理论力学教程题解

Koit Newton

2023 年 1 月 6 日

前言

本文档对应的教科书是《理论力学教程》（第四版）周衍柏著。所有的答案由 Koit Newton 个人的思考、同时结合一些网络资料所写，对答案的正确性与简洁性不做保证，要求读者具有一定的思考能力。如果有疑问，欢迎邮件与我讨论。感谢各位的阅读！同时感谢所有喜爱物理的人！本人邮件地址：musikundpku@qq.com

Koit Newton

2023 年冬季于合肥

目录

第一章　质点力学

1.1

Solution:

我们可以简单的假设第一段初始 450 速度为 V_0,那么第一段的末尾的瞬间速度 (也是第二段初速度) 是 V_0+at_1,第二段结束的末尾速度是 $V_0+a(t_1+t_2)$。那么我们可以计算速度和时间的关系:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\frac{1}{2}(V_0+(V_0+at_1))} = t_1 \\ \dfrac{s}{\frac{1}{2}((V_0+at_1)+(V_0+at_1+at_2))} = t_2 \end{cases}$$

很容易通过解这个方程得到题目给的加速度 a 的值。

1.2

Solution:

这题目不完美，都没说啥时候开始航行的。

不要紧,我们来猜一猜它的意思。首先我们假设是同时出发的,且假设速度为向东的船为 A 船,向北的那个是 B 船,也就是 $V_A = 15km/h, V_B = 15km/h$,假设船 A 距离灯塔为 S_A，那么船 B 距离灯塔为 S_B，其中我们容易知道 $S_B = 22.5km + S_A$，因为船 B 要多行驶 1.5 小时才能到达同样的灯塔。

在以灯塔为原点的平面直角坐标系中我们来导出坐标的表达式，注意我们

假设的时间原点是正午 12 点，这样的时候坐标就确定了，这个时候，船 A 的坐标为 (0,0)，船 B 的坐标为（0，-22.5）。$t>0$ 情况下船 A 坐标 x, 船 B 坐标 y 和两者的距离在下面：

$$\begin{cases} x = 15t \\ y = 15t - 22.5 \\ distance(A-B) = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

我们可以得到 distance(A-B) 的表达式为：

$$distance(A-B) = D = \sqrt{450t^2 - 675t + 506.25}$$

对其根号下的内容对 t 求导可以得到：

$$\frac{d(450t^2 - 675t + 506.25)}{dt} = 900t - 675$$

容易得到 t>0 时候的极小值为：

$$D_{min} = \sqrt{450(\frac{675}{900})^2 - 675\frac{675}{900} + 506.25} = 15.9km$$

此时的 $t = \frac{675}{900} = \frac{3}{4}h$，也就是午后 45 分钟。但是我们还需要再讨论一下是否为上午某个时刻的距离最短：

假设是距离正午 12 时的左侧 t 小时距离最近，再假设时间反演, 坐标轴正负方向更换，此时等效为这两船是远离灯塔的，那么我们很容易得到一个结论是 x=15t,y=15t+22.5，此时最短距离就是 t=0,D=22.5。

综上所述，午后 45 分钟距离最近，距离为 15.9km。

1.3

Solution:

观察到题目已经给出了坐标系，是要求在这个直角坐标系中写出以 x, y 为

未知变量表示的轨迹方程，按道理也是类似这样表示的速度公式，不过答案的速度公式中包含着题目中提到的一些角度，就这样吧，我们给出求解过程。

假设 C 的坐标为 (x, y)，根据图中这两个绑定 (绑定点为 A) 的连杆和 B 运动的限制等题目中的条件我们可以列出下面的方程组:

$$\begin{cases} y = a\sin\psi \\ \dfrac{r}{\sin\psi} = \dfrac{2a}{\sin\varphi} \\ r\cos\varphi + a\cos\psi = x \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{cases}$$

从上面的方程组可以解出：

$$\begin{cases} \dfrac{x - a\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}}{r} = \cos\varphi \\ \dfrac{2y}{r} = \sin\varphi \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{cases}$$

可以很容易地整理得到轨迹方程：

$$4x^2(a^2 - y^2) = (x^2 + 3y^2 + a^2 - r^2)^2$$

上述讨论是建立在如题目的图所示的情况下的，A 在第一象限，当角度变化时，A 不在其它象限时是否还满足这样的轨道方程呢？很显然，方程组一直成立，所以上述就是轨迹的方程。

可以从 x,y 的定义式出发求导，然后利用已知的角速度可以得到 V_x, V_y，之

后再矢量加法可知速度大小。

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = -r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} - a\sin\psi\frac{d\psi}{dt} \\
&= -r\omega\sin\varphi - a\omega\sin\psi\frac{d\psi}{dt} \\
&= -r\omega\sin\varphi - \frac{r\omega\sin\psi\cos\varphi}{2\cos\psi} \\
\dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{r}{2}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} \\
&= \frac{rw}{2}\cos\varphi
\end{aligned}$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{rw}{2\cos\psi}\sqrt{\sin^2\psi\cos\varphi^2 + 4\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)}$$

和参考答案不一致，读者自行思考。

1.4

Solution:

这道题非常简单。如下:

$$\begin{aligned}
&x = d\tan\theta \\
\Rightarrow &v = d\omega\sec^2\theta = \omega\frac{d^2 + x^2}{d} \\
\Rightarrow &a = 2\ \mathrm{d}\omega^2\sec^2\theta\tan\theta = 2\omega^2 x\frac{d^2 + x^2}{d^2}
\end{aligned}$$

1.5

Solution:

就是对加速度积分得到速度 v，再对 v 积分得到路程 s。计入初始条件为 $v(t=0)=0$ 作为边界条件即可，没有难度。

1.6

题目提出的坐标系是极坐标系，可以参考书本 Page7-Page10 的内容，此处直接套用书中给出的公式：

$$
\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})
\end{aligned}
$$

而题目给出的数据是:

$$
\begin{cases}
v_r = \dot{r} = \lambda r \\
v_\theta = r\dot{\theta} = \mu\theta
\end{cases}
$$

带入计算容易得到的结果是：

$$
\begin{aligned}
&a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \lambda \cdot \lambda r - r\dot{\theta} \cdot \dot{\theta} = \lambda^2 r - \mu\theta \cdot \frac{\mu\theta}{r} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r} \\
&a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (\mu\dot{\theta} - \dot{r}\dot{\theta}) + 2\dot{r}\dot{\theta} = (\mu \cdot \frac{\mu\theta}{r} - \lambda r \cdot \frac{\mu\theta}{r}) + 2 \cdot \lambda r \cdot \frac{\mu\theta}{r} = \mu\theta(\frac{\mu}{r} + \lambda)
\end{aligned}
$$

1.7

Solution:

下面是根据题目所给的表达式的求导结果：

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\
\ddot{y} &= \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta
\end{aligned}
$$

从极坐标系去计算加速度请翻阅书本的 Page7。如果是要从 a_x, a_y 去推导 a_r, a_θ，要分析矢量：

容易列出以下的方程：

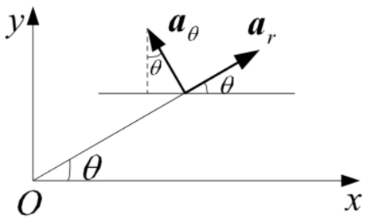

图 1.1: 加速度的矢量分析图

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta \\ \ddot{y} = a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta \end{cases}$$

求解可以得到和书本中一样的结果。

1.8

Solution:
这道题看起来比较复杂，但是实际上 r 的方程都给你了，直接套用之前的极坐标系的速度公式就可以求得结果。

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = a(1-e^2)(-1)(1+e\cos\theta)^{-2}\cdot e(-\sin\theta)\dfrac{d\theta}{dt} \\ \quad = ae\omega\sin\theta(1-e^2)(1+e\cos\theta)^{-2} \\ \quad = r\omega\cdot\dfrac{\sin\theta}{1+e\cos\theta} \\ v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega = a\omega(1-e^2)(1+e\cos\theta)^{-1} \\ e = \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow v = \sqrt{v_r^2+v_\theta^2} &= r\omega\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2}+1} \\ &= \frac{r\omega}{b}\sqrt{r(2a-r)} \end{aligned}$$

1.9

Solutin：

已知速度可以表示为:$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$, 设 θ 为位矢与 x 轴正向的夹角，然后我们容易知道:

$$\begin{aligned} a = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + v_x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + v_y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} \\ &= (\frac{dv_x}{dt} - v_y\dot{\theta})\boldsymbol{i} + (\frac{dv_y}{dt} + v_x\dot{\theta})\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

容易得到：

$$\begin{aligned} \longrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} &= v_x\frac{dv_x}{dt} - v_xv_y\dot{\theta} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_xv_y\dot{\theta} \\ &= v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} \end{aligned}$$

根据题意得到的方程是：$v_x^2 + v_y^2 = C$(C 是常数)，所以对两端求导可以得到：

$$v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} = 0$$

也就是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = 0$，这就证明了两者正交。

1.10

Solution:

此处使用自然坐标系，然后我们可以列出如下的方程组:

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \\ a_t = -2ka_n \\ \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ y^2 = 2px \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{p}{y} \\ y'' = -\dfrac{p^2}{y^3} \\ \dfrac{dv}{dt} = -2kv^2 \dfrac{|\frac{p^2}{y^3}|}{(1+\frac{p^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}} \quad \bigstar \end{cases}$$

同时经过简单的计算，可以得到下面的方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dt} \cdot \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}\dfrac{dv}{dy} \\ v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ \dot{x} = \dfrac{y\dot{y}}{p} \\ \dot{y}^2 = \dfrac{v^2}{1+\frac{y^2}{p^2}} \leftarrow \text{由 } v^2, \dot{x} \text{ 可以求得} \end{cases}$$

将上面的方程里面的数据带入方程 $\bigstar$ 里面可以得到下面的方程：

$$\frac{v}{(1+\frac{y^2}{p^2})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dv}{dy} = -2kv^2 \cdot \frac{\frac{p^2}{y^3}}{(1+\frac{p^2}{y^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv}{v} = -2kp\frac{dy}{y^2+p^2}$$

经过积分：

$$\Longrightarrow \int_u^v \frac{dv}{v} = -2kp\int_p^{-p} \frac{dy}{y^2+p^2}$$

$$v = ue^{-k\pi}$$

1.11

Solution:

可以十分显然得到如下的分析图以及方程组：

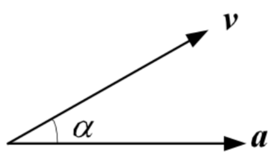

图 1.2: 加速度和速度的矢量分析图

$$\begin{cases} a_n = \frac{v^2}{r} = a\sin\alpha \\ a_t = \frac{dv}{dt} = a\cos\alpha \end{cases}$$

容易看出

$$a = \frac{v^2}{r\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{dv}{dt}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{r}\cot\alpha dt = \frac{dv}{v^2}$$
$$\Longrightarrow \int_0^t \frac{1}{r}\cot\alpha dt\, dx = \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}\, dx$$
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{t}{r}\cot\alpha$$

1.12

Solution：

我们看到 1.11 的结果，也就是

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{t}{r}\cot\alpha = \frac{r - v_0 t\cot\alpha}{v_0 r}$$

但是不能通过简单的积分或者分子分母互换之类得到所求的表达式。不过从所求的表达式容易看出似乎是对角度 θ 和 v 的积分。逆推试试：

$$v = v_0 e^{(\theta-\theta_0)\cot\alpha} \leftarrow \ln v = \ln v_0 \cdot (\theta-\theta_0)\cot\alpha \leftarrow \frac{\ln v}{\ln v_0} = (\theta-\theta_0)\cot\alpha$$
$$\leftarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_{\theta_0}^{\theta} \cot\alpha d\theta \leftarrow \frac{dv}{v} = \cot\alpha d\theta$$

下面是基本的质点运动方程组：

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{v^2}{r} = a\sin\alpha \\ a_t = \dfrac{dv}{dt} = a\cos\alpha \end{cases} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\omega$$
$$a = \frac{dv}{d\theta}\omega = \frac{dv}{d\theta}\frac{v}{r} = \frac{v^2}{r\sin\alpha}\cos\alpha \Longrightarrow \frac{dv}{v} = \cot\alpha d\theta$$

证毕。

1.13