講義ノート第 8 回

2　定常電流と静磁場

2.2　Biot-Savart の法則

ベクトル積（外積）

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{とすると} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

性質 1

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

とくに,$\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ ならば,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = -k(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

性質 2

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= a_x(a_y b_z - a_z b_y) \\ &\quad + a_y(a_z b_x - a_x b_z) \\ &\quad + a_z(a_x b_y - a_y b_x) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

同様に $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ となり,$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ とも $\mathbf{b}$ とも直交することがわかる.

性質 3

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とすると,

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす平行四辺形の面積となっている.

さて, 定常電流があると静磁場が生じるが, それを定式化したい. 以下, 簡単のため定常電流を線電流として議論をする.
微小区間の線電流が離れた微小な場所に生じさせる磁場について考える.
dl は微小であるから, 位置 **r** と **dl** の距離は一定であるとみなしてよい.
大きさ

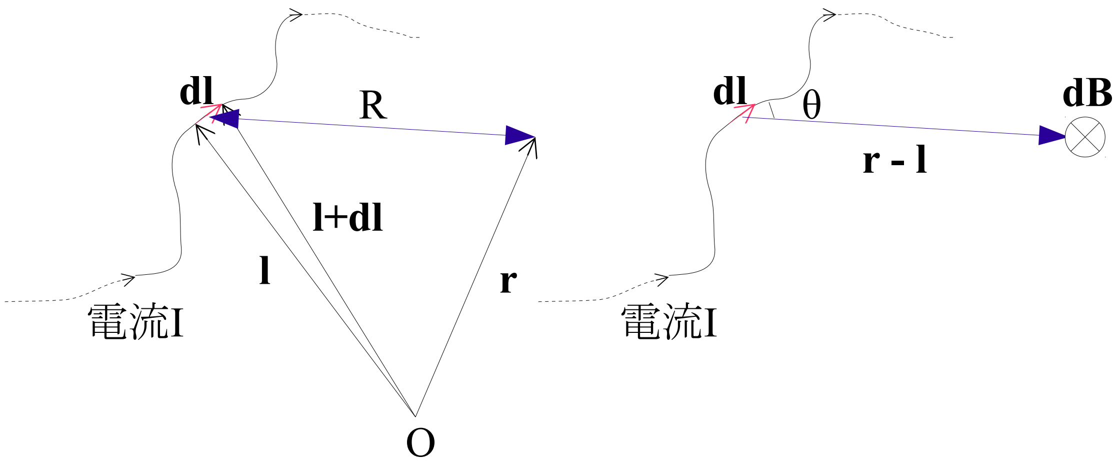

図 1

$$|\mathbf{dB}| = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\frac{|\mathbf{dl}\sin\theta|}{R^2} = \left|\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\frac{\mathbf{dl}\times(\mathbf{r}-\mathbf{l})}{|\mathbf{r}-\mathbf{l}|^3}\right|$$

向き

$$\otimes$$

大きさと向きの両方を含む式は,

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\frac{\mathbf{dl}\times(\mathbf{r}-\mathbf{l})}{|\mathbf{r}-\mathbf{l}|^3}$$

これを線電流にそって線積分したものが, 位置 **r** における線電流によって生じる磁場である.

Biot-Savart の法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\int_C \frac{\mathbf{dl}\times(\mathbf{r}-\mathbf{l})}{|\mathbf{r}-\mathbf{l}|^3} \tag{1}$$

$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}[\mathrm{NA}^{-2}]$: 真空の透磁率
B 磁束密度 $[\mathrm{T}] = [\mathrm{NA}^{-1}\mathrm{m}^{-1}] = [\mathrm{Wbm}^{-2}] = [\mathrm{JA}^{-1}\mathrm{m}^{-2}] = [10^4\mathrm{gauss}]$

例 1: 直線電流

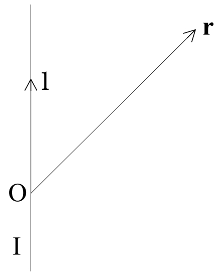

図 2

$$\mathbf{dl} = (0, 0, dl)$$
$$\mathbf{r} - \mathbf{l} = (x, y, z - l)$$

$$\mathbf{dl} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dl \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ydl \\ xdl \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{dl} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l})}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|^3} \\ &= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - l)^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -ydl \\ xdl \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで $l = z + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \tan\theta$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(x^2 + y^2 + (z - l)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^2 + y^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

となるから,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

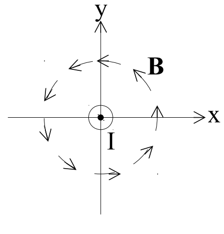

図 3

例 2: 円電流

中心軸上の位置 $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ での $\mathbf{B}$ を求める.

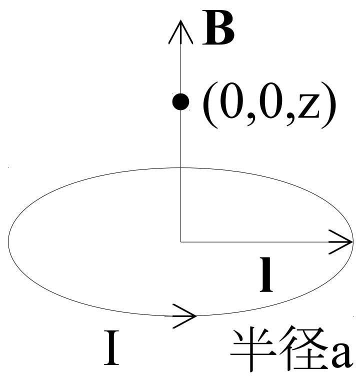

図 4

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)\\ \mathbf{dl} &= (-a\sin\theta d\theta, a\cos\theta d\theta, 0)\\ \mathbf{r}-\mathbf{l} &= (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z)\end{aligned}$$

$$\mathbf{dl}\times(\mathbf{r}-\mathbf{l}) = \begin{pmatrix} -a\sin\theta d\theta \\ a\cos\theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} za\cos\theta d\theta \\ za\sin\theta d\theta \\ a^2 d\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} za\cos\theta d\theta \\ za\sin\theta d\theta \\ a^2 d\theta \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 \mathrm{I} a^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

例 3 : ソレノイド

半径 a, 単位長さあたりの巻き数 n のソレノイドについて, 中心軸上の磁束密度の大きさ B を求める．すると

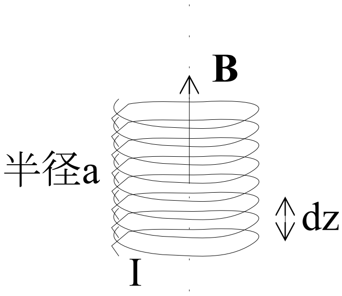

図 5

例 2 の結果の z 成分について,I を Indz に置き換えて $-\infty$ から ∞ まで積分すればよいので,

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 a^2 \mathrm{I} n dz}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$z = a \tan\theta$ とおくと,

$$B = \frac{\mu_0 \mathrm{I} n}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \mu_0 \mathrm{I} n$$

さて,2.1 節で定義した電流密度を用いて,Biot-Savart の法則を書き換える．電流密度 $\mathbf{i} = \mathbf{i}(\mathbf{r})$ が与えられているとき, 位置 $\mathbf{r}'$ まわりについて, 電流と電流密度の関係は微小体積 $d\mathbf{r}'$[*1] を用いて以下のように書き直せる．

$$\mathbf{Idl} = \mathbf{i}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$$

すると式 (1) の電流密度を用いた表記が得られる．

Biot-Savart の法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' \tag{2}$$

[*1] 記号として紛らわしいが, これはスカラー量なので注意されたい．