理论力学教程题解

Koit Newton

2023 年 1 月 8 日

前言

本文档对应的教科书是《理论力学教程》（第四版）周衍柏著。所有的答案由 Koit Newton 个人的思考、同时结合一些网络资料所写，对答案的正确性与简洁性不做保证，要求读者具有一定的思考能力。如果有疑问，欢迎邮件与我讨论。感谢各位的阅读！同时感谢所有喜爱物理的人！本人邮件地址：musikundpku@qq.com

Koit Newton

2023 年冬季于合肥

目录

第一章　质点力学

1.1

Solution:

我们可以简单的假设第一段初始 450 速度为 V_0，那么第一段的末尾的瞬间速度 (也是第二段初速度) 是 V_0+at_1，第二段结束的末尾速度是 $V_0+a(t_1+t_2)$。那么我们可以计算速度和时间的关系：

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\frac{1}{2}(V_0+(V_0+at_1))} = t_1 \\ \dfrac{s}{\frac{1}{2}((V_0+at_1)+(V_0+at_1+at_2))} = t_2 \end{cases}$$

很容易通过解这个方程得到题目给的加速度 a 的值。

1.2

Solution:

这题目不完美，都没说啥时候开始航行的。

不要紧，我们来猜一猜它的意思。首先我们假设是同时出发的，且假设速度为向东的船为 A 船，向北的那个是 B 船，也就是 $V_A = 15km/h, V_B = 15km/h$，假设船 A 距离灯塔为 S_A，那么船 B 距离灯塔为 S_B，其中我们容易知道 $S_B = 22.5km + S_A$，因为船 B 要多行驶 1.5 小时才能到达同样的灯塔。

在以灯塔为原点的平面直角坐标系中我们来导出坐标的表达式，注意我们假设的时间原点是正午 12 点，这样的时候坐标就确定了，这个时候，船 A 的坐标为 (0,0)，船 B 的坐标为（0，-22.5）。$t > 0$ 情况下船 A 坐标 x, 船 B 坐标 y 和两者的距离在下面：

$$\begin{cases} x = 15t \\ y = 15t - 22.5 \\ distance(A-B) = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

我们可以得到 distance(A-B) 的表达式为：

$$distance(A-B) = D = \sqrt{450t^2 - 675t + 506.25}$$

对其根号下的内容对 t 求导可以得到：

$$\frac{d(450t^2 - 675t + 506.25)}{dt} = 900t - 675$$

容易得到 t>0 时候的极小值为：

$$D_{min} = \sqrt{450(\frac{675}{900})^2 - 675\frac{675}{900} + 506.25} = 15.9km$$

此时的 $t = \frac{675}{900} = \frac{3}{4}h$，也就是午后 45 分钟。但是我们还需要再讨论一下是否为上午某个时刻的距离最短：
假设是距离正午 12 时的左侧 t 小时距离最近，再假设时间反演, 坐标轴正负方向更换，此时等效为这两船是远离灯塔的，那么我们很容易得到一个结论是 x=15t,y=15t+22.5，此时最短距离就是 t=0,D=22.5。
综上所述，午后 45 分钟距离最近，距离为 15.9km。

1.3

Solution:
观察到题目已经给出了坐标系，是要求在这个直角坐标系中写出以 x, y 为未知变量表示的轨迹方程，按道理也是类似这样表示的速度公式，不过答案的速度公式中包含着题目中提到的一些角度，就这样吧，我们给出求解过程。
假设 C 的坐标为 (x, y)，根据图中这两个绑定 (绑定点为 A) 的连杆和 B 运动的限制等题目中的条件我们可以列出下面的方程组:

$$\begin{cases} y = a\sin\psi \\ \dfrac{r}{\sin\psi} = \dfrac{2a}{\sin\varphi} \\ r\cos\varphi + a\cos\psi = x \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{cases}$$

从上面的方程组可以解出：

$$\begin{cases} \dfrac{x - a\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}{r} = \cos\varphi \\ \dfrac{2y}{r} = \sin\varphi \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{cases}$$

可以很容易地整理得到轨迹方程：

$$4x^2(a^2-y^2) = (x^2+3y^2+a^2-r^2)^2$$

上述讨论是建立在如题目的图所示的情况下的，A 在第一象限，当角度变化时，A 不在其它象限时是否还满足这样的轨道方程呢？很显然，方程组一直成立，所以上述就是轨迹的方程。

可以从 x,y 的定义式出发求导，然后利用已知的角速度可以得到 V_x, V_y，之后再矢量加法可知速度大小。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = -r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} - a\sin\psi\frac{d\psi}{dt} \\ &= -r\omega\sin\varphi - a\omega\sin\psi\frac{d\psi}{dt} \\ &= -r\omega\sin\varphi - \frac{r\omega\sin\psi\cos\varphi}{2\cos\psi} \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{r}{2}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{rw}{2}\cos\varphi \end{aligned}$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \frac{rw}{2\cos\psi}\sqrt{\sin^2\psi\cos\varphi^2 + 4\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)}$$

和参考答案不一致，读者自行思考。

1.4

Solution:
这道题非常简单。如下:

$$
\begin{aligned}
&x = d\tan\theta \\
\Rightarrow &v = d\omega\sec^2\theta = \omega\frac{d^2+x^2}{d} \\
\Rightarrow &a = 2\ \mathrm{d}\omega^2\sec^2\theta\tan\theta = 2\omega^2 x\frac{d^2+x^2}{d^2}
\end{aligned}
$$

1.5

Solution:
就是对加速度积分得到速度 v，再对 v 积分得到路程 s。计入初始条件为 $v(t=0)=0$ 作为边界条件即可，没有难度。

1.6

题目提出的坐标系是极坐标系，可以参考书本 Page7-Page10 的内容，此处直接套用书中给出的公式：

$$
\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})
\end{aligned}
$$

而题目给出的数据是:

$$
\begin{cases}
v_r = \dot{r} = \lambda r \\
v_\theta = r\dot{\theta} = \mu\theta
\end{cases}
$$

带入计算容易得到的结果是：

$$
\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \lambda\cdot\lambda r - r\dot{\theta}\cdot\dot{\theta} = \lambda^2 r - \mu\theta\cdot\frac{\mu\theta}{r} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r} \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (\mu\dot{\theta} - \dot{r}\dot{\theta}) + 2\dot{r}\dot{\theta} = (\mu\cdot\frac{\mu\theta}{r} - \lambda r\cdot\frac{\mu\theta}{r}) + 2\cdot\lambda r\cdot\frac{\mu\theta}{r} = \mu\theta(\frac{\mu}{r} + \lambda)
\end{aligned}
$$

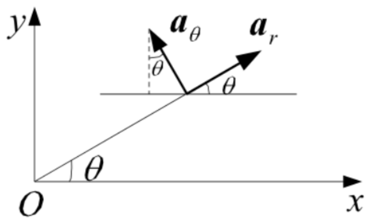

图 1.1: 加速度的矢量分析图

1.7

Solution:

下面是根据题目所给的表达式的求导结果：

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta$$
$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta$$

从极坐标系去计算加速度请翻阅书本的 Page7。如果是要从 a_x, a_y 去推导 a_r, a_θ，要分析矢量：

容易列出以下的方程：

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta \\ \ddot{y} = a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta \end{cases}$$

求解可以得到和书本中一样的结果。

1.8

Solution:

这道题看起来比较复杂，但是实际上 r 的方程都给你了，直接套用之前的极坐标系的速度公式就可以求得结果。

$$
\begin{cases}
v_r = \dot{r} = a(1-e^2)(-1)(1+e\cos\theta)^{-2}\cdot e(-\sin\theta)\dfrac{d\theta}{dt} \\
\quad = ae\omega\sin\theta(1-e^2)(1+e\cos\theta)^{-2} \\
\quad = r\omega\cdot\dfrac{\sin\theta}{1+e\cos\theta} \\
v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega = a\omega(1-e^2)(1+e\cos\theta)^{-1} \\
e = \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow v = \sqrt{v_r^2+v_\theta^2} &= r\omega\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2}+1} \\
&= \frac{r\omega}{b}\sqrt{r(2a-r)}
\end{aligned}
$$

1.9

Solutin：

已知速度可以表示为:$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$, 设 θ 为位矢与 x 轴正向的夹角，然后我们容易知道:

$$
\begin{aligned}
a = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + v_x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + v_y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} \\
&= (\frac{dv_x}{dt} - v_y\dot{\theta})\boldsymbol{i} + (\frac{dv_y}{dt} + v_x\dot{\theta})\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

容易得到：

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} &= v_x\frac{dv_x}{dt} - v_xv_y\dot{\theta} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_xv_y\dot{\theta} \\
&= v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt}
\end{aligned}
$$

根据题意得到的方程是：$v_x^2 + v_y^2 = C$(C 是常数)，所以对两端求导可以得到：

$$
v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} = 0
$$

也就是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = 0$，这就证明了两者正交。

1.10

Solution:

此处使用自然坐标系，然后我们可以列出如下的方程组:

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \\ a_t = -2ka_n \\ \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{|y''|}{(1+{y'}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ y^2 = 2px \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{p}{y} \\ y'' = -\dfrac{p^2}{y^3} \\ \dfrac{dv}{dt} = -2kv^2 \dfrac{|\frac{p^2}{y^3}|}{(1+\frac{p^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}} \quad \bigstar \end{cases}$$

同时经过简单的计算，可以得到下面的方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dt} \cdot \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}\dfrac{dv}{dy} \\ v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ \dot{x} = \dfrac{y\dot{y}}{p} \\ \dot{y}^2 = \dfrac{v^2}{1+\frac{y^2}{p^2}} \leftarrow \text{由 } v^2, \dot{x} \text{ 可以求得} \end{cases}$$

将上面的方程里面的数据带入方程 ★ 里面可以得到下面的方程：

$$\frac{v}{(1+\frac{y^2}{p^2})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dv}{dy} = -2kv^2 \cdot \frac{\frac{p^2}{y^3}}{(1+\frac{p^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv}{v} = -2kp\frac{dy}{y^2+p^2}$$

经过积分：

$$\Longrightarrow \int_u^v \frac{dv}{v} = -2kp\int_p^{-p} \frac{dy}{y^2+p^2}$$

$$v = ue^{-k\pi}$$

1.11

Solution:

可以十分显然得到如下的分析图以及方程组：

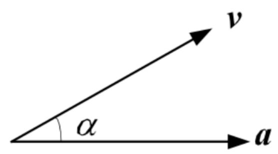

图 1.2: 加速度和速度的矢量分析图

$$\begin{cases} a_n = \frac{v^2}{r} = a\sin\alpha \\ a_t = \frac{dv}{dt} = a\cos\alpha \end{cases}$$

容易看出

$$a = \frac{v^2}{r\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{dv}{dt}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{r}\cot\alpha dt = \frac{dv}{v^2}$$
$$\Longrightarrow \int_0^t \frac{1}{r}\cot\alpha dt\, dx = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2}\, dx$$
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{t}{r}\cot\alpha$$

1.12

Solution：

我们看到 1.11 的结果，也就是

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{t}{r}\cot\alpha = \frac{r - v_0 t\cot\alpha}{v_0 r}$$

但是不能通过简单的积分或者分子分母互换之类得到所求的表达式。不过从所求的表达式容易看出似乎是对角度 θ 和 v 的积分。逆推试试：

$$v = v_0 e^{(\theta-\theta_0)\cot\alpha} \leftarrow \ln v = \ln v_0 \cdot (\theta-\theta_0)\cot\alpha \leftarrow \frac{\ln v}{\ln v_0} = (\theta-\theta_0)\cot\alpha$$
$$\leftarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_{\theta_0}^{\theta} \cot\alpha d\theta \leftarrow \frac{dv}{v} = \cot\alpha d\theta$$

下面是基本的质点运动方程组：

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{v^2}{r} = a\sin\alpha \\ a_t = \dfrac{dv}{dt} = a\cos\alpha \end{cases} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\omega$$
$$a = \frac{dv}{d\theta}\omega = \frac{dv}{d\theta}\frac{v}{r} = \frac{v^2}{r\sin\alpha}\cos\alpha \Longrightarrow \frac{dv}{v} = \cot\alpha d\theta$$

证毕。

1.13

Solution:

(1) 略。

(2) 注意到这个飞机的速率是相对于空气的。

$$t = \frac{l}{v'+v_0} + \frac{l}{v'-v_0} = t_B$$

(3) 可以通过下面的速度的矢量分析得到 $v_{飞机}$ 的大小，然后有 $t_N = \frac{2l}{v_{飞机}}$。

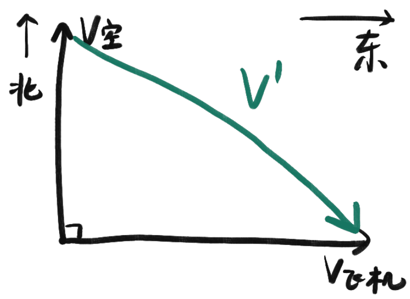

图 1.3: 加速度和速度的矢量分析图

1.14

Solution:

略，就是简单的速度合成问题。

1.15

Solution:

得出下面的速度分析图：

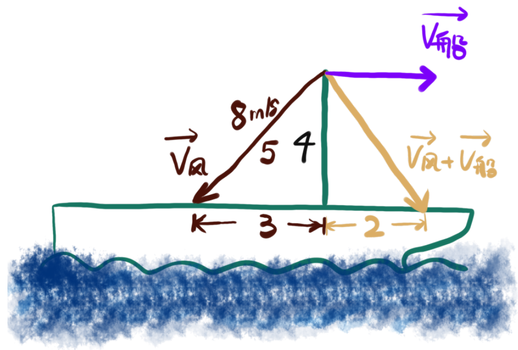

图 1.4: 加速度和速度的矢量分析图

非常显然地平移速度矢量，可以发现 $v_{船}$ 平移到矢量加法三角形法则对应位置时容易看到是在甲板上，相应比例是 3+2=5，可以很显然知道 $\sqrt{3^2+4^2}=5$，容易知道 $v_{风}$ 的比例也是 5，所以 $v_{船}=v_{风}=8m/s$。

1.16

Solution:

根据题意得到水速度的公式：

$$v_{水}=\begin{cases} ky\left(0\le y\le \frac{d}{2}\right) \\ k(d-y)\left(\frac{d}{2}\le y\le d\right) \end{cases}$$

$c = k\frac{d}{2} \quad \to k = \frac{2c}{d}$

当$0 \leqslant y \leqslant \frac{d}{2}$, $v_{水} = \frac{2c}{d}y \quad \Longrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2c}{d}y \\ y = ut \end{cases} \Longrightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{2cu}{d}tdt$

$\Longrightarrow x = \frac{cu}{d}t^2 = \frac{c}{ud}y^2 \left(0 \leqslant y \leqslant \frac{d}{2}\right)$

当$d \geqslant y \geqslant \frac{d}{2}$时$, v_{水} = \frac{2c}{d}(d-y) \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2c}{d}(d-ut) \Longrightarrow \int dx = \int \frac{2c}{d}(d-ut)dt$

$\Longrightarrow x = \frac{2c}{u}y - \frac{cy^2}{ud} + D$(D 为一常数)

根据边界条件，也就是根据上述的 x 的方程可以得知：当$y = \frac{d}{2}$时$, x = \frac{cd}{4u}$

$\Longrightarrow D = -\frac{cd}{2u} \Longrightarrow x = \frac{2c}{u}y - \frac{cy^2}{ud} - \frac{cd}{2u} \left(\frac{d}{2} \leqslant y \leqslant d\right)$

$\begin{cases} x = \frac{cu}{d}t^2 = \frac{c}{ud}y^2 & \left(0 \leqslant y \leqslant \frac{d}{2}\right) \\ x = \frac{2c}{u}y - \frac{cy^2}{ud} - \frac{cd}{2u} & \left(\frac{d}{2} \leqslant y \leqslant d\right) \end{cases} \Longrightarrow$ 靠拢地点，也就是当 y=d 时：$x = \frac{cd}{2u}$

1.17

Solution:

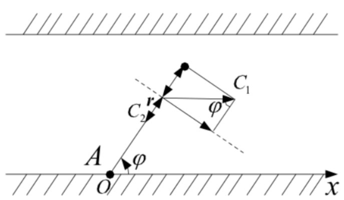

图 1.5: 速度的矢量分析图

船沿垂直于 **r** 的方向的速度为 $-C_1\sin\varphi$, 船沿径向 **r** 方向的速度为 C_2 和 C_1 沿径向的分量的合成, 即

$$\begin{cases} r\frac{d\varphi}{dt} = -C_1\sin\varphi & (1) \\ \frac{dr}{dt} = C_1\cos\varphi - C_2 & (2) \end{cases}$$

(2)/(1) 得 $\frac{dr}{r}=\left(\frac{C_2}{C_1\sin\varphi}-\cot\varphi\right)d\varphi$, 对两积分:

$$\ln r=\frac{C_2}{C_1}\ln\tan\frac{\varphi}{2}-\ln\sin\varphi+C$$

设 $\frac{C_2}{C_1}=k,\frac{\varphi}{2}=\alpha,C$ 为常数, 即

$$\ln r=\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha}{2\cos^{k+1}\alpha}+C$$

代入初始条件 $r=r_0$ 时, $\varphi=\varphi_0$. 设 $\frac{\varphi_0}{2}=\alpha_0$, 有 $C=\ln r_0-\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha_0}{2\cos^{k+1}\alpha_0}$, 得

$$r=r_0\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha}\cdot\frac{\cos^{k+1}\alpha_0}{\sin^{k-1}\alpha_0}$$

1.18

Solution:

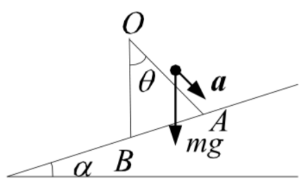

图 1.6: 受力的分析图

分析上面的图中各个物理量的关系容易得到下面的内容：

$$\begin{cases}a=g\cos\theta\\ \mathbf{OB}=h\quad\text{假设的量}\\ \angle\mathbf{OBA}=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\\ \angle\mathbf{OAB}=\dfrac{\pi}{2}-\theta+\alpha\end{cases}$$

根据正弦定理有：

$$\Longrightarrow\frac{s}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{h}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\alpha\right)}\Longrightarrow s=\frac{h\cos\alpha}{\cos(\theta-\alpha)}$$

同时意识到 OA 段的运动方程：
$\Longrightarrow s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}g\cos\theta t^2\Longrightarrow\frac{1}{2}g\cos\theta\cos(\theta-\alpha)t^2-h\cos\alpha=0$
$\Longrightarrow t^2=\frac{2h\cos\alpha}{g\cos\theta\cos(\theta-\alpha)}$

然后求得分母的极大值就可以了，此时有：$\tan\theta=\sin 2\theta$
考虑到角度的范围限制，导致结果是

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

1.19

Solution:
分别考虑上升、下降阶段的受力分析，很容易得到下面的方程：

$$\begin{cases} m\ddot{y}=-mg-mk^2g\dot{y}^2 \\ -m\ddot{y}=-mg+mk^2g\dot{y}^2 \end{cases}$$

通过解这个偏微分方程可以很容易得到上升、下降阶段的 h 的表达式，h 相同时的速度 v 就很显然了。

1.20

Solution：
这道题是 1.20 的进阶版。容易得出以下受力分析：

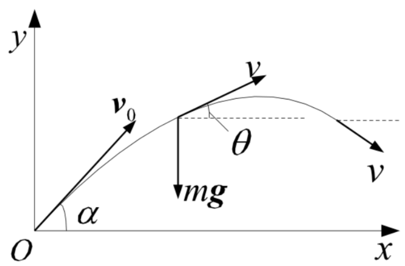

图 1.7: 受力的分析图

轨道的切线方向上有:

$$m\frac{dv}{dt} = -mkv - mg\sin\theta$$

轨道的法线方向上有:

$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\theta$$

由于角是在减小的, 故

$$r = -\frac{ds}{d\theta}$$