

TEORIA dei SEGNALI

1) SEGNALI e VETTORI

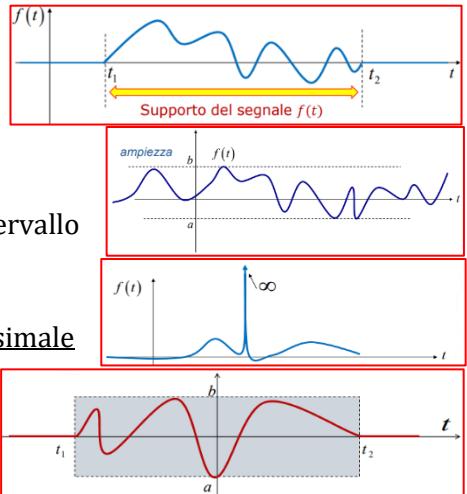
Un **SEGNALE** è una funzione reale o complessa della variabile **tempo** (l'informazione è contenuta nella **forma** del segnale nel tempo, ovvero segnali che variano di più in frequenza portano più informazione). I **segnali analogici** (continui nel tempo e in ampiezza) vengono **campionati** (discretizzazione nel tempo [istanti di campionamento]), **quantizzati** (discretizzazione in ampiezza [intervalli di quantizzazione]), **convertiti** (digitalizzati con convertitori A/D), **elaborati** (elimino il rumore ed estraggo le componenti più rilevanti), **memorizzati**, **trasmessi** e **rielaborati** (+ riconvertiti) per l'utente finale.

Come già detto, i segnali analogici sono una descrizione matematica di grandezze fisiche che variano nel tempo; possono essere **reali** o **complessi**. I complessi vengono usati per **rappresentare segnali di tipo sinusoidale** $f(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi(t)) \rightarrow f(t) = a(t) e^{j\phi(t)}$ (per le sinusoidi pure equivale al **FASORE** $\rightarrow f = ae^{j\phi}$).

⚠ Legate a ciò le formule di **MODULO** $a = |f(t)| = \sqrt{f_{Re}^2 + f_{Im}^2}$ e di **FASE** $\phi(t) = \arg(f(t)) = \arctan\left(\frac{f_{Im}(t)}{f_{Re}(t)}\right)$!

Ci sono anche altre classificazioni di segnali:

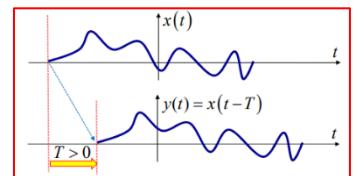
- **SEGNALI A SUPPORTO LIMITATO** → hanno supporto finito (**supporto** = intervallo di tempo all'esterno del quale il segnale è nullo) con durata $t_{FINE} - t_{INIZIO}$ [per una comodità matematica, li considereremo a supporto illimitato];
- **SEGNALI AD AMPIEZZA LIMITATA** → assume valori compresi in un intervallo finito di ampiezze;
- **SEGNALI IMPULSIVI** → assume ampiezza illimitata in dominio infinitesimale (delta di Dirac);
- **SEGNALE FISICO** → segnali reali di variabile reale limitati in ampiezza e supporto temporale;



Dato il segnale $x(t)$, definiamo (ricordando che in questo corso le useremo in maniera adimensionata):

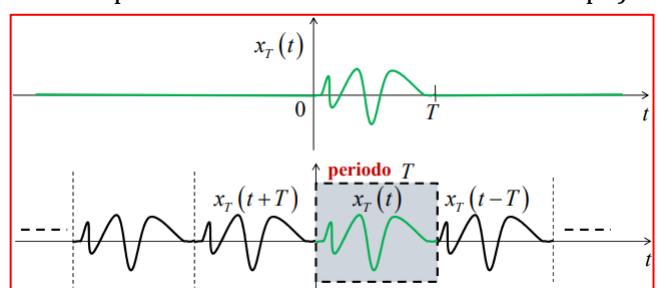
- **POTENZA ISTANTANEA** → $P_{ist}(t) = |x(t)|^2$
- **POTENZA MEDIA** → $P(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} |x(t)|^2 dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} P_{ist}(t) dt$
- **ENERGIA** → $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{ist}(t) dt$

⚠ In questo corso useremo spesso i **SEGNALI TRASLATI** (o ritardati) sull'asse dei tempi, definiti come $y = x(t - T)$!



Parliamo ora di **SEGNALI PERIODICI**, ovvero segnali che **si ripetono regolarmente nel tempo** [$x(t) = x(t + T)$]; questi sono **ideali** (in quanto i segnali fisici non sono "perfettamente" periodici e non sono illimitati nel tempo). Questi segnali si possono **rappresentare tramite il segnale elementare** (ovvero la singola ripetizione del segnale nel periodo T) con:

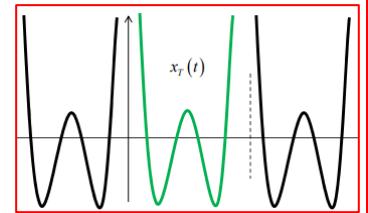
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_T(t - nT)$$



Per i segnali periodici:

- ENERGIA $\rightarrow E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_T(t - nT)|^2 dt = \text{INFINITA};$
- POTENZA MEDIA $\rightarrow P(x) = \frac{E(x_T)}{T} = \text{energia su 1 periodo divisa il periodo}.$

⚠ Un segnale periodico ha potenza infinita se l'energia su 1 periodo è infinita ($E(x_T) \rightarrow \infty$, allora $P(x(t)) \rightarrow \infty$)!



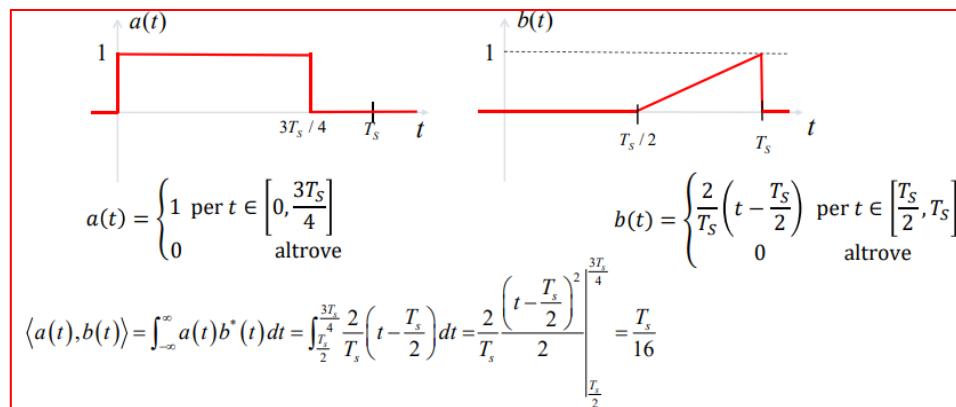
⚠ Tipicamente possono essere a potenza finita i segnali con supporto illimitato!

Possiamo fare una **RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE** (o **GEOMETRICA**) **DEI SEGNALI** (a tempo continuo) [utile soprattutto se vogliamo memorizzare e processare segnali in un sistema informatico]: infatti i segnali a tempo continuo formano uno **SPAZIO VETTORIALE** con le sue classiche definizioni di somma tra segnali [$x + y \rightarrow x(t) + y(t)$] e prodotto di segnale per scalare [$ax \rightarrow ax(t)$], definite qui istante per istante temporale.

Si può fare il PRODOTTO SCALARE tra 2 segnali:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt \text{ con } y^* = \text{coniugato di } y$$

Esempio:



Esiste la NORMA di un segnale:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt} = \sqrt{\langle x(t), y(t) \rangle}$$

legata all'ENERGIA di un segnale e alla DISTANZA tra segnali:

$$\text{ENERGIA: } E(x) = \|x\|^2 \quad \text{DISTANZA: } d(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt}$$

Esiste anche il concetto di segnali ORTOGONALI (alla base delle telecomunicazioni per separare i segnali):

$$\langle x(t), y(t) \rangle = 0 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = 0$$

⚠ Dato che il prodotto scalare è un integrale, possiamo anche vedere graficamente quando 2 segnali sono ortogonali (spesso simmetria di parti negative e positive, dunque si vede integrale = 0).

⚠ RECAP:

| | Definizione | Segnale | Vettore |
|------------------|--|--|-------------------------------------|
| Prodotto scalare | $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ | $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$ | $\sum_{i=1}^n x_i y_i^*$ |
| Energia | $E(\mathbf{x}) \triangleq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ | $\int x(t) ^2 dt$ | $\sum_{i=1}^n x_i ^2$ |
| Norma | $\ \mathbf{x}\ \triangleq \sqrt{E(\mathbf{x})} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ | $\sqrt{\int x(t) ^2 dt}$ | $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i ^2}$ |
| Distanza | $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ $ | $\sqrt{\int x(t) - y(t) ^2 dt}$ | $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i - y_i ^2}$ |

Esiste anche il concetto di **BASE ORTONORMALE** per i segnali, dove i segnali devono:

- essere tutti tra loro **ortogonali** (prodotti scalari nulli per ciascuna coppia di segnali) $\rightarrow \langle \mathbf{w}_i(\mathbf{t}), \mathbf{w}_j(\mathbf{t}) \rangle = \mathbf{0}$;
- avere **norma unitaria** (da cui energia = 1) $\rightarrow \|\mathbf{w}_i(\mathbf{t})\| = \|w_i(t)\|^2 = \langle w_i(t), w_i(t) \rangle = \int |w_i(t)|^2 dt = 1$.

Una volta definita la base ortonormale di segnali $(\mathbf{w}_1(\mathbf{t}), \dots, \mathbf{w}_M(\mathbf{t}))$, possiamo definire il corrispondente **SPAZIO VETTORIALE** come l'insieme dei segnali $x(t)$ esprimibili come combinazione lineare degli elementi della base:

$$x(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \mathbf{w}_i(\mathbf{t}) \quad \text{con } \alpha_i = \langle x(\mathbf{t}), \mathbf{w}_i(\mathbf{t}) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot w_i^*(t) dt$$

Tramite la base ortonormale posso fare la **rappresentazione vettoriale** (o **geometrica**) dei segnali:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(t) \Leftrightarrow \vec{X} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{con } \vec{X} = \text{vettore dei coefficienti}$$

⚠ Con questa rappresentazione, vedo che tutte le operazioni viste finora sui segnali equivalgono a farle sui vettori dei loro coefficienti ($\langle x(t), y(t) \rangle = \langle x, y \rangle, E(x) = E(x, \dots)$!)

Per l'**energia della somma di 2 segnali**:

$$E(x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}[\langle x, y \rangle] = E(x) + E(y) + 2\operatorname{Re}[\langle x, y \rangle]$$

⚠ Solo se i 2 segnali sono **ortogonalni** avremo che $E(x + y) = E(x) + E(y)$ perché il prodotto scalare va a zero!

Come trovo la **combinazione lineare dei vettori della base che approssima meglio il segnale?** Cercando di **minimizzare la distanza tra $x(t)$ e la sua approssimazione $\hat{x}(t)$** :

$$\alpha_i = \min(\|x - \hat{x}\|) = \langle x, \mathbf{w}_i \rangle \rightarrow \text{Da cui: } \hat{x} = \sum_{i=1}^n \langle x, \mathbf{w}_i \rangle \mathbf{w}_i$$

Se l'approssimazione **coincide** con il segnale di partenza (cioè **approssimazione "esatta" o completa**):

$$\text{Segnale errore: } \mathbf{e} = x - \hat{x} = 0 \rightarrow x = \sum_{i=1}^n \langle x, \mathbf{w}_i \rangle \mathbf{w}_i$$

Qual è il **min n° di vettori/segnali di una base ortonormale che consente di rappresentarli in maniera completa?**

Si usa la **PROCEDURA DI GRAM-SCHMIDT**:

→ **Proprietà** della procedura di Gram-Schmidt:

- L'algoritmo genera **basi diverse a seconda dell'ordine delle operazioni**;
- Se al passo i-esimo il vettore $\hat{\mathbf{w}}_i$ è **nullo**, significa che il segnale considerato è **combinazione lineare dei precedenti** e non si genera un nuovo versore $\hat{\mathbf{w}}_i$. Dunque il numero di versori risultati (e quindi dimensione della base [M]) al termine della procedura è minore o uguale al numero di segnali [N] ($M \leq N$).

| |
|--|
| 1) $\hat{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{w}_1 = \frac{\hat{\mathbf{w}}_1}{\ \hat{\mathbf{w}}_1\ }$ 2) $\hat{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\hat{\mathbf{w}}_2}{\ \hat{\mathbf{w}}_2\ }$ ⋮ Se il vettore risultante è nullo, si deve scartare e passare al passo successivo i) $\hat{\mathbf{w}}_i = \mathbf{x}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_i = \frac{\hat{\mathbf{w}}_i}{\ \hat{\mathbf{w}}_i\ }$ Questa sommatoria è da intendere su tutti i vettori non nulli ottenuti ai passi precedenti |
|--|

⚠ Per risolvere esercizi più velocemente e **evitare di fare tutti i passaggi** di Gram-Schmidt posso cerca di intuire se ci sono **combinazione lineari ovvie** (in modo che visivamente dei segnali siano ottenibili da quelli prima e posso evitare i loro passaggi)!

Dato un insieme di segnali, esistono **infinite basi possibili** (tuttavia la **cardinalità/dimensione è la stessa per tutte le basi**!)!

⚠ La rappresentazione geometrica dei segnali è alla base degli **algoritmi di compressione** (mp3, mp4, etc...) dove viene trasmesso solo il **vettore dei coefficienti** (ridurre la qualità dell'immagine significa ridurre il numero di coefficienti).

Altre importanti risultati sono:

- **DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ:**

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

con l'uguaglianza che vale solo quando i 2 segnali sono proporzionali, cioè $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \Leftrightarrow x = \alpha y$;

- **Approssimazione di segnale** $\rightarrow d^2(\hat{x}, x) = E(x - \hat{x}) = E(e) = E(x) - E(\hat{x}) = E(x) - \sum_{i=1}^n |\langle x, w_i \rangle|^2$ da cui $\langle e, \hat{x} \rangle = 0$, ovvero il **segnale differenza $e(t)$** è ortogonale al segnale approssimante.
- **UGUAGLIANZA DI PARSEVAL:**

$$E(x) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, w_i \rangle|^2 \quad \text{perché} \quad x = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$$

Da cui per base non completa c'è la **DISUGUAGLIANZA DI BESSEL**:

$$E(x) \geq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, w_i \rangle|^2$$

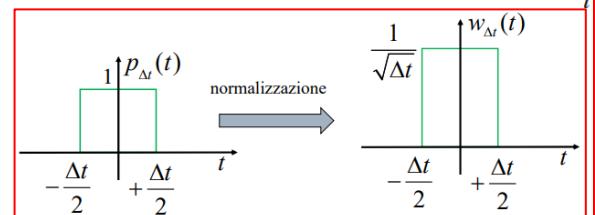
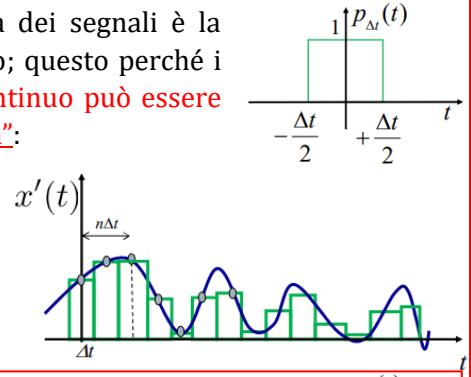
2) SERIE e TRASFORMATA DI FOURIER

Un esempio di applicazione della rappresentazione vettoriale/geometrica dei segnali è la rappresentazione dei segnali continui usando le funzioni "porta" nel tempo; questo perché i segnali "porta traslata" sono tra di loro ortogonali e quindi **un segnale continuo può essere approssimato con una base costituita dalle traslazioni nel tempo della "porta"**:

$$x(t) \sim x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) p_{\Delta t}(t - n\Delta t)$$

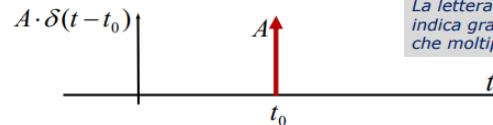
⚠ Facendo tendere il supporto $\Delta t \rightarrow 0$ l'approssimazione migliora, ma è richiesto un insieme infinito di funzioni ortogonali per ottenere una base completa per lo spazio dei segnali!

Per essere una base ortonormale, dobbiamo anche fare in modo che i segnali della base (in questo caso le funzioni porta) abbiano norma unitaria; quindi le porte vanno normalizzate per avere energia unitaria.



⚠ Con $\Delta t \rightarrow 0$ la porta diventa una **DELTA DI DIRAC** (impulso) una funzione (distribuzione in realtà) di cui useremo spesso le versioni traslate nel tempo:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} p_{\Delta t}(t)$$



La lettera vicino alla freccia indica graficamente la costante che moltiplica la delta

La delta di Dirac ha **area unitaria**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\Delta t}(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Delta t = 1$$

ma **energia infinita**:

$$E(\delta(t) dt) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta(t))^2 dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} = \infty$$

Inoltre dato un segnale continuo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0) \rightarrow \text{Più genericamente: } \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \quad [\text{CAMPIONO IL SEGNALE}]$$

Inoltre:

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Mentre fare il **prodotto di convoluzione con una delta**:

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \rightarrow x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad [\text{TRASLO IL SEGNALE}]$$

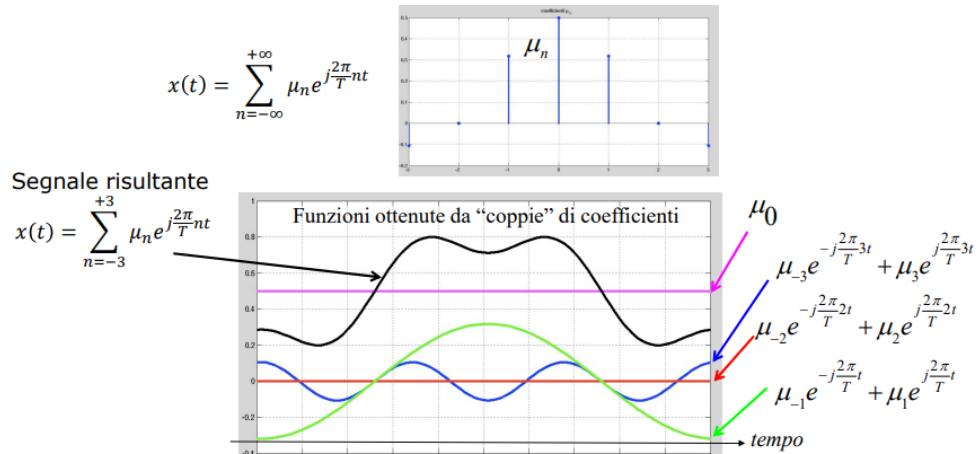
⚠ Ricorda che abbiamo già usato a metodi la delta per definire la derivata di funzioni discontinue:

$$f'(t) = \sum (f(t_i^+) - f(t_i^-)) \delta(t_i) \quad \text{con } t_i = \text{salti}$$

Una **base completa** per i segnali (anche complessi) ad **intervallo limitato** $[-T/2, T/2]$ con **energia finita** e per i segnali **periodici** (T) è l'insieme delle funzioni $w_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ con $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$; da cui possiamo scrivere questi segnali usando la **SERIE DI FOURIER** (formula di espansione in serie di Fourier):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \quad \text{con } \mu_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \rightarrow \begin{cases} E_T(x) = \text{energia su 1 periodo} = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2 \\ P(x) = \text{potenza media} = \frac{E_T(x)}{T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2 \end{cases}$$

⚠ Scrivere il segnale con la serie di Fourier significa scriverlo come **combinazione lineare di infinite di sinusoidi** di frequenza $f_n = n/T$ perché per Eulero $e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$; ciascun coefficiente μ_n ci dice quanto ciascuna componente armonica a frequenza f_n è "forte" nel segnale! (sotto graficamente):



Per estendere il concetto della serie di Fourier anche per **segnali non periodici con supporto illimitato**, definiamo la **TRASFORMATA DI FOURIER** partendo dalla serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau) e^{-j\frac{2\pi}{T}n\tau} d\tau \right] e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \rightarrow [T \rightarrow \infty] \begin{cases} \frac{1}{T} = \Delta f \rightarrow df \\ \frac{n}{T} \rightarrow f \\ \sum \rightarrow \int \end{cases} \rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[df \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] e^{j2\pi ft} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Trasformata di Fourier: } X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ \text{Anti trasformata di Fourier: } x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \\ X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) \end{cases}$$

⚠ Se un segnale ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$, allora esiste la sua trasformata di Fourier (condizione sufficiente, ma non necessaria, infatti un'eccezione sono i segnali periodici)!

⚠ Trasformata di Fourier e Laplace sono collegate:

$$X(f) = X_{\text{Laplace}}(j2\pi f) + \frac{1}{2} \sum_i A_i \delta(f - f_i)$$

Ora vediamo delle **TRASFORMATE FONDAMENTALI**:

- **Delta di Dirac** $\rightarrow X(f) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1$
- **Costante** $\rightarrow \mathcal{F}\{1\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt = \delta(f)$
- **Segno** $\rightarrow \mathcal{F}\{sgn(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} sgn(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} sgn(t) [\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)] dt = -2j \int_0^{+\infty} \sin(2\pi ft) dt = \frac{\cos(2\pi f \infty)}{\pi f} - \frac{j}{\pi f} = -\frac{j}{\pi f} = \frac{1}{j\pi f}$
- **Gradino** $\rightarrow \mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} sgn(t)\right\} = \frac{1}{2} \mathcal{F}\{1\} + \frac{1}{2} \mathcal{F}\{sgn(t)\} = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{2} \frac{1}{j\pi f}$

⚠ **Trasformata di SEGNALI PERIODICI**: dato che un segnale periodico ha uno “**SPETTRO A RIGHE**” dove esistono solo le componenti armoniche (frequenze) della fondamentale (ovvero le multiple della frequenza fondamentale $1/T$), avremo che il segnale ha **componenti spettrali nulle ovunque eccetto nelle frequenze $\frac{n}{T}$** (multiple della fondamentale) dove avremo delle delta di Dirac:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j2\pi f_n t} \right) e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \cdot \delta(f - f_n) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt \right) \delta(f - \frac{n}{T})$$

3) PROPRIETÀ TRASFORMATA di FOURIER

Il modulo al quadrato della trasformata di un segnale viene detto **SPETTRO (DI ENERGIA)** del segnale $|X(f)|^2$ e l’analisi dei segnali nel dominio delle frequenze viene detto **ANALISI SPETTRALE** perché devo capire attraverso lo spettro di energia del segnale quali componenti armoniche (o spettrali, o frequenze) pesano di più nel segnale (trasformata di Fourier $X(f)$ indica il “**peso**” complesso della componente sinusoidale a frequenza f per il segnale $x(t)$; $|X(f)|^2$ è l’**energia infinitesima** del segnale $x(t)$ alla frequenza f).

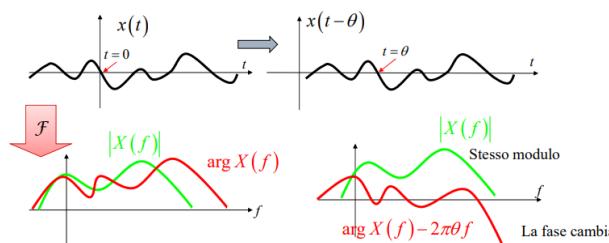
Vediamo le **proprietà** della trasformata di Fourier (fondamentali negli esercizi):

- **LINEARITÀ** (non vale sullo spettro di energia):

$$\mathcal{F}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

- **ANTICIPO/RITARDO** (sposta il segnale sull’asse dei tempi → cambia solo la fase del segnale, non il modulo):

$$\mathcal{F}\{x(t - \theta)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} e^{-j2\pi\theta f}$$



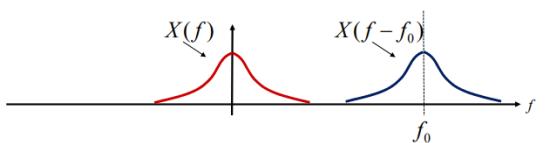
- **MODULAZIONE DI AMPIEZZA** (sposta la trasformata sull’asse delle frequenze di f_0):

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = X(f - f_0)$$

- **Analogo tramite coseno** (o seno, per Eulero):

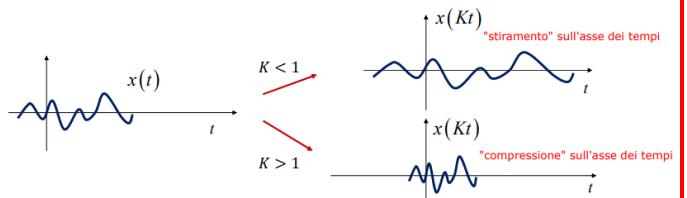
$$\mathcal{F}\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2j}[X(f - f_0) - X(f + f_0)]$$



- **SCALAMENTO** (stira/comprime il segnale nel tempo):

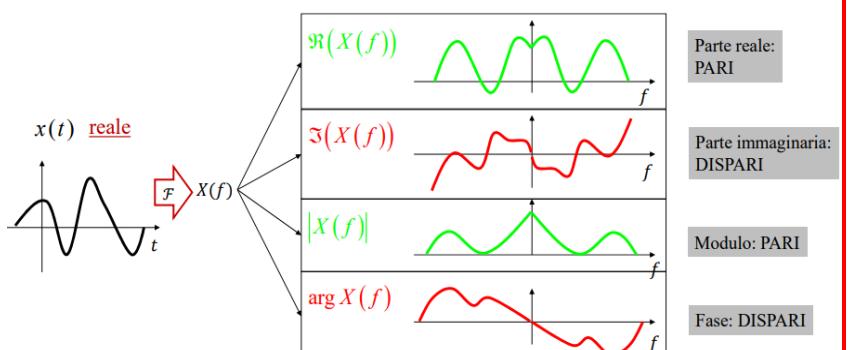
$$\mathcal{F}\{X(Kt)\} = \frac{1}{|K|} X\left(\frac{f}{K}\right)$$



⚠ Esiste una **DUALITÀ tempo-frequenza**, ovvero se un segnale è stirato sull’asse dei tempi sarà compresso sull’asse delle frequenze e viceversa!

- **RELAZIONI DI PARITÀ** = la trasformata di Fourier di un segnale reale ha parte reale pari e immaginaria dispari, modulo pari e fase dispari.

Dato che l’informazione nelle frequenze negative è uguale a quella delle positive, gli analizzatori di spettro spesso fanno vedere solo il grafico sull’asse positivo per le trasformate di segnali reali.



- CONVOLUZIONE e PRODOTTO:

$$\begin{cases} x(t) * y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)Y(f) \\ X(f)Y(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) * y(t) \end{cases}$$

- DERIVAZIONE e INTEGRAZIONE:

DERIVAZIONE: $\begin{cases} \frac{\partial^n}{\partial t^n} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi f)^n X(f) \\ (j2\pi f)^n X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{\partial^n}{\partial t^n} x(t) \end{cases}$

INTEGRAZIONE: $\begin{cases} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} \\ \frac{1}{2} X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \end{cases}$

- DUALITÀ:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\{X(f)\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\} = x(-t) \\ \mathcal{F}\{X(t)\} = x(-f) \end{cases}$$

⚠ La 1^a formula l'avevamo già vista a metodi, la 2^a invece è utile se nelle tavole vedo che una funzione, di cui devo calcolare la trasformata, assomiglia ad una trasformata notevole; dunque scrivo che la trasformata risultante è il segnale di partenza della trasformata notevole, ma con f al posto di t !

⚠ La **trasformata di Fourier** può essere interpretata come uno sviluppo su una base ortogonale $w_f(t) = e^{-j2\pi ft}$ con coefficienti dati da $x(t)$; analogamente, l'**anti-trasformata di Fourier** può essere interpretata come uno sviluppo su una base ortogonale $W_f(t) = e^{j2\pi ft}$ con coefficienti dati da $X(f)$!

⚠ Dato che la trasformata di Fourier equivale ad un **CAMBIO DI BASE** da base tempi (t) a base frequenze (f), non cambiano le formule:

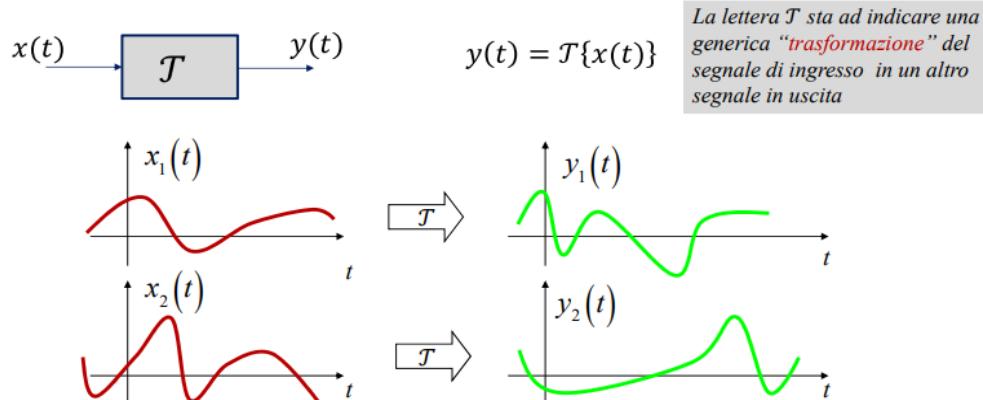
- Uguaglianza di Parseval $\rightarrow E(x) = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$
- Invarianza prodotto scalare $\rightarrow \langle x(t), y(t) \rangle = \langle X(f), Y(f) \rangle$
- Disuguaglianza di Schwarz $\rightarrow |\langle X(f), Y(f) \rangle| \leq \|X(f)\| \|Y(f)\|$

- RELAZIONI TEMPO-FREQUENZA:

- **$x(t)$ supporto finito $\rightarrow X(f)$ supporto infinito**
- **$X(f)$ supporto finito $\rightarrow x(t)$ supporto infinito**
- Se $x(t)$ limitato nel tempo in $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$, potremmo scrivere che $x(t)$ è prodotto tra una porta di durata T e una funzione $x_1(t)$ illimitata nel tempo $\rightarrow x(t) = x_1(t) \cdot p_T(t) \Rightarrow X(f) = X_1(f) * \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$
- Ultima relazione è $D \cdot D \geq \frac{1}{2}$ con $\begin{cases} D^2 = \int t^2 \frac{|x(t)|^2}{E(x)} dt = \text{Estensione nel tempo} \\ D^2 = 4\pi^2 \int f^2 \frac{|X(f)|^2}{E(x)} df = \text{Estensione in frequenza} \end{cases}$

4) SISTEMI LINEARI e FILTRI

Un **SISTEMA** in generale è un elemento che **trasforma un segnale in un altro segnale** (es. amplificatori, filtri...):



Ci sono diverse classificazioni dei sistemi:

- **SISTEMI LINEARI** \rightarrow vale il **principio di sovrapposizione degli effetti** (linearità):

$$T\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1T\{x_1(t)\} + a_2T\{x_2(t)\}$$

- **SISTEMI TEMPO INVARIANTI** → ritardo sugli ingressi = ritardo sulle uscite:
 $\mathcal{T}\{x(t)\} = y(t) \Leftrightarrow \mathcal{T}\{x(t - \theta)\} = y(t - \theta)$

⚠ Nel corso tratteremo soprattutto sistemi **LTI** (lineari a tempo invarianti) [che chiameremo anche **filtri**!]

- **SISTEMI SENZA MEMORIA** → l'uscita dipende **solo dall'ingresso in quell'istante** (non memoria);

⚠ I sistemi senza memoria e tempo invarianti vengono caratterizzati dalla loro **relazione ingresso-uscita** ($y = \text{output}$ e $x = \text{input}$) [e sono spesso non lineari].

Nei sistemi **LTI** è importante la **RISPOSTA ALL'IMPULSO** (ovvero l'uscita [risposta] del sistema quando in input viene applicata la **delta di Dirac**, ovvero $h(t) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$); è importante nei sistemi LTI perché:

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) = y(t)$$

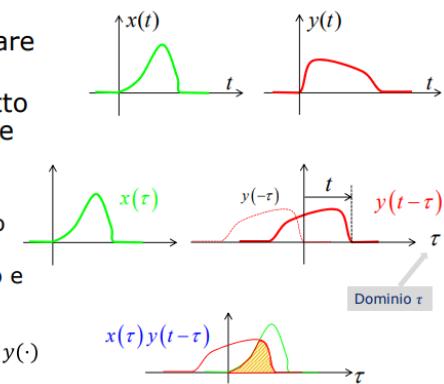
Ovvero **nota $h(t)$, potremo sempre calcolare l'uscita $y(t)$ generata da un ingresso $x(t)$ tramite il prodotto di convoluzione tra $x(t)$ e $h(t)$:**

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

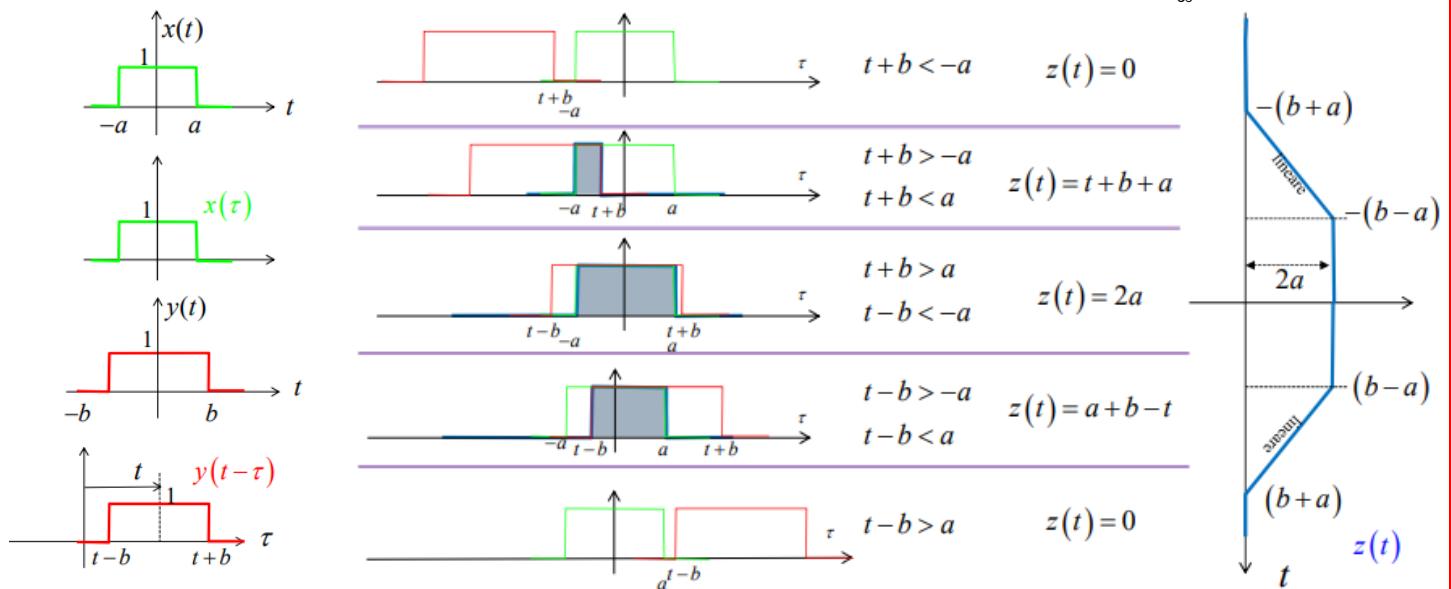
⚠ Vale anche il **simmetrico** $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$!

GRAFICAMENTE l'integrale di convoluzione ha i seguenti passaggi:

- Consideriamo due funzioni generiche di cui vogliamo calcolare la convoluzione.
- Dovendo fare un integrale rispetto a τ , interpretiamole graficamente come funzioni di τ
- Costruzione grafica:
 - 1) Ribalta uno dei due segnali rispetto all'asse τ e traslalo di " t "...
 - 2) Moltiplica le due funzioni tra di loro e integra rispetto a τ ...
 - 3) ...ripeti per ogni t , facendo graficamente traslare la funzione $y(\cdot)$ verso destra



⚠ Importante il caso della **convoluzione di 2 porte di diverse durate** $z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$:



Da cui vediamo che il **supporto temporale in uscita** dalla convoluzione di segnali con supporto **limitato** è la somma dei supporti dei 2 segnali ($T_z = T_x + T_y$).

Oltre a ciò il prodotto di convoluzione gode della proprietà (sia in tempo sia in frequenza) commutativa, associativa, distributiva [ricordando però che $x(t) * (y(t)w(t)) \neq (x(t) * y(t))w(t)$].

Definiamo **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO** (anche detta risposta in frequenza) di un sistema LTI la trasformata di Fourier della risposta all'impulso:

$$H(f) = \mathcal{F}\{\delta(t)\}$$

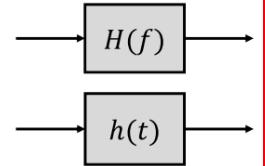
Questa è importante perché vediamo che la trasformata di Fourier dell'uscita è uguale al prodotto tra la trasformata di Fourier dell'ingresso per la funzione di trasferimento:

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

O alternativamente (vista ad elettrotecnica):

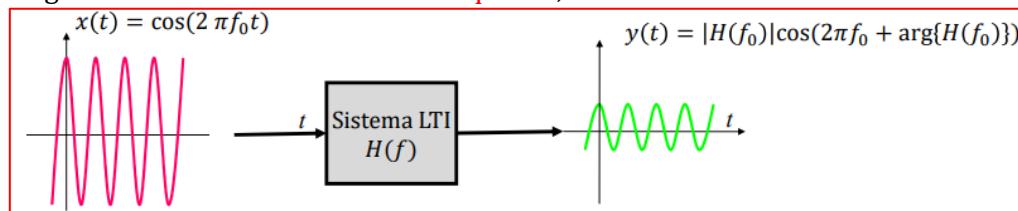
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

⚠ Dunque un sistema LTI è completamente caratterizzato dalla sua risposta all'impulso $h(t)$ o dalla sua funzione di trasferimento $H(f)$ (vedi a destra che graficamente un sistema LTI si indica così).

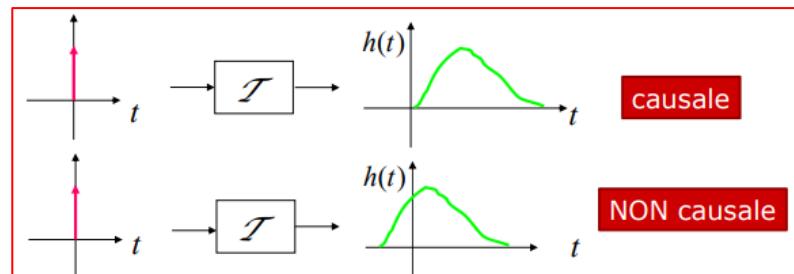


→ Se poniamo in ingresso ad un LTI:

- un esponenziale complesso $e^{j2\pi f_0 t}$, avremo che l'uscita dipende solo dalla funzione di trasferimento calcolata in f_0 , ovvero $y(t) = H(f_0)x(t)$;
- un segnale sinusoidale, verrà modificata solo fase e ampiezza [dipendono dal valore di $H(f_0)$], ma avremo in uscita un segnale sinusoidale con la stessa frequenza, ovvero:

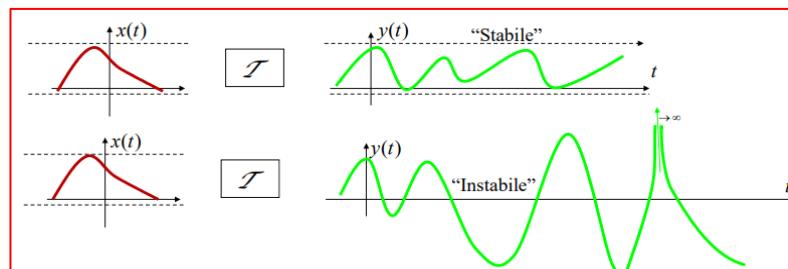


Altro concetto fondamentale è la **CAUSALITÀ**, ovvero vediamo che, nell'integrale di convoluzione, l'uscita $y(t)$ all'istante t dipende dai valori dell'ingresso $x(t)$ sia agli istanti precedenti sia agli istanti successivi a t . Questo però è impossibile nella realtà (avremmo un sistema che "predice" il futuro). Quindi introduciamo i SISTEMI CAUSALI per i quali la risposta all'impulso è nulla per $t < 0$ (ovvero $h(t) = 0$ per $t < 0$).



Introducendo anche i SISTEMI REALI come i sistemi dove $h(t)$ è reale (ingresso reale → uscita reale), avremo che un sistema è **FISICAMENTE REALIZZABILE** se è causale + reale (ovvero $h(t) = 0$ per $t < 0$ con $h(t)$ reale).

I sistemi hanno la **STABILITÀ BIBO** (Bounded Input Bounded Output) se ad un ingresso limitato in ampiezza deve corrispondere un'uscita limitata in ampiezza ($|x(t)| < \infty \Rightarrow |y(t)| < \infty$):



Da cui un sistema LTI si dice STABILE se $\int |h(t)| dt < \infty \Rightarrow |H(f)| < \infty$.

⚠ La funzione di trasferimento può essere valutata in molti modi (analizzatori automatici, con segnali noti, ...). Vediamo un **ESEMPIO** in cui la ricaviamo risolvendo nel dominio delle frequenze il sistema lineare differenziale di un filtro RC:

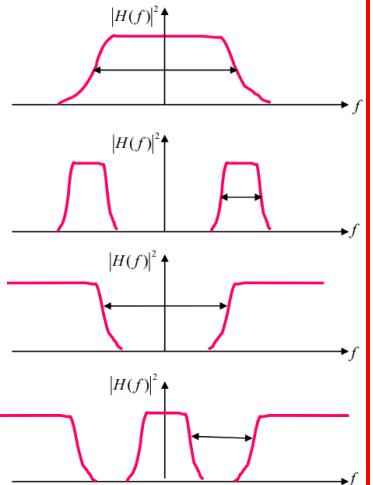
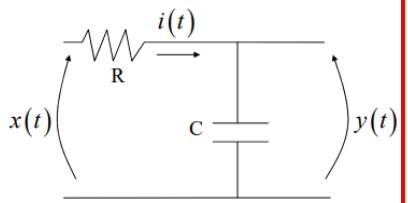
$$x(t) - y(t) = Ri(t) \text{ con } i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \rightarrow x(t) = RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

$$\rightarrow \text{Con Fourier: } X(f) = (1 + j2\pi fRC)Y(f) \rightarrow H(f) = \frac{1}{(1 + j2\pi fRC)}$$

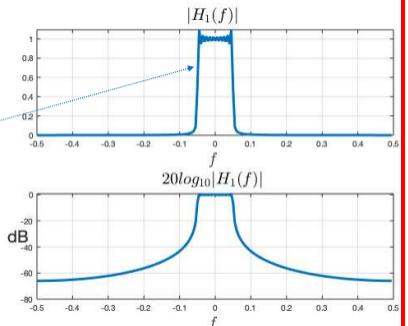
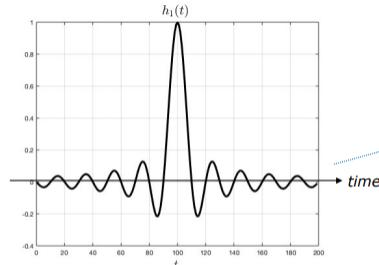
$$\text{Da cui: } |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2} \text{ ovvero un filtro passa basso} \rightarrow f_{3dB} = \frac{1}{2\pi RC}$$

Con il termine **FILTRO** si indica un **sistema LTI** (Lineare Tempo-Invariante) con specifiche tipologie di risposta in frequenza (funzione di trasferimento); diversi tipi di filtri:

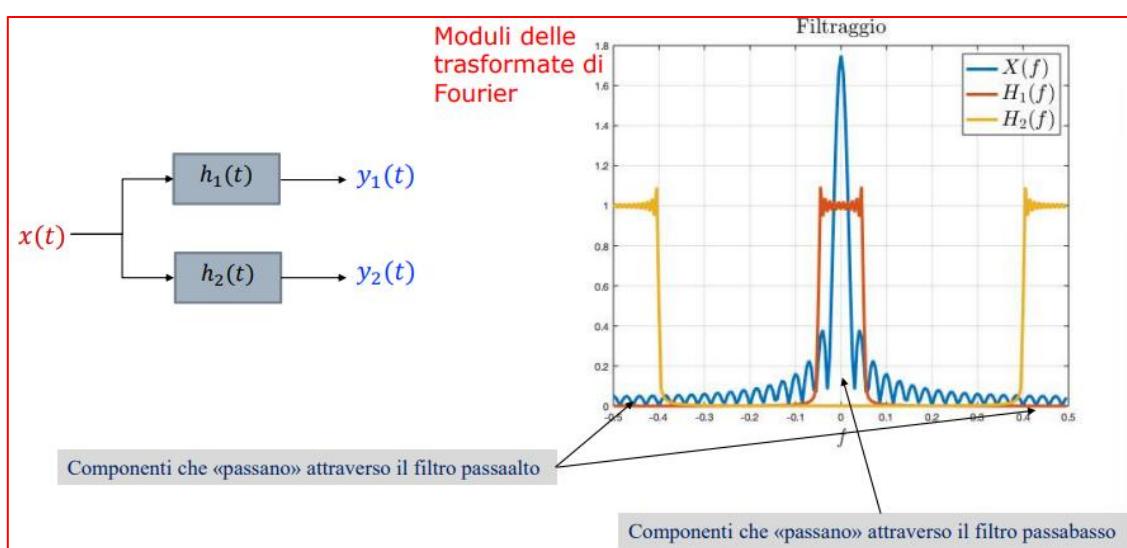
- **PASSA BASSO** → ha banda finita, centrata intorno all'origine (banda base);
- **PASSA BANDA** → ha banda finita, che non include l'origine;
- **PASSA ALTO** → ha banda infinita, che non include l'origine;
- **ELIMINA BANDA** → ha banda infinita, che non include un certo intervallo di frequenze.



⚠ I filtri "ideali" dovrebbero avere supporto strettamente limitato in frequenza; dunque richiederebbero una risposta all'impulso infinita, cioè non reale (non causale). Perciò nella realtà i filtri devono essere approssimati! Un esempio di filtro passabasso ideale di tipo porta avrà una risposta all'impulso di tipo sinc (che non è causale), ma se tronchiamo la sinc e la ritardiamo ora avremo una risposta all'impulso realizzabile.



Analogamente lo si può fare per un filtro passa alto; esempio di **FILTRAGGIO**:



⚠ Con un **segnale periodico in ingresso** ad un sistema lineare, l'**uscita** (anch'essa periodica) è data dalla **convoluzione del segnale nel periodo fondamentale con la risposta all'impulso** → $y(t) = x(t - nT) * h(t)$

⚠️ Convoluzione nel tempo di segnali traslati:

$$x(t) * y(t) = w(t) \rightarrow \begin{cases} x(t) * y(t - t_0) = w(t - t_0) \\ x(t - t_1) * y(t - t_0) = w(t - t_1 - t_0) \end{cases}$$

4.1) DIAGRAMMI A BLOCCHI

Insiemi interconnessi di LTI (combinazione di sistemi lineari) possono essere a loro volta sistemi LTI, la cui funzione di trasferimento è ricavabile con semplici operazioni da quella dei sistemi costituenti; questi sono descritti graficamente con i **DIAGRAMMI A BLOCCHI** (ciascun blocco è caratterizzato dalla funzione di trasferimento $H(f)$ o dalla risposta all'impulso $h(t)$). Vediamo alcuni tipi di queste combinazioni:

- **PARALLELO** di 2 sistemi (somma delle f.d.t.):

$$H_{TOT}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f) + H_2(f)$$

- **SERIE** di 2 sistemi (prodotto delle f.d.t.):

$$H_{TOT}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

- **RETROAZIONE**:

$$H_{TOT}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 - H_1(f)H_2(f)}$$

Ci sono 2 sistemi LTI particolari:

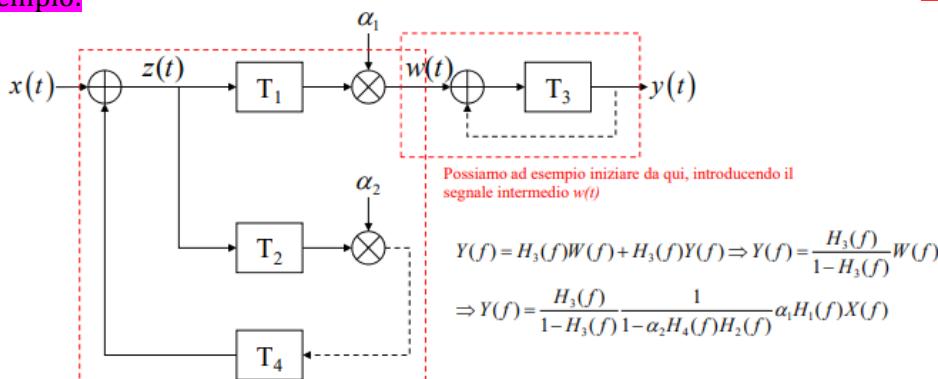
- **RITARDATORE**:

$$H(f) = e^{-j2\pi fT} \text{ con } h(t) = \delta(t - T)$$

- **AMPLIFICATORE**:

$$H(f) = A \text{ con } h(t) = A\delta(t)$$

Esempio:



Possiamo concentrarci su questo altro gruppo di blocchi, introducendo il segnale intermedio $z(t)$ come:

$$Z(f) = X(f) + \alpha_2 H_2(f) H_4(f) Z(f)$$

$$\Rightarrow Z(f) = \frac{1}{1 - \alpha_2 H_2(f) H_4(f)} X(f)$$

$$H_{tot} = \frac{1}{1 - \alpha_2 H_4 H_2} \alpha_1 H_1 \frac{H_3}{1 - H_3}$$

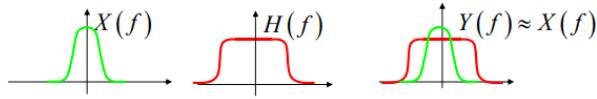
⚠️ Con ritardatori e amplificatori concatenati si possono ottenere sistemi LTI con f.d.t. della forma:

$$H_{FIR}(f) = \sum_i \alpha_i e^{-j2\pi f\tau_i} \rightarrow \text{SENZA RETROAZIONE} \text{ (alla base dei filtri FIR [Finite Impulse Response])}$$

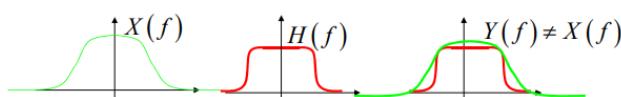
$$H_{IIR}(f) = \frac{\sum_i \alpha_i e^{-j2\pi f\tau_i}}{\sum_j \beta_j e^{-j2\pi f\tau_j}} \rightarrow \text{CON RETROAZIONE} \text{ (alla base dei filtri IIR [Infinite Impulse Response])}$$

Definiamo **BANDA** (o larghezza di banda) l'intervallo di frequenze occupato da un segnale o da una funzione di trasferimento. La relazione tra la banda di un filtro e quella del segnale al suo ingresso è molto importante:

Situazione di segnali in ingresso con banda più stretta di quella del filtro



Situazione di segnali in ingresso con banda più larga di quella del filtro



Possibili definizioni di BANDA sono:

- **BANDA UNILATERA** → dato che i segnali e sistemi reali hanno f.d.t con modulo pari, definiamo BANDA UNILATERA il **supporto** del segnale/sistema considerando solo l'asse positivo delle frequenze (altrimenti BILATERA);
- **BANDA a 3dB** → punto nel quale $|H(f)|^2$ (spettro) diminuisce del 50% rispetto al picco (diminuisce cioè di -3dB):

$$|H(f)|^2_{dB} = 10 \log_{10}(|H(f)|^2)$$

- **BANDA EQUIVALENTE DI RUMORE:**

$$B_{eq} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}{2 \max(|H(f)|^2)}$$

- **BANDA CON UNA DATA % di ENERGIA** (monolatera):

$$\int_{-B_{x\%}}^{+B_{x\%}} |H(f)|^2 df = \frac{x}{100} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

- **ESTENSIONE IN FREQUENZA:**

$$D^2 = 4\pi^2 \int f^2 \frac{|X(f)|^2}{E(x)} df$$

Definiamo **DISTORSIONE** il fatto che in un sistema il segnale di uscita NON ha le stesse caratteristiche del segnale in ingresso; la distorsione nei sistemi LTI si dice **distorsione lineare**. Un **sistema lineare (filtro) NON DISTORCENTE** ha **solo blocchi ritardatori e amplificatori** perché non modificano la forma del segnale:

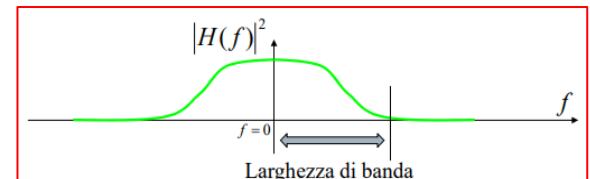
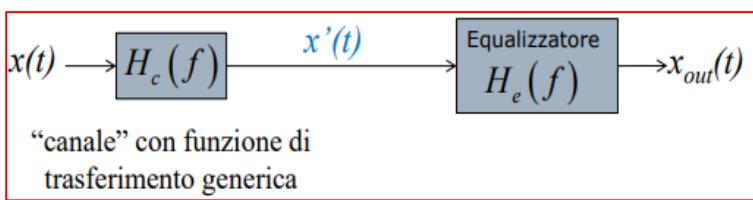
$$y(t) = k \cdot x(t - t_D) \rightarrow H(f) = k \cdot e^{-j2\pi t_D f}$$

Un filtro deve essere a **MODULO COSTANTE** e **FASE LINEARE**, anche solo sulla banda del segnale di ingresso.

Vediamo alcune APPLICAZIONI:

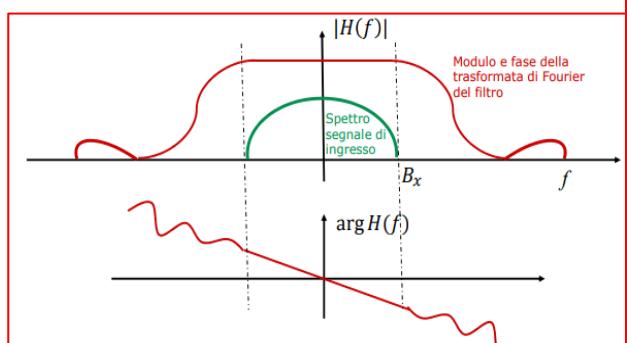
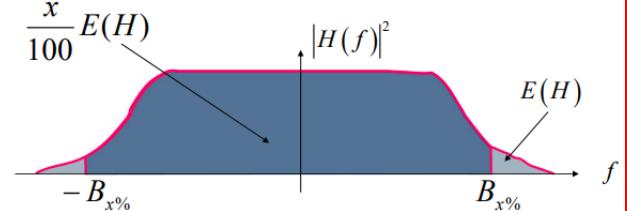
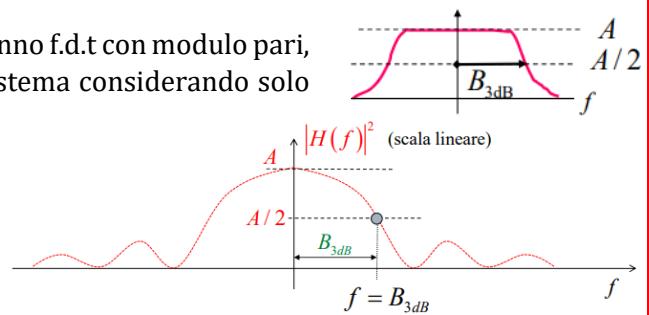
- **EQUALIZZAZIONE** → dato un canale con una certa f.d.t $H_c(f)$, questo si può compensare con un equalizzatore, che avrà f.d.t:

$$H_E(f) = \frac{k \cdot e^{j2\pi t_D f}}{H_c(f)}$$



$$\text{Banda} = |H(f)|^2 \text{ (sistemi)}$$

$$\text{Banda} = |X(f)|^2 \text{ (segnali)}$$

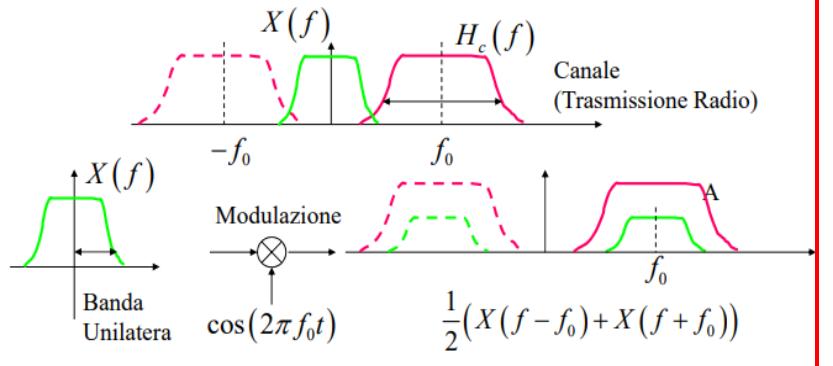


- **MODULAZIONE:** un sistema lineare che ha f.d.t di tipo passa banda può essere usato per la trasmissione di un segnale in banda base solo dopo aver spostato il suo contenuto spettrale con la modulazione (ovvero la moltiplicazione per un segnale sinusoidale)

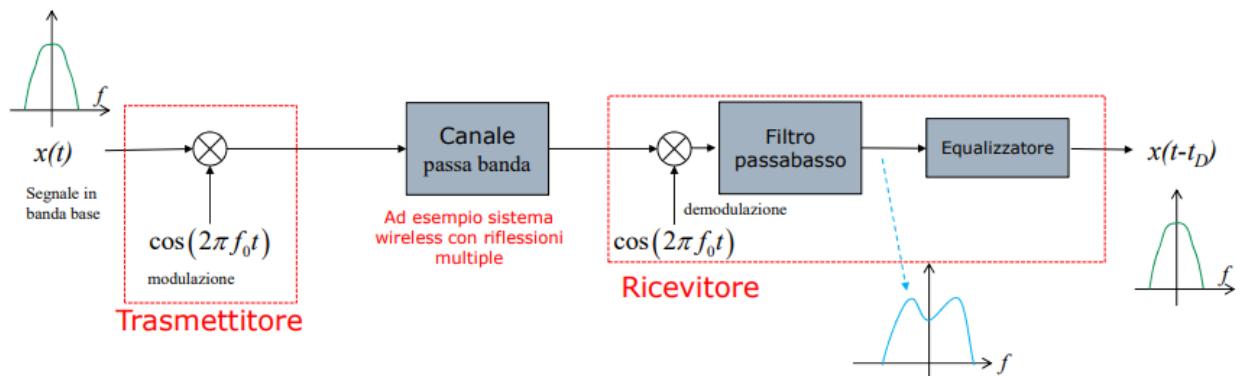
⚠ In ricezione il segnale trasmesso può essere ricostruito moltiplicando il segnale ricevuto per un segnale sinusoidale alla stessa frequenza (**DEMODULAZIONE**).

Ci sono però delle condizioni che devo rispettare per fare funzionare il sistema con modulazione:

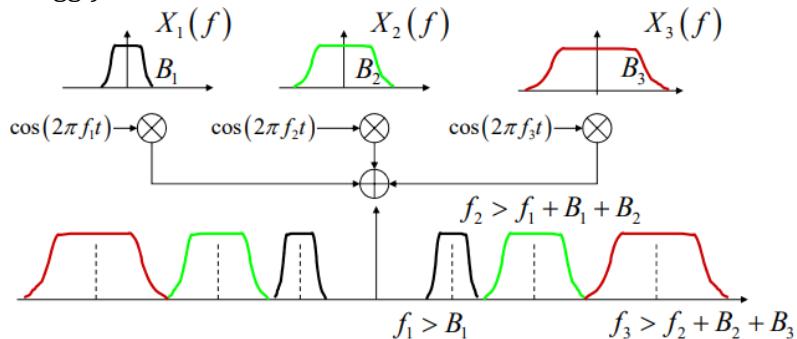
- banda del segnale modulato < banda passante del canale;
- banda del filtro in ricezione > banda segnale trasmesso;
- frequenza centrale $f_0 > \frac{1}{2}$ banda del segnale modulato da trasmettere.



Sistema Completo:



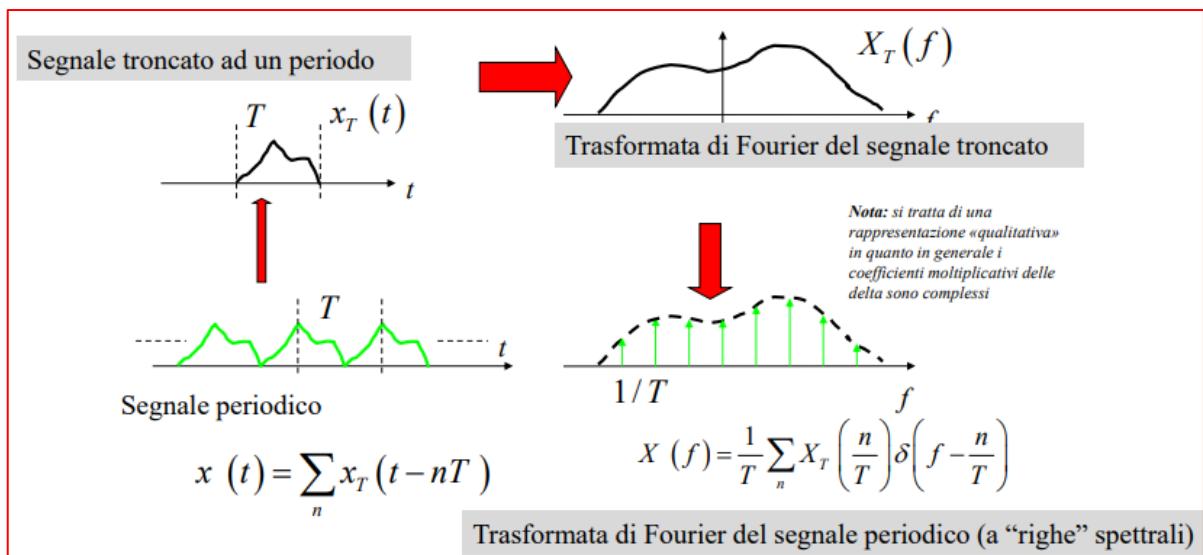
- **MULTIPLAZIONE IN FREQUENZA** (vedi da RETI): diversi segnali con bande sovrapposte possono essere multiplati su 1 un singolo canale usando la modulazione, ma su frequenze diverse (poi demultiplati senza distorsione con dei filtri).



5) SEGNALI PERIODICI (e loro trasformate)

Abbiamo già visto che i **segnali periodici** $x(t) = x(t + T)$ possiamo scriverli con $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT)$ (che poi nella realtà avremo segnali ciclici e non periodici in quanto avremo un n tra 2 estremi finiti); ma abbiamo anche visto che possiamo scrivere ogni segnale periodico con la **serie di Fourier** $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \right) e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$. Per scriverli invece con le **TRASFORMATE DI FOURIER** (dove le delta posizionate sui multipli della frequenza fondamentale mi esaltano lo **spettro a righe** del segnale periodico):

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{n}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \text{ con } X_T = \text{trasformata di Fourier su segnale troncato}$$



Importante è il segnale **TRENO DI IMPULSI** (o segnale “**CAMPIONATORE**”) **nel tempo**, il quale ha come trasformata di Fourier il **treno di impulsi in frequenza**:

$$c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \rightarrow C_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fnT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

⚠ Facendo:

- **PRODOTTO** di segnale generico per treno di impulsi = **sequenza equispaziata dei suoi campioni**:

$$y(t) = x(t) \cdot c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

- **CONVOLUZIONE** di segnale generico e treno di impulsi = **segnale periodico** di periodo pari alla spaziatura delle delta (**PERIODICIZZAZIONE**):

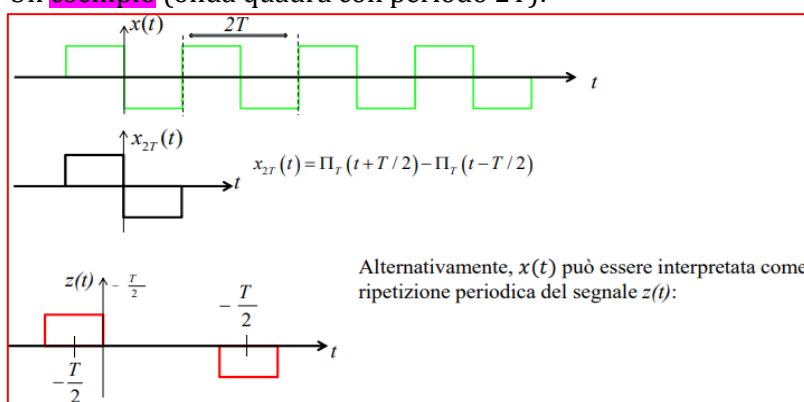
$$y(t) = x(t) * c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Dunque scrivendo un generico segnale z(t) come periodico, ovvero con $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t - nT)$, questo risulta essere periodico di periodo T anche quando il segnale $z(t)$ non è a supporto limitato in $[0, T]$. Da cui vediamo che, essendo $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t - nT) = z(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$, allora la trasformata la posso calcolare con:

$$X(f) = Z(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z\left(\frac{n}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

⚠ Dunque la rappresentazione di un segnale periodico $x_T(t)$ non è univoca, infatti possiamo usare un qualunque segnale $z(t)$ tale che nell’intervallo $[0, T]$ soddisfa la relazione $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t - nT) = x_T(t)$.

Un esempio (onda quadra con periodo $2T$):



Calcolando le 2 trasformate (del segnale nero e del segnale rosso), queste hanno formule diverse, ma nei multipli della frequenza fondamentale ($1/2T$) assumono gli stessi valori.

6) SPETTRO di ENERGIA, di POTENZA e AUTOCORRELAZIONE

In questa parte vediamo il **legame tra trasformata di Fourier e contenuto spettrale del segnale** (in termini di **energia o di potenza**) [lo avevamo già accennato ma non lo abbiamo visto nel dettaglio; inoltre avevamo detto che trasformata di Fourier = spettro di ampiezza]. Definiamo **SPETTRO DI ENERGIA** di un segnale $x(t)$:

$$S_x(f) = |X(f)|^2$$

L'integrale dello spettro di energia dà l'energia del segnale stesso (proprio per questo lo spettro di energia è anche detto **densità spettrale di energia**, cioè **energia per unità di frequenza [energia/Hz]**) [infatti per un segnale ad energia finita, lo spettro di energia fornisce informazione sul contenuto di energia attorno a ciascuna frequenza]:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

⚠ In un **sistema LTI** lo spettro di energia dell'uscita è dato da:

$$S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f) \text{ da cui } E(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \cdot S_x(f) df$$

⚠ In molte applicazioni si usano i **decibel** (usabili solo su rapporti tra potenze, in quanto si usano su grandezze adimensionate):

$$|H(f)|_{dB}^2 = \frac{S_y(f)}{S_x(f)} = 10 \log_{10}(|H(f)|^2) = 20 \log_{10}(|H(f)|)$$

Definiamo ora la **FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE** (per segnali ad energia finita) [x^* = coniugato]:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)x^*(t) dt = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

⚠ Se $\tau = 0$, la funzione di autocorrelazione è **uguale all'energia** del segnale:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt = E(x)$$

Lo **spettro di energia è uguale alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione**:

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = X(f) \cdot X^*(f) \rightarrow S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

⚠ Ci dice quanto al variare di τ il segnale ancora assomiglia a sé stesso, ovvero $R_x(\tau) = \langle x(t + \tau), x(t) \rangle$.

Per un segnale reale $x(t)$, l'autocorrelazione è **REALE, PARI** (in quanto ha simmetria hermitiana $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$ perciò se reale $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$) e con un **MASSIMO NELL'ORIGINE UGUALE ALL'ENERGIA DEL SEGNALE**.

⚠ Ricorda che:

- Segnale veloce nel tempo → banda larga → autocorrelazione stretta;
- Segnale lento nel tempo → banda stretta → autocorrelazione larga.

Usando la correlazione su segnali diversi otteniamo la **MUTUA CORRELAZIONE** (cross-correlation):

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)y^*(t) dt = R_{yx}^*(-\tau)$$

Analogamente lo **SPETTRO DI ENERGIA MUTUA**:

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\} = X(f)Y^*(f) = S_{yx}^*(f)$$

⚠ Per quest'ultimo, lo **spettro mutuo della somma di 2 segnali** ($z(t) = x(t) + y(t)$):

$$S_z(f) = S_x(f) + S_y(f) + 2 \operatorname{Re}\{S_{xy}(f)\}$$

Stesso risultato anche con l'autocorrelazione della somma di 2 segnali:

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2 \operatorname{Re}\{R_{xy}(\tau)\}$$

Per segnali ad energia infinita ma potenza media finita, come i **segnali periodici**, non possiamo usare lo spettro di energia, perciò si definisce lo **SPETTRO DI POTENZA** $G_x(f)$ tale che:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df$$

Inoltre, per i segnali periodici, abbiamo visto che la potenza media è calcolabile con i coefficienti della serie di Fourier, ovvero $P(x) = \sum_i |\mu_i|^2$, allora:

$$G_x(f) = \sum_i |\mu_i|^2 \delta\left(f - \frac{i}{T}\right)$$

Quindi posso anche definire la **funzione di autocorrelazione dei segnali periodici** come:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t + \tau)x^*(t) dt \rightarrow \text{Anche qui: } P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df = R_x(0)$$

Inoltre come per lo spettro di energia:

$$G_x(f) = \mathcal{F}\{R(\tau)\}$$

⚠ Per quanto riguarda segnali a potenza media finita (anche non periodici), la potenza è più complessa:

$$G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

E anche l'**autocorrelazione**:

$$\phi_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t + \tau)x^*(t) dt$$

⚠ Anche per gli spettri di potenza nei **sistemi LTI** vale la relazione:

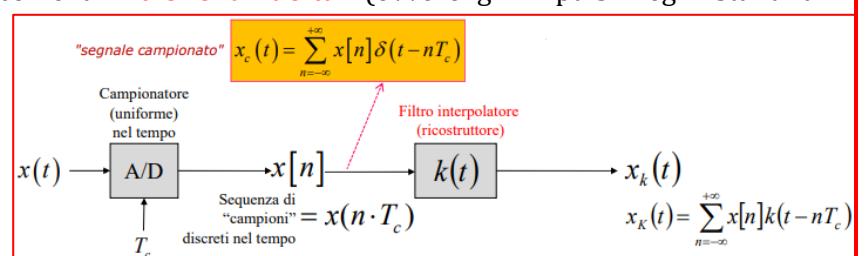
$$G_y(f) = G_x(f)|H(f)|^2$$

7) CONVERSIONE A/D - TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

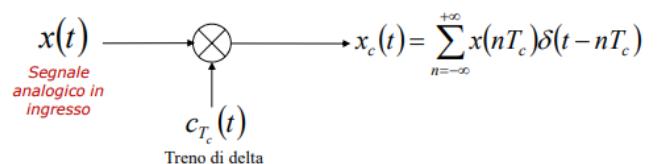
Abbiamo già parlato di **segnali analogici** (continui nel tempo e nelle ampiezze) e **segnali digitali** (discreti nel tempo [campionamento] e nelle ampiezze [quantizzazione]); quindi i segnali analogici vanno **convertiti in numerico/digitale**, elaborati/memorizzati e **poi riconvertiti in analogico** per l'utente che ne deve fruire. Seppur usiamo un segnale digitale, il suo **trasferimento** (es. telefono) è **analogico** (es. luce, elettricità, segnali) per poi essere riconvertito in segnale digitale; per fare tutto ciò servono **2 requisiti**: i bit generati dall'ADC devono essere trasmessi senza errori [noi qui non lo faremo] e i segnali in ingresso all'ADC e in uscita al DAC devono avere $v_{out}(t) \cong v_{IN}(t)$ [che vedremo ora]. **Noi in questo corso trascuriamo la quantizzazione**, ma **vedremo nel dettaglio il CAMPIONAMENTO** (ovvero il **passaggio da segnale analogico a segnale discreto nel tempo** e continuo nelle ampiezze [rappresentabile con un vettore di float]) [vogliamo quindi che il campionamento generi in uscita un segnale simile a quello in ingresso].

Il campionamento sarà migliore con un periodo di campionamento minore (e quindi una **frequenza di campionamento maggiore** $f_c = 1/T_c$, ma che vogliamo tenere al minimo possibile per avere il numero minimo di campioni con cui posso caratterizzare un segnale senza perdita di informazione e quindi gestirlo più facilmente).

Da qui in poi ipotizziamo che la **quantizzazione sia ideale**, cioè che le ampiezze siano ancora numeri reali e NON ampiezze discretizzate (ovvero **supponiamo che il segnale sia "quasi" continuo in ampiezza**) Noi in questo capitolo vogliamo quindi che il **campionamento generi in uscita un segnale simile a quello in ingresso** ($v_{out}(t) \cong v_{in}(t)$). Quindi rappresentiamo il segnale come un "**treno di delta**" (ovvero gli impulsi negli istanti di campionamento t_c) **moltiplicato per un fattore $x[n]$** (cioè il valore del segnale in quell'istante t_c); mentre per **ricostruirlo**, facciamo la sommatoria del termine $x[n]$ moltiplicato per il valore del filtro interpolatore (o ricostruttore).

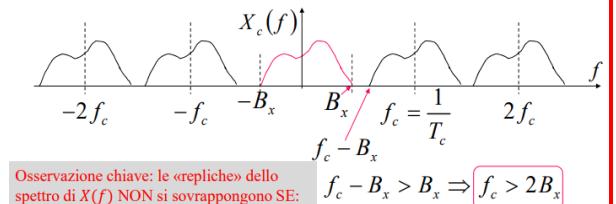


Quindi il **modello matematico del campionamento** è il sistema qui a destra (sempre supponendo che il segnale $x(t)$ da campionare abbia uno spettro di ingresso a **supporto limitato in frequenza in una banda B_x [unilaterale]**).

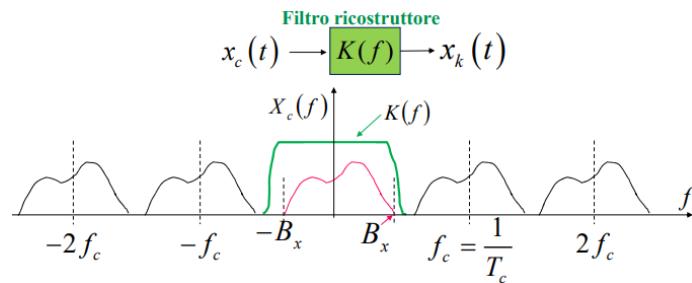


Calcolando ora la **trasformata del segnale campionato** avremo:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\delta(t-nT_c) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_c(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_c}\right)$$

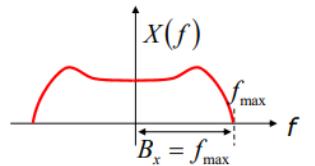


Da cui vediamo che **per ricostruire il segnale campionato, avrò bisogno che i singoli campionamenti del segnale non si sovrapongano**, ovvero che $f_c > 2B_x$; questo perché usando il filtro ricostruttore (interpolatore), questo deve selezionare la singola replica del segnale, senza toccare le altre repliche:



Quindi il **TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO** dice che un segnale a tempo continuo $x(t)$ [con banda limitata unilaterale] può essere campionato e ricostruito dai suoi campioni se la frequenza di campionamento è maggiore del doppio della banda del segnale (**con banda si intende la f massima del segnale**):

$$f_c > 2B_x = 2f_{max} \rightarrow T_c < \frac{1}{2B_x} = \frac{1}{2f_{max}}$$



È importante vedere i filtri ricostruttori $K(f)$ come "**INTERPOLATORI**":

$$x_k(t) = x_c(t) * k(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)k(t-nT_c)$$

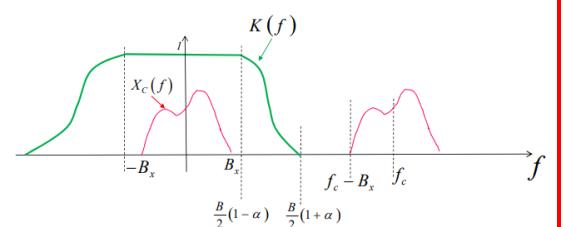
Alcuni **filtri ideali** sono:

- **Passabasso rettangolare** $\rightarrow K(f) = T_c \Pi_B(f)$ con $k(t) = BT_c \operatorname{sinc}(Bt)$ da cui:

$$x(t) = BT_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \operatorname{sinc}(B(t-nT_c)) \rightarrow \text{Caso limite } [B = f_c = \frac{1}{T_c}]: x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - n\right)$$

- **Coseno rialzato** $\rightarrow k(t) = BT_c \operatorname{sinc}(Bt) \frac{\cos(\alpha B \pi t)}{1-(\alpha B t)^2}$ con condizioni da rispettare:

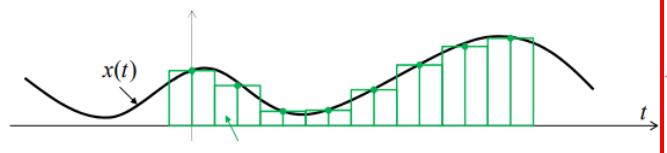
$$\begin{cases} \frac{B}{2}(1-\alpha) > B_x \\ \frac{B}{2}(1+\alpha) < f_c - B_x \end{cases}$$



⚠ Ma noi viviamo nella realtà, perciò ci sono delle **non-idealità da considerare. Esempi di interpolatori reali:**

- **SAMPLE&HOLD** \rightarrow un filtro con funzione costante a tratti, che è pratico ma anche distorcente:

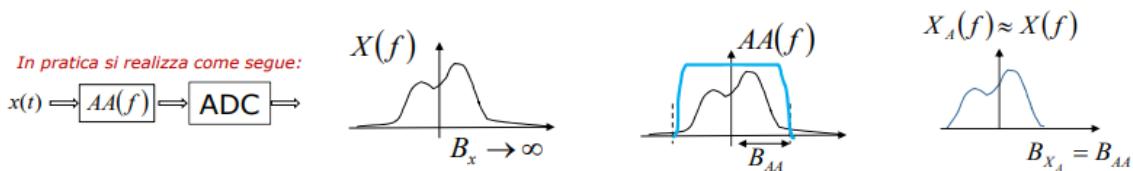
$$k(t) = \Pi_{T_c}(t) \rightarrow K(f) = T_c \operatorname{sinc}(fT_c)$$



- **INTERPOLATORE LINEARE TRA 2 PUNTI SUCCESSIVI** $\rightarrow k(t) = \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T_c}\right) \rightarrow K(f) = T_c \operatorname{sinc}^2(fT_c)$.

⚠ La maggior parte dei segnali analogici hanno però **supporto in frequenza illimitato (ovvero $B_x = +\infty$, perciò $f_c = +\infty$, ma impossibile); in questo caso il campionamento produce **sovraposizioni degli spettri (ALIASING)**.**

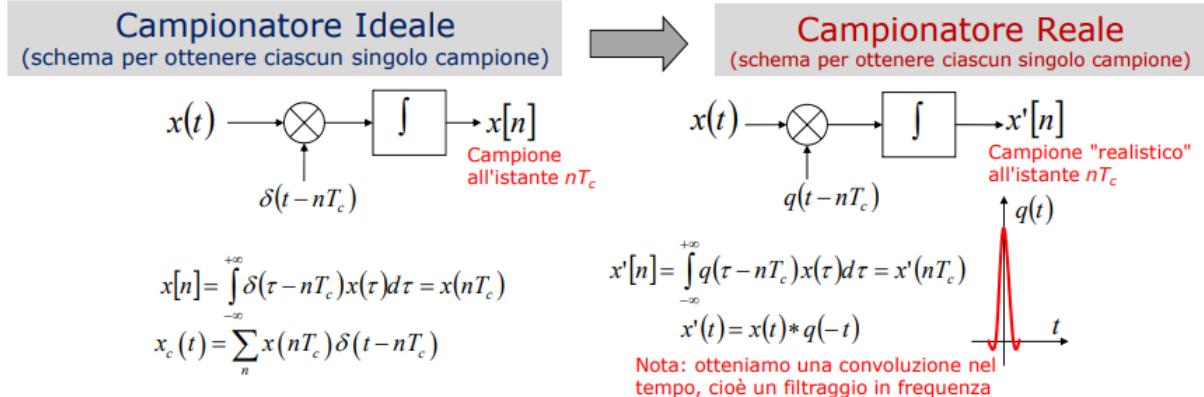
Per evitare ciò, prima del filtro campionatore viene inserito un $AA(f)$, ovvero un **FILTRO ANTI-ALIASING**, il quale elimina alla fonte le componenti spettrali che si sovrapporrebbero (cioè le “tronca”):



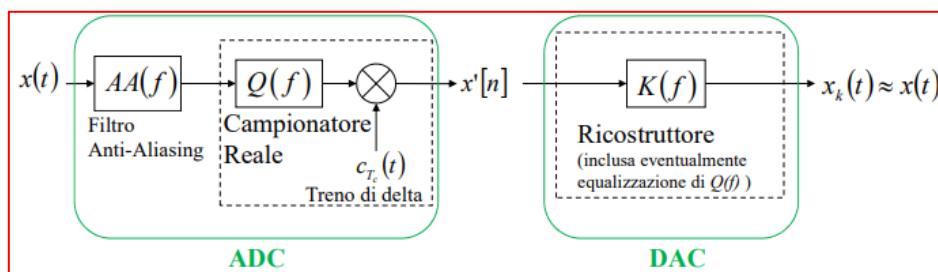
Questo troncamento comporta una **perdita di qualità** (proprio a causa di questo filtraggio/troncamento iniziale), ma rende il campionamento “ideale” sul segnale filtrato (quindi preferibile rispetto alla perdita di qualità dovuta alla sovrapposizione delle repliche del segnale).

Quindi caso specifico del teorema di campionamento per **segnali sinusoidali** $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ è che $f_c > 2f_0$ e quindi $T_c < \frac{1}{2f_0} = \frac{T_0}{2}$, ovvero sono necessari almeno 2 campioni per periodo della sinusoide per poi ricostruirla bene.

⚠ Dato che viviamo nella realtà, un campionatore “treno di delta” è impossibile da realizzare; nella realtà gli ADC **campionano il segnale con un treno di funzioni $q(t)$** che approssimano la delta (ma che non sono effettivamente tale):



Quindi il segnale/funzione $q(t)$ deve essere il più possibile simile alla delta e, nello specifico, deve essere molto **più stretto del tempo di campionamento T_c** ; quindi i **campionatori reali aggiungono una funzione di trasferimento $Q(f)$** rispetto ai campionatori ideali con il treno di delta. Questo però si può **compensare con il filtro ricostruttore** se questo implementa un’equalizzazione rispetto a $Q(f)$ [per la quale è necessario che $Q(f) \neq 0, \forall |f| < B$]. Quindi un sistema di campionamento reale avrà struttura:



Da cui vediamo che le **CONDIZIONI** realistiche di un sistema di campionamento sono:

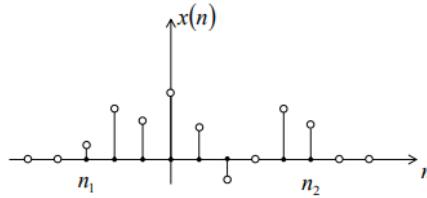
$$\begin{cases} \text{Anti - Aliasing: } AA(f) = \begin{cases} = 0 & \forall |f| > B_{AA} < \frac{f_c}{2} \\ \neq 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ \text{Campionatore reale: } Q(f) \neq 0 & \forall |f| < B_{AA} \\ \text{Ricostruttore: } K(f) = \begin{cases} \frac{1}{AA(f)Q(f)} & \forall |f| < B_{AA} \\ 0 & \forall |f| > f_c - B_{AA} \end{cases} \end{cases}$$

ELABORAZIONE DEI SEGNALI

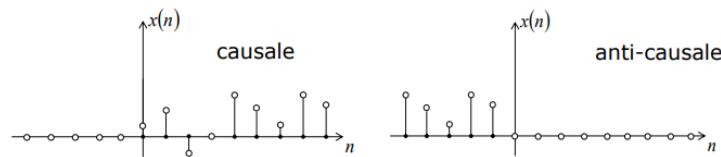
1) INTRODUZIONE

Definiamo **SEGNALI A TEMPO DISCRETO** quelli definiti rispetto ad una **variabile temporale discreta n** che assume solo valori interi; questi segnali sono infatti rappresentati da una sequenza di numeri indicizzati da n (quindi $x(n)$, $x[n]$ o x_n) [se assume solo ampiezze discrete definiamo $x(n)$ segnale numerico (o digitale)].

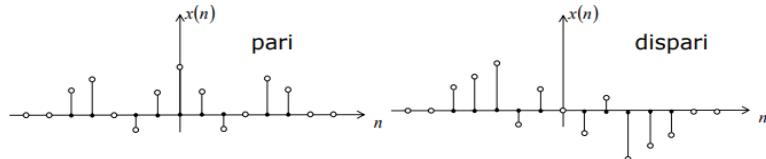
Una **sequenza** può avere durata **finita**, se è identicamente nulla all'esterno di un intervallo di tempo $[n_1, n_2]$, o **infinita**, se continua in un intervallo bilatero $(-\infty, +\infty)$ o monolatero $[n_1, +\infty)$ o $(-\infty, n_2)$. Il **supporto temporale** di una sequenza di durata finita è pari a $N = n_2 - n_1 + 1$ (quindi uguale al supporto in tempo continuo, ma si aggiunge il +1).



Una sequenza è detta **causale** se è nulla per $n < 0$, **anticausale** se $n \geq 0$; se invece è non nulla in entrambi gli assi positivo e negativo, si dice **bilatera**.



Una sequenza **reale** è detta **pari** se $x(n) = x(-n)$, e **dispari** se $x(n) = -x(-n)$.



Una sequenza **complessa** è detta **coniugata simmetrica** se $x(n) = x^*(-n)$, e **coniugata antisimmetrica** se $x(n) = -x^*(-n)$; da cui vediamo che una qualunque sequenza complessa si può scrivere come la somma di una sequenza coniugata simmetrica $x_p(n)$ e coniugata antisimmetrica $x_d(n)$:

$$x(n) = x_p(n) + x_d(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x^*(-n) + \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x^*(-n) = x(n)$$

Una sequenza è **periodica** se è possibile trovare un intervallo di tempo N per cui $x(n) = x(n \pm N)$; il periodo è il più piccolo valore intero positivo N per cui vale la relazione.

Una sequenza si dice **limitata** se, per qualunque istante di tempo discreto n , assume valori contenuti entro un intervallo finito, ossia $|x(n)| \leq X_0 < \infty$ con X_0 reale positivo.

Una sequenza si dice:

- **assolutamente sommabile** se $\sum_n |x(n)| < \infty$;
- **quadraticamente sommabile** se $\sum_n |x(n)|^2 < \infty$.

Vediamo ora le **OPERAZIONI ELEMENTARI** sulle sequenze:

- **SOMMA, DIFFERENZA, PRODOTTO** si fanno normalmente;
- **TRASLAZIONE** = cambio di variabile $n \rightarrow n - N$, cioè la sequenza $x(n - N) = x(n)$ ritardato di N ;
- **RIBALTAMENTO** = cambio di variabile $n \rightarrow -n$, cioè inverte l'asse dei tempi.

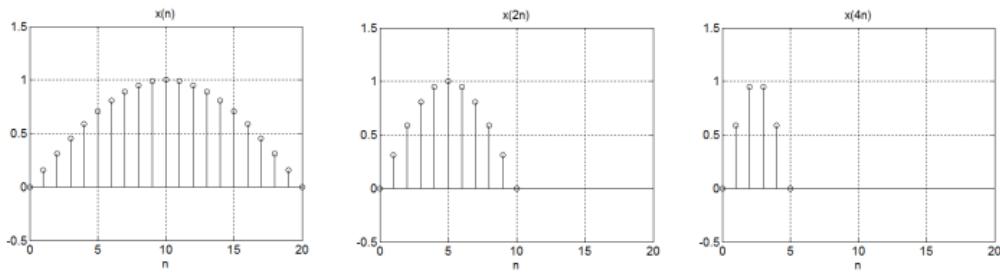
⚠ Importante l'ordine con cui faccio traslazione e ribaltamento perché si ottengono risultati diversi:

PRIMA: $x(n) \rightarrow x(n - N) \rightarrow x(-n - N)$

DOPPO: $x(n) \rightarrow x(-n) \rightarrow x(-(n - N)) = x(-n + N)$

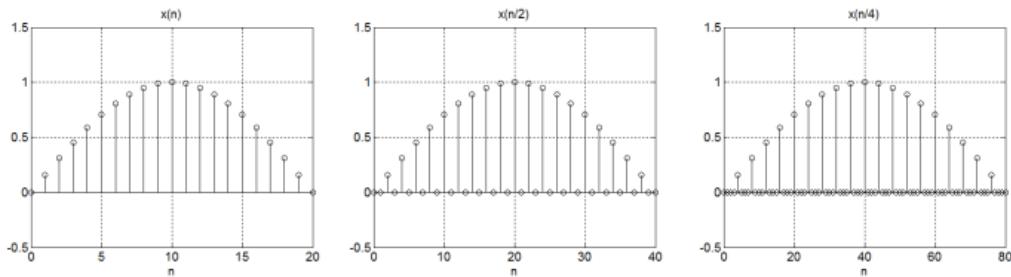
➤ **SCALAMENTO TEMPORALE** = sotto o sovra-campionamento, ovvero:

- **SOTTOCAMPIONAMENTO**: $y(n) = x(D \cdot n)$ con D intero positivo, cioè costruisco la sequenza $y(n)$ prendendo un campione ogni D della sequenza $x(n)$:



```
n=[0:20];
x=sin(2*pi*n/40);
D=2;
x_new = downsample(x,D);
n_new=[0:length(x_new)-1];
```

- **SOVRACCAMPIONAMENTO**: $y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{I}\right) & \forall n = 0, \pm I, \pm 2I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ con I intero positivo, cioè costruisco la sequenza $y(n)$ inserendo $(I - 1)$ zeri tra ogni campione della sequenza $x(n)$:



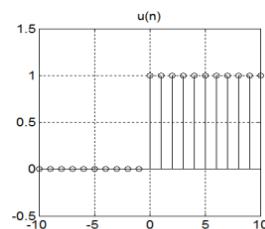
```
n=[0:20];
x=sin(2*pi*n/40);
I=2;
x_new = upsample(x,I);
n_new=[0:length(x_new)-1];
```

2) SEQUENZE FONDAMENTALI, ENERGIA e POTENZA

Vediamo alcune sequenze fondamentali ([sequenze](#), corrispondente analogico e codice MatLab):

- **GRADINO UNITARIO**:

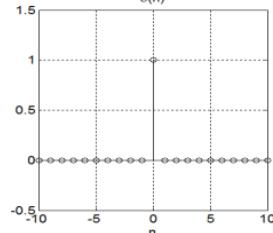
$$u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} \rightarrow u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



```
n=[-10:10];
y=zeros(1,21);
y(11:21)=1;
figure
set(gca, 'FontSize', 14)
stem(n,y, 'k')
xlabel('n')
title('u(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

- **DELTA DI KROENECHER (IMPULSO UNITARIO)**:

$$\delta(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ \infty & n = 0 \end{cases} \rightarrow \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

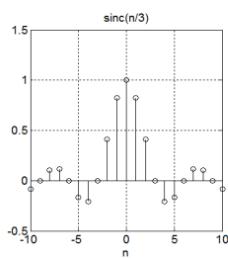


```
n=[-10:10];
y=zeros(1,21);
y(11)=1;
figure
set(gca, 'FontSize', 14)
stem(n,y, 'k')
xlabel('n')
title('\delta(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

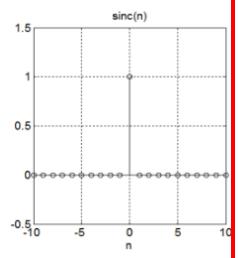
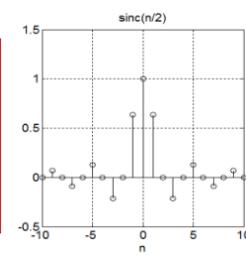
⚠ Importante la possibilità di esprimere ogni sequenza $x(n)$ come somma di impulsi $x(n) = \sum_i x(i)\delta(n - i)$. Inoltre è anche semplice verificare $x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n)$ [e analogamente $x(n)\delta(n - i) = x(i)\delta(n - i)$]. Inoltre c'è la relazione tra delta e gradino unitario: $u(n) = u(n - 1) + \delta(n)$.

- **SINC:**

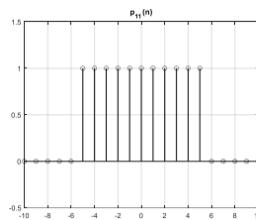
$$\text{sinc}\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{\pi \frac{n}{N}}$$



```
n=[-10:10];
y=sinc(n/3);
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('sinc(n/3)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

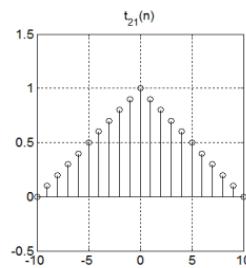


```
n=[-10:10];
y=zeros(1,21);
y(6:16)=1;
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('p_{11}(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```



- **PORTA:**

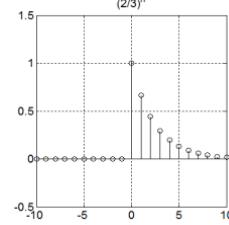
$$p_{2K+1}[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq K \\ 0 & |n| > K \end{cases}$$



```
N=10;
n=[-N:N];
y=1-abs(n)/N;
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('t_{21}(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

- **TRIANGOLO:**

$$t_{2N+1}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N} & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$$



```
n=[-10:10];
a=(2/3);
y=a.^n.*(n>=0);
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('(2/3)^n')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

- **ESPONENZIALE:**

$$x(n) = a^n u(n)$$

⚠ Se a è reale, la sequenza esponenziale è a segno costante se $a > 0$, segni alterni se $a < 0$; se invece a è complesso ($a = Ae^{j\theta}$), allora $x(n) = A^n e^{jn\theta} u(n)$!

Per quanto riguarda le **SINUSOIDI**, l'espressione di sinusoidi ed esponenziali a tempo discreto sono analoghe a quelle in tempo continuo:

$$x_c(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \theta) = A \cos(\omega_0 n + \theta) = A \frac{e^{j(2\pi f_0 n + \theta)} + e^{-j(2\pi f_0 n + \theta)}}{2}$$

$$x(n) = A e^{j(2\pi f_0 n + \theta)}$$

Le sinusoidi hanno **alcune proprietà**:

1. Sostituendo f_0 con $f_0 + k$ con k intero, si ottiene la stessa sinusoida; quindi sinusoidi che differiscono per un numero intero di angoli giro sono indistinguibili nel dominio del tempo discreto. Inoltre, quando si analizzano i segnali a tempo discreto nel dominio della frequenza è sufficiente considerare un intervallo di frequenze di supporto unitario (tipicamente $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ oppure $[0,1]$);
2. A differenza delle sinusoidi analoghe, la frequenza delle oscillazioni di una sinusode a tempo discreto aumenta all'aumentare di f_0 fino al valore $f_0 = \frac{1}{2}$; poi diminuisce fino ad annullarsi per $f_0 = 1$ (che per la proprietà vista prima corrisponde a $f_0 = 0$) [non sempre nello spazio a tempo discreto $T = \frac{1}{f}$].
3. Le sinusoidi sono periodiche se Nf_0 = numero intero, che si verifica solo se f_0 = numero razionale (se f_0 irrazionale, allora aperiodiche).

Definiamo poi **ENERGIA** di una sequenza:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Se $E_x < \infty$ la sequenza è ad energia finita, dove appunto E_x è reale, finito e strettamente positivo e non dipende dalle traslazioni temporali di $x(n)$ [in quanto $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n-N)|^2$].

Definiamo **POTENZA MEDIA** di una sequenza a energia infinita:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$$

Le sequenze a energia finita hanno potenza media nulla, mentre le sequenze a potenza media finita non nulla hanno energia infinita. Per un segnale periodico invece di periodo N, la potenza media è data da:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

⚠ Se le sequenze sono state **ottenute campionando segnali analogici**, nel calcolo di energia e potenza occorre tenere conto dell'intervallo di campionamento T_c , ovvero:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \approx T_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(nT_c)|^2$$

Da cui vediamo che minore è T_c (ovvero con maggiore frequenza di campionamento f_c), più l'energia del segnale campionato sarà simile a quella del segnale analogico di partenza!

⚠ Ricordati la convergenza delle serie geometriche (Analisi2) $\rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Analogamente si fa con la **potenza media** di:

- Segnali Periodici Campionati $\rightarrow P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_c)|^2$
- Segnali Non-periodici Campionati $\rightarrow P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(nT_c)|^2$

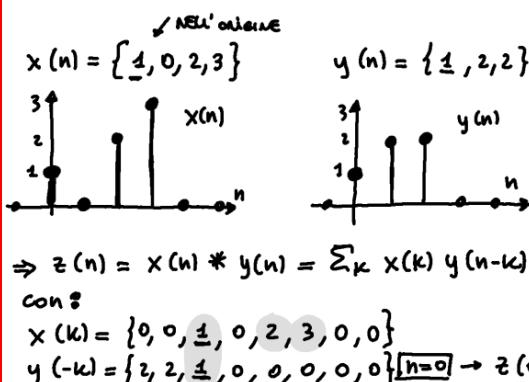
3) CONVOLUZIONE e CORRELAZIONE

Ora vediamo la **CONVOLUZIONE** e la **CORRELAZIONE** per segnali discreti (sequenze):

- **CONVOLUZIONE LINEARE** \rightarrow analoga a quella dei segnali a tempo continuo (anche le stesse proprietà):

$$q(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$$

⚠ Vale anche qui la convoluzione delle porte! Anche qui la convoluzione si può calcolare vedendo i 2 grafici come interagiscono tra loro, ma per i segnali discreti si preferisce usare tecniche "più numeriche". **Supporto della convoluzione = somma dei singoli supporti - 1**; valgono le proprietà commutativa, distributiva e associativa!



Esempio di calcolo di convoluzione:

$$\begin{aligned} y(1-k) &= \{0, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0\} \boxed{n=1} \rightarrow z(1) = \sum x(k) y(1-k) = 2 \\ y(2-k) &= \{0, 0, 2, 2, 1, 0, 0, 0\} \boxed{n=2} \rightarrow z(2) = \sum x(k) y(2-k) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 \\ y(3-k) &= \{0, 0, 0, 2, 2, 1, 0, 0\} \boxed{n=3} \rightarrow z(3) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \\ y(4-k) &= \{0, 0, 0, 0, 2, 2, 1, 0\} \boxed{n=4} \rightarrow z(4) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10 \\ y(5-k) &= \{0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 1\} \boxed{n=5} \rightarrow z(5) = 3 \cdot 2 = 6 \\ \text{Da cui: } z(n) &= \{1, 2, 4, 7, 10, 6\} \end{aligned}$$

o meglio $n=0$

- CORRELAZIONE:

- **Mutua-correlazione:**

$$R_{x,y}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k+n)y(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k)y(k-n) \Leftrightarrow R_{y,x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y^*(k+n)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y^*(k)x(k-n)$$

Perciò, nel caso di sequenze reali, $R_{x,y}(n) = R_{y,x}(-n)$!

- **Auto-correlazione:**

$$R_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k+n)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k)x(k-n)$$

Che nell'origine è l'**energia**:

$$R_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 = E_x$$

⚠ Analogamente, nel caso di sequenze:

- a **potenza media finita**, definiamo la funzione di correlazione:

- Mutua: $\phi_{x,y}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x^*(k+n)y(k);$
- Auto: $\phi_x(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x^*(k+n)x(k)$

- **periodiche**, definiamo la funzione di correlazione:

- Mutua: $\phi_{x,y}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k+n)y(k);$
- Auto: $\phi_x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k+n)x(k)$

Esempio di calcolo di correlazione

□ Calcolare la mutua correlazione tra le sequenze:

$$x(n) = \{1, 0, 2, 3\}$$

$$y(n) = \{1, 2, 2\}$$

$$R_{x,y}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-n)$$

$$x(k) = \{0, 0, 1, 0, 2, 3, 0, 0\}$$

$$R_{x,y}(-2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k+2) = 2$$

$$y(k+2) = \{1, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$R_{x,y}(-1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k+1) = 2$$

$$y(k+1) = \{0, 1, 2, 2, 0, 0, 0, 0\}$$

$$R_{x,y}(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k) = 5$$

$$y(k) = \{0, 0, 1, 2, 2, 0, 0, 0\}$$

$$R_{x,y}(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-1) = 10$$

$$y(k-1) = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 0\}$$

$$R_{x,y}(2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-2) = 8$$

$$y(k-2) = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 0\}$$

$$R_{x,y}(3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-3) = 3$$

$$y(k-3) = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2\}$$

$$R_{x,y}(n) = \{2, 2, 5, 10, 8, 3\}$$

$$x(n) = \{1, 0, 2, 3\}$$

$$R_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x(k-n)$$

$$x(k) = \{0, 0, 0, 1, 0, 2, 3, 0, 0, 0\}$$

$$R_x(-3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x(k+3) = 3$$

$$x(k+3) = \{1, 0, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$R_x(-2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x(k+2) = 2$$

$$x(k+2) = \{0, 1, 0, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$R_x(-1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x(k+1) = 6$$

$$x(k+1) = \{0, 0, 1, 0, 2, 3, 0, 0, 0, 0\}$$

$$R_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x(k) = 14$$

$$x(k) = \{0, 0, 0, 1, 0, 2, 3, 0, 0, 0\}$$

$$R_x(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x(k-1) = 6$$

$$x(k-1) = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 3, 0, 0\}$$

$$R_x(2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x(k-2) = 2$$

$$x(k-2) = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 3, 0\}$$

$$R_x(3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x(k-3) = 3$$

$$x(k-3) = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 3\}$$

$$R_x(n) = \{3, 2, 6, 14, 6, 2, 3\}$$

4) DTFT

Una sequenza $x(n)$ può essere rappresentata nel dominio della frequenza (in maniera analoga ai segnali a tempo continuo) usando la **Trasformata di Fourier a tempo discreto [DTFT]**:

$$X(e^{j2\pi f}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi fk}$$

⚠ Anche se il segnale di partenza è a tempo discreto, la DTFT è una funzione della variabile continua frequenza numerica f ; inoltre la DTFT è **periodica di periodo 1 rispetto ad f** . Inoltre, spesso viene definita usando la pulsazione discreta ω (quindi **periodica di periodo 2π in ω**) con:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k}$$

C'è un legame tra la DTFT e la trasformata di Fourier di un segnale campionato: sia $x(t)$ un segnale analogico campionato con una frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T_c}$, ovvero:

$$x_c(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c) \delta(t - kT_c)$$

La sua trasformata è:

$$X_c(f_a) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c) e^{-j2\pi k T_c f_a}$$

Perciò la **trasformata di Fourier di un segnale campionato coincide con la DTFT** (ovvero la trasformata di un segnale a tempo discreto) se $f = T_c f_a = \frac{f_a}{f_c}$.

Per quanto riguarda l'**antitrasformata** (IDTFT, ovvero l'**inversa**), posso considerare l'espressione della DTFT come la serie di Fourier della funzione periodica $X(e^{j\omega})$, dove i coefficienti sono $x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega$. Da cui otteniamo, con il cambio di variabile $f = \frac{\omega}{2\pi}$, che **IDTFT**:

$$x(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi f}) e^{j2\pi fk} df$$

⚠ Questa è uguale all'antitrasformata, eccetto per gli estremi dell'integrale (questo perché qui la DTFT è periodica di periodo 1 quindi integro tra $-1/2$ e $1/2$).

La **DTFT esiste e converge in modulo se $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| < \infty$** (ovvero se $x(k)$ è sommabile) [condizione sufficiente ma non necessaria]; inoltre se questo è soddisfatto, anche l'energia sarà finita! [dunque assolutamente sommabile implica esistenza DTFT ma **non viceversa**].

Esempi di calcolo di DTFT

$$x(n) = a^n u(n) \text{ con } |a| < 1$$

□ Calcolare la DTFT della sequenza $x(n) = \{1, 0, 3, -2\}$

□ Verifichiamo l'esistenza: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|} < \infty$

□ La sequenza $x(n)$ si può rappresentare tramite combinazione di delta numeriche:

$$x(n) = \delta(n) + 3\delta(n-2) - 2\delta(n-3)$$

■ dove abbiamo usato la formula: $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$

valida per ogni numero complesso r tale che $|r| < 1$.

□ Applicando la definizione:

□ Calcoliamo la DTFT:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^k = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\begin{aligned} X(e^{j2\pi f}) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi fk} = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) e^{-j2\pi fk} + 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k-2) e^{-j2\pi fk} - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k-3) e^{-j2\pi fk} = \\ &= 1 + 3e^{-j4\pi f} - 2e^{-j6\pi f} \end{aligned}$$

PROPRIETÀ DELLA DTFT:

| Proprietà | $x(n), y(n)$ | DTFT $X(e^{j2\pi f})$ |
|-----------------------|---|--|
| Linearità | $a_1x(n) + a_2y(n)$ | $a_1 \cdot X(e^{j2\pi f}) + a_2 \cdot Y(e^{j2\pi f})$ |
| Ribaltamento | $x(-n)$ | $X(e^{-j2\pi f})$ |
| Ritardo | $x(n-N)$ | $X(e^{j2\pi f})e^{-j2\pi f N}$ |
| Modulazione | $e^{j2\pi f_0 n} \cdot x(n)$ | $X(e^{j2\pi(f-f_0)})$ |
| Derivata in frequenza | $n \cdot x(n)$ | $\frac{j}{2\pi} \frac{dX(e^{j2\pi f})}{df}$ |
| Convoluzione | $x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$ | $X(e^{j2\pi f}) \cdot Y(e^{j2\pi f})$ |
| Prodotto | $x(n) \cdot y(n)$ | $X(e^{j2\pi f}) * Y(e^{j2\pi f}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi\eta})Y(e^{j2\pi(f-\eta)}) d\eta$ |

PROPRIETÀ DI SIMMETRIA DELLA DTFT:

| Segnale $x(n) \in \mathbb{R}$ | DTFT $X(e^{j2\pi f})$ |
|-------------------------------|--|
| $x(n)$ | $X(e^{j2\pi f}) = X_R(e^{j2\pi f}) + j X_I(e^{j2\pi f})$ |
| $x(n)$ | $X(e^{j2\pi f}) = X^*(e^{-j2\pi f})$ |
| $x(n)$ | $ X(e^{j2\pi f}) = X(e^{-j2\pi f}) $ |
| $x(n)$ | $\phi(X(e^{j2\pi f})) = -\phi(X(e^{-j2\pi f}))$ |
| $x(n)$ pari | $X(e^{j2\pi f}) = X_R(e^{j2\pi f})$ |
| $x(n)$ dispari | $X(e^{j2\pi f}) = j X_I(e^{j2\pi f})$ |

DTFT NOTEVOLI:

- **Delta:** $x(n) = \delta(n) \rightarrow DTFT: X(e^{j2\pi f}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k)e^{-j2\pi fk} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k) = 1$
- **Costante:** $x(n) = 1 \rightarrow DTFT: X(e^{j2\pi f}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fk} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-k) = \delta(f) \quad con -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$
- **Esponenziale:** $x(n) = e^{j2\pi f_0 n} \rightarrow DTFT: \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 k} e^{-j2\pi fk} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)k} = \delta(f-f_0)$
- **Coseno:** $x(n) = \cos(2\pi f_0 n) = \frac{e^{j2\pi f_0 n} + e^{-j2\pi f_0 n}}{2} \rightarrow DTFT: \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$
- **Seno:** $x(n) = \sin(2\pi f_0 n) = \frac{e^{j2\pi f_0 n} - e^{-j2\pi f_0 n}}{2j} \rightarrow DTFT: \frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$
- **Porta:** $x(n) = p_{2k+1}(n) \rightarrow DTFT: X(e^{j2\pi f}) = \frac{\sin(\pi f(2k+1))}{\sin(\pi f)}$
- **Sinc:** $x(n) = \text{sinc}\left(\frac{k}{N}\right) \rightarrow X(e^{j2\pi f}) = N p_{\frac{1}{N}}(f)$

→ SPETTRO DI ENERGIA e BANDA di SEGNALI DISCRETI

Definiamo **SPETTRO DI ENERGIA** di un segnale discreto:

$$S_x(f) = |X(e^{j2\pi f})|^2$$

t.c. $S_x(f) \geq 0$ sempre e, se $x(n)$ reale, allora lo spettro di energia è pari.

Vale anche per i segnali discreti la **RELAZIONE DI PARSEVAL** (energia di una sequenza = energia della sua DTFT calcolata sul suo periodo):

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(e^{j2\pi f})|^2 df$$

Data la sequenza $x(n)$, definiamo:

- **BANDA ASSOLUTA** → frequenza numerica $B_x < \frac{1}{2}$ tale che il modulo dello spettro $|X(e^{j2\pi f})|$ è nullo al di fuori dell'intervallo $[-B_x, B_x]$;
- **BANDA EQUIVALENTE** → frequenza B_{eq} tale che il rettangolo, con base $[-B_{eq}, B_{eq}]$ e altezza il massimo valore dello spettro di energia ($|X_M|^2$), possiede la stessa energia del segnale $x(n)$, ovvero:

$$2B_{eq}|X_M|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_x(f) df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

- **BANDA $B_{x\%}$** → estremo superiore della banda di frequenze che contiene $x\%$ dell'energia totale della sequenza:

$$\int_{-B_{x\%}}^{B_{x\%}} S_x(f) df = \frac{x}{100} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_x(f) df = \frac{x}{100} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

- **BANDA A 3 dB** → frequenza numerica a cui l'ampiezza dello spettro di energia si riduce di 3dB rispetto al max:

$$S_x(B_{3dB}) = \frac{|X_M|^2}{2}$$

Ma noi vogliamo poter implementare la DTFT su un calcolatore, però la variabile f su cui è definita è continua. Dovremmo **discretizzare la frequenza continua f** ed inoltre dovremmo **ridurre l'intervallo preso** (altrimenti troppi dati nel calcolatore). Dunque si passa dalla DTFT (Discrete Time Fourier Transform) alla **DFT (Discrete Fourier Transform)**:

5) DFT e FFT

Dunque definiamo la **DFT su N punti di una sequenza $x(n)$** (ovvero solo N campioni) prendendo $f = \frac{k}{N}$ (ovvero N frequenze equi-spaziate):

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

⚠ La DFT = $X(k)$ può essere vista come la DTFT = $X(e^{j2\pi f})$ valutata nelle N frequenze equi-spaziate (ovvero campionando la Trasformata di Fourier nel dominio della frequenza [da dominio discreto del tempo a dominio discreto della frequenza])!

L'**ANTITRASFORMATA** della DFT è definita così:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n \frac{k}{N}} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

⚠ Quindi in queste formule l'indice k individua la specifica frequenza (dunque discreta) nell'intervallo $[0, N-1]$ in frequenza, mentre n indica lo specifico istante di tempo (dunque discreto) nell'intervallo $[0, N-1]$ nel tempo!

Definiamo **ESTENSIONI PERIODICHE** della sequenza limitata $x(n)$ e della sua DFT $X(k)$:

$$\bar{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \quad \text{per } \forall k$$

$$\bar{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n \frac{k}{N}} \quad \text{per } \forall n$$

Queste sono funzioni periodiche di periodo N che non si limitano solo a $k \in [0, N-1]$ ma si estendono!

⚠ Il problema però che per ogni k (cioè per il calcolo di ogni singolo punto della DFT) sono necessarie N prodotti e $N - 1$ somme di numeri complessi, ovvero si ha **complessità $\approx 2N^2$** . Quindi si usano degli **algoritmi veloci di calcolo della DFT** per ridurre il numero di operazioni a **complessità $\approx N \log_2 N$** (sfruttando le proprietà di

simmetria e periodicità dei numeri complessi), basati sul “divide et impera” (risolvere ricorsivamente un problema spaccandolo in sottoproblemi e ricombinare i risultati). Prima di vedere gli algoritmi, vediamo che la DFT può essere scritta anche in **forma matriciale**:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x(0) x(1) \dots x(N-1)]^T & \mathbf{X} = \mathbf{H} \mathbf{x} & H_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \\ \mathbf{X} &= [X(0) X(1) \dots X(N-1)]^T & \mathbf{H} = \left[e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \right] = \left[H_N^{nk} \right] & k, n = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & H_N^1 & H_N^2 & \dots & H_N^{N-1} \\ 1 & H_N^2 & H_N^4 & \dots & H_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & H_N^{N-1} & H_N^{2(N-1)} & \dots & H_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

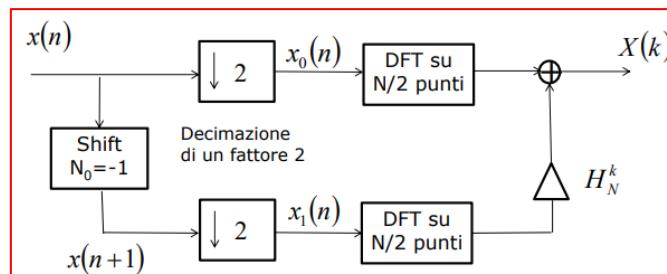
Proprio per questa forma matriciale, usando la simmetria della matrice \mathbf{H} , possiamo **semplificare le operazioni necessarie per il calcolo numerico della DFT**:

$$\begin{aligned} e^{-j\frac{2\pi}{N}} &= e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+N)} \Rightarrow H_N^{n+N} = H_N^n \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}} &= -e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+N/2)} \Rightarrow H_N^{n+N/2} = -H_N^n \\ e^{-j2k\pi} &= e^{-j\frac{2\pi kN}{N}} = 1 \Rightarrow H_N^{nk} = 1 \quad (k \text{ intero}) \\ e^{-j2\frac{2\pi}{N}} &= e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} \Rightarrow H_N^2 = H_{N/2} \end{aligned}$$

Vediamo ora l'**ALGORITMO DELLA FFT** (in questo caso la **DECIMAZIONE NEL TEMPO**): partendo dall'Hp che N = potenza di 2, dividiamo i dati in ingresso $x(n)$ in campioni di posto pari [$x_0(n) = x(2n)$] e posto dispari [$x_1(n) = x(2n+1)$] e scriviamo la DFT di $x(n)$ come:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^N x(n) H_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) H_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) H_N^{(2n+1)k} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) H_N^{2nk} + H_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) H_N^{2nk} = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) H_N^{\frac{n}{2}k} + H_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) H_N^{\frac{n}{2}k} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_0(n) H_N^{\frac{n}{2}k} + H_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) H_N^{\frac{n}{2}k} = X_0\left(\left|k\right|_{\frac{N}{2}}\right) + H_N^k X_1\left(\left|k\right|_{\frac{N}{2}}\right) \end{aligned}$$

Dunque vedendolo con uno schema circuitale (sistema), vediamo che la complessità si riduce a $N + \frac{N^2}{2}$.



⚠ Ma noi vogliamo che questa complessità si riduca ancora, quindi applichiamo ancora sia a x_0 sia a x_1 il divide et impera e così via. Quindi **si ripete il procedimento fino a dover valutare la DFT su un singolo punto**; dunque partendo da una sequenza di $N = 2^k$ campioni, sono possibili $k = \log_2 N$ stadi successivi con una **complessità totale $\approx \log_2(N) N!$**

PROPRIETÀ DELLA DFT: sono analoghe alla DTFT, ma sostituendo f con $\frac{k}{N}$ e considerando le estensioni periodiche delle sequenze (in tempo e frequenza):

| Proprietà | $x(n), y(n)$: N campioni | DFT $X(k)$ |
|------------------------|---|---|
| Linearità | $a_1x(n) + a_2y(n)$ | $a_1X(k) + a_2Y(k)$ |
| Ritardo | $x(n - N_0)_N$ | $X(k)e^{-j2\pi \frac{k}{N}N_0}$ |
| Modulazione | $e^{j2\pi \frac{k_0}{N}n}x(n)$ | $X(k - k_0)_N$ |
| Convoluzione circolare | $\sum_{p=0}^{N-1} x(p)y(n-p)_N$ | $X(k) \cdot Y(k)$ |
| Prodotto | $x(n) \cdot y(n)$ | $\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} X(p)Y(k-p)_N$ |
| Teorema di Parseval | $\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) ^2$ | |

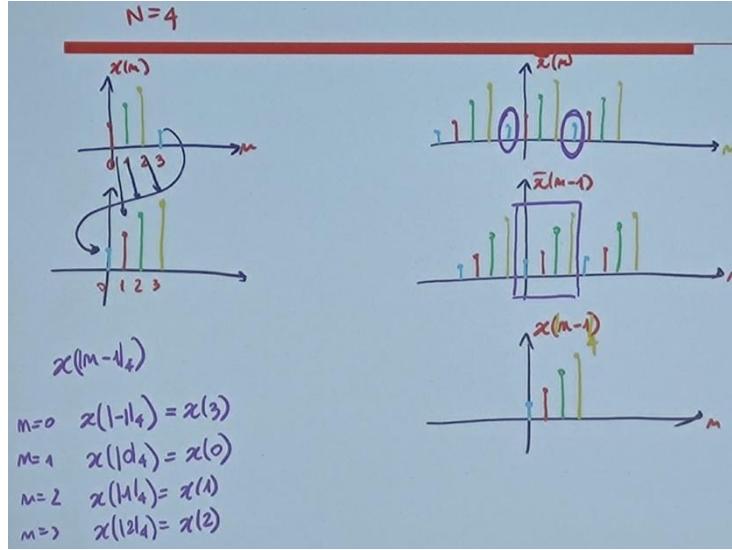
⚠ Per applicare queste proprietà anche alle sequenze di lunghezza finita, occorre introdurre l'operatore di "modulo" e l'operatore di "lunghezza circolare":

- **MODULO** → come il modulo (%) in informatica (es. C), ovvero un numero compreso tra 0 e $N - 1$ tale che:

$$|-21|_{16} = 5$$

- **RITARDO CIRCOLARE** → genera una sequenza periodizzata $\bar{x}(n)$ e applica il ritardo di N_0 campioni a $\bar{x}(n)$:
 $x(n - N_0)_N = \bar{x}(n - N_0)$ con $n \in [0, N - 1]$

Esempio:



⚠ Nella tabella delle proprietà, vediamo anche la **CONVOLUZIONE CIRCOLARE** (\otimes), che possiamo anche scrivere:

$$z_{cc}(n) = x(n) \otimes y(n) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p)y(n-p)_N \quad n \in [0, N-1]$$

Esempio (differenza convoluzione lineare e circolare, date $x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$ e $y(n) = \{1, 2, 2\}$):

□ **Convoluzione lineare:**

$$\begin{aligned} z(n) &= x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k) \\ x(k) &= \{0, 0, 1, 0, 2, 3, 0, 0\} \\ z(0) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(-k) = 1 \quad y(-k) = \{2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0\} \\ z(1) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(1-k) = 2 \quad y(1-k) = \{0, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

□ **Convoluzione circolare:**

$$\begin{aligned} x(n) &= \{1, 0, 2, 3\} \quad y(n) = \{1, 2, 2\} \\ z_{cc}(n) &= x(n) \otimes y(n) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p)y(n-p)_N \quad n \in [0, N-1] \\ z_{cc}(0) &= \sum_{p=0}^3 x(p)y(|-p|_4) = x(0)y(0) + x(1)y(3) + x(2)y(2) + x(3)y(1) = \\ &= 1 + 0 + 4 + 6 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(2) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(1-k) = 4 & y(2-k) &= \{0, 0, 2, 2, 1, 0, 0, 0\} \\
z(3) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(-k) = 7 & y(3-k) &= \{0, 0, 0, 2, 2, 1, 0, 0\} \\
z(4) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(1-k) = 10 & y(4-k) &= \{0, 0, 0, 0, 2, 2, 1, 0\} \\
z(5) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(1-k) = 6 & y(5-k) &= \{0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 1\} \\
z(n) &= \{1, 2, 4, 7, 10, 6\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{cc}(1) &= \sum_{p=0}^3 x(p)y(|1-p|_4) = x(0)y(1)+x(1)y(0)+x(2)y(3)+x(3)y(2) = \\
&= 2+0+0+6=8 \\
z_{cc}(2) &= \sum_{p=0}^3 x(p)y(|2-p|_4) = x(0)y(2)+x(1)y(1)+x(2)y(0)+x(3)y(3) = \\
&= 2+0+2+0=4 \\
z_{cc}(3) &= \sum_{p=0}^3 x(p)y(|3-p|_4) = x(0)y(3)+x(1)y(2)+x(2)y(1)+x(3)y(0) = \\
&= 0+0+4+3=7 \\
z_{cc}(n) &= \{11, 8, 4, 7\}
\end{aligned}$$

▲ La **convoluzione circolare** si può vedere come un **prodotto matrice circolante per vettore**, ovvero:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y(0) & y(3) & y(2) & y(1) \\ y(1) & y(0) & y(3) & y(2) \\ y(2) & y(1) & y(0) & y(3) \\ y(3) & y(2) & y(1) & y(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x(n)=\{1,0,2,3\} \\ y(n)=\{1,2,2,0\} \end{array} \quad \begin{array}{l} x(n)=\{1,0,2,3,0\} \\ y(n)=\{1,2,2,0,0\} \end{array}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x(n)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \\ y(n)=\{1,2,2,0,0\} \end{array}$$

Da cui vediamo che il **risultato dipende dalle dimensioni dei vettori N** (se aggiungo degli zeri cambia il risultato, a differenza della convoluzione lineare); infatti **aggiungendo un certo numero di zeri otteniamo come risultato il risultato della convoluzione lineare** [in questo caso con N = 6 si ottiene il risultato della convoluzione lineare].

PROPRIETÀ DI SIMMETRIA DELLA DFT:

| Segnale $x(n) \in \mathbb{R}$ | DFT $X(k)$ |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| $x(n)$ | $X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$ |
| $x(n)$ | $X(k) = X^*(-k _N)$ |
| $x(n)$ | $ X(k) = X(-k _N) $ |
| $x(n)$ | $\varphi(X(k)) = -\varphi(X(-k _N))$ |
| $x(n)$ pari | $X(k) = X_R(k)$ |
| $x(n)$ dispari | $X(k) = jX_I(k)$ |

Quindi vediamo che la **DFT** è una **versione campionata (realizzazione pratica)** della DTFT; per valutare la DTFT di una sequenza $x[n]$ composta da N campioni in una griglia di frequenze più fitta (ovvero $f_k = \frac{k}{N_1}$ con $N_1 \gg N$), allora **devo aggiungere $N_1 - N$ campioni nulli** (degli zeri) alla sequenza $x(n)$, ovvero:

$$x_z(n) = \begin{cases} x(n) & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & n = N, \dots, N_1 - 1 \end{cases}$$

Esempio (DFT di un segnale porta $x[n]$ con N campioni):

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j2\pi \frac{k}{N}}} = 0$$

A cui aggiungo N zeri ($N_1 = 2N$):

$$\begin{aligned}
X_z(k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} x_z(n)e^{-j2\pi n \frac{k}{2N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n \frac{k}{2N}} = \frac{1 - e^{-j2\pi n \frac{k}{2}}}{1 - e^{-j2\pi \frac{k}{2N}}} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\pi \frac{k}{N}}} = \frac{e^{-j\pi \frac{k}{2}} (e^{j\pi \frac{k}{2}} - e^{-j\pi \frac{k}{2}})}{e^{-j\pi \frac{k}{2N}} (e^{j\pi \frac{k}{2N}} - e^{-j\pi \frac{k}{2N}})} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)} e^{-j\pi \frac{k}{2}(1-\frac{1}{N})}
\end{aligned}$$

Dove solo 1 campione dove ogni 2 è zero!!!

⚠ Come abbiamo accennato prima, la convoluzione lineare può essere calcolata usando la convoluzione circolare; infatti quando si hanno sequenze molto lunghe, si fa il **CALCOLO VELOCE** della convoluzione lineare:

Si vuole calcolare la convoluzione lineare tra le due sequenze $x(n)$ e $h(n)$, di durata finita N_x e N_h .

Passo 1: si generano le due sequenze

$$x_z(n) = \begin{cases} x(n) & \forall n \in [0, N_x - 1] \\ 0 & \forall n \in [N_x, N_y - 1] \end{cases} \quad h_z(n) = \begin{cases} h(n) & \forall n \in [0, N_h - 1] \\ 0 & \forall n \in [N_h, N_y - 1] \end{cases}$$

Passo 2: si calcola la DFT su $N_y = N_x + N_h - 1$ punti di entrambe le sequenze:

$$X_z(k) = DFT[x_z(n)] \quad H_z(k) = DFT[h_z(n)]$$

Passo 3: prodotto in frequenza tra le due DFT:

$$Y_z(k) = X_z(k)H_z(k)$$

Passo 4: si calcola la IDFT su $N_y = N_x + N_h - 1$ punti del prodotto

$$y(n) = IDFT[Y_z(k)]$$

- Se N_y viene scelto come potenza di 2 e si impiega la FFT per il calcolo delle 3 DFT, la complessità finale è proporzionale a: $N_y \log_2(N_y)$
- La complessità del calcolo della convoluzione nel dominio del tempo è invece dell'ordine di $N_h N_x$ operazioni.

6) ANALISI IN FREQUENZA di SEGNALI CONTINUI CON DFT

Partiamo dall'Hip che il segnale continuo nel tempo $x(t)$ abbia **supporto limitato** nel tempo [$\text{supp} = (0, T_x)$], abbia **banda limitata** (B_x), viene **campionato con frequenza di campionamento** $f_c \geq 2B_x$ generando la sequenza $x(n) = x(nT_c)$ con $0 \leq n \leq N - 1$ [$N = \frac{T_0}{T_c}$ = numero di campioni t.c. $T_0 = NT_c \geq T_x$]. Il **campionamento ideale** ci dà:

$$x_c(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \delta(t - nT_c)$$

E ci **garantisce che le repliche della trasformata di Fourier** $X_c(f_a) = \mathcal{F}\{x_c(t)\}$ (che nascono proprio a causa del campionamento nel tempo) non si sovrappongano tra di loro in frequenza.

Dunque la **TRASFORMATA DI FOURIER (FT) del segnale campionato** si esprime con:

$$\begin{aligned} X_c(f_a) &= \mathcal{F}\left\{x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c)\right\} = \mathcal{F}\{x(t)\} * \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c)\right\} = X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_a - n \frac{1}{T_c}\right) \\ &= \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f_a - n \frac{1}{T_c}\right) \rightarrow \quad \mathbf{X(f_a) = T_c X_c(f_a)} \quad \text{con } -\frac{f_c}{2} \leq f_a \leq \frac{f_c}{2} \end{aligned}$$

Ovvero nell'intervallo $-\frac{f_c}{2} \leq f_a \leq \frac{f_c}{2}$, la **trasformata di Fourier del segnale analogico di partenza** è uguale alla **trasformata del segnale campionato per il periodo di campionamento**.

Infatti come abbiamo detto precedentemente la **DTFT di una sequenza $x(n)$ coincide con la trasformata di Fourier del segnale campionato nella frequenza analogica**:

$$\mathbf{DTFT[x(n)] = X(e^{j2\pi f}) = X_c(f_a)|_{f_a=f f_c}}$$

Vediamo poi che campionando $X_c(f_a)$ nel dominio della frequenza nel periodo $[0, f_c]$ con passo di campionamento $\Delta f = \frac{f_c}{N}$ otteniamo la relazione:

$$X_c\left(\frac{k}{N}f_c\right) = \mathbf{DFT[x(n)]} \quad \text{con } 0 \leq k \leq N - 1$$

Perciò sostituisco $X(f) = T_c X_c(f)$, ovvero:

$$X\left(\frac{k}{N}f_c\right) = T_c X_c\left(\frac{k}{N}f_c\right) = T_c \cdot \mathbf{DFT[x(n)]} \quad \text{con } 0 \leq k \leq N - 1$$

Si hanno infatti a disposizione $N = \frac{T_0}{T_c}$ campioni della FT con **spaziatura (o risoluzione)** in frequenza $\Delta f = \frac{f_c}{N} = \frac{1}{T_0}$ nel range di frequenze $[0, f_c - \frac{f_c}{N}]$. Aumentando l'intervallo T_0 su cui osserviamo il segnale, mantenendo fissa la f_c , si può aumentare la **risoluzione in frequenza** Δf . Per la regola accennata prima sulla convoluzione circolare,

per **aumentare la risoluzione in frequenza** viene spesso usata la tecnica dello **"zero padding"** (ovvero aggiungere $N_1 - N$ campioni nulli (degli zeri) alla sequenza $x(n)$ [spettro non modificato ma griglia più fitta]), ovvero:

$$y(kT_c) = \begin{cases} x(kT_c) & k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & k = N, \dots, N_1-1 \end{cases}$$

Dunque riepilogando, i **parametri della DFT** sono:

- T_0 : intervallo di osservazione del segnale $x(t)$
- T_c : intervallo di campionamento del segnale $x(t)$
- N : numero di campioni prelevati dal segnale $x(t)$
- f_c : frequenza di campionamento (periodo della DFT)
- Δf : risoluzione in frequenza della DFT

⚠ I parametri liberi sono 2, perciò la scelta dei parametri deve essere fatta in modo da limitare l'aliasing!

⚠ Riguardo all'**analisi in frequenza tramite DFT di segnale analogico periodico** $x_T(t)$ di periodo T , la scelta di f_c deve essere fatta cercando di rispettare il teorema del campionamento ($f_c \geq 2B_x$); l'intervallo di osservazione T_0 dovrà contenere un numero intero di periodi, in modo da far coincidere il segnale campionato in frequenza con il segnale originario!

⚠ Gli esercizi su questa parte saranno sulla scelta dei parametri della DFT!

7) SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Anche i **SISTEMI A TEMPO DISCRETO** dipendono dalla loro relazione ingresso-uscita $y(\mathbf{n}) = \mathbf{L}[x(\mathbf{n})]$ e possono essere classificati in base all'espressione matematica dell'operatore $L[\cdot]$:

- **LINEARI** $\rightarrow L[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1L[x_1(n)] + a_2L[x_2(n)]$;
- **STAZIONARI (TEMPO-INVARIANTI)** $\rightarrow L[x(n)] = y(n) \Rightarrow L[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$;
- **CAUSALI** \rightarrow la risposta corrente $y(n)$ non dipende dai valori futuri dell'ingresso (cioè da termini $x(n + n_0)$);
- **CON e SENZA MEMORIA** \rightarrow la risposta corrente $y(n)$ dipende solo dal valore dell'ingresso nel medesimo istante di tempo n , e non da termini dell'ingresso precedenti.

Definiamo la **RISPOSTA ALL'IMPULSO** dei sistemi discreti LTI:

$$\begin{aligned} x(n) = [\text{segnale discreto}] \rightarrow x(n) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i) \rightarrow \text{LTI}: y(n) = L[x(n)] = L\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)\right] = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)L[\delta(n-i)] \rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{n}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(i)\mathbf{h}(\mathbf{n}-i) = \mathbf{x}(\mathbf{n}) * \mathbf{h}(\mathbf{n}) = \sum_{i=-\infty}^{-1} h(i)x(n-i) + \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i) \end{aligned}$$

⚠ Da ciò vediamo che per un **sistema causale**, il 1° termine deve essere nullo, ovvero:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(n-i)$$

Analogamente ai sistemi in tempo continuo, definiamo **RISPOSTA IN FREQUENZA** dei sistemi discreti come la DTFT della risposta all'impulso (sistemi discreti) [funzione complessa della variabile ω]:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)e^{-j\omega i} = \text{DTFT}[\mathbf{h}(\mathbf{n})] = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Vediamo alcuni casi:

- **Risposta a esponenziali complessi** \rightarrow dato segnale in ingresso $x(n) = e^{j\omega_0 n}$, l'uscita sarà $\mathbf{y}(\mathbf{n}) = |H(e^{j\omega_0})|e^{j\omega_0 n + j\phi[H(e^{j\omega_0})]}$, ovvero l'ingresso verrà solo amplificato e sfasato (come avevamo visto con il coseno nei segnali analogici, quindi autofunzioni);
- **Risposta a sequenze sinusoidali** \rightarrow dato segnale in ingresso $x(n) = \cos(\omega_0 n + \theta)$, l'uscita sarà $\mathbf{y}(\mathbf{n}) = |H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \theta + \phi[|H(e^{j\omega_0})|])$, ovvero come nel segnale analogico solo amplificato e sfasato (autofunzione).

Ora però ipotizziamo di avere come ingresso un segnale $x(n) = z_0^n$ con $z_0 = \text{costante complessa}$; l'uscita del sistema sarà $y(n) = z_0^n H(z_0)$ con:

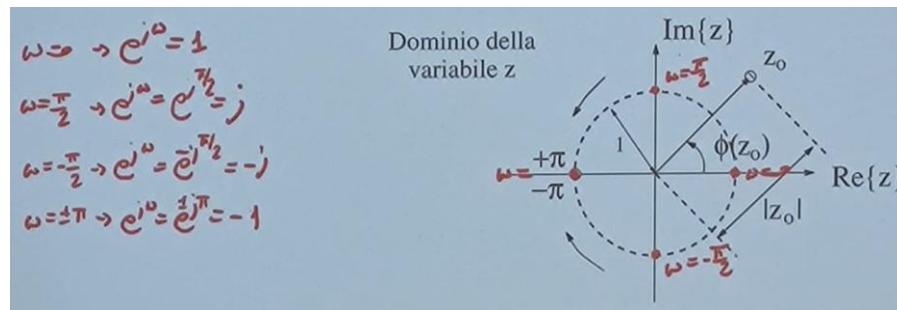
$$H(z_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z_0^{-k} = \text{Funzione di trasferimento del sistema LTI}$$

Dal punto di vista matematico, data una generica sequenza $x(n)$, chiamiamo **TRASFORMATA ZETA** di $x(n)$:

$$H(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Con $z = \text{variabile complessa}$ (ovvero $z = \rho e^{j\omega}$) e $n = \text{informazione temporale}$.

⚠ C'è una corrispondenza tra DTFT e ZETA, in quanto la trasformata zeta è una generalizzazione della DTFT (la DTFT è una trasformata ZETA dove la variabile complessa z vale $z = e^{j\omega}$); quindi se $z = e^{j\omega}$, la ZETA coincide con la DTFT!



I valori per cui la trasformata converge ($\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \rightarrow 0$) formano la **ROC** (Regione di convergenza); nella ROC, la trasformata zeta $X(z)$ è analitica (continua e infinitamente derivabile, con derivate continue). La ROC dipende solo dal modulo (e non dalla fase) [come la DTFT dove la condizione di esistenza era $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| < \infty$, ovvero $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| \rho^{-k} < \infty$ (cioè se $|x(k)| \rho^{-k}$ assolutamente sommabile)].

Le caratteristiche delle ROC della trasformata zeta dipendono dal tipo di sequenza:

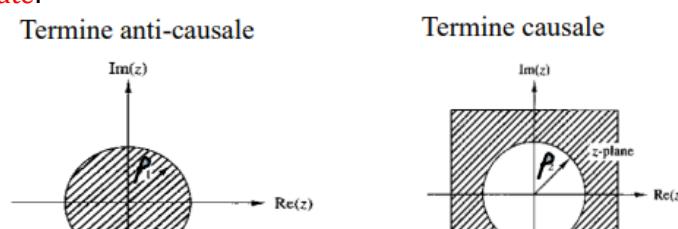
- **Bilatera**: supporto sia su tempo positivo sia su negativo;
- **Unilatera causale**: supporto solo su tempo positivo (tempo negativo = 0);
- **Unilatera anticausale**: supporto solo su tempo negativo (tempo positivo = 0).

Per cercare la ROC, è utile separare i termini della sommatoria per n positivo (causale) e negativo (anticausale):

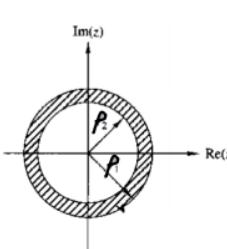
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| \rho^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} |x(k)| \rho^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)| \rho^{-k} = \sum_{i=1}^{+\infty} |x(-i)| \rho^{-i} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x(k)|}{\rho}$$

Da cui $X(z)$ converge se entrambe le sommatorie (causale e anticausale) convergono, ovvero le **ROC** di:

- **Sequenze unilatere limitate**:



- **Sequenze bilaterali limitate**:



⚠ Sequenze a supporto finito (es. $\text{supp}(x) = [a, b]$, ovvero $x(n) = \sum_{k=a}^b x(k)\delta(n-k)$) hanno trasformata zeta esprimibile come $X(z) = \sum_{k=a}^b x(k)z^{-k}$! Qui la trasformata zeta converge sempre eccetto in $z = 0$ se ci sono termini z^{-k} con $k > 0$, e in $z = \pm\infty$ se ci sono termini z^{-k} con $k < 0$!

Poi ci sono **trasformate zeta RAZIONALI**:

Fattorizzando i due polinomi in termini delle rispettive radici elementari, si ha:

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^{p_n} (1 - c_i z^{-1})}{a_0 \prod_{i=1}^{p_d} (1 - d_i z^{-1})} = \frac{b_0}{a_0} z^{p_d - p_n} \frac{\prod_{i=1}^{p_n} (z - c_i)}{\prod_{i=1}^{p_d} (z - d_i)}$$

Le radici c_1, \dots, c_{p_n} del numeratore sono dette **ZERI** di $X(z)$

Le radici d_1, \dots, d_{p_d} del denominatore sono dette **POLI** di $X(z)$

Esempio, se ho $X(z) = \frac{4+z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$ posso passare alla forma $X(z) = 4 \frac{(1+\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$ oppure più semplicemente moltiplicare per z^2 sia numeratore sia denominatore e ottenere $X(z) = \frac{4z^2+z}{z^2-3z+2} = \frac{4z(z+\frac{1}{4})}{(z-1)(z-2)}$.

Dunque le ROC di:

- **Sequenza causale a supporto illimitato** $\rightarrow |z| > d_M$, ovvero l'esterno di una circonferenza con raggio $d_M =$ modulo del polo più distante dall'origine di $X(z)$;
- **Sequenza anticausale a supporto illimitato** $\rightarrow |z| < d_m$, ovvero l'interno di una circonferenza con raggio $d_m =$ modulo del polo più vicino all'origine di $X(z)$;
- **Sequenza bilatera a supporto illimitato** \rightarrow **corona circolare** somma della ROC causale e anticausale.

Esempio (calcolo della trasformata zeta e della ROC di sequenza **causale**, **anticausale** e **bilatera**):

| | | |
|--|--|--|
| $x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ | $x_2(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$ | $x_3(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$ |
| $X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, z < 1$ | $X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n)z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-k} z^k = -1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (-2z)^k = -1 + \frac{1}{1 - (-2z)} = \frac{-2z}{1 + 2z}, -2z < 1$ | $X_3(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} + \frac{z}{z + \frac{1}{2}} = \frac{z\left(2z + \frac{1}{6}\right)}{z^2 + \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}}, \text{ con } \frac{1}{3} < z < \frac{1}{2}$ |
| $X_1(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \quad z > \frac{1}{3}$ | $X_2(z) = \frac{-z}{z + \frac{1}{2}} \quad z < \frac{1}{2}$ | |

| Sequenza $x(n)$ | $X(z)$ | ROC |
|---------------------------------|--|------------------------------|
| $\delta(n)$ | 1 | $\forall z$ |
| $\delta(n-N), N > 0$ | z^{-N} | $\forall z - \{z = 0\}$ |
| $\delta(n+N), N > 0$ | z^{+N} | $\forall z - \{z = \infty\}$ |
| $u(n)$ | $\frac{1}{1 - z^{-1}}$ | $\forall z > 1$ |
| $-u(-n-1)$ | $\frac{1}{1 - z^{-1}}$ | $\forall z < 1$ |
| $\alpha^n u(n)$ | $\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$ | $\forall z > \alpha $ |
| $-\alpha^n u(-n-1)$ | $\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$ | $\forall z < \alpha $ |
| $n\alpha^n u(n)$ | $\frac{\alpha z}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$ | $\forall z > \alpha $ |
| $n\alpha^{n-1} u(n)$ | $\frac{z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$ | $\forall z > \alpha $ |
| $(n-1)\alpha^n u(n)$ | $\frac{2\alpha z^{-1} - 1}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$ | $\forall z > \alpha $ |
| $n^2 \alpha^n u(n)$ | $\frac{\alpha z^{-1} (1 + \alpha z^{-1})}{(1 - \alpha z^{-1})^3}$ | $\forall z > \alpha $ |
| $-n\alpha^n u(-n-1)$ | $\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$ | $\forall z < \alpha $ |
| $\sin(\omega_o n)u(n)$ | $\frac{\sin(\omega_o)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_o)z^{-1} + z^{-2}}$ | $\forall z > 1$ |
| $\cos(\omega_o n)u(n)$ | $\frac{1 - \cos(\omega_o)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_o)z^{-1} + z^{-2}}$ | $\forall z > 1$ |
| $\alpha^n \sin(\omega_o n)u(n)$ | $\frac{\alpha \sin(\omega_o)z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos(\omega_o)z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$ | $\forall z > \alpha$ |
| $\alpha^n \cos(\omega_o n)u(n)$ | $\frac{1 - \alpha \cos(\omega_o)z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos(\omega_o)z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$ | $\forall z > \alpha$ |
| $\alpha^n [u(n) - u(n-N)]$ | $\frac{1 - \alpha^N z^{-N}}{1 - \alpha z^{-1}}$ | $\forall z > 0$ |

TRASFORMATE ZETA FONDAMENTALI →

PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA ZETA:

| Sequenza $x(n), y(n)$ | $X(z), Y(z)$ | ROC R_x, R_y |
|--|--|---|
| $x(n - N)$ | $z^{-N}X(z)$ | se $N > 0 \rightarrow R_x \setminus \{z = 0\}$ se $N < 0 \rightarrow R_x \setminus \{z = \infty\}$ |
| $\alpha_1 x(n) + \alpha_2 y(n), \alpha_1, \alpha_2$ costanti | $\alpha_1 X(z) + \alpha_2 Y(z)$ | contiene $R_x \cap R_y$ |
| $x(-n)$ | $X(z^{-1})$ | $\frac{1}{R_x}$ |
| $x^*(n)$ | $X^*(z^*)$ | R_x |
| $x^*(-n)$ | $X^*(\frac{1}{z^*})$ | $\frac{1}{R_x}$ |
| $\Re(x(n))$ | $\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$ | contiene R_x |
| $\Im(x(n))$ | $\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$ | contiene R_x |
| $x(-n)u(-n - 1)$ | $X(z^{-1}) - x(0), x(n)$ causali | — |
| $\alpha^n x(n)$ | $X(z/\alpha)$ | $ \alpha \cdot R_x$ |
| $nx(n)$ | $-z \frac{d}{dz} X(z)$ | R_x meno $z = \infty$ o $z = 0$ |
| $nx(-n)$ | $-z \frac{d}{dz} X(z^{-1})$ | contiene $\frac{1}{R_x}$ |
| $n\alpha^n x(n)$ | $-z \frac{d}{dz} X(z/\alpha)$ | $ \alpha \cdot R_x$ meno $z = \infty$ o $z = 0$ |
| $\cos(2\pi f n)x(n)$ | $\frac{1}{2}[X(ze^{j2\pi f}) + X(ze^{-j2\pi f})]$ | — |
| $\sin(2\pi f n)x(n)$ | $\frac{1}{2j}[X(ze^{j2\pi f}) - X(ze^{-j2\pi f})]$ | — |
| $x(n) \star y(n)$ | $X(z)Y(z)$ | contiene $R_x \cap R_y$ |

Inoltre, **TEOREMA DEL VALORE INIZIALE** → se $x(n)$ è una sequenza casuale, allora:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} [x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots]$$

L'**ANTITRASFORMATA ZETA** (inversione della zeta) è data dall'integrale curvilineo:

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz = Z^{-1}[X(z)]$$

Data la complessità dell'integrale curvilineo, si usa il **TEOREMA DEI RESIDUI**:

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^{N_p} R_i [X(z) z^{n-1}] |_{\text{poli } \in \gamma}$$

Nella pratica, useremo **2 metodi per trovare l'antitrasformata**:

- **METODO DIRETTO** (per ispezione) → quando $X(z)$ è un **polinomio** o si quando si riesce ad esprimere come combinazione lineare di sequenze di cui conosciamo l'anti-trasformata. **Esempi**:

Calcolare l'antitrasformata della funzione:

$$X(z) = z^4 + 3z^{-1} + 4z^{-10}$$

Usando la proprietà di linearità:

$$x(n) = Z^{-1}[z^4] + 3Z^{-1}[z^{-1}] + 4Z^{-1}[z^{-10}]$$

Usando la proprietà del ritardo: $Z[\delta(n-N)] = z^{-N}$

$$x(n) = \delta(n+4) + 3\delta(n-1) + 4\delta(n-10)$$

Calcolare l'anti-trasformata della funzione:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)^2}, \quad |z| > |\alpha|$$

$X(z)$ si può scomporre come:

$$X(z) = \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2} + \frac{z}{z-\alpha}$$

L'anti-trasformata vale quindi:

$$x(n) = \alpha^n u(n) + n\alpha^n u(n) = (n+1)\alpha^n u(n)$$

- **ESPANSIONE IN FRATTI SEMPLICI** → quando $X(z)$ è **razionale** con $\deg(D) > \deg(N)$ [altrimenti devo ricondurmi al caso stesso usando la **divisione di polinomi** (già vista)], con **radici tutte semplici e ROC del tipo $|z| > k$ (causale)**, allora si possono usare i fratti semplici (**Hermite**). **Esempio**:

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} = \sum_i R_i \frac{1}{1 - d_i z^{-1}} \rightarrow \text{Poli:} \begin{cases} d_1 = \frac{1}{2} \rightarrow R_1 = \left. \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \right|_{z=\frac{1}{2}} = 3 \\ d_2 = \frac{1}{3} \rightarrow R_2 = \left. \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \right|_{z=\frac{1}{3}} = -2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow X(z) = \sum_i R_i \frac{1}{1 - d_i z^{-1}} = 3 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} - 2 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)} \rightarrow \text{Sequenza: } x(n) = Z^{-1}[X(z)] = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

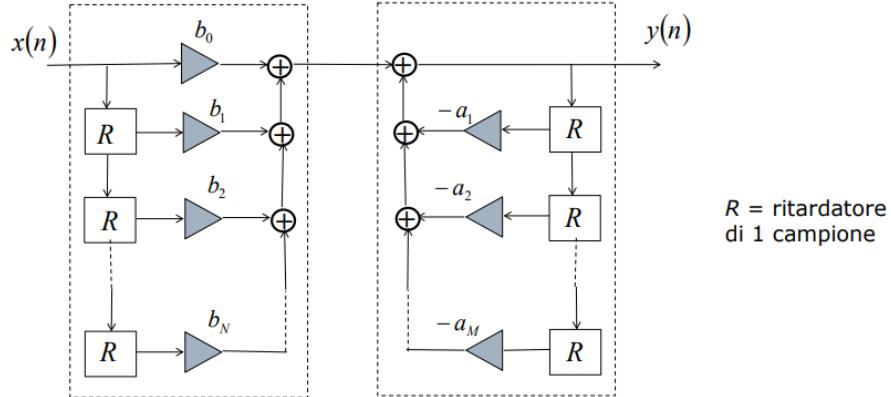
Come avevamo già visto, in un sistema LTI discreto, dato che $y(n) = x(n) * h(n)$, allora la f.d.t sarà data da $Y(z) = Z[x(n) * h(n)] = X(z)H(z)$ con ROC = intersezione tra le ROC di $X(z)$ e $H(z)$.

Ora vediamo anche che, per **sistemi LTI a tempo discreto**, il comportamento può essere descritto da un'**EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE** (e coefficienti costanti):

$$y(n) = - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k)$$

⚠ Nei sistemi causali, i **termini con $n < 0$ sono nulli**, quindi tutti i termini del tipo $y(n < 0)$ sono nulli!

Questa equazione esprime l'uscita di un sistema LTI come combinazione lineare dell'ingresso attuale $x(n)$, degli N valori precedenti assunti dall'ingresso e degli M valori precedenti assunti dall'uscita stessa (se almeno 1 coefficiente a_i è $\neq 0$ è detta ricorsiva). Si può rappresentare con un diagramma a blocchi composto da **ritardatori**, **moltiplicatori** e **sommatori**:



Da qui vediamo che la **RISPOSTA ALL'IMPULSO** si può ricavare da questa equazione, mettendo $x(n) = \delta(n)$ e $y(n) = h(n)$, ovvero:

$$h(n) = - \sum_{k=1}^M a_k h(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k \delta(n-k)$$

⚠ Ricorda però che la risposta all'impulso si può anche ricavare dall'**ANTI-TRASFORMATO ZETA** della funzione di trasferimento $H(z) = Y(z)/X(z)$ (ovvero $h(n) = Z^{-1}[H(z)]$)!

Approfondiamo ora i **FILTRI DIGITALI** (ovvero i sistemi LTI a tempo discreto descritti mediante la loro f.d.t):

$$y(n) = - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \rightarrow Y(z) = Z[y(n)] = - \sum_{k=1}^M a_k Y(z)z^{-k} + \sum_{k=0}^N b_k X(z)z^{-k}$$

Da cui:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-M}} = H_N(z)H_R(z)$$

Distinguiamo 2 tipi di filtri:

- **FIR (Risposta all'Impulso Finita)** → $y(n)$ dipende solo da segnale in ingresso:

$$\begin{cases} y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \\ H(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N} \\ h(n) = \sum_{k=0}^N b_k \delta(n-k) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \dots + b_N \delta(n-N) \end{cases}$$

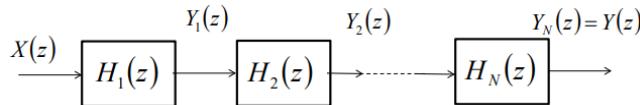
- **IIR (Risposta all'Impulso Infinito)** → $y(n)$ dipende anche dalla retroazione:

$$\begin{cases} y(n) = -\sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \\ H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \\ h(n) = -\sum_{k=1}^M a_k h(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k \delta(n-k) \end{cases}$$

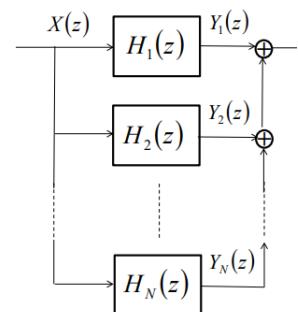
⚠ Un sistema è detto "puramente ricorsivo" se $y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k)$.

Facendo invece **INTERCONNESSIONE DI SISTEMI LTI DISCRETI**, abbiamo:

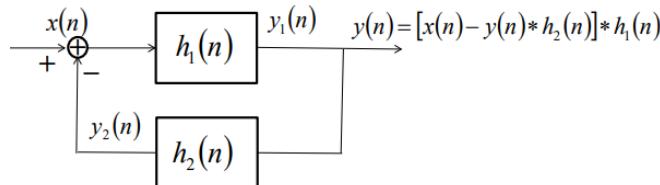
- **INTERCONNESSIONE IN SERIE** → $H_{TOT}(z) = H_1(z)H_2(z) \dots H_N(z)$:



- **INTERCONNESSIONE IN PARALLELO** → $H_{TOT}(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_N(z)$:



- **INTERCONNESSIONE CON REAZIONE** → $H_{TOT}(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$:



Vediamo ora la **STABILITÀ (BIBO, Bounded-Input Bounded-Output)**, ovvero un sistema è stabile se per ogni ingresso limitato $x(n)$, anche l'uscita $y(n)$ è limitata [$|x(n)| < \infty \rightarrow |y(n)| < \infty$]; vediamo anche che:

$$h_{TOT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \rightarrow \text{SISTEMA LTI STABILE}$$

⚠ Vediamo da qui che se un sistema è causale, allora la stabilità è garantita se $\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < \infty$!

Come capire se un sistema è stabile dalla trasformata Zeta? Troviamo i **poli di $H(z)$** e se ho un sistema:

- **CAUSALE** → se tutti i poli hanno modulo minore di 1 (ovvero sono all'interno del cerchio di raggio unitario), il sistema è stabile (ovvero **ROC**: $|z| > R_h$ con $R_h < 1$);
- **ANTICAUSALE** → se tutti i poli hanno modulo maggiore di 1 (ovvero sono all'esterno del cerchio di raggio unitario), il sistema è stabile (ovvero **ROC**: $|z| < R_h$ con $R_h > 1$);
- **BILATERO** → la circonferenza di raggio unitario deve essere contenuta nella **ROC** del sistema (ovvero **ROC**: $R_{h,1} < |z| < R_{h,2}$ con $R_{h,1} < 1$ e $R_{h,2} > 1$).

ESEMPIO:

Dire per quali valori di α il seguente sistema LTI causale è stabile:

$$y(n) = -2\alpha y(n-1) - \alpha^2 y(n-2) + x(n)$$

Calcolo la trasformata zeta:

$$Y(z) = -2\alpha z^{-1} Y(z) - \alpha^2 z^{-2} Y(z) + X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}} = \frac{1}{(1 + \alpha z^{-1})^2}$$

Data la causalità del sistema, la stabilità è garantita se il polo $z = -\alpha$ cade all'interno del cerchio di raggio unitario → $|\alpha| < 1$.

⚠ Quindi, indipendentemente dalla causalità, un sistema è **stabile** se la sua **ROC contiene la circonferenza di raggio unitario!**

Parlando invece di **REALIZZABILITÀ FISICA**, un sistema è fisicamente realizzabile se (**basta solo 1 delle opzioni**):

- Possiede una risposta all'impulso $h(n)$ reale e causale;
- La sua **equazione alle differenze** è causale e i **coefficienti** a_i e b_i sono tutti reali;
- La sua **funzione di trasferimento** $H(z)$ ha coefficienti reali e la sua **ROC** corrisponde all'esterno di una circonferenza che racchiude tutti i poli di $H(z)$ [i coefficienti di $H(z)$ sono tutti reali se per ogni polo o zero è presente anche il rispettivo complesso coniugato].

ESEMPIO:

Si consideri un sistema LTI fisicamente realizzabile attuato con un'architettura di tipo FIR.

E' noto che:

- La funzione di trasferimento $H(z)$ presenta due zeri in $z = e^{\frac{j\pi}{2}}, k=1,2$ →
- $H(z)|_{z=1} = 1$
- Il numero di coefficienti della risposta all'impulso è minore di 5

Calcolare la funzione di trasferimento del sistema LTI considerato.

Il sistema LTI in esame possiede solo zeri e un polo multiplo nell'origine (perché è FIR) → è stabile.

Essendo fisicamente realizzabile, i coefficienti della risposta all'impulso (e della funzione di trasferimento) sono reali → gli zeri complessi sono presenti assieme ai rispettivi complessi coniugati.

Data la causalità, la funzione di trasferimento $H(z)$ può essere scritta in termini di potenze negative di z :

$$\begin{aligned} H(z) &= K \left(1 - e^{\frac{j\pi}{2}} z^{-1} \right) \left(1 - e^{-j\frac{\pi}{2}} z^{-1} \right) \left(1 - e^{j\pi} z^{-1} \right) = \\ &= K (1 - j z^{-1}) (1 + j z^{-1}) (1 + z^{-1}) = K (1 + z^{-2}) (1 + z^{-1}) \end{aligned}$$

#coefficienti < 5 → grado massimo del polinomio = 3

Dalla condizione $H(z)|_{z=1} = 1$ si ricava $K=1/4$, quindi: $H(z) = \frac{1}{4} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$

Definiamo invece:

- **SISTEMA INVERSO** di un sistema LTI → $H_{inverso}(z) = H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)}$ [se messo in cascata con il sistema di partenza otteniamo $H_{TOT}(z) = H(z)H_{inverso}(z) = 1$, cioè $h_{TOT}(n) = \delta(n)$];

ESEMPIO:

Determinare la funzione di trasferimento $H_I(z)$ del sistema causale inverso di un sistema LTI descritto dall'equazione alle differenze:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + \frac{2}{5}y(n-1)$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento $H(z)$, mediante la trasformata z dell'equazione alle differenze:

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) + 2X(z)z^{-1} + \frac{2}{5}Y(z)z^{-1} \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{2}{5}z^{-1}} \quad |z| > \frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad H_I(z) = \frac{1-\frac{2}{5}z^{-1}}{1+2z^{-1}} \quad |z| > 2 \end{aligned}$$

Entrambi i sistemi sono causali, ma il sistema inverso non è stabile (polo in $z=-2$ fuori dalla circonferenza di raggio unitario).

- **SISTEMA LTI A FASE MINIMA** → tutti i poli e tutti gli zeri di $H(z)$ sono all'interno del cerchio unitario (dunque i sistemi LTI causali, stabili e a fase minima garantiscono la minor distorsione di fase possibile tra tutti i sistemi con lo stesso $|H(z)|$). Inoltre è possibile ottenere un **sistema LTI inverso e stabile** di un sistema LTI causale solo se questo ha $H(z)$ con fase minima (dunque **se otteniamo un sistema inverso stabile, allora il sistema di partenza è a fase minima**).

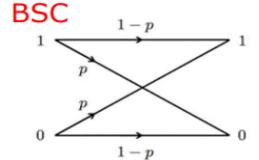
8) PROCESSI CASUALI

Ricordiamo che PROBABILITÀ CONGIUNTA $P(A, B) = P(A \cap B)$ [e se A, B indipendenti $\rightarrow P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$], mentre PROBABILITÀ CONDIZIONATA $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$ con $A \in B$, ovvero $P(A) = P(A|B)P(B)$. Inoltre

Teorema di Bayes ci dice che $P(A \cap B) = P(A, B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$. Un esempio di probabilità è il canale binario discreto (simmetrico), dove una sorgente emette 0 o 1 con probabilità $P_0 = P(X_0)$ e $P_1 = P(X_1)$ t.c. $P_0 + P_1 = 1$, ma il ricevitore può erroneamente ricevere 0 (Y_0) o 1 (Y_1):

$$P(Y_1) = P\{(Y_1 \cap X_0) \cup (Y_1 \cap X_1)\} = P(Y_1|X_0)P(X_0) + P(Y_1|X_1)P(X_1) = p_0P_0 + q_1P_1$$

E analogamente per $P(Y_0)$.



In questo corso ci capiterà spesso di lavorare **a posteriori**, ovvero avendo ricevuto Y_0 qual è la probabilità che sia stato inviato X_0 ? Ovvero una probabilità condizionata, che risolvo con Bayes:

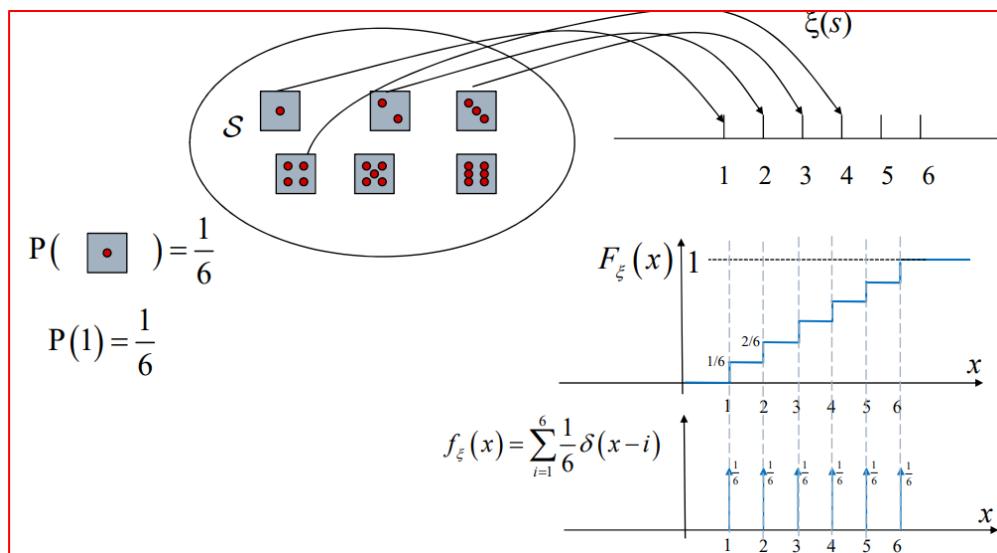
$$P(X_0|Y_0) = \frac{P(X_0, Y_0)}{P(Y_0)} = \frac{P(Y_0|X_0)P(X_0)}{P(Y_0|X_0)P(X_0) + P(Y_0|X_1)P(X_1)} = \frac{q_0P_0}{q_0P_0 + p_1P_1} = \frac{(1 - p_0)P_0}{(1 - p_0)P_0 + p_1P_1}$$

Che nel caso di **BSC** (ovvero simmetrico), dà (sempre definendo p = probabilità che si verifica errore [quindi il successo sarebbe l'evento che si verifichi errore]):

$$P(X_0|Y_0) = \frac{q_0P_0}{q_0P_0 + p_1P_1} = q = 1 - p$$

Una **VARIABILE CASUALE** assume i valori assumibili probabilisticamente da un evento (es. X = dado equilibrato = {1,2,3,4,5,6}, quindi $P(X = 1) = 1/6$). Da cui vediamo delle funzioni utili:

- **FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA** $\rightarrow F_X(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$ con $0 \leq F_x \leq 1$.
Inoltre è vero che $P(X \in [2,4]) = F_x(4) - F_x(2)$;
- **DENSITÀ** $\rightarrow f_X(2) = \frac{\partial F_X(2)}{\partial x}$ con $P(X \in [2,4]) = \int_2^4 f_X(n)dn$.



⚠ Possiamo anche avere delle **DISTRIBUZIONI CUMULATIVE CONGIUNTE** e delle **DENSITÀ CONGIUNTE**, ovvero di più variabili casuali insieme:

$$F_{X_1, X_2, X_3}(1, 2, 3) = P(X_1 \leq 1 \cap X_2 \leq 2 \cap X_3 \leq 3) \rightarrow f_{X_1, X_2, X_3}(1, 2, 3) = \frac{\partial^n}{\partial X_1 \partial X_2 \partial X_3} F_{X_1, X_2, X_3}(1, 2, 3)$$

Se le variabili sono indipendenti si ha: $f_{X_1, X_2, X_3}(1, 2, 3) = f_{X_1}(1)f_{X_2}(2)f_{X_3}(3)$ (si hanno anche le CONDIZIONATE delle congiunte).

Ricordiamo inoltre il **VALORE ATTESO** di una variabile casuale $E[X]$ e i **MOMENTI** $\mu_k = E[X^k]$ tale che:

- $k = 1 \rightarrow E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} n f_X(n) dn \rightarrow \text{MEDIA}$;

- $k = 2 \rightarrow E[X^2] = \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 f_X(n) dn \rightarrow \text{VALORE QUADRATICO MEDIO.}$

Inoltre definiamo **MOMENTI CENTRALI** $m_k = E[(X - \mu)^k]$ tale che **VARIANZA** $\sigma_X^2 = E[(X - \mu)^2] = \mu_2 - \mu_1^2$ (e la sua radice è la **DEVIAZIONE STANDARD**).

Inoltre, quando ho più variabili casuali, definiamo **MOMENTI CONGIUNTI** $\mu_{kn} = E[X^k Y^n]$ e **MOMENTI CENTRALI CONGIUNTI** $m_{kn} = E[(X - \mu_X)^k (Y - \mu_Y)^n]$; da cui vediamo che **COVARIANZA** $\sigma_{XY} = m_{1,1}$.

Inoltre ricordiamo la **DIFFERENZA TRA INDIPENDENZA** $f_{X_1, X_2}(1,2) = f_{X_1}(1)f_{X_2}(2)$ e **SCORRELAZIONE** $E[XY] = E[X]E[Y]$ (indipendenza implica scorrelazione, ma non viceversa).

I momenti si possono calcolare dalla **FUNZIONE CARATTERISTICA**, ovvero la trasformata di Fourier della densità di probabilità:

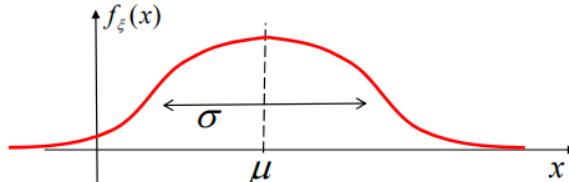
$$C_X(p) = E[e^{jpX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jp\eta} f_X(\eta) d\eta \rightarrow \mu_k = j^{-k} C_X^{(k)}(\mathbf{0})$$

⚠ La somma di variabili casuali indipendenti ($Z = X + Y$) mi dà:

$$f_Z(n) = f_X(n) * f_Y(n) \rightarrow C_Z(p) = C_X(p)C_Y(p)$$

Ricordiamo inoltre la **VARIABLE GAUSSIANA** (o **NORMALE**) tale che:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



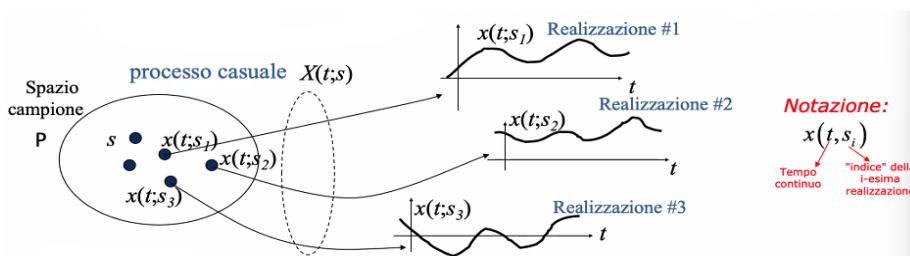
⚠ Combinando insieme più variabili casuali indipendenti con qualsiasi tipo di distribuzione, si vede che la VC risultante risulta avere distribuzione gaussiana!

Dopo aver fatto tutti questi richiami alla probabilità, introduciamo i **PROCESSI CASUALI** (usati per trattare i **segnali** di cui non conosciamo tutte le caratteristiche, ovvero che hanno un'**evoluzione casuale nel tempo**), ovvero delle **classi di segnali** (insiemi di segnali con caratteristiche comuni) manipolate con la **probabilità**. Tipicamente i processi casuali vengono elaborati in sistemi (filtri):



Un esempio di processo casuale è il segnale digitale usato per codificare i bit 0/1 (perché il segnale completo, ovvero la sequenza completa di bit, non è predeterminata ma è in evoluzione a seconda di quello che devo inviare; infatti anche il ricevitore non conosce a priori la sequenza, altrimenti non avrebbe senso la trasmissione se la conosce già).

Quindi un **PROCESSO CASUALE** è un modello probabilistico per un insieme (classe) di segnali che associa ad ogni possibile realizzazione del processo (ovvero ad ogni singolo segnale della classe, cioè ad ogni funzione) una **probabilità**; quindi come una sorta di variabile casuale, ma al posto dei valori che essa assume con una certa probabilità, il processo casuale avrà delle funzioni varianti nel tempo.



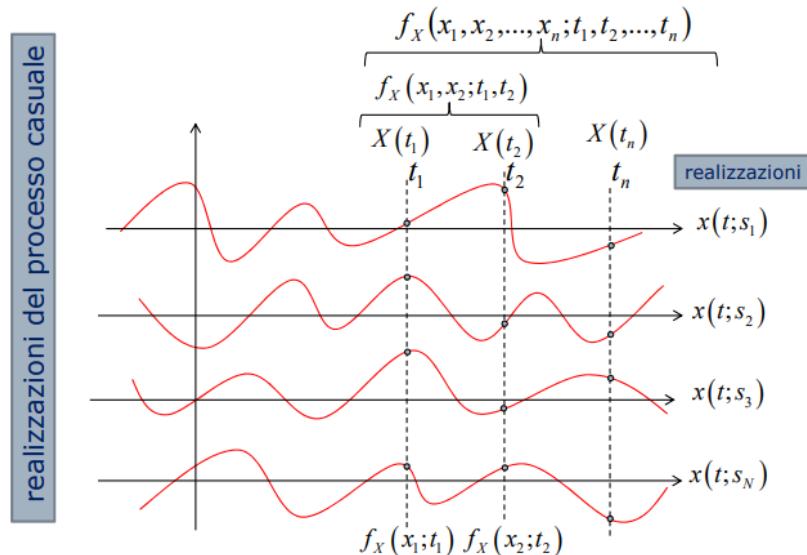
Quindi indichiamo con $X(t; s)$ il **processo casuale** e con $x(t; s_i)$ la **singola realizzazione "i"** del processo (ovvero il singolo segnale, funzione del tempo). Quindi il processo è una sorta di MATRICE $M[i][j]$:

- $M[i] \rightarrow$ ho i singoli segnali (le singole realizzazioni del processo). Sulle righe $M[i]$ opero con la probabilità (sto operando sulla probabilità che mi esca un certo segnale specifico, una realizzazione specifica);
- $M[i][j] \rightarrow$ valore del singolo segnale nel tempo. Qui opero con la teoria dei segnali (perché sto operando sul singolo segnale).

I processi possono essere:

- **QUASI DETERMINATI** = processo esprimibile tramite l'espressione usata per un segnale determinato, in cui compaiono variabili casuali;
- **NON QUASI DETERMINATI** (es. segnale vocale, audio, rumore termico).

Quindi, il valore del processo X nell'istante t_1 (ovvero $X(t_1)$) sarà come prendere i singoli valori assunti dalle realizzazioni in t_1 , ottenendo quindi una variabile casuale con tutti questi valori:



Proprio a causa di ciò avremo **RIPARTIZIONE** e **DENSITÀ** delle singole variabili casuali, ovvero dell'insieme di valori assunti dalle realizzazioni del processo nell'istante richiesto. Noi ci fermeremo alla **DENSITÀ DI PROBABILITÀ DEL 1° ORDINE**, ovvero $f_X(x; t)$.

Per descrivere un PC possiamo usare caratteristiche più semplici della densità di probabilità, ovvero fare la **CARATTERIZZAZIONE "DI INSIEME"** del PC, cioè trovare:

- **MEDIA** $\rightarrow m_X(t) = E[X(t)] = \int x f_X(x; t) dx$
- **AUTOCORRELAZIONE** $\rightarrow R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X^*(t_2)] = \int \int x_1 x_2^* f_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$

Dall'AUTOCORRELAZIONE derivano:

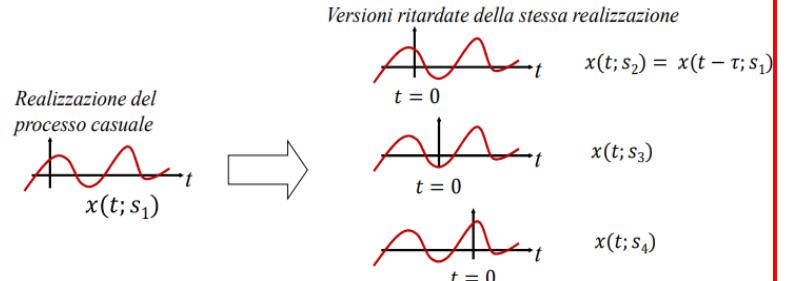
- **AUTOCOVARIANZA** $\rightarrow K_X(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))^*] = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X^*(t_2)$
- **COEFFICIENTE DI (AUTO)CORRELAZIONE** $\rightarrow \rho_X(t_1, t_2) = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sqrt{K_X(t_1, t_1)K_X(t_2, t_2)}}$

⚠️ Quindi solitamente CARATTERIZZAZIONE di PC = media, autocorrelazione e densità (cioè insieme + densità)!

→ PROCESSI STAZIONARI:

Definiamo **PROCESSO STAZIONARIO** un processo casuale dove, se un certo segnale appartiene al PC, anche **tutte le sue repliche traslate appartengono al PC** e hanno la **stessa probabilità**, ovvero:

$$x(t) \in \mathcal{P} \rightarrow \forall t_0 \left\{ \begin{array}{l} x(t - t_0) \in \mathcal{P} \\ P[x(t)] = P[x(t - t_0)] \end{array} \right.$$



⚠ Questo implica che le statistiche congiunte non dipendono dall'origine dell'asse dei tempi, ma solo dalla differenza di tempo tra i campioni; ovvero per un processo stazionario:

- **Statistiche del 1° ordine** → $f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; 0)$, ovvero non dipende dal tempo;
- **Statistiche del 2° ordine** → $f_X(x_1; x_2; t_1; t_2) = f_X(x_1; x_2; 0; t_2 - t_1) = f_X(x_1; x_2; 0; \tau)$
- **Media** → se PC è stazionario in senso stretto di ordine 1: $m_X(t) = \int f_X(x; 0)dx = m_X$, non dipende da tempo;
- **Autocorrelazione** → se PC è stazionario in senso stretto di ordine 2:

$$R_X(t_1, t_2) = \int \int x_1 x_2^* f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \int \int x_1 x_2^* f_X(x_1, x_2; 0, \tau) dx_1 dx_2 = R_X(\tau)$$

Dunque se media non dipende da tempo e autocorrelazione dipende solo dalla differenza dei tempi τ , allora il processo è detto **STAZIONARIO IN SENSO LATO (WSS)**; quindi abbiamo che:

STAZIONARIO IN SENSO STRETTO → $\begin{cases} m_X(t) = m_X \\ R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) \end{cases} \rightarrow \text{STAZIONARIO IN SENSO LATO (WSS)}$

Dunque per **processi WSS**:

$$R_X(\tau) = E[X(t)X^*(t + \tau)] \quad \text{con} \quad R_X(\tau) = R_X^*(-\tau) \quad [\text{pari}]$$

Inoltre, l'autocorrelazione con $\tau = 0$ è il **VALOR QUADRATICO MEDIO**:

$$R_X(\tau)|_{\tau=0} = E[X(t)X^*(t + \tau)]|_{\tau=0} = E[|X(t)|^2] \rightarrow R_X(0) = E[X(t)^2]$$

Mentre **con $\tau \rightarrow \infty$ è la MEDIA AL QUADRATO**:

$$R_X(\tau)|_{\tau \rightarrow \infty} = E[X(t)X^*(t + \tau)]|_{\tau \rightarrow \infty} = |m_X|^2 \rightarrow R_X(\tau)|_{\tau \rightarrow \infty} = m_X^2$$

⚠ Quindi con alta correlazione → PROCESSO LENTO; con bassa correlazione → PROCESSO VELOCE!

Il **SEGNALE DI TRASMISSIONE NUMERICA** non è stazionario, infatti:

$$X(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - iT) \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E\{X(t)\} = E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i r(t - iT)\right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} E\{\alpha_i\} r(t - iT) \\ &\quad \boxed{\text{media dipendente dal tempo}} \\ R_X(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i r(t_1 - iT) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j^* r^*(t_2 - jT)\right\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} E\{\alpha_i \alpha_j^*\} r(t_1 - iT) r(t_2 - jT) \\ &\quad \boxed{\text{Autocorrelazione dipendente da } t_1 \text{ e } t_2} \end{aligned}$$

Invece la **SINUSOIDA CON FASE V.C.** è stazionaria in senso stretto se tutte le versioni traslate hanno stessa densità di probabilità (altrimenti solo in senso lato).

⚠ Anche il RUMORE TERMICO (PC che rappresenta la tensione (o corrente) ai capi di una resistenza non alimentata) è stazionario in senso stretto!

→ TRASFORMAZIONI e SPETTRO DI POTENZA:



⚠ Noi ci accontenteremo di trovare **MEDIA** e **AUTOCORRELAZIONE** (ovvero i momenti del 1^a e 2^o ordine dei processi casuali in uscita)!

Quindi vediamo come si comporta con i vari blocchi:

- INTEGRATORE NEL TEMPO:

$$Y(t) = \int_{T_1}^t X(\tau) d\tau \rightarrow \begin{cases} m_Y(t) = \int_{T_1}^t m_X(\tau) d\tau \\ R_Y(t_1, t_2) = \int_{T_1}^{t_1} \int_{T_1}^{t_2} R_X(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{cases}$$

- DERIVATA NEL TEMPO:

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt} \rightarrow \begin{cases} m_Y(t) = \frac{dm_X(t)}{dt} \\ R_Y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_X(t_1, t_2) \end{cases}$$

⚠ Se il processo è WSS $m_Y(t) = 0$ e $R_Y(t_1, t_2) = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R_X(\tau)$.

Più generalmente, una **TRASFORMAZIONE LTI su processo WSS** genera $Y(t)$, ovvero un **processo WSS** tale che:

$$\mathbf{m}_Y = \mathbf{m}_X H(\mathbf{0}) = \mathbf{m}_X \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(\tau) d\tau$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau) \quad \text{con} \quad R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}^*(t) \mathbf{h}(t + \tau) dt$$

⚠ Analogamente, una **TRASFORMAZIONE LTI su processo GAUSSIANO** genera in uscita un **processo GAUSSIANO**!

Inoltre per **processi WSS** definiamo la **POTENZA** del processo come il suo **VALOR QUADRATICO MEDIO**:

$$P_X = E[X^2(t)]$$

Da cui, sempre per **processi WSS**, definiamo la **DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA** (o **SPETTRO DI POTENZA**) [ricordando che spettro di potenza = trasformata di Fourier dell'autocorrelazione]] sempre **reale, pari e positiva** tale che:

$$P_X = E[X^2(t)] = R_X(\mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df$$

O anche:

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}$$

Dove anche qui nei sistemi LTI:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau) \Rightarrow S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

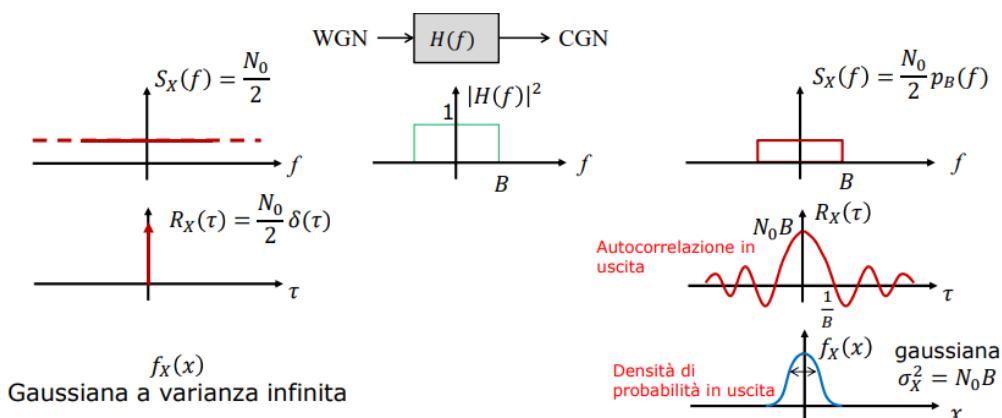
⚠ Nel rumore bianco gaussiano (WGN) l'autocorrelazione è:

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_x(f)) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

Da cui ne deriva che la **media** è **nulla**, la **varianza** e la **potenza** sono **infinite**! Questo perché:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \infty$$

In molti esercizi, WGN viene filtrato da un filtro passabasso ideale con banda unilatera B :



→ MEDIE TEMPORALI e ERGODICITÀ:

Definendo per un segnale determinato la **MEDIA TEMPORALE** come:

$$\langle g[x(t)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g[x(t)] dt$$

⚠ Questo operatore lo abbiamo già usato per trovare la **potenza media** di un segnale determinato!

Dato che la singola realizzazione di un PC è un segnale determinato, possiamo applicargli la media temporale:

$$\langle g[x(t; s_0)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g[x(t; s_0)] dt$$

Che relazione c'è tra media temporale e media di insieme?

Media temporale

$$\langle g[x(t; s_0)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g[x(t; s_0)] dt$$

- Si applica a una certa realizzazione del processo
- Restituisce sempre un valore indipendente dal tempo
- Ma in generale il risultato dipende dalla singola realizzazione

Media di insieme

$$E\{g[X(t)]\} = \sum_i g[x(t; s_i)] P[x(t; s_i)]$$

- Si applica all'insieme delle realizzazioni di un processo, nel senso delle variabili casuali
- Restituisce in generale una funzione del tempo

Con più segnali:

$$\langle g[x(t), y(t + \tau)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g[x(t), y(t + \tau)] dt$$

Inoltre l'autocorrelazione di segnali a potenza finita:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau) x^*(t) dt = \langle x(t + \tau) x^*(t) \rangle$$

Un **PROCESSO ERGODICO** per una certa media ha la media di insieme e la media temporale che coincidono:

$$E[g[X(t)]] = \langle g[x(t; s_i)] \rangle, \forall i$$

⚠ Per essere ergodico, il processo deve essere **STAZIONARIO** per quella media!

⚠ L'ergodicità fa in modo che tramite la misura di una 1 singola realizzazione, posso conoscere tutto il processo (es. il rumore termico) [anche per l'autocorrelazione e lo spettro di potenza]!