Некоторые уражнения из учебника

Кокорин Илья, M3439

Вариант № 64

1 Задача 3.1

1.1 Коды Хемминга

Рассмотрим коды Хемминга с фиксированным r, $n = 2^r - 1, k = 2^r - r - 1, d = 3$

Граница Хемминга имеет вид $M \le \frac{q^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \cdot (q-1)^i}$, в случае двоичного кода, у которого $M = 2^k, q = 2$, принимает вид $2^k \le \frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \cdot (2-1)^i} \Rightarrow 2^k \le \frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i}} \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \le 2^{n-k}$

Так как $d = 3$, то $t = \lfloor \frac{3-1}{2} \rfloor = 1$, код исправляет любые однократные ошибки

Тогда $\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n = 1 + 2^r - 1 = 2^r$

$2^{n-k} = 2^{2^r - 1 - (2^r - r - 1)} = 2^{2^r - 1 - 2^r + r + 1} = 2^r$

Тогда $2^{n-k} = \sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i}$, то есть код Хемминга удовлетворяет границе Хемминга с равенством.

1.2 Код Голея

$n = 23, k = 12, d = 7$

$t = \lfloor \frac{7-1}{3} \rfloor = 3$

Граница Хемминга имеет вид $M \le \frac{q^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \cdot (q-1)^i}$, в случае двоичного кода, у которого $M = 2^k, q = 2$, принимает вид $2^k \le \frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \cdot (2-1)^i} \Rightarrow 2^k \le \frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i}} \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \le 2^{n-k}$

$\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} = \binom{23}{0} + \binom{23}{1} + \binom{23}{2} + \binom{23}{3} = 2048$

$2^{n-k} = 2^{23-12} = 2^1 1 = 2048$

Тогда $\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} = 2^{n-k}$, то есть Код Голея удовлетворяет границе Хемминга с равенством.

2 Задача 3.2

Рассмотрим коды, дуальные к кодах Хемминга. Код Хемминга имеет параметры $n = 2^r - 1, k = 2^r - r - 1, r = r, d = 3$, и имеет порождающую матрицу $G : 2^r - r - 1 \times 2^r - 1$ и проверочную матрицу $H : r \times 2^r - 1$.

Тогда код, дуальный к Кодам Хемминга, имеет порождающую матрицу $G : r \times 2^r - 1$, проверочную матрицу $2^r - r - 1 \times 2^r - 1$, и минимальное расстояние $d = 2^{r-1}$

2.1 Граница Хемминга

Граница Хемминга имеет вид $M \le \frac{q^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \cdot (q-1)^i}$, в случае двоичного кода, у которого $M = 2^k, q = 2$, принимает вид $2^k \le \frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \cdot (2-1)^i} \Rightarrow 2^k \le \frac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i}} \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \le 2^{n-k}$

В силу особенностей кода, дуального к кодам Хемминга, граница имеет вид:
$\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{2^r-1}{i} \le 2^{2^r-1-r}$

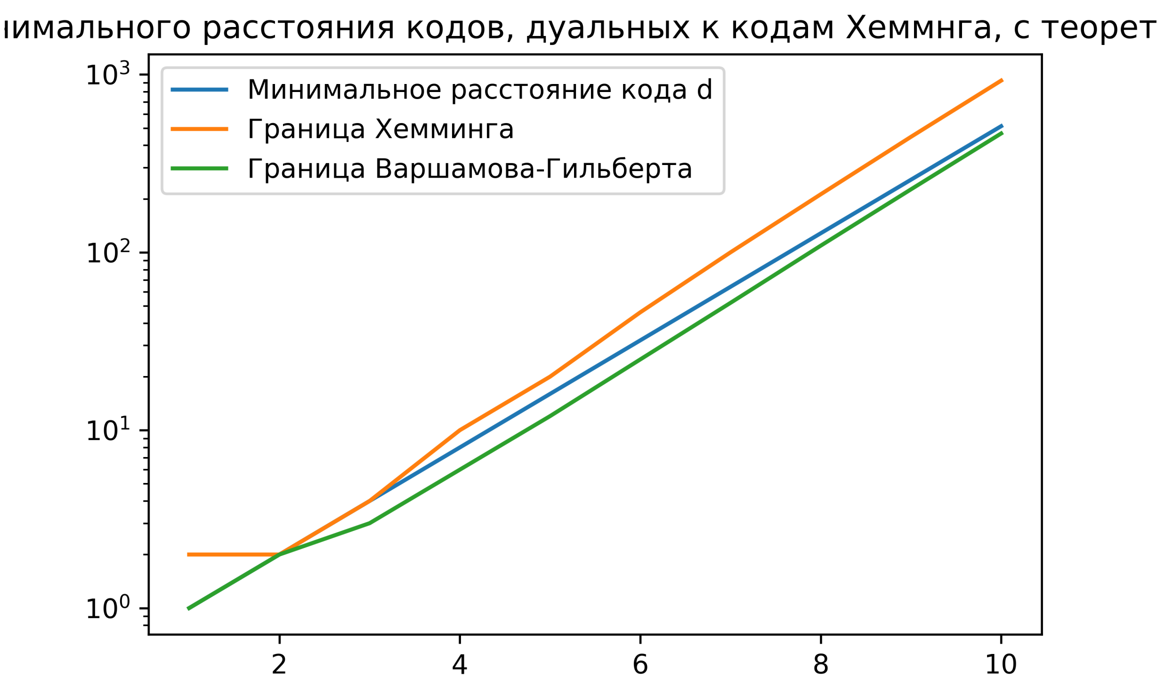
2.2 Граница Варшамова-Гилберта

Граница Варшамова-Гилберта имеет вид $q^{n-k} > \sum\limits_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i} \cdot (q-1)^i$

Что в нашем случае превращается в $\sum\limits_{i=0}^{2^{r-1}-2} \binom{2^r-2}{i} < 2^{2^r-1-r}$

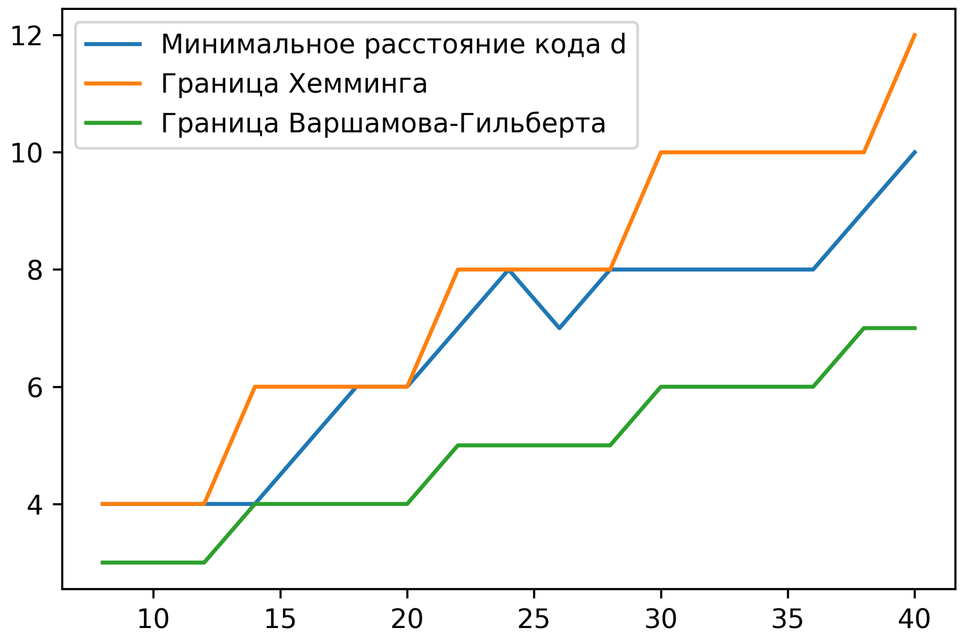
2.3 Нахождение границ

Решать такие неравенства слишком сложно, давайте промоделируем.
Программа для моделирования приложена к заданию.
Итоговый график выглядит следующим образом:



3 Задача 3.5

Рассмотрим коды из таблицы 3.2 с $n \in \{n : 2 \le n \le 40\}$
Будем рассматривать только коды с чётными n, чтобы получать скорость $R = \frac{1}{2}$
Будем строить для них минимальное расстояние, границу Хемминга и границу Варшамова-Гилберта.
Программа для моделирования приложена к заданию.
Итоговый график выглядит следующим образом:



Минимальное расстояние кода d
Граница Хемминга
Граница Варшамова-Гильберта
12
10
8
6
4
10
15
20
25
30
35
40