# 講義ノート第 4 回

## 1　静電場

### 1.10　ベクトル場の回転との Stokes の定理

#### 1.10.1　線積分

例を通じて**線積分**を学ぶ.

**例 1**

物体が力 F を受けて直線上を l 動いたとき, 力 F がした仕事は $F \times l$

**例 2**

力 $\mathbf{F}$ がした仕事は, 変位を表すベクトルを $\mathbf{l}$, なす角を $\theta$ とすると, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{l} = Fl\cos\theta$

**例 3**

物体が力 $\mathbf{F}$ を受けて, 経路上を, 移動するとき,

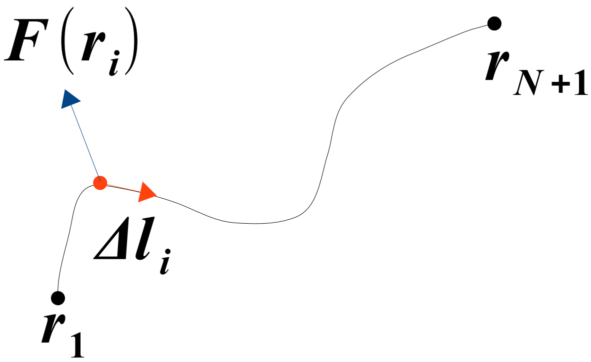


図 1

まず経路を N 区間に分割する. 分割点それぞれの位置が $\mathbf{r}_i$, 経路の始点と終点の位置が $\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_{N+1}$ であるとすると,

分割が十分細かければ, 物体は各区間では,$\mathbf{r}_i$ から $\mathbf{r}_{i+1}$ に向かうベクトル $\mathbf{\Delta l}_i$ の方向に運動し, 力が一定と見なせる. したがって各区間で力 $\mathbf{F}$ が物体にした仕事は,$\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{\Delta l}_i$ となる. これを全区間にわたって足し合わせて, 分割を十分細かくする $(N \to \infty)$ と, 変位ベクトルの長さ $|\mathbf{\Delta l}_i|$ は 0 に近づき,F がした仕事について以下の式が得られる.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \lim_{|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{l}_i|\to 0, N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i)\cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{l}_i \tag{1}$$

ここで C とは向きがある経路（**有向経路**）である．

簡単な場合について考える．
C 上で常に,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}\mathbf{l}_i // \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \\ \text{力の大きさ } |\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)| \text{ が i によらず一定} \end{cases} \tag{2}$$

が成り立つ場合,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = F \times (\text{有向経路 C の長さ}) \times (\pm 1) \tag{3}$$

ただし,±1 は運動の向きによる．

### 1.10.2　ベクトル場の回転

ベクトル場 **A** の渦巻き具合を定式化する．まず閉じた有向経路 (**有向ループ**) について, **渦**を以下のように定義する．

**有向ループ C についてのベクトル場 A の渦 (vortex)**

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \tag{4}$$

空間の 1 点での渦を定式化したい．
 そのために単位面積あたりの渦について考えてから, 有向ループを小さくしていく．

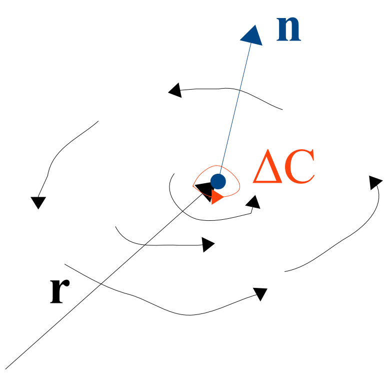


図 2

微小有向ループがある平面上にあるとすると, 平面に対する法線ベクトル **n** をとることができる．
ただし **n** と垂直な平面内の微小有向ループ $\Delta C$ に沿って右ねじを巻いたとき, ねじが $+\mathbf{n}$ 方向に進み,**n** は単位ベクトルとする．単位面積あたりの渦は, 渦を微小有向ループの囲む面積で割ると得られる．

$$\frac{\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{(\Delta C \text{ の囲む面積})} \tag{5}$$

微小ループを小さくした極限を, ベクトル場 **A** の, 位置 **r** における**回転 (rotation)** といい,rot**A** と表す．これは大きさが式 (5) で表せ, 方向が微小有向ループのある平面の法線と等しいベクトルである．

ベクトル場 $\mathbf{A}$ の位置 $\mathbf{r}$ における回転の $\mathbf{n}$ 方向成分

$$(\mathrm{rot}\mathbf{A})_{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta C \to 0} \frac{\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl}}{(\Delta C \text{ の囲む面積})} \tag{6}$$

ベクトル場の**回転**には以下の式が成り立つ.

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{7}$$

**証明**

回転の z 成分 $(\mathrm{rot}\mathbf{A})_z$ のみ導出する.

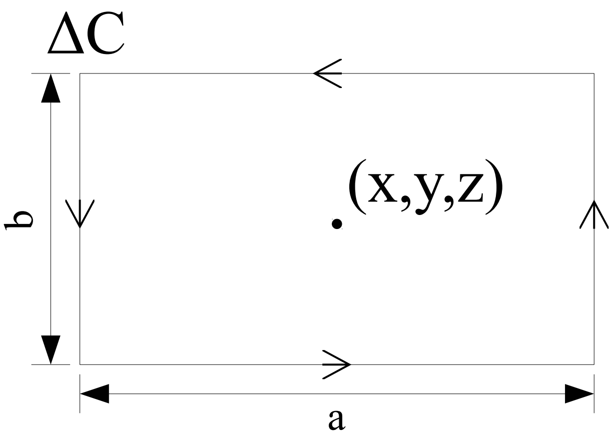


図 3

**有向ループに垂直な単位ベクトル n:z 軸方向**

**$\Delta C$:xy 平面内の微小ループ**

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = a(A_x(x, y - \frac{b}{2}, z) - A_x(x, y + \frac{b}{2}, z)) \tag{8}$$

$$+ b(A_y(x + \frac{a}{2}, y, z) - A_y(x - \frac{a}{2}, y, z)) \tag{9}$$

1.7 節の証明で用いたのと同様の近似によって,

$$A_x(x, y - \frac{b}{2}, z) = A_x(x, y, z) - \frac{b}{2}\frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{10}$$

$$A_x(x, y + \frac{b}{2}, z) = A_x(x, y, z) + \frac{b}{2}\frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{11}$$

差をとって

$$A_x(x, y - \frac{b}{2}, z) - A_x(x, y + \frac{b}{2}, z) = -b\frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{12}$$

同様に

$$A_y(x+\frac{a}{2},y,z)-A_y(x-\frac{a}{2},y,z)=a\frac{\partial A_y}{\partial y} \tag{13}$$

したがって $a,b\to 0$ においては

$$\int_C \mathbf{A}\cdot\mathbf{dl}\to ab\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{14}$$

よって

$$(\mathrm{rot}\mathbf{A})_z=\lim_{a,b\to 0}\frac{1}{ab}\int_C \mathbf{A}\cdot\mathbf{dl}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{15}$$

$(\mathrm{rot}\mathbf{A})_x$ , $(\mathrm{rot}\mathbf{A})_y$ も同様に導かれる.

(証明終)

**例**

$\mathbf{A}=(-ky,kx,0)$,$k>0$ つまり, 平面一様に渦がある場合.[*1]

$$\mathrm{rot}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(kx)\\ \frac{\partial}{\partial z}(-ky)-\frac{\partial}{\partial x}(0)\\ \frac{\partial}{\partial x}(kx)-\frac{\partial}{\partial y}(-ky)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2k\end{pmatrix} \tag{16}$$

ベクトル場の回転は線形性を有する.

$$\begin{cases}\mathrm{rot}(\alpha\mathbf{A})=\alpha\mathrm{rot}\mathbf{A}\\ \mathrm{rot}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathrm{rot}\mathbf{A}+\mathrm{rot}\mathbf{B}\end{cases} \tag{17}$$

### 1.10.3 Stokes の定理

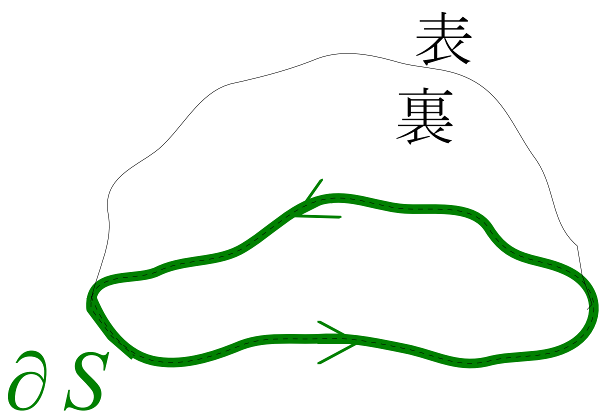


図 4

表裏つき曲面 S について $\partial S$ を S の境界として定まる有向ループとする.[*2]
$\partial S$ の方向は, それに沿って右ねじを巻くと S を裏から表に貫くように定める. すると以下の定理が成り立つ.

[*1] 渦の様子を描いてみると良いでしょう.
[*2] 分かり難くて申し訳ありませんが, この図の場合はヘルメットのような曲面を想定しています.

Stokes の定理

$$\int_{\partial S} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \tag{18}$$

$$\text{ふちに沿った線積分} = \text{回転の面積分} \tag{19}$$

**証明**

曲面を曲面上の曲線によって 2 つに分割すると, 曲面の境界として定まる有向ループも 2 つになる.2 つの有向

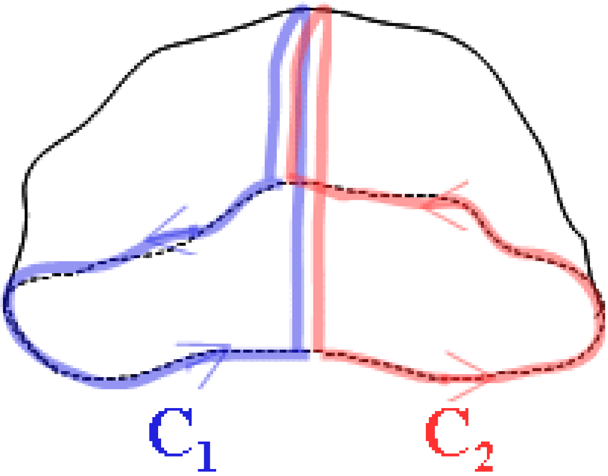


図 5

ループは共通部分をもつが, その方向は逆となっているのでその部分の線積分は打ち消しあい, 分割前の線積分と等しくなる.

したがって分割を繰り返しても有向ループに沿ったベクトル場の線積分は不変であるので,

$$\int_{\partial S} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_{C_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} + \int_{C_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \tag{20}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{C_i} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \tag{21}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (C_i\text{ の囲む面積}) \frac{1}{(C_i\text{ の囲む面積})} \int_{C_i} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \tag{22}$$

ここで

$$(\mathrm{rot}\mathbf{A})_{n_i} = \frac{1}{(C_i\text{ の囲む面積})} \int_{C_i} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \tag{23}$$

である. また,$C_i$ の囲む面積を $\Delta S_i$ とすると, $N \to \infty$ において次々に

$$\int_{\partial S} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \to \sum_i \Delta S_i (\mathrm{rot}\mathbf{A})_{n_i} \tag{24}$$

$$\to \int_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \tag{25}$$

(証明終)

**例**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -ky \\ \\ kx \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{rot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ 2k \end{pmatrix} \tag{26}$$

であるとき,

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = kr \times 2\pi r = 2\pi k r^2 \tag{27}$$

$$\int_{S} \mathrm{rot}\mathbf{A} \cdot \mathbf{dS} = 2k \times \pi r^2 = 2\pi k r^2 \tag{28}$$

#### 1.10.4 まとめ

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS}(\text{湧き出し}) \xrightarrow{\text{単位体積あたり, 極限}} \mathrm{div}\mathbf{A}(\text{発散}) : \text{スカラー} : \text{Gauss の定理} \tag{29}$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl}(\text{渦}) \xrightarrow{\text{単位面積あたり, 極限}} \mathrm{rot}\mathbf{A}(\text{回転}) : \text{ベクトル} : \text{Stokes の定理} \tag{30}$$