第四章：博弈与逻辑

请在 6 月 1 日课前提交纸质作业.

1. (10 分) Zermelo 定理成立的条件是双人的、有限深的、确定的、完全信息的、输赢的博弈. 当破坏其中任何一个条件时，博弈 Zermelo 定理不再成立. 下面的题目都只破坏一个条件.
   (1) 写出一个非确定的但其他条件没有被破坏的博弈，要求是一个来自现实生活中的例子.
   (2) 写出一个不完全信息但其他条件没有被破坏的博弈，要求是一颗博弈树.

2. (10 分) 利用输赢的 Zermelo 定理证明带平局博弈的 Zermelo 定理.

3. (10 分) 考虑已经定义了合取和蕴含关系辩论规则的对话博弈.
   (1) 定义否定 $\neg p$ 相关的辩论规则.
   (2) 对公式 $\phi : p \to \neg\neg p$，证明正方有必胜策略，因而 ϕ 是重言式.

4. (10 分) 设 $G = (I, \{A_i\}_{i\in I}, \{u_i\}_{i\in I})$ 是一个二人正则输赢博弈，其中 $I = \{1, 2\}$，A_i 是有限集合，$u_i(\cdot) \in \{0, 1\}$，$u_1 + u_2 = 1$.
   (1) 写出玩家 i 存在必胜策略的定义.
   (2) 证明：G 存在纯策略 Nash 均衡当且仅当其中一个玩家存在必胜策略.

5. (10 分) 考虑如下 A, B, C 玩家的三人正则形式博弈：

$A\backslash B\backslash C$	X, X	X, Y	Y, X	Y, Y
X	$2, 2, 2$	$0, 0, \frac{1}{3}$	$0, \frac{1}{3}, 0$	$\frac{1}{2}, 0, 0$
Y	$\frac{1}{3}, 0, 0$	$0, \frac{1}{2}, 0$	$0, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

   其中行玩家是 A，列策略代表的玩家先后是 B 和 C. 收益按照 A, B, C 的顺序排列. 求一个真混合策略对称 Nash 均衡，即所有人的混合策略都是一样的，并且这个混合策略不是纯策略.

6. (10 分) 在 Bayes 博弈的定义中，我们假设所有玩家的可能行动集和可能类型是所有玩家都是共同知识. 假设玩家的真实行动集可能依赖玩家的类型，也就是说玩家 i 具有不同类型的时候真实行动集可能不同. 如果玩家对于世界的不确定性只在于其他玩家的类型，而不在于真实行动集，证明：每个玩家 i 的真实行动集 $A_i(\theta_i)$ 实际上不依赖它的类型，即对 i 的所有类型 θ_i，$A_i(\theta_i)$ 是同一个集合.

7. (10 分) 考虑工作偷懒二人 Bayes 博弈. 两个人的行动都是“工作”（W）或“偷懒”（S）. 行玩家的类型集合是单点集，列玩家的类型是“勤奋”（D）或“懒惰”（L）. 收益矩阵为

$\theta_2 = D$,

	W	S
W	$3, 3$	$-1, 0$
S	$2, 1$	$0, 0$

$\theta_2 = L$,

	W	S
W	$1, 1$	$-1, 2$
S	$2, -1$	$0, 0$

   假设 $\Pr(\theta_2 = D) = p$，$0 < p < 1$，计算它的所有纯策略 BNE. 这一结果给你带来了什么启示?