

理论力学教程题解

Koit Newton

2023 年 1 月 10 日

前言

本文档对应的教科书是《理论力学教程》（第四版）周衍柏著。所有的答案由 Koit Newton 个人的思考、同时结合一些网络资料所写，对答案的正确性与简洁性不做保证，要求读者具有一定的思考能力。如果有疑问，欢迎邮件与我讨论。感谢各位的阅读！同时感谢所有喜爱物理的人！本人邮件地址：musikundpku@qq.com

Koit Newton

2023 年冬季于合肥

目录

第一章 质点力学

1.1

Solution:

我们可以简单的假设第一段初始 450 速度为 V_0 , 那么第一段的末尾的瞬间速度 (也是第二段初速度) 是 $V_0 + at_1$, 第二段结束的末尾速度是 $V_0 + a(t_1 + t_2)$ 。那么我们可以计算速度和时间的关系:

$$\begin{cases} \frac{s}{\frac{1}{2}(V_0 + (V_0 + at_1))} = t_1 \\ \frac{s}{\frac{1}{2}((V_0 + at_1) + (V_0 + at_1 + at_2))} = t_2 \end{cases}$$

很容易通过解这个方程得到题目给的加速度 a 的值。

1.2

Solution:

这题目不完美, 都没说啥时候开始航行的。

不要紧, 我们来猜一猜它的意思。首先我们假设是同时出发的, 且假设速度为向东的船为 A 船, 向北的那个是 B 船, 也就是 $V_A = 15km/h, V_B = 15km/h$, 假设船 A 距离灯塔为 S_A , 那么船 B 距离灯塔为 S_B , 其中我们容易知道 $S_B = 22.5km + S_A$, 因为船 B 要多行驶 1.5 小时才能到达同样的灯塔。

在以灯塔为原点的平面直角坐标系中我们来导出坐标的表达式, 注意我们假设的时间原点是正午 12 点, 这样的时候坐标就确定了, 这个时候, 船 A

的坐标为 (0,0)，船 B 的坐标为 (0, -22.5)。t > 0 情况下船 A 坐标 x, 船 B 坐标 y 和两者的距离在下面：

$$\begin{cases} x = 15t \\ y = 15t - 22.5 \\ distance(A - B) = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

我们可以得到 distance(A-B) 的表达式为：

$$distance(A - B) = D = \sqrt{450t^2 - 675t + 506.25}$$

对其根号下的内容对 t 求导可以得到：

$$\frac{d(450t^2 - 675t + 506.25)}{dt} = 900t - 675$$

容易得到 t>0 时候的极小值为：

$$D_{min} = \sqrt{450\left(\frac{675}{900}\right)^2 - 675\frac{675}{900} + 506.25} = 15.9km$$

此时的 $t = \frac{675}{900} = \frac{3}{4}h$ ，也就是午后 45 分钟。但是我们还需要再讨论一下是否为上午某个时刻的距离最短：

假设是距离正午 12 时的左侧 t 小时距离最近，再假设时间反演，坐标轴正负方向更换，此时等效为这两船是远离灯塔的，那么我们很容易得到一个结论是 $x=15t, y=15t+22.5$ ，此时最短距离就是 $t=0, D=22.5$ 。

综上所述，午后 45 分钟距离最近，距离为 15.9km。

1.3

Solution:

观察到题目已经给出了坐标系，是要求在这个直角坐标系中写出以 x, y 为未知变量表示的轨迹方程，按道理也是类似这样表示的速度公式，不过答案的速度公式中包含着题目中提到的一些角度，就这样吧，我们给出求解过

程。

假设 C 的坐标为 (x, y) ，根据图中这两个绑定 (绑定为 A) 的连杆和 B 运动的限制等题目中的条件我们可以列出下面的方程组：

$$\begin{cases} y = a \sin \psi \\ \frac{r}{\sin \psi} = \frac{2a}{\sin \varphi} \\ r \cos \varphi + a \cos \psi = x \\ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \end{cases}$$

从上面的方程组可以解出：

$$\begin{cases} \frac{x - a\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}}{r} = \cos \varphi \\ \frac{2y}{r} = \sin \varphi \\ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \end{cases}$$

可以很容易地整理得到轨迹方程：

$$4x^2(a^2 - y^2) = (x^2 + 3y^2 + a^2 - r^2)^2$$

上述讨论是建立在如题目的图所示的情况下的，A 在第一象限，当角度变化时，A 不在其它象限时是否还满足这样的轨道方程呢？很显然，方程组一直成立，所以上述就是轨迹的方程。

可以从 x, y 的定义式出发求导，然后利用已知的角速度可以得到 V_x, V_y ，之

后再矢量加法可知速度大小。

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = -r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - a \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \\
 &= -r\omega \sin \varphi - a\omega \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \\
 &= -r\omega \sin \varphi - \frac{r\omega \sin \psi \cos \varphi}{2 \cos \psi} \\
 \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{r}{2} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \\
 &= \frac{r\omega}{2} \cos \varphi \\
 V &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{r\omega}{2 \cos \psi} \sqrt{\sin^2 \psi \cos^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos \psi \sin(\varphi + \psi)}
 \end{aligned}$$

和参考答案不一致，读者自行思考。

1.4

Solution:

这道题非常简单。如下:

$$\begin{aligned}
 x &= d \tan \theta \\
 \Rightarrow v &= d\omega \sec^2 \theta = \omega \frac{d^2 + x^2}{d} \\
 \Rightarrow a &= 2 d\omega^2 \sec^2 \theta \tan \theta = 2\omega^2 x \frac{d^2 + x^2}{d^2}
 \end{aligned}$$

1.5

Solution:

就是对加速度积分得到速度 v ，再对 v 积分得到路程 s 。计入初始条件为 $v(t=0) = 0$ 作为边界条件即可，没有难度。

1.6

题目提出的坐标系是极坐标系，可以参考书本 Page7-Page10 的内容，此处直接套用书中给出的公式：

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

而题目给出的数据是：

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = \lambda r \\ v_\theta = r\dot{\theta} = \mu\theta \end{cases}$$

带入计算容易得到的结果是：

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \lambda \cdot \lambda r - r\dot{\theta} \cdot \dot{\theta} = \lambda^2 r - \mu\theta \cdot \frac{\mu\theta}{r} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (\mu\dot{\theta} - \dot{r}\dot{\theta}) + 2\dot{r}\dot{\theta} = (\mu \cdot \frac{\mu\theta}{r} - \lambda r \cdot \frac{\mu\theta}{r}) + 2 \cdot \lambda r \cdot \frac{\mu\theta}{r} = \mu\theta(\frac{\mu}{r} + \lambda)$$

1.7

Solution:

下面是根据题目所给的表达式的求导结果：

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

从极坐标系去计算加速度请翻阅书本的 Page7。如果是要从 a_x, a_y 去推导 a_r, a_θ ，要分析矢量：

容易列出以下的方程：

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta \\ \ddot{y} = a_r \sin \theta + a_\theta \cos \theta \end{cases}$$

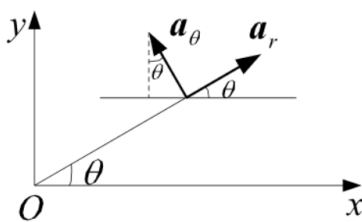


图 1.1: 加速度的矢量分析图

求解可以得到和书本中一样的结果。

1.8

Solution:

这道题看起来比较复杂，但是实际上 r 的方程都给你了，直接套用之前的极坐标的速度公式就可以求得结果。

$$\begin{cases}
 v_r = \dot{r} = a(1 - e^2)(-1)(1 + e \cos \theta)^{-2} \cdot e(-\sin \theta) \frac{d\theta}{dt} \\
 = ae\omega \sin \theta (1 - e^2)(1 + e \cos \theta)^{-2} \\
 = r\omega \cdot \frac{\sin \theta}{1 + e \cos \theta} \\
 v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega = a\omega(1 - e^2)(1 + e \cos \theta)^{-1} \\
 e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow v &= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = r\omega \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} + 1} \\
 &= \frac{r\omega}{b} \sqrt{r(2a - r)}
 \end{aligned}$$

1.9

Solutin:

已知速度可以表示为: $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$, 设 θ 为位矢与 x 轴正向的夹角, 然后

我们容易知道:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + v_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + v_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} \\ &= \left(\frac{dv_x}{dt} - v_y\dot{\theta}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dv_y}{dt} + v_x\dot{\theta}\right)\mathbf{j} \end{aligned}$$

容易得到:

$$\begin{aligned} \longrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} &= v_x \frac{dv_x}{dt} - v_x v_y \dot{\theta} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_x v_y \dot{\theta} \\ &= v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} \end{aligned}$$

根据题意得到的方程是: $v_x^2 + v_y^2 = C$ (C 是常数), 所以对两端求导可以得到:

$$v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} = 0$$

也就是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$, 这就证明了两两正交。

1.10

Solution:

此处使用自然坐标系, 然后我们可以列出如下的方程组:

$$\begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \\ a_t = -2ka_n \\ \frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ y^2 = 2px \end{cases} \implies \begin{cases} y' = \frac{p}{y} \\ y'' = -\frac{p^2}{y^3} \\ \frac{dv}{dt} = -2kv^2 \frac{|\frac{p^2}{y^3}|}{(1+\frac{p^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad \star$$

同时经过简单的计算, 可以得到下面的方程:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} = \dot{y} \frac{dv}{dy} \\ v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ \dot{x} = \frac{y\dot{y}}{p} \\ \dot{y}^2 = \frac{v^2}{1 + \frac{y^2}{p^2}} \leftarrow \text{由 } v^2, \dot{x} \text{ 可以求得} \end{cases}$$

将上面的方程里面的数据带入方程 ★ 里面可以得到下面的方程：

$$\begin{aligned} \frac{v}{(1 + \frac{y^2}{p^2})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dv}{dy} &= -2kv^2 \cdot \frac{\frac{p^2}{y^3}}{(1 + \frac{p^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{dv}{v} &= -2kp \frac{dy}{y^2 + p^2} \end{aligned}$$

经过积分：

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_u^v \frac{dv}{v} &= -2kp \int_p^{-p} \frac{dy}{y^2 + p^2} \\ v &= ue^{-k\pi} \end{aligned}$$

1.11

Solution:

可以十分显然得到如下的分析图以及方程组：

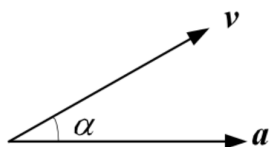


图 1.2: 加速度和速度的矢量分析图

$$\begin{cases} a_n = \frac{v^2}{r} = a \sin \alpha \\ a_t = \frac{dv}{dt} = a \cos \alpha \end{cases}$$

容易看出

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{r \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{dv}{dt} \\ \Rightarrow \frac{1}{r} \cot \alpha dt &= \frac{dv}{v^2} \\ \Rightarrow \int_0^t \frac{1}{r} \cot \alpha dt dx &= \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} dx \\ \frac{1}{v} &= \frac{1}{v_0} - \frac{t}{r} \cot \alpha \end{aligned}$$

1.12

Solution:

我们看到 1.11 的结果，也就是

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{t}{r} \cot \alpha = \frac{r - v_0 t \cot \alpha}{v_0 r}$$

但是不能通过简单的积分或者分子分母互换之类得到所求的表达式。不过从所求的表达式容易看出似乎是对角度 θ 和 v 的积分。逆推试试：

$$\begin{aligned} v &= v_0 e^{(\theta - \theta_0) \cot \alpha} \leftarrow \ln v = \ln v_0 + (\theta - \theta_0) \cot \alpha \leftarrow \frac{\ln v}{\ln v_0} = (\theta - \theta_0) \cot \alpha \\ \leftarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= \int_{\theta_0}^{\theta} \cot \alpha d\theta \leftarrow \frac{dv}{v} = \cot \alpha d\theta \end{aligned}$$

下面是基本的质点运动方程组：

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_n = \frac{v^2}{r} = a \sin \alpha \\ a_t = \frac{dv}{dt} = a \cos \alpha \end{cases} &\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \omega \\ a = \frac{dv}{d\theta} \omega = \frac{dv}{d\theta} \frac{v}{r} &= \frac{v^2}{r \sin \alpha} \cos \alpha \Rightarrow \frac{dv}{v} = \cot \alpha d\theta \end{aligned}$$

证毕。

1.13

Solution:

- (1) 略。
- (2) 注意到这个飞机的速率是相对于空气的。

$$t = \frac{l}{v' + v_0} + \frac{l}{v' - v_0} = t_B$$

- (3) 可以通过下面的速度的矢量分析得到 $v_{\text{飞机}}$ 的大小，然后有 $t_N = \frac{2l}{v_{\text{飞机}}}$ 。

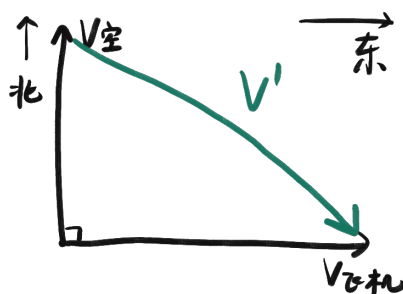


图 1.3: 加速度和速度的矢量分析图

1.14

Solution:

略，就是简单的速度合成问题。

1.15

Solution:

得出下面的速度分析图：

$$\Rightarrow x = \frac{2c}{u}y - \frac{cy^2}{ud} + D (D \text{ 为一常数})$$

根据边界条件, 也就是根据上述的 x 的方程可以得知: 当 $y = \frac{d}{2}$ 时, $x = \frac{cd}{4u}$

$$\Rightarrow D = -\frac{cd}{2u} \Rightarrow x = \frac{2c}{u}y - \frac{cy^2}{ud} - \frac{cd}{2u} \left(\frac{d}{2} \leq y \leq d \right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{cu}{d}t^2 = \frac{c}{ud}y^2 & \left(0 \leq y \leq \frac{d}{2} \right) \\ x = \frac{2c}{u}y - \frac{cy^2}{ud} - \frac{cd}{2u} & \left(\frac{d}{2} \leq y \leq d \right) \end{cases} \Rightarrow \text{靠拢地点, 也就是当 } y=d \text{ 时: } x = \frac{cd}{2u}$$

1.17

Solution:

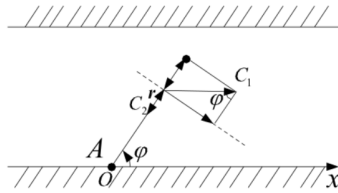


图 1.5: 速度的矢量分析图

船沿垂直于 \mathbf{r} 的方向的速度为 $-C_1 \sin \varphi$, 船沿径向 \mathbf{r} 方向的速度为 C_2 和 C_1 沿径向的分量的合成, 即

$$\begin{cases} r \frac{d\varphi}{dt} = -C_1 \sin \varphi & (1) \\ \frac{dr}{dt} = C_1 \cos \varphi - C_2 & (2) \end{cases}$$

(2)/(1) 得 $\frac{dr}{r} = \left(\frac{C_2}{C_1 \sin \varphi} - \cot \varphi \right) d\varphi$, 对两积分:

$$\ln r = \frac{C_2}{C_1} \ln \tan \frac{\varphi}{2} - \ln \sin \varphi + C$$

设 $\frac{C_2}{C_1} = k, \frac{\varphi}{2} = \alpha, C$ 为常数, 即

$$\ln r = \ln \frac{\sin^{k-1} \alpha}{2 \cos^{k+1} \alpha} + C$$

代入初始条件 $r = r_0$ 时, $\varphi = \varphi_0$. 设 $\frac{\varphi_0}{2} = \alpha_0$, 有 $C = \ln r_0 - \ln \frac{\sin^{k-1} \alpha_0}{2 \cos^{k+1} \alpha_0}$, 得

$$r = r_0 \frac{\sin^{k-1} \alpha}{\cos^{k+1} \alpha} \cdot \frac{\cos^{k+1} \alpha_0}{\sin^{k-1} \alpha_0}$$

1.18

Solution:

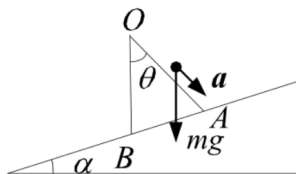


图 1.6: 受力的分析图

分析上面的图中各个物理量的关系容易得到下面的内容:

$$\begin{cases} a = g \cos \theta \\ \mathbf{OB} = h \quad \text{假设的量} \\ \angle \mathbf{OBA} = \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \angle \mathbf{OAB} = \frac{\pi}{2} - \theta + \alpha \end{cases}$$

根据正弦定理有:

$$\Rightarrow \frac{s}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{h}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha)} \Rightarrow s = \frac{h \cos \alpha}{\cos(\theta - \alpha)}$$

同时意识到 OA 段的运动方程:

$$\begin{aligned} \Rightarrow s &= \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g \cos \theta t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} g \cos \theta \cos(\theta - \alpha) t^2 - h \cos \alpha = 0 \\ \Rightarrow t^2 &= \frac{2h \cos \alpha}{g \cos \theta \cos(\theta - \alpha)} \end{aligned}$$

然后求得分母的极大值就可以了，此时有： $\tan \theta = \sin 2\theta$

考虑到角度的范围限制，导致结果是

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

1.19

Solution:

分别考虑上升、下降阶段的受力分析，很容易得到下面的方程：

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -mg - mk^2 g y^2 \\ -m\ddot{y} = -mg + mk^2 g y^2 \end{cases}$$

通过解这个偏微分方程可以很容易得到上升、下降阶段的 h 的表达式， h 相同时的速度 v 就很显然了。

1.20

Solution:

这道题是 1.20 的进阶版。容易得出以下受力分析：

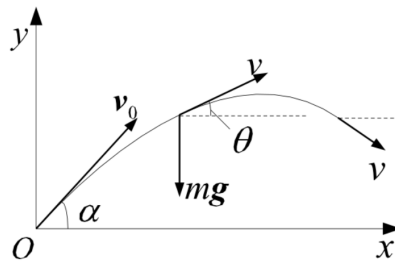


图 1.7: 受力的分析图

轨道的切线方向上有：

$$m \frac{dv}{dt} = -mkv - mg \sin \theta \quad (1)$$

轨道的法线方向上有:

$$m \frac{v^2}{r} = mg \cos \theta \quad (2)$$

由于角是在减小的, 故

$$r = -\frac{ds}{d\theta} \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds} \Rightarrow mv \frac{dv}{ds} = -mkv - mg \sin \theta \quad (4)$$

$$(2), (3) \Rightarrow mv^2 \frac{d\theta}{ds} = -mg \cos \theta \quad (5)$$

$$\frac{(4)}{(5)} \Rightarrow \frac{\cos \theta dv - v \sin \theta d\theta}{v^2 \cos^2 \theta} = \frac{k d\theta}{g \cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d(v \cos \theta)}{v^2 \cos^2 \theta} = \frac{k d\theta}{g \cos^2 \theta} \quad \text{积分这个式子}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v \cos \theta} = \frac{k}{g} \tan \theta + C \quad \text{带入初始条件, } t=0 \text{ 时的 } \theta = \alpha, v = v_0,$$

$$\Rightarrow -\left\{ \frac{1}{v_0 \cos \alpha} + \frac{k}{g} \tan \alpha \right\}$$