Исследование схемы

14 ноября 2019 г.

Решаем уравнение
$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} - \chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

Используем явную разностную схему против потока

$$\frac{T_k^{n+1}-T_k^n}{\Delta t} + u\frac{T_k^n-T_{k-1}^n}{\Delta x} - \chi\frac{T_{k+1}^n-2\cdot T_k^n+T_{k-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$$T_k^{n+1}-T_k^n+\frac{u\cdot\Delta t}{\Delta x}(T_k^n-T_{k-1}^n)-\frac{\chi\cdot\Delta t}{\Delta x^2}(T_{k+1}^n-2\cdot T_k^n+T_{k-1}^n) = 0$$

$$T_k^{n+1}-T_k^n+s\cdot(T_k^n-T_{k-1}^n)-r\cdot(T_{k+1}^n-2\cdot T_k^n+T_{k-1}^n) = 0$$

$$\lambda^{n+1} \cdot e^{i\alpha k} - \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} + s \cdot (\lambda^n \cdot e^{i\alpha k} - \lambda^n \cdot e^{i\alpha(k-1)}) - r \cdot (\lambda^n \cdot e^{i\alpha(k+1)} - 2 \cdot \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} + \lambda^n \cdot e^{i\alpha(k-1)}) = 0$$

$$\lambda \cdot \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} - \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} + s \cdot \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} \cdot (1 - e^{-i\alpha}) - r \cdot \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} \cdot (e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}) = 0$$

$$\lambda - 1 + s \cdot (1 - e^{-i\alpha}) - r \cdot (e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}) = 0$$

$$\lambda = 1 - s \cdot (1 - e^{-i\alpha}) + r \cdot (e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}) = 1 - s \cdot (1 - cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha)) + r \cdot (cos(\alpha) + i \cdot sin(\alpha) - 2 + cos(\alpha) - i \cdot sin(\alpha)) = 1 - s + s \cdot (cos(\alpha) - i \cdot sin(\alpha)) + r \cdot (2 \cdot cos(\alpha) - 2) = 1 - s - 2r + (s + 2r) \cdot cos(\alpha) - i \cdot s \cdot sin(\alpha)$$

$$|\lambda|^2 = ((1 - s - 2r) + (s + 2r) \cdot cos(\alpha))^2 + s \cdot sin^2(\alpha) = (1 - s - 2r)^2 + 2 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot cos(\alpha) + (s + 2r)^2 \cdot cos^2(\alpha) + s^2 \cdot sin^2(\alpha) = (1 - s - 2r)^2 + 2 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot (1 - 2sin^2(\tfrac{\alpha}{2})) + (s + 2r)^2 \cdot (1 - sin^2(\alpha)) + s^2 \cdot sin^2(\alpha) = (1 - s - 2r)^2 + 2 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) - 2 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot 2sin^2(\tfrac{\alpha}{2}) + (s + 2r)^2 - (s + 2r)^2 \cdot sin^2(\alpha) + s^2 \cdot sin^2(\alpha) = (1 - s - 2r + s + 2r)^2 - 2 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot 2sin^2(\tfrac{\alpha}{2}) - (s + 2r)^2 \cdot sin^2(\alpha) + s^2 \cdot sin^2(\alpha) = 1 - 4 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot sin^2(\tfrac{\alpha}{2}) - (s + 2r)^2 \cdot sin^2(\alpha) + s^2 \cdot sin^2(\alpha) =$$

$$1-4\cdot(1-s-2r)(s+2r)\cdot sin^2(\tfrac{\alpha}{2})-4r(r+s)\cdot sin^2(\alpha)<1$$

$$4\cdot(1-s-2r)(s+2r)\cdot sin^2(\tfrac{\alpha}{2})+4r(r+s)\cdot sin^2(\alpha)>0$$

$$r(r+s)\cdot sin^2(\alpha)>(s+2r-1)(s+2r)\cdot sin^2(\tfrac{\alpha}{2})$$

Докажем, что ответом является $s+2r<1$

1. Достаточность

   Пусть $s+2r<1$. Тогда $\forall\alpha:(s+2r-1)(s+2r)\cdot sin^2(\frac{\alpha}{2})<0$. Заметим также, что $\forall r,s,\alpha:r(r+s)\cdot sin^2(\alpha)\geq 0$.

   Поэтому $s+2r<1\Rightarrow\forall\alpha:r(r+s)\cdot sin^2(\alpha)>(s+2r-1)(s+2r)\cdot sin^2(\frac{\alpha}{2})$

2. Необходтмость

   Пусть $s+2r\geq 1$. Тогда рассмотрим $\alpha=\pi$. Тогда $r(r+s)\cdot sin^2(\alpha)=r(r+s)\cdot sin^2(\pi)=0$, а $(s+2r-1)(s+2r)\cdot sin^2(\frac{\alpha}{2})=(s+2r-1)(s+2r)\cdot sin^2(\frac{\pi}{2})=(s+2r-1)(s+2r)\geq 0$.

То есть $\exists \alpha = \pi : r(r+s) \cdot sin^2(\alpha) \leq (s+2r-1)(s+2r) \cdot sin^2(\frac{\alpha}{2})$