理论力学教程题解

Koit Newton

2023 年 1 月 5 日

前言

本文档对应的教科书是《理论力学教程》（第四版）周衍柏著。所有的答案由 Koit Newton 个人的思考、同时结合一些网络资料所写，对答案的正确性与简洁性不做保证，要求读者具有一定的思考能力。如果有疑问，欢迎邮件与我讨论。感谢各位的阅读！同时感谢所有喜爱物理的人！本人邮件地址：musikundpku@qq.com

Koit Newton
2023 年冬季于合肥

目录

第一章　质点力学

1.1

Solution:

我们可以简单的假设第一段初始 450 速度为 V_0,那么第一段的末尾的瞬间速度 (也是第二段初速度) 是 V_0+at_1,第二段结束的末尾速度是 $V_0+a(t_1+t_2)$。那么我们可以计算速度和时间的关系：

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\frac{1}{2}(V_0+(V_0+at_1))} = t_1 \\ \dfrac{s}{\frac{1}{2}((V_0+at_1)+(V_0+at_1+at_2))} = t_2 \end{cases}$$

很容易通过解这个方程得到题目给的加速度 a 的值。

1.2

Solution:

这题目不完美，都没说啥时候开始航行的。

不要紧,我们来猜一猜它的意思。首先我们假设是同时出发的,且假设速度为向东的船为 A 船,向北的那个是 B 船,也就是 $V_A = 15km/h, V_B = 15km/h$,假设船 A 距离灯塔为 S_A，那么船 B 距离灯塔为 S_B，其中我们容易知道 $S_B = 22.5km + S_A$，因为船 B 要多行驶 1.5 小时才能到达同样的灯塔。

在以灯塔为原点的平面直角坐标系中我们来导出坐标的表达式，注意我们

假设的时间原点是正午 12 点，这样的时候坐标就确定了，这个时候，船 A 的坐标为 (0,0)，船 B 的坐标为（0，-22.5）。$t>0$ 情况下船 A 坐标 x, 船 B 坐标 y 和两者的距离在下面：

$$\begin{cases} x = 15t \\ y = 15t - 22.5 \\ distance(A-B) = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

我们可以得到 distance(A-B) 的表达式为：

$$distance(A-B) = D = \sqrt{450t^2 - 675t + 506.25}$$

对其根号下的内容对 t 求导可以得到：

$$\frac{d(450t^2 - 675t + 506.25)}{dt} = 900t - 675$$

容易得到 t>0 时候的极小值为：

$$D_{min} = \sqrt{450(\frac{675}{900})^2 - 675\frac{675}{900} + 506.25} = 15.9km$$

此时的 $t = \frac{675}{900} = \frac{3}{4}h$，也就是午后 45 分钟。但是我们还需要再讨论一下是否为上午某个时刻的距离最短：
假设是距离正午 12 时的左侧 t 小时距离最近，再假设时间反演, 坐标轴正负方向更换，此时等效为这两船是远离灯塔的，那么我们很容易得到一个结论是 x=15t,y=15t+22.5，此时最短距离就是 t=0,D=22.5。
综上所述，午后 45 分钟距离最近，距离为 15.9km。

1.3

Solution:
观察到题目已经给出了坐标系，是要求在这个直角坐标系中写出以 x, y 为

未知变量表示的轨迹方程，按道理也是类似这样表示的速度公式，不过答案的速度公式中包含着题目中提到的一些角度，就这样吧，我们给出求解过程。

假设 C 的坐标为 (x, y)，根据图中这两个绑定 (绑定点为 A) 的连杆和 B 运动的限制等题目中的条件我们可以列出下面的方程组:

$$\begin{cases} y = a\sin\psi \\ \dfrac{r}{\sin\psi} = \dfrac{2a}{\sin\varphi} \\ r\cos\varphi + a\cos\psi = x \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{cases}$$

从上面的方程组可以解出：

$$\begin{cases} \dfrac{x - a\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}}{r} = \cos\varphi \\ \dfrac{2y}{r} = \sin\varphi \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{cases}$$

可以很容易地整理得到轨迹方程：

$$4x^2(a^2 - y^2) = (x^2 + 3y^2 + a^2 - r^2)^2$$

上述讨论是建立在如题目的图所示的情况下的，A 在第一象限，当角度变化时，A 不在其它象限时是否还满足这样的轨道方程呢？很显然，方程组一直成立，所以上述就是轨迹的方程。

可以从 x,y 的定义式出发求导，然后利用已知的角速度可以得到 V_x, V_y，之

后再矢量加法可知速度大小。

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = -r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} - a\sin\psi\frac{d\psi}{dt} \\
&= -r\omega\sin\varphi - a\omega\sin\psi\frac{d\psi}{dt} \\
&= -r\omega\sin\varphi - \frac{r\omega\sin\psi\cos\varphi}{2\cos\psi} \\
\dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{r}{2}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} \\
&= \frac{rw}{2}\cos\varphi
\end{aligned}
$$

$$
V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{rw}{2\cos\psi}\sqrt{\sin^2\psi\cos\varphi^2 + 4\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)}
$$

和参考答案不一致，读者自行思考。

1.4

Solution:

这道题非常简单。如下:

$$
\begin{aligned}
&x = d\tan\theta \\
\Rightarrow &v = d\omega\sec^2\theta = \omega\frac{d^2+x^2}{d} \\
\Rightarrow &a = 2\ \mathrm{d}\omega^2\sec^2\theta\tan\theta = 2\omega^2 x\frac{d^2+x^2}{d^2}
\end{aligned}
$$

1.5

Solution:

就是对加速度积分得到速度 v，再对 v 积分得到路程 s。计入初始条件为 $v(t=0)=0$ 作为边界条件即可，没有难度。

1.6

题目提出的坐标系是极坐标系，可以参考书本 Page7-Page10 的内容，此处直接套用书中给出的公式：

$$
\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})
\end{aligned}
$$

而题目给出的数据是:

$$
\begin{cases}
v_r = \dot{r} = \lambda r \\
v_\theta = r\dot{\theta} = \mu\theta
\end{cases}
$$

带入计算容易得到的结果是：

$$
\begin{aligned}
&a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \lambda \cdot \lambda r - r\dot{\theta} \cdot \dot{\theta} = \lambda^2 r - \mu\theta \cdot \frac{\mu\theta}{r} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r} \\
&a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (\mu\dot{\theta} - \dot{r}\dot{\theta}) + 2\dot{r}\dot{\theta} = (\mu \cdot \frac{\mu\theta}{r} - \lambda r \cdot \frac{\mu\theta}{r}) + 2 \cdot \lambda r \cdot \frac{\mu\theta}{r} = \mu\theta(\frac{\mu}{r} + \lambda)
\end{aligned}
$$

1.7

Solution:

下面是根据题目所给的表达式的求导结果：

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\
\ddot{y} &= \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta
\end{aligned}
$$

从极坐标系去计算加速度请翻阅书本的 Page7。如果是要从 a_x, a_y 去推导 a_r, a_θ，暂时搁置，要分析矢量：

容易列出以下的方程：

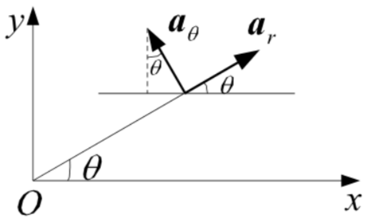

图 1.1: 加速度的矢量分析图

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta \\ \ddot{y} = a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta \end{cases}$$

求解可以得到和书本中一样的结果。

1.8

Solution: