

DFT(離散フーリエ変換)

1. DFT とは

フーリエ級数展開は周期信号に対応しており，周期 T の信号を基本として，その整数倍の周波数成分の無限和で表される．従って，周波数領域で考えれば $f = 1/T[\text{Hz}]$ 毎の離散的なスペクトルで表される．これに対し，フーリエ変換は非周期信号に対応するものである．非周期信号では，その周期を無限大 $T = \infty$ と考えれば周波数領域におけるスペクトルの間隔は限りなく 0 に近づき，連続的なスペクトルで表される．離散的なスペクトルを線スペクトル，連続的なスペクトルを連続スペクトルという．これらは連続時間信号（アナログ信号）における表現手法である．

一方，離散フーリエ変換は離散時間信号（ディジタル信号）において利用される．一般にサンプリング間隔 $T_s[\text{s}]$ で離散化された有限な N 個の離散信号に対して行われる．言い換えれば，離散時間におけるフーリエ級数展開といえることができる．離散フーリエ変換を用いることにより，コンピュータを使いどの周波数にどれくらいの成分が含まれているかを容易に知ることができる．

離散フーリエ変換ではサンプリング間隔 $T_s[\text{s}]$ に対し，周期が $T = NT_s[\text{s}]$ で与えられる．従って， $f = 1/NT_s = f_s/N[\text{Hz}]$ 毎の線スペクトルで表される．ここで $f_s = 1/T_s[\text{Hz}]$ はサンプリング周波数である．

<フーリエ級数展開とフーリエ変換>

フーリエ級数展開は

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt, (k = 0, \pm 1, \dots) \quad (1)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \quad (2)$$

と表される．ここで式 (2) を式 (1) を用いて表し， $\omega_0 = 2\pi/T$ とおくと

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau) e^{-j\frac{2\pi}{T}k\tau} d\tau \right\} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \quad (3)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau) e^{-j\omega_0 k\tau} d\tau \right\} e^{j\omega_0 kt} \quad (4)$$

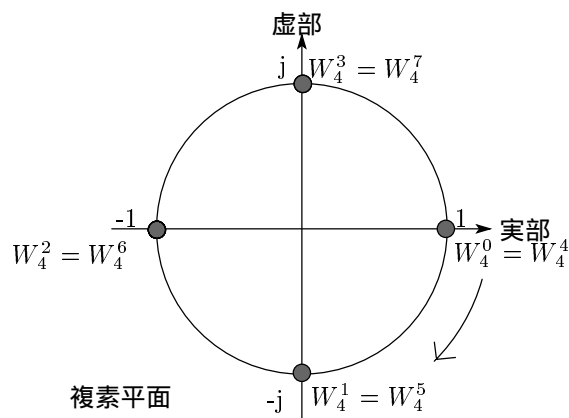
と変形できる．さて，ここで非周期信号は周期 T を極限まで引きのばしたものの $T \rightarrow \infty$ と考えれば， $\omega_0 \rightarrow 0$ となる．従って， $\omega_0 k$ は離散的であったものから連続的なものへと変化することになることから， $\omega_0 k \rightarrow \omega$ とし， $\sum \rightarrow \int d$ とおくことにより

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} \quad (5)$$

と表され，フーリエ変換対は次のよう与えられる．

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7)$$

図 1: 回転子の軌跡 $N = 4$ のとき

2. 回転子

W_N を

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (8)$$

と表すとすると、この W_N は回転子と呼ばれる。今ある変数 k を導入し

$$W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

と表せば、 e^{-j} であるため複素平面上の単位円を時計回り回転しており、さらに $\frac{2\pi}{N}k$ であることから、その単位円を N 等分した k 点に対応することがわかる。すなわち離散的 (T_s 間隔) に周期 N の正弦波が描かれていることが理解できる。以降でも述べているが、ここで周期が N のものを基本波、 $N/2$ (回転速度 2 倍) が第 2 高調波、 $N/3$ (回転速度 3 倍) が第 3 高調波に対応している。 $N = 4$ とした場合の様子を図 1 に示す。

3. 変換対

サンプリングされた信号系列を $x_n (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$ 、そのフーリエ係数を $X_k (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$ とすると離散フーリエ変換 (DFT) は

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) - j \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \quad (11)$$

と表され、離散フーリエ逆変換 (IDFT) は

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (= \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{-nk}) \quad (12)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) + j \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \quad (13)$$

と表される。

ここで X_k は次の場合の成分を表している。

X_0 は直流

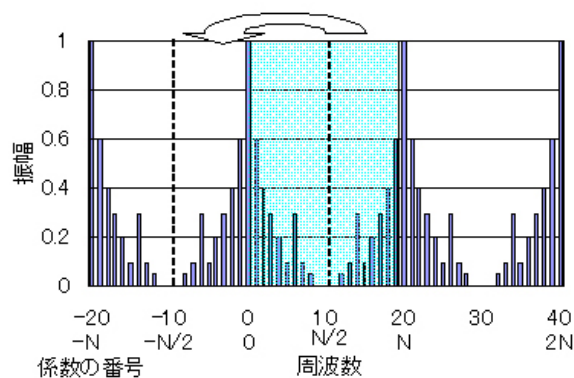


図 2: DFT による振幅スペクトルの様子

X_1 は基本波 (第 1 高調波): $NT_s[s]$ で 1 周期

X_2 は第 2 高調波: 基本波に対し周期 $1/2$ (周波数 2 倍)

X_3 は第 3 高調波: 基本波に対し周期 $1/3$ (周波数 3 倍)

⋮

ただし $k = N/2$ を中心として以後のデータは負の周波数を表している。

図 2 に $N = 20$ とした場合の振幅スペクトルの例を示す。フーリエ係数が $N/2$ を中心として対称になっている様子。また、 N を周期とする周期関数となっていることがわかる。係数は $0 \sim N-1$ で表されるが、 $N/2 \sim N-1$ を 0 より左側、すなわち負の側に移動することにより、よく目にする形となる。

< フーリエ級数展開と DFT >

いま、離散信号がサンプリング周波数 $f_s[\text{Hz}](1/T_s[s])$ で帯域制限されているとし、 $T = NT_s$ の関係を考える。また、周期性を考慮すると式 (1) のフーリエ係数は

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{NT_s} \sum_{n=0}^{N-1} x(t) e^{-j \frac{2\pi}{NT_s} k T_s n T_s} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(t) e^{-j \frac{2\pi}{N} k n}, (k = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned}$$

となり、式 (10) と等しくなることがわかる。

< $N/2$ で折り返されるのは >

いま、

$$X_{-k} = \sum_{N=0}^{N-1} x_n e^{-j \frac{2\pi}{N} n(-k)} = \sum_{N=0}^{N-1} x_n e^{j \frac{2\pi}{N} n k}$$

より、 X_k の複素共役を X_{-k} とすると

$$\begin{aligned} X_{N-k} &= \sum_{N=0}^{N-1} x_n e^{-j \frac{2\pi}{N} n(N-k)} \\ &= \sum_{N=0}^{N-1} x_n e^{-j \frac{2\pi}{N} n(-k)} e^{-j 2\pi n} \\ &= \sum_{N=0}^{N-1} x_n e^{-j \frac{2\pi}{N} n(-k)} = X_{-k} \end{aligned}$$

であるので、負の周波数スペクトルは複素共役となり、 $N/2$ で折り返されることが理解できる。

< スペクトルの周期性 >

スペクトルは N の周期で繰り返される周期性を有している。これは

$$\begin{aligned} X_{k+N} &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+N)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} e^{-j2\pi n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = X_k \end{aligned}$$

より確認できる。

4. 行列表記

DFT の演算は行列で表記することができる。すなわち N 次の連立方程式のしてみよう。 $N = 4$ として DFT を

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

このように、図 1 と対応していることが分かる。

一方、IDFT の場合は $W_N^{-1} = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ であるので反時計回りになる。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6} \\ W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

このように、 W_N は単位円上を等間隔で回転することから、周期性があり、同じ値が複数回出現することが理解できる。この性質を利用したものが高速フーリエ変換 (FFT) である。

< DFT は正規直交基底との内積演算 >

フーリエ級数展開においてその係数は正規直交系をなす関数との内積で表されていたが DFT ではどうか。いま、各要素が指数関数で表現されたベクトルの組 \mathbf{u}_i の内積を $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ ($i = j = 0 \sim N-1$) とすると

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}ni} e^{-j\frac{2\pi}{N}nj}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(i-j)} \\
&= \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}
\end{aligned}$$

であり, \mathbf{u}_i は正規直交系をなしており, これは正規直交基底であることがわかる.

さて, $\mathbf{u}_i (i = 0 \sim 3)$ とすると式 (15) の DFT 行列の行ベクトルに対応している. ここで DFT で得られる行列を D とすると $D^T = D^*$ と表されることから D はエルミート (共役転置) 行列であることがわかる. (ここで, 要素がすべて実数であれば $D = D^* (D = D^T)$ であり実対称行列となる.) さらに, 単位行列を I とするとその積は $D^*D = I$ となることからユニタリ行列であることが理解できる (ここで, D が実数であれば D は直交行列である.)

5. スペクトル

DFT から得られるデータは通常複素数であり,

$$X_k = X_k^{(r)} + jX_k^{(i)} \quad (18)$$

と表される. 従って, 大きさは振幅スペクトル

$$|X_k| = \sqrt{(X_k^{(r)})^2 + (X_k^{(i)})^2} \quad (19)$$

で表される. ここで, 振幅スペクトルの 2 乗 $|X_k|^2$ はパワー (電力) スペクトルと呼ばれる. 位相スペクトルは

$$\arg(X_k) = \tan^{-1} \frac{X_k^{(i)}}{X_k^{(r)}} \quad (20)$$

で表される. X_k は複素共役の関係を持しているため, $X_k^{(r)}$ は $N/2$ を中心として線対称, $X_k^{(i)}$ は $N/2$ を中心として点対称. また, 振幅スペクトルは $N/2$ を中心として線対称, 位相スペクトルは $N/2$ を中心として点対称である.

ここで通常, 各スペクトルの大きさを見る場合は微少な部分も観測するために対数表示 (利得) で $10 \log_{10} |X_k|^2$ [dB] が利用される.

< フーリエ係数の表現 >

フーリエ係数 X_k が式 (19) の振幅スペクトル $|X_k|$ と式 (20) の位相スペクトル $e^{j\theta_k}$ で $X_k = |X_k|e^{j\theta_k}$ と表されているとする. また, X_k と X_{-k} は複素共役の関係であることを考えれば, 以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\
&= X_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (X_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} + X_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}) \\
&= X_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} |X_k| (e^{j(\frac{2\pi}{N}nk + \theta_k)} + e^{-j(\frac{2\pi}{N}nk + \theta_k)}) \\
&= X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} |X_k| \cos(\frac{2\pi}{N}nk + \theta_k)
\end{aligned}$$

(ここで, $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ の関係を利用した) すなわち, フーリエ係数から得られる情報として, 元の波形は X_0 の直流成分と \cos 波に 2 倍した振幅スペクトル $2|X_k|$ を掛けたものを足した形で表されるということが出来る. ただし \cos 波は位相 θ_k ずれたものである.

6. コンピュータで実行するために

DFT では複素数を扱っている．従って，プログラミングをする場合，一般的には実部と虚部で表すことになる．

式 (11)，(18) より，フーリエ係数の実部と虚部は

$$X_k^{(r)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \quad (21)$$

$$X_k^{(i)} = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \quad (22)$$

と表される．ただし $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ ．

一方，IDFT は式 (13)，(18) より

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ X_k^{(r)} + jX_k^{(i)} \right\} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ X_k^{(r)} \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) - X_k^{(i)} \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \right\} + j \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ X_k^{(r)} \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) + X_k^{(i)} \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

x_n は実数であるため右辺第 2 項は 0 となり

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ X_k^{(r)} \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) - X_k^{(i)} \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \right\}$$

と表される．ただし $(n = 0, 1, \dots, N-1)$ ．

ここで，離散信号を $x_n = x_n^{(r)} + jx_n^{(i)}$ と複素形式で与えておくことにより

$$\begin{aligned} X_k^{(r)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x_n^{(r)} \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) + x_n^{(i)} \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \right\} \\ X_k^{(i)} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x_n^{(i)} \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) - x_n^{(r)} \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \right\} \end{aligned}$$

となる．ここで $x_n^{(i)}$ は 0 である．

一方，フーリエ係数を $X_k = X_k^{(r)} - jX_k^{(i)}$ と表すとすると

$$\begin{aligned} x_n^{(r)} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ X_k^{(r)} \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) - X_k^{(i)} \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \right\} \\ x_n^{(i)} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ X_k^{(i)} \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) + X_k^{(r)} \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) \right\} \end{aligned}$$

となり，DFT と IDFT は符号と $1/N$ が異なるだけで表されることがわかる．従って，この部分の変更だけで DFT と IDFT の両方の機能を持たせることが可能である．

7. 窓関数

DFT は周期信号を前提においているため，離散信号を得る過程で正確に切り出す必要がある．この切り出しが正確に行われない場合，スペクトル漏れと呼ばれる現象が起こる．この様子を図 3~5 に表す．図 3 の 10[Hz] で表される正弦波に対しては図 (4) のように正確に信号に含まれる周波数成分が 10[Hz] であることが表されているが，図 (3) の 10.5[Hz] で表される正弦波に対してはスペクトル漏れにより，存在しない周

波数成分が現れている．周期が正確にわかっている場合はよいが，一般にはわからない．そこで，このスペクトル漏れをできるだけ少なくする手法として窓関数がある．これは，切り出したときの境界線における不連続性を低減する形となっている．

以下に，代表的な窓関数を紹介する．また，図 6～図 9 に窓関数を図示している．

1) 方形 (Rectangular) 窓

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (24)$$

2) ハニング (Hanning) 窓

$$w_N(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (25)$$

3) ハミング (Hamming) 窓

$$w_M(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (26)$$

4) ブラックマン (Blackman) 窓

$$w_M(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (27)$$

そのほかにもパートレット窓やカイザー窓などもある．

図 (10)～図 (12) はハニング，ハミング，ブラックマン窓をかけたときの 10.5[Hz] の正弦波の様子を表している．いずれの場合も両端の振幅が小さくなり，切り出しにおける境界の不連続性を押さえる形になっていることがわかる．また，図 (13)～図 (15) はそれぞれのスペクトルを表している．これらからわかるように，図 (5) の方形窓（すなわち何もしない）に比べ，より顕著に周波数成分が現れていることがわかる．（注：図では連続スペクトルで表しているが，本来は線スペクトルである）

< 窓関数の周波数応答 >

図 16～図 19 に窓関数のスペクトルを示す（負のスペクトルは省略）各図において，左の一番大きな山はメインローメインローブ，その他の小さな山はサイドローブと呼ばれる．

さて，スペクトル漏れとは，どういう現象かだろう．一般に，ある区間の信号を切り出すということは，対象とする信号に方形波を掛け合わせたものということになる．時間領域での積は周波数領域の畳み込みに対応している．方形波のスペクトルは sinc 関数で表されるため原点をメインローブとして，左右に小さなサイドローブが±で続いている．一方，サンプリングされた信号のスペクトルはインパルス状のものが

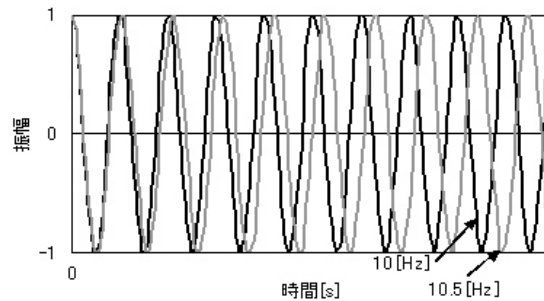


図 3: 10[Hz] と 10.5[Hz] の正弦波

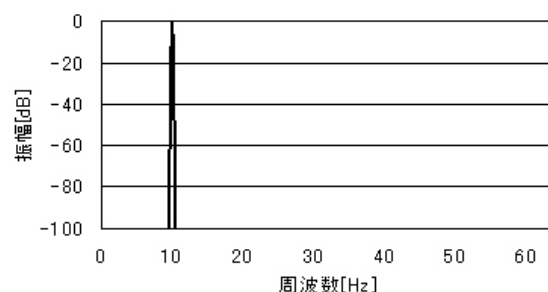


図 4: 10[Hz] の正弦波のスペクトル

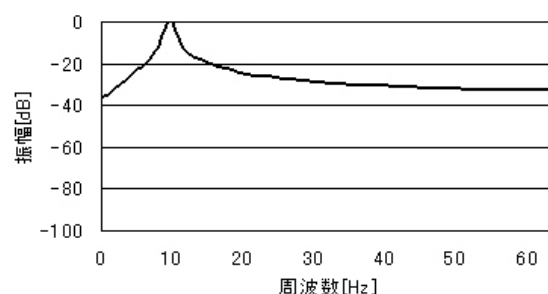


図 5: 10.5[Hz] の正弦波のスペクトル

並んでいる．ここで，方形波のスペクトルは，ある周期でゼロになる点が存在することが分かるが，信号の周期をきちんと切り出した場合はこのゼロになる点と，DFT による信号のスペクトルが重なり，スペクトル漏れは生じない．一方，周期がきちんと取り出せない場合は，ゼロでない点と信号のスペクトルが重なることから，何らかの成分が現れることになる．

方形波はメインローブの幅が小さく周波数の分解能が優れているが，すなわち近接する周波数成分を分離しやすいといえるが，逆にサイドローブが大きく，小さな周波数成分は埋もれてわからなくなってしまう．一方，ブラックマン窓は，メインローブの幅が広く，周波数分解能が悪い，すなわち，近接する周波数を分離できないが，サイドローブが小さいため，あまり近接しない周波数に対しては小さな成分まで検出できると言うことがわかる．すなわち，窓関数はメインローブの幅が小さく，サイドローブの大きさが小さい方がよいと言うことがわかる．

ここで，図の横軸は $\times 1/w$ で表しているが w は窓関数のデータ数 (DFT に利用する N) であり，これは， N を大きくするほどメインローブの幅が小さくなる，すなわち，周波数分解能がよくなることを示している．

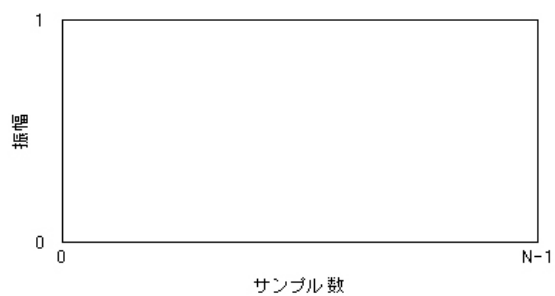


図 6: 方形窓

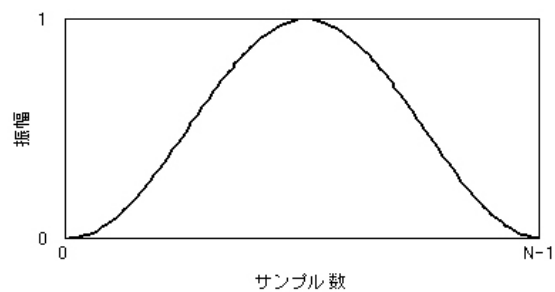


図 7: ハニング窓

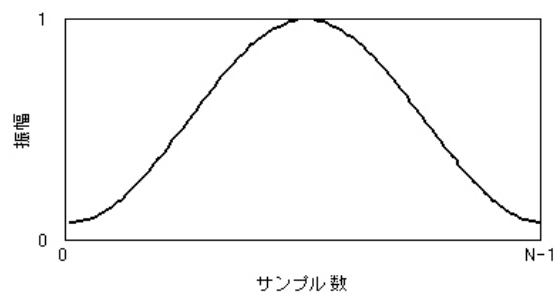


図 8: ハミング窓

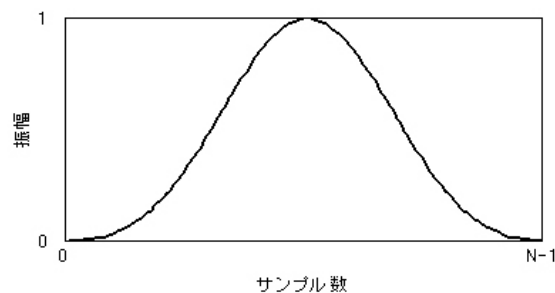


図 9: ブラックマン窓

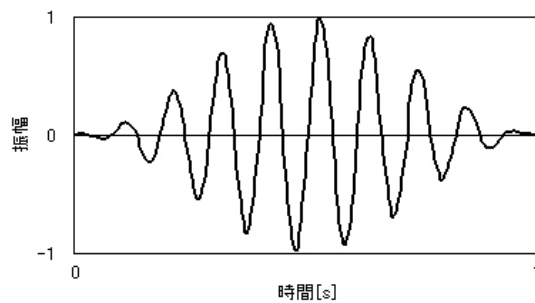


図 10: 10.5[Hz] の正弦波 : ハニング窓

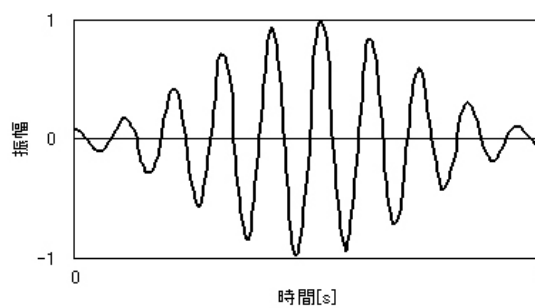


図 11: 10.5[Hz] の正弦波 : ハミング窓

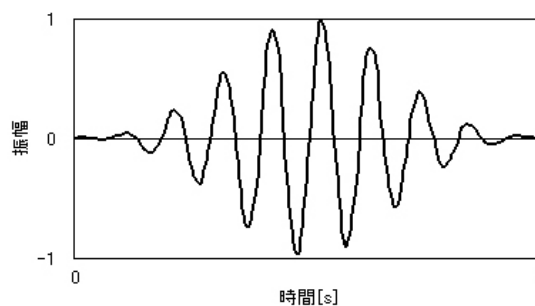


図 12: 10.5[Hz] の正弦波 : ブラックマン窓

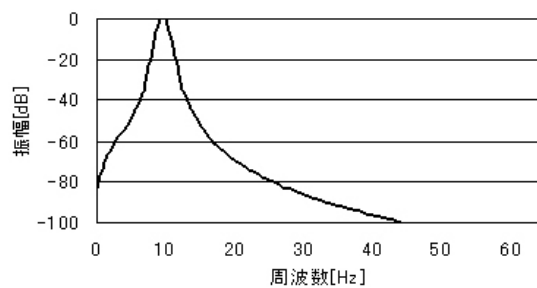


図 13: 10.5[Hz] の正弦波：ハニング窓

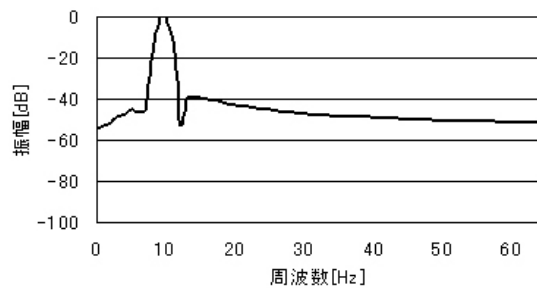


図 14: 10.5[Hz] の正弦波：ハミング窓

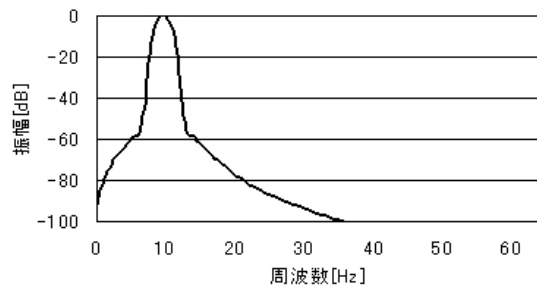


図 15: 10.5[Hz] の正弦波：ブラックマン窓

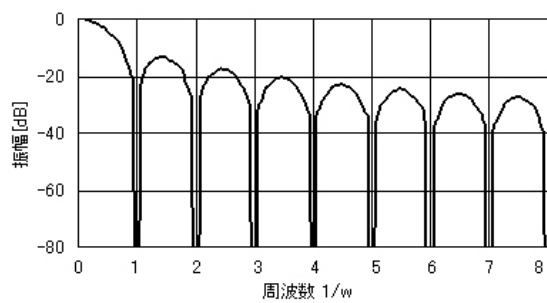


図 16: 方形窓のスペクトル

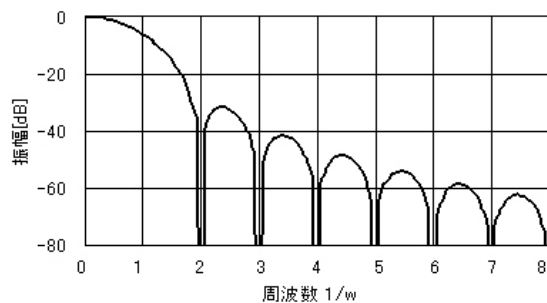


図 17: ハニング窓のスペクトル

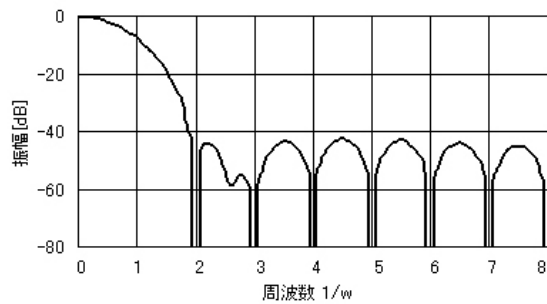


図 18: ハミング窓のスペクトル

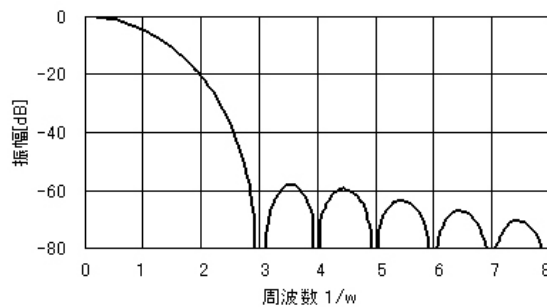


図 19: ブラックマン窓のスペクトル