

Исследование схемы

14 ноября 2019 г.

Решаем уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Используем явную разностную схему против потока

$$\frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta t} + u \frac{T_k^n - T_{k-1}^n}{\Delta x} - \chi \frac{T_{k+1}^n - 2 \cdot T_k^n + T_{k-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

$$T_k^{n+1} - T_k^n + \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} (T_k^n - T_{k-1}^n) + \frac{\chi \cdot \Delta t}{\Delta x^2} (T_{k+1}^n - 2 \cdot T_k^n + T_{k-1}^n) = 0$$

$$T_k^{n+1} - T_k^n + s \cdot (T_k^n - T_{k-1}^n) - r \cdot (T_{k+1}^n - 2 \cdot T_k^n + T_{k-1}^n) = 0$$

$$\lambda^{n+1} \cdot e^{i\alpha k} - \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} + s \cdot (\lambda^n \cdot e^{i\alpha k} - \lambda^n \cdot e^{i\alpha(k-1)}) - r \cdot (\lambda^n \cdot e^{i\alpha(k+1)} - 2 \cdot \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} + \lambda^n \cdot e^{i\alpha(k-1)}) = 0$$

$$\lambda \cdot \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} - \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} + s \cdot \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} \cdot (1 - e^{-i\alpha}) - r \cdot \lambda^n \cdot e^{i\alpha k} \cdot (e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}) = 0$$

$$\lambda - 1 + s \cdot (1 - e^{-i\alpha}) - r \cdot (e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - s \cdot (1 - e^{-i\alpha}) + r \cdot (e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}) = 1 - s \cdot (1 - \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) + r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) - 2 + \cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha)) \\ &= 1 - s + s \cdot (\cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha)) + r \cdot (2 \cdot \cos(\alpha) - 2) = 1 - s - 2r + (s + 2r) \cdot \cos(\alpha) - i \cdot s \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &= ((1 - s - 2r) + (s + 2r) \cdot \cos(\alpha))^2 + s^2 \cdot \sin^2(\alpha) = (1 - s - 2r)^2 + 2 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot \cos(\alpha) + (s + 2r)^2 \cdot \cos^2(\alpha) + s^2 \cdot \sin^2(\alpha) \\ &= (1 - s - 2r)^2 + 2 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot \cos(\alpha) + (s + 2r)^2 \cdot (1 - \sin^2(\alpha)) + s^2 \cdot \sin^2(\alpha) \\ &= (1 - s - 2r)^2 + 2 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot \cos(\alpha) - 2 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot \sin^2(\frac{\alpha}{2}) + (s + 2r)^2 - (s + 2r)^2 \cdot \sin^2(\alpha) + s^2 \cdot \sin^2(\alpha) \\ &= (1 - s - 2r + s + 2r)^2 - 2 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot 2 \sin^2(\frac{\alpha}{2}) - (s + 2r)^2 \cdot \sin^2(\alpha) + s^2 \cdot \sin^2(\alpha) \\ &= 1 - 4 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot \sin^2(\frac{\alpha}{2}) - (s + 2r)^2 \cdot \sin^2(\alpha) + s^2 \cdot \sin^2(\alpha) = \end{aligned}$$

$$1 - 4 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 4r(r + s) \cdot \sin^2(\alpha) < 1$$

$$4 \cdot (1 - s - 2r)(s + 2r) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 4r(r + s) \cdot \sin^2(\alpha) > 0$$

$$r(r + s) \cdot \sin^2(\alpha) > (s + 2r - 1)(s + 2r) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Докажем, что ответом является $s + 2r < 1$

1. Достаточность

Пусть $s + 2r < 1$. Тогда $\forall \alpha : (s + 2r - 1)(s + 2r) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$. Заметим также, что $\forall r, s, \alpha : r(r + s) \cdot \sin^2(\alpha) \geq 0$.

Поэтому $s + 2r < 1 \Rightarrow \forall \alpha : r(r + s) \cdot \sin^2(\alpha) > (s + 2r - 1)(s + 2r) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

2. Необходимость

Пусть $s + 2r \geq 1$. Тогда рассмотрим $\alpha = \pi$. Тогда $r(r + s) \cdot \sin^2(\alpha) = r(r + s) \cdot \sin^2(\pi) = 0$, а $(s + 2r - 1)(s + 2r) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = (s + 2r - 1)(s + 2r) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (s + 2r - 1)(s + 2r) \geq 0$.

$$\text{То есть } \exists \alpha = \pi : r(r+s) \cdot \sin^2(\alpha) \leq (s+2r-1)(s+2r) \cdot \sin^2(\frac{\alpha}{2})$$