

# 理论力学教程题解

Koit Newton

2023 年 1 月 4 日

# 前言

本文档对应的教科书是《理论力学教程》（第四版）周衍柏著。所有的答案完全由 Koit Newton 个人所写，对答案的正确性与简洁性不做保证，要求读者具有一定的思考能力。如有疑问，欢迎邮件与我讨论。感谢各位的阅读！本人邮件地址：musikundpku@qq.com

Koit Newton

2023 年冬季于合肥

# 目录

第一章 质点力学	1
1.1 . . . . .	1
1.2 . . . . .	1
1.3 . . . . .	2
1.4 . . . . .	4
1.5 . . . . .	4
1.6 . . . . .	5
1.7 . . . . .	5

# 第一章 质点力学

## 1.1

Solution:

我们可以简单的假设第一段初始 450 速度为  $V_0$ , 那么第一段的末尾的瞬间速度 (也是第二段初速度) 是  $V_0 + at_1$ , 第二段结束的末尾速度是  $V_0 + a(t_1 + t_2)$ 。那么我们可以计算速度和时间的关系:

$$\begin{cases} \frac{s}{\frac{1}{2}(V_0 + (V_0 + at_1))} = t_1 \\ \frac{s}{\frac{1}{2}((V_0 + at_1) + (V_0 + at_1 + at_2))} = t_2 \end{cases}$$

很容易通过解这个方程得到题目给的加速度  $a$  的值。

## 1.2

Solution:

这题目不完美, 都没说啥时候开始航行的。

不要紧, 我们来猜一猜它的意思。首先我们假设是同时出发的, 且假设速度为向东的船为 A 船, 向北的那个是 B 船, 也就是  $V_A = 15km/h, V_B = 15km/h$ , 假设船 A 距离灯塔为  $S_A$ , 那么船 B 距离灯塔为  $S_B$ , 其中我们容易知道  $S_B = 22.5km + S_A$ , 因为船 B 要多行驶 1.5 小时才能到达同样的灯塔。在以灯塔为原点的平面直角坐标系中我们来导出坐标的表达式, 注意我们

假设的时间原点是正午 12 点，这样的時候坐标就确定了，这个时候，船 A 的坐标为 (0,0)，船 B 的坐标为 (0, -22.5)。t > 0 情况下船 A 坐标 x, 船 B 坐标 y 和两者的距离在下面：

$$\begin{cases} x = 15t \\ y = 15t - 22.5 \\ distance(A - B) = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

我们可以得到 distance(A-B) 的表达式为：

$$distance(A - B) = D = \sqrt{450t^2 - 675t + 506.25}$$

对其根号下的内容对 t 求导可以得到：

$$\frac{d(450t^2 - 675t + 506.25)}{dt} = 900t - 675$$

容易得到 t>0 时候的极小值为：

$$D_{min} = \sqrt{450\left(\frac{675}{900}\right)^2 - 675\frac{675}{900} + 506.25} = 15.9km$$

此时的  $t = \frac{675}{900} = \frac{3}{4}h$ ，也就是午后 45 分钟。但是我们还需要再讨论一下是否为上午某个时刻的距离最短：

假设是距离正午 12 时的左侧 t 小时距离最近，再假设时间反演，坐标轴正负方向更换，此时等效为这两船是远离灯塔的，那么我们很容易得到一个结论是  $x=15t, y=15t+22.5$ ，此时最短距离就是  $t=0, D=22.5$ 。

综上所述，午后 45 分钟距离最近，距离为 15.9km。

### 1.3

Solution:

观察到题目已经给出了坐标系，是要求在这个直角坐标系中写出以 x, y 为

未知变量表示的轨迹方程，按道理也是类似这样表示的速度公式，不过答案的速度公式中包含着题目中提到的一些角度，就这样吧，我们给出求解过程。

假设 C 的坐标为  $(x, y)$ ，根据图中这两个绑定 (绑定为 A) 的连杆和 B 运动的限制等题目中的条件我们可以列出下面的方程组：

$$\begin{cases} y = a \sin \psi \\ \frac{r}{\sin \psi} = \frac{2a}{\sin \varphi} \\ r \cos \varphi + a \cos \psi = x \\ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \end{cases}$$

从上面的方程组可以解出：

$$\begin{cases} \frac{x - a\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}}{r} = \cos \varphi \\ \frac{2y}{r} = \sin \varphi \\ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \end{cases}$$

可以很容易地整理得到轨迹方程：

$$4x^2(a^2 - y^2) = (x^2 + 3y^2 + a^2 - r^2)^2$$

上述讨论是建立在如题目的图所示的情况下的，A 在第一象限，当角度变化时，A 不在其它象限时是否还满足这样的轨道方程呢？很显然，方程组一直成立，所以上述就是轨迹的方程。

可以从  $x, y$  的定义式出发求导，然后利用已知的角速度可以得到  $V_x, V_y$ ，之

后再矢量加法可知速度大小。

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = -r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - a \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \\
 &= -r\omega \sin \varphi - a\omega \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \\
 &= -r\omega \sin \varphi - \frac{r\omega \sin \psi \cos \varphi}{2 \cos \psi} \\
 \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{r}{2} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \\
 &= \frac{rw}{2} \cos \varphi \\
 V &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{rw}{2 \cos \psi} \sqrt{\sin^2 \psi \cos^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos \psi \sin(\varphi + \psi)}
 \end{aligned}$$

和参考答案不一致，读者自行思考。

## 1.4

Solution:

这道题非常简单。如下：

$$\begin{aligned}
 x &= d \tan \theta \\
 \Rightarrow v &= d\omega \sec^2 \theta = \omega \frac{d^2 + x^2}{d} \\
 \Rightarrow a &= 2 d\omega^2 \sec^2 \theta \tan \theta = 2\omega^2 x \frac{d^2 + x^2}{d^2}
 \end{aligned}$$

## 1.5

Solution:

就是对加速度积分得到速度  $v$ ，再对  $v$  积分得到路程  $s$ 。计入初始条件为  $v(t=0)=0$  作为边界条件即可，没有难度。

## 1.6

题目提出的坐标系是极坐标系，可以参考书本 Page7-Page10 的内容，此处直接套用书中给出的公式：

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

而题目给出的数据是：

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = \lambda r \\ v_\theta = r\dot{\theta} = \mu\theta \end{cases}$$

带入计算容易得到的结果是：

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \lambda \cdot \lambda r - r\dot{\theta} \cdot \dot{\theta} = \lambda^2 r - \mu\theta \cdot \frac{\mu\theta}{r} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (\mu\dot{\theta} - \dot{r}\dot{\theta}) + 2\dot{r}\dot{\theta} = (\mu \cdot \frac{\mu\theta}{r} - \lambda r \cdot \frac{\mu\theta}{r}) + 2 \cdot \lambda r \cdot \frac{\mu\theta}{r} = \mu\theta(\frac{\mu}{r} + \lambda)$$

## 1.7

Solution:

下面是根据题目所给的表达式的求导结果：

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

题目可能是在让我们探究  $a_x, a_y$  和  $a_r, a_\theta$  的关系。