

# 1 Парадокс Карри

Лямбда-исчисление было предложено Черчем в начале 1930х годов для формализации математики. Особенность лямбда-исчисления, отличающего его от, допустим, обычного исчисления предикатов — формализация понятия применения функций. В лямбда-исчислении легко выражаются сложные понятия — например, натуральные числа, причем это достигается без введения дополнительного набора аксиом как в формальной арифметике.

Однако, довольно быстро в нем нашлись неустранимые парадоксы. Далее будет изложен один из парадоксов, это не оригинальный парадокс 1932 года — поскольку современное лямбда-исчисление появилось в 1940 году как результат упрощения Черчем исходной теории. Но пример дает представление о проблеме.

Построим исчисление высказываний на основе языка лямбда-выражений, добавив в пару к аппликации импликацию. В таком языке функция  $\lambda f.\lambda x.fx \rightarrow fx$  являлась бы тавтологией. Естественно, в этом исчислении будут аксиомы и правила вывода, как и в обычном исчислении предикатов — среди них будут и обычные логические аксиомы, и аксиомы про лямбда-преобразования, и подобным выражениям будет дан четкий формальный смысл.

Мы будем считать, что если  $A =_\beta B$ , то  $\vdash A \rightarrow B$  и  $\vdash B \rightarrow A$ . Удивительно было бы ожидать иного — ведь результат редукции  $A$  и  $B$  одинаков (либо обе редукции не заканчиваются). В программировании бывает, что мы не можем заменить, например, вызов функции на его результат — например, `printf("Hello, world")` нельзя заменить на 1, хоть численно их результат равен. В математике же считается, что разницы между разной записью значений нет. Иначе получится, что например уравнение  $x^2 = 4$  выполнено при  $x = 2 \cdot \sin \pi$ , но не выполнено при  $x = \log_2 4$ .

Также мы ожидаем доказуемость

$$\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

и

$$\alpha \rightarrow \alpha$$

(было бы обидно, если такое нельзя было бы доказать).

В таком исчислении мы могли бы ввести аксиоматику Пеано простыми определениями (см. ):

И, не вводя никаких дополнительных аксиом, доказать, скажем, такие утверждения:

Однако, так построенное исчисление чересчур мощно, о чем свидетельствует следующее рассуждение.

Рассмотрим выражение  $F_\alpha \equiv \lambda x.xx \rightarrow \alpha$  и выражение  $\Phi_\alpha \equiv F_\alpha F_\alpha$ . Нетрудно видеть, что  $\Phi_\alpha =_\beta \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$ . Тогда:

$\vdash \Phi_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha$	Доказуемое утверждение
$\vdash \Phi_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$	бета-эквивалентность
$\vdash (\Phi_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\Phi_\alpha \rightarrow \alpha)$	Доказуемое утверждение
$\vdash \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$	М.Р.
$\vdash \Phi_\alpha$	бета-эквивалентность
$\vdash \alpha$	М.Р.

Таким образом мы показали, что любое утверждение может быть выведено в данной системе, т.е. система противоречива. Данное противоречие является следствием выразимости в данной системе парадокса Карри. Парадокс можно продемонстрировать фразой «если данное высказывание истинно, то луна сделана из зеленого сыра» или, чуть более формально, выражением  $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$  (если выражение истинно, то из него следует все что угодно).

Данная ситуация хорошо нам знакома и показывает, что механическое перенесение казалось бы естественных правил в формальные условия может привести к проблемам.

## 2 Просто типизированное лямбда-исчисление

### 2.1 Импликационный фрагмент интуиционистской логики

Рассмотрим следующее исчисление, являющееся подмножеством интуиционистской логики, содержащим только импликацию. Это исчисление генценовского типа.

Формула — либо маленькая буква греческого алфавита, либо выражение вида  $\phi \rightarrow \psi$ .

Аксиомы и правила вывода:

1. Схема аксиом:

$$\overline{\Gamma, \phi \vdash \phi}$$

2. Введение импликации:

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}$$

3. Удаление импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Следующая теорема покажет, что если некоторая формула (составленная только из импликаций и переменных) выводима в интуиционистской логике, то она выводима и в импликационном ее фрагменте.

**Теорема 2.1.** Модели Крипке корректны и полны для данного исчисления.

*Доказательство.* Корректность моделей Крипке для данного исчисления следует из их корректности для полного исчисления. Для полноты же нам достаточно показать, что если неверно  $\Gamma \vdash \alpha$ , то найдется модель Крипке, в которой неверно и  $\Gamma \Vdash \alpha$ . Построим такую модель.

В качестве миров в этой модели мы возьмем множества формул, замкнутых относительно выводимости:  $D(\Gamma) = \{\alpha \mid \Gamma \vdash \alpha\}$ . Отношение вынуждения определим так:  $\Gamma \Vdash p$ , если  $p \in \Gamma$ . Наследование же миров будем рассматривать по включению:  $\Gamma < \Delta$ , если  $\Gamma \in \Delta$ .

Покажем, что так заданная модель — корректна и полна. То есть,  $\Gamma \vdash \alpha$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma \Vdash \alpha$ . Сделаем это индукцией по структуре формулы  $\alpha$ .

- $\alpha = x$ . Тогда, по определению,  $\Gamma \vdash x$  эквивалентно  $x \in \Gamma$  и эквивалентно  $\Gamma \Vdash x$ .
- $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ .

Сперва покажем полноту. Пусть  $\Gamma \Vdash \beta \rightarrow \gamma$ . Значит (определение вынуждения импликации в моделях Крипке)  $D(\Gamma \cup \beta) \Vdash \gamma$ . Раз так, то  $\Gamma, \beta \vdash \gamma$  (предположение индукции). По правилу введения импликации тогда  $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$ .

Теперь покажем корректность. Пусть  $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$  и в некотором мире  $\Gamma_n \geq \Gamma$  выполнено  $\Gamma_n \Vdash \beta$ . Раз  $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$ , то  $\Gamma_n \vdash \beta \rightarrow \gamma$ . Раз  $\Gamma_n \Vdash \beta$ , то  $\Gamma_n \vdash \beta$  (по полноте, доказанной выше). Тогда  $\Gamma_n \vdash \gamma$  (по правилу удаления импликации), и, следовательно,  $\Gamma_n \Vdash \gamma$  (по индукционному предположению). Значит, и  $\Gamma_n \Vdash \beta \rightarrow \gamma$ .

□

## 2.2 Импликационный фрагмент интуиционистской логики

Рассмотрим язык интуиционистской логики, в котором допустима только одна связка — импликация. Такой язык мы назовем языком импликационного фрагмента интуиционистской логики.

Также, рассмотрим все аксиомы интуиционистского исчисления высказываний, которые можно записать в этом языке — они составят аксиомы данного фрагмента логики.

**Теорема 2.2.** Импликационный фрагмент интуиционистской логики корректен и полон в моделях Крипке.

*Доказательство.* Корректность очевидна из корректности интуиционистского исчисления высказываний.

Для доказательства полноты мы построим модель Крипке, в которой мирами будут замкнутые относительно доказуемости множества формул. Очевидно, что для любого такого мира  $W$  и любой формулы  $\phi$  условия  $\phi \in W$  и  $W \vdash \phi$  эквивалентны.

Будем считать, что  $W \Vdash x$  тогда и только тогда, когда  $x \in W$ . Покажем тогда, что это справедливо и для любой формулы  $\phi$  (тем самым мы покажем, что миры действительно образуют модель Крипке).

Докажем это индукцией по структуре формулы  $\phi$ . База следует из определения, теперь переход. Т.е., пусть есть формула  $\alpha \rightarrow \beta$ , причём  $\alpha \in W$  т.и.т.т., когда  $W \Vdash \alpha$ , и  $\beta \in W$  т.и.т.т., когда  $W \Vdash \beta$ .

Пусть  $W \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Покажем, что  $W \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Значит, надо показать, что если  $W_1 \geq W$  и  $W_1 \Vdash \alpha$ , то  $W_1 \Vdash \beta$ . Рассмотрим такой  $W_1$ . По предположению индукции  $W_1 \vdash \alpha$ , и поскольку  $W_1 \vdash \alpha \rightarrow \beta$  (т.к.  $W \subset W_1$ ), то  $W_1 \vdash \beta$  (М.Р.). Значит,  $W_1 \Vdash \beta$  (опять же, по предположению индукции).

Обратно, пусть  $W \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Покажем, что  $W \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Пусть  $W_\alpha$  — транзитивное замыкание по  $\vdash$  множества  $W \cup \{\alpha\}$ . Тогда  $W_\alpha \Vdash \beta$  (по определению моделей Крипке). Но тогда  $W_\alpha \vdash \beta$  (по предположению индукции). Значит,  $W, \alpha \vdash \beta$ , то есть  $W \vdash \alpha \rightarrow \beta$  (по т. о дедукции).

Теперь, пусть  $\alpha$  — формула импликационного фрагмента и  $\models \alpha$ . Если окажется, что  $\nVdash \alpha$ , то  $\nVdash \alpha$  в введенной выше модели, что даст противоречие с  $\models \alpha$ .  $\square$

В этом курсе мы будем рассматривать логику в исчислении Генценовского типа (нормальный вывод).

Рассмотрим три правила вывода:

$$\begin{array}{c} \overline{\Gamma, \phi \vdash \phi} \text{ аксиома} \\[10pt] \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi} \text{ введение } \rightarrow \\[10pt] \frac{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi} \text{ удаление } \rightarrow, \text{ М.Р.} \end{array}$$

**Лемма 2.3.** Импликационный фрагмент в данном исчислении эквивалентен фрагменту в Гильбертовском исчислении.

**Определение 2.1.** Тип — это:

- Элементарный тип — маленькая греческая буква из начала алфавита, возможно, с индексом  $(\alpha, \beta, \dots)$

- Составной тип. Если  $\tau$  и  $\sigma$  — некоторые типы, то запись вида  $\tau \rightarrow \sigma$  — это также некоторый тип.

Греческими буквами конца алфавита ( $\sigma, \dots$ ) будем обозначать типы вообще, неважно, составные или элементарные.

Существует два основных стиля типизации лямбда-исчисления — по Чёрчу и по Карри.

### 3 Лямбда-исчисление по Чёрчу

**Определение 3.1.** Пред-лямбда-терм по Чёрчу — это один из следующих объектов:

- Переменная ( $a, b, c, \dots$ )
- Применение ( $\Lambda_1 \Lambda_2$ )
- Абстракция ( $\lambda x : \tau. \Lambda$  или  $\lambda x^\tau. \Lambda$ )

По пред-лямбда-терму можно построить лямбда-терм, введя альфа-эквивалентность аналогично бестиповому исчислению (типы должны совпадать).

### 4 Лямбда-исчисление по Карри

Существует второй вариант исчисления. Главное его отличие — в отсутствии типов при указании переменных в лямбда-термах. Правила типизации:

Принципиальных отличий нет, легко показать следующую теорему:

**Теорема 4.1.** Пусть отображение  $Er : \Lambda_T \rightarrow \Lambda$  задано так:  $Er(\lambda x : \sigma. A) = \lambda x. Er(A)$ . Тогда (стирание):

1. Если  $M \rightarrow_\beta N$ , то  $Er(M) \rightarrow_\beta Er(N)$
2. Если  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \alpha$ , то  $\Gamma \vdash_{\text{к}} Er(M) : \alpha$ .

Поднятие:

1. Если  $M \rightarrow_\beta N$ , то для любого  $M_T \in \Lambda_T$ , такого, что  $Er(M_T) = M$ , найдется  $N_T \in \Lambda_T$ , такой, что  $Er(N_T) = N$  и  $M_T \rightarrow_\beta N_T$ .
2. Если  $\Gamma \vdash_{\text{к}} M : \alpha$ , то найдется такой  $M_T \in \Lambda_T$ , что  $Er(M_T) = M$  и  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M_T : \alpha$ .

*Доказательство.* Упражнение. □

Также, легко доказать аналоги теорем Черча-Россера и теоремы о нормализации.

Однако, несмотря на сходство, есть и отличие — типизация по Карри несколько более широкая. А именно, если  $\Gamma \vdash M : \sigma$  и  $\Gamma \vdash M : \tau$ , то из этого не следует  $\sigma = \tau$ . Скажем, справедливо  $\vdash_{\text{к}} \lambda x. x : \alpha \rightarrow \alpha$  и  $\vdash_{\text{к}} \lambda x. x : \beta \rightarrow \beta$ .

## 4.1 Изоморфизм Карри-Ховарда

Теперь мы готовы показать, что просто типизированное лямбда-исчисление в некотором смысле изоморфно импликационному фрагменту интуиционистской логики.

Заметим сперва, что  $T$  содержит в точности те же формулы, что и введенный в предыдущем параграфе язык.

**Теорема 4.2.** (Об изоморфизме Карри-Ховарда)

1. Если  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \phi$ , то  $\text{types}(\Gamma) \vdash \phi$ .
2. Если  $\Gamma \vdash \phi$ , то найдется такой  $M \in \Lambda_T$ , что  $\{x_\phi | \phi \in \Gamma\} \vdash_{\text{ч}} M : \phi$ .

*Доказательство.* Доказательство обеих частей теоремы несложно, но мы приведем доказательство второй части из методических соображений.

Покажем существование  $M$  индукцией по структуре доказательства  $\Gamma \vdash \phi$ . Для этого рассмотрим заключительное правило и разберем случаи.

□

## 5 Сильная нормализация

**Определение 5.1.** Будем называть терм  $A$  *сильно нормализуемым* если выполнено одно из следующих условий:

- $A$  в нормальной форме
- $A \rightarrow_\beta B$  влечёт сильную нормализуемость  $B$

**Лемма 5.1.** Пусть  $A$  — сильно нормализуемый терм, тогда любая цепочка редукций неизбежно приводит к нормальной форме за конечное количество шагов.

*Доказательство.* Рассмотрим множество  $N_0$  — множество всех термов в нормальной форме. Рассмотрим процесс его пополнения:  $N_{n+1} = N_n \cup A$  : для всех  $BA \rightarrow_\beta B$  влечет  $B \in N_n$ . Тогда  $\cup N_i = N^*$  будет содержать все сильно нормализуемые термы (доказательство очевидно из определения).

Пусть  $(A) = \min_i : A \in N_i$ . Очевидно, что если  $A \rightarrow_\beta B$ , то  $C(A) > C(B)$ . Отсюда следует конечность любой цепочки редукций.  $\square$

**Определение 5.2.** Множество  $SN$  — множество сильно нормализуемых термов

Определим оценку для типов. Будем считать, что  $\llbracket \sigma \rrbracket$  — это все лямбда-выражения, которые могут иметь данный тип.

Соответственно определим аналог для функций на оценках,  $A \rightarrow B = \{C : \forall P \in A(CP \in B)\}$ , множество всех термов, которые из любого терма из  $A$  делают терм из  $B$ . А именно:

**Определение 5.3.** Оценкой типа  $\tau$  назовем:

$$\llbracket \tau \rrbracket = \begin{cases} SN, & \text{если } \tau \text{ — атомарный тип} \\ \llbracket \sigma \rrbracket \rightarrow \llbracket \theta \rrbracket, & \text{если } \tau \equiv \sigma \rightarrow \theta \end{cases}$$

**Определение 5.4.** Будем называть множество  $S$  *насыщенным*, если одновременно выполнены следующие условия:

1.  $S \subseteq SN$
2. Если  $n \geq 0$  и  $\{M_1, \dots, M_n\} \subseteq SN$ , то  $xM_1 \dots M_n \in S$ .
3. Если  $n \geq 1$ ,  $\{M_1, \dots, M_n\} \subseteq SN$  и  $P[x := M_1]M_2 \dots M_n \in S$ , то  $(\lambda x.P)M_1 \dots M_n \in S$ .

**Лемма 5.2.**  $SN$  насыщено

*Доказательство.* Проверим требования к насыщенному множеству.

1.  $SN \subseteq SN$
2. Пусть найдется бесконечная последовательность редукций  $xM_1 \dots M_n \rightarrow_\beta xM'_1 \dots M'_n \rightarrow_\beta xM''_1 \dots M''_n \dots$ . Тогда найдется бесконечная последовательность редукций какого-то из его аргументов:  $M_k \rightarrow_\beta M'_k \rightarrow_\beta M''_k \dots$ . Значит,  $M_k \notin SN$ . Поэтому, если  $M_k \in SN$  для всех  $k$ , то и  $xM_1 \dots M_n \in SN$ .
3. Пусть  $P[x := M_1]M_2 \dots M_n \in SN$ . Пусть существует бесконечная цепочка редукций формулы  $(\lambda x.P)M_1 \dots M_n$ . В данной цепочке неизбежно должна быть произведена редукция подвыражения  $(\lambda x.P')M'_1$  (здесь  $P \twoheadrightarrow_\beta P'$ ,  $M_1 \twoheadrightarrow_\beta M'_1$ ). Это так, поскольку цепочки редукций  $M_1, \dots, M_n$  имеют конечную длину по условию, также и редукция  $P$  не может быть бесконечной (иначе мы могли бы производить эти редукции в исходной формуле). Но результат этой редукции может быть получен из исходного выражения — после чего цепочка редукций будет иметь конечную длину по условию.

□

**Лемма 5.3.** Если  $A, B$  насыщены, то  $A \rightarrow B$  насыщено

*Доказательство.* Рассмотрим  $xM_1 \dots M_n$ , где  $M_i \in SN$ . И рассмотрим  $(xM_1 \dots M_n)P$ , где  $P \in A$ . Раз  $A \subseteq SN$ , то  $P \in SN$ .

Теперь рассмотрим  $P[x := Q]M_1 \dots M_n \in A \rightarrow B$ . То есть,  $(P[x := Q]M_1 \dots M_n)K \in B$ . Тогда по определению,  $(\lambda x.P)QM_1 \dots M_n K \in B$  □

**Лемма 5.4.** Если  $\sigma$  — тип, то  $\llbracket \sigma \rrbracket$  насыщено

*Доказательство.* Упражнение. □

**Определение 5.5.** • Оценка — отображение переменных на термы.

- Оценка терма при оценке переменных:  $\llbracket M \rrbracket_\rho = M[x_1 := \rho(x_1), \dots, x_n := \rho(x_n)]$  при  $x_i \in FV(M)$ .
- $\models M : \sigma \text{ — } \llbracket M \rrbracket \in \sigma$ .
- $\rho \models M : \sigma \text{ — } \llbracket M \rrbracket_\rho \in \sigma$ .
- $\rho \models \Gamma \text{ — } \rho \models g_i : \gamma_i$  (переменные имеют надлежащие типы в данной оценке переменных)
- $\Gamma \models M : \sigma \text{ — Если } \rho \models \Gamma, \text{ то } \rho \models M : \sigma$

**Теорема 5.5.** Так определенная оценка корректна: если  $\Gamma \vdash M : \sigma$ , то  $\Gamma \models M : \sigma$ .

*Доказательство.* Рассмотрим индукцию по построению доказательства типизации  $M$ .

- $\overline{\Gamma \vdash x : \sigma}$ . Тогда  $x : \sigma \in \Gamma$ . Фиксируем какую-нибудь оценку  $\rho$ . Тогда если  $\rho \models \Gamma$ , то обязательно  $\llbracket x \rrbracket_\rho \in \sigma$ . Но это и значит, что  $\rho \models x : \sigma$ .

□

**Теорема 5.6.** Любой просто типизированный терм сильно нормализуемый.

*Доказательство.* Так как  $\Gamma \vdash M : \sigma$ , то  $\Gamma \models M : \sigma$ . Пусть  $\rho(x) = x$ . Тогда  $\rho \models g_i : \gamma_i$  ( $g_i \in \llbracket \text{gamma}_i \rrbracket$  по лемме и определению насыщенного множества). Тогда  $\rho \models \Gamma$ . Тогда  $\rho \models M : \sigma$ , то есть  $\llbracket M \rrbracket_\rho \in \sigma \subseteq SN$ . □



## 6 О классе функций, определимых в просто типизированном лямбда-исчислении

**Определение 6.1.** Назовем *высотой* типа  $h(\tau)$  следующее выражение:

$$h(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \equiv \alpha \\ \max(h(\rho), h(\sigma)) + 1 & \tau \equiv \rho \rightarrow \sigma \end{cases}$$

**Определение 6.2.** Назовем расширенным полиномом функцию  $E : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  следующего вида:

$$E(x, y) = \begin{cases} a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{1,1}xy + \dots + a_{m,n}x^m y^n & x > 0, y > 0 \\ b_0 + b_1x + \dots + b_k & x > 0, y = 0 \\ c_0 + c_1y + \dots + c_l & x = 0, y > 0 \\ k & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

**Определение 6.3.** Пусть тип  $\nu$  — это  $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ . Пусть  $n$  — некоторое натуральное число. Выражение  $\bar{n} \equiv \lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha}. \lambda x^\alpha. f^n x$  назовем чёрчевским нумералом, соответствующим числу  $n$ .

**Теорема 6.1.** При фиксированном типе для целых чисел  $\nu = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$  в типизированном исчислении по Чёрчу класс двуместных функций ограничен расширенными полиномами. То есть, каков бы ни был замкнутый лямбда-терм  $R$ , такой что  $\vdash_{\mathcal{A}} R : \nu \rightarrow \nu \rightarrow \nu$ , найдется расширенный полином  $E(m, n)$ , такой, что  $R \bar{m} \bar{n} =_{\beta} \overline{E(m, n)}$ .

**Лемма 6.2.** Если в выражении  $X^\xi$ , находящемся в нормальной форме, подтерм  $T^\tau$  не является свободной переменной выражения  $T$ , и  $T \neq X$ , то всегда найдется такой подтерм  $S^\sigma$ , что  $h(\sigma) > h(\tau)$ , причем  $\sigma = \tau \rightarrow \rho$  или  $\sigma = \rho \rightarrow \tau$ .

*Доказательство.* Рассмотрим подтерм  $T$ . Возможны следующие варианты:

1.  $T$  — это некоторая переменная  $x$  (она обязана быть связанной по условию леммы). То есть  $T$  — часть выражения  $S = \lambda x : \tau. \dots x \dots$ . Тогда  $S : \tau \rightarrow \rho$ , и  $h(\tau \rightarrow \rho) > h(\tau)$ .
2.  $T$  — это некоторая абстракция  $T = \lambda x : \sigma. P^\pi$ . Тогда заметим, что по условию  $T \neq X$ . Значит,  $T$  входит в некоторое более общее выражение — либо в абстракцию  $S^{v \rightarrow \tau} = \lambda y : v. T$ , либо в применение  $S^{\tau \rightarrow v} T$  (применение вида  $TA$  является редексом и потому невозможно).
3.  $T$  — это некоторое применение  $T = S^v \rightarrow \tau Y$ .

□

**Лемма 6.3.**  $(\lambda t. g^n t)^m x \longrightarrow_{\beta} g^{m \cdot n} x$ .

*Доказательство.* Индукция по  $m$ :

База Пусть  $m = 0$ . Тогда  $(\lambda t. g^n t)^0 x \equiv x \equiv g^{0 \cdot n} x$ .

Переход Пусть  $(\lambda t. g^n t)^m x \longrightarrow_{\beta} g^{m \cdot n} x$ . Тогда

$$(\lambda t. g^n t)^{m+1} x \equiv (\lambda t. g^n t)^m ((\lambda t. g^n t) x) \longrightarrow_{\beta} g^{m \cdot n} ((\lambda t. g^n t) x) \longrightarrow_{\beta} g^{m \cdot n} (g^n x) \equiv g^{(m+1) \cdot n} x$$

□

*Доказательство теоремы.* Рассмотрим лямбда-терм  $R a^\nu b^\nu f^{\alpha \rightarrow \alpha}$ . Очевидно, что  $R : \alpha \rightarrow \alpha$ .

Согласно свойству сильной нормализации, данный терм имеет нормальную форму  $N$ . Рассмотрим ее. Заметим, что если  $T^\tau$  — подтерм  $N$ , то он обязан иметь тип либо  $\nu$ , либо  $\alpha \rightarrow \alpha$ , либо  $\alpha$ .

Доказать это можно разбором случаев с использованием индукции и предыдущей леммы. Заметим, что в выражении не может быть выражений атомарных типов, отличных от  $\alpha$  (поскольку у нас запрещены свободные переменные). Возьмем некоторый терм  $T^\tau$  и рассмотрим  $h(\tau)$ .

1. Если  $h(\tau) \geq 3$ , то  $T = \bar{a}$  или  $T = \bar{b}$ . Пусть это не так, и существуют такие  $P^\pi$ , что  $P \neq \bar{a}$ ,  $P \neq \bar{b}$  и  $h(\pi) \geq 3$ . Возьмем среди таких  $P$  подтерм с типом максимальной глубины. Однако, по лемме в нем неизбежно найдется такой  $S^\sigma$ , что  $h(\sigma) > h(\pi)$ , что противоречит максимальной  $h(\pi)$ .
2. Если  $h(\tau) = 2$ , то  $\tau$  имеет вид либо  $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ , либо  $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ . По лемме найдется такой  $S^\sigma$ , что  $\sigma = \tau \rightarrow \rho$  или  $\sigma = \rho \rightarrow \tau$ . В любом из случаев не найдется такого  $\rho$ , что  $\nu = \sigma$ , то есть  $S \neq a$  и  $S \neq b$ , что невозможно по предыдущему пункту.
3.  $h(\tau) = 0$  или  $h(\tau) = 1$ . Тогда очевидно, что  $\tau \equiv \alpha$  или  $\tau \equiv \alpha \rightarrow \alpha$  соответственно.

Теперь рассмотрим терм  $S^{\alpha \rightarrow \alpha}$ . Рассмотрим, какие выражения могут иметь такой тип. Можно показать, что это будет либо:

1.  $f$
2.  $aT^{\alpha \rightarrow \alpha}$  или  $bT^{\alpha \rightarrow \alpha}$
3.  $\lambda y. S_1(\dots S_k Z \dots)$ , где  $S_i$  — это либо  $f$ , либо  $af$  или  $bf$ , а  $Z$  либо совпадает с  $y$ , либо является некоторой другой переменной из объемлющей лямбда-абстракции.

Пусть  $S$  — подтерм  $N$  типа  $\alpha \rightarrow \alpha$ . Покажем по индукции по структуре  $S$ , что  $S[a := \bar{m}, b := \bar{n}] =_\beta f^{\overline{E(m,n)}}$ , либо  $\lambda y. f^{\overline{E(m,n)}} z$  (для некоторых  $m, n \in \mathbb{N}_0$ ).

Разберем случаи:

1.  $S \equiv f$  — тогда  $E(m, n) = 1$  и  $S \equiv f^1$ .
2.  $S \equiv aT$  (случай  $bT$  рассматривается аналогично) — тогда:

Пусть  $T \equiv f^{\overline{E(m,n)}}$ , тогда

$$a[a := \bar{m}]T \equiv (\lambda f x. f^m x)(\lambda x. f^{E(m,n)} x)$$

По лемме это выражение бета-эквивалентно такому:

$$\lambda x. (f^{E(m,n)})^m x \equiv \lambda x. f_1^E(m, n) x$$

Аналогично, если  $T \equiv \lambda y. f^{\overline{E(a,b)}} z$ , то  $a[a := \bar{m}]T \equiv (\lambda f x. f^{\bar{m}} x) \lambda y. f^{\overline{E(m,n)}} z =_\beta \lambda y. f^{\overline{E(m,n)}} z$

□

## 7 Основные задачи

Можно задаться вопросом: что мы можем получить с этой теории? Традиционно рассматривают следующие три задачи:

1. Задача проверки типов — проверить, выполнено ли  $\Gamma \vdash M : \sigma$  для данных  $\Gamma$ ,  $M$  и  $\sigma$ .
2. Задача восстановления (синтеза) типов (типизируемости) — проверить, возможно ли для данного лямбда-выражения  $M$  найти такие  $\Gamma$  и  $\sigma$ , что  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .
3. Задача населенности типа — проверить, найдется ли для данного типа  $\sigma$  контекст  $\Gamma$  и терм  $M$ , такой, что  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .

Для просто типизируемого лямбда-исчисления существует алгоритмическое решение для всех трех задач. Мы, впрочем, внимательно рассмотрим только задачу синтеза типов.

## 8 Изоморфизм Карри-Ховарда

### 8.1 Варианты просто типизированного исчисления

Конструкция	Связка	Операции
Упорядоченная пара	$\alpha \& \beta$	$\pi_1 : \alpha \& \beta \rightarrow \alpha$ $\pi_2 : \alpha \& \beta \rightarrow \beta$ $\langle \alpha, \beta \rangle : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
Алгебраический тип	$\alpha \vee \beta$	$in_1 : \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ $in_2 : \beta \rightarrow \alpha \vee \beta$ $case : (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma$

## 9 Исчисление 1-го порядка

Более радикальный путь усиления теории — рассмотрение исчислений 1-го и высших порядков. Подробно на теориях 1-го порядка мы останавливаться не будем, единственное, отметим, что такая теория будет требовать определение выражений двух сортов: предметных и логических. Аналогом с точки зрения изоморфизма Карри-Ховарда для логических значений будут типы, а предметными выражениями могут быть любые выражения над не-типовыми значениями: например, над строками, целыми числами и т.п.

## 10 Линейные типы

Все системы типов, которые мы ранее рассматривали, были так или иначе основаны на интуиционистской логике. В данном разделе мы немного отступим в сторону и приведем пример системы типов, основанной на логике, существенно отличающейся от интуиционистской.

Линейная логика была предложена Жираром в ... Основная ее мотивация - попытка в логических выражениях учесть стоимость тех или иных утверждений. В самом деле, традиционная интерпретация интуиционистской логики предполагает, что если некоторое утверждение  $A$  доказано, то это утверждение может быть использовано в дальнейшем рассуждении сколько угодно раз без дополнительных затрат. Однако, это не совсем верно, например, относительно изоморфизма Карри-Ховарда: копировать массив размера  $10^6$  дорого. Более того, некоторые значения (входной поток) в принципе скопированы быть не могут. Линейная логика позволяет придать этой идее более точный смысл.

Рассмотрим выражение  $A \multimap B$  (связка  $\multimap$  читается как *lollipop* — леденец): будем говорить, что из  $A$  можно получить  $B$ , если материальный объект  $A$  можно превратить в материальный объект  $B$ . Например, утверждение, что по 31 рублю можно получить в кассе метрополитена один жетон на проезд можно записать как  $31 \text{ рубль} \multimap \text{жетон}$ . В рамках этой аналогии утверждение  $31 \text{ рубль} \multimap \text{жетон}, 31 \text{ рубль} \vdash 31 \text{ рубль} \otimes \text{жетон}$  не может быть доказано: ведь превратив 31 рубль в жетон, мы не сможем больше этими 31 рублями пользоваться.

Например, мы можем показать, что  $\langle!(A \& B)\rangle \vdash !A \otimes !B$  и  $\langle!A \otimes !B\rangle \vdash !(A \& B)$ . Поясним первое выражение: если у нас есть источник одноразовых автоматов, умеющих выдать  $A$  или  $B$  по нашему выбору, то это то же самое, что иметь два специализированных автомата, выдающих неограниченное количество  $A$  (первый автомат) и  $B$  (второй автомат).

Можно рассматривать еще одну связку  $!(A \wp B) = !A \oplus !B$ , но для простоты мы ее опустим.

Помимо связок, имеющих прямые аналогии в интуиционистской логике, мы введем новую связку, называемой экспонентой или «точно».

Линейная логика в некотором смысле эквивалентна интуиционистской:

**Теорема 10.1.** Каково бы ни было выражение  $X$  в интуиционистской логике, найдется выражение  $X^\circ$  в линейной.

В прямую сторону доказательство тривиально — если стереть все  $!$ , превратить  $\otimes$  и  $\&$  в  $\cap$ , а  $\oplus$  и  $\wp$  — в  $\vee$ , то мы получим аксиомы интуиционистской логики. Обратное утверждение можно показать с помощью *стандартного* вложения интуиционистской логики в линейную:

Интуиционистская связка	Аналог в линейной логике
$A \rightarrow B$	$!A \multimap B$
$A \cap B$	$A \& B$
$A \vee B$	$!(A \oplus B)$

Особую важность в линейной логике играют структурные правила: правило ослабления и правило сжатия:

Правило ослабления позволяет уничтожать значения:

$$\overline{\vdash A \rightarrow B}$$

Если мы впрямую построим по такой системе типовую систему для лямбда-исчисления, мы не добьемся нашей цели: ведь мы всегда можем превратить значение из линейного типа в интуиционистский и наоборот. Для этой цели мы запретим превращения