Упражнения из учебника

Кокорин Илья, M3439

28 сентября 2019 г.

1 Упражнение 2.12

1.1 А

Линейное пространство имеет вид $\{00, 01, 10, 11\}$

Базис имеет вид $\{10, 01\}$, так как эти вектора линейно независимы, а любой другой может быть получен их комбинацией.

Тогда $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

В этом случае, $n = 2, k = 2$

Тогда $r = n - k = 2 - 2 = 0$, то есть матрица H имеет размерность 0×2, то есть проверочная матрица не определена.

1.2 Б

Линейное пространство имеет вид $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

Базис имеет вид $\{100, 010, 001\}$, так как эти вектора линейно независимы, а любой другой может быть получен их комбинацией.

Тогда $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

В этом случае, $n = 3, k = 3$

Тогда $r = n - k = 3 - 3 = 0$, то есть матрица H имеет размерность 0×3, то есть проверочная матрица не определена.

1.3 В

Линейное пространство имеет вид $\{000, 011, 101, 110\}$

Базис имеет вид $\{101, 110\}$, так как эти вектора линейно независимы, а любой другой может быть получен их комбинацией.

Тогда $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Приведём G к виду (I_k, P)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Заменяем вторую строку на линейную комбинацию второй и первой

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда $P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

$H = (P^T, I_r) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Проверка показывает, что $G \cdot H^T = 0$

1.4 Г

Линейное пространство имеет вид $\{000, 111\}$

Базис имеет вид $\{111\}$, так как $000 = 0 \cdot 111$

Тогда $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $P^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Проверка показывает, что $G \cdot H^T = 0$

2 Упражнение 1.3.

2.1 Код из упражнения 1.1.

Каждый бит передаётся три раза. То есть если по каналу мы хотели передать бит 0, будет передана последовательность 000, а если хотели передать бит 1, будет передана последовательность 111.

Следовательно, декодер выдаёт ошибку, если три бита неодинаковые. Значит, ошибка произошла либо в одном бите, либо в двух.

Так как мы используем двоичный симметричный канал, то вероятность ошибки в каждом бите это случайная величина Бернулли с вероятностью инвертирования бита p, и отсутствия инвертирования $1-p$. Значит, для подсчёта вероятности ошибки в одном или двух битах мы можем использовать биномиальное распределение, являющееся суммой распределений Бернулли.

Посчитаем вероятность ошибки строго в двух битах, воспользуемя биномиальным распределением

$P_2 = C_3^2 \cdot p^2 \cdot (1-p) = 3 \cdot p^2 \cdot (1-p)$

Аналогично посчитаем вероятность ошибки в одном бите $P_1 = C_3^1 \cdot p \cdot (1-p)^2 = 3 \cdot p \cdot (1-p)^2$

Тогда вероятность того, что декодер выдаст ошибку (то есть произойдёт инверсия двух или одного бита) равна $P = P_1 + P_2 = 3 \cdot p \cdot (1-p)^2 + 3 \cdot p^2 \cdot (1-p)$, что при $p = 10^{-3}$ равно $\frac{2997}{1000000}$

Для того, чтобы пользователь получил ложную информацию, инвертироваться должны все три бита (то есть из 000 должен получиться 111, а из 111 должен получиться 000), тогда декодер выдаст неверную информацию. Посчитаем вероятность инверсии в трёх из трёх битов, при условии, что инверсия каждого бита независима. Она равна $P = p^3 = (10^{-3})^{-3} = 10^{-9}$

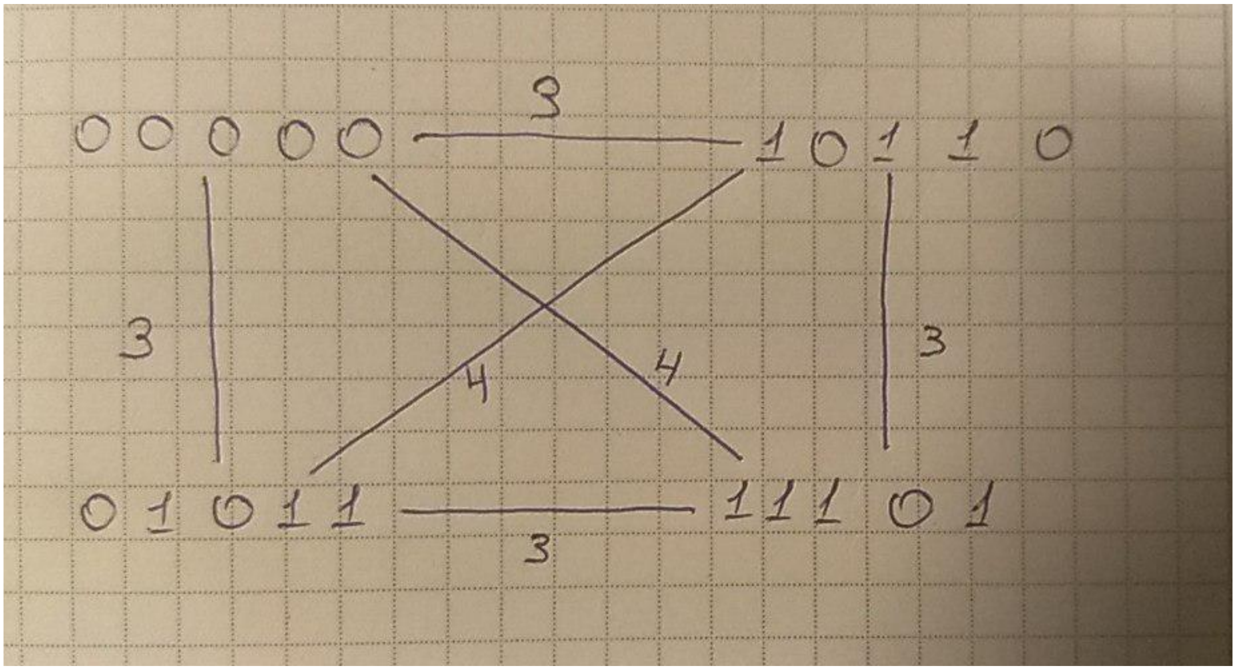
2.2 Код из упражнения 1.2

Заметим, что при передаче может быть инвертировано от одного до пяти бит.

При этом k бит можно инвертировать C_5^k способами.

k:	C_5^k
1:	5
2:	10
3:	10
4:	5
5:	1

Запишем кодовые слова и выясним, сколько бит нужно в инвертировать в каждом из них, чтобы попасть в какое-то другое слово (то есть чтобы декодер выдал не ошибку декодировки, а неправильно декодировал)



Заметим, что из каждого кодового слова можно попасть в другое кодовое слово либо одной из двух трёхсимвольных замён, либо единственной четырёхсимвольной заменой. То есть у нас есть: 5 односимвольных замен, из которых ни одна не приводит в другое кодовое слово, 10 двухсимвольных замен, из которых ни одна не приводит в другое кодовое слово, 10 трёхсимвольных замен, из которых 2 приводят в другое кодовое слово, а 8 не приводят, 0 четырёхсимвольных замен, из которых 1 приводит в другое кодовое слово, а 4 не приводят, и 1 пятисимвольная замена, не приводящее в другое слово.

k:	число замен, приводящих к другому кодовому слову	число замен, приводящих к ошибке
1:	0	5
2:	0	10
3:	2	8
4:	1	4
5:	0	1

Значит, вероятностью выдачи декодером ошибки будет $P^{err} = P^{err}_1 + P^{err}_2 + P^{err}_3 + P^{err}_4 + P^{err}_5 = 5 \cdot p \cdot (1-p)^4 + 10 \cdot p^2 \cdot (1-p)^3 + 8 \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 + 4 \cdot p^4 \cdot (1-p) + 1 \cdot p^5 = \frac{2495003999}{500000000000} = 0.00499001$

Тогда вероятность выдачи декодером неверного сигнала будет $P^{wrong} = P^{wrong}_1 + P^{wrong}_2 + P^{wrong}_3 + P^{wrong}_4 + P^{wrong}_5 = 2 \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 + 1 \cdot p^4 \cdot (1-p) = \frac{1997001}{1000000000000000} = 1.997 \cdot 10^{-9}$

3 Задача 1.1

Запишем расстояние Хеминга в виде

$\rho(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i \neq b_i|$, то есть количество позиций, в которых a и b отличаются.

3.1 Неотрицательность

Очевидно, $\rho(a,b) \geq 0$, так как две строки отличаются в неотрицательном числе позиций.

3.2 Симметричность

$\rho(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i \neq b_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i \neq a_i| = \rho(b,a)$

3.3 Неравенство треугольника

Докажем, что $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(b,c)$

То есть докажем $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i \neq b_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i \neq c_i| + \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i \neq -b_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} (|a_i \neq b_i| + |c_i \neq b_i|)$

Пусть a отличается от b в некоторой позиции i, то есть $|a_i \neq b_i| = 1$. Очевидно, что тогда c будет отличаться в этой позиции либо от a, либо от b (c не может совпадать в этой позиции как с a, так и с b, так как a и b в этой позиции отличаются). Тогда

$|a_i \neq b_i| = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |a_i \neq c_i| = 1 \\ |c_i \neq b_i| = 1 \end{array} \right. \Rightarrow |a_i \neq b_i| + |c_i \neq b_i| \geq |a_i - b_i|$

Если же не отличается от b в некоторой позиции, то есть $|a_i \neq b_i| = 0$. Тогда в силу неотрицательности $|a_i \neq b_i| + |c_i \neq b_i|, |a_i \neq b_i| + |c_i \neq b_i| \geq |a_i \neq b_i|$

Тогда $\forall i \in \{1..n\} : |a_i \neq b_i| + |c_i \neq b_i| \geq |a_i \neq b_i| \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i \neq b_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} (|a_i \neq b_i| + |c_i \neq b_i|) = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i \neq c_i| + \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i \neq b_i| \Rightarrow \rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(b,c)$

4 Задача 1.2

Чтобы декодирование по принципу максимального правдоподобия и паксимуму апостериорной вероятности были эквивалентными, необходимо соблюдение условия $\forall m \in \{1..M\} : P(y|c_m) = P(c_m|y)$

$P(c_m|y) = \frac{P(c_m \& y)}{P(y)}$

Заметим, что $P(y|c_m) = \frac{P(y \& c_m)}{P(c_m)} \Rightarrow P(y \& c_m) = P(y|c_m) \cdot P(c_m)$

Тогда $P(c_m|y) = \frac{P(c_m \& y)}{P(y)} = \frac{P(y|c_m) \cdot P(c_m)}{P(y)} =$

Распишем $P(y)$ по формуле полной вероятности.

$= \frac{P(y|c_m) \cdot P(c_m)}{\sum\limits_{i=1}^{M} P(y|c_i) \cdot P(c_i)}$

Так как $P(y|c_m) = P(c_m|y)$, то $P(c_m|y) = \frac{P(y|c_m) \cdot P(c_m)}{\sum\limits_{i=1}^{M} P(y|c_i) \cdot P(c_i)}$ превращается в

$1 = \frac{P(c_m)}{\sum\limits_{i=1}^{M} P(y|c_i) \cdot P(c_i)} \Rightarrow P(c_m) = \sum\limits_{i=1}^{M} P(y|c_i) \cdot P(c_i)$

Значит, $\forall m \in \{1..M\} : c_m$ - константа, не зависящая от m. Тогда $\forall m \in \{1..M\} : c_m = \frac{1}{M}$, то есть кодовые слова должны быть распределены равновероятно.

Проверим соблюдение требуемого условия при таком распределении кодовых слов:

$P(c_m|y) = \frac{P(y|c_m) \cdot P(c_m)}{\sum\limits_{i=1}^{M} P(y|c_i) \cdot P(c_i)} = \frac{P(y|c_m) \cdot \frac{1}{M}}{\sum\limits_{i=1}^{M} P(y|c_i) \cdot \frac{1}{M}} = \frac{P(y|c_m) \cdot \frac{1}{M}}{\frac{1}{M} \cdot \sum\limits_{i=1}^{M} P(y|c_i)} = \frac{P(y|c_m)}{\sum\limits_{i=1}^{M} P(y|c_i)} = \frac{P(y|c_m)}{1} = P(y|c_m)$, что и требовалось доказать.

5 Задача 1.3

Запишем среднюю вероятность правильного декодирования в виде $P_c = \sum\limits_{m} P(c_m) \cdot \sum\limits_{y \in R_m} P(y|c_m)$, где R_m - множество тех y, по которым принимается решение в пользу c_m.

Заметим, что $1 - P_c = \sum\limits_{y} P(y) - \sum\limits_{m} P(c_m) \cdot \sum\limits_{y \in R_m} P(y|c_m) = \sum\limits_{y} \sum\limits_{m} P(y|c_m) \cdot P(c_m) - \sum\limits_{m} P(c_m) \cdot \sum\limits_{y \in R_m} P(y|c_m) = \sum\limits_{m} \sum\limits_{y} P(y|c_m) \cdot P(c_m) - \sum\limits_{m} P(c_m) \cdot \sum\limits_{y \in R_m} P(y|c_m) = \sum\limits_{m} P(c_m) \cdot \sum\limits_{y} P(y|c_m) - \sum\limits_{m} P(c_m) \cdot \sum\limits_{y \in R_m} P(y|c_m) = \sum\limits_{m} P(c_m) \cdot (\sum\limits_{y} P(y|c_m) - \sum\limits_{y \in R_m} P(y|c_m)) = \sum\limits_{m} P(c_m) \cdot \sum\limits_{y \in T_m} P(y|c_m)$, где T_m - множество тех y, по которым принимается решение не в пользу c_m, $= \sum\limits_{m} P(c_m) \cdot P(\hat{m} \neq m | x = c_m) = P_e$, то есть $P_e = 1 - P_c$. То есть, максимизируя P_c, мы минимизируем P_e. Докажем теперь, что МАВ максимизирует P_c.

$P_c = \sum\limits_{m} P(c_m) \cdot \sum\limits_{y \in R_m} P(y|c_m) = \sum\limits_{m} \sum\limits_{y \in R_m} P(y|c_m) \cdot P(c_m) = \sum\limits_{m} \sum\limits_{y \in R_m} \frac{P(y \& c_m)}{P(c_m)} \cdot P(c_m) = \sum\limits_{m} \sum\limits_{y \in R_m} P(y \& c_m) = \sum\limits_{m} \sum\limits_{y \in R_m} \frac{P(y \& c_m)}{P(y)} \cdot P(y) = \sum\limits_{m} \sum\limits_{y \in R_m} P(c_m|y) \cdot P(y)$

Так как декодирование по МАВ максимизирует $P(c_m|y)$, значит, максимизироваться будет каждое слагаемое суммы, а значит, и вся сумма также будет максимизироваться. Значит, максимизироваться будет $P_c = 1 - P_e$, а значит, P_e будет минимизироваться.

6 Задача 1.4

Пусть a - переданное слово, b - полученное. Длины этих слов равны n. Посчитаем $P(b|a)$.

Пусть $d(a,b) = d$. То есть a и b отличаются в d позициях и совпадают в $n - d$ позициях.

Тогда $P(b|a) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(b_i|a_i)$

При этом d из этих множителей будут равны $\frac{p_0}{q-1}$, а $n - d$ множителей равны $1 - p_0$

Тогда $P(b|a) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(b_i|a_i) = (\frac{p_0}{q-1})^d \cdot (1-p_0)^{n-d} = (\frac{p_0}{q-1})^d \cdot \frac{(1-p_0)^n}{(1-p_0)^d} = (\frac{p_0}{q-1})^d \cdot \frac{1^d}{(1-p_0)^d} \cdot (1-p_0)^n = (\frac{p_0}{q-1})^d \cdot (\frac{1}{1-p_0})^d \cdot (1-p_0)^n = (\frac{p_0}{(q-1)\cdot(1-p_0)})^d \cdot (1-p_0)^n$

Так как $(1-p_0)^n$ является константой, минимизация $P(b|a)$ эквивалетна минимизации $(\frac{p_0}{(q-1)\cdot(1-p_0)})^d$

Минимизация $(\frac{p_0}{(q-1)\cdot(1-p_0)})^d$ эквивалентна максимизации d, если $0 < \frac{p_0}{(q-1)\cdot(1-p_0)} < 1$

Так как $p_0 \in (0;1)$, то $1 - p_0 \in (0;1)$

Так как $q > 1$, то $q - 1 > 0$

Значит, $(q-1)\cdot(1-p_0) > 0$, и $\frac{p_0}{(q-1)\cdot(1-p_0)} > 0$ всегда.

Значит, найдём такие значения параметров, при которых $\frac{p_0}{(q-1)\cdot(1-p_0)} < 1$

$p_0 < (q-1)\cdot(1-p_0)$

$p_0 < q - q\cdot p_0 - 1 + p_0$

$q - q\cdot p_0 - 1 > 0$

$q\cdot(1-p_0) > 1$

$q > \frac{1}{1-p_0}$

Итого, $p_0 \in (0;1) \& q > \frac{1}{1-p_0}$ даёт эквивалентность декодирования по минимизации расстояних Хемминга и декодирования по МП.

7 Задача 1.5

7.1 Исправление ошибок

Пусть a - переданное слово, b - принятое слово. Пусть $d(a,b) = t$. Мы хотим, чтобы декодер сопоставил принятому слову b слово a, которое передавалось исходно.

Для этого необходимо чтобы $\forall c \neq a : d(c,b) > d(a,b)$, так как в противном случае вместо слова a, которое было передано по каналу, декодер выберет слово $c \neq a$, что приведёт к неправильной декодировке.

Тогда $\forall c \neq a : d(c,b) > t \Rightarrow min_{c\neq a} d(c,b) \geq t+1$

Тогда минимальное расстояние между различными кодовыми словами $a \neq c$ должно быть не меньше $2t+1$. Тогда $d \geq 2t+1 \Rightarrow 2t+1 \leq d \Rightarrow 2t \leq d-1 \Rightarrow t \leq \frac{d-1}{2}$. Учитывая тот факт, что $t \in \mathbb{N}$, получаем $t \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$

7.2 Выявление ошибок

Пусть a - переданное слово, b - принятое слово, $d(a,b) = t$. Если принятое слово b не является кодовым, то декодер может сообщить об ошибке. Для обнаружения ошибки слово b не должно оказаться кодовым, значит, не должно существовать кодовых слов на расстоянии t. Значит, $\forall a \neq b : d(a,b) > t \Rightarrow d > t \Rightarrow d \geq t+1 \Rightarrow t \leq d-1$.

7.3 Геометрическое обоснование

Этим фактам есть и простое геометрическое обоснование. Введём понятие шара $R_t(a) = \{b : d(a,b) < t\}$ - все слова, находящиеся от данного на расстоянии строго меньше t.

Тогда если минимальное расстояние кода равно d, то $min_{a\neq b} d(a,b) = d$, значит, в шаре радиуса d - 1,построенном вокруг кодового слова a, нет других кодовых слов.

Значит, совершив не более $d-1$ ошибок при передаче кодового слова a, мы попадаем в шар $R_{d-1}(a)$, построенный вокруг передаваемого кодового слова a. Известно, что в этом шаре нет других кодовых слов, поэтому мы можем сообщить об ошибке.

Очевидно, что $\forall a \neq b : R_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(a) \cap R_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(b) = \emptyset$. Значит, совершив не более $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ ошибок при передаче кодового слова a, мы попадаем в шар $R_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(a)$, построенный вокруг передаваемого кодового слова a. Известно, что этот шар не пересекается ни с одним из других шаров, а значит, мы можем брать ближайшее кодовое слово. Этим кодовым словом является a, так как мы лежим в шаре радиуса $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, построенном вокруг него, и не лежим ни в одном из шаров радиуса $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, построенном вокруг других кодовых слов.