Вспоминаем логистическую регрессию

Илья Кокорин

kokorin.ilya.1998@gmail.com

Постановка задачи

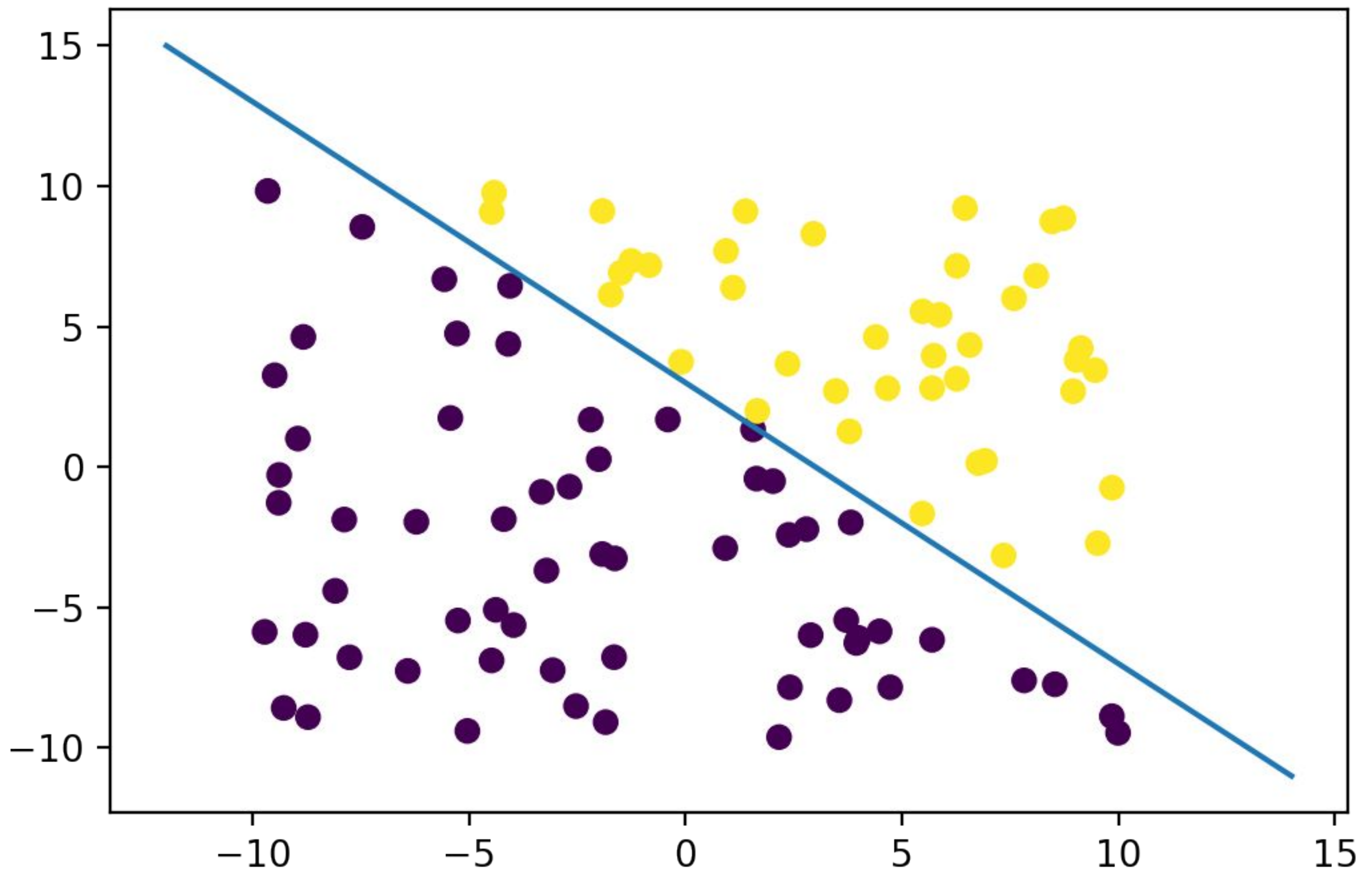
- Задача классификации
- У нас есть n объектов
- У каждого объекта f вещественнозначных признаков

$$\{X_{i,j}\}_{j=1}^{f}$$

- И класс $Y_i \in \{-1, 1\}$
- Наша задача - научиться предсказывать класс объекта по его признакам

Гипотеза

- Существует гиперплоскость, разделяющая объекты класса -1 от объектов класса 1



Что такое гиперплоскость?

$$\text{Множество точек } \mathbf{H} : \forall H \in \mathbf{H} : W_0 + \sum_{j=1}^{f} H_j \cdot W_j = 0$$

- Коэффициенты W задают гиперплоскость
- Для точек, лежащих с одной стороны от гиперплоскости, выполняется

$$W_0 + \sum_{j=1}^{f} X_j \cdot W_j > 0$$

- Для точек, лежащих с одной стороны от гиперплоскости, выполняется

$$W_0 + \sum_{j=1}^{f} X_j \cdot W_j < 0$$

Вероятность принадлежности к классу

- Идея: чем больше $W_0 + \sum_{j=1}^{f} X_j \cdot W_j$, тем выше вероятность того, что объект X относится к классу 1
- И обратно: чем меньше это число, тем больше вероятность того, что объект X относится к классу -1

$$Z_i := W_0 + \sum_{j=1}^{f} X_{i,j} \cdot W_j$$

$$\mathbf{P}(Y_i = 1 \mid X_i) = \frac{1}{1 + e^{-Z_i}}$$

$$\mathbf{P}(Y_i = -1 \mid X_i) = \frac{1}{1 + e^{Z_i}}$$

- Обобщаем: $\mathbf{P}(Y_i = y \mid X_i) = \frac{1}{1 + e^{-y \cdot Z_i}}$

Проверка

- Сумма вероятностей должна быть равна единице

$$\mathbf{P}(Y_i = 1 \mid X_i) + \mathbf{P}(Y_i = -1 \mid X_i) = \frac{1}{1+e^{-Z_i}} + \frac{1}{1+e^{Z_i}} =$$

$$\frac{1+e^{Z_i}+1+e^{-Z_i}}{(1+e^{-Z_i})\cdot(1+e^{Z_i})} = \frac{1+e^{Z_i}+1+e^{-Z_i}}{1+e^{-Z_i}+e^{Z_i}+1} = 1$$

А как ~~ка~~ обучать?

- Градиентным спуском!
- Определим Loss на i-ом объекте

$$l_i = \ln\left(1 + e^{-Y_i \cdot Z_i}\right)$$

- Из соображений удобства: добавим к каждому объекту фиктивный признак, тождественно равный 1
- Тогда

$$Z_i := \langle W, X_i \rangle = \sum_{j=0}^{f} H_i \cdot W_j$$

Считаем градиенты

$$\frac{\partial l_i}{\partial W_k} = \frac{\partial \ln\left(1 + e^{-Y_i \cdot Z_i}\right)}{\partial W_k} = \frac{1}{1 + e^{-Y_i \cdot Z_i}} \cdot \frac{\partial e^{-Y_i \cdot Z_i}}{\partial W_K} =$$

$$= -\frac{1}{1 + e^{-Y_i \cdot Z_i}} \cdot e^{-Y_i \cdot Z_i} \cdot \frac{\partial\left(Y_i \cdot Z_i\right)}{\partial W_K} = -Y_i \cdot \frac{e^{-Y_i \cdot Z_i}}{1 + e^{-Y_i \cdot Z_i}} \cdot \frac{\partial Z_i}{\partial W_K} =$$

$$= -Y_i \cdot \frac{e^{-Y_i \cdot Z_i} \cdot e^{Y_i \cdot Z_i}}{e^{Y_i \cdot Z_i} \cdot \left(1 + e^{-Y_i \cdot Z_i}\right)} \cdot \frac{\partial\left(\sum_{j=0}^{f} X_{i,j} \cdot W_j\right)}{\partial W_K} =$$

$$= -Y_i \cdot \frac{1}{e^{Y_i \cdot Z_i} + 1} \cdot \frac{\partial\left(\sum_{j=0}^{f} X_{i,j} \cdot W_j\right)}{\partial W_K} = -Y_i \cdot \sigma(-Y_i \cdot Z_i) \cdot X_{i,k}$$

Векторизуем

$$\begin{cases} \frac{\partial l_i}{\partial W_1} = -Y_i \cdot \sigma(-Y_i \cdot Z_i) \cdot X_{i,1} \\ \frac{\partial l_i}{\partial W_2} = -Y_i \cdot \sigma(-Y_i \cdot Z_i) \cdot X_{i,2} \\ \dots \\ \frac{\partial l_i}{\partial W_f} = -Y_i \cdot \sigma(-Y_i \cdot Z_i) \cdot X_{i,f} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial l_i}{\partial W}\right)_{[f \times 1]} = -Y_i \cdot \sigma(-Y_i \cdot Z_i) \cdot (X_i)_{[f \times 1]}$$

Объединяем градиенты, обновляем веса

$$\mathbf{L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial W_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial l_i}{\partial W_k} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \sigma(-Y_i \cdot Z_i) \cdot X_{i,k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial l_i}{\partial W} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \sigma(-Y_i \cdot Z_i) \cdot X_i$$

$$W_k = W_k - \lambda\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial W_k}$$

$$W = W - \lambda\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial W}$$

спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание
спасибо за внимание