Типовой расчёт

Кокорин Илья, M3339

Вариант № 10

1 Оценка объёма

1.1 Дано

- Функция f имеет вид $f(x) = x^a$
- $a = 3$
- $k = 10$
- $c = 2.21$
- $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^3 \leq 2.21$

1.2 Программа для вычисления объёма $\{F(\overline{x}) \leq c\}$

```
n = 10 ^ 4 #10 ^ 6
k = 10;
c = 2.21;
gamma = 0.95;
T = norminv((1 + gamma) / 2)

function [res] = f(x)
  a = 3;
  res = x ^ a;
endfunction

R = rand(k, n);
R_mapped = arrayfun(@f, R);
F = sum(R_mapped);
V = mean(F <= c)
delta = T * sqrt(V * (1 - V) / n)
left_border = V - d
right_border = V + d
interval = [left_border, right_border]
```

1.3 Вывод программы для $n = 10^4$ и $n = 10^6$

```
n =   10000
T =   1.9600
V =   0.39700
delta =   0.0095896
left_border =   0.38741
right_border =   0.40659
interval =

   0.38741    0.40659
```

```
n =   1000000
T =   1.9600
V =   0.39611
delta =      9.5859e-04
left_border =   0.39515
right_border =   0.39707
interval =

   0.39515    0.39707
```

1.4 Вывод

Заметим, что $[0.39515; 0.39707] \subset [0.38741; 0.40659]$, то есть доверительный интервал для $n = 10^6$ содержится в доверительном интервале для $n = 10^4$.
При увеличении размера выборки с $n = 10^4$ до $n = 10^6$, в 100 раз, размер доверительного интервала $delta$ уменьшился примерно в 10 раз.

2 Оценка интеграла № 1

2.0.1 Дано

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{1+x^2} e^{\frac{-(x+2)^2}{4}} dx$$

2.0.2 Программа для вычисления I

```
n = 10 ^ 4 # 10 ^ 6
gamma = 0.95
T = norminv((1 + gamma) / 2)

function res = f(x)
  res = 2 * sqrt(pi * (1 + x ^ 2));
endfunction

function res = g(x)
  res = sqrt(1 + x ^ 2) * exp(-((x + 2) ^ 2) / 4);
endfunction

integral = quad(@g, -inf, inf)

mu = -2;
sigma = sqrt(2);

X = normrnd(mu, sigma, 1, n);
fX = arrayfun(@f, X);
monte_carlo_integral = mean(fX)
delta_integrals = abs(monte_carlo_integral - integral)
delta = (std(fX) * T) / sqrt(n)
left_border = monte_carlo_integral - delta
right_border = monte_carlo_integral + delta
interval = [left_border, right_border]
```

2.0.3 Вывод программы для $n = 10^4$ и $n = 10^6$

```
n =  10000
gamma =  0.95000
T =  1.9600
integral =  8.5452
monte_carlo_integral =  8.5460
delta_integrals =    7.8327e-04
delta =  0.075533
left_border =  8.4705
right_border =  8.6215
interval =

   8.4705   8.6215
```

```
n =  1000000
gamma =  0.95000
T =  1.9600
integral =  8.5452
monte_carlo_integral =  8.5445
delta_integrals =    7.1363e-04
delta =  0.0075885
left_border =  8.5369
right_border =  8.5521
interval =

   8.5369   8.5521
```

2.0.4 Вывод

Значение интеграла, посчитанное стандартными средствами Octave, содержится в доверительном интервале как при размере выборки $n = 10^4$ так и при $n = 10^6$.
$[8.5369; 8.5521] \subset [8.4705; 8.6215]$, то есть доверительный интервал для $n = 10^6$ содержится в доверительном интервале для $n = 10^4$.
При увеличении размера выборки с $n = 10^4$ до $n = 10^6$, в 100 раз, размер доверительного интервала *delta* уменьшился примерно в 10 раз.

3 Оценка интеграла № 2

3.0.1 Дано

$$I = \int_0^5 \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx$$

3.0.2 Программа для вычисления I

```
n = 10 ^ 4 # 10 ^ 6
gamma = 0.95
T = norminv((1 + gamma) / 2)

function res = f(x)
  res = sin(x) / (x^2 + 1);
endfunction

a = 0;
b = 5;

integral = quad(@f, a, b)

X = rand(1, n) .* (b - a) .+ a;
fX = arrayfun(@f, X) .* (b - a);
monte_carlo_integral = mean(fX)
delta_integrals = abs(monte_carlo_integral - integral)
delta = (std(fX) * T) / sqrt(n)
left_border = monte_carlo_integral - delta
right_border = monte_carlo_integral + delta
interval = [left_border, right_border]
```

С помощью функции quad вычисляется значение интеграла встроенными средствами Octave.

3.0.3 Вывод программы для $n = 10^4$ и $n = 10^6$

```
n =   10000
gamma =   0.95000
T =   1.9600
integral =   0.64816
monte_carlo_integral =   0.64903
delta_integrals =     8.6859e-04
delta =   0.016898
left_border =   0.63213
right_border =   0.66593
interval =

   0.63213    0.66593
```

```
n =   1000000
gamma =   0.95000
T =   1.9600
integral =   0.64816
monte_carlo_integral =   0.64804
delta_integrals =     1.2534e-04
delta =   0.0016864
left_border =   0.64635
right_border =   0.64972
interval =

   0.64635    0.64972
```

3.0.4 Вывод

Значение интеграла, посчитанное стандартными средствами Octave, содержится в доверительном интервале как при размере выборки $n = 10^4$ так и при $n = 10^6$.
$[0.64635; 0.64972] \subset [0.63213; 0.66593]$, то есть доверительный интервал для $n = 10^6$ содержится в доверительном интервале для $n = 10^4$.
При увеличении размера выборки с $n = 10^4$ до $n = 10^6$, в 100 раз, размер доверительного интервала *delta* уменьшился примерно в 10 раз. Разница между значениями интеграла, посчитанным стандартными средствами octave и методом Монте-Карло уменьшилась примерно в 7 раз.