1$ e $q = \#\text{uscite} \geq 1$) inizialmente a riposo ($\mathbf{x}_0 = 0$, quindi $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{U}(s)$):

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \dots \\ Y_i(s) \\ \dots \\ Y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{1j}(s) & H_{1p}(s) \\ H_{i1}(s) & H_{ij}(s) & H_{ip}(s) \\ H_{q1}(s) & H_{qj}(s) & H_{qp}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \dots \\ U_j(s) \\ \dots \\ U_p(s) \end{bmatrix} \rightarrow Y_i(s) = \sum_{j=1}^p H_{ij}(s) U_j(s)$$

Se gli altri ingressi $U_k(s) = 0$ per $\forall k \neq j$ (ovvero come in Elettrotecnica con il metodo di sovrapposizione degli effetti [tengo acceso solo 1 ingresso/generatore per volta]), allora posso scrivere:

$$H_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$$

Se il sistema è **SISO** ($p = \#\text{ingressi} = 1$ e $q = \#\text{uscite} = 1$), la matrice di trasferimento diventa una **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO** (fdt) [di cui vediamo sotto la RAPPRESENTAZIONE POLINOMIALE]:

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad \text{con } m = \deg(N_H) \leq n = \deg(D_H)$$

Se:

- $m < n \rightarrow$ fdt strettamente propria (**sistema proprio** [fisicamente realizzabile], ovvero $b_n = D = 0$);
- $m = n \rightarrow$ fdt non strettamente propria (bipropria, ovvero anche la reciproca è propria) (**sistema improprio** [non fisicamente realizzabile], ovvero $b_n = D \neq 0$).

Le radici di $N_H(s)$ sono dette **ZERI** della fdt del sistema, mentre le radici di $D_H(s)$ sono dette **POLI**.

Un'altra rappresentazione della fdt è la “**ZERI E POLI**”:

$$H(s) = K_\infty \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Dove indichiamo gli zeri con z_i e i poli con p_i ; con K_∞ indichiamo il “**GUADAGNO INFINITO**”, ovvero:

$$K_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n-m} H(s)$$

Dove $(n - m) =$ eccedenza zeri-poli.

⚠ La forma fattorizzata di **Bode** la useremo poi in Controlli Automatici!

Quando abbiamo un polinomio di 2° grado con radici complesse coniugate, possiamo usare la rappresentazione cartesiana, ma questa è scomoda:

$$p(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = (s - \sigma_0 - j\omega_0)(s - \sigma_0 + j\omega_0) \rightarrow s_{1,2} = \sigma_0 \pm j\omega_0$$

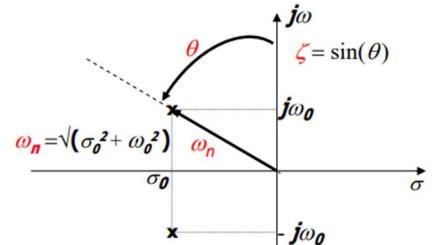
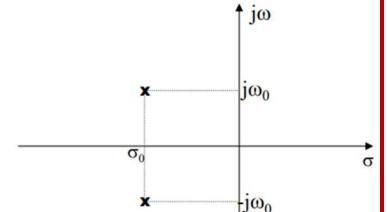
Perciò usiamo la notazione con la **pulsazione naturale** (ω_n) e lo **smorzamento** (ζ) di una coppia di radici complesse coniugate:

$$\sigma_0 = -\zeta\omega_n$$

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{(1 - \zeta^2)} > 0 \text{ sempre in questo corso}$$

$$\omega_n = \sqrt{(\sigma_0^2 + \omega_0^2)}$$

$$\zeta = \sin(\theta) = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{(\sigma_0^2 + \omega_0^2)}}$$



Dove per una coppia di radici complesse coniugate $\omega_n > 0$ e $|\zeta| < 1$.

Quindi la rappresentazione che useremo sarà “**ZERI-POLI**” usando pulsazione naturale e smorzamento:

$$H(s) = K_\infty \frac{\prod_{i=1}^{m_r} (s - z_i) \prod_{i=1}^{m_c} (s^2 + 2\zeta_{z,i} \omega_{nz,i} s + \omega_{nz,i}^2)}{\prod_{i=1}^{n_r} (s - p_i) \prod_{i=1}^{n_c} (s^2 + 2\zeta_{p,i} \omega_{np,i} s + \omega_{np,i}^2)}$$

Vediamo un **ESERCIZIO**:

Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Determinare l'espressione analitica del movimento dello stato $x(t)$ nel caso in cui

- L'ingresso sia un gradino di ampiezza 2 ($u(t) = 2\varepsilon(t)$)
- Le condizioni iniziali siano: $x(0) = [2 \ 2]^\top$

1. Calcolo la soluzione $X(s)$ nel dominio di Laplace:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, U(s) = \frac{2}{s}$$

Calcolo il termine $(sI - 1)^{-1}$:

$$(sI - 1)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{Adj}(sI - A)$$

Con $\text{Adj}(sI - A)$ la matrice aggiunta (matrice dei complementi algebrici di $sI - A$ [calcolata buttando via righe e colonne delle nostre posizioni e calcolando il determinante]); nel nostro caso:

$$(sI - 1)^{-1} = \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Ora che ho $(sI - A)^{-1}$ calcolo:

$$X_l(s) = (sI - A)^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{2s-4}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1} B U(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{2}{s} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \frac{2}{s} = \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{-4}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Da cui quindi:

$$X(s) = X_l(s) + X_f(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+8}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{2s-4}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{-4}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 + 10s + 6}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

2. Calcolo la scomposizione in fratti semplici e dei residui di $X(s)$:

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 + 10s + 6}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{2s^2 - 4s - 4}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1^{(1)}}{s} + \frac{R_2^{(1)}}{s+1} + \frac{R_3^{(1)}}{s+2} \\ \frac{R_1^{(2)}}{s} + \frac{R_2^{(2)}}{s+1} + \frac{R_3^{(2)}}{s+2} \end{bmatrix}$$

Residui:

$$X_1(s) = \frac{2s^2 + 10s + 6}{s(s+1)(s+2)} = \frac{R_1^{(1)}}{s} + \frac{R_2^{(1)}}{s+1} + \frac{R_3^{(1)}}{s+2} \rightarrow \begin{cases} R_1^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} sX_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2s^2 + 10s + 6}{s(s+1)(s+2)} = 3 \\ R_2^{(1)} = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)X_1(s) = 2 \\ R_3^{(1)} = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)X_1(s) = -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow X_1(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

E analogamente per $X_2(s)$:

$$\rightarrow X_2(s) = -\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{6}{s+2}$$

Quindi:

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} \\ -\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{6}{s+2} \end{bmatrix}$$

3. Calcolo $x(t)$ tramite le anti-trasformate sui singoli pezzetti ricavati dalla scomposizione in fratti semplici:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2e^{-t} - 3e^{-2t} \\ -2 - 2e^{-t} + 6e^{-2t} \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$

In presenza di poli complessi coniugati, dove vediamo che il residuo dei 2 poli coniugati sono anch'essi coniugati tra loro ($R_1; R_2 = R_1^*$). Quindi **antitrasformo questi 2 residui in un'unica antitrasformata** usando le formule di Eulero:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{R_1}{s-\sigma_0-j\omega_0} + \frac{R_1^*}{s-\sigma_0+j\omega_0}\right\} = (R_1 e^{(\sigma_0+j\omega_0)t} + R_1^* e^{(\sigma_0-j\omega_0)t}) \varepsilon(t)$$

Dove:

$$(R_1 e^{(\sigma_0+j\omega_0)t} + R_1^* e^{(\sigma_0-j\omega_0)t}) \varepsilon(t) = 2|R_1| e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \arg(R_1)) \varepsilon(t)$$

$$|R_1| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(R_1) + \operatorname{Im}^2(R_1)}, \arg(R_1) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(R_1)}{\operatorname{Re}(R_1)}$$

Il 1° residuo (R_1) è quello del polo che ha parte immaginaria positiva $z = a + bj$. Inoltre la fase si calcola in radianti (ricordarsi di mettere radianti sulla calcolatrice).

⚠️ In presenza di radici multiple (poli con molteplicità), la scomposizione in fratti semplici avviene così:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)^{\mu_1} (s-p_2)^{\mu_2} \cdots (s-p_r)^{\mu_r}}$$

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\mu_1} \frac{R_{1,k}}{(s-p_1)^k} + \sum_{k=1}^{\mu_2} \frac{R_{2,k}}{(s-p_2)^k} + \dots + \sum_{k=1}^{\mu_r} \frac{R_{r,k}}{(s-p_r)^k} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{R_{i,k}}{(s-p_i)^k}$$

E il calcolo dei residui avviene con la formula:

$$R_{i,k} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{d^{\mu_i - k}}{ds^{\mu_i - k}} \left[(s - p_i)^{\mu_i} F(s) \right], k = 1, \dots, \mu_i$$

Che nel caso $\mu_i = 1$ è analogo al calcolo dei residui visto finora, ma già con $\mu_i = 2$ avremo 2 residui per ogni polo:

$$R_{i,1} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d}{ds} \left[(s - p_i)^2 F(s) \right] \rightarrow \frac{R_{i,1}}{s - p_i}$$

$$R_{i,2} = \lim_{s \rightarrow p_i} \left[(s - p_i)^2 F(s) \right] \rightarrow \frac{R_{i,2}}{(s - p_i)^2}$$

Infatti se ho:

$$Y(s) = \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} \rightarrow Y(s) = \frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2} + \frac{R_{2,1}}{s+4} + \frac{R_{2,2}}{(s+4)^2}$$

Allora il calcolo sarà:

$$R_{1,1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s^2 Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4(s+4)^2 - 2(2s+1)2(s+4)}{(s+4)^4} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2(-2s+6)}{(s+4)^3} = 0.1875$$

$$R_{1,2} = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2 Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s^2 \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} \right] = 0.125$$

$$R_{2,1} = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d}{ds} [(s+4)^2 Y(s)] = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d}{ds} \left[(s+4)^2 \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} \right] = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{4s^2 - 2(2s+1)2s}{s^4} = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{-4(s+1)}{s^3} = -0.1875$$

$$R_{2,2} = \lim_{s \rightarrow -4} [(s+4)^2 Y(s)] = \lim_{s \rightarrow -4} \left[(s+4)^2 \frac{2(2s+1)}{s^2(s+4)^2} \right] = -0.875$$

Ottenendo quindi:

$$Y(s) = \frac{0.1875}{s} + \frac{0.125}{s^2} - \frac{0.1875}{s+4} - \frac{0.875}{(s+4)^2} \rightarrow y(t) = (0.1875 + 0.125t - 0.1875e^{-4t} - 0.875te^{-4t}) \varepsilon(t)$$

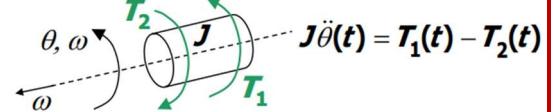
⚠️ Nel caso in cui $F(s)$ non sia strettamente propria, quindi Numeratore e Denominatore abbiano lo stesso grado ($m = n$), prima di fare la scomposizione in fratti semplici, bisogna fare la DIVISIONE TRA POLINOMI tra Num e Den , ottenendo una forma $F(s) = \text{Quoziente} + \frac{\text{Resto}(s)}{\text{Denominatore}(s)}$. Da qui posso fare la scomposizione in fratti semplici della parte con il resto.

⚠️ In MATLAB il calcolo dei residui della scomposizione in fratti semplici si fa con `[R,p,K]=residue(num,den)`!

Riprendiamo ora il discorso dei **SISTEMI MECCANICI** e parliamo dei **SISTEMI MECCANICI IN ROTAZIONE**, i cui componenti sono analoghi a quelli di un sistema dinamico in traslazione (ma questa volta ruotano rispetto ad un asse di simmetria). Vediamo gli elementi:

- **CORPO PUNTIFORME CHE RUOTA** di inerzia J , che descrivo mediante la posizione angolare ($\theta = [\text{rad}]$) e la velocità angolare ($\omega = [\text{rad/s}]$), che variano perché il corpo è soggetto ad una coppia (o Torque, T) [descritto dalla 2^a LEGGE DI NEWTON]:

$$J\ddot{\theta}(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = T(t) = \sum_i T_i(t)$$



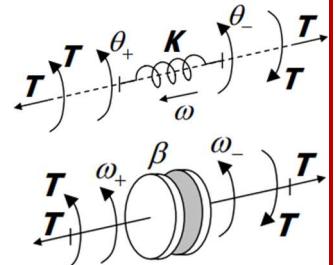
Dove indichiamo con $J\ddot{\theta}(t)$ = coppia di inerzia, e con $T_i(t) = [\text{Nm}]$ = coppie esterne agenti sul corpo (che saranno positive se concordi con il sistema di riferimento [aiutano la rotazione] o negative altrimenti [si oppongono alla rotazione]).

⚠ Ricordarsi di settare la calcolatrice su radianti (non gradi)!

I "disegni" (rappresentazione della nostra situazione fisica) dovranno essere in 2D, quindi pongo come asse orizzontale θ (e ω perché hanno stessa direzione) e quindi pongo le coppie T_i come vettori orizzontali concordi all'asse θ [se aiutano la rotazione] o discordi [se si oppongono la rotazione].

- **MOLLA IDEALE** (torsionale) con coefficiente di elasticità torsionale $K = [\text{Nm/rad}]$; la coppia elastica della molla vale:

$$T(t) = K[\theta_+(t) - \theta_-(t)]$$



- **SMORZATORE IDEALE** di smorzamento $\beta = [\text{Nms/rad}]$; la coppia di attrito vale:

$$T(t) = \beta[\omega_+(t) - \omega_-(t)] = \beta[\theta'_+(t) - \theta'_-(t)]$$

Nei sistemi in rotazione, l'**EQUAZIONI DEL MOTO** è:

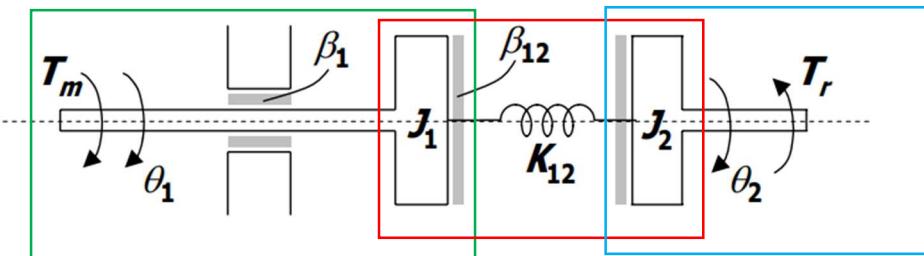
$$J_i \theta''_i(t) = \sum_k T_k^{est}(t) - \sum_l T_{il}^{int}(t)$$

Con T_k^{est} = **coppie esterne** (dall'esterno sul corpo) e T_{il}^{int} = **coppie interne** (interazione tra elemento J_i e J_l , ovvero molle ideali $T_{il}^{int}(t) = K_{il}[\theta_i(t) - \theta_l(t)]$ e smorzatori ideali $T_{il}^{int}(t) = \beta_{il}[\theta'_i(t) - \theta'_l(t)]$).

⚠ Se ho dei **PUNTI MATERIALI** (che hanno quindi $J_i = 0$), l'equazione del moto diventa del 1° ordine!

Le **VARIABILI DI STATO** dei sistemi in rotazione sono la **posizione angolare** (θ) e la **velocità angolare** (ω) e ci permettono di trasformare quest'equazione del 2° ordine in una coppia di equazioni differenziali del 1° ordine.

Vediamo un **ESEMPIO** dove vediamo un sistema [albero motore, frizione (giunzione elastica smorzata), carico]:



Equazioni del moto:

$$\begin{aligned} J_1 \theta''_1 &= T_m - [\beta_1(\theta'_1 - 0) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_{12}(\theta'_1 - \theta'_2)] \\ J_2 \theta''_2 &= -T_r - [K_{12}(\theta_2 - \theta_1) + \beta_{12}(\theta'_2 - \theta'_1)] \end{aligned}$$

Variabili di stato e ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta'_1(t) \\ \theta'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} T_m \\ T_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Equazioni di stato:

$$x'_1 = \frac{d\theta_1(t)}{dt} = \theta'_1(t) = x_3(t) = f_1(t, x, u)$$

$$x'_2 = \frac{d\theta_2(t)}{dt} = \theta'_2(t) = x_4(t) = f_2(t, x, u)$$

$$x'_3 = \frac{d\theta'_1(t)}{dt} = \theta''_1 = \frac{T_m}{J_1} - \frac{[\beta_1\theta'_1 + K_{12}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_{12}(\theta'_1 - \theta'_2)]}{J_1} = -\frac{K_{12}}{J_1}x_1 + \frac{K_{12}}{J_1}x_2 - \frac{\beta_1 + \beta_{12}}{J_1}x_3 + \frac{\beta_{12}}{J_1}x_4 + \frac{u_1}{J_1} = f_3(t, x, u)$$

$$x'_4 = \frac{d\theta'_2(t)}{dt} = \theta''_2 = -\frac{T_r}{J_2} - \frac{[K_{12}(\theta_2 - \theta_1) + \beta_{12}(\theta'_2 - \theta'_1)]}{J_2} = \frac{K_{12}}{J_2}x_1 - \frac{K_{12}}{J_2}x_2 - \frac{\beta_{12}}{J_2}x_3 - \frac{\beta_{12}}{J_2}x_4 - \frac{u_2}{J_2} = f_4(t, x, u)$$

Equazioni di uscita:

$$y_1 = \theta_2 = x_2 = g_1(t, x, u)$$

$$y_2 = \theta'_2 = x_4 = g_2(t, x, u)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

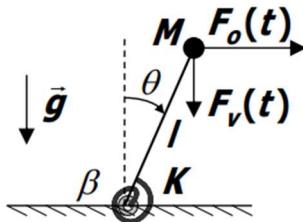
Dunque se $J_1, J_2, K_{12}, \beta_1, \beta_{12}$ sono costanti, il sistema è LTI → posso usare la rappresentazione in variabili di stato:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_{12}}{J_1} & \frac{K_{12}}{J_1} & -\frac{\beta_1 + \beta_{12}}{J_1} & \frac{\beta_{12}}{J_1} \\ \frac{K_{12}}{J_2} & -\frac{K_{12}}{J_2} & \frac{\beta_{12}}{J_2} & -\frac{\beta_{12}}{J_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un altro ESEMPIO è il pendolo inverso:



Come ipotesi sappiamo che $J = Ml^2$; poi studiamo l'equazione del moto:

 $\bar{T}_{F_o} = \bar{l} \wedge \vec{F}_o$ $T_{F_o} = I F_o \sin(\pi/2 - \theta)$ $= I F_o \cos \theta$	 $\bar{T}_{F_v} = \bar{l} \wedge \vec{F}_v$ $T_{F_v} = I F_v \sin(\pi - \theta)$ $= I F_v \sin \theta$	 $\bar{T}_{Mg} = \bar{l} \wedge \bar{Mg}$ $T_{Mg} = I Mg \sin(\pi - \theta)$ $= I Mg \sin \theta$
---	---	--

$$J\theta'' = T_{F_o} + T_{F_v} + T_{Mg} - [K(\theta - 0) + \beta(\theta' - 0)] = lF_o \cos(\theta) + lF_v \sin(\theta) + lMg \sin(\theta) - K\theta - \beta\theta'$$

Variabili di stato e ingresso (ricorda che non metto la forza peso negli ingressi perché è costante):

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} F_o(t) \\ F_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Equazioni di stato:

$$x'_1 = \frac{d\theta}{dt} = \theta' = x_2 = f_1(t, x, u)$$

$$x'_2 = \frac{d\theta'}{dt} = \theta'' = \frac{1}{Ml^2} [lF_o \cos(\theta) + lF_v \sin(\theta) + lMg \sin(\theta) - K\theta - \beta\theta'] =$$

$$= \frac{1}{Ml} u_1 \cos(x_1) + \frac{1}{Ml} u_2 \sin(x_1) + \frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{K}{Ml^2} x_1 - \frac{\beta}{Ml^2} x_2 = f_2(t, x, u)$$

⚠ La 2^a equazione di stato (x'_2) è **non-lineare** perché ha funzioni trigonometriche e perché ha prodotti incrociati di ingressi e variabili di stato; quindi il sistema derivante sarà non-lineare.

Equazioni di uscita:

$$y_1 = \theta = x_1 = g_1(t, x, u)$$

$$y_2 = \theta' = x_2 = g_2(t, x, u)$$

3) SISTEMI DINAMICI ELETTROMECCANICI

Si occupano della **CONVERSIONE** di energia elettrica in meccanica (**MOTORI ELETTRICI**) e energia meccanica in elettrica (**GENERATORI ELETTRICI** o **DINAMO ELETTRICHE**). **Noi in questo corso faremo solo i MOTORI ELETTRICI DC** (corrente continua); questi sono basati sulla **FORZA DI LORENTZ** $\vec{F}(t) = \vec{l}i(t) \wedge \vec{B}(t)$ e sulla **COPPIA DI LORENTZ** $T(t) = i(t)AB \sin(\theta(t))$:



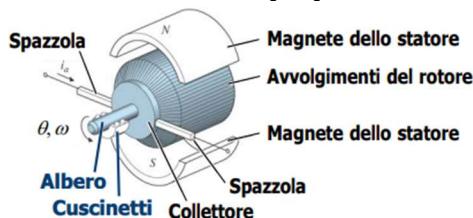
⚠ Il problema nel motore elettrico è come fare in modo che esso funzioni data la coppia di Lorentz, ovvero **come fare in modo che la coppia di Lorentz si auto-alimenti** (continui a ruotare). Infatti con una maglia sola, si blocca la rotazione; **servono più maglie, che però devono essere alimentate in maniera selettiva, scegliendo solo quelle dove la coppia di Lorentz è massima.**

Il prezzo che dobbiamo pagare per il movimento del conduttore è la **f.e.m** o **FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA**:

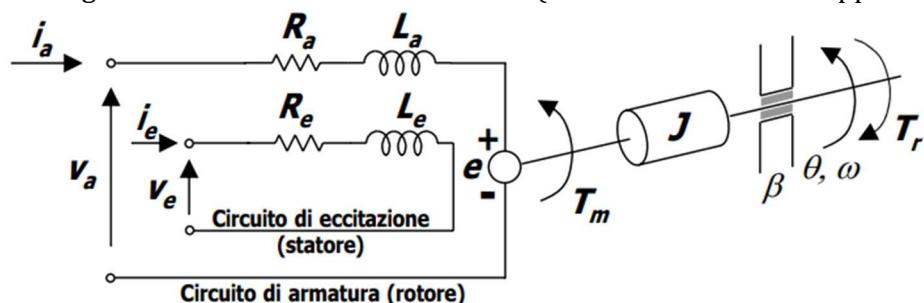
$$e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Gli **elementi principali** di un motore elettrico sono:

- **STATORE** = parte più esterna e non rotante, responsabile di generare il campo magnetico (mediante un circuito di eccitazione [solenoide], che può esserci oppure no [potrebbero esserci solo le calamite]);
- **ROTORE** = parte più interna e mobile, composto da un cilindro di materiale ferromagnetico e su di esso gli avvolgimenti che formano il **circuito di armatura** (questo genera un campo magnetico concatenato con quello dello statore);
- **COLLETTORE A SPAZZOLE** (o **ANELLO DI PACINOTTI**) = permette al circuito di entrare in contatto elettrico con 2 spazzole, attraverso cui il motore riceve energia elettrica sotto forma di **corrente di armatura**;
- **ALBERO MOTORE** = concorde al rotore e dotato di un proprio momento di inerzia, viene collegato al motore con dei cuscinetti a sfera.



Al motore elettrico è collegato il sistema meccanico del rotore (con l'eventuale carico applicato):



Quindi ha **EQUAZIONI**:

$$\text{Circuito di armatura (rotore): } v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e(t)$$

$$\text{Circuito di eccitazione (statore): } v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}$$

$$\text{Modello meccanico (rotore): } J\theta''(t) = T_m(t) - T_r(t) - \beta\theta'(t) = T_m(t) - T_r(t) - \beta\omega(t)$$

Dove T_r è la coppia resistente. Con:

$$\text{Forza elettromotrice indotta: } \mathbf{e}(\mathbf{t}) = -\frac{d\phi(t)}{dt} = K\phi(t)\omega(t)$$

Coppia motrice del motore (coppia di Lorentz): $\mathbf{T}_m(\mathbf{t}) = K\phi(t)i_a(t)$

Dove K = costante caratteristica del motore.

⚠️ Quindi come abbiamo detto prima, ci sono 2 modalità di MOTORE ELETTRICO:

- **Senza circuito di eccitazione**, ovvero con magneti permanenti $\rightarrow \phi(t) = \bar{\phi} = \text{costante}$;
- **Con circuito di eccitazione** $\rightarrow \phi(t) = \phi(i_e(t))$, ovvero flusso = **funzione non lineare** di $i_e(t)$ [dove quindi faremo una "linearizzazione" del flusso].

Il motore elettrico ha **2 modalità di comando**:

- **COMANDO DI ARMATURA** $\rightarrow \phi(t) = \bar{\phi} = \text{costante}$, allora il **comando del motore** è $v_a(t)$. Quindi:

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K\bar{\phi}\omega(t)$$

$v_e(t) = \bar{v}_e$ [quindi essendo costante, posso togliere l'equazione di v_e]

$$J\theta''(t) = K\bar{\phi}i_a(t) - T_r(t) - \beta\omega(t)$$

Quindi le **variabili di stato, di ingresso e di uscita** saranno:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, y = \theta$$

Quindi le **equazioni di stato** saranno:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{di_a(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a}i_a - \frac{K\bar{\phi}}{L_a}\omega + \frac{v_a}{L_a} = -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{K\bar{\phi}}{L_a}x_3 + \frac{1}{L_a}u_1 \\ x'_2 &= \theta' = \omega = x_3 \\ x'_3 &= \omega' = \theta'' = \frac{K\bar{\phi}}{J}i_a - \frac{\beta}{J}\omega - \frac{T_r}{J} = \frac{K\bar{\phi}}{J}x_1 - \frac{\beta}{J}x_3 - \frac{1}{J}u_2 \end{aligned}$$

- **COMANDO DI ECCITAZIONE** $\rightarrow i_a = \text{costante}$, allora il **comando del motore** è $v_e(t)$ [variano quindi sia $i_e(t)$ sia $\phi(t) = \phi(i_e(t))$]. Quindi:

$v_a(t) = \text{statica (istantanea)}$ [quindi posso togliere l'equazione di v_e]

$$v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}$$

$$J\theta''(t) = K\phi(t)\bar{i}_a - T_r(t) - \beta\omega(t)$$

Noi facciamo variare la corrente di eccitazione $i_e(t)$ sono nell'intorno del punto di funzionamento \bar{i}_e , in modo che anche il flusso vari solo in quell'intorno, ovvero linearizziamo la caratteristica non lineare del flusso mediante una retta secante che passa anche per l'origine con coefficiente angolare K_e tale che $\phi(t) \cong K_e i_e(t)$. Usiamo una secante per garantire il passaggio nell'origine, ovvero la condizione $i_e(t) = 0 \rightarrow \phi(t) = 0$.

Con quest'approssimazione l'equazione dinamica della parte meccanica diventa:

$$J\theta''(t) = K\phi(t)\bar{i}_a - T_r(t) - \beta\omega(t) = K\mathbf{K}_e i_e(t)\bar{i}_a - T_r(t) - \beta\omega(t) = \mathbf{K}^* i_e(t) - T_r(t) - \beta\omega(t) \quad [\text{lineare}]$$

Quindi le **variabili di stato, di ingresso e di uscita** saranno:

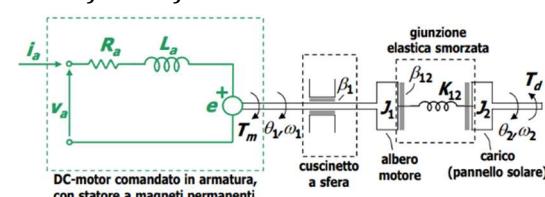
$$x(t) = \begin{bmatrix} i_e(t) \\ \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} v_e(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, y = \theta$$

Quindi le **equazioni di stato** saranno:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{di_e(t)}{dt} = -\frac{R_e}{L_e}i_e + \frac{v_e}{L_e} = -\frac{R_e}{L_e}x_1 + \frac{1}{L_e}u_1 \\ x'_2 &= \theta' = \omega = x_3 \\ x'_3 &= \omega' = \theta'' = \frac{K^*}{J}i_e - \frac{\beta}{J}\omega - \frac{T_r}{J} = \frac{K^*}{J}x_1 - \frac{\beta}{J}x_3 - \frac{1}{J}u_2 \end{aligned}$$

⚠️ Sia nel comando di eccitazione sia di armatura, si scrivono

anche le notazioni matriciali con A, B, C e D!



Vediamo un **ESEMPIO** (foto del problema a destra):

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K\bar{\phi}\omega(t) = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e$$

Il flusso è costante perché le maglie del motore sono alimentate per pochi gradi per avere forza di Lorentz massima, e poi il flusso diventa costante.

$$\begin{aligned} J_1 \theta_1'' &= K\bar{\phi}i_a - \beta_1(\omega_1 - 0) - K_{12}(\theta_1 - \theta_2) - \beta_{12}(\omega_1 - \omega_2) = T_m - \beta_1(\omega_1 - 0) - K_{12}(\theta_1 - \theta_2) - \beta_{12}(\omega_1 - \omega_2) \\ J_2 \theta_2'' &= -T_d - K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\omega_2 - \omega_1) \end{aligned}$$

Variabili di stato e ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} v_e(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Equazioni di stato:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{K\bar{\phi}}{L_a}x_4 + \frac{u_1}{L_a} = f_1(t, x, u) \\ x'_2 &= \frac{d\theta_1(t)}{dt} = \omega_1(t) = x_4 = f_2(t, x, u) \\ x'_3 &= \frac{d\theta_2(t)}{dt} = \omega_2(t) = x_5 = f_3(t, x, u) \\ x'_4 &= \frac{d\omega_1(t)}{dt} = \theta_1'' = \frac{[K\bar{\phi}i_a - \beta_1(\omega_1 - 0) - K_{12}(\theta_1 - \theta_2) - \beta_{12}(\omega_1 - \omega_2)]}{J_1} = \\ &= \frac{K\bar{\phi}}{J_1}x_1 - \frac{K_{12}}{J_1}x_2 + \frac{K_{12}}{J_1}x_3 - \frac{\beta_1 + \beta_{12}}{J_1}x_4 + \frac{\beta_{12}}{J_1}x_5 = f_4(t, x, u) \\ x'_5 &= \frac{d\omega_2(t)}{dt} = \theta_2'' = \frac{[-T_d - K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\omega_2 - \omega_1)]}{J_2} = \\ &= \frac{K_{12}}{J_2}x_2 - \frac{K_{12}}{J_2}x_3 + \frac{\beta_{12}}{J_2}x_4 - \frac{\beta_{12}}{J_2}x_5 - \frac{u_2}{J_2} = f_5(t, x, u) \end{aligned}$$

Equazione di uscita:

$$y = \theta_2 = x_3 = g(t, x, u)$$

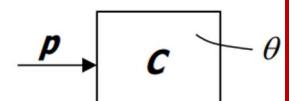
Da cui:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ A &= \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & 0 & -\frac{K\bar{\phi}}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K\bar{\phi}}{J_1} & -\frac{K_{12}}{J_1} & \frac{K_{12}}{J_1} & -\frac{\beta_1 + \beta_{12}}{J_1} & \frac{\beta_{12}}{J_1} \\ 0 & \frac{K_{12}}{J_2} & -\frac{K_{12}}{J_2} & \frac{\beta_{12}}{J_2} & -\frac{\beta_{12}}{J_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} \end{bmatrix}, \\ C &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0], D = [0 \ 0] \end{aligned}$$

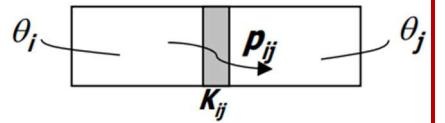
4) SISTEMI DINAMICI TERMICI

Sono i sistemi più facili da trattare. Gli **ELEMENTI FONDAMENTALI** sono:

- **CORPO OMOGENEO IDEALE** (stessa temperatura ovunque) di capacità termica C → $C \frac{d\theta(t)}{dt} = p(t)$, con C = capacità termica [J/K] (proporzionale al calore specifico), θ = temperatura assoluta [K], p = portata di calore (potenza termica) applicata [W];



- **CONDUTTORE TERMICO IDEALE** di conduttanza termica K_{ij} [W/K], dove la portata di calore dal corpo con temperatura assoluta θ_i al corpo con θ_j in contatto termico è pari a:



$$p_{ij}(t) = K_{ij}[\theta_i(t) - \theta_j(t)]$$

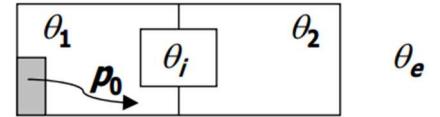
L'**EQUAZIONE DINAMICA** di equilibrio termico (per ogni corpo omogeneo ideale non termostatato [ovvero con θ_i non imposta dall'esterno]) è:

$$C_i \theta'_i(t) = \sum_k p_k^{est}(t) - \sum_j p_{ij}^{int}(t)$$

Dove p_k^{est} = portate di calore dall'esterno (aggiunte se forniscono calore al corpo, sottratte altrimenti), e $p_{ij}^{int} =$ portate di calore interne $p_{ij}(t) = K_{ij}[\theta_i(t) - \theta_j(t)]$.

Come **VARIABILI DI STATO** si prende la **temperatura assoluta** θ_i , mentre come **VARIABILI DI INGRESSO** si prendono le **portate di calore esterne** (aggiunte o sottratte al sistema dall'esterno) e la **temperatura assoluta di tutti i corpi omogenei termostatati**.

Vediamo un **ESEMPIO** (dove θ_1 = variabile di interesse, θ_e = temperatura imposta dall'esterno, e θ_i = temperatura del corpo termostatato interno):



Equazioni dinamiche:

$$\begin{aligned} C_1 \theta'_1 &= p_0 - [K_{1e}(\theta_1 - \theta_e) + K_{1i}(\theta_1 - \theta_i) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2)] \\ C_2 \theta'_2 &= 0 - [K_{2e}(\theta_2 - \theta_e) + K_{2i}(\theta_2 - \theta_i) + K_{12}(\theta_2 - \theta_1)] \end{aligned}$$

Variabili di stato e ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} p_0(t) \\ \theta_e(t) \\ \theta_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

Equazioni di stato:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{d\theta_1}{dt} = \theta'_1 = \frac{p_0}{C_1} - \frac{1}{C_1} [K_{1e}(\theta_1 - \theta_e) + K_{1i}(\theta_1 - \theta_i) + K_{12}(\theta_1 - \theta_2)] = \\ &= -\frac{K_{1e} + K_{1i} + K_{12}}{C_1} x_1 + \frac{K_{12}}{C_1} x_2 + \frac{1}{C_1} u_1 + \frac{K_{1e}}{C_1} u_2 + \frac{K_{1i}}{C_1} u_3 = f_1(t, x, u) \\ x'_2 &= \frac{d\theta_2}{dt} = \theta'_2 = -\frac{1}{C_2} [K_{2e}(\theta_2 - \theta_e) + K_{2i}(\theta_2 - \theta_i) + K_{12}(\theta_2 - \theta_1)] = \\ &= \frac{K_{12}}{C_2} x_1 - \frac{K_{2e} + K_{2i} + K_{12}}{C_2} x_2 + \frac{K_{2e}}{C_2} u_2 + \frac{K_{2i}}{C_2} u_3 = f_2(t, x, u) \end{aligned}$$

Equazioni di uscita:

$$y = \theta_1 = x_1 = g(t, x, u)$$

In forma matriciale:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ A &= \begin{bmatrix} -\frac{K_{1e} + K_{1i} + K_{12}}{C_1} & \frac{K_{12}}{C_1} \\ \frac{K_{12}}{C_2} & -\frac{K_{2e} + K_{2i} + K_{12}}{C_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{K_{1e}}{C_1} & \frac{K_{1i}}{C_1} \\ 0 & \frac{K_{2e}}{C_2} & \frac{K_{2i}}{C_2} \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = [0 \quad 0 \quad 0] \end{aligned}$$

5) ANALISI MODALE (sistemi dinamici LTI TC)

Vogliamo studiare il movimento libero dello stato $x_l(t)$, ovvero la soluzione di $x'(t) = Ax(t)$. Abbiamo visto dalla formula di Lagrange che il movimento libero è $x_l(t) = e^{At}x(0^-)$, ma calcolarlo mediante questa **matrice esponenziale è complesso**; se invece **prendiamo il caso più semplice** (dove la matrice A abbia n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reale e distinti, e sia diagonale), possiamo **calcolare la matrice esponenziale facilmente**; vediamolo con un **ESEMPIO**:

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 \\ x'_2 = 0 \\ x'_3 = -x_3 \end{cases} \text{ dove ho } \begin{cases} x_1(t=0^-) = 1 \\ x_2(t=0^-) = 2 \\ x_3(t=0^-) = 3 \end{cases} \text{ e ipotizziamo } \begin{cases} x_1(t) = ae^{3t} \rightarrow x'_1 = 3ae^{3t} = 3x_1 \wedge x_1(0^-) = a = 1 \\ x_2(t) = b \rightarrow x'_2 = 0 \wedge x_2(0^-) = b = 2 \\ x_3(t) = ce^{-t} \rightarrow x'_3 = -ce^{-t} = -x_3 \wedge x_3(0^-) = c = 3 \end{cases}$$

da cui trovo dallo step precedente

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{3t}\varepsilon(t) \\ x_2(t) = 2\varepsilon(t) \\ x_3(t) = 3e^{-t}\varepsilon(t) \end{cases}$$

In forma **matriciale** (partendo dalle equazioni viste su), trovo le matrici A e e^{At} :

$$x'(t) = Ax(t) \rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda(A) = \{3, 0, -1\} \text{ [presi dalla diagonale, perchè A diagonale]}$$

$$x_l(t) = e^{At}x(0^-) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) = e^{3t}\varepsilon(t) \\ x_2(t) = 2\varepsilon(t) \\ x_3(t) = 3e^{-t}\varepsilon(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{0t} = 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Da cui vediamo che la matrice esponenziale e^{At} sarà diagonale con elementi sulla diagonale esponenziali $m_i(t) = e^{\lambda_i t}$ con esponente gli autovalori di $A(t)$; questi elementi sono detti **MODI NATURALI** (o **modi propri**) del sistema associato all'autovalore λ_i . Parlando di **ANALISI MODALE** ci interessa trovare l'espressione analitica dei modi naturali, ma ancor di più ci interessa in maniera qualitativa come questi tendono con $t \rightarrow \infty$ (comportamento asintotico). Possiamo **CLASSIFICARE i modi naturali** (definiti per $t \geq 0$), ovvero un modo può essere:

- **CONVERGENTE** (a zero): $\lim_{t \rightarrow \infty} |m(t)| = 0$;
- **LIMITATO**: $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall t \geq 0$, risulta $0 < |m(t)| \leq M < \infty$;
- **DIVERGENTE**: $\lim_{t \rightarrow \infty} |m(t)| = \infty$.

In generale, per trovare la matrice e^{At} , ovvero trovare i modi naturali, bisogna sempre partire trovando gli **AUTOVALORI** di A (facile per matrici diagonali e triangolari, altrimenti no); in ogni caso, se anche A non è diagonale, si può usare la proprietà di **trasformazione di similarità** (cambio di base), ovvero **passare da una matrice A non diagonale, ad una matrice \tilde{A} in forma di Jordan (diagonale o diagonale a blocchi)**:

$$e^{At} = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}$$

Ovvero la matrice \tilde{A} in **forma di Jordan**, ovvero **diagonale a blocchi**, ha struttura:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{A}_q \end{bmatrix}$$

Dove \tilde{A}_i sono i **BLOCCHI DI JORDAN**, ovvero **sottomatrici quadrate** associate all'i-esimo autovalore λ_i con dimensione $\mu_i \times \mu_i$; se prendiamo questa matrice e ne facciamo l'esponenziale $e^{\tilde{A}t}$, allora riotteniamo una forma di Jordan dove i blocchi di Jordan $e^{\tilde{A}_i t}$ sono sottomatrici quadrate aventi le stesse dimensioni di quelli di A . **Le forme di Jordan variano a seconda delle caratteristiche degli autovalori di A.** Dunque si ha:

$$x_l(t) = e^{At}x(0^-) = Te^{\tilde{A}t}T^{-1}x(0^-)$$

A noi non interesserà fare tutti i conti esplicativi, ma ci interesserà capire la forma di Jordan studiando gli autovalori di A.

- Se ho **autovalori reali e distinti semplici** (il caso visto sopra), il modo naturale $e^{\lambda t}$, associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ di **molteplicità unitaria**, sarà:
 - o **ESPONZIALMENTE CONVERGENTE** se $Re(\lambda) < 0$ [es. e^{-t}], ovvero **autovalore negativo**;
 - o **LIMITATO (COSTANTE)** se $Re(\lambda) = 0$ [es. $e^{0t} = 1$], ovvero **autovalore nullo**;
 - o **ESPONZIALMENTE DIVERGENTE** se $Re(\lambda) > 0$ [es. e^t], ovvero **autovalore positivo**.
- Se ho **autovalori complessi coniugati con molteplicità unitaria** ($\lambda = \sigma \pm j\omega$), i blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti a queste coppie di autovalori complessi coniugati hanno la forma:

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

E generano **modi naturali oscillanti** del tipo $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$, e $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$ (definendo $e^{\sigma t} = \text{INVILUPPI}$). Quindi un modo naturale di questo tipo sarà **dipendente dall'inviluppo**:

- o **ESPONZIALMENTE CONVERGENTE** se $Re(\lambda) = \sigma < 0$ [es. $e^{-t} \sin(5t)$], ovvero **parte reale di autovalore negativo**;
- o **LIMITATO (COSTANTE)** se $Re(\lambda) = \sigma = 0, Im(\lambda) = \omega \neq 0$ [es. $\sin(5t)$], ovvero **parte reale di autovalore nullo**;

- **ESPOENZIALMENTE DIVERGENTE** se $\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma > 0$ [es. $e^t \sin(5t)$], ovvero parte reale di autovalore positivo.
- Se ho **autovalori reali con molteplicità $\mu > 1$** , i blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti a questi autovalori reali sono matrici **diagonali a blocchi con sottomatrici triangolari** del tipo:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{\mu'-1}}{(\mu'-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{\mu'-2}}{(\mu'-2)!} e^{\lambda t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Dando origine a $\mu' \leq \mu$ modi naturali del tipo $t^{\mu'-1}e^{\lambda t}, \dots, te^{\lambda t}, e^{\lambda t}$ (**$\mu' = \text{MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA}$, $\mu = \text{MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA}$**). La molteplicità geometrica si calcola così:

$$\mu' = \mu - d + 1 \leq \mu$$

Con d = dimensione dell'autospazio associato all'autovalore λ (numero di autovettori indipendenti fra loro associati all'autospazio, ricavati con $(\lambda I - A)v = 0$; con un **esempio**:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0; \mu = 2$$

$$(\lambda I - A)v = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow d = 1 \rightarrow \mu' = \mu - d + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$$

⚠ A noi non interesserà trovare la molteplicità geometrica!

Quindi i modi naturali $t^{\mu'-1}e^{\lambda t}, \dots, te^{\lambda t}, e^{\lambda t}$ associati all'autovalore reale λ con molteplicità μ sono:

- **ESPOENZIALMENTE CONVERGENTI** se $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ [es. te^{-t}], ovvero autovalore negativo;
- **POLINOMIALMENTE DIVERGENTI** se $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ [es. $te^{0t} = t$], ovvero autovalore nullo;
- **ESPOENZIALMENTE DIVERGENTI** se $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ [es. te^t], ovvero autovalore positivo.

- Se ho **autovalori complessi coniugati** ($\lambda = \sigma \pm j\omega$) con **molteplicità $\mu > 1$** , i blocchi di $e^{\tilde{A}t}$ corrispondenti a questi autovalori reali sono matrici **diagonali a blocchi con sottomatrici triangolari** (come sopra), che danno origine a $\mu' \leq \mu$ modi naturali del tipo $t^{\mu'-1}e^{\sigma t} \cos(\omega t), \dots, te^{\sigma t} \cos(\omega t), e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ e del tipo $t^{\mu'-1}e^{\sigma t} \sin(\omega t), \dots, te^{\sigma t} \sin(\omega t), e^{\sigma t} \sin(\omega t)$; sono:
 - **ESPOENZIALMENTE CONVERGENTI** se $\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma < 0$ [es. $te^{-t} \sin(5t)$], ovvero parte reale di autovalore negativa;
 - **POLINOMIALMENTE DIVERGENTI** se $\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma = 0$ [es. $t \sin(5t)$], ovvero parte reale di autovalore nulla;
 - **ESPOENZIALMENTE DIVERGENTI** se $\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma > 0$ [es. $te^t \sin(5t)$], ovvero parte reale di autovalore positiva.

⚠ Gli esercizi legati a ciò sono proprio capire il comportamento dei modi naturali, partendo dagli autovalori di A!

Per solo i modi convergenti associati all'autovalore λ con $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, definiamo la **COSTANTE DI TEMPO** (rappresenta la **convergenza a zero del modo**) [può anche essere valutata graficamente prendendo l'intersezione tra l'asse dei tempi e la tangente al grafico di $e^{\lambda t}$ ($e^{\sigma t}$) passante per il punto $t = 0$]:

$$\tau = \left| \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)} \right| = [\text{secondi}]$$

Esercizio:

$$A_{11} \rightarrow \lambda_{1,2} = -0.5 \pm 5j \text{ (matrice quadrata tipo seno - coseno)}$$

$$A_{22} \rightarrow \det(\lambda I_2 - A_{22}) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 4 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + 4) + 3 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) \rightarrow \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -3$$

I modi naturali corrispondenti sono:

- $\lambda_{1,2} \rightarrow e^{-0.5t} \cos(5t), e^{-0.5t} \sin(5t) \rightarrow$ modi esponenzialmente convergenti
- $\lambda_3 \rightarrow e^{-t} \rightarrow$ modo esponenzialmente convergente
- $\lambda_4 \rightarrow e^{-3t} \rightarrow$ modo esponenzialmente convergente

Poiché tutti i modi naturali sono convergenti si possono calcolare le costanti di tempo

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Per il modo e^{-3t} si ha:

$$\tau_4 = \left| \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_4)} \right| = \left| \frac{1}{-3} \right| = 0.33 \text{ s}$$

Per i modi $e^{-0.5t} \cos(5t), e^{-0.5t} \sin(5t)$ si ha:

$$\tau_{1,2} = \left| \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_{1,2})} \right| = \left| \frac{1}{-0.5} \right| = 2 \text{ s}$$

Per il modo e^{-t} si ha:

$$\tau_3 = \left| \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda_3)} \right| = \left| \frac{1}{-1} \right| = 1 \text{ s}$$

6) SISTEMI DINAMICI A TEMPO DISCRETO

La variabile t diventa k (intera); lo stato è descritto da un'equazione alle differenze (e non differenziale), mentre l'uscita è ancora un'equazione istantanea:

$$\begin{aligned}x_i(k+1) &= f_i(k, x(k), u(k)) \\y_l(k) &= g_l(k, x(k), u(k))\end{aligned}$$

Abbiamo **SISTEMI DINAMICI A CLASSI DI ETÀ** (per studiare l'evoluzione temporale di "classi di popolazione" in periodi di tempo fissati); indichiamo con $x_i(k)$ = n° di elementi che all'istante k hanno una certa età appartenente alla classe i . L'evoluzione di ogni classe dal periodo k al periodo di tempo successivo $k + 1$ avviene considerando:

- **TASSO DI MORTALITÀ** $\rightarrow 0 \leq \gamma_i \leq 1$;
- **TASSO DI SOPRAVVIVENZA** $\rightarrow 0 \leq 1 - \gamma_i \leq 1$.

ESEMPIO (parco macchine – noleggio) [Hp: $x_i(k)$ = n° auto del parco macchine che hanno età i nell'anno k (ovvero hanno età compresa tra $i - 1$ anni e i anni $\rightarrow i - 1 \leq \text{età}\{x_i(k)\} \leq i$); $u(k)$ = n° auto nuove acquistate nell'anno k ; ipotizziamo che il noleggio acquisti solo auto nuove (quindi unico ingresso $u(k)$), che non si conservano auto più vecchie di 3 anni e che il tasso di mortalità γ_i è costante nel tempo]:

$$1^{\circ} \text{ anno} \rightarrow x_1(k+1) = u(k)$$

$$2^{\circ} \text{ anno} \rightarrow x_2(k+1) = x_1(k) - \gamma_1 x_1(k) = (1 - \gamma_1)x_1(k) \quad [\text{macchine sopravvissute dal } 1^{\circ} \text{ anno}]$$

$$3^{\circ} \text{ anno} \rightarrow x_3(k+1) = x_2(k) - \gamma_2 x_2(k) = (1 - \gamma_2)x_2(k) \quad [\text{macchine sopravvissute dal } 2^{\circ} \text{ anno}]$$

$$\text{N}^{\circ} \text{ totale di auto nell'anno } k \rightarrow y_1(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k)$$

Costo totale di assicurazione $\rightarrow y_2(k) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + c_3 x_3(k)$ [c_i = costo assicurazione di ogni auto delle classi di età i]

Quindi:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

Con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma_2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, D = [0]$$

Abbiamo poi **SISTEMI DINAMICI A DATI CAMPIONATI**, dove l'ingresso discreto $u(k)$ viene ricostruito attraverso un convertitore D/A (filtro di tenuta), poi viene elaborato dal sistema dinamico a tempo continuo che fornisce $y(t)$ e poi questa viene ridiscretizzata in $y(k)$ (con un campionatore). **DISCRETIZZARE** (CAMPIONARE) = da tempo continuo a tempo discreto, usando un campionatore uniforme con passo di campionamento T_s ; discretizzare un sistema a TC equivale a studiare l'evoluzione degli stati valutati negli istanti di campionamento, facciamo (con $k = i \cdot T_s$):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

Si ipotizza che $u(t)$ sia costante tra 2 istanti di campionamento, ovvero $u(\tau) = u(i \cdot T_s)$. **Discretizzando la formula di Lagrange** si passa a:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) = e^{AT_s} x(k) + \left(\int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)} d\tau \right) B u(k)$$

⚠ Dato che l'uscita ha relazione statica/istantanea con lo stato e l'ingresso, si ha che $C_d = C$ e $D_d = D$!

Nei sistemi a tempo discreto, come in quelli a tempo continuo, non lavoreremo nel dominio del tempo discreto k (per la formula di Lagrange difficile e la convoluzione), ma passeremo dalla **TRASFORMATA ZETA**. Anche qui avremo la **TRASFORMATA ZETA UNILATERA**:

$$F(z) = Z\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}, \text{ con } z \in \mathbb{C}$$

Con tutte le sue **proprietà** (guarda **TAVOLE**):

- **PRODOTTO-CONVOLUZIONE** $\rightarrow Z\{f_1(k) * f_2(k)\} = F_1(z)F_2(z)$;

- RITARDO $\rightarrow Z\{f(k-h)\} = z^{-h}F(z)$;
- ANTICIPO $\rightarrow Z\{f(k+1)\} = zF(z) - zf(0)$.

Le **trasformate Zeta notevoli** sono (con $\binom{k}{l} = \text{segnaile binomiale}$)

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$\binom{k}{l} \triangleq \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!}, l > 0$	$\frac{z}{(z-1)^{l+1}}$

$f(k)$	$F(z)$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$\binom{k}{\ell} a^{k-\ell}, \ell > 0$	$\frac{z}{(z-a)^{\ell+1}}$
$\sin(\vartheta k), \vartheta \in \mathbb{R}$	$\frac{z \sin(\vartheta)}{z^2 - 2\cos(\vartheta)z + 1}$
$\cos(\vartheta k), \vartheta \in \mathbb{R}$	$\frac{z(z - \cos(\vartheta))}{z^2 - 2\cos(\vartheta)z + 1}$
$A^k, A \in \mathbb{R}^{n,n}$	$z(zI - A)^{-1}$

Come con Fourier, anche per l'antitrasformata zeta si passa dalla **SCOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI**; una volta arrivati ai residui però ci potrebbe capitare di avere una funzione con al **numeratore un termine senza z**, a cui noi non siamo abituati; per questo conviene fare così:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{(z-0.5)(z-0.4)} \\ \tilde{F}(z) &= \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z-0.5)(z-0.4)} = \\ &= \frac{10}{z-0.5} - \frac{10}{z-0.4} \\ F(z) &= z \cdot \tilde{F}(z) = \frac{10z}{z-0.5} - \frac{10z}{z-0.4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{10z}{z-0.5} - \frac{10z}{z-0.4}\right\} = \\ &= (10 \cdot 0.5^k - 10 \cdot 0.4^k) \varepsilon(k) \end{aligned}$$

Come per i sistemi a tempo continuo, esiste la **SOLUZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO DISCRETO** con Lagrange:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i) = x_l(k) + x_f(k)$$

Con x_l = movimento libero dello stato, e x_f = movimento forzato dello stato. Mentre per l'uscita:

$$y(k) = C A^k x(0) + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i) + D u(k) = y_l(k) + y_f(k)$$

Noi non useremo questa formula (matrice esponenziale e convoluzione), ma useremo la **SOLUZIONE NEL DOMINIO DELLA TRASFORMATA ZETA**; nella pratica i passaggi sono:

1. **PASSO NEL DOMINIO DELLA ZETA** (unica cosa che cambia da Laplace è l'aggiunta di quella **z**):

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

2. **CALCOLO LO STATO e l'USCITA**:

$$\begin{aligned} X(z) &= z(zI - A)^{-1}x(0) + (zI - A)^{-1}BU(z) = H_0^x(z)x(0) + H_f^x(z)U(z) \\ y(z) &= zC(zI - A)^{-1}x(0) + [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) = H_0(z)x(0) + H(z)U(z) \end{aligned}$$

Dove $H(z)$ = matrice di trasferimento (se $p = q = 1$, ovvero SISO, ho una funzione di trasferimento).

3. **FACCIO LA SCOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI, TROVO I RESIDUI E ANTITRASFORMO.**

Oltre a ciò possiamo anche fare l'**ANALISI MODALE** per sistemi dinamici LTI a TEMPO DISCRETO; anche qui noi **ci focalizziamo solo sul MOVIMENTO LIBERO** del sistema dinamico a TD, ovvero togliamo il movimento forzato e teniamo solo $x(k+1) = Ax(k)$, tale che $x_l(k) = A^k x(0)$. Per trovare i modi naturali associati alle varie tipologie di autovalori, occorre calcolare A^k ; questo calcolo è facile solo se A è diagonale, ma per generalizzare questo calcolo (anche a quando A non è diagonale), uso la **FORMA DI JORDAN** $A^k = T \tilde{A}^k T^{-1}$ [**quindi è come a tempo continuo, ma qui al posto della matrice esponenziale di A, ho la potenza di A**], arrivando a:

$$x_l(k) = A^k x(0) = T \tilde{A}^k T^{-1} x(0)$$

Come nel caso del tempo continuo anche qui ci interessa **capire il comportamento dei modi naturali attraverso gli autovalori di A** :

- Se ho **autovalori reali e distinti semplici**, i blocchi di \tilde{A}^k hanno forma diagonale; il modo naturale λ^k associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ di **moltiplicità unitaria**, sarà:
 - **GEOMETRICAMENTE CONVERGENTE** se $|\lambda| < 1$ [es. 0.5^k]. Se $Re(\lambda) < 0$ ho un **modo alternato** (genera una sequenza di campioni con segno che cambia ad ogni passo);
 - **LIMITATO** se $|\lambda| < 1$ [es. $1^k = 1$];
 - **GEOMETRICAMENTE DIVERGENTE** se $|\lambda| > 1$ [es. $(-2)^k$].
- Se ho **autovalori complessi coniugati con molteplicità unitaria** ($\lambda = \sigma \pm j\omega = ve^{\pm j\theta}$), i blocchi di \tilde{A}^k corrispondenti a queste coppie di autovalori complessi coniugati hanno la forma:

$$\tilde{A}^k = v^k \begin{bmatrix} \cos(\theta k) & \sin(\theta k) \\ -\sin(\theta k) & \cos(\theta k) \end{bmatrix}$$

E generano **modi naturali oscillanti** del tipo $v^k \cos(\theta k)$, e $v^k \sin(\theta k)$. Quindi un modo naturale di questo tipo sarà:

- **GEOMETRICAMENTE CONVERGENTE** se $|\lambda| = v < 1$ [es. $0.5^k \sin(k)$];
- **LIMITATO (OSCILLANTE)** se $|\lambda| = v = 1, Arg(\lambda) = \theta \neq 0$ [es. $\sin(5k)$];
- **GEOMETRICAMENTE DIVERGENTE** se $|\lambda| = v > 1$ [es. $1.5^k \sin(k)$].
- Se ho **autovalori reali con molteplicità $\mu > 1$** , i blocchi di \tilde{A}^k corrispondenti a questi autovalori reali sono matrici **diagonali a blocchi con sottomatrici triangolari** del tipo:

$$\begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^k & \dots & \frac{k(k-1)\cdots(k-\mu'-2)}{(\mu'-1)!} \lambda^{k-\mu'-1} \\ 0 & \lambda^k & \dots & \frac{k(k-1)\cdots(k-\mu'-3)}{(\mu'-2)!} \lambda^{k-\mu'-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

Dando origine a $\mu' \leq \mu$ modi naturali del tipo $k^{\mu'} \lambda^k, \dots, k\lambda^k, \lambda^k$, che sono:

- **GEOMETRICAMENTE CONVERGENTE** se $|\lambda| < 1$ [es. $k0.5^k$]. Se $Re(\lambda) < 0$ ho un **modo alternato**;
- **POLINOMIALMENTE DIVERGENTE** se $|\lambda| = 1$ [es. $k1^k = k$];
- **GEOMETRICAMENTE DIVERGENTE** se $|\lambda| > 1$ [es. $k2^k$].
- Se ho **autovalori complessi coniugati** ($\lambda = \sigma \pm j\omega = ve^{\pm j\theta}$) **con molteplicità $\mu > 1$** , i blocchi di \tilde{A}^k hanno forma simile al caso reale con $\mu > 1$ e originano $\mu' \leq \mu$ modi naturali oscillanti del tipo $k^{\mu'} v^k \cos(\theta k), \dots, k v^k \cos(\theta k), v^k \cos(\theta k)$ e del tipo $k^{\mu'} v^k \sin(\theta k), \dots, k v^k \sin(\theta k), v^k \sin(\theta k)$; questi sono:
 - **GEOMETRICAMENTE CONVERGENTI** se $|\lambda| = v < 1$ [es. $k0.5^k \sin(k)$];
 - **POLINOMIALMENTE DIVERGENTI** se $|\lambda| = v = 1, Arg(\lambda) = \theta \neq 0$ [es. $k \sin(5k)$];
 - **GEOMETRICAMENTE DIVERGENTI** se $|\lambda| = v > 1$ [es. $k1.5^k \sin(k)$].

Esercizio:

$$A_{11} \rightarrow \lambda_{1,2} = -0.5 \pm 5j = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pm j\frac{5}{4}\pi}$$

$$A_{22} \rightarrow \det(\lambda I_2 - A_{22}) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3) - 0 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) \rightarrow \lambda_3 = -1, \lambda_4 = +3$$

Quindi, il sistema ha 4 autovalori distinti (2 reali e 2 complessi coniugati); perciò i modi sono:

$$\lambda_{1,2} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \cos\left(\frac{5}{4}\pi k\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \sin\left(\frac{5}{4}\pi k\right) \rightarrow |\lambda_{1,2}| < 1 \text{ [oscillanti geometricamente convergenti]}$$

$$\lambda_3 \rightarrow (-1)^k \rightarrow |\lambda_3| = 1 \text{ [limitato alternato]}$$

$$\lambda_4 \rightarrow 3^k \rightarrow |\lambda_4| > 1 \text{ [geometricamente divergente]}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

7) EQUILIBRIO E STABILITÀ DI SISTEMI DINAMICI

L'**EQUILIBRIO** di un sistema dinamico stazionario (consideriamo solo gli stazionari [ovvero i tempo-invarianti] per facilità) è un movimento costante in cui, per $\forall t \geq 0$:

- **INGRESSO** del sistema costante $\rightarrow \mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^p$, con $\bar{\mathbf{u}}$ = ingresso di equilibrio;
- **STATO** del sistema costante (= stato iniziale) $\rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t=0) = \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, con $\bar{\mathbf{x}}$ = stato di equilibrio;
- **USCITA** del sistema costante $\rightarrow \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^q$, con $\bar{\mathbf{y}}$ = uscita di equilibrio.

Definiamo la coppia $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ = PUNTO DI EQUILIBRIO.

Vediamo l'equilibrio nei vari sistemi dinamici:

- Se ho un sistema dinamico stazionario **TC**, a dimensione finita, MIMO e **non lineare** (caso più generale), dove l'equazione d'uscita e l'equazione di stato non dipendono da t :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{aligned}$$

Ma avendo che $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$, allora avremo che $\mathbf{x}'(t) = \bar{\mathbf{x}}' = 0$; perciò per garantire l'equilibrio dovremo avere che $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$ (**CONDIZIONE DI EQUILIBRIO TC**); perciò avrò che:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) &= \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

- Se ho un sistema dinamico stazionario **TC**, a dimensione finita, MIMO e **lineare**:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

Avrò che all'equilibrio $\mathbf{x}'(t) = \bar{\mathbf{x}}' = 0 = A\bar{\mathbf{x}} + B\bar{\mathbf{u}} \rightarrow A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{\mathbf{u}}$ (**CONDIZIONE DI EQUILIBRIO LTI TC**); avrò:

$$\begin{aligned} A\bar{\mathbf{x}} &= -B\bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} &= C\bar{\mathbf{x}} + D\bar{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Questo però implica che se:

- **A invertibile** ($\det(A) \neq 0$), esiste **1 solo stato di equilibrio** (isolato) $\rightarrow \bar{\mathbf{x}} = -A^{-1}B\bar{\mathbf{u}}$, ed esiste 1 sola uscita di equilibrio $\rightarrow \bar{\mathbf{y}} = (-CA^{-1}B + D)\bar{\mathbf{u}}$;
- **A singolare** ($\det(A) = 0$), possono esistere **infiniti o zero stati di equilibrio**, a seconda delle matrici A e B e dell'ingresso di equilibrio $\bar{\mathbf{u}}$. Sotto un **ESEMPIO** per capire zero o infiniti stati di equilibrio:

Esempio: dato il sistema dinamico LTI a tempo continuo
avente matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare tutti gli
stati di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ al variare dell'ingresso di equilibrio $\bar{\mathbf{u}}$
All'equilibrio, dalle equazioni di stato risulta:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} = A\bar{\mathbf{x}} + B\bar{\mathbf{u}} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{0} = \bar{x}_1 + \bar{u} \\ \mathbf{0} = \bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = -\bar{u} \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$
- se $\bar{u} = 0 \Rightarrow$ esistono infiniti stati di equilibrio dati da

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow$$
 si parla in tal caso di stato di equilibrio non isolato
- se $\bar{u} \neq 0 \Rightarrow$ non esiste alcuno stato di equilibrio

- Se ho un sistema dinamico stazionario **TD**, a dimensione finita, MIMO e **non lineare** (caso più generale), dove l'equazione d'uscita e l'equazione di stato non dipendono da k :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{y}(k) &= g(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \end{aligned}$$

Ma avendo $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{u}}$, allora avremo che $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{x}}$ (**CONDIZIONE DI EQUILIBRIO TD**) (e non $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$ come per il TC):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) &= \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

- Se ho un sistema dinamico stazionario **TD**, a dimensione finita, MIMO e **lineare**:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

Avrò che all'equilibrio $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}} = A\bar{\mathbf{x}} + B\bar{\mathbf{u}} \rightarrow (I_n - A)\bar{\mathbf{x}} = B\bar{\mathbf{u}}$ (**CONDIZIONE DI EQUILIBRIO LTI TD**) [uso la matrice identità come l'avevo usata in precedenza per far quadrare le giuste dimensioni]:

$$(I_n - A)\bar{x} = B\bar{u}$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}$$

Questo però implica che se:

- **$I_n - A$ invertibile** ($\det(I_n - A) \neq 0$), esiste **1 solo stato di equilibrio** (isolato) $\rightarrow \bar{x} = (I_n - A)^{-1}B\bar{u}$, ed esiste 1 sola uscita di equilibrio $\rightarrow \bar{y} = (C(I_n - A)^{-1}B + D)\bar{u}$;
- **$I_n - A$ singolare** ($\det(I_n - A) = 0$), possono esistere **infiniti o zero stati di equilibrio**, a seconda delle matrici A e B e dell'ingresso di equilibrio \bar{u} . Sotto un **ESEMPIO** per capire zero o infiniti:

Esempio: dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto
avente matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare tutti gli stati di equilibrio \bar{x} al variare dell'ingresso di equilibrio \bar{u}
All'equilibrio, dalle equazioni di stato risulta:

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_1 + \bar{u} \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{u} = 0 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \end{cases}$$

- se $\bar{u} = 0 \Rightarrow$ esistono infiniti stati di equilibrio dati da $\bar{x} = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}$
- si parla in tal caso di **stato di equilibrio non isolato**
- se $\bar{u} \neq 0 \Rightarrow$ non esiste alcuno stato di equilibrio

⚠ Ci sono **esercizi svolti** sull'equilibrio per sistemi TC e TD sul Kindle!

Quando ho sistemi "brutti da analizzare" (es. transistor), uso la **LINEARIZZAZIONE** (es. l'equivalente di piccolo segnale visto a SETM), ovvero una semplificazione di un sistema dinamico brutto non lineare. Per **linearizzare una funzione** reale di variabile reale nell'intorno di un punto x_0 di ampiezza $\delta x = x - x_0$, si usa lo **SVILUPPO DI TAYLOR** (troncato al 1° ordine) [approssimazione diventa migliore se intorno di ampiezza minore]:

$$f(x) = f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} \delta x = h(x)$$

Analogamente posso **linearizzare un sistema dinamico nell'intorno di un prefissato movimento "nominale"** (es. un punto di equilibrio) mediante un **MODELLO LINEARIZZATO** (approssimazione mai perfetta nei sistemi reali) e **confrontarlo con lo stesso sistema nell'intorno di un movimento "perturbato"**.

Prendendo un sistema dinamico **stazionario** (non c'è t esplicitamente in f e g), a dimensione finita, MIMO, **non lineare** a **TC**, considero 2 diversi movimenti (come detto sopra):

1. **NOMINALE** $\tilde{x}(t)$ [ottenuto applicando un ingresso nominale $\tilde{u}(t)$ al sistema posto in uno stato iniziale nominale \tilde{x}_0 , a cui corrisponde un'uscita nominale $\tilde{y}(t)$]:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) &= f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad \text{con } \tilde{x}(t=0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(t) &= g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \end{aligned}$$

2. **PERTURBATO** $x(t)$ [ottenuto applicando un ingresso perturbato $u(t)$ al sistema posto in uno stato iniziale perturbato x_0 , a cui corrisponde un'uscita perturbato $y(t)$]:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), u(t)) \quad \text{con } x(t=0) = x_0 \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Le **differenze tra questi 2 movimenti** sono le **PERTURBAZIONI** del sistema:

- **PERTURBAZIONE SULLO STATO** $\rightarrow \delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ con $\delta x \in \mathbb{R}^n \rightarrow x(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$
- **PERTURBAZIONE SULL'INGRESSO** $\rightarrow \delta u(t) = u(t) - \tilde{u}(t)$ con $\delta u \in \mathbb{R}^p \rightarrow u(t) = \tilde{u}(t) + \delta u(t)$
- **PERTURBAZIONE SULL'USCITA** $\rightarrow \delta y(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ con $\delta y \in \mathbb{R}^q \rightarrow y(t) = \tilde{y}(t) + \delta y(t)$

Noi vogliamo calcolare un'opportuna **equazione differenziale** che avrà come soluzione proprio $\delta x(t)$, ovvero:

$$\delta x'(t) = \frac{d(\delta x(t))}{dt} = \frac{d(x(t) - \tilde{x}(t))}{dt} = x'(t) - \tilde{x}'(t) = f(x(t), u(t)) - f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$$

Prendo $f(x(t), u(t))$ e sostituisco $x(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$ e $u(t) = \tilde{u}(t) + \delta u(t)$; poi sviluppo con Taylor (1° ordine perché ipotizzo $|\delta x| \ll 1 \wedge |\delta u| \ll 1$):

$$f(x(t), u(t)) = f(\tilde{x} + \delta x, \tilde{u} + \delta u) = f(\tilde{x}, \tilde{u}) + \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \delta x + \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \delta u$$

Perciò sostituendo:

$$\delta x'(t) = f(x(t), u(t)) - f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \delta x(t) + \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \delta u(t) = A(t) \delta x(t) + B(t) \delta u(t)$$

Con:

$$A(t) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \in \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Jacobiano di } f \text{ rispetto ad } x$$

$$B(t) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \in \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \text{Jacobiano di } f \text{ rispetto ad } u$$

▲ Nelle matrici Jacobiane, ogni riga è il **gradiente** di f_i rispetto ad $x = [x_1 \dots x_n]$ (nel caso di B rispetto ad u)!

Analogamente per l'uscita:

$$\delta y(t) = g(x(t), u(t)) - g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \delta x(t) + \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \delta u(t) = C(t) \delta x(t) + D(t) \delta u(t)$$

$$C(t) = \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \in \mathbb{R}^{q \times n} \rightarrow \text{Jacobiano di } g \text{ rispetto ad } x$$

$$D(t) = \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \in \mathbb{R}^{q \times p} \rightarrow \text{Jacobiano di } g \text{ rispetto ad } u$$

Otteniamo quindi il **SISTEMA DINAMICO LINEARIZZATO**:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\delta x}(t) &= A(t) \delta x(t) + B(t) \delta u(t), \quad \delta x(t=0) = x(t=0) - \tilde{x}_0 \\ \delta y(t) &= C(t) \delta x(t) + D(t) \delta u(t) \\ A(t) &= \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}}, \quad B(t) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}}, \quad C(t) = \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}}, \quad D(t) = \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\tilde{x} \\ u=\tilde{u}}} \end{aligned}}$$

Quello che vedo però è che le matrici dipendono dal tempo, quindi non è ancora stazionario; **per avere un SISTEMA DINAMICO LINEARIZZATO LTI (quindi anche tempo-invariante) devo prendere il movimento "nominale" coincidente con il PUNTO DI EQUILIBRIO (\bar{x}, \bar{u})**:

$$\begin{aligned} \delta x'(t) &= A \delta x(t) + B \delta u(t) \\ \delta y(t) &= C \delta x(t) + D \delta u(t) \end{aligned}$$

Che per il **discreto** è:

$$\begin{aligned} \delta x(k+1) &= A \delta x(k) + B \delta u(k) \\ \delta y(k) &= C \delta x(k) + D \delta u(k) \end{aligned}$$

ESEMPIO (TC):

Dato il sistema (levitatore magnetico) descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - (k_i/M)u^2/x_1^2 = f_1(x, u) \\ y = x_1 = g(x, u) \end{cases}$$

calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $(\bar{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{k_i/M} & \bar{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{u} \neq 0)$

Nell'equazione $\delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$ compaiono:

$$A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2k_i\bar{u}^2}{M\bar{x}_1^3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\bar{u}}\sqrt{\frac{Mg}{k_i}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2k_i\bar{u}}{M\bar{x}_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{\bar{u}} \end{bmatrix}$$

Nell'equazione $\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t)$ compaiono:

$$C = \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = [1 \ 0]$$

$$D = \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = [0]$$

ESEMPIO (TD):

Dato il sistema descritto dal seguente modello

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)u(k) + x_1(k)x_2(k) = f_1(x, u) \\ x_2(k+1) = -x_2(k)u(k) + 3x_2^2(k) = f_2(x, u) \\ y(k) = x_1(k)x_2(k) = g(x, u) \end{cases}$$

calcolare le matrici del sistema dinamico linearizzato in $(\bar{x}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5)$ e $(\bar{x}^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ 0.5 \end{bmatrix}, \bar{u} = 0.5)$, $c \in \mathbb{R}$

Nell'equazione $\delta x(k+1) = A\delta x(k) + B\delta u(k)$

$$A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{u} + \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ 0 & -\bar{u} + 6\bar{x}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(a)} \Rightarrow A = A^{(a)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \\ \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(b)} \Rightarrow A = A^{(b)} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$B = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(a)} \Rightarrow B = B^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(b)} \Rightarrow B = B^{(b)} = \begin{bmatrix} c \\ -0.5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Nell'equazione $\delta y(k) = C\delta x(k) + D\delta u(k)$,

$$C = \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = [\bar{x}_2 \ \bar{x}_1] \Rightarrow \text{se } \bar{x} = \bar{x}^{(a)} \Rightarrow C = C^{(a)} = [0 \ 0], \text{ se } \bar{x} = \bar{x}^{(b)} \Rightarrow C = C^{(b)} = [0.5 \ c] \quad D = \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = [0]$$

→ RISPOSTE DI SISTEMI DI 1° E 2° ORDINE:

È importante analizzare la risposta dei sistemi dinamici per caratterizzare dei modelli di sistemi elementari. Studiare la risposta di un sistema LTI a TC "esternamente stabile" al GRADINO $\varepsilon(t)$ è importante per studiare il comportamento del sistema nella transizione tra un equilibrio ed un altro, e per determinare sperimentalmente la f.d.t. Per fare ciò analizziamo il sistema usando la sua f.d.t (con $N_H(s)$ e $D_H(s)$ senza radici in comune):

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

Dove studieremo solo sistemi elementari con poli con $Re(\text{polo}) < 0$ (parte reale negativa), che definiamo:

- **SISTEMI DEL 1° ORDINE** → $D_H(s) =$ polinomio di 1° grado [$\deg(D_H(s)) = 1$];
- **SISTEMI DEL 2° ORDINE** → $D_H(s) =$ polinomio di 2° grado [$\deg(D_H(s)) = 2$];

Per semplificare consideriamo sistemi con $H(s)$ strettamente propria [$\deg(N_H(s)) < \deg(D_H(s))$] e ad inizialmente a riposo (dove quindi $Y(s) = H(s)U(s)$). Studieremo solo la risposta di questi sistemi a ingressi:

- **IMPULSIVI** → $u(t) = \bar{u} \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \bar{u}$
- **A GRADINO** → $u(t) = \bar{u} \varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$

Dato che ci serviranno, citiamo:

- **Teorema del Valore Iniziale** → $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$ [se limiti esistono e se $Y(s)$ strettamente propria];
- **Teorema del Valore Finale** → $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$ [se limiti esistono e se $sY(s)$ ha $Re(\text{tutti i poli}) < 0$].
- **STABILITÀ ESTERNA (BIBO-STABILITÀ)**:
 - **Caso generale SISO**: se ingresso limitato ($u(t) < \bar{u} < \infty$), uscita limitata ($y(t) < \bar{y} < \infty$);
 - **Caso LTI SISO**: se la f.d.t del sistema $H(s)$ ha tutti i poli con $Re(\text{polo}) < 0$.

→ **RISPOSTE DI SISTEMI DEL 1° ORDINE:** dato un sistema con f.d.t (con k^* = guadagno e p = polo):

$$H(s) = \frac{k^*}{s - p}$$

1. **RISPOSTA IMPLUSIVA:**

$$u(t) = \bar{u} \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \bar{u}$$

Da cui:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{k^*}{s - p} \bar{u} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = k^* \bar{u} e^{pt} \varepsilon(t)$$

Da cui, applicando:

- Teorema del Valore Iniziale → $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{k^*}{s-p} \bar{u} = k^* \bar{u}$
- Teorema del Valore Finale → $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k^*}{s-p} \bar{u} \rightarrow \begin{cases} \text{Se } p = 0 \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k^*}{s} \bar{u} = k^* \bar{u} \\ \text{Se } p < 0 \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k^*}{s-p} \bar{u} = 0 \end{cases}$

2. **RISPOSTA AL GRADINO:**

$$u(t) = \bar{u} \varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$$

Da cui:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{k^* \bar{u}}{s - p} \xrightarrow{s} \begin{cases} \text{Se } p = 0 \rightarrow Y(s) = \frac{k^* \bar{u} s^{-1}}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = k^* \bar{u} t \varepsilon(t) \\ \text{Se } p \neq 0 \rightarrow Y(s) = \frac{k^* \bar{u}}{s(s-p)} = Y(s) = \frac{k^* \bar{u}}{-p} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-p} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{k^* \bar{u}}{-p} (\varepsilon(t) - e^{pt} \varepsilon(t)) \end{cases}$$

Da cui, applicando:

- Teorema del Valore Iniziale → $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{k^* \bar{u}}{s-p} s = 0$
- Teorema del Valore Finale → $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k^* \bar{u}}{s-p} s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k^* \bar{u}}{s-p} \bar{u}; \text{ posso quindi applicarlo solo se } p < 0:$

$$\rightarrow y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{k^* \bar{u}}{-p} = k\bar{u}$$

Infatti la f.d.t di un sistema del 1° ordine elementare si può esprimere in **FORMA POLINOMIALE** (che coincide con la **FORMA ZERI-POLI** di f.d.t):

$$H(s) = \frac{K^*}{s - p} \quad \text{con } \begin{cases} K^* = \text{guadagno} \\ p = \text{polo} \end{cases}$$

Da cui ponendo $\tau = \left| \frac{1}{p} \right|$ e $K = -\frac{K^*}{p}$ si ottiene la **FORMA DI BODE** della f.d.t, ovvero con al denominatore un 1:

$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

E applicando in ingresso il gradino $u(t) = \bar{u} \varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$, si ottiene come **RISPOSTA AL GRADINO** (uguale a prima ma scritta in forma di bode):

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{K}{1 + \tau s} \frac{\bar{u} s^{-1}}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \bar{u} K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{con } t \geq 0$$

Da cui vediamo che il **valore a regime** y_∞ (con il teorema del valore finale):

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = K\bar{u}$$

⚠ Questa formula può usata per **ricavarmi K** conoscendo dai dati \bar{u} e ricavandomi dal grafico y_∞ !

Altri parametri utili per un sistema del 1° ordine sono:

- **t_r (tempo di rise)** → tempo in cui y passa per la prima volta dal 10 al 90% di y_∞ (valore a regime);
- **$t_{a,\varepsilon\%}$ (tempo di assestamento ad un certo percentile)** → tempo necessario affinché la risposta differisca dal valore di regime y_∞ per una quantità pari al percentile $\varepsilon\%$ di quest'ultimo (**tipicamente faremo riferimento all'assestamento del 5%, ovvero il tempo in cui y almeno uguale a $0.95y_\infty$** [nel caso del 5% sappiamo già che sempre vale che $t_{a,5\%} = 3\tau$]; questa relazione può essere utile perché negli esercizi posso passare da $0.95y_\infty$ e ricavarmi graficamente τ , sapendo che $0.95y_\infty$ si raggiunge a 3τ).

⚠ Alcuni comandi utili **MATLAB** sono, dopo aver definito `s=tf('s')` [che mi definisce `s` come variabile di Laplace], posso usare `s` per definire delle funzioni di trasferimento (es. `H1=1/(s+10)`) e usare `impulse(H1)` per vedere graficamente la risposta della f.d.t `H1` all'impulso, e `step(H1)` per vedere la sua risposta al gradino. Il comando `ltiview` invece ci apre una finestra grafica dove possiamo importare le f.d.t che abbiamo prima definito e studiarne il comportamento direttamente dalla finestra, calcolandone la risposta all'impulso, al gradino, τ , t_r e $t_{a,\varepsilon\%}$ (e tutti i parametri utili). Posso trovare τ anche tracciando una retta tangente (insert line sul grafico MatLab) passante nell'origine al grafico della risposta del sistema e vedere dove tocca.

→ RISPOSTA DI SISTEMI DEL 2° ORDINE (SOLO AL GRADINO):

- Dato un sistema con f.d.t (con k^* = guadagno e p_1 = polo reale e p_2 = polo reale con $p_1 \neq p_2 \neq 0$) **SENZA ZERI**:

$$H(s) = \frac{K^*}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Applicando in ingresso $u(t) = \bar{u} \varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$, ottenendo quindi:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{K^*\bar{u}}{s(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s - p_1} + \frac{R_3}{s - p_2}$$

Da cui poi calcolando i residui e antitrasformando otteniamo:

$$y(t) = \frac{K^*\bar{u}}{p_1 p_2} \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} \right] \varepsilon(t)$$

Da cui applicando il teorema del valore iniziale, otteniamo $y(t = 0) = 0$, mentre per il teorema del valore finale, se $p_1 < 0$ e $p_2 < 0$ (ovvero BIBO-STABILE) e dunque $\exists y_\infty$, otteniamo $y_\infty = \frac{K^*\bar{u}}{p_1 p_2}$.

In questo sistema vediamo che vale anche la relazione $\tau_{eq} = \sum_i \tau_i = \tau_1 + \tau_2 = \left| \frac{1}{p_1} \right| + \left| \frac{1}{p_2} \right|$.

- Dato invece un sistema con f.d.t (con k^* = guadagno e p_1 = polo reale e p_2 = polo reale con $p_1 \neq p_2 \neq 0$ e $p_1 \neq p_2 \neq z$) **CON 1 ZERO REALE**:

$$H(s) = \frac{K^*(s - z)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Applicando in ingresso $u(t) = \bar{u} \varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$, ottenendo quindi:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{K^*(s - z)\bar{u}}{s(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s - p_1} + \frac{R_3}{s - p_2}$$

Da cui poi calcolando i residui e antitrasformando otteniamo:

$$y(t) = -\frac{K^* z \bar{u}}{p_1 p_2} \left[1 - \frac{(p_1 - z)p_2}{z(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} + \frac{(p_2 - z)p_1}{z(p_1 - p_2)} e^{p_2 t} \right]$$

Vediamo infatti che, al variare di z :

- Se z è minore del polo più piccolo (a sinistra del polo più piccolo), τ_{eq} diminuisce e la risposta è più rapida;
- Se z è maggiore del polo più piccolo, ma comunque minore di 0, ho una SOVRAELONGAZIONE (dove la risposta supera il valore a regime/finale y_∞ e da sopra tende ad esso);
- Se z è maggiore di 0 (semipiano destro), ho una SOTTOELONGAZIONE (RISPOSTA INVERSA, dove la risposta scende e rimane sotto il valore finale e tende ad esso da sotto), che cresce con z che tende all'origine da destra.

Infatti la f.d.t di un sistema del 2° ordine elementare si può esprimere in **FORMA POLINOMIALE** come:

$$H(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{con } \begin{cases} K = \text{guadagno} \\ \omega_n = \text{pulsazione naturale} \rightarrow \tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \text{costante di tempo} \\ 0 < \zeta < 1 \rightarrow \text{smorzamento} \end{cases}$$

E applicando in ingresso un gradino unitario $u(t) = \bar{u} \varepsilon(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \bar{u}/s$, otteniamo:

$$Y(s) = H(s)U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \bar{u}K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos(\zeta)) \right)$$

Dove $e^{-\zeta\omega_n t}$ = inviluppo esponenziale decrescente, e $\sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos(\zeta))$ = temine oscillante; quindi il suo andamento è una SOVRAELONGAZIONE (ovvero supera il valore finale, ma tende poi ad esso in modo oscillante [quindi risposta al gradino non monotona]).

Qui parametri utili da calcolare sono il **valore a regime** $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = K\bar{u}$, e il **VALORE DI PICCO** (il massimo raggiunto dalla risposta al gradino, dato dalla sovraelongazione y_{max}); da questi si ottiene la **SOVRAELONGAZIONE MASSIMA** (overshoot) [e la sovraelongazione percentuale]:

$$\hat{s} = \frac{y_m - y_\infty}{y_\infty} \rightarrow \hat{s}\% = 100 \hat{s}$$

L'istante in cui si ottiene la sovraelongazione massima (ovvero dove si trova y_{max}) si chiama **TEMPO DI PICCO** (\hat{t} tale che $y(\hat{t}) = y_{max}$).

▲ Queste formule valgono solo per **SISTEMI DEL 2° ORDINE CON POLI COMPLESSI CONIUGATI**; si vede che la sovraelongazione massima \hat{s} dipende solo dallo smorzamento ζ (<smorzamento → > sovraelongazione), ovvero vale la relazione:

$$\hat{s} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Leftrightarrow \zeta = \frac{|\ln(\hat{s})|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{s})}}$$

Mentre il tempo di picco \hat{t} dipende sia dallo smorzamento ζ sia dalla pulsazione naturale ω_n (>pulsazione → <tempo di picco, ovvero il picco avviene prima):

$$\hat{t} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \propto \frac{1}{\omega_n}$$

Un parametro utile è il **tempo di salita** t_s , che indica il 1° istante dove $y = y_\infty$ (definito solo nei sistemi del 2° ordine che hanno appunto risposta oscillante (sovraelongazione) dove si supera y_∞ e quindi sappiamo di base che $\hat{t} > t_s$); questo non va confuso con il t_r (**tempo di rise**). Entrambi questi tempi, sempre nei sistemi del 2° ordine con poli complessi coniugati, dipendono sia da ζ sia da ω_n :

$$t_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} (\pi - \arccos(\zeta)) \quad ; \quad t_r = \frac{2.16 \zeta + 0.6}{\omega_n}$$

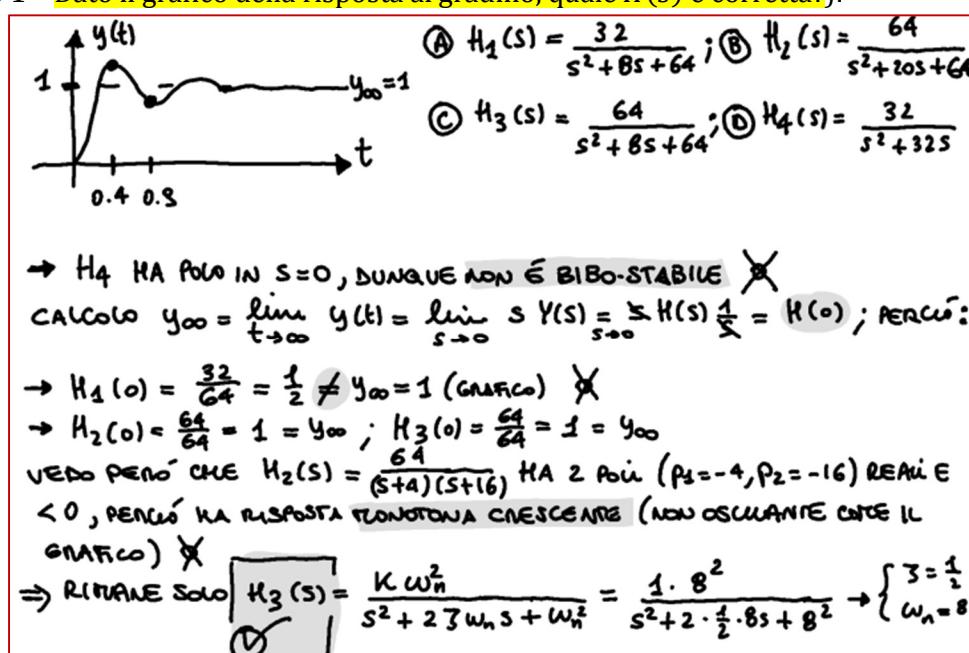
Anche qui troviamo il **tempo di assestamento** (vale sempre il 5% a 3τ), ma stavolta definito con:

$$t_{a,\epsilon\%} = -\frac{\ln(0.01\epsilon)}{\zeta \omega_n}$$

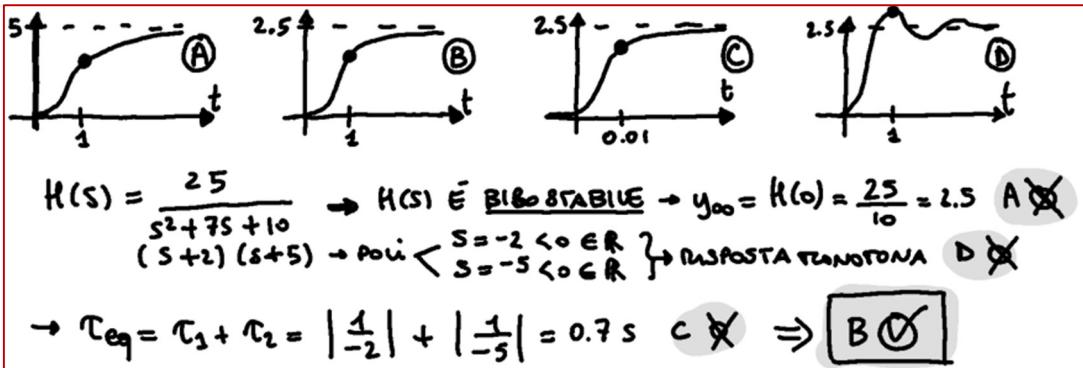
▲ Nel caso estremo in cui $\zeta = 1$, avremo che $H(s) = \frac{K}{(1+\tau s)^2}$, $\tau = \frac{1}{\omega_n}$ e $y(t) = \bar{u}K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$, trovando:

y_∞	t_r	$t_{a,5\%}$	$t_{a,1\%}$
$\bar{u} \cdot K$	$\approx 3.36 \cdot \tau$	$\approx 4.74 \cdot \tau$	$\approx 6.64 \cdot \tau$

ESERCIZIO (Tipo 1 – Dato il grafico della risposta al gradino, quale $H(s)$ è corretta?):



ESERCIZIO (Tipo 2 – Data $H(s)$, quale grafico della risposta al gradino è corretto?):



→ **STABILITÀ INTERNA DI SISTEMI DINAMICI:** attraverso lo studio della **STABILITÀ** di un sistema ci interessa capire quanto questo modello dipenda dalle perturbazioni sullo stato iniziale, sugli ingressi e sui parametri presenti nelle equazioni del sistema. La **STABILITÀ INTERNA** fa riferimento **solo alle perturbazioni sullo stato iniziale** (gli ingressi e i parametri sono costanti e noti); un sistema è:

- **STABILE** → piccole perturbazioni sullo stato iniziale danno piccole perturbazioni nella sua evoluzione;
- **INSTABILE** → piccole perturbazioni sullo stato iniziale danno grosse perturbazioni nella sua evoluzione;

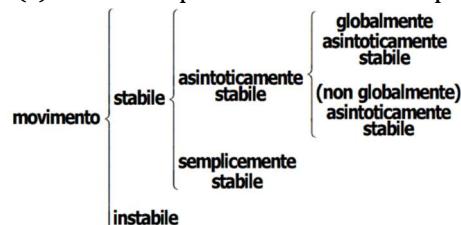
Parlando di sistema dinamico **TC (tempo continuo)** a dimensione finita, MIMO, **non lineare, stazionario** (tempo invariante, ovvero $x'(t) = f(x, u)$), consideriamo **2 diverse evoluzioni temporali**:

- Movimento **NOMINALE** $\tilde{x}(t) \rightarrow$ ottenuto applicando l'ingresso $\tilde{u}(t)$ sul sistema con **stato iniziale nominale** $\tilde{x}(t_0 = 0) = \tilde{x}_0$;
- Movimento **PERTURBATO** $x(t) \rightarrow$ ottenuto applicando l'ingresso $\tilde{u}(t)$ sul sistema con **stato iniziale perturbato** $x_0 \neq \tilde{x}_0$.

E definiamo **PERTURBAZIONE SULLO STATO** del sistema $\delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n \rightarrow x(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$.

Dal punto di vista qualitativo, in base all'effetto della perturbazione sullo stato iniziale $\delta x(t_0) \neq 0$, il movimento nominale $\tilde{x}(t)$ è:

- **STABILE** → $\delta x(t)$ resta sempre **limitata** nel tempo;
- **INSTABILE** → $\delta x(t)$ non resta sempre **limitata** nel tempo (solitamente diverge);
- **ASINTOTICAMENTE STABILE** → $\delta x(t)$ resta sempre **limitata** nel tempo e **tende a zero per $t \rightarrow \infty$** ;
- **GLOBALMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE** → per qualsiasi perturbazione iniziale $\delta x(t_0)$, $\delta x(t)$ resta sempre **limitata** nel tempo e **tende a zero per $t \rightarrow \infty$** ;
- **SEMPLICEMENTE STABILE** → $\delta x(t)$ resta sempre **limitata** nel tempo, ma **non tende a zero per $t \rightarrow \infty$** ;



Per vedere la stabilità dal punto di vista matematico, richiamiamo il concetto di **CONTINUITÀ** di una funzione, ovvero $f(x)$ è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma(\varepsilon) > 0$ t.c. $\forall x$ si ha $|x - x_0| \leq \gamma(\varepsilon)$, allora $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$; usando questa formulazione definiamo movimento nominale \tilde{x} :

- **STABILE** → se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\gamma > 0$ tale che, **per tutti gli stati iniziali x_0 per i quali risulta $\|\delta x(t_0 = 0)\| = \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \gamma$** , si ha $\|\delta x(t)\| = \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \varepsilon$ per $\forall t \geq 0$;
- **INSTABILE** → se $\exists t \geq 0$ tale che la stabilità non è verificata, ovvero $\|\delta x(t)\| = \|x(t) - \tilde{x}(t)\| > \varepsilon$;
- **ASINTOTICAMENTE STABILE** → se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\gamma > 0$ tale che, **per tutti gli stati iniziali x_0 per i quali risulta $\|\delta x(t_0 = 0)\| = \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \gamma$** , si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\delta x(t)\| = \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{per } \forall t \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta x(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0 \end{array} \right.$$

- **GLOBALMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE** → uguale all'asintoticamente stabile, ma per la condizione asintotica (quella del limite), questa non dipende dagli stati iniziali x_0 per cui risulta $\|\delta x(t_0 = 0)\| = \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \gamma$, ma vanno bene tutti gli stati iniziali;
- **SEMPLICEMENTE STABILE** → stabile, ma non asintoticamente, ovvero $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta x(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \neq 0$.

⚠ Per quanto riguarda i sistemi dinamici **TD (tempo discreto)**, è tutto analogo, ovvero definendo sempre PERTURBAZIONE $= \delta x(k) = x(k) - \tilde{x}(k)$, si hanno tutte le stesse condizioni di stabilità, ma in funzione di k .

Tra tutti i movimenti ce ne sono alcuni di particolare interesse, come i **MOVIMENTI DI EQUILIBRIO** (visti prima); parliamo quindi di **STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO** nel caso in cui il movimento nominale considerato è uno stato di equilibrio corrispondente ad un ingresso di equilibrio. Nei sistemi non lineari (es. pendolo inverso), si possono avere stati di equilibrio multipli con stabilità interna differente tra i vari stati (parliamo infatti di **stabilità locale**); ad ogni stato di equilibrio asintoticamente stabile è associata una **REGIONE DI ATTRAZIONE** (o regione di asintotica stabilità, fatta dagli stati iniziali che danno origine a movimenti perturbati convergenti asintoticamente allo stato di equilibrio). In corrispondenza di un dato ingresso di equilibrio, un sistema dinamico ammette al massimo 1 unico stato di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

→ Ora vediamo la **STABILITÀ INTERNA DI SISTEMI LTI**. Prima vediamo il TC, per cui come prima consideriamo **2 diverse evoluzioni temporali**:

- Movimento **NOMINALE** $\tilde{x}(t) \rightarrow$ ottenuto applicando l'ingresso $\tilde{u}(t)$ sul sistema con **stato iniziale nominale** $\tilde{x}(t_0 = 0) = \tilde{x}_0$. Quindi avremo $\tilde{x}'(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t)$;
- Movimento **PERTURBATO** $x(t) \rightarrow$ ottenuto applicando l'ingresso $\tilde{u}(t)$ sul sistema con **stato iniziale perturbato** $x_0 \neq \tilde{x}_0$. Quindi avremo $x'(t) = Ax(t) + B\tilde{u}(t)$.

E definiamo **PERTURBAZIONE SULLO STATO** del sistema $\delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n \rightarrow x(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$. Da qui vediamo che l'**evoluzione temporale della perturbazione** è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\delta x'(t) = A\delta x(t) \quad \text{con } \delta x(t_0 = 0) = \delta x_0 \neq 0$$

Da cui quindi $\delta x(t) = e^{At} \delta x_0$, ovvero $\delta x(t)$ è indipendente sia da $\tilde{u}(t)$ sia da \tilde{x}_0 (quindi negli LTI, la stabilità riguarda l'intero sistema e non i singoli movimenti). Come conseguenza dell'analisi modale, la **perturbazione è combinazione lineare dei modi propri del sistema perché la perturbazione coinvolge la matrice e^{At}** ; qui ricordiamo che i modi dipendono dagli autovalori λ_i della matrice di stato A , che per un sistema LTI sono:

- Esponenzialmente convergenti se $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$;
- Limitati se $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ e $\mu'_i = 1$;
- Polinomialmente divergenti se $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ e $\mu'_i > 1$;
- Esponenzialmente divergenti se $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$.

Da qui troviamo che un sistema LTI TC è:

Autovalori $\lambda_i(A)$ del sistema	Modi propri del sistema	Proprietà di stabilità del sistema	
$\forall i : \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$	Convergono tutti esponenzialmente	Asintotica stabilità	Semplice stabilità
$\exists i : \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$	Almeno uno diverge esponenzialmente	Instabilità	Instabilità oppure Semplice stabilità

Da qui vediamo che c'è un **caso critico**, dove il sistema può risultare **semplicemente stabile** oppure **instabile**:

$$\begin{aligned} \forall i : \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) &\leq 0 \\ \exists k : \operatorname{Re}(\lambda_k(A)) &= 0 \wedge \mu_k > 1 \end{aligned}$$

Analogamente nei SISTEMI LTI TD (tempo discreto):

Autovalori $\lambda_i(A)$ del sistema	Modi propri del sistema	Proprietà di stabilità del sistema	
$\forall i : \lambda_i(A) < 1$	Convergono tutti geometricamente	Asintotica stabilità	Semplice stabilità
$\exists i : \lambda_i(A) > 1$	Almeno uno diverge geometricamente	Instabilità	Instabilità oppure Semplice stabilità

ESEMPIO (Esercizio Esame, a sinistra TC e a destra TD):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$\{\lambda_i(A)\} = \{\lambda_i(A_1)\} \cup \{-0.2, -0.3\}$$

$$p.c.(A_1) = \det(\lambda I - A_1) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

$$\Rightarrow \{\lambda_i(A)\} = \{-2, -2, -0.2, -0.3\}$$

$$\{\operatorname{Re}(\lambda_i(A))\} = \{-2, -2, -0.2, -0.3\}$$

Tutti gli autovalori hanno $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$
 ⇒ il sistema è globalmente asintoticamente stabile

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$\{\lambda_i(A)\} = \{\lambda_i(A_1)\} \cup \{-0.2, -0.3\}$$

$$p.c.(A_1) = \det(\lambda I - A_1) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

$$\Rightarrow \{\lambda_i(A)\} = \{-2, -2, -0.2, -0.3\}$$

$$\{|\lambda_i(A)|\} = \{2, 2, 0.2, 0.3\}$$

Gli autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ hanno $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2 > 1$
 ⇒ il sistema è instabile

▲ Fino ad ora però il calcolo della stabilità interna del sistema è legato agli autovalori della matrice A ; per questo, sono stati introdotti dei **CRITERI DI STABILITÀ** per **studiare la stabilità dei sistemi LTI senza calcolare esplicitamente le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda)$** (e quindi trovare gli autovalori). I criteri sono:

- **REGOLA DEI SEGNI DI CARTESSIO** → fornisce solo una condizione necessaria (e non sufficiente) per dire se tutti gli autovalori abbiano $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Dice che dato il polinomio caratteristico, il numero di radici reali positive è = al numero di variazioni di segno tra i coefficienti consecutivi del polinomio, oppure è inferiore al numero di variazioni di segno di un multiplo intero di 2 [quindi se non ci sono variazioni di segno, tutte le radici reali sono negative]:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 \rightarrow 1 \text{ sola variazione di segno} = 1 \text{ sola radice positiva}$$

Ad essa è legato il **COROLLARIO**, dove se prendo $p(-\lambda)$ trovo con le variazioni di segno, il numero delle radici reali negative.

- **CRITERIO DI ROUTH-HURWITZ** → fornisce una condizione necessaria e sufficiente per dire se tutti gli autovalori abbiano $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ (asintotica stabilità sistema LTI TC). Anche qui abbiamo una condizione necessaria, ovvero che tutti i coefficienti dei termini del polinomio caratteristico abbiano segno concorde. Da qui, si costruisce la **TABELLA DI ROUTH** ($n+1$ righe, dove le prime 2 righe sono costituite dai coefficienti di $p(\lambda)$ e l'ultima dal coefficiente a_0 [il termine noto]; sotto un'immagine per vedere come si fa):

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	...
...
0	a_0	0	0	...

$$b_{n-2} = - \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{array} \right| / a_{n-1}, b_{n-4} = - \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{array} \right| / a_{n-1}, \dots$$

$$c_{n-3} = - \left| \begin{array}{cc} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{array} \right| / b_{n-2}, c_{n-5} = - \left| \begin{array}{cc} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{array} \right| / b_{n-2}, \dots$$

La **condizione necessaria e sufficiente** affinché $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ è che **tutti gli elementi della 1^ COLONNA della tabella di Routh siano di segno concorde**. Il COROLLARIO dice che, indipendentemente dal segno, se nessun elemento della 1^ COLONNA è nullo allora: nessun autovalore ha $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$; il numero di variazioni di segno nella tabella di Routh = numero di autovalori con $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ [ES. KINDLE in Es. Aula].

- **CRITERIO DI JURY** → fornisce una condizione necessaria e sufficiente per dire se tutti gli autovalori abbiano $|\lambda| < 1$ (asintotica stabilità sistema LTI TD) [analogo a Routh-Hurwitz ma a TD]. Anche qui abbiamo una condizione necessaria, ovvero dato $p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$:

- Caso $n = 2 \rightarrow$ soddisfare 3 condizioni:
 - $p(\lambda = 1) > 0$

- $(-1)^n p(\lambda = -1) > 0$
- $|a_n| > |a_0|$

- Caso $n > 2$, oltre alle 3 precedenti condizioni, dobbiamo soddisfare anche altre $(n - 2)$ disegualanze fra i moduli di alcuni elementi della TABELLA DI JURY (costituita da $(n - 1)$ coppie di righe):

n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
$n-1$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	b_0
$n-2$	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}	c_{n-3}	c_0
2	z_0	z_1	z_2	\dots	z_{n-2}	z_1	z_0
2	z_2	z_1	z_0	\dots	z_0	z_1	z_2

Dove devono essere soddisfatte **($n - 2$) condizioni** del tipo $|b_0| > |b_{n-1}|, |c_0| > |c_{n-2}|, \dots, |z_0| > |z_2|$.

→ STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO DI SISTEMI DINAMICI NON LINEARI:

Dato un sistema **TC, NON LINEARE** e **stazionario** [$x'(t) = f(x, u)$], considero sempre 2 evoluzioni temporali:

- movimento **nominale** d'equilibrio $\rightarrow \tilde{x}(t) = \bar{x}$ ottenuto applicando l'ingresso nominale d'equilibrio $\tilde{u}(t) = \bar{u}$ al sistema con stato iniziale nominale $\tilde{x}(t_0 = 0) = \bar{x}$, allora abbiamo che $\tilde{x}'(t) = \bar{x}' = 0 = f(\bar{x}, \bar{u})$;
- movimento perturbato $\rightarrow x(t)$ ottenuto applicando lo stesso ingresso nominale $\tilde{u}(t) = \bar{u}$ al sistema con stato iniziale **perturbato** $x_0 \neq \bar{x}$, allora abbiamo che $x'(t) = f(x(t), \bar{u})$.

Da qui come prima definiamo **PERTURBAZIONE** $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$, che è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\delta x'(t) = x'(t) - \bar{x}' = x'(t) = f(x(t), \bar{u}) = f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u}) \rightarrow \text{EQ. DIFFERENZIALE NON LINEARE}$$

Vediamo anche che quest'equazione dipende da \bar{x} e \bar{u} (ovvero dal punto di funzionamento), e ha come condizione iniziale $\delta x(t_0 = 0) = x(t_0 = 0) - \bar{x}$. La soluzione $\delta x(t)$ è solitamente molto **difficile** da trovare e dipende dalla scelta del punto di funzionamento (quindi una **STABILITÀ LOCALE** nell'intorno del punto di equilibrio); perciò si usa il **METODO DI LINEARIZZAZIONE** (o metodo indiretto di Lyapunov), dove sviluppiamo con Taylor:

$$f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u}) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} \delta x(t) + h(\delta x(t)) = \frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} \delta x(t) + h(\delta x(t))$$

Con h = funzione non lineare che contiene le potenze di $\delta x(t)$ di grado superiore al primo; da qui vediamo che, nei casi in cui si può trascurare $h(\delta x(t))$, allora avremo che l'analisi della stabilità dell'equilibrio è fatta come per un sistema LTI perché:

$$\delta x'(t) = A \delta x(t) \quad \text{con} \quad A = \frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} = \text{Jacobiano di } f \text{ rispetto ad } x$$

Lyapunov ha detto 2 cose:

- **CONDIZIONE SOLO SUFFICIENTE PER LOCALMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE** $\rightarrow \forall i: \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$;
- **CONDIZIONE SOLO SUFFICIENTE PER LOCALMENTE INSTABILE** $\rightarrow \exists i: \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$.

⚠ Se invece $\forall i: \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0 \wedge \exists k: \operatorname{Re}(\lambda_k(A)) = 0$, allora non si può dire nulla.

Per quanto riguarda i sistemi **TD, NON LINEARI** e **stazionari**, è **tutto analogo** (sostituisco solo $x'(t)$ con $x(k+1)$), ovvero, se posso trascurare $h(\delta x(k))$, mi posso ricondurre al caso LTI $\delta x(k+1) = A \delta x(k)$, da cui ottengo:

- **CONDIZIONE SOLO SUFFICIENTE PER LOCALMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE** $\rightarrow \forall i: |\lambda_i(A)| < 1$;
- **CONDIZIONE SOLO SUFFICIENTE PER LOCALMENTE INSTABILE** $\rightarrow \exists i: |\lambda_i(A)| > 1$.

⚠ Se invece $\forall i: |\lambda_i(A)| \leq 1 \wedge \exists k: |\lambda_k(A)| = 1$, allora non si può dire nulla.

[ES. KINDLE]

8) PROPRIETÀ STRUTTURALI e CONTROLLO

Partiamo dalla **RAGGIUNGIBILITÀ** e **CONTROLLABILITÀ**, che descrivono la possibilità di azione dell'ingresso u al fine di influenzare lo stato:

- **RAGGIUNGIBILITÀ**: agendo sull'ingresso u , posso modificare lo stato del sistema (che parte da uno stato iniziale prefissato). Uno stato x^* si dice **RAGGIUNGIBILE** (dallo stato zero x_0 al tempo t^*) se esistono:
 - Un istante di tempo $t^* \in [t_0, \infty)$;
 - Una funzione di ingresso $u^*(t)$ definita in $t \in [t_0, t^*]$;

tali che $x(t^*) = x^*$. L'insieme degli stati raggiungibili (dallo stato x_0 al tempo t^*) rappresenta l'**INSIEME DI RAGGIUNGIBILITÀ** $X_R(t^*)$ al tempo t^* (che è sottospazio lineare dello spazio di stato X) [definiamo infatti "**sottospazio di raggiungibilità**" X_R come l'insieme di raggiungibilità $X_R(t)$ di dimensione massima].

Un sistema viene detto **COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE** se $X_R = X$ (cioè il sottospazio di raggiungibilità coincide con lo spazio di stato); se un sistema non è completamente raggiungibile avrà "**sottospazio di non-raggiungibilità**" $X_{NR} = X_R^\perp$ (ovvero complemento ortogonale di X_R).

- **CONTROLLABILITÀ**: agendo sull'ingresso u , posso trasferire lo stato del sistema ad un certo stato finale prefissato. Uno stato x^* si dice **CONTROLLABILE** (allo stato zero x_0 al tempo t^*) se esistono:

- Un istante di tempo $t^* \in [t_0, \infty)$;
- Una funzione di ingresso $u^*(t)$ definita in $t \in [t_0, t^*]$;

tali che $x(t^*) = x^*$. L'insieme degli stati controllabili (allo stato x_0 al tempo t^*) rappresenta l'**INSIEME DI CONTROLLABILITÀ** $X_C(t^*)$ al tempo t^* (che è sottospazio lineare dello spazio di stato X) [definiamo infatti "**sottospazio di controllabilità**" X_C come l'insieme di controllabilità $X_C(t)$ di dimensione massima].

Un sistema viene detto **COMPLETAMENTE CONTROLLABILE** se $X_C = X$ (cioè il sottospazio di controllabilità coincide con lo spazio di stato); se un sistema non è completamente controllabile avrà "**sottospazio di non-controllabilità**" $X_{NC} = X_C^\perp$ (ovvero complemento ortogonale di X_C).

⚠ Lo **stato zero** x_0 è uno stato prefissato considerato come "obiettivo"; tipicamente è uno stato di equilibrio non coincidente con l'origine dello spazio di stato ($x_0 \neq 0$), ma noi per semplicità lo prendiamo coincidente con lo **stato nullo (origine)** [analogamente assumiamo $t_0 = 0$].

La relazione tra raggiungibilità e controllabilità è:

- Sistemi LTI TC $\rightarrow X_R = X_C$;
- Sistemi LTI TD $\rightarrow X_R \subseteq X_C$ e solo se la matrice A è non singolare si ha $X_R = X_C$.

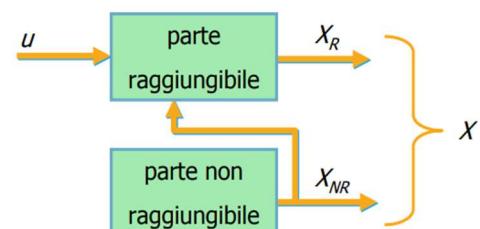
Quindi dato che nei sistemi LTI in generale si ha $X_R \subseteq X_C$, allora un sistema LTI completamente raggiungibile è anche completamente controllabile, perciò **noi studieremo sempre la raggiungibilità**.

In un sistema LTI con dimensione n (# equazioni di stato) e non completamente raggiungibile avremo:

- PARTE RAGGIUNGIBILE = X_R [con $\dim(X_R) = r < n$], a cui sono associati r autovalori degli n autovalori della matrice A ;
- PARTE NON RAGGIUNGIBILE = X_{NR} [con $\dim(X_{NR}) = n - r$], a cui sono associati $(n - r)$ autovalori degli n autovalori della matrice A .

Considerazioni:

- ingresso u agisce solo sulla parte raggiungibile;
- stati raggiungibili non influenzano la parte non raggiungibile;
- stati non raggiungibili possono influenzare la parte raggiungibile.



→ Come ANALIZZARE LA RAGGIUNGIBILITÀ per sistemi dinamici LTI?

Partiamo dal caso di sistema dinamico LTI TD (che estenderemo poi per il TC) con equazione di stato $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$; vogliamo trovare:

- l'insieme di raggiungibilità $X_R(l)$ al tempo l ;
- il sottospazio di raggiungibilità X_R ;
- una **condizione necessaria e sufficiente per la completa raggiungibilità** del sistema.

Per semplificare considero che il sistema abbia 1 solo ingresso ($p = 1$) e che la condizione iniziale sia nulla ($x_0 = x(0) = 0$). Da qui vedo che iterando l'equazione di stato:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A(ABu(0) + Bu(1)) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

Quindi la regola generale, sarà, per trovare lo stato al tempo l :

$$x(l) = A^{l-1}Bu(0) + \dots + ABu(l-2) + Bu(l-1)$$

Che in forma matriciale sarà:

$$x(l) = [B \ AB \ \dots \ A^{l-1}B] \begin{bmatrix} u(l-1) \\ u(l-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = M_R(l)U(l)$$

Con $M_R(l)$ = **MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ** (dopo l passi). Da qui vediamo che l'insieme di raggiungibilità $X_R(l)$ al tempo l corrisponde allo spazio immagine \mathcal{R} generato dalle colonne della matrice di raggiungibilità:

$$X_R(l) = \mathcal{R}(M_R(l)) = \mathcal{R}([B \ AB \ \dots \ A^{l-1}B])$$

Mentre per il sottospazio di raggiungibilità bisogna trovare l'insieme di raggiungibilità con dimensione massima, ovvero bisogna trovare per quale istante l la matrice $M_R(l)$ ha rango massimo. Gli eventuali aumenti di rango avvengono solo fino a che il numero delle colonne aggiunte l egualia il numero n di righe di $M_R(l)$ e quindi coincide con la dimensione del sistema, ovvero:

$$X_R = X_R(n) = \mathcal{R}(M_R(n)) = \mathcal{R}(M_R)$$

Quindi la dimensione del sottospazio di raggiungibilità X_R è uguale al rango r della matrice di raggiungibilità M_R :
 $\dim(X_R) = \rho(M_R) = r$

Da qui vediamo che **un sistema LTI TD (e analogamente anche il TC) è completamente raggiungibile (e quindi controllabile) se e solo se il rango di M_R è uguale alla dimensione n del sistema, cioè $\rho(M_R) = n$.**

⚠ Tutto ciò vale anche nei sistemi TC; vale anche nei sistemi LTI TC e TD a più ingressi ($p > 1$), dove la matrice di raggiungibilità M_R ha forma più generale $M_R = [B \ AB \ \dots \ A^{n-b}B]$ con $b = \rho(B)$.

⚠ In MatLab si può trovare M_R con $M_R = \text{ctrb}(A, B)$; il rango di M_R lo troviamo con $r = \text{rank}(M_R)$.

ESEMPIO (analizzare raggiungibilità sistema):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = A x(t) + B u(t)$$

→ SISTEMA AD 1 INGRESSO $p=1$ E IN ORDINE $n=3$; QUINDI M_R :

$$M_R = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 30 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(M_R) = 116 \neq 0$$

↓
DATO CHE $\det \neq 0 \rightarrow \rho(M_R) = r = n = 3$
QUINDI SISTEMA COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

Dal punto di vista pratico, abbiamo il **PROBLEMA DELLA REALIZZAZIONE**: finora abbiamo visto che un sistema SISO LTI si può rappresentare con le equazioni di stato (con le matrici A, B, C, D) o con la funzione di trasferimento $H(s)$ [TC] o $H(z)$ [TD]. Vediamo che il passaggio da una forma all'altra:

- **equazioni di stato → funzione di trasferimento**: lo possiamo sempre fare e otteniamo una soluzione unica:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

↓ ↓

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

- **funzione di trasferimento → equazioni di stato**: questo passaggio è chiamato "problema della realizzazione".

Questo problema ha infinite soluzioni; adesso vediamo 1 di queste soluzioni:

- o Divisione polinomiale del numeratore e denominatore di $H(s)$:

$$H(s) = \frac{b'_{n-1}s^{n-1} + \dots + b'_1s + b'_0}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \dots + a'_1s + a'_0} + b'_n$$

- Prendo la $H(s)$ ottenuta e faccio la **FORMA CANONICA DI RAGGIUNGIBILITÀ** (ottengo le matrici):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a'_0 & -a'_1 & \cdots & -a'_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b'_0 & b'_1 & \cdots & b'_{n-1} \end{bmatrix} \quad D = \boxed{b'_n}$$

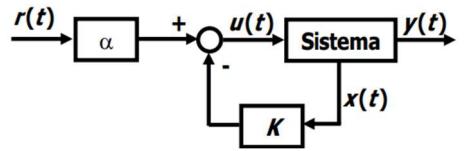
Dove A è in forma compagna inferiore (ovvero ha i coefficienti del polinomio caratteristico nell'ultima riga); il **sistema ottenuto è sempre completamente raggiungibile** ($\rho(M_R) = n$).

Ora parliamo della **RETROAZIONE STATICA DELLO STATO**; ricordiamo che, dato un sistema LTI TC a 1 ingresso:

- Il comportamento dinamico del sistema dipende dagli autovalori della matrice A ;
- La raggiungibilità descrive la possibilità di modificare il comportamento dinamico tramite l'ingresso;
- Le caratteristiche di raggiungibilità dipendono dalla coppia (A, B) .

Per modificare il comportamento del sistema, l'ingresso $u(t)$ deve cambiare gli autovalori di A ; questo avviene se l'ingresso dipende dallo stato $x(t)$ secondo la **LEGGE DI CONTROLLO**:

$$u(t) = -Kx(t) + ar(t) \rightarrow \begin{cases} K \in \mathbb{R}^{1 \times n} \rightarrow \text{vettore o matrice dei guadagni} \\ r(t) \rightarrow \text{ingresso esterno (riferimento)} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Dove chiamiamo **$Kx(t)$ = retroazione dallo stato** (state feedback), e **$ar(t)$ = azione diretta** (feedforward, che serve ad imporre un dato movimento [es. equilibrio]). Sostituendo $u(t)$ nelle equazioni di stato, si ottengono le equazioni di stato e uscita del sistema controllato complessivo:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (A - BK)x(t) + Bar(t) \\ y(t) &= (C - DK)x(t) + Dar(t) \end{aligned}$$

Che con la matrice di trasferimento $H(s)$ tra l'ingresso di riferimento $r(t)$ e l'uscita $y(t)$ diventa:

$$H(s) = \alpha \left[(C - DK)(sI - (A - BK))^{-1}B + D \right]$$

▲ Tutto ciò vale anche nei **sistemi LTI TD** dove $u(t) = -Kx(k) + ar(k)$ e quindi:

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) + Bar(k)$$

$$y(k) = (C - DK)x(k) + Dar(k)$$

$$H(z) = \alpha \left[(C - DK)(zI - (A - BK))^{-1}B + D \right]$$

Ora il nostro obiettivo è capire come scegliere la matrice K affinché gli n autovalori della matrice $A - BK$ coincidano con n numeri scelti (**ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI MEDIANTE RETROAZIONE STATICA DELLO STATO**). Legato a ciò c'è il **TEOREMA DI ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI**: possiamo determinare K in modo da **assegnare arbitrariamente tutti gli n autovalori della matrice $A - BK$** solo se il sistema è **completamente raggiungibile** (cioè $\rho(M_R) = n$) [altrimenti, se $\rho(M_R) = r < n$, possiamo modificare solo gli r autovalori della sua parte raggiungibile].

ESEMPIO (calcolo di leggi di controllo – trovare matrice K per fare in modo che gli autovalori del sistema retroazionato siano $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$):

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}_{\substack{n=2 \\ \downarrow \\ \text{matrice di RAGGIUNGIBILITÀ}}} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\text{VERIFICO GUINNAI CHE } \rho(M_R) = r = 2 = n, \text{ cioè COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE.}$$

$$\Rightarrow \text{DATO CHE GLI AUTOVALORI CHE VOGLIO SONO } \lambda_1 = -2 \text{ e } \lambda_2 = -3, \text{ AVREMO UN POLINOMIO CARATTERISTICO DEL TIPO: } P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

$$\text{E INOLTRE, DATO CHE } n=2 \text{ AVREMO UNA MATRICE DEI GUADAGNI } K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{QUINDI: } A - BK = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 2k_1 & 2k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k_1 & 3+k_2 \\ 4-2k_1 & 2-2k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{da cui:} \\
 P_{A-BK}(\lambda) &= \det(\lambda I - (A - BK)) = \det \begin{bmatrix} \lambda - (1+k_1) & -3-k_2 \\ -4+2k_1 & \lambda - (2-2k_2) \end{bmatrix} = \\
 &= [\lambda - (1+k_1)][\lambda - (2-2k_2)] - (-3-k_2)(-4+2k_1) = \\
 &= \lambda^2 + \underbrace{(-3-k_1+2k_2)\lambda}_{(5)} + \underbrace{(8k_1 - 6k_2 - 10)}_{(6)} = \\
 & \text{da cui: } \begin{cases} -3-k_1+2k_2 = 5 \\ 8k_1 - 6k_2 - 10 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 8 \\ k_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow K = [k_1 \ k_2] = [8 \ 8]
 \end{aligned}$$

▲ In **MatLab** la matrice dei guadagni può essere calcolata con **K=place(A,B,p)** [con **p** = vettore degli autovalori da assegnare], ma solo nel caso di autovalori con molteplicità unitaria. Invece con il comando **K=acker(A,B,p)** possiamo farlo anche nel caso con autovalori con molteplicità, ma il sistema deve essere completamente raggiungibile.

Ora vediamo il **PROBLEMA DELLA REGOLAZIONE**: consideriamo un sistema retroazionato dove abbiamo scelto K tale da rendere il sistema globalmente asintoticamente stabile, ovvero $\operatorname{Re}(\lambda_i(A - BK)) < 0$. Quindi:

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= (A - BK)x(t) + Bar(t) \\
 y(t) &= (C - DK)x(t) + Dar(t)
 \end{aligned}$$

Dove questo sistema avrà un solo ingresso di riferimento $r(t)$ costante ($r(t) = \bar{r}\varepsilon(t)$), e una sola uscita $y(t)$; di questo sistema vogliamo calcolare \bar{x} e \bar{y} corrispondenti a quell'ingresso di riferimento. In base alla condizione di equilibrio per sistemi LTI TC, avremo:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}' &= 0 = (A - BK)\bar{x} + Bar \\
 \bar{y} &= (C - DK)\bar{x} + Dar
 \end{aligned}$$

da cui troviamo:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= -(A - BK)^{-1}Bar \\
 \bar{y} &= [-(C - DK)(A - BK)^{-1}B + D]\alpha\bar{r}
 \end{aligned}$$

Iniziamo dalla **REGOLAZIONE DELL'USCITA** (sistemi TC), ovvero fare in modo che l'uscita all'equilibrio \bar{y} coincida con \bar{r} :

$$\bar{y} = \bar{r}$$

Se:

- $\bar{r} = \mathbf{0} \rightarrow \bar{y} = \bar{r} = \mathbf{0}$ per $\forall t, \forall \alpha$;
- $\bar{r} \neq \mathbf{0} \rightarrow \bar{y} = \bar{r}$ se $[-(C - DK)(A - BK)^{-1}B + D]\alpha = \mathbf{1} \rightarrow \alpha = [-(C - DK)(A - BK)^{-1}B + D]^{-1}$.

▲ Per la **regolazione dell'uscita** di sistemi TD, si ha come condizione $\alpha = [(C - DK)[I - (A - BK)]^{-1}B + D]^{-1}$.

Vediamo ora **OSSERVABILITÀ** e **RILEVABILITÀ**, che descrivono la possibilità di stimare lo stato del sistema x tramite la misura dell'uscita y e dell'ingresso u :

- **OSSERVABILITÀ**: stimare lo stato iniziale mediante la misura dell'uscita y e dell'ingresso u su un dato intervallo di tempo.

Uno stato $x^* \neq 0$ si dice **NON OSSERVABILE** (nell'intervallo $[t_0, t^*]$) se, detto $y_l(t)$ il movimento libero dell'uscita conseguente allo stato iniziale $x(t_0) = x^* \neq 0$, risulta $y_l(t) = 0$ per $t \in [t_0, t^*]$ (noi generalmente consideriamo $t_0 = 0$).

L'insieme di tutti gli stati non osservabili nell'intervallo $[t_0, t^*]$ è l'**INSIEME DI NON OSSERVABILITÀ** $X_{NO}(t^*)$ al tempo t^* ; da cui definiamo il **SOTTOSPAZIO DI NON OSSERVABILITÀ** X_{NO} come l'insieme di non osservabilità di dimensione minima:

$$X_{NO} = \min_{t \in (t_0, \infty]} X_{NO}(t)$$

Da qui si definisce **SOTTOSPAZIO DI OSSERVABILITÀ** come il complemento ortogonale di X_{NO} , ovvero:

$$X_O = X_{NO}^\perp$$

Un sistema è detto **COMPLETAMENTE OSSERVABILE** se $X_O = X$.

- **RILEVABILITÀ**: stimare lo stato finale mediante la misura dell'uscita y e dell'ingresso u su un dato intervallo di tempo.

Uno stato x^* si dice **NON RILEVABILE** (nell'intervallo $[t_0, t^*]$) se, detto $y_l(t)$ il movimento libero dell'uscita che ha come stato finale $x(t^*) = x^* \neq 0$, risulta $y_l(t) = 0$ per $t \in [t_0, t^*]$.

L'insieme di tutti gli stati non rilevabili nell'intervallo $[t_0, t^*]$ è l'**INSIEME DI NON RILEVABILITÀ** $X_{ND}(t^*)$ al tempo t^* ; da cui definiamo il **SOTTOSPAZIO DI NON RILEVABILITÀ** X_{ND} come l'insieme di non rilevabilità di dimensione minima:

$$X_{ND} = \min_{t \in (t_0, \infty]} X_{ND}(t)$$

Da qui si definisce **SOTTOSPAZIO DI RILEVABILITÀ** come il complemento ortogonale di X_{ND} , ovvero:

$$X_D = X_{ND}^\perp$$

Un sistema è detto **COMPLETAMENTE RILEVABILE** se $X_D = X$.

Nei sistemi **LTI**:

- **TC** $\rightarrow X_O = X_D$;
- **TD** $\rightarrow X_O \subseteq X_D$, solo se A è non singolare si ha $X_O = X_D$.

Quindi nei sistemi **LTI** in generale si ha $X_O \subseteq X_D$, quindi **se un sistema è completamente osservabile è anche completamente rilevabile; quindi noi studieremo solo l'osservabilità**.

⚠ Quindi in un sistema LTI con dimensione finita n e non completamente osservabile abbiamo:

- **PARTE OSSERVABILE** (ovvero X_O) $\rightarrow \dim(X_O) = o < n \rightarrow$ associati o degli n autovalori della matrice A ;
- **PARTE NON OSSERVABILE** (ovvero X_{NO}) $\rightarrow \dim(X_{NO}) = n - o \rightarrow$ associati gli $n - o$ autovalori.

Dove **l'uscita è influenzata solo dalla parte osservabile**; gli stati osservabili possono influenzare la parte osservabile, ma non viceversa.

→ Come ANALIZZARE L' OSSERVABILITÀ per sistemi dinamici LTI?

Partiamo dal caso di sistema dinamico LTI TD (che estenderemo poi per il TC) con equazione di stato $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$; vogliamo trovare:

- l'insieme di non osservabilità $X_{NO}(l)$ al tempo l ;
- il sottospazio di non osservabilità X_{NO} ;
- il sottospazio di osservabilità X_O ;
- una **condizione necessaria e sufficiente per la completa osservabilità** del sistema.

Per **semplificare** considero che il sistema abbia 1 sola uscita ($q = 1$) e che l'ingresso sia nullo ($u(k) = 0 \rightarrow y(k) = Cx(k) + Du(k) = Cx(k)$). Da qui vedo che iterando l'equazione di uscita:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_l(0) = Cx(0) \\ y(1) &= y_l(1) = CAx(0) \\ y(2) &= y_l(2) = Cx(2) = CAx(1) = CA^2x(0) \end{aligned}$$

Quindi la regola generale, sarà, per trovare lo stato al tempo l :

$$y(l) = y_l(l) = Cx(l) = CAx(l-1) = \dots = CA^lx(0)$$

Che in forma matriciale sarà:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^l \end{bmatrix} x(0) = M_O(l)x(0)$$

Con $M_O(l = n - 1) = \text{MATRICE DI OSSERVABILITÀ}$. L'insieme di non osservabilità al tempo l (ovvero $X_{NO}(l)$) corrisponde allo spazio nullo N della matrice di osservabilità (ovvero l'insieme di stati iniziali che danno risposta libera nulla). La **dimensione di $N(M_O(l))$** è **minima quando il rango di $M_O(l)$ è massimo, cioè $l = n - 1$** . Pertanto la dimensione del sottospazio di osservabilità X_O è pari al rango o della matrice di osservabilità, ovvero:

$$\dim(X_O) = \rho(M_O) = o$$

Quindi **un sistema LTI è completamente osservabile (e dunque anche rilevabile) se e solo se il rango della matrice di osservabilità è pari alla dimensione n del sistema**, ovvero:

$$\rho(M_O) = n$$

⚠ Tutto ciò vale **anche nei sistemi TC**; vale **anche nei sistemi LTI TC e TD a più uscite ($q > 1$)**, dove la matrice di osservabilità M_O ha forma più generale $M_O = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-c}]^T$ con $c = \rho(C)$.

▲ In MatLab si può trovare M_O con `M_O = obsv(A,C)`; il rango di M_O lo troviamo con `rank(M_O)`.

ESEMPIO (analizzare raggiungibilità sistema):

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}}_A x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) ; y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t)$$

DATO CHE IL SISTEMA HA 1 USCITA ($q=1$) E DI ORDINE $n=3$, ALLORA:

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \det(M_O) = 1 \neq 0 \rightarrow \rho(M_O) = 3 = n \\ \text{QUINDI COMPLETAMENTE OSSERVABILE} \end{array} \right.$$

Dal punto di vista pratico, abbiamo come prima il **PROBLEMA DELLA REALIZZAZIONE**: prima avevamo vista la forma canonica di raggiungibilità come soluzione, ora vediamo la forma canonica di osservabilità, ovvero, data la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{b'_{n-1}s^{n-1} + \dots + b'_1s + b'_0}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \dots + a'_1s + a'_0} + \frac{b'_n}{s}$$

La **FORMA CANONICA DI OSSERVABILITÀ** è una sua possibile realizzazione:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a'_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & -a'_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a'_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ \vdots \\ b'_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} b'_n \end{bmatrix}$$

Dove A è in forma compagna destra (ovvero ha i coefficienti del polinomio caratteristico nell'ultima colonna); il **sistema ottenuto è sempre completamente osservabile** ($\rho(M_O) = n$).

→ Parliamo ora della **DUALITÀ**: dato un sistema LTI TC (sistema primale $S^P(A, B, C, D)$), sostituendo le sue matrici con le trasposte otteniamo il **SISTEMA DUALE** $S^D(A^T, B^T, C^T, D^T)$ definito come sistema dinamico LTI TC:

$$\begin{aligned} w'(t) &= A^T w(t) + C^T v(t) \\ z(t) &= B^T w(t) + D^T v(t) \end{aligned}$$

Vediamo che il SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ DEL SISTEMA PRIMALE X_R^P coincide con il SOTTOSPAZIO DI OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA DUALE X_O^D , ovvero:

$$X_R^P = X_O^D$$

E ANALOGAMENTE IL VICEVERSA:

$$X_R^D = X_O^P$$

Da qui il **PRINCIPIO DI DUALITÀ**, ovvero **il sistema primale è completamente raggiungibile se e solo se il sistema duale è completamente osservabile (e viceversa)**; schematicamente:

Sistema primale $S^P(A, B, C, D)$		Sistema duale $S^D(A^T, C^T, B^T, D^T)$
(A, B) raggiungibile	\Leftrightarrow	(A^T, B^T) osservabile
(A, C) osservabile	\Leftrightarrow	(A^T, C^T) raggiungibile

9) STIMA DELLO STATO e REGOLATORE DINAMICO

Lo **STIMATORE DELLO STATO** è un sistema dinamico che usa y e u del sistema da stimare come propri ingressi, generando una stima $\hat{x}(t)$ dello stato; per uno stimatore dello stato si definisce l'**errore di stima** $e(t)$ come la differenza tra stato stimato e stato vero, ovvero $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$. Se questo errore si studia per $t \rightarrow \infty$ avremo uno **stimatore asintotico dello stato** (garantendo un errore asintoticamente nullo). Con lo **STIMATORE ASINTOTICO** si ha:

- $e'(t) = Ae(t) \rightarrow e(t) = e^{At}e(0)$;
- Per avere la condizione $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, bisogna avere che (solo 1 delle 2 condizioni è sufficiente):
 - o Sistema asintoticamente stabile (tutti i modi associati agli autovalori di A sono convergenti)
 - o $e(0) = 0$

Per tenere conto della misura dell'uscita, si aggiunge il **termine di correzione** all'equazione di stato (con L matrice dei guadagni dello stimatore):

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\hat{y}(t) - y(t))$$

Da cui:

$$e'(t) = (A - LC)e(t) \rightarrow e(t) = e^{[(A-LC)t]}e(0)$$

Pertanto la condizione $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ si avrà solo se $(A - LC)$ ha autovalori asintoticamente stabili, quindi **dobbiamo studiare se esiste una matrice L tale da rendere asintoticamente stabili gli autovalori di $(A - LC)$.**

ESEMPIO (autovalori da imporre $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -20$):

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_A x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) ; \quad y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C x(t)$$

DATO CHE IL SISTEMA È DI ORDINE $n=2$, AVEMMO M_0 T.C.:

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_0) = 2 = n \Rightarrow \text{COMPLETAMENTE OSSERVABILE}$$

⇒ CON GLI AUTONOMI $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -20$ AVEMMO POLINOMIO CARATTERISTICO:

$$p(\lambda) = (\lambda - (-10))(\lambda - (-20)) = \lambda^2 + 30\lambda + 200$$

DATO CHE $n=2$ AVEMMO $L = [\lambda_1 \ \lambda_2]^T$ e QUINDI:

$$A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \lambda_1 \\ -1 & 2 - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

CON POLINOMIO CARATTERISTICO:

$$p_{A-LC}(\lambda) = \det(\lambda I - (A - LC)) = \lambda[\lambda - (2 - \lambda_2)] + 1 \cdot (1 - \lambda_1) = \lambda^2 + \underbrace{(2 - \lambda_2)}_{30}\lambda + \underbrace{1 - \lambda_1}_{200}$$

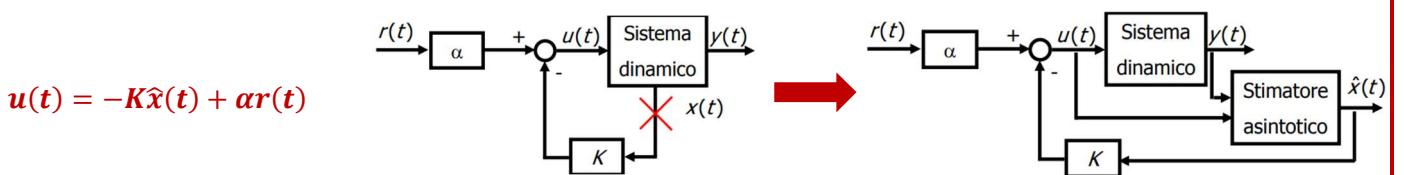
$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda_2 = 30 \\ 1 - \lambda_1 = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -199 \\ \lambda_2 = 32 \end{cases} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -199 \\ 32 \end{bmatrix}$$

▲ In **MatLab** si può trovare L con **L = place(A', C', p')** con p = vettore degli autovalori da assegnare (ma molteplicità unitaria); se non hanno molteplicità unitaria useremo **L = acker(A', C', p')**.

Partendo dallo stimatore asintotico e dalla retroazione statica, vediamo ora il **REGOLATORE DINAMICO** (usato quando non ho a disposizione x , ma solo l'uscita y). Anche in questo caso, per semplicità, prendiamo un sistema **LTI TC SISO** ($q = p = 1$, per semplicità) [ma quello che troviamo sarà estendibile anche ai sistemi LTI TD e più in generale ai sistemi LTI MIMO].

Nel regolatore dinamico, non avendo a disposizione lo stato x , non possiamo usare la retroazione statica dello stato; per questo, al posto di usare direttamente lo stato x (passando dalla retroazione), **usiamo uno STIMATORE**

ASINTOTICO per trovare la stima dello stato \hat{x} e la retroazione, trovando una legge di controllo per la **RETROAZIONE STATICA DALLO STATO STIMATO** e quindi realizzando (a dx) il **REGOLATORE DINAMICO**:



Dove quindi, dallo schema a dx, avremo che le 5 equazioni sono:

- **LEGGE DI CONTROLLO** $\rightarrow u(t) = -K\hat{x}(t) + \alpha r(t)$
- Sistema dinamico $\rightarrow \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ [EQUAZIONE DI STATO SISTEMA]
- Stimatore asintotico $\rightarrow \begin{cases} \hat{x}'(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$ [EQUAZIONE DI STATO STIMATORE]

Quindi nel REGOLATORE avremo $2n$ equazioni di stato in $2n$ variabili di stato (con n variabili di stato del sistema da controllare, e n variabili di stato dello stimatore asintotico) [quindi $\dim(\text{SISTEMA CONTROLLATO}) = 2 \dim(\text{SISTEMA DA CONTROLLARE})$].

Dobbiamo capire come calcolare le matrici dei guadagni K (della legge di controllo) e L (dello stimatore asintotico dello stato) quando la legge di controllo e lo stimatore interagiscono tra loro, al fine di assegnare tutti i $2n$ autovalori del sistema controllato complessivo e ottenere una stima asintotica dello stato.

Se prendessimo le 5 equazioni viste sopra e il vettore di stato $x_{tot}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$, troveremmo delle equazioni di stato che non forniscono informazioni utili ai fini della scelta di K e L ; per questo, come vettore di stato prendiamo $x_{tot}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) - x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$, ottenendo come **equazioni di stato e uscita del sistema controllato complessivo**:

$$\begin{cases} x'_{tot}(t) = A_{reg}x_{tot}(t) + B_{reg}r(t) \\ y(t) = C_{reg}x_{tot}(t) + D_{reg}r(t) \end{cases}$$

dove:

$$A_{reg} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0_{n \times n} & A - LC \end{bmatrix}, \quad B_{reg} = \alpha \begin{bmatrix} B \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix}, \quad C_{reg} = [C - DK \quad -DK], \quad D_{reg} = \alpha[D]$$

Inoltre, si può vedere che la matrice A_{reg} è triangolare a blocchi, perciò i suoi $2n$ autovalori (che sono gli **autovalori del sistema controllato complessivo**) sono dati, per la **PROPRIETÀ DI SEPARAZIONE**, da:

$$\lambda(A_{reg}) = \{\lambda(A - BK)\} \cup \{\lambda(A - LC)\}$$

▲ Viene detta **proprietà di separazione** proprio perché gli autovalori del sistema complessivo sono dati dall'unione degli autovalori di $(A - BK)$ e di $(A - LC)$; questo ci permette di **trattare in maniera slegata le 2 matrici dei guadagni K e L** , quindi trattandole singolarmente come abbiamo visto in precedenza. Per questo il **PROGETTO DEL REGOLATORE** è composto dai progetti separati di una legge di controllo (matrice K) e uno stimatore asintotico dello stato (matrice L).

→ **PROPRIETÀ REGOLATORE DINAMICO:** la matrice (funzione) di trasferimento $H(s)$ tra l'ingresso r e l'uscita y del sistema controllato complessivo coincide con la $H(s)$ ottenuta nel caso della retroazione statica dello stato (questo perché stimare lo stato non influenza il comportamento ingresso-uscita):

$$H(s) = \alpha \{(C - DK)[sI - (A - BK)]^{-1}B + D\} = \frac{\alpha \{(C - DK)Adj[sI - (A - BK)]B + D\}}{\det[sI - (A - BK)]}$$

Come risultato di ciò si ha che, **per imporre la condizione di regolazione $\bar{y} = \bar{r}$** , possiamo calcolare α usando la stessa relazione trovata nel caso della retroazione statica dallo stato, ovvero:

$$\alpha = [-(C - DK)(A - BK)^{-1}B + D]^{-1}$$

▲ Tutto ciò vale anche per i sistemi LTI TD, con le formule viste per i sistemi TD nella retroazione!

10) STABILITÀ ESTERNA e ANALISI DELLA RISPOSTA

Abbiamo visto che per un sistema LTI abbiamo la **RAPPRESENTAZIONE INTERNA** (o “in variabili di stato”) [che ci permette di studiare la stabilità interna e le proprietà strutturali, in particolare raggiungibilità e osservabilità] e la **RAPPRESENTAZIONE ESTERNA** (o “mediante **funzioni di trasferimento**”) [ci permette di analizzare solo la risposta forzata; dipende solo dalla parte raggiungibile ed osservabile del sistema].

Un sistema dinamico LTI è in **FORMA MINIMA** se e solo se è completamente raggiungibile e completamente osservabile; la rappresentazione interna di un sistema in forma minima contiene sempre il **n° minimo di variabili di stato**. Inoltre, la funzione di trasferimento di un sistema SISO in forma minima ha come **poli tutti gli autovalori della matrice di stato A** (non avvengono cancellazioni zero-polo [se invece il sistema SISO non è in forma minima, avrà sempre almeno 1 cancellazione zero-polo]).

Parlando invece di **STABILITÀ ESTERNA**, un sistema dinamico LTI inizialmente a riposo ($\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s)\}$) è **ESTERNAMENTE STABILE** (o **BIBO STABILE**) se la risposta forzata ad un qualsiasi ingresso limitato è sempre limitata nel tempo:

$$\forall t \geq 0: \|\mathbf{u}(t)\| \leq \bar{u} \rightarrow \forall t \geq 0: \|\mathbf{y}(t)\| \leq \bar{y}$$

Questo accade se:

- Sistema **TC** → dopo le cancellazioni zero-polo, tutti i poli della funzione di trasferimento hanno $Re(\lambda) < 0$;
- Sistema **TD** → dopo le cancellazioni zero-polo, tutti i poli della funzione di trasferimento hanno $|\lambda| < 1$.

▲ Relazione STABILITÀ INTERNA-ESTERNA:

- **ASINTOTICAMENTE STABILE** → **ESTERNAMENTE STABILE** (questo perché poli di $H(s)$ sono una parte degli autovalori di A);
- **ESTERNAMENTE STABILE + FORMA MINIMA** → **ASINTOTICAMENTE STABILE** (questo perché poli di $H(s)$ coincidono con autovalori di A se abbiamo una forma minima).

Parliamo ora di **RISPOSTA IN REGIME PERMANENTE**: dato un sistema LTI (quindi con $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$), il movimento (soluzione dell’equazione di stato) si può esprimere come:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{omog}(t) + \mathbf{x}_{part}(t)$$

dove \mathbf{x}_{omog} = soluzione dell’equazione omogenea associata (ovvero $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$), e \mathbf{x}_{part} = soluzione particolare dell’equazione di stato (dipende dall’ingresso $u(t)$ applicato). Analogamente posso esprimere l’uscita con:

$$y(t) = C[\mathbf{x}_{omog}(t) + \mathbf{x}_{part}(t)] = y_{omog}(t) + y_{part}(t)$$

Come conseguenza dell’analisi modale, vediamo che il termine y_{omog} è combinazione lineare dei modi propri del sistema, ovvero dipende dagli autovalori della matrice di stato $\lambda_i(A)$; quindi, **se il sistema è asintoticamente stabile** (ovvero tutti gli autovalori hanno $Re(\lambda_i(A)) < 0$) avremo $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{omog}(t) = \mathbf{0}$, ovvero **per tempi grandi si avrà $y(t) = y_{part}(t)$** , cioè **l’uscita tende ad una risposta in regime permanente**. Dunque se ingresso è:

- **COSTANTE** → $u(t) = \bar{u}\varepsilon(t)$, allora l’uscita tende all’uscita di equilibrio se il sistema è asintoticamente stabile, perciò anche la risposta in regime permanente sarà costante:

$$\mathbf{y}_{part}(t) = \bar{y}\varepsilon(t) = -CA^{-1}B\bar{u}\varepsilon(t) = \mathbf{H}(\mathbf{0})\bar{u}\varepsilon(t)$$

- **SINUSOIDALE** → $u(t) = \bar{u} \sin(\omega_0 t + \theta_0) \varepsilon(t)$, allora è sinusoidale anche la risposta a regime a cui tende $y(t)$ se il sistema è asintoticamente stabile:

$$\mathbf{y}_{part}(t) = \bar{y} \sin(\omega_0 t + \varphi) \varepsilon(t) = |\mathbf{H}(j\omega_0)| \bar{u} \sin(\omega_0 t + \arg(\mathbf{H}(j\omega_0)) + \theta_0) \varepsilon(t)$$

▲ Gli **esercizi** per trovare la risposta a regime si fanno con le 2 formule sopra su ingressi costanti e sinusoidali!

SISTEMI DI CONTROLLO (2^a parte)

0) INTRO, SCHEMI A BLOCCHI, SPECIFICHE DI PROGETTO

I **SISTEMI DI CONTROLLO** sono costituiti da:

- **SISTEMA DA CONTROLLARE:**

- **Ingressi** = variabile di comando u_c e disturbi d ;
- **Uscita** = variabile di interesse y_s (soggetta a controllo);
- **Stati** = variabili interne x (quasi mai completamente disponibili/misurabili).

Può essere:

- LINEARE o NON LINEARE
- DINAMICO o STATICO
- A PARAMETRI COSTANTI o VARIABILI
- SENZA DISTURBI ADDITIVI o CON DISTURBI ADDITIVI
- A PARAMETRI CONCENTRATI o DISTRIBUITI

- **ATTUATORE** (o AZIONAMENTO):

- **Ingresso** = variabile di controllo u (molto spesso una tensione ad energia trascurabile);
- **Uscita** = variabile di comando u_c (con energia adeguata).

A volte l'azionamento è parte integrante del sistema.

- **TRASDUTTORE (SENSORE + CONDIZIONATORE DI SEGNALE):**

- **Ingresso** = variabile di uscita del sistema y_s ;
- **Uscita** = misura y della variabile di uscita y_s (molto spesso una tensione ad energia trascurabile).

Il trasduttore ideale è lineare, statico, a parametri costanti e senza disturbi.

- **SEGNALE DI RIFERIMENTO** (o semplicemente **RIFERIMENTO**) r : coincide spesso con l'uscita desiderata y_{des} oppure c'è un fattore di proporzionalità tra i 2 chiamato "inseguimento di scala" $y_{des} = K_r r$. Se:

- r = costante o $r = 0 \rightarrow$ controllo = **REGOLAZIONE**;
- r = variabile \rightarrow controllo = **INSEGUIMENTO**.

Il riferimento può essere una variabile interna o esterna al sistema di controllo; solitamente r e y_{des} rappresentano la stessa grandezza fisica della misura y dell'uscita (infatti spesso sono delle tensioni ad energia trascurabile).

- **NODO DI CONFRONTO:**

- **Ingressi** = uscita desiderata y_{des} e misura y dell'uscita;
- **Uscita** = segnale errore (di inseguimento) $e = y_{des} - y$ (quindi solitamente una differenza tra tensioni ad energia trascurabile).

Il nodo di confronto ideale è lineare, statico, a parametri costanti e senza disturbi.

- **CONTROLLORE:**

- **Ingresso** = segnale di errore e ;
- **Uscita** = segnale di controllo u .

È la "parte nobile" del sistema di controllo; può essere analogico (componenti elettronici) o digitale (codice eseguibile).

- **SISTEMA DI MONITORAGGIO** (eventuale).

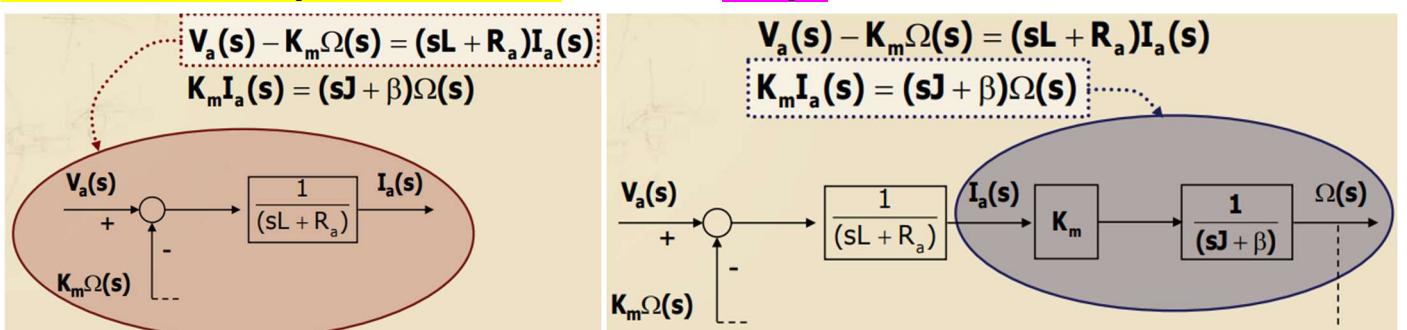
Nella 1^a parte abbiamo visto il controllo in catena chiusa con retroazioni degli stati (con attuatore e trasduttore all'interno del sistema) e anche il controllo in catena chiusa con retroazioni degli stati stimati/ricostruiti

[REGOLATORE DINAMICO] (con quindi l'osservatore per la stima [proprietà di osservabilità]). Noi ora però vogliamo arrivare ad una retroazione non sugli stati (a cui spesso non abbiamo completo accesso) ma sull'uscita (il nostro obiettivo è quindi la **RETROAZIONE SULL'USCITA**). Uno schema di controllo è composto da funzioni di trasferimento (come gli schemi a blocchi di TES con la trasformata zeta) nella realizzazione analogica. Per farne una realizzazione digitale, passeremo dalla trasformata zeta e da convertitori A/D e D/A.

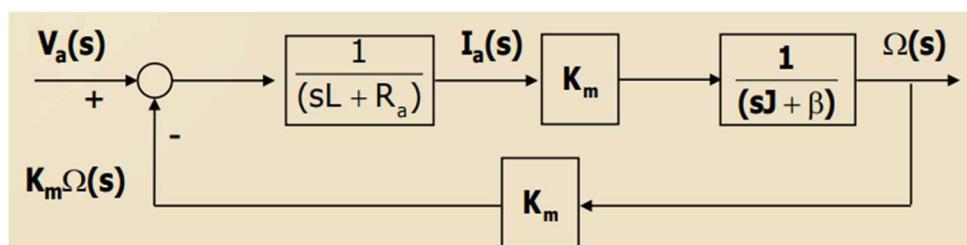
Quando dobbiamo realizzare un controllore per un sistema da realizzare, partiremo da un 1° modello **M_I** (modello per il **progetto del controllo** o "di prima approssimazione") e poi passeremo ad un 2° modello **M_{II}** a partire dal 1° (modello per le **verifiche delle prestazioni** o "di seconda approssimazione", il quale ci avvicina alla realtà fisica).

⚠ In questa parte di corso parleremo per semplicità solo di sistemi **SISO** e con condizioni iniziali nulle (per avere $Y(s) = H(s)U(s)$).

Parliamo ora di **SCHEMI A BLOCCHI**: hanno 4 elementi base, ovvero **RAMI** (archi orientati, cioè i collegamenti a cui sono associate le variabili di ingresso e uscita), **BLOCCHI** (i singoli scatolotti che rappresentano le funzioni di trasferimento), **PUNTI DI DERIVAZIONE** (quelli usati nella retroazione, ovvero i collegamenti tra i rami che prendono una variabile e la riportano da un'altra parte) e **SOMMATORI** (o nodo di somma). Come ricavo lo schema a blocchi dall'equazione del sistema? Vediamo un esempio:



Da cui:



Da uno schema "abbozzato" possiamo usare l'**ALGEBRA DEI BLOCCHI** per ridurre schemi complessi a strutture più semplici, in modo da calcolare più facilmente la funzione di trasferimento ingresso-uscita:

- 2 o più blocchi in serie (cascata) → **PRODOTTO** delle f.d.t dei singoli blocchi:

$$\frac{u(s)}{G_1(s)} \rightarrow \frac{v(s)}{G_2(s)} \rightarrow \frac{y(s)}{\dots} \equiv \frac{u(s)}{G_2(s) G_1(s)} \rightarrow y(s)$$

- 2 o più blocchi in parallelo → **SOMMA** delle f.d.t dei singoli blocchi:

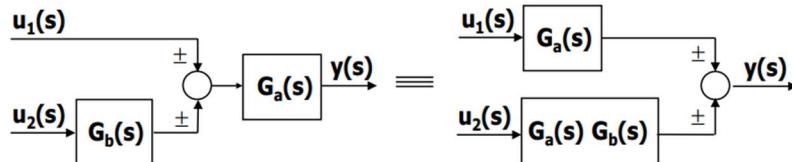
$$\frac{u(s)}{G_1(s)} \rightarrow \frac{y_1(s)}{\dots} \quad \frac{u(s)}{G_2(s)} \rightarrow \frac{y_2(s)}{\dots} \quad \frac{y(s)}{\pm} \equiv \frac{u(s)}{\pm G_1(s) \pm G_2(s)} \rightarrow y(s)$$

- Spostare un blocco rispetto ad un sommatore:

- **Da monte a valle** → si dividono tutti i rami entranti nel sommatore per la f.d.t del blocco da spostare:

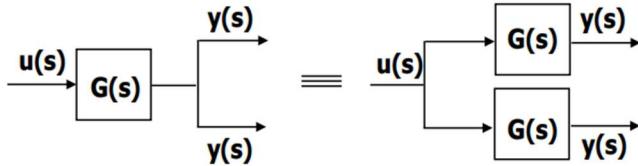
$$\begin{array}{ccc} \frac{u_1(s)}{G_1(s)} & \rightarrow & \frac{u_1(s)}{\pm} \rightarrow \frac{y(s)}{\dots} \\ \frac{u_2(s)}{G_2(s)} & \rightarrow & \frac{u_2(s)}{\pm} \rightarrow \frac{y(s)}{\dots} \end{array} \equiv \begin{array}{ccc} \frac{u_1(s)}{G_2(s)/G_1(s)} & \rightarrow & \frac{u_1(s)}{\pm} \rightarrow \frac{y(s)}{\dots} \end{array}$$

- **Da valle a monte** → si moltiplicano tutti i rami entranti nel sommatore per la f.d.t del blocco:

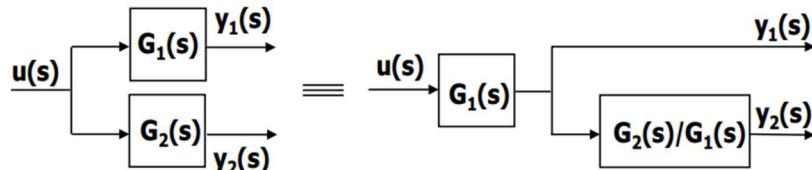


- Spostare un blocco rispetto ad un punto di derivazione:

- **Da monte a valle** → si moltiplicano tutti i rami uscenti dal punto di derivazione per la f.d.t del blocco:



- **Da valle a monte** → si dividono tutti i rami uscenti dal punto di derivazione per la f.d.t del blocco:



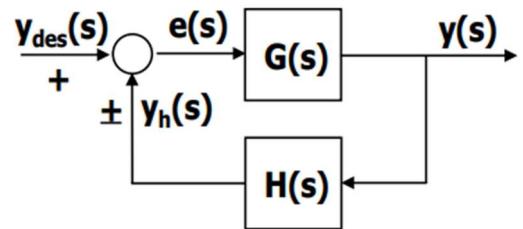
Vediamo il **CALCOLO DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO AD ANELLO CHIUSO** di un sistema in retroazione:

$$W_y(s) = \frac{y(s)}{y_{des}(s)}$$

Infatti dal sistema a blocchi ho che:

$$y(s) = G(s)e(s) = G(s)[y_{des}(s) \pm y_h(s)] = G(s)[y_{des}(s) \pm H(s)y(s)]$$

$$\rightarrow W_y(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$



Dove:

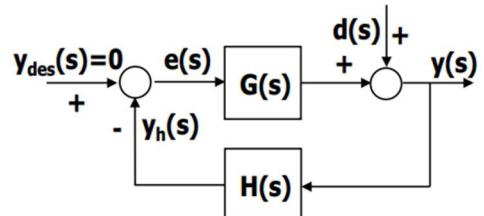
- $G(s)$ = f.d.t del ramo **diretto**;
- $H(s)$ = f.d.t del ramo **in retroazione**;
- $G(s)H(s) = G_a(s)$ = f.d.t di **trasferimento d'anello** (data dal prodotto di tutte le f.d.t presenti sull'anello). Il segno \mp è perché è l'opposto del segno della retroazione.

Questo calcolo serve per velocizzare i calcoli delle f.d.t di altre variabili di interesse: se infatti volessi calcolare la **f.d.t tra disturbo $d(s)$ e uscita $y(s)$ per $y_{des} = 0$** [ovvero no uscita dovuta al disturbo], avrei semplicemente:

$$W_d(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

Perché:

- Numeratore = 1 perché la f.d.t del ramo diretto tra $d(s)$ e $y(s)$ è 1, in quanto non c'è nessun blocco fra i 2 ma solo un ramo;
- Il segno sotto è + perché dallo schema a blocchi vedo che il segno della retroazione è negativo (quindi prendo opposto);
- $G(s)H(s)$ è la funzione di trasferimento d'anello perché quelle sono tutte le f.d.t presenti nell'anello.



Parliamo ora di **SPECIFICHE DI PROGETTO**: abbiamo parlato di "problema del controllo" come l'imposizione di un funzionamento desiderato ad un processo; il funzionamento desiderato è stato espresso richiedendo che l'uscita si comporti nel tempo come un segnale di riferimento. Nella realtà, però, è **impossibile la coincidenza tra uscita e riferimento**: l'uscita **insegue il riferimento entro certe tolleranze** (definite dalle specifiche di progetto). Abbiamo specifiche di progetto riguardo a:

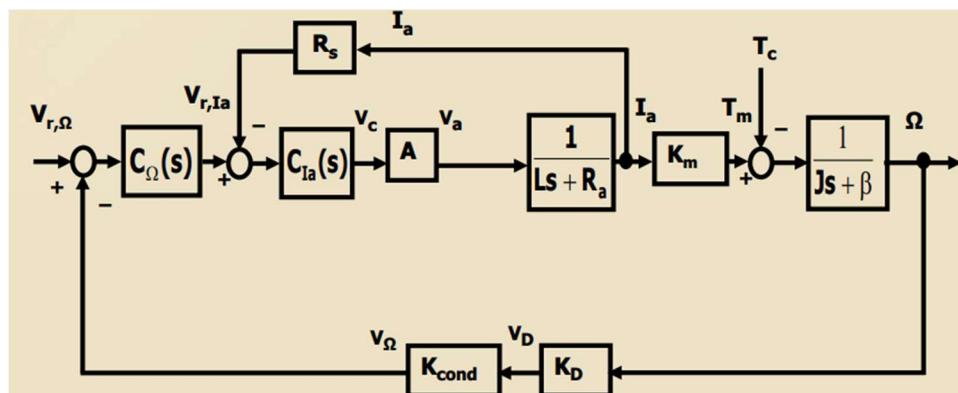
- **STABILITÀ** (del sistema controllato) e robustezza della stabilità (e del controllo in generale): condizione necessaria affinché uscita inseguì riferimento è che il sistema controllato sia asintoticamente stabile (**STABILITÀ**) [nel caso di un sistema in retroazione, la funzione di trasferimento ad anello chiuso deve essere asintoticamente stabile, ovvero tutti i suoi poli devono avere $Re < 0$]; condizione sufficiente invece è che

l'asintotica stabilità del sistema controllato sia mantenuta anche in presenza di perturbazioni e variazioni dei parametri del sistema (**STABILITÀ ROBUSTA**). Parleremo quindi dei **margini di stabilità** e della **sensibilità** rispetto alle variazioni.

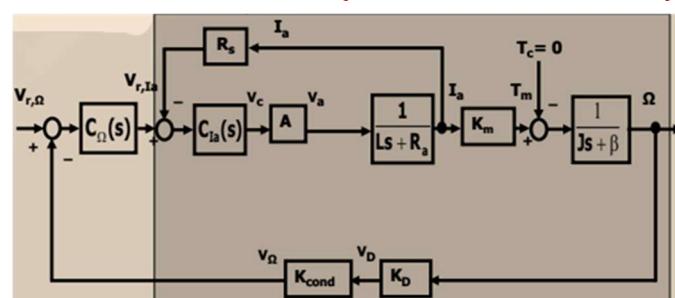
- **COMPORTAMENTO IN REGIME PERMANENTE:** imponendo la stabilità al sistema controllato, si garantisce il raggiungimento della condizione in regime permanente; si hanno quindi delle **specifiche di precisione** (con cui uscita insegue riferimento) **in regime permanente**, definite rispetto a famiglie di segnali di riferimento (es. **segnali polinomiali** e **sinusoidali**) [es. errore di inseguimento nullo in regime permanente con riferimento il gradino $\rightarrow e = y_{des} - y$, ma $e_\infty = 0 \rightarrow y_\infty = y_{des}$]. Anche in regime ci possono essere dei **disturbi** che alterano la precisione del sistema, perciò possiamo definire delle specifiche affinché il sistema reietti gli effetti dei disturbi o li limiti entro valori accettabili.
- **RISPOSTA TRANSITORIA:** possiamo definire queste specifiche senza un riferimento, ma noi preferiremo definirle rispetto ad un riferimento "**critico**", ovvero il **riferimento a gradino** (solitamente di ampiezza unitaria per semplicità). Le principali specifiche sono:
 - presenza di oscillazioni \rightarrow **sovraelongazione massima**: $\hat{s} = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$
 - prontezza di risposta \rightarrow **tempo di salita**: $t_r = t_{90\%} - t_{10\%}$ oppure $t_s = \min(t : y(t_s) = y_\infty)$
 - tempo per raggiungere il regime permanente \rightarrow **tempo di assestamento**
- **RISPOSTA IN FREQUENZA:** specifiche sul comportamento in frequenza, rappresentato dalla **risposta in frequenza del sistema ad anello chiuso** $W(j\omega)$ [sistema controllato visto come un **filtro**]. Solitamente parliamo di buon inseguimento dell'uscita su **segnali sinusoidali** o l'attenuazione di **disturbi sinusoidali**.
- **ATTIVITÀ DI COMANDO:** vincoli e limitazioni sull'andamento della variabile di comando, come **valore massimo in modulo della variabile di comando** (con conseguente saturazione del comando) e "**slew rate**" massimo.

1) MATLAB

Noi analizzeremo i sistemi di controllo con **MATLAB**. Si consiglia di iniziare sempre uno script con **clear all** e **close all** (comandi di pulizia); poi si definisce la variabile complessa di Laplace con **s = tf('s')**; Poi prendiamo i dati del nostro sistema e assegno i valori numerici ai vari **parametri del sistema** (le variabili). Per capire facciamo un **ESERCIZIO** dove simuliamo un sistema di controllo nel caso di un servomotore con questo schema a blocchi:



Il **1° punto** dell'esercizio è **calcolare la f.d.t del motore (incluso anello di corrente)** per $T_c = 0$:

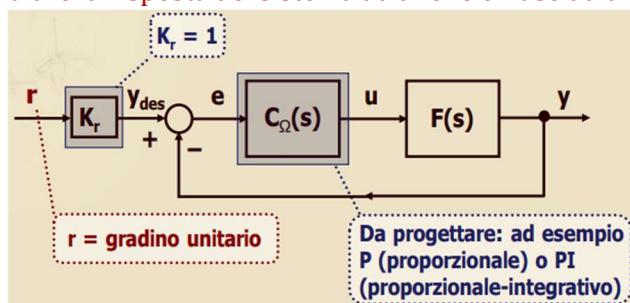


```

clear all
close all
s = tf('s');
%% Parametri
Ra = 6;
L = 3.24e-3;
Km = 0.0535;
J = 20e-6;
beta = 14e-6;
KD = 0.0285;
Kcond = 0.67;
Rs = 7.525;
A = 2.925;
K = 1000;
CIA = K/s;
%% Calcolo fdt tra V_r,Ia(s) e I_a(s)
FrIa = feedback(CIA*A/(L*s+Ra), Rs); % feedback -> 1° argomento = ramo diretto
% 2° argomento = retroazione (assunta automaticamente negativa da feedback)
%% Calcolo fdt F(s) cercata
F = FrIa*Km/ (J*s+beta)*KD*Kcond % non metto il ';' per visualizzare l'output

```

Il 2° punto dell'esercizio è simolare la risposta del sistema ad anello chiuso ad un riferimento a gradino unitario, per diversi controllori $C_\Omega(s)$:

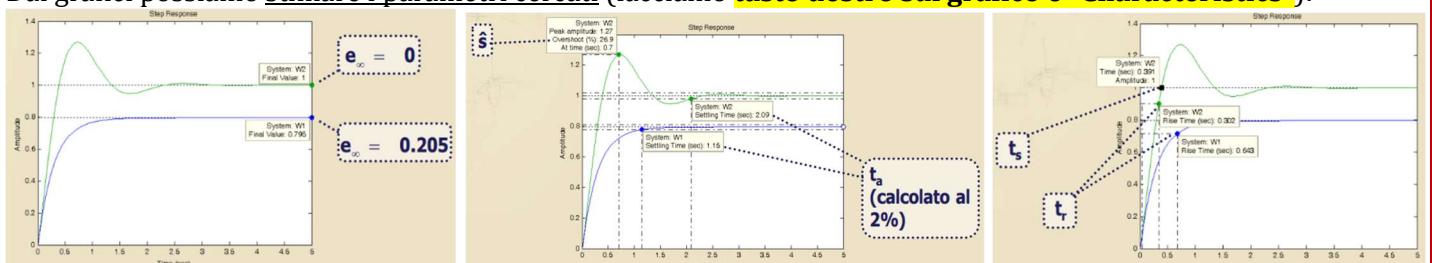


```

Kr = 1;
Kp = 0.4;
C_omega1 = Kp; % fdt caso 1 del controllore (fdt proporzionale)
Ki = 2;
C_omega2 = Kp+Ki/s; % fdt caso 2 del controllore (fdt proporzionale-integrativa)
%% Calcolo fdt ad anello chiuso nei 2 casi
W1 = Kr*feedback(C_omega1*F, 1);
W2 = Kr*feedback(C_omega2*F, 1);
%% Applico gradino unitario (comando step -> 1° argomento = fdt su cui applicare il
gradino, 2° argomento = istante finale della simulazione partendo da t=0)
step(W1,5,'b') % blu
hold on % permette di avere tutti i grafici nella stessa finestra per confrontarli
step(W2,5,'g') % verde
hold off

```

Dai grafici possiamo stimare i parametri cercati (facciamo **tasto destro sul grafico e "Characteristics"**):



Il diverso comportamento del sistema ad anello chiuso con i 2 controllori può essere giustificato **calcolando il valore di poli della funzione $W(s)$ nei 2 casi**; lo facciamo con il comando **damp(W1)** e **damp(W2)** [trova i poli della f.d.t nella forma “parte reale + parte immaginaria” e ne fornisce anche pulsazione e smorzamento]. Troviamo come **poli dominanti** delle 2 fdt:

$W_1(s)$ ha un polo dominante reale	Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)	$W_2(s)$ ha una coppia di poli dominanti complessi coniugati	Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
	-3.42e+000	1.00e+000	3.42e+000		-1.71e+000 + 3.27e+000i	4.63e-001	3.69e+000
	-9.25e+002 + 2.44e+003i	3.55e-001	2.61e+003		-1.71e+000 - 3.27e+000i	4.63e-001	3.69e+000
	-9.25e+002 - 2.44e+003i	3.55e-001	2.61e+003		-9.25e+002 + 2.44e+003i	3.55e-001	2.61e+003
					-9.25e+002 - 2.44e+003i	3.55e-001	2.61e+003

2) RIFERIMENTI e DISTURBI POLINOMIALI

Partiamo della **PRECISIONE IN REGIME PERMANENTE**: come abbiamo già accennato, l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa (che sarà garantita dall'azione del controllore) assicura l'esistenza della condizione di regime permanente; inoltre le specifiche vengono formulate rispetto al valore massimo in regime permanente dell'errore di inseguimento ($e = y_{des} - y$) per un dato segnale di riferimento.

Le famiglie di segnali di riferimento di interesse sono i **segnali polinomiali** e i **segnali sinusoidali**:

$$r(t) = \frac{t^k}{k!} \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^{k+1}} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots N \quad r(t) = \sin(\omega_0 t) \rightarrow R(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Da cui definiamo l'uscita desiderata con $y_{des} = K_r r$ (dove K_r = fattore di scala che permette di assegnare a y_{des} l'ampiezza desiderata).

I segnali di riferimento **polinomiali** ci permettono di definire i **principali tipi di comportamento desiderabili per l'uscita del sistema**, ovvero:

- $k = 0 \rightarrow r(t) = \varepsilon(t) \rightarrow y_{des}(t) = K_r \varepsilon(t)$ [uscita = gradino di ampiezza K_r ; per un sistema meccanico sarebbe come imporre una posizione desiderata costante pari a K_r];
- $k = 1 \rightarrow r(t) = t \rightarrow y_{des}(t) = K_r t$ [uscita = rampa di coefficiente angolare K_r ; per sistema meccanico sarebbe come imporre una velocità desiderata costante pari a K_r];
- $k = 2 \rightarrow r(t) = 0.5t^2 \rightarrow y_{des}(t) = 0.5K_r t^2$ [uscita = arco di parabola; per sistema meccanico sarebbe come imporre un'accelerazione desiderata costante pari a K_r].

Per analizzare la **PRECISIONE** con cui l'uscita insegue un riferimento polinomiale **IN REGIME PERMANENTE**, dovremo considerare il **tipo di sistema**, il **guadagno stazionario della funzione d'anello** e la **f.d.t d'errore**. Questi, **insieme al grado del riferimento polinomiale**, determinano la **FEDELTÀ DI RISPOSTA del sistema in regime permanente**. Parliamo di questi elementi:

- **TIPO** → il sistema è di **tipo h** se la f.d.t d'anello chiuso ha **1 polo di molteplicità h in $s = 0$** ;
- **GUADAGNO STAZIONARIO** → il guadagno stazionario di un sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$ è dato da $K_G = \lim_{s \rightarrow 0} \{s^h G(s)\}$, dove h è la molteplicità dell'eventuale polo di $G(s)$ in $s = 0$ [guadagno stazionario = guadagno della f.d.t in bassa frequenza];
- Applicando questa definizione sul nostro sistema d'esempio con $G_a(s) = f.d.t d'anello$, dove se il sistema è di:
 - **Tipo 0** (no poli in $s = 0$) $\rightarrow K_{Ga} = G_a(0) =$ guadagno di posizione;
 - **Tipo 1** ($G_a(s) = G'_a(s)/s$) $\rightarrow K_{Ga} = \lim_{s \rightarrow 0} \{s G_a(s)\} = G'_a(0) =$ guadagno di velocità;
 - **Tipo 2** ($G_a(s) = G''_a(s)/s^2$) $\rightarrow K_{Ga} = \lim_{s \rightarrow 0} \{s^2 G_a(s)\} = G''_a(0) =$ guadagno di accelerazione.
- **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO D'ERRORE** $\rightarrow W_e(s) = \frac{e(s)}{r(s)} = \frac{K_r}{1 + G_a(s)}$.

Quindi, sempre garantendo l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa (per avere il regime permanente), si può valutare l'**errore di inseguimento in regime permanente** applicando il teorema del valore finale:

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \{s e(s)\} \quad \text{con} \quad e(s) = W_e(s) r(s)$$

Quindi, a seconda del tipo di sistema e di riferimento, avremo come **errore in regime permanente**:

Sistema	Errore in regime permanente	Riferimento $r(t)$		
		$\varepsilon(t)$	t	$t^2/2$
Tipo 0	Tip 0	$\frac{K_r}{1 + K_{Ga}}$	∞	∞
	Tip 1	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$	∞
	Tip 2	0	0	$\frac{K_r}{K_{Ga}}$

Vediamo quindi che:

- ❖ con un riferimento polinomiale di grado h e un sistema di tipo h , otteniamo un **errore finito, non nullo** e che **diminuisce all'aumentare del guadagno** stazionario della f.d.t d'anello (sarebbero gli elementi **sulla diagonale**);

- ❖ un sistema di tipo h garantisce un errore di inseguimento in regime permanente **nullo** per segnali di riferimento polinomiali di grado $< h$ (sarebbero gli elementi **sotto la diagonale**) [quindi il valore del guadagno K_{Ga} qui non influisce];
- ❖ un sistema di tipo h non può inseguire un riferimento polinomiale di grado $> h$, quindi l'errore **diverge** (sarebbero gli elementi **sopra la diagonale**).

⚠ Legato a ciò vediamo che se $G_a(s)$ (f.d.t d'anello) ha **almeno 1 zero in $s = 0$** , il sistema sarà di tipo 0 e quindi **non può inseguire riferimenti polinomiali di grado > 0** ; avrà inoltre guadagno stazionario $K_{Ga} = 0$. Inoltre, con $r(t) = \varepsilon(t)$ [grado 0], avremo che l'errore d'inseguimento in regime permanente sarà $e_\infty = K_r$, ovvero l'**uscita del sistema in catena chiusa converge a zero in regime permanente**.

Come implica tutto ciò sul progetto del controllore? In generale le specifiche di precisione relative all'errore di inseguimento in regime permanente a segnali di riferimento polinomiali impongono vincoli sul **tipo** di sistema (ovvero sul n° di poli in $s = 0$ della sua f.d.t d'anello $G_a(s)$) e sul **guadagno stazionario minimo** della f.d.t d'anello, ricordando che $G_a(s) = C(s)F(s)$ con $C(s)$ = controllore, e $F(s)$ = sistema da controllare [es. se avremo un riferimento di grado h e il sistema da controllare ha $F(s)$ con n_F = (numero poli in $s = 0$), allora avremo che numero poli del controllore = $n_C = h - n_F$].

Passiamo ora ai **DISTURBI POLINOMIALI** (disturbo = segnale indesiderato che modifica l'andamento dell'uscita del sistema): i disturbi possono agire direttamente sull'uscita, in un punto intermedio del sistema, su un comando, sul riferimento o sulla retroazione. Di interesse è il **disturbo costante** (polinomio di ordine 0) usato come offset, il **disturbo a rampa** (polinomio di 1° grado) usato come "deriva" del segnale in oggetto, e il **disturbo sinusoidale** usato per rappresentare la componente principale di rumore di un dispositivo.

L'effetto sull'uscita in regime permanente di un disturbo polinomiale dipende da:

- **posizione** in cui il disturbo entra nell'anello e conseguentemente la **f.d.t tra disturbo e uscita**;
- **tipo e guadagno stazionario** dei blocchi presenti nell'anello.

Questi elementi, con il **grado del disturbo polinomiale**, determinano l'entità degli effetti sull'uscita o la totale reiezione del disturbo in regime permanente. L'analisi viene svolta **isolando l'effetto di ogni singolo disturbo, ponendo a zero il riferimento**, e si somma poi gli effetti (sovraposizione degli effetti). Una volta trovato l'**effetto di un disturbo sull'uscita in regime permanente** $y_{d,\infty}$ si può ricavare il **corrispondente errore** con $e_{d,\infty} = -y_{d,\infty}$.

⚠ Se applichiamo un riferimento polinomiale che ha già un errore intrinseco $e_{r,\infty}$ in regime, allora in presenza di disturbi avremo errore totale $e_\infty = e_{r,\infty} + e_{d,\infty}$.

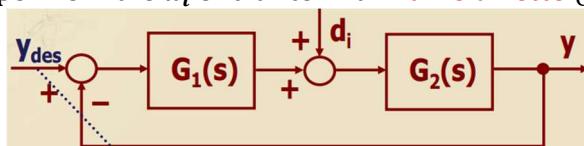
Vediamo dei **casi di disturbo sull'uscita**:

- **Disturbo costante** (polinomio di grado 0) $d_y(t) = D_y \rightarrow d_y(s) = D_y/s$:
 - Se $G_a(s)$ è di tipo 0, l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente è **finito, non nullo** e vale:

$$y_{d,y,\infty} = \frac{D_y}{1 + K_{Ga}}$$
 - Se $G_a(s)$ è almeno di tipo 1, l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente è **nullo** $y_{d,y,\infty} = 0$ (in questo caso il sistema si dice "**astatico**").
- **Disturbo a rampa** (polinomio di 1° grado) $d_y(t) = \alpha_{d_y}t \rightarrow d_y(s) = \alpha_{d_y}/s^2$:
 - Se $G_a(s)$ è di tipo 0, l'uscita in regime permanente risulta **divergente** $y_{d,y,\infty} = \infty$ (la retroazione lascia passare il disturbo sull'uscita);
 - Se $G_a(s)$ è di tipo 1, l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente è **finito, non nullo** e vale:

$$y_{d,y,\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1 + G'_a(s)/s} \frac{\alpha_{d_y}}{s} \right\} = \frac{\alpha_{d_y}}{K_{Ga}}$$
 - Se $G_a(s)$ è almeno di tipo 2, l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente è **nullo** $y_{d,y,\infty} = 0$.

Consideriamo ora un **disturbo polinomiale d_i entrante in un ramo diretto** (non retroazionato) con $y_{des} = 0$:



Quindi la f.d.t tra disturbo e uscita sarà:

$$W_{di}(s) = \frac{y(s)}{d_i(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_a(s)}$$

Anche qui possiamo valutare l'**effetto del disturbo sull'uscita in regime** con il teorema del valore finale:

$$y_{d_i,\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{y_{d_i}(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{s y_{d_i}(s)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{s W_{di}(s) d_i(s)\}$$

Vediamo i **casi di disturbi polinomiali su ramo diretto**:

- **Disturbo costante** (polinomio di grado 0) $d_i(t) = D_i \rightarrow d_i(s) = D_i/s$:
 - Se $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono entrambe di tipo 0, l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente è **finito, non nullo** e vale:

$$y_{d_i,\infty} = \frac{K_{G2}D_i}{1 + K_{G1}K_{G2}}$$
 - Se $G_2(s)$ è almeno di tipo 1, ma $G_1(s)$ è di tipo 0 l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente continua ad essere **finito, non nullo e dipende solo dal guadagno di $G_1(s)$** :

$$y_{d_i,\infty} = \frac{D_i}{K_{G1}}$$
 - Se $G_1(s)$ è almeno di tipo 1, l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente è **nullo** $y_{d_i,\infty} = 0$.
- **Disturbo a rampa** (polinomio di 1° grado) $d_i(t) = \alpha_{d_i} t \rightarrow d_i(s) = \alpha_{d_i}/s^2$:
 - Se $G_1(s)$ è di tipo 0, l'uscita in regime permanente risulta **divergente** $y_{d_i,\infty} = \infty$;
 - Se $G_1(s)$ è di tipo 1, l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente è **finito, non nullo** e vale:

$$y_{d_i,\infty} = \frac{\alpha_{d_i}}{K_{G1}}$$
 - Se $G_1(s)$ è almeno di tipo 2, l'effetto del disturbo sull'uscita in regime permanente è **nullo** $y_{d_i,\infty} = 0$.

Implicazioni sul progetto del controllore? Le specifiche sull'attenuazione o reiezione in regime permanente di disturbi polinomiali possono imporre vincoli sul **numero di poli in $s = 0$** e sul **guadagno stazionario minimo**:

- Una specifica di **reiezione totale in regime permanente di un disturbo polinomiale** può determinare un vincolo sul **numero di poli in $s = 0$** del controllore, **ma non sul suo guadagno**. Inoltre, **per reiettare completamente in regime permanente un disturbo polinomiale di grado h** , la f.d.t risultante dalla cascata dei blocchi a monte del punto di ingresso del disturbo deve avere almeno **$h + 1$ poli in $s = 0$** .
- Una specifica di **attenuazione minima di un disturbo polinomiale in regime permanente** può essere formulata in termini di **effetto massimo del disturbo sull'uscita** (o equivalentemente sull'errore massimo generato). Può determinare vincoli sia sul **n° di poli in $s = 0$** sia sul **guadagno stazionario**. L'effetto in regime permanente di un **disturbo polinomiale di grado h** è **finito e non nullo** se la f.d.t risultante a monte del punto di ingresso del disturbo ha **h poli in $s = 0$** (in questo caso si ha anche un **vincolo sul guadagno minimo del controllore**).

→ SIMULINK:

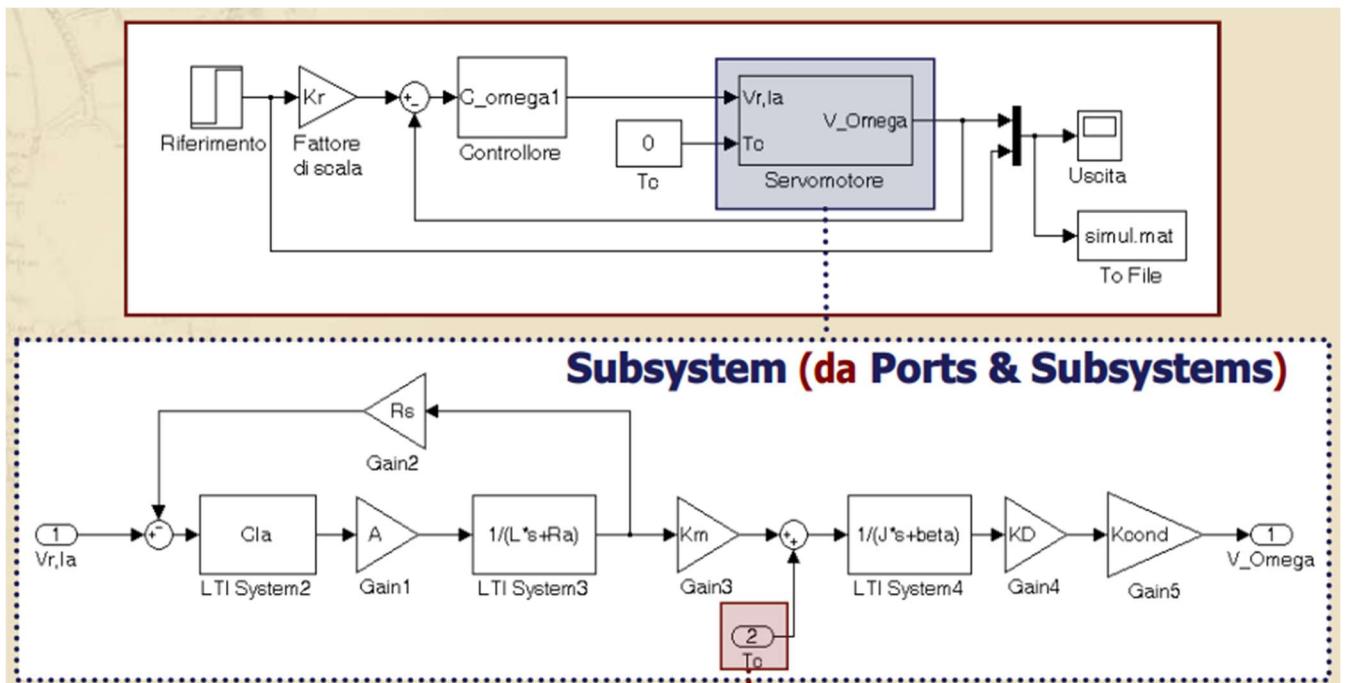
Usiamo **SIMULINK + MATLAB** per sviluppare interamente il progetto di un sistema di controllo, verificando di soddisfare le specifiche di progetto e valutandone le prestazioni. Simulink permette di **rappresentare il sistema per mezzo del suo schema a blocchi e di simularne il comportamento**. Scrivendo “**simulink**” nella finestra di comando Matlab si apre Simulink; dalla finestra del “**Simulink Library Browser**” si può:

- Creare un nuovo modello o aprirne uno già esistente (file.mdl) dal menù “File”;
- Individuare gli elementi di interesse nella libreria principale di Simulink o fra i toolbox disponibili;
- Modificare le impostazioni.

Per **inserire un blocco nel modello**, basta selezionarlo e trascinarlo nella finestra del modello, tenendo premuto tasto sinistro. Per **collegare 2 blocchi con un ramo**, basta cliccare sul morsetto di uscita del 1° e trascinare fino all'ingresso del 2°; oppure possiamo selezionare i 2 blocchi tenendo premuto CTRL. Per **modificare i parametri di un blocco** si fa 2 click sul blocco oppure tasto destro del mouse e si modificano i parametri dall'interfaccia. Per **rinominare un blocco** basta cliccare sul nome e modificarlo.

Nella cartella “**Continuos**” troviamo i **principali blocchi dei sistemi TC**, nella cartella “**Discrete**” troviamo i **principali blocchi dei sistemi TD**. Con il blocco “**LTI System**” definiamo direttamente un **sistema LTI**; nella creazione, si assegna automaticamente una f.d.t, ma se ho già calcolato nel mio Script Matlab la f.d.t di interesse e l'avessi messa in una variabile, posso **scrivere quella variabile come f.d.t**. Nella cartella “**Math Operations**” troviamo tutti gli elementi delle **operazioni matematiche**, tra cui **Gain** (**guadagno**, **amplificatore**) e **Sum** (**sommatore**). Nella cartella “**Sources**” si trovano i blocchi sorgente, che permettono di applicare un **segnale di ingresso**, tra cui **Step**, **Ramp**, **Sine Wave** e **Signal Generator** (oppure un segnale salvato in un **file.mat** o già scritto nel nostro workspace). Nella cartella “**Signal Routing**” si trovano i blocchi per la **gestione dei segnali**, tra cui **Mux** e **Demux** (**multiplexer** e **demultiplexer**), **Manual Switch** (**interruttore manuale**) e **Switch** (**automatico**). Nella cartella “**Sinks**” ci sono i blocchi per visualizzare una **variabile** (**Scope**), per renderla disponibile nello spazio di lavoro Matlab (**To Workspace**) o per salvarla in un **file.mat** (**To File**). Nella cartella “**Ports & Subsystems**” si può raggruppare una parte di sistema in un unico blocco **sottosistema** (**Subsystem**), mantenendo **inalterati i suoi collegamenti** per mezzo di porte di ingresso e di uscita (**In** e **Out**).

Parliamo ora dell'**ESECUZIONE DI UNA SIMULAZIONE**: possiamo modificare i parametri di una simulazione selezionando “**Simulation parameters**” dal menù “**Simulation**”. Per eseguire la simulazione si seleziona “**Start**” dal menù **Simulation** oppure direttamente il **run**. Per **ESEMPIO**, per realizzare in Simulink il servomotore in c.c. visto nella sezione 1)Matlab, avremo schema:



3) DIAGRAMMI di BODE, POLARI e di NYQUIST

Parliamo dei **DIAGRAMMI DI BODE**: la **RISPOSTA IN FREQUENZA** si analizza calcolando la **f.d.t in $s = j\omega$** :

$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = \text{modulo della f. d. t} \\ \varphi(\omega) = \text{fase della f. d. t} \end{cases}$$

Dove sia s sia ω sono in **rad/s**, mentre $G(j\omega)$ e $M(\omega)$ in **u_{nat}** (unità naturale, che sarebbe ingresso fratto uscita); $\varphi(\omega)$ è in **rad** oppure $^\circ$. Inoltre per $M(\omega)$ è usuale usare anche il **dB** (decibel):

$$M_{dB} = 20 \log_{10} M_{u_{nat}}$$

⚠ Ricorda che $M_{dB} = \pm M_{1,dB} \pm M_{2,dB} \pm \dots \pm M_{n,dB}$ (con n blocchi in cascata del mio sistema), mentre $\varphi = \pm\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \dots \pm \varphi_n$.

Dal punto di vista grafico abbiamo 2 possibilità:

- Diagramma **NATURALE** di modulo (o fase) se ho ω come ascissa in scala **lineare** e M (o φ) come ordinata;
- Diagramma **DI BODE [DdB]** di modulo (o fase) se ho ω come ascissa in scala **logaritmica** e M_{dB} (o φ_{dB}).

Nei DdB una qualunque f.d.t si può esprimere come prodotto di f.d.t elementari di 4 tipi:

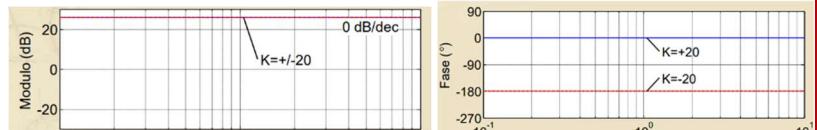
$$f_1(s) = K \quad f_2(s) = s^{\pm i} \quad f_3(s) = \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{\pm i} \quad f_4(s) = \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm i}$$

Le **moltelicità** i si ottengono semplicemente moltiplicando per i i Diagrammi di Bode di modulo e fase delle stesse f_1, f_2, f_3, f_4 con $i = 1$. Inoltre, il DdB di una f.d.t che è l'**inversa** di un'altra ($f_x = f^{-1}$), si ottiene **cambiando il segno** al DdB sia di modulo sia di fase della f.d.t originale. Quindi **fattori elementari per le f.d.t in DdB (POLI)**:

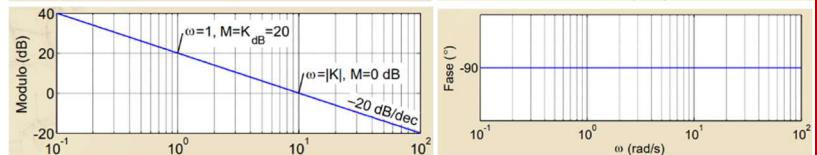
$$f_2(s) = s^{-1} \quad f_3(s) = \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1} \quad f_4(s) = \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}$$

Nel dettaglio vediamo che:

$$- f_1(s) = K \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = 20 \log_{10}(|K|) \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{per } K > 0 \\ 180^\circ & \text{per } K < 0 \end{cases} \end{cases}$$

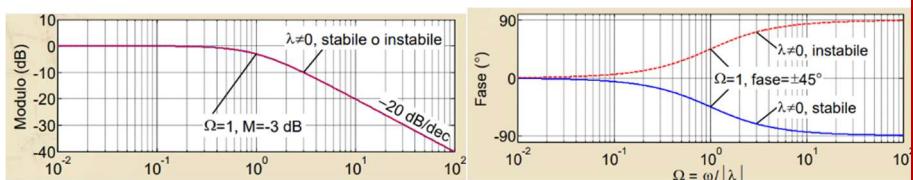


$$- f_2(s) = \frac{K}{s} = -j \frac{K}{\omega} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = 20 \log_{10} \left(\frac{|K|}{\omega} \right) \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$



⚠ Se ho polo multiplo nell'origine ($f_3(s) = K/s^i$), avrò come modulo una retta con pendenza $-20i \text{ dB/dec}$.

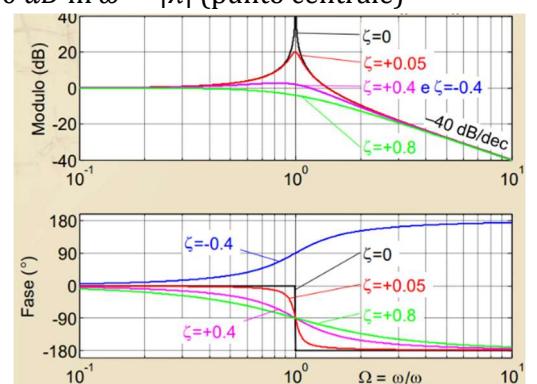
$$- f_3(s) = \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1} = \left(1 - j \frac{\omega}{\lambda}\right)^{-1} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = -20 \log_{10} \left(\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{|\lambda|} \right)^2} \right) \\ \varphi(\omega) = \text{sign}(\lambda) \arctan \left(\frac{\omega}{|\lambda|} \right) \end{cases}$$



Questo perché:

- Polo in bassa frequenza (BF) $\rightarrow 0 \text{ dB/dec}; 0^\circ$
- Polo in alta frequenza (AF) $\rightarrow -20 \text{ dB/dec}; +90^\circ$ se instabile, -90° se stabile
- Polo nel punto centrale (cioè $\omega = |\lambda|$) $\rightarrow -3 \text{ dB}; +45^\circ$ se instabile, -45° se stabile
- Asintoto del modulo in AF (-20 dB/dec) interseca asse a 0 dB in $\omega = |\lambda|$ (punto centrale)

$$- f_4(s) = \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = -20 \log_{10} \left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \\ \varphi(\omega) = -\arg \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right) \end{cases}$$



Questo perché:

- Polo in bassa frequenza (BF) $\rightarrow 0 \text{ dB/dec}; 0^\circ$
- Polo in alta frequenza (AF) $\rightarrow -40 \text{ dB/dec}; +180^\circ$ se instabile, -180° se stabile
- Polo nel punto centrale (cioè $\omega = \omega_n$) $\rightarrow \frac{1}{2|\zeta|}; +90^\circ$ se instabile, -90° se stabile
- Asintoto del modulo in AF interseca asse a 0 dB in $\omega = \omega_n$ (punto centrale)

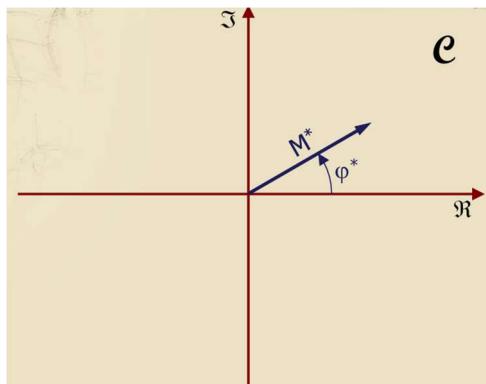
⚠ I DdB degli **ZERI** si ottengono da quelli dei poli **cambiando segno** sia ai moduli (in dB) sia alle fasi (in gradi); i DdB (sia di zeri sia di poli) di **moltelicità** i si ottengono **moltiplicando** i DdB di modulo e fase per i .

⚠ I DdB si possono fare in **Matlab** con il comando **bode(fdt)**.

Vediamo ora i **DIAGRAMMI POLARI**: partiamo come prima da:

$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = \text{modulo della f.d.t} \\ \varphi(\omega) = \text{fase della f.d.t} \end{cases}$$

Ma questa volta vediamo una rappresentazione su un **riferimento polare del piano complesso** di $G(j\omega)$, ovvero con raggio = $M(\omega)$ e angolo = $\varphi(\omega)$. Per esempio, se $\omega = \omega^*$, avremo una rappresentazione del tipo:



Proprietà:

- Per sistemi **senza poli nell'origine**, il diagramma polare **parte da un punto sull'asse reale**. La f.d.t in BF (bassa frequenza) è approssimabile con una **costante**;
- Per sistemi con **i poli nell'origine**, il diagramma polare **parte da un punto infinitamente lontano dall'origine**. La f.d.t in BF è approssimabile con $\frac{K}{s^l}$ (ho quindi un asintoto per $\omega \rightarrow 0^+$);
- Per sistemi strettamente propri (che sono quelli che vediamo noi), il **diagramma polare termina nell'origine** (ovvero per $\omega \rightarrow \infty$ ho modulo nullo).

⚠ In questo corso, non andremo nel dettaglio, ma traceremo **qualitativamente** il diagramma polare **a partire dal diagramma di Bode** (DdB) della funzione. I passi sono:

- 1) Determinare il **comportamento iniziale** per $\omega \rightarrow 0^+$ tenendo conto dell'eventuale presenza di poli nell'origine e calcolando la fase iniziale:

$$\varphi|_{\omega \rightarrow 0^+} = -\frac{\pi i}{2} + \arg(K) \quad \text{con } \arg(K = \text{guadagno}) = 0 \ (\text{per } K > 0) \text{ oppure } \pm \pi \ (\text{per } K < 0); \quad i = \text{n° poli origine}$$

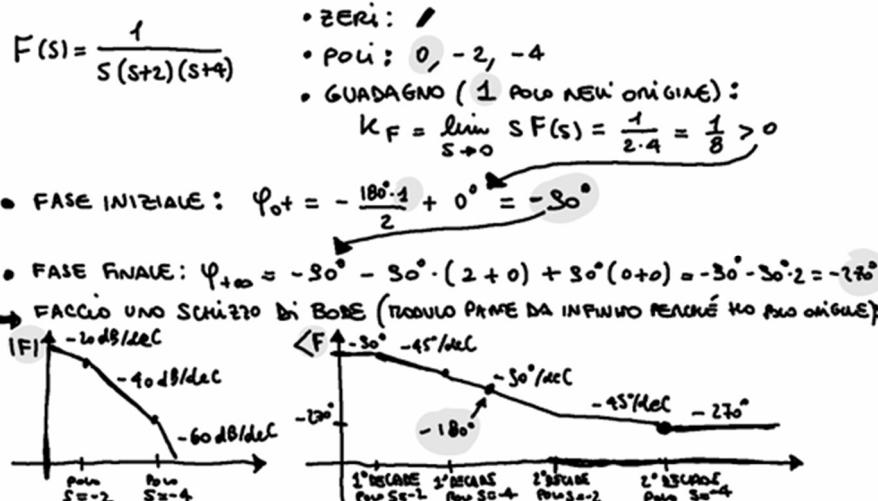
Se ci sono poli nell'origine, determino il quadrante di partenza (senza calcolare esplicitamente l'asintoto) dal comportamento della fase in BF (crescente o decrescente rispetto al valore asintotico iniziale);

- 2) Determinare il **comportamento finale** per $\omega \rightarrow \infty$: il diagramma termina nell'origine con **fase** calcolabile con:

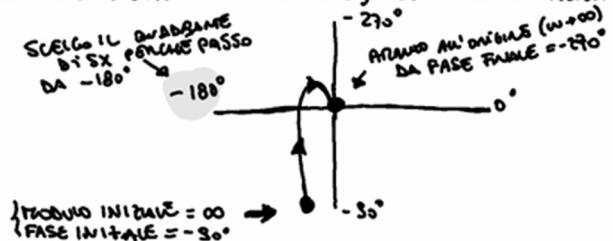
$$\varphi|_{\omega \rightarrow \infty} = \varphi|_{\omega \rightarrow 0^+} - 90^\circ(n_n + m_p) + 90^\circ(n_p + m_n) \quad \text{con} \quad \begin{cases} n_n = \text{n° poli con } Re \leq 0 \ (\text{esclusi poli origine}) \\ n_p = \text{n° poli con } Re > 0 \\ m_n = \text{n° zeri con } Re \leq 0 \\ m_p = \text{n° zeri con } Re > 0 \end{cases}$$

- 3) Si **completa** l'andamento qualitativo del diagramma polare da $\omega \rightarrow 0^+$ a $\omega \rightarrow \infty$ sulla base del comportamento di modulo e fase riportato nei DdB (si verifica con **MatLab**, usando **dcgain** per il guadagno e **bode** per i DdB).

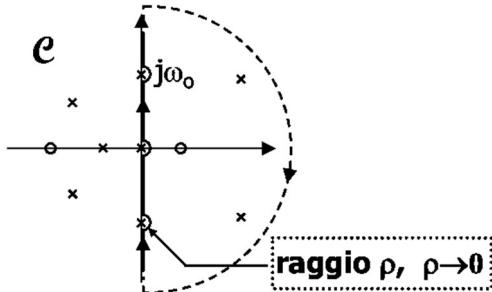
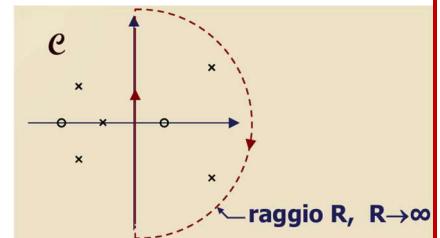
Esempio:



DA QUI DOVREI FARE "bode(F)" SU MATLAB PER AVERE L'AVVANTAGGIO PRECISO; MA VISTO CHE QUESTA $F(s)$ È FACILE, POSSO FARME IL DIAGRAMMA POLARE ENERGO:



Vediamo ora i **DIAGRAMMI DI NYQUIST** (DdN): definiti come i polari, ma facendo variare $\omega \in (-\infty, +\infty)$, ovvero facendo muovere $j\omega$ sull'asse immaginario da $-\infty$ a $+\infty$, su un **percorso chiuso** che si percorre in **senso orario** (quindi DdN è una semicirconferenza chiusa, ovvero percorrendo tutto il diagramma devo tornare da dove sono partito). Dato che vogliamo un percorso chiuso, se ho **poli sull'asse immaginario**, uso il trick di fare in modo che il percorso non li tocchi e faccia una piccolissima **deviazione semicircolare** di raggio infinitesimo $\rho \rightarrow 0$ nei poli:



► Ricorda che $|G(-j\omega)| = |G(j\omega)|$ (**modulo pari**) e $\angle G(-j\omega) = -\angle G(j\omega)$ (**fase dispari**).

Proprio per la regola di simmetria qui sopra, per **tracciare il DdN** dobbiamo:

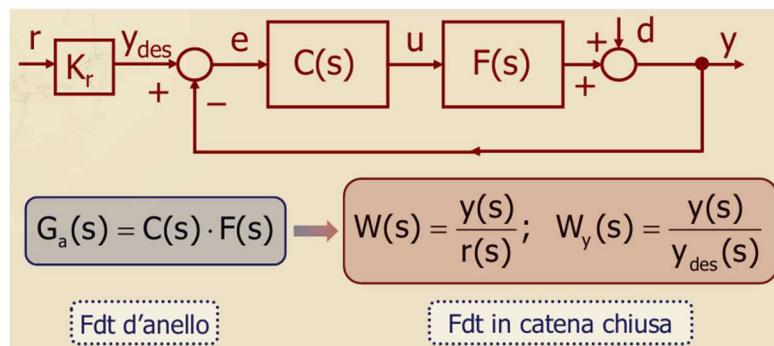
- 1) Tracciare il diagramma polare di $G(j\omega)$;
- 2) Tracciarne il simmetrico rispetto all'asse reale ("ribaltare" diagramma polare rispetto all'asse reale);
- 3) Nel caso ci siano rami all'infinito (ovvero **poli sull'asse immaginario**), congiungere i rami all'infinito con un numero di semicirconferenze orarie di raggio $R \rightarrow \infty$ pari alla molteplicità del polo (noi lo vedremo nell'origine più che sull'asse immaginario) **da $\omega = 0^+$ [punto di partenza del diagramma polare] a $\omega = 0^-$ [punto di partenza del simmetrico]**
- 4) Mettere in evidenza il verso di percorrenza delle semicirconferenze dei poli sull'asse immaginario (noi origine) e verificare che il DdN sia costituito da una curva chiusa con frecce coerenti per ω crescente (le frecce non devono andare una contro l'altra)

Vediamolo con un **ESEMPIO** (riprendendo il diagramma polare del mio esempio sopra):



► In **Matlab** possiamo tracciare il diagramma di Nyquist (DdN con **nyquist** seguito dal comando **axis equal**).

Parliamo dunque del **CRITERIO DI NYQUIST**. Vogliamo analizzare la stabilità della catena chiusa avendo la f.d.t d'anello (catena aperta), senza calcolare la f.d.t a catena chiusa (senza passare dai poli di $W(s)$):



Avevamo già visto che il denominatore (o polinomio caratteristico visto che stiamo parlando di f.d.t) $D_w(s)$ della f.d.t in catena chiusa $W_y(s) = N_w(s)/D_w(s)$, nel caso di un sistema con retroazione negativa unitaria, è pari alla somma di numeratore e denominatore della f.d.t d'anello $G_a(s) = N_a(s)/D_a(s)$:

$$D_w(s) = D_a(s) + N_a(s) = D_a(s)(1 + G_a(s)) \rightarrow \frac{D_w(s)}{D_a(s)} = 1 + G_a(s)$$

Questa formula esprime il legame tra il polinomio caratteristico della f.d.t d'anello e quello della f.d.t in catena chiusa; da qui, possiamo ricavare una **relazione fra i poli della catena aperta e quelli della catena chiusa, in particolare fra i poli instabili**: il legame fra n° di poli instabili della $G_a(s)$ e n° di poli instabili della $W_y(s)$ è dato dal numero di giri che il vettore $(1 + G_a(j\omega))$ compie attorno all'origine del piano complesso al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$ (più semplicemente il **numero di giri che $G_a(j\omega)$ compie attorno al punto $(-1, 0)$** , che possiamo valutare dal DdN di $G_a(j\omega)$). Quindi il **CRITERIO DI NYQUIST** dice:

$$N = n_{i,c} - n_{i,a} \quad \text{con} \begin{cases} n_{i,a} = \text{n° di poli instabili } [Re > 0] \text{ di } G_a(s) \text{ [f. d. t d'anello]} \\ n_{i,c} = \text{n° di poli instabili } [Re > 0] \text{ di } W(s) \text{ [f. d. t in catena chiusa]} \\ N = \text{n° di giri compiuti in senso orario da } G_a(j\omega) \text{ attorno al punto } (-1,0) \end{cases}$$

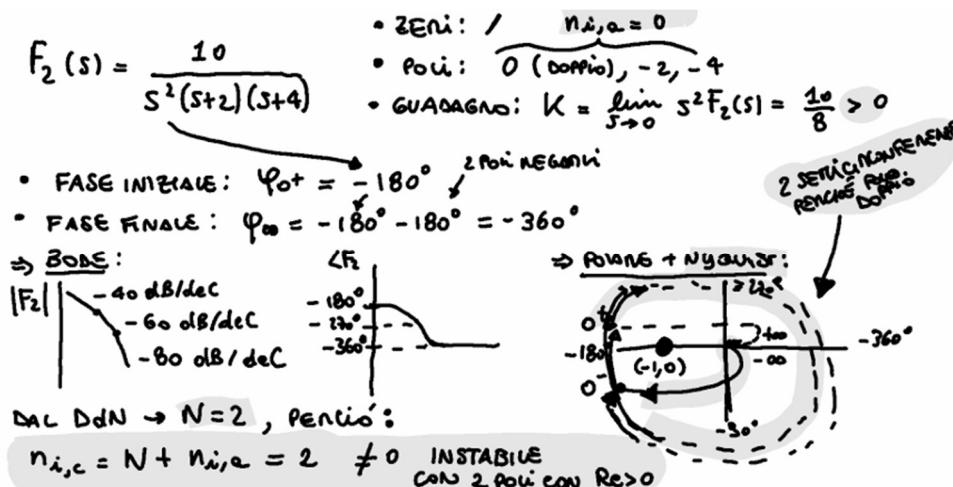
⚠ Nota che $n_{i,a}$ e $n_{i,c}$ mai negativi; inoltre, i giri antiorari di $G_a(j\omega)$ sono da contarsi come negativi!

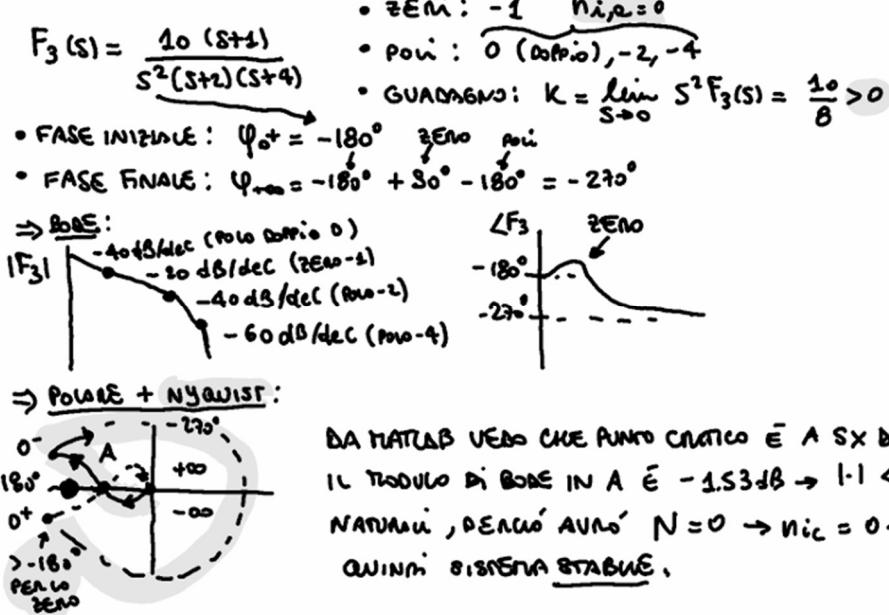
Dal criterio di Nyquist, la **condizione necessaria e sufficiente per l'ASINTOTICA STABILITÀ del sistema in catena chiusa** è $n_{i,c} = N + n_{i,a} = 0 \rightarrow N = -n_{i,a}$ (questo sempre se N è ben definito, ovvero se il DdN non passa per il punto $(-1,0)$ [cioè che $|G_a(j\omega)| = 1 \wedge \angle G(j\omega) = -180$ contemporaneamente], che chiamiamo **PUNTO CRITICO DI NYQUIST**) [quindi instabile se $n_{i,c} > 0$].

Per trovare il numero di giri N ho **2 metodi**:

- Seguo il percorso orario del DdN partendo da un punto a mia scelta e tornandoci, contando quanti giri percorro (giro = ciclo chiuso);
 - Traccio una semiretta qualsiasi dal punto critico $(-1,0)$ e vedo quante intersezioni ho con il DdN (tenendo ovviamente conto del verso che il DdN ha nel punto in cui la semiretta intercetta il percorso).

Per capire dove si trova il punto critico rispetto al diagramma di Nyquist, posso capire quanto vale il modulo (in unità naturali e non dB) del diagramma di bode nell'intersezione A. Vediamo 2 ESEMPI:



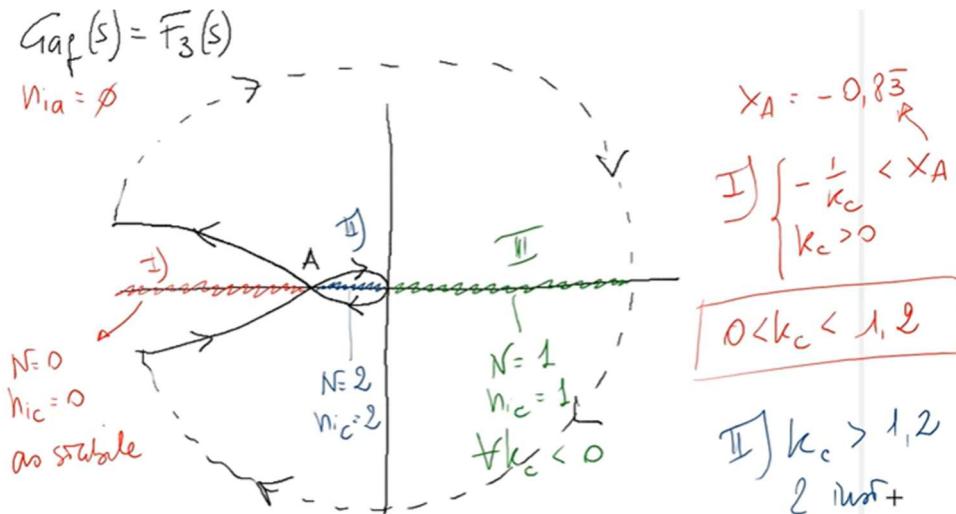


DA MATLAB VEDO CHE PUNTO CRITICO È A SX DI A PERCHÉ IL MODULO DI BODE IN A È $-1.53 \text{ dB} \rightarrow 1.1 < 1$ IN UNITÀ NATURALI, PERCIÒ AVRÀ $N = 0 \rightarrow n_{i,c} = 0 + 0 = 0$ QUINDI SISTEMA STABILE.

Ora vogliamo estendere il criterio di Nyquist a funzioni d'anello $G_a(s)$ con **GUADAGNO VARIABILE** (il problema è che se il guadagno è variabile, posso avere il caso in cui il guadagno sia tale da passare per il punto critico):

$$G_a(s) = K_c G_{a,f}(s) \rightarrow \frac{D_w(s)}{D_a(s)} = 1 + K_c G_{a,f}(s)$$

Quindi $N \neq$ numero di giri che $G_a(j\omega)$ compie attorno al punto critico $(-1,0)$, ma qui $N = \text{n}^{\circ}$ giri che $G_{a,f}(j\omega)$ compie attorno al punto $(-\frac{1}{K_c}, 0)$ [quindi il punto critico si sposta al variare di K_c]. In questo modo ho esteso Nyquist per guadagni variabili, studiando come si comporta rispetto all'intersezione A dovuta ad un eventuale zero. Infatti riprendendo l'**ESEMPIO** di prima avrò:



Vedo che nella regione rossa (prima dell'intersezione con A) ho asintotica stabilità ($n_{i,c} = 0$), mentre nelle altre 2 regioni ho instabilità ($n_{i,c} \neq 0$). Studio anche numericamente il caso, prendendo il valore di A da matlab con bode o nyquist.

Ora vogliamo applicare Nyquist a sistemi con **RETROAZIONE POSITIVA**. La f.d.t in catena chiusa in tal caso sarà:

$$W_y(s) = \frac{G_a(s)}{1 - G_a(s)} = \frac{N_a(s)}{D_a(s) - N_a(s)} = \frac{N_w(s)}{D_w(s)} \rightarrow \frac{D_w(s)}{D_a(s)} = 1 - G_a(s)$$

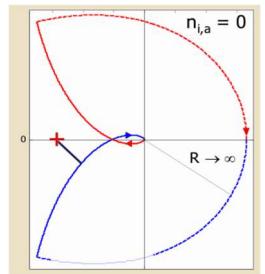
Qui a differenza della retroazione negativa, il **punto critico intorno a cui studiare i giri N del DdN sarà (+1, 0)** [è ovvio che se ho guadagno variabile con retroazione positiva avrò come punto critico $(-\frac{1}{K_c}, 0)$; da qui si vede che se mi chiedessero l'analisi della stabilità di un sistema con retroazione negativa e poi mi chiedessero l'analisi dello stesso sistema, ma con retroazione positiva, allora basterebbe cambiare il segno di K_c per cambiare il segno della retroazione].

4) MARGINI DI STABILITÀ

Il criterio di Nyquist ci permette di valutare l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa $W(s)$, a partire dalla funzione d'anello $G_a(s)$; questo però avviene nell'ipotesi che il sistema sia in **condizioni nominali**, ovvero che la conoscenza di $G_a(s)$ sia esatta: nella realtà ci saranno sempre delle **discrepanze** fra il comportamento del sistema vero e il modello usato per rappresentarlo, che porteranno a **variazioni della funzione d'anello $G_a(s)$** . Noi però dobbiamo garantire l'asintotica stabilità anche se il sistema subisce variazioni del suo modello nominale (**STABILITÀ ROBUSTA**); per valutare il **grado di robustezza**, useremo degli **indicatori di robustezza** (quantificare l'ampiezza delle massime perturbazioni sopportabili).

Tramite Nyquist abbiamo un modo geometrico per caratterizzare il grado di robustezza della stabilità di un sistema, ovvero la **DISTANZA DEL DIAGRAMMA POLARE di $G_a(j\omega)$ DAL PUNTO CRITICO DI NYQUIST** (distanza minima per far sì che il diagramma non scavalchi il punto critico, rendendo il sistema instabile).

Questo indicatore però non è di facile lettura; useremo infatti **2 indicatori**:



- **MARGINE DI GUADAGNO** → dato $G_a(j\omega) = K_c G_{a,f}(j\omega)$ con $G_{a,f}(j\omega)$ a guadagno positivo, priva di poli con $Re > 0$ (quindi $n_{i,a} = 0$), e sia il suo diagramma polare tale da attraversare 1 volta il semiasse reale negativo in 1 punto A alla destra del punto critico. Per $K_c = 1$, il sistema in catena chiusa è asintoticamente stabile ($N = 0 \rightarrow n_{i,c} = 0$). Aumentando $K_c = m_G = \frac{1}{|x_A|}$ (**MARGINE DI GUADAGNO**), mi porto ad attraversare il punto critico; quindi m_G è il **fattore moltiplicativo massimo per preservare l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa**. Posso anche leggerlo dai **DdB** in dB prendendo la pulsazione ω_π in cui viene raggiunto il punto A (alla quale abbiamo già visto avere fase -180°), ovvero $m_{G,dB} = -|G_a(j\omega_\pi)|_{dB}$.
- **MARGINE DI FASE** → dato $G_a(j\omega)$ a guadagno positivo, priva di poli con $Re > 0$ (quindi $n_{i,a} = 0$), e sia il suo diagramma polare tale da attraversare 1 volta la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine, in un punto C . Supponiamo che per ω_c tale che $|G_a(j\omega_c)| = 1$ si ha $\angle G_a(j\omega_c) > -180^\circ$ (ovvero a destra del punto critico, cioè inizialmente asintoticamente stabile). Diminuendo $\angle G_a(j\omega_c) = -180^\circ$, arriviamo a perdere la stabilità in quanto $m_\phi = 180^\circ + \angle G_a(j\omega_c)$ (**MARGINE DI FASE**) = 0, ovvero la **massima perdita di fase sopportabile in ω_c senza perdere l'asintotica stabilità in catena chiusa**. La pulsazione ω_c è la **pulsazione critica** (o **di cross-over**, o **di taglio**), ovvero alla quale il DdB del modulo di $G_a(j\omega)$ attraversa l'asse a 0 dB. Quindi posso leggere m_ϕ dal **DdB** della fase prendendo il valore che assume alla ω_c (che prendo dal diagramma del modulo nel punto in cui esso vale 0 dB).

Si può affermare che **se la funzione d'anello $G_a(s)$** :

- ha **guadagno positivo**;
- è a **minima rotazione di fase** (non ha singolarità con $Re > 0$)
- esiste **1 sola pulsazione ω_c per cui $|G_a(j\omega_c)| = 0$**
- esiste **1 sola pulsazione ω_c finita per cui $\angle G_a(j\omega_c) = -180^\circ$**

allora il **sistema è asintoticamente stabile in catena chiusa se e solo se i margini di guadagno e di fase sui DdB sono positivi**. In particolare, un sistema che è asintoticamente stabile in catena chiusa **per ogni valore** positivo del guadagno minore alla soglia massima m_G è detto a **STABILITÀ REGOLARE**.

Dobbiamo quindi **estendere i concetti di margini di guadagno e di fase** in modo opportuno, vedendo i casi in cui:

- **Esistono più pulsazioni per cui $\angle G_a(j\omega) = -180^\circ$** [per eventuale alternanza di poli e zeri] (ovvero **diagramma polare di $G_a(s)$ attraversa più volte l'asse reale**). Di interesse sono i sistemi a **STABILITÀ MARGINALE** (o **CONDIZIONATA**), dove si può avere instabilità sia per valori troppo elevati del guadagno sia per valori troppo piccoli [capire quale pulsazione ci interessa per avere il margine di guadagno].
- **Esistono più pulsazioni per cui $|G_a(j\omega)| = 1$** (ovvero **diagramma polare di $G_a(s)$ interseca più volte la circonferenza unitaria**). Per un sistema in cui il diagramma polare interseca più volte la circonferenza unitaria in:
 - punti tutti a fase $> -180^\circ$, il margine di fase m_ϕ deve essere letto in corrispondenza del **punto di intersezione più vicino all'asse reale**;

- punti non tutti a fase $> -180^\circ$, si potrebbe avere instabilità in catena chiusa sia per una perdita sia per un eccessivo aumento di fase: in questo caso possiamo definire 2 margini di fase (1 per perdita, 1 per aumento).
- **$G_a(s)$ è instabile** [ha almeno 1 singolarità con $Re > 0$] (ovvero, più in generale, non è a minima rotazione di fase). Qui possiamo avere sistemi a stabilità marginale (es. pendolo inverso), sistemi stabili solo per valori elevati del guadagno o per valore negativi, e sistemi con 1 o 2 margini di fase (es. pendolo); per capire bene la situazione qui è necessario usare il criterio di Nyquist.

⚠ Se non abbiamo casi critici come questi visti sopra, possiamo usare il comando **margin** applicato alla f.d.t d'anello per leggere i margini di guadagno e fase sui diagrammi di Bode!

Si possono ricavare indicatori di robustezza della stabilità “indiretti” partendo dalla presenza di un **PICCO DI RISONANZA M_r** di ampiezza “significativa” nella f.d.t in catena chiusa, ricordando:

$$M_r = \frac{W_r}{|W(0)|} \text{ con } W_r = \max\{|W(j\omega)|\} = \text{modulo della fdt in catena chiusa alla pulsazione di risonanza}$$

Se W presenta una risonanza evidente ($W_r > |W(0)|$) ci sono almeno 2 poli complessi coniugati a smorzamento “piccolo”; più grande è la risonanza, più piccolo è lo smorzamento, più i poli sono vicini all’asse immaginario (cioè al semipiano destro, cioè al passaggio all’instabilità). Viceversa la mia **stabilità sarà robusta se la risonanza M_r sarà piccola (qualche dB)** [per questo margine indiretto della stabilità]. Per **valutare M_r** possiamo anche ricordare che:

$$M_r = \max\{|W_y|\} = \max\left\{\left|\frac{G_a}{1+G_a}\right|\right\}$$

Definiamo quindi **LUOGHI A MODULO COSTANTE** della f.d.t in catena chiusa le **circonferenze** sul piano complesso di raggio $\rho = \frac{M_r}{|1-M_r^2|}$ e centro $(R_0, 0)$ tale che $R_0 = \frac{M_r^2}{1-M_r^2}$. Più grande M_r , più la circonferenza tende a collassare in un punto; viceversa più piccolo M_r , più la circonferenza è ampia e si ha **ROBUSTEZZA DELLA STABILITÀ**, ovvero si deve avere la condizione:

$$M_r \leq M_{r,lim}$$

Cioè il DdN deve essere esterno alla circonferenza corrispondente a $M_{r,lim}$.

5) RISPOSTA TRANSITORIA e IN FREQUENZA

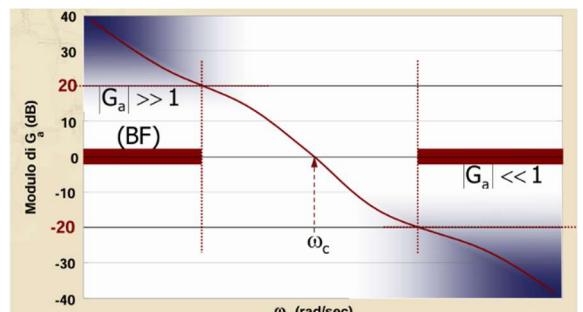
Partiamo analizzando la relazione tra W (o W_y , f.d.t catena chiusa) e G_a (f.d.t catena aperta); come abbiamo già visto più volte:

$$W_y = \frac{N_w}{D_w} = \frac{N_a}{D_a + N_a} = \frac{G_a}{1 + G_a}$$

Allora si vede che:

- $m_w = m_a$ (numero di zeri di catena chiusa = numero di zeri di catena aperta);
- Zeri catena chiusa = zeri catena aperta;
- $n_w = n_a$ (numero di poli di catena chiusa = numero di poli di catena aperta).

⚠ Prendendo $\omega_c =$ pulsazione di cross-over (quando modulo del DdB passa da positivo a negativo), allora si avranno le zone di **BF** (bassa frequenza, molto a sinistra di ω_c) e **AF** (alta frequenza, molto a destra di ω_c).



Vediamo che in **BF** (**cancellazioni zeri-poli approssimata**):

$$W_y \Big|_{BF \rightarrow |G_a| \gg 1} = \frac{N_w}{D_w} \Big|_{BF} = \frac{N_a}{D_w} \Big|_{BF} = 1 \rightarrow N_a \approx D_w \rightarrow \text{POLI CATENA CHIUSA} \approx \text{ZERI CATENA APERTA IN BF}$$

Mentre in **AF**:

$$W_y \Big|_{AF \rightarrow |G_a| \ll 1} = \frac{N_w}{D_w} \Big|_{AF} = \frac{N_a}{D_a} \Big|_{AF} = G_a \rightarrow D_a \approx D_w \rightarrow \text{POLI CATENA CHIUSA} \approx \text{POLI CATENA APERTA IN AF}$$

Nella banda $\omega \cong \omega_c$, la catena chiusa presenta in genere una **dinamica approssimativamente del 2° ordine** (questo è utile perché per un sistema del 2° ordine possiamo calcolare tutto):

$$W_{y,rif} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{con } \omega_n \text{ dato e } \zeta \in (0.3, 0.7)$$

A questa f.d.t in catena chiusa corrisponde una f.d.t in catena aperta di tipo 1:

$$G_{a,rif} = \frac{W_{y,rif}}{1 - W_{y,rif}} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

Dove i **parametri di $G_{a,rif}$** sono:

- $K_V = \frac{\omega_n}{2\zeta}$ [**guadagno stazionario di velocità**]
- $\omega_c = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}$ [**pulsazione di crossover**]
- $m_\phi = \arctan\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}\right)$ [**margine di fase**]
- $m_G = \infty$ [**margine di guadagno**]

Mentre i **parametri di $W_{y,rif}$** sono:

- $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ [**picco di risonanza**]
- $\frac{\omega_B}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} = R$ con ω_B = **banda passante** a -3dB, ovvero intervallo di frequenze in cui vale la relazione:

$$\frac{|W_{y,rif}|}{|K_r|} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sim -3dB$$

Mentre le **relazioni di $W_{y,rif}$** (\hat{s} = sovraelongazione massima, \hat{t} = tempo corrispondente ad \hat{s} , t_s = tempo di salita, t_r = tempo di salita 10%-90%, $t_{a\varepsilon}$ = tempo di assestamento a $\pm\varepsilon$):

- $\hat{s} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- $\omega_B t_r \cong 2$
- $\omega_B t_s \cong 3$
- $\omega_B \hat{t} \cong 4.5$
- $\omega_B t_{a\varepsilon} \cong -\frac{\log(\varepsilon\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta} R$
- $\frac{\omega_c}{\omega_B} \cong 0.63$
- $\frac{(1+\hat{s})}{M_r} \cong 0.9$
- $m_\phi M_r \cong 1.05$ [rad u_n] oppure $m_\phi M_r \cong 60$ [$^\circ u_n$]

⚠ Tutto ciò vale sempre se il modello di riferimento per la catena chiusa sia quello del 2° ordine con 2 poli complessi coniugati dominanti. Da notare che le specifiche sulla catena chiusa possono essere trasformate in specifiche sulla catena aperta e viceversa, mentre specifiche nel dominio del tempo possono essere trasformate in specifiche in frequenza.

6) DIAGRAMMA DI NICHOLS

Il **DIAGRAMMA DI NICHOLS** (DdNic) di una f.d.t consiste nella sua rappresentazione grafica sul piano cartesiano $\varphi[\circ] \otimes M[dB]$; pertanto i valori dell'ascissa ($\varphi[\circ]$) possono essere limitati tra -360° e 0° . In MatLab si fa con **nichols(f.d.t)** [in pratica prendo l'andamento del DdB del modulo e lo metto sulle ordinate, considerando però negli stessi punti l'andamento del DdB della fase e li metto insieme]. Dal DdNic posso leggere margine di guadagno m_G (punto in cui viene toccato l'asse verticale $[-180^\circ]$) e margine di fase m_φ (punto in cui viene toccato l'asse orizzontale $[0dB]$).

Se prendiamo i luoghi di punti a M (modulo) costante e a N (fase) costante e li tracciamo tutti insieme otteniamo la **CARTA DI NICHOLS** (comando **ngrid('new')**). Se sovrapponiamo la carta di nichols con il DdNic della f.d.t in catena aperta (o f.d.t d'anello) $G_a(j\omega)$, possiamo ricavare il modulo e la fase della f.d.t in catena chiusa $W_y(j\omega)$ per ogni ω . Quindi per soddisfare la condizione di **STABILITÀ ROBUSTA** $M_r < M_{r,lim}$, dovranno essere verificate le condizioni:

- Necessaria e sufficiente → DdNic di G_a deve essere esterno alla curva $M = M_{r,lim}$
- Necessaria (ma non sufficiente) → $m_\varphi > m_{\varphi,lim}$
- Necessaria (ma non sufficiente) → $m_G > m_{G,lim}$

Con relazioni (valide per $0dB < M_{r,lim} < 6dB$):

$$\begin{aligned}(m_{\varphi,lim})^\circ &= 60^\circ - 5(M_{r,lim})dB \\ (m_{G,lim})dB &= 6 - 0.4(M_{r,lim})dB\end{aligned}$$

7) INSEGUIMENTO DI SEGNALI SINUSOIDALI

Avevamo lasciato indietro l'**errore di riferimento finale legato ad un RIFERIMENTO SINUSOIDALE**; ricordiamo che la risposta in regime permanente di un sistema asintoticamente stabile ad un ingresso sinusoidale è descritta dalla risposta in frequenza. Prendendo un riferimento sinusoidale $r(t) = \sin(\omega_0 t)$, avremo f.d.t d'errore:

$$W_e(s) = \frac{e(s)}{r(s)} = \frac{K_r}{1 + G_a(s)}$$

Con **ERRORE DI INSEGUIMENTO IN REGIME PERMANENTE** dato da:

$$e_p(t) = E \sin(\omega_0 t + \varphi_e) \quad \text{con} \quad \begin{cases} E = |W_e(j\omega_0)| = \left| \frac{K_r}{1 + G_a(j\omega_0)} \right| = \text{errore massimo in modulo} \\ \varphi_e = \arg(W_e(j\omega_0)) \end{cases}$$

⚠ Le **SPECIFICHE DI PRECISIONE** relative all'errore di inseguimento in regime permanente e_p a segnali di riferimento sinusoidali impongono vincoli sull'andamento in frequenza della f.d.t d'anello, ovvero:

$$|e_p| \leq e_{max} \rightarrow \left| \frac{K_r}{1 + G_a(j\omega_0)} \right| \leq e_{max} \rightarrow |G_a(j\omega_0)| \geq G_{min}$$

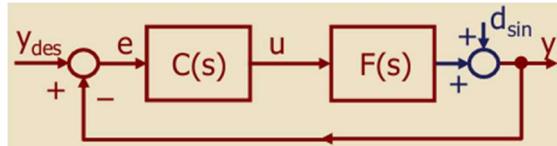
Quindi il sistema in catena chiusa potrà inseguire con buona precisione solo segnali sinusoidali di bassa frequenza, perché la pulsazione ω_0 deve essere piccola rispetto alla ω_c in cui $|G_a(j\omega_c)| = 1$.

Ora vediamo l'effetto sull'uscita in regime permanente di un **DISTURBO SINUSOIDALE** $d_{sin}(t) = D_s \sin(\omega_d t)$:

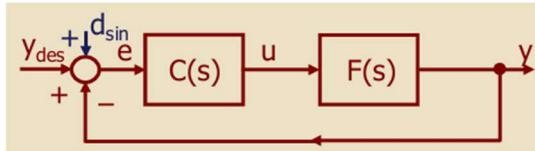
$$y_{p,sin}(t) = Y_{d,p} \sin(\omega_d t + \varphi_d) \quad \text{con} \quad \begin{cases} Y_{d,p} = D_s |W_{d,sin}(j\omega_d)| = \text{effetto massimo in modulo del disturbo} \\ \varphi_d = \arg(W_{d,sin}(j\omega_d)) \end{cases}$$

Alcuni **casi di interesse** sono:

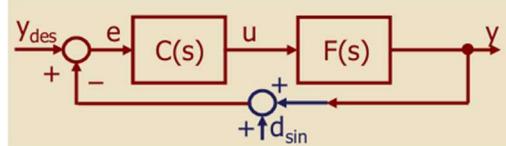
- Disturbo sinusoidale sull'**uscita** $\rightarrow W_{d,sin}(s) = W_{dy}(s) = \frac{1}{1+G_a(s)}$ \rightarrow ben attenuati disturbi di bassa frequenza rispetto alla ω_c ;



- Disturbo sinusoidale sul **riferimento** $\rightarrow W_{d,sin}(s) = W_y(s) = \frac{G_a(s)}{1+G_a(s)}$ \rightarrow ben attenuati disturbi di alta frequenza rispetto alla ω_c ;



- Disturbo sinusoidale sulla **retroazione** $\rightarrow W_{d,sin}(s) = -W_y(s) = -\frac{G_a(s)}{1+G_a(s)}$ \rightarrow ben attenuati disturbi di alta frequenza rispetto alla ω_c .

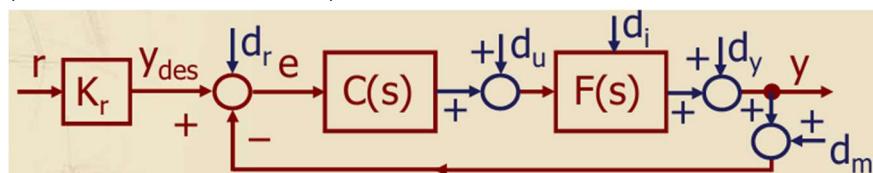


Cosa implica tutto ciò sul PROGETTO DEL CONTROLLORE? Vedendo i casi scritti sopra, **riassumiamo** con:

- **DISTURBO SINUSOIDALE SU USCITA** \rightarrow impone che $\omega_c \gg$ pulsazione del disturbo e che $|G_a(j\omega_d)|$ sia grande per avere attenuazione richiesta;
- **DISTURBO SINUSOIDALE SU RIFERIMENTO o SU RETROAZIONE** \rightarrow impone che $\omega_c \ll$ pulsazione del disturbo e che $|G_a(j\omega_d)|$ sia piccola per avere attenuazione richiesta.

8) ANALISI DELLE SPECIFICHE DEL CONTROLLORE

Dato il consueto schema di controllo, **PROGETTARE IL CONTROLLORE $C(s)$** affinché il sistema in catena chiusa soddisfi **SPECIFICHE** sulla **risposta nel tempo a riferimenti assegnati** (in regime permanente e transitorio), sulla **risposta in frequenza**, sull'**attività sul comando**, sulla **robustezza** e sull'**attenuazione di disturbi**.



La funzione di trasferimento $C(s)$ del controllore da progettare può essere messa nella seguente forma generale:

$$C(s) = \frac{K_c}{s^h} C'(s) \quad \text{con} \quad \begin{cases} K_c = \text{guadagno stazionario del controllore} \\ h = \text{numero di poli in } s = 0 \text{ di } C(s) \\ C'(s) = \text{funzione di trasferimento di tipo zero con guadagno stazionario unitario} \end{cases}$$

Il numero di poli minimo nell'origine (h) [1° passo] e il modulo minimo del guadagno stazionario (K_c) [2° passo] del controllore vanno determinati in modo che, una volta garantita l'asintotica stabilità in catena chiusa, siano soddisfatte le **SPECIFICHE STATICHE**, ovvero:

- sull'**errore di inseguimento in regime permanente a segnali di riferimento polinomiali**;
- sulla **reiezione o attenuazione di disturbi polinomiali in regime permanente**.

⚠ Non è consigliato in generale inserire poli in $s = 0$ in $C(s)$ se non necessario per le specifiche statiche perché l'inserimento di un polo in $s = 0$ porta alla perdita di 90° per $G_a(j\omega)$ a qualunque ω .

Il **segno di K_c** viene scelto in modo da assicurare la **possibilità di stabilizzare il sistema in catena chiusa** mediante **$C'(s)$** [tenendo conto dell'eventuale precedente inserimento di polo in $s = 0$ nel controllore]; la **parte dinamica del controllore**, ovvero **$C'(s)$** , viene assegnata in modo da garantire l'**asintotica stabilità del sistema in catena**.

chiusa con buona robustezza, e da soddisfare tutte le **SPECIFICHE DINAMICHE**. La possibilità di stabilizzare il sistema in catena chiusa mediante il **segno di K_c viene studiata con il criterio di Nyquist con K_c** variabile alla funzione d'anello definita da $F(s)$ [sistema da controllare] e dagli eventuali poli in $s = 0$ già inseriti dalle specifiche statiche in $C(s)$ (**solo se $F(s)/s^h$ da origine sicuramente ad un sistema a stabilità regolare**, posso direttamente scegliere $K_c > 0$, senza usare Nyquist). Inoltre, dato che manca ancora la parte dinamica del controllore da aggiungere ($C'(s)$), non è necessario che il sistema in catena chiusa ottenuto dalle sole specifiche statiche sia già stabile (in generale, dato che manca solo la parte dinamica, dobbiamo prendere nella parte statica il valore minimo di $|K_c|$ per soddisfare le specifiche statiche [comprendendo anche un "fattore di sicurezza"] tale che questo possa essere aumentato nella parte dinamica, ma non ridotto).

⚠ Noi in questo corso **considereremo sempre $C(s)$ internamente stabile!**

Nella pratica, le **specifiche dinamiche** del sistema in catena chiusa sono:

- sulla **risposta nel tempo a segnali di riferimento a gradino** → generano i **vincoli sulla risposta in frequenza** (ovvero il prossimo step) del sistema in catena chiusa. Le specifiche sono:
 - o sulla **sovraelongazione massima** \hat{s} che genera un vincolo sul **picco di risonanza M_r** ($1 + \hat{s} \geq 0.9M_r$);
 - o sul **tempo di salita t_s** (non t_r , qua si intende il tempo necessario per l'uscita per raggiungere la 1^a volta il valore di regime permanente) che genera un vincolo sulla **banda passante ω_B** ($\omega_B = 3/t_{s,des}$) [se usiamo invece t_r , avremo $\omega_B = 2/t_{r,des}$].
- sulla **risposta in frequenza** → generano **vincoli sulla funzione d'anello**. Le specifiche sono:
 - o sul **picco di risonanza M_r** che genera un vincolo sul **margine di fase m_φ** (ovvero $m_{\varphi,min} = 60^\circ - 5(M_{r,max})_{dB}$; $m_{\varphi,min}$ esatto è ricavabile dalla **Carta di Nichols**);
 - o sulla **banda passante ω_B** che genera un vincolo sulla **pulsazione di taglio ω_c** ($\omega_c \cong 0.63 \omega_{B,des}$ perché più generalmente avremo $\omega_c < \omega_B < 2\omega_c$).
- sull'**errore massimo di inseguimento in regime permanente di segnali sinusoidali** → una specifica del tipo $E = \left| \frac{K_r}{1+G_a(j\omega_0)} \right| \leq E_{max}$ può essere soddisfatta solo se $\omega_0 \ll \omega_c$ (noi all'esame non avremo questa specifica);
- sull'**attenuazione di disturbi sinusoidali** → solo se $|G_a(j\omega_c)|$ sufficientemente grande o piccolo (noi all'esame non avremo questa specifica).

9) RETI DI COMPENSAZIONE

Parliamo della **SINTESI PER TENTATIVI** (o **LOOP-SHAPING**, in quanto diamo alla funzione d'anello [loop] la forma che vogliamo [shaping] tramite correzioni/tentativi successivi), con l'obiettivo di progettare $C(s)$ tale che $G_a(s) = C(s)F(s)$ [dal solito schema, vedi sopra] rispetti le specifiche richieste (statiche e dinamiche di vari tipi, vedi sopra). Ricordiamo che $C(s) = \frac{K_c}{s^h} C'(s)$: una volta che determino il blocco della **parte statica** del controllore $\frac{K_c}{s^h}$, devo costruire la **parte dinamica $C'(s)$** tale che $\omega_c \cong \omega_{c,des}$ e $m_\varphi \geq m_{\varphi,min}$.

Si definisce **FUNZIONE D'ANELLO DI PARTENZA** $G_{a1}(s) = \frac{K_c}{s^h} F(s)$; si valutano $\arg(G_{a1}(j\omega_{c,des}))$ [FASE] e $|G_{a1}(j\omega_{c,des})|$ [MODULO], e si calcolano:

- la variazione di fase **$\Delta\varphi$ per ottenere $m_\varphi > m_{\varphi,min}$ alla pulsazione $\omega_{c,des}$** (solitamente il sistema viene stabilizzato mediante un anticipo di fase in $\omega_{c,des}$);
- la variazione di modulo **Δm (o Δm_{dB}) per portare ω_c in $\omega_{c,des}$** , ovvero $\Delta m_{dB} = -|G_{a1}(j\omega_{c,des})|_{dB}$.

La risultante $G_a(s) = C'(s)G_{a1}(s)$ si ottiene costruendo $C'(s)$ come **PRODOTTO DI RETI DI COMPENSAZIONE ELEMENTARI**.

⚠ Dopo aver determinato $C(s)$ tale da soddisfare i vincoli su $G_a(s)$, bisogna comunque procedere ad una **completa verifica delle specifiche su $W(s)$** [infatti il **soddisfacimento dei vincoli individuati su $G_a(s)$ non garantisce il soddisfacimento delle specifiche sul sistema in catena chiusa**].

A seconda delle modifiche che la rete di compensazione porta all'andamento della funzione d'anello, distinguiamo:

- **RETI ANTICIPATICI** (o **DERIVATIVE**) → ha f.d.t del tipo:

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau_d s}{1 + \frac{\tau_d}{m_d} s} \quad \text{con } \tau_d > 0, m_d > 1; \text{ la rete ha} \rightarrow \begin{cases} 1 \text{ zero (alla pulsazione normalizzata} = 1): s = -\frac{1}{\tau_d} \\ 1 \text{ polo (alla pulsazione normalizzata} = m_d): s = -\frac{m_d}{\tau_d} \end{cases}$$

Se m_d aumenta, la **distanza zero-polo aumenta** (quindi la fase cresce di più prima di subire l'effetto del polo); il ruolo della rete anticipatrice è proprio quello di un aumento (anticipo) di fase fra la pulsazione dello zero e quella del polo, con l'entità di questo aumento che cresce al crescere di m_d [non si usano reti con m_d troppo alto (> 16)]; se vogliamo aumentare molto la fase conviene invece usare più reti al posto di 1 rete con m_d troppo elevato]. Quindi la rete anticipatrice ci permette di **recuperare fase in corrispondenza della pulsazione di taglio desiderata $\omega_{c,des}$** per ottenere il **margine di fase richiesto ($m_\phi > m_{\phi,min}$)**; inevitabilmente però, l'inserimento della rete anticipatrice in $C(s)$ **introduce anche un aumento di modulo** (aumenta il valore di ω_c). **Come si usa?**

- Scelgo m_d in modo da garantire il recupero di fase necessario, sfruttando il **massimo recupero di fase consentito dalla rete**:

$$\varphi_{max} = \arcsin\left(\frac{m_d - 1}{m_d + 1}\right) \rightarrow m_d = \frac{1 + \sin(\varphi_{max})}{1 - \sin(\varphi_{max})}$$

- Trovo τ_d dai DdB normalizzati delle reti, imponendo che φ_{max} sia raggiunto proprio in $\omega = \omega_{c,des}$:

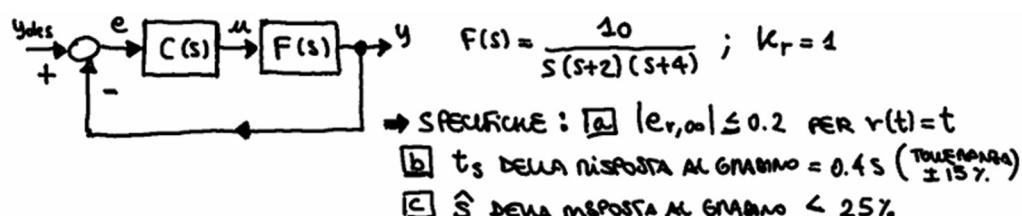
$$\omega_{c,des} \tau_d = \sqrt{m_d}$$

- Se il recupero di fase $\Delta\varphi < 60^\circ$, possiamo usare **1 sola rete con $\varphi_{max} = \Delta\varphi$** . Se invece $\Delta\varphi > 60^\circ$ si usano **2 o più reti** anticipatrici $R_{d,i}(s)$ scelte in modo che $\Delta\varphi = \sum_i \varphi_{max,i}$
- L'inserimento di ciascuna rete determina un **aumento di modulo** in $\omega = \omega_{c,des}$, leggibile dal DdB normalizzato del modulo in corrispondenza della pulsazione $\omega \tau_d = \sqrt{m_d}$ (ovvero l'ascissa di φ_{max}), con valore:

$$\left| R_d \left(j \frac{\sqrt{m_d}}{\tau_d} \right) \right|_{dB}$$

⚠ L'aumento di modulo introdotto **non deve superare notevolmente Δm_{dB}** , ma non deve essere **nemmeno essere inferiore a Δm_{dB}** : se lo fosse, basta aumentare il guadagno stazionario K_c , in modo da ottenere $|G_a(j\omega)| = 1 = 0 \text{ dB}$ per $\omega = \omega_{c,des}$.

ESERCIZIO:



CONSIDERARO SPECIFICA STANCA:

$$|e_{r,00}| \leq 0.2 \text{ PER } r(t) = t$$

• 1° PASSO: $b_r = (\text{n}^{\circ} \text{POLE IN } s=0) = 0$ PENSANDO IL SISTEMA È DI TIPO 1 E IL REFERIMENTO È DI TIPO 1, QUINDI NON SERVE INTRODURRE POLE IN $s=0$

• 2° PASSO: ESSENDO $K_F = 1.25$, LA SPECIFICA IMPLICA $|e_{r,00}| = \left| \frac{K_r}{K_c K_F} \right| \leq 0.2 \Rightarrow |K_c| \geq 4$

⇒ K_c SEGNA POSITIVO ($K_c > 0$) PER GARANTIRE LA STABILITÀ $\Rightarrow K_G = K_c$

CONSIDERARO SPECIFICHE DINAMICHE ($t_s = 0.4 \text{ s} \rightarrow \pm 15\% \Rightarrow 0.34 \leq t_s \leq 0.46$)

$$\omega_B = \frac{3}{t_s} = \frac{3}{0.4} = 7.5 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_{c,des} = 0.63 \cdot \omega_B = 4.7 \text{ rad/s}$$

$$\boxed{C} M_r \leq \frac{1 + \hat{s}}{0.9}^{0.25} = 1.39 = 2.85 \text{ dB} \Rightarrow m_{\varphi, min} = 60^\circ - 5(m_{\varphi, max})_{dB} \approx 44^\circ$$

$$\Rightarrow C(s) = K_c C'(s) \text{ con } K_c = 4 \Rightarrow \text{FUNZIONE D'ANELLO: } G_{a,s}(s) = K_c \cdot F(s) = \frac{40}{s(s+2)(s+4)}$$

→ DAL DdB DI $G_a(s)$ SU MATLAB VEDO CHE A $\omega_{c,des} = 4.7$ VORREI AVERNE UNA ω_c (CROSSOVER); NEL PUNTO CON $\omega_{c,des} = 4.7$, TROVO $\Delta\varphi = 70^\circ$ (DA -206° A $-180^\circ = 26^\circ + 44^\circ$) E $\Delta M_{dB} = 11.4$ dB (DA -11.4 dB A 0 dB [CROSSOVER]).
DATO CHE $\Delta\varphi = 70^\circ > 60^\circ$ TU SERVIRANNO AVERE 2 RETI ANTICIPATRICI DA 35° PIÙ RECUPERO CIASCUNA; DALE CARTE DI NICHOLS VEDO CHE AVERE UN CONSEGUENTE AUMENTO DI MODULO DI 6 dB CIASCUNA (QUINDI 12 dB) [POSso VEDERE CIÒ ANCHE DALLA TAB CON "bode((1+s)/(1+s/md))", OTENENDO LO STESSO MISURATO DELLE CARTE DI NICHOLS]. QUINDI PREndo 2 RETI ANTICIPATRICI CON $m_d = 4$: CLAScUNA CONSENTE UN RECUPERO DI CIRCA 36.9° NEL SOTTRACCIONE ($\omega\tau_d = 2$) DAE AVERE UN AUMENTO DEL MODULO DI CIRCA 6dB. QUINDI:

$$\omega_{c,des}\tau_d = 2 \rightarrow \tau_d = \frac{2}{\omega_{c,des}} = \frac{2}{4.7} = 0.425 \Rightarrow R_d(s) = \frac{1+0.425s}{1+\frac{0.425s}{4}}$$

$$\Rightarrow C'(s) = R_d^2(s) = \left(\frac{1+0.425s}{1+\frac{0.425s}{4}} \right)^2 \Rightarrow \text{CONTINUAZIONE: } C(s) = K_c C'(s) = 4 \cdot R_d^2(s) \text{ RISULTANTE}$$

INFINE SI VERIFICA IL DISPETTO DEI NECESSARI OPERATORI SU ω_c E M_{dB} SUL DdB DI $G_a(s) = C(s)F(s)$ [DA MATLAB CON "margin(Ga)" TROVO M_F , M_{dB} E LA ω_c , PRESA DAL M_{dB}]; COME ULTERIA COSA DETERMINA IL SISTEMA IN CATENA CHIUSA $V(s)$ PER VERIFICARE CHE TUTTE LE SPECIFICHE INIZIALI SIANO ANCHE QUI SODDISFAZI (SE SPECIFICHE STATICHE NON SODDISFARE → ERRORE!!!; SE SPECIFICHE DINAMICHE NON SODDISFARE → TRAFCIO $C'(s)$).

⚠ Per contenere l'aumento di modulo, si può usare anche una strategia alternativa, ovvero scegliere un valore di m_d più elevato del minimo necessario al recupero di fase richiesto, in modo da introdurre il $\Delta\varphi$ in un punto di ascissa $\omega\tau_d = x_d <$ dell'ascissa del massimo recupero di fase. Imponendo $\omega_{c,des}\tau_d = x_d$, trovo τ_d . Questo però ha come conseguenza un aumento dell'attività sul comando.

- **RETI ATTENUATRICI** (o INTEGRATIVE) → ha f.d.t del tipo:

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i}s}{1 + \tau_i s} \quad \text{con } \tau_i > 0, m_i > 1; \text{ la rete ha} \rightarrow \begin{cases} 1 \text{ zero (alla pulsazione normalizzata } = m_i): s = -\frac{m_i}{\tau_i} \\ 1 \text{ polo (alla pulsazione normalizzata } = 1): s = -\frac{1}{\tau_i} \end{cases}$$

Il ruolo della rete attenuatrice è proprio quello di un attenuazione del modulo di entità massima per pulsazioni superiori a quella dello zero, con tale attenuazione massima pari al valore di m_i :

$$|R_i(j\infty)|_{dB} = -|m_i|_{dB}$$

Se m_i molto elevato (tendente a ∞), il comportamento della rete attenuatrice è quello di un **polo**.

Quindi la rete attenuatrice ci permette di **ridurre il modulo della f.d.t d'anello per portare la pulsazione di taglio nella posizione desiderata $\omega_{c,des}$, senza ridurre K_c** (preservando le specifiche statiche); inevitabilmente però, l'inserimento della rete attenuatrice in $C(s)$ introduce anche un perdita di fase massima nell'intervallo tra la pulsazione del polo e dello zero (che si annulla per pulsazioni $> m_i/\tau_i$).

Come si usa?

- Scelgo m_i pari all'attenuazione di modulo necessaria per imporre la pulsazione di taglio desiderata $\omega_{c,des}$ su $G'_a(s)$ [f.d.t d'anello prima dell'inserimento della rete attenuatrice]:
 $m_i = |G'_a(j\omega_{c,des})| > 1$ (ovvero > 0 dB perché bisogna attenuare G'_a , quindi per forza > 0 dB)
- Trovo τ_d dai DdB normalizzati delle reti, prendendo da essi un punto di ascissa x_i in cui si abbia già l'attenuazione richiesta con una perdita di fase "accettabile" (ovvero che m_{φ} soddisfi ancora le specifiche dinamiche):
 $\omega_{c,des}\tau_i = x_i$
- Bisogna contenere quanto possibile il valore di x_i per non fare aumentare τ_i e quindi non fare aumentare il tempo di assestamento, facendo nascere un polo di BF lento.

- **RETI INTEGRO-DERIVATIVE** (o **LEAD-LAG**, unione dei 2 tipi di reti precedenti) → ha f.d.t del 2° ordine data dal prodotto di una rete **attenuatrice (integrativa)** e una rete **anticipatrice (derivativa)**:

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s} \frac{1 + \tau_d s}{1 + \frac{\tau_d}{m_d} s} \quad \text{con } \tau_i, \tau_d > 0, m_i, m_d > 1$$

Il ruolo della rete integro-derivativa è quello di un introdurre contemporaneamente un recupero di fase e un'attenuazione del modulo (**usata se in $\omega_{c,des}$ si ha contemporaneamente fase insufficiente a garantire il margine di fase richiesto e modulo maggiore di 1 [ovvero 0 dB]**). Queste reti sono dette "a sella" per il loro caratteristico andamento a sella del modulo.

Come si usa?

- Si progetta **prima la rete anticipatrice (derivativa)** in modo da garantire in $\omega_{c,des}$ un recupero di fase maggiore (in quanto strettamente necessario, perché la rete attenuatrice genererà una perdita di fase e si toglierà dalla fase in eccesso). Inoltre, se il modulo della f.d.t d'anello in $\omega_{c,des}$ è $\gg 1$ (ovvero $\gg 0$ dB), bisogna fare in modo che la rete anticipatrice non generi un eccessivo aumento di modulo, evitando così di usare poi una rete attenuatrice con m_i troppo alto.
⚠ Se il recupero di fase richiesto è eccessivo, si usano più reti anticipatrici (aumentando così l'ordine della rete integro-derivativa totale per ogni rete attenuatrice aggiunta).
- Si progetta **poi la rete attenuatrice (integrativa)**, tenendo conto nella scelta di m_i dell'aumento di modulo generato dalla rete derivativa precedentemente introdotta. Inoltre, la perdita di fase, sopportabile in $\omega_{c,des}$ grazie al lieve sovradimensionamento della rete derivativa, permette di fissare le singolarità della rete attenuatrice ad una pulsazione non eccessivamente bassa, così da ridurre il tempo di assestamento della risposta del sistema in catena chiusa.

Nel progetto del controllore $C(s)$, bisogna però considerare le implicazioni delle diverse tipologie di reti di compensazione sull'**attività di comando**; considerando il consueto schema di controllo con in **ingresso un gradino unitario** $y_{des} = \varepsilon(t)$, si ricava (tramite il teorema del valore iniziale):

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s u(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{C(s)}{1 + G_a(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} C(s)$$

Dove vediamo che se $C(s)$:

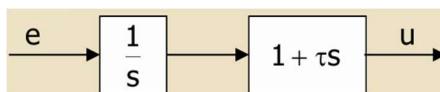
- è dato da una **funzione di guadagno K_c , senza poli nell'origine e costituita dal prodotto di reti anticipatrici e attenuatrici**, ovvero $C(s) = K_c \prod_k (R_{d,k}(s)) \prod_j (R_{i,j}(s))$, avremo attività iniziale sul comando:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = K_c \frac{\prod_k (m_{d,k})}{\prod_j (m_{i,j})}$$

- contiene **almeno 1 polo nell'origine**, avremo che il comando raggiunge il valore **massimo per $t > 0$** :

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} C(s) = 0$$

⚠ Se abbiamo un esercizio di progetto di controllore in cui, per soddisfare le specifiche statiche, siamo stati costretti ad **aggiungere 1 polo nell'origine** ($h = 1$, passando quindi ad una catena aperta di tipo 1), allora, **se ci viene richiesto anche un buon anticipo (recupero) di fase, conviene aggiungere anche uno zero reale** (che da solo non si può aggiungere in quanto non fisicamente realizzabile, ma messo insieme al polo nello stesso blocco sì):



Otteniamo quindi una f.d.t complessiva propria (fisicamente realizzabile, in quanto zero-polo) del tipo:

$$C_{PI}(s) = \frac{1 + \tau s}{s} \quad \text{con } \tau > 0$$

Che caratterizza una **RETE PROPORZIONALE-INTEGRALE (P.I.)**, in quanto possiamo scrivere l'uscita come composta da una parte **proporzionale** dell'ingresso e una parte **integrale**:

$$u(s) = \tau e(s) + \frac{1}{s} e(s)$$

In questa soluzione devo determinare il valore di τ (ovvero lo zero), partendo dall'entità dell'anticipo di fase che si vuole ottenere in $\omega_{c,des}$ dal fattore $(1 + \tau s)$. Lo prendo dall'**DdB della fase normalizzata** (quindi sull'ascissa non ω ma $\omega\tau$) **vedendo il valore di $\omega\tau$ (ascissa) nel recupero di fase desiderato (ordinata)**; da qui sostituisco a ω la $\omega_{c,des}$ e trovo τ . Questa si usa quindi perché è un upgrade della rete anticipatrice/derivativa (buon recupero di fase, ma non aumento troppo il modulo).

10) SENSIBILITÀ

L'obiettivo è valutare l'influenza di variazioni dei parametri delle f.d.t del sistema da controllare e del controllore stesso, sulla risposta del sistema controllato. Avevamo introdotto i margini di stabilità per valutare la robustezza della stabilità del sistema controllato rispetto a variazioni della f.d.t d'anello; ora vogliamo valutare l'influenza di variazioni dei parametri sulla fedeltà di risposta del sistema controllato.

Le **FUNZIONI DI SENSIBILITÀ** definiscono quindi la reattività del sistema alle variazioni, intesa come rapporto tra la variazione relativa della grandezza (causata dalla variazione del parametro) e variazione relativa del parametro stesso. Definiamo quindi **FUNZIONE DI SENSIBILITÀ $S_p^{W_y}$** della f.d.t in catena chiusa (W_y) rispetto ad un parametro p :

$$S_p^{W_y} = \frac{\frac{\partial W_y(s)}{W_y}}{\frac{\partial p}{p}} = \frac{\partial W_y(s)}{\partial p} \frac{p}{W_y(s)}$$

Se:

- $S_p^{W_y} \ll 1$ → risposta del sistema **non si modifica** significativamente al variare di p ;
- $S_p^{W_y} \geq 1$ → risposta del sistema **varia** significativamente al variare di p .

Partendo dalla formula sopra e inserendo come moltiplicato e diviso sia $G_a(s)$ sia $\partial G_a(s)$, noi in realtà useremo come funzione di sensibilità la formula composta dalla **SENSIBILITÀ DI W_y RISPETTO A G_a ($S_{G_a}^{W_y}$)** e dalla **SENSIBILITÀ DI G_a RISPETTO A p ($S_p^{G_a}$)**:

$$S_p^{W_y} = S_{G_a}^{W_y} \cdot S_p^{G_a} = \frac{\partial W_y(s)}{\partial G_a(s)} \frac{G_a(s)}{W_y(s)} \cdot \frac{\partial G_a(s)}{\partial p} \frac{p}{G_a(s)}$$

Di importanza maggiormente è la **$S_{G_a}^{W_y}$** (che indichiamo semplicemente con $S(s)$, ovvero SENSIBILITÀ del sistema) in quanto indica come le variazioni della f.d.t d'anello agiscono sul sistema in catena chiusa; queste variazioni, essendo nel nostro schema solito $G_a(s) = F(s)C(s)$, possono riguardare parametri sia di $C(s)$ sia di $F(s)$:

- **$C(s)$** → possiamo contenere la sensibilità del sistema in catena chiusa agendo sia su $S_p^{G_a}$ sia su $S_{G_a}^{W_y}$;
- **$F(s)$** → possiamo contenere la sensibilità del sistema in catena chiusa agendo solo su $S_{G_a}^{W_y}$.

Quindi la sensibilità del sistema avrà formula ($S(s) = S_{G_a}^{W_y} = S_{G_a}^W$ in quanto $W(s) = K_r W_y(s)$):

$$S(s) = S_{G_a}^{W_y} = \frac{\partial W_y(s)}{\partial G_a(s)} \frac{G_a(s)}{W_y(s)} = \frac{1}{1 + G_a(s)}$$

L'ANDAMENTO della funzione di sensibilità $S(j\omega) = \frac{1}{1+G_a(j\omega)}$ si può approssimare tenendo conto di alcune caratteristiche generali di $G_a(j\omega)$:

- Per inseguire almeno i **riferimenti costanti** ed annullare almeno gli effetti dei **disturbi costanti** (offset) sull'uscita, $G_a(j\omega)$ presenta solitamente **almeno 1 polo nell'origine**; quindi si ha:

$$G_a(j\omega) \rightarrow \infty \text{ per } \omega \rightarrow 0 \Rightarrow S(j\omega) \rightarrow 0 \text{ per } \omega \rightarrow 0$$

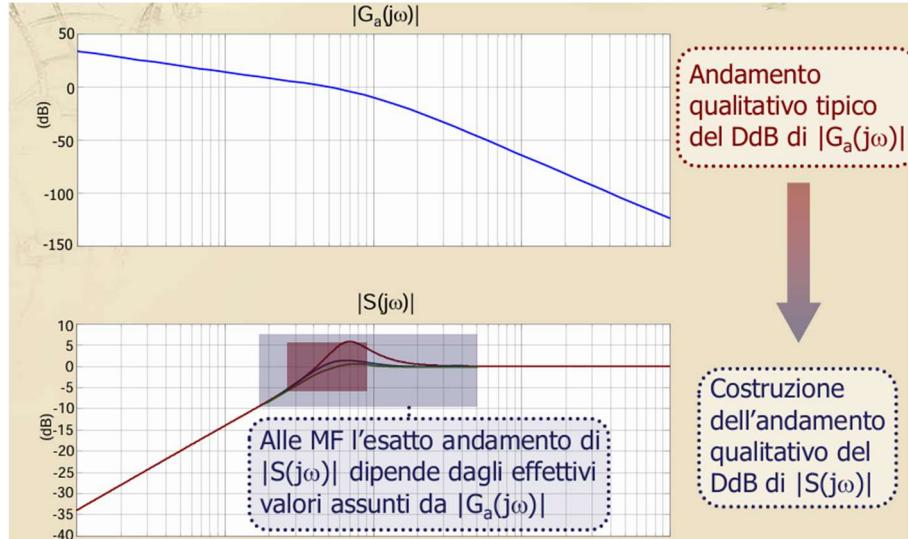
- In **BF** (bassa frequenza), per $\omega \ll \omega_c$, si ha:

$$|G_a(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow |S(j\omega)| \approx \frac{1}{|G_a(j\omega)|} \rightarrow |S(j\omega)|_{dB} \approx -|G_a(j\omega)|_{dB}$$

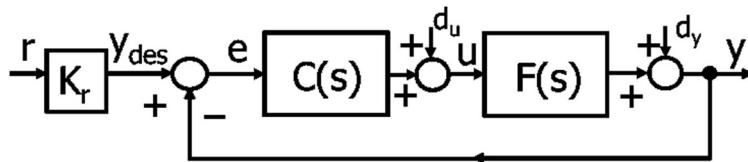
- Se si ha $|G_a(j\omega)| = 1$ per $\omega = \omega_c \Rightarrow$ per pulsazioni vicine a ω_c , $|S(j\omega)|$ ha ordine di grandezza dell'unità
- Dato che $G_a(j\omega)$ è sicuramente **propria** (fisicamente realizzabile), si ha:

$$G_a(j\omega) \rightarrow 0 \text{ per } \omega \rightarrow \infty \Rightarrow S(j\omega) \rightarrow 1 \text{ per } \omega \rightarrow \infty \rightarrow |S(j\omega)|_{dB} \approx 0$$

Sulla base di ciò vediamo che l'andamento del DdB di $|S(j\omega)|$:



Dunque per il solito schema di controllo:



Vediamo che la **SENSIBILITÀ $S(s)$** coincide con cose già viste, ovvero con:

- f.d.t d'errore** $\rightarrow S(s) = W_{e,y_{des}}(s) = \frac{e(s)}{y_{des}(s)}$; il sistema riesce ad inseguire con buona precisione i segnali sinusoidali in cui $|S(j\omega_0)|$ è molto piccolo, cioè interni alla banda passante ($\omega_0 < \omega_c < \omega_B$).
- f.d.t tra d_y e y** $\rightarrow S(s) = W_{y,d_y}(s) = \frac{y(s)}{d_y(s)}$; il sistema è poco sensibile ai disturbi su y per cui $|S(j\omega_d)|$ è molto piccolo, cioè BF rispetto alla banda passante ($\omega_d < \omega_c < \omega_B$).
- f.d.t tra d_u e u** $\rightarrow S(s) = W_{u,d_u}(s) = \frac{u(s)}{d_u(s)}$; il sistema è poco sensibile ai disturbi su u per cui $|S(j\omega_d)|$ è molto piccolo, cioè BF rispetto alla banda passante ($\omega_d < \omega_c < \omega_B$).

Da ciò si vede che è impossibile imporre specifiche sulla sensibilità in modo indipendente da requisiti sulla catena chiusa (proprio a causa di tutti questi legami). Inoltre si ha anche un altro legame importante (con a fianco la dimostrazione):

$$S(s) + W_y(s) = 1 \rightarrow \frac{1}{1 + G_a} + \frac{G_a}{1 + G_a} = 1$$

Proprio a causa di ciò, la **f.d.t in catena chiusa W_y** è detta anche **sensibilità complementare** (l'analisi delle specifiche su $W_y(s)$ [o $W(s)$ con il fattore K_r] può quindi essere condotta in maniera equivalente su $S(s)$).

Cosa implica questo sul progetto del controllore? Le specifiche sulla sensibilità possono portare come conseguenze specifiche su:

- BANDA PASSANTE MINIMA:** $|S(j\omega)| < 1$ per $\omega < \omega_M \Rightarrow \omega_c > \omega_M$ con $\omega_{c,des} = 1.5 \omega_M$; quindi avremo implicazioni sul valore minimo di ω_c
- VINCOLI SULLE CARATTERISTICHE DI G_a :** $|S(j\omega)| < S_M < 1$ per $\omega < \omega_M$ oppure per $\omega_m < \omega < \omega_M$

⚠ Ricorda che in BF se $|S(j\omega)| < 1 \rightarrow |G_a(j\omega)| > 1$ e analogamente $|S(j\omega)| < S_M \rightarrow |G_a(j\omega)| < \frac{1}{S_M}$

⚠ Per soddisfare specifiche su $S(s)$, è necessario evitare di inserire in $C(s)$ reti attenuatrici a pulsazioni troppo basse; bisogna considerare infatti gli effetti collaterali dei vari tipi di rete perché:

- Usare **RETI ANTICIPATICI** aumenta l'**ATTIVITÀ SUL COMANDO**;
- Usare **RETI ATTENUATRICI** rende il **SISTEMA PIÙ SENSIBILE** alle variazioni parametriche e peggiora la capacità di attenuazione dei disturbi di BF;
- Dopo l'inserimento di recupero di fase, devo "controllare" il valore di $|G_a(j\omega_{c,des})|$ perché se:
 - o $|G_a(j\omega_{c,des})| \cong 1$ → ho già portato ω_c in $\omega_{c,des}$
 - o $|G_a(j\omega_{c,des})| > 1$ → devo attenuare, ovvero usare una R_i con $m_i \cong |G_a(j\omega_{c,des})|$
 - o $|G_a(j\omega_{c,des})| < 1$ → devo amplificare, ovvero $K_c = \frac{1}{m} K_{c,min}$ ($K_{c,min}$ quello calcolato nelle specifiche statiche)

⚠ Per valutare le **PRESTAZIONI del controllore progettato**, possono essere oggetto di interesse:

- Parametri sulla **risposta del sistema nel tempo al gradino** ($\hat{s}, t_s, t_{a,\%}$);
- Capacità di **inseguire segnali di riferimento sinusoidali** e di **reiettare disturbi sinusoidali** (lo vedo dalla banda passante ω_B , devo prendere solo segnali con pulsazione $<< \omega_B$; per i disturbi conviene usare Simulink);
- **Attività sul comando non eccessiva** (Simulink).

11) REGOLATORI PID

I **REGOLATORI AD AZIONE PROPORZIONALE, INTEGRALE, DERIVATIVA (PID)** sono molto usati in ambito industriale (semplici, facili e poco costosi da progettare e realizzare, taratura automatica), ma non sono in grado di risolvere tutti i problemi di controllo: hanno infatti una struttura prefissata con solo 3 parametri liberi (quindi sono usati in sistemi semplici e ogni volta che il progetto è sviluppato solo su considerazioni statiche).

La legge di controllo (ideale) dei PID porta a generare il **comando u come somma di 3 contributi** (P = proporzionale all'errore di inseguimento, I = proporzionale all'integrale dell'errore [quindi al suo valor medio, annullando l'errore in regime permanente a fronte di segnali di riferimento costanti], D = proporzionale alla derivata dell'errore [anticipare]):

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

La **f.d.t ideale di un regolatore PID** è data da:

$$R_{PID}^i(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad \text{con} \quad \begin{cases} T_I = \frac{K_P}{K_I} = \text{tempo integrale} \\ T_D = \frac{K_D}{K_P} = \text{tempo derivativo} \end{cases}$$

Proseguendo nella sua scrittura in forma alternativa (facendone il denominatore comune) vediamo che è **IMPROPRIA** e presenta 2 zeri con $Re < 0$ (coincidenti per $T_I = 4T_D$) e 1 polo nell'origine:

$$R_{PID}^i(s) = K_P \left(\frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I} \right)$$

Per renderla **PROPRIA** (fisicamente realizzabile), si inserisce un **POLO DI CHIUSURA** nel blocco derivativo:

$$R_D^i(s) = K_P T_D s \rightarrow R_D^r(s) = \frac{K_P T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s}$$

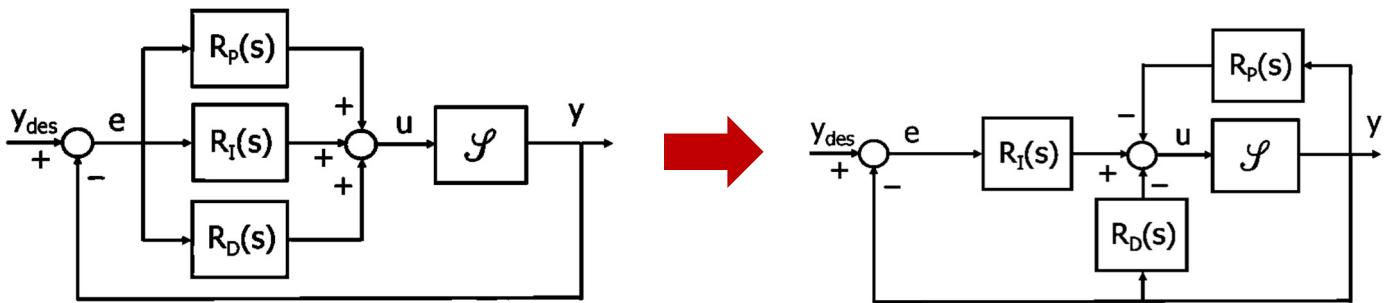
⚠ N deve essere scelto in modo che il **polo di chiusura** $p_c = -\frac{N}{T_D}$ sia esterno alla banda passante desiderata per il sistema controllato, tenendo conto che l'attività sul comando aumenta al crescere di N (noi $5 < N < 20$).

La **f.d.t reale di un regolatore PID** è:

$$R_{PID}^r(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} \right)$$

⚠ Se $N \rightarrow \infty$ la posizione degli zeri rimane invariata e f.d.t reale = f.d.t ideale!

A livello realizzativo vediamo che al posto di avere tutti i 3 blocchi R_P , R_I e R_D sull'errore (dove avremmo che il blocco derivativo assumerebbe andamento impulsivo inizialmente [mandando in saturazione l'attuatore], e che si aggiungono gli zeri del PID a quelli del sistema), possiamo mettere R_D e R_P azionati sull'uscita (dopo quindi avremo **solo gli zeri del sistema**):



Inoltre, in presenza di una saturazione sull'attuatore, bisogna tenere conto del **wind-up** (aspettare la "scarica" dell'azione integrale affinché l'attuatore torni a operare in linearità) [schemi di desaturazione per risolvere].

Applicando solo alcuni dei 3 blocchi del PID, otteniamo dei **sottocasi**:

- REGOLATORE **P** ($K_I = K_D = 0$) → **regolatore statico** usato per sistemi semplici, stabili in catena aperta;
- REGOLATORE **PI** ($K_D = 0$) → come **rete ritardatrice** con polo nell'origine;
- REGOLATORE **PD** ($K_I = 0$) → come **rete anticipatrice**, con polo coincidente con quello di chiusura. Applicabile se non ci sono specifiche statiche, per ottenere un'ampia banda passante per sistemi stabili.

Per quanto riguarda i **METODI DI TARATURA** dei PID abbiamo:

- **TARATURA IN ANELLO CHIUSO** → il **metodo di Ziegler-Nichols in anello chiuso** ci dà i parametri del PID a partire da misure sul **sistema chiuso in retroazione negativa unitaria**, con l'inserimento di un **compensatore statico puramente proporzionale**: assegnato un segnale di riferimento a gradino, il **guadagno del compensatore** viene aumentato fino a \bar{K}_P per cui si ottiene un'oscillazione permanente sull'uscita di periodo \bar{T} ; in questa situazione il sistema si trova ai limiti della stabilità (un ulteriore aumento del guadagno lo renderebbe instabile), ovvero $\bar{K}_P = m_G$ (margine di guadagno del sistema)[quindi questo metodo è applicabile solo per sistemi con m_G finito]. Una volta che trovo \bar{K}_P e \bar{T} , uso la tabella per calcolare i parametri:

	K_p	T_I	T_D
P	$0.5 \bar{K}_p$		
PI	$0.45 \bar{K}_p$	$0.8 \bar{T}$	
PID	$0.6 \bar{K}_p$	$0.5 \bar{T}$	$0.125 \bar{T}$

⚠ Questo metodo però dà $m_\varphi < 40^\circ$; se voglio un margine maggiore devo usare il **metodo dell'imposizione del margine di fase** ($\omega_c = \omega_\pi$):

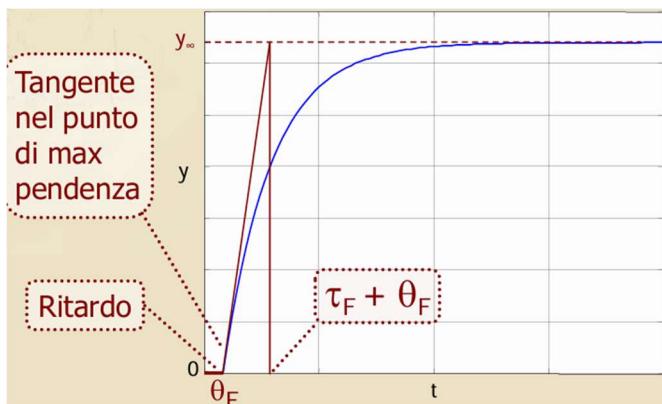
$$\angle G_a(j\omega_\pi) = \left(\frac{m_\varphi}{180} - 1 \right) \pi ; |G_a(j\omega_\pi)| = 1 ; K_p = \bar{K}_p \cos(m_\varphi) ; T_I = \frac{\bar{T} 1 + \sin(m_\varphi)}{\pi \cos(m_\varphi)} ; T_D = \frac{T_I}{4}$$

- **TARATURA IN ANELLO APERTO** → questi metodi sono basati sulla **determinazione di un modello approssimato del processo da controllare, partendo dalla risposta del sistema al gradino**. In quello di **Ziegler-Nichols in anello aperto**, si usa una **f.d.t approssimata del 1° ordine con ritardo**:

$$F(s) = \frac{K_F}{1 + \tau_F s} e^{-\theta_F s}$$

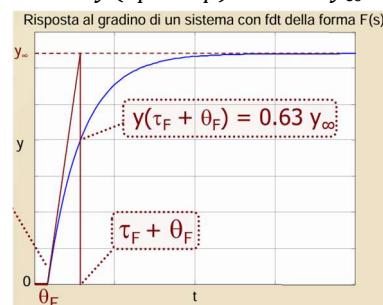
Per applicare questi metodi, il **sistema in catena aperta deve essere asintoticamente stabile** (la sua risposta al gradino deve essere monotona). Si procede così:

- Uso il **metodo della tangente** per **trovare K_F , τ_F e θ_F** : traccio la tangente nel punto di massima pendenza del grafico della risposta al gradino del sistema che ha $F(s)$ scritta sopra; nel punto in cui la tangente tocca la y_∞ , vedo che l'ascissa di quel punto è proprio $\tau_F + \theta_F$: θ_F l'ho dal grafico, in quanto è il ritardo (offset) rispetto all'origine, e quindi posso trovarmi τ_F . Inoltre trovo $K_F = \frac{y_\infty}{\bar{u}}$ (con \bar{u} = ampiezza del gradino):



⚠ Si può trovare l'ascissa $\tau_F + \theta_F$ anche prendendola corrispondente all'ordinata in cui:

$$y(\tau_F + \theta_F) = 0.63 y_\infty$$



- Una volta trovati K_F , τ_F e θ_F , calcolo i parametri del PID con la tabella (Ziegler-Nichols):

	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{\tau_F}{K_F \theta_F}$		
PI	$\frac{0.9 \tau_F}{K_F \theta_F}$	$3\theta_F$	
PID	$\frac{1.2 \tau_F}{K_F \theta_F}$	$2\theta_F$	$0.5\theta_F$

⚠ Anche con Ziegler-Nichols in anello aperto si ottiene un basso m_ϕ (marginale di stabilità); per risolvere questo problema si possono usare 2 metodi:

- COHEN-COON**: cambia solo la tabella dopo aver trovato K_F , τ_F e θ_F :

	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{3\tau_F + \theta_F}{3 K_F \theta_F}$		
PI	$\frac{10.8\tau_F + \theta_F}{12 K_F \theta_F}$	$\theta_F \cdot \frac{30\tau_F + 3\theta_F}{9\tau_F + 20\theta_F}$	
PID	$\frac{16\tau_F + 3\theta_F}{12 K_F \theta_F}$	$\theta_F \cdot \frac{32\tau_F + 6\theta_F}{13\tau_F + 8\theta_F}$	$\frac{4\tau_F \theta_F}{11\tau_F + 2\theta_F}$

- IMC (Internal Model Control)** [sempre con $F(s)$ scritta sopra]: si ragiona retroazionando la differenza tra l'uscita del sistema e l'uscita del modello approssimato $F(s)$, ottenendo:

	K_p	T_I	T_D
PI	$\frac{\tau_f}{K_F(\theta_F + T_f)}$	τ_f	
PID	$\frac{\tau_f + 0.5\theta_F}{K_F(0.5\theta_F + T_f)}$	$\tau_f + 0.5\theta_F$	$\frac{0.5\theta_F\tau_f}{0.5\theta_F + \tau_f}$

⚠ All'esame, i PID saranno nel 2° esercizio (quello più corto): non avremo specifiche da rispettare, ma dovremo capire quali metodi saranno applicabili (ANELLO APERTO o ANELLO CHIUSO); ne dovremo scegliere 1 e dovremo determinare i parametri di $F(s)$ (ovvero ANELLO CHIUSO $\rightarrow K_p, T$; ANELLO APERTO $\rightarrow K_F, \tau_f, \theta_F$). Dovremo quindi indicare i parametri K_p, T_I, T_D coerenti con il metodo scelto (tabelle) e dovremo valutare il comportamento in catena chiusa (W =feedback + sovraelongazione, tempo di salita, tempo di assestamento, banda passante e picco di risonanza). **IL SISTEMA IN CATENA CHIUSA DEVE ESSERE ASINTOTICAMENTE STABILE, ALTRIMENTI PENALITÀ E TUTTO SBAGLIATO.**

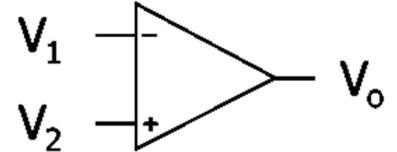
→ CONTROLLORI ANALOGICI:

I **CONTROLLI ANALOGICI** sono nella maggior parte di tipo **elettronico** (schede con elementi discreti, schede con elementi integriti), ma ce ne sono anche di altri tipi (**pneumatici, meccanici, idraulici, misti**). Quelli elettronici sono usati se è possibile trasformare la variabile da controllare in una tensione e (a potenza nulla) e pilotare l'ingresso del sistema con una tensione; altrimenti si usano altri controllori.

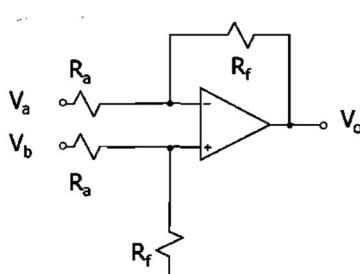
I controllori elettronici sono composti da **AMPLIFICATORI OPERAZIONALI** (OpAmp), resistori, condensatori; quelli non elettronici sono composti da molle, masse, ingranaggi etc...

Parliamo quindi proprio dell'OpAmp (ideale):

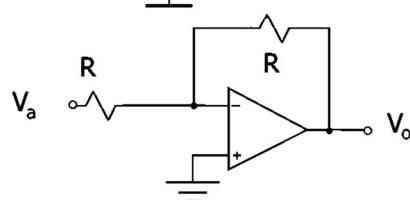
- Amplificazione $\rightarrow A = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out}}{V_+ - V_-} = \infty$
- Impedenza di ingresso $\rightarrow Z_i = \infty$; Impedenza di uscita $\rightarrow Z_u = 0$
- Correnti di ingresso $\rightarrow I_i = 0$
- Offset e derive $\rightarrow 0$



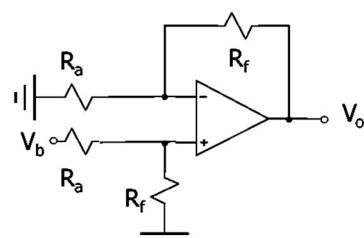
Qui si fa una carrellata di **AMPLIFICATORI GIÀ VISTI** (differenza di segnali, **non invertente, voltage follower** [disaccoppiatore], **invertitore** di segnale, **compensatore di tipo P**, integratore [**compensatore di tipo I**], derivatore [**compensatore di tipo D**], **compensatore PID**, **compensatore PID con chiusura**):



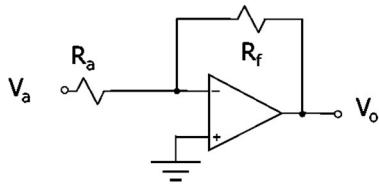
$$V_o = \frac{R_f}{R_a} (V_b - V_a)$$



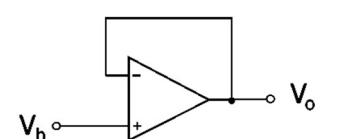
$$V_o = -V_a$$



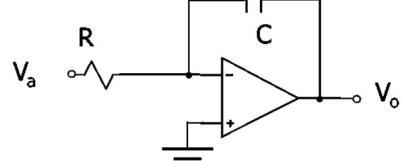
$$V_o = \frac{R_f}{R_a} V_b$$



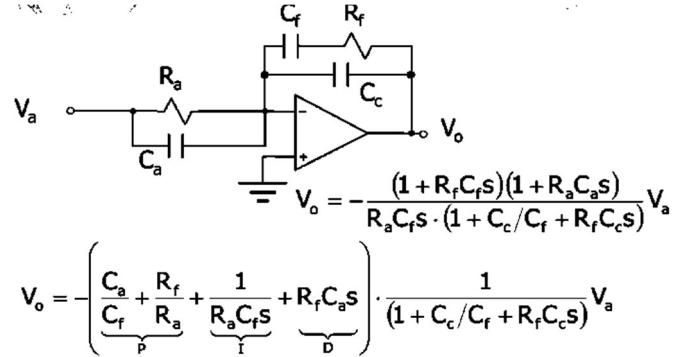
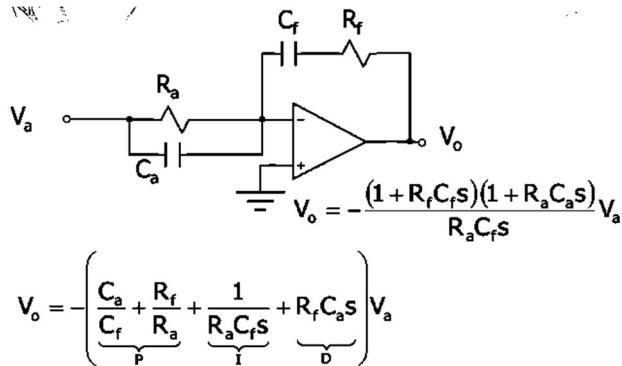
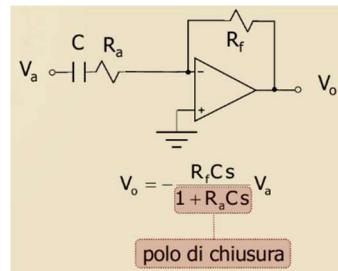
$$V_o = -\frac{R_f}{R_a} V_a$$



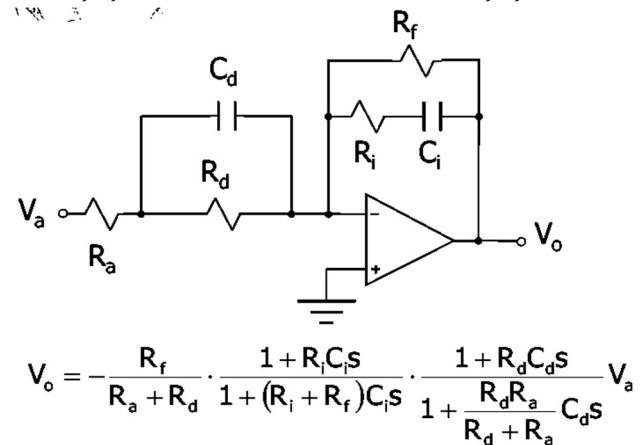
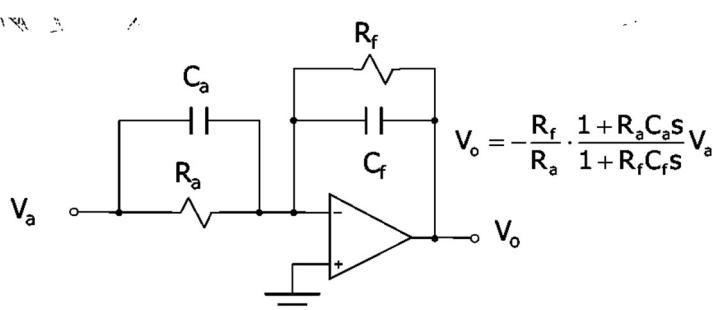
$$V_o = V_b$$



$$V_o(t) = - \left(V_o(t_0) + \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t V_a(\tau) d\tau \right)$$



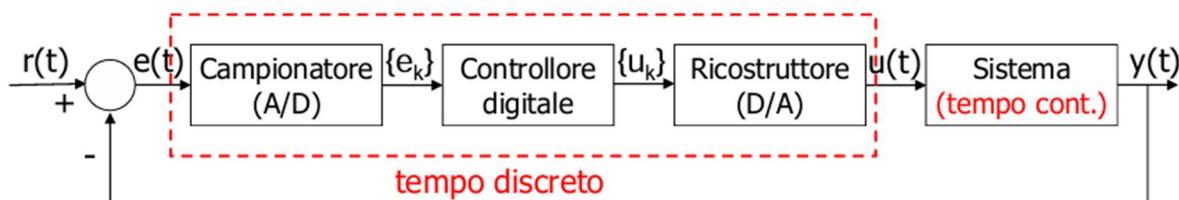
Questi invece sono gli schemi di una **rete derivativa** (se $R_a C_a > R_f C_f$) o **integrativa** (se $R_a C_a < R_f C_f$), oppure insieme **integro-derivativa** (a dx, se $(R_i + R_f)C_i > R_d C_d$):



⚠ Il grande problema dei controllori analogici è dato dalla degradazione dei componenti, dall'incertezza dei parametri e dalla variabilità dei parametri in diverse condizioni operative, non linearità e disturbi. Per questo, si preferiscono i **CONTROLLORI DIGITALI**.

12) DISCRETIZZAZIONE

Noi vogliamo passare dai **CONTROLLORI ANALOGICI** (sopra trattati) a **CONTROLLORI DIGITALI**; un **SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE** ha il seguente schema **ibrido** (parte discreta e parte continua):



Dove il **CAMPIONATORE** (A/D) genera la sequenza di campioni $\{e_k\}$ dell'errore di inseguimento, mentre il **RICOSTRUTTORE** (D/A) genera $u(t)$ a partire da $\{u_k\}$ [ricorda che $r(t) = y_{des}(t)$ come il nostro schema classico]; tra i 2 lavoreremo però in **tempo discreto**.

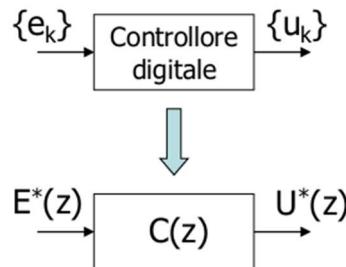
Come possiamo legare il tempo discreto e il tempo continuo con la matematica? Ad ogni sequenza di campioni si può associare il corrispondente **TRENO DI IMPULSI**, ovvero:

$$\{f_k\} \rightarrow f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta(t - kT) \text{ con } T = \text{passo (periodo) di campionamento}$$

Dove vediamo che la sequenza di campioni si può trasformare con la Zeta, mentre $f^*(t)$ con Laplace:

$$\begin{aligned} Z[f_k] &= F^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \\ \mathcal{L}[f^*(t)] &= F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-k sT} = F^*(z)|_{z=e^{sT}} \end{aligned}$$

Vediamo quindi che il **CONTROLLORE DIGITALE ha la sua f.d.t in Zeta**, ovvero:



Quindi capiamo che per **DISCRETIZZAZIONE** si intende il **corretto passaggio da $C(s)$ a $C(z)$** , scegliendo bene il **passo di campionamento (T)** e il **metodo di discretizzazione**. Quindi **2 passaggi**:

1. SCELTA DEL PASSO DI CAMPIONAMENTO → devo prendere T sufficientemente piccolo per soddisfare:

- **TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO:**

$\omega_s \geq 2\omega_M$ con ω_M = componente più elevata del segnale da campionare $\rightarrow 2\omega_M = \omega$ di Nyquist
Da qui vediamo che, **dato che $\omega_M = \omega_B$ (banda passante), dovremo avere $\omega_s \gg \omega_M$**

- **PERDITA DI FASE** introdotta dal **RICOSTRUTTORE** in ω_c (margine di fase si riduce, quindi \hat{s} maggiore e M_r maggiore), per cui dovrò scegliere $\omega_s \gg \omega_c$.

Per dimensionare questa perdita di fase vediamo cosa succede con il ricostruttore più usato, ovvero il **ZOH** (Zero Order Hold, "ordine zero"), che mantiene $u(t)$ pari al valore dell'ultimo campione acquisito per un tempo T . Questo ha risposta all'impulso $h_0(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)$, che in Laplace diventa $H_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$; questa coincide con la f.d.t del filtro ZOH. **Approssimando e^{-sT} con $\frac{1-\frac{sT}{2}}{1+\frac{sT}{2}}$** , si ricava:

$$H_0(s) = \frac{T}{1 + s \frac{T}{2}} \rightarrow \text{Polo in } s = -\frac{2}{T}$$

Bisogna quindi fare in modo che la perdita di fase in ω_c introdotta dal polo sia sopportabile (ovvero mantenere un margine di fase sufficiente); riducendo T , il polo avrà pulsazione $\gg \omega_c$ (quindi si riduce la perdita di fase in ω_c) oppure, per non ridurre troppo T , basta lavorare sul progetto di $C(s)$.

⚠ Al contempo però non devo prendere T troppo piccolo, perché questo porta a problemi di quantizzazione e necessità di usare processori molto prestanti (quindi molto costosi).

2. SCELTA DEL METODO DI DISCRETIZZAZIONE di $C(s)$ → ci sono vari metodi:

- Metodo delle differenze all'indietro (non adatto, forti distorsioni)
- Metodo delle differenze in avanti (non adatto, $C(z)$ può essere instabile anche se $C(s)$ stabile)
- **Trasformazione bilineare o di Tustin** (adatto, unisco con rette i vari campioni)
- **Trasformazione bilineare con precompensazione in frequenza** (come Tustin, ma precompenso la distorsione calcolabile in ω_c)
- Metodo di invarianza della risposta all'impulso (non adatto, aliasing)

- **Metodo di invarianza della risposta al gradino** → calcolo di $C(z)$ in modo che si ottenga la stessa sequenza discreta ottenuta con $C(s)$ (adatto):

$$C(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{C(s)}{s} \right]$$

- **Metodo della corrispondenza poli-zeri**

I primi 4 metodi fanno in maniera discreta (approssimata) l'operazione di integrazione numerica in maniera diversa; gli ultimi 3 metodi non lavorano sull'integrazione, ma sulla invarianza delle risposte.

Ora che so tutto questo, vediamo **come si fa un progetto per discretizzazione di $C(s)$ nella pratica**:

1. SCELTA DI T :

- Prendo $T = \frac{2\pi}{\alpha\omega_B}$ con $5 < \alpha < 20$ (se T non è troppo piccolo, prendere $\alpha = 20$) [ricorda che **banda passante** si vede dal bode di W prendendo il **valore della ω_B a $-3dB$**]
- Valuto il nuovo m_φ** corrispondente alla f.d.t d'anello con sia il campionatore sia il ricostruttore ZOH approssimato (ovvero **basta introdurre $\frac{1+sT}{2}$ al denominatore di $G_a(s)$**)
- Se m_φ insufficiente, si riduce T per quanto possibile; se non ancora abbastanza, va rivisto $C(s)$

2. DISCRETIZZAZIONE DI $C(s)$: calcolo $C(z)$ con 1 dei metodi sopra indicati; in **MatLab** si usa **c2d** (vedi help per capire meglio) con come opzione:

- **tustin** → metodo 3 (Tustin)
- **prewarp** → metodo 4 (Tustin con precompensazione)
- **zoh** → metodo 6 (invarianza gradino)
- **matched** → metodo 7 (corrispondenza zeri-poli)

3. VERIFICA DEL COMPORTAMENTO DEL SISTEMA CON CONTROLLORE DIGITALE $C(z)$:

- **Analisi a tempo discreto con MatLab** = si trasforma in z il sistema $F(s)$ preceduto dal filtro ZOH e si calcolano nel dominio di Zeta sia $G_a(z)$ (f.d.t d'anello) sia $W(z)$ (f.d.t catena chiusa) [in Matlab basta applicare il comando **c2d** a F con opzione **zoh**, cioè **Fz=c2d(F,T,'zoh');**]
- **Simulazione del sistema ibrido con Simulink** (basta sostituire nel blocco del controllore la $C(z)$ calcolata prima)