講義ノート第 10 回

2　定常電流と静磁場

2.5　Ampère の法則

Ampère の法則 (微分形)

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \tag{1}$$

Ampère の法則の積分形を導出したい.

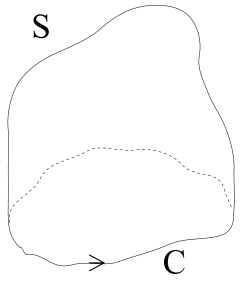

図 1

C 上に沿って右ねじを巻いたときに進む方向に裏 → 表を定める.(面積の正負を定める.) 有向ループをふちにもつ任意の曲面 S にわたる式 (1) の面積分を考える.

$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{rot}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dS} = \mu_0 \int_S &= \mu_0(\text{S を貫く全電流}) \\ &= \mu_0(\text{C を貫く全電流})\end{aligned}$$

また Stokes の定理より,

$$\int_S \mathrm{rot}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dS} = \int_C \mathbf{B}\cdot\mathbf{dl}$$

注

$$\int_{S_1} \mathbf{i}\cdot\mathbf{dS} = \int_{S_2} \mathbf{i}\cdot\mathbf{dS}$$
$$\int_{S_1} \mathbf{i}\cdot\mathbf{dS} - \int_{S_2} \mathbf{i}\cdot\mathbf{dS} = \int_V \mathrm{div}\mathbf{i}dV = 0$$

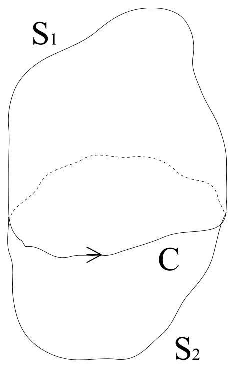

図 2

Ampère の法則 (積分形)

$$\int_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0(\mathrm{C}\text{ を貫く全電流}) \tag{2}$$

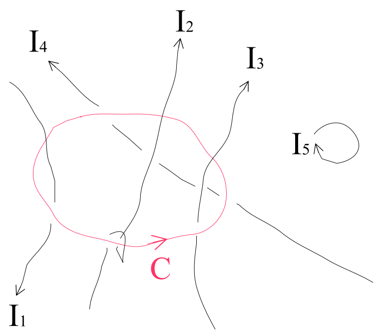

図 3

例

図 3 では,

$$\mu_0(\mathrm{C}\text{ を貫く全電流}) = \mu_0(-\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3)$$

例 1: 円電流

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \mathrm{I}$$
$$B = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi r}$$

例 2: ソレノイド

$$C' : lB_1' - lB_2' = \mu_0 \cdot 0$$
$$B_1' = B_2' = B'$$

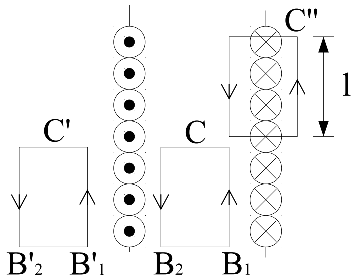

図 4

したがってソレノイドの外部で磁束密度は一様である.
同様に

$$\begin{aligned} C : lB_1 - lB_2 &= \mu_0 \cdot 0 \\ B_1 = B_2 &= B \end{aligned}$$

したがってソレノイドの内部でも磁束密度は一様である.

$$C'' : lB' - lB = -\mu_0 ln\mathrm{I}$$

$B = \mu_0 n\mathrm{I}$ であることは以前導いたから,$B' = 0$ となる. つまりソレノイドの外部では磁束密度は $\mathbf{0}$ である.

2.6　ループ電流と等価磁気双極子層

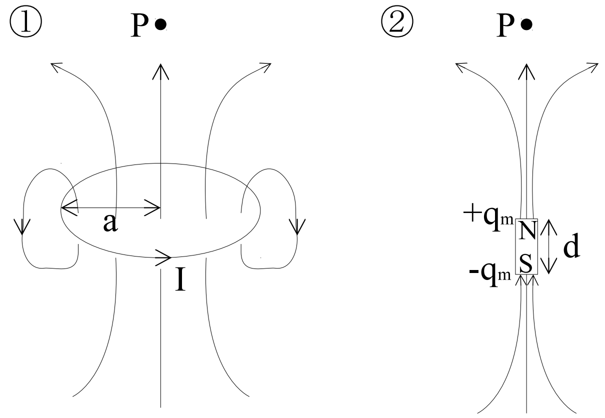

図 5

仮想的磁荷 $\pm q_m[Wb] = [JA^{-1}]$ を考えることで, 円電流によって生じる磁場と類似した Coulomb 的磁場をつくることができる. その磁束密度の大きさは $|\mathbf{B}| = \frac{q_m}{4\pi r^2}$
実はこの 2 つの磁場は,$a \to 0, I \to \infty, q_m \to \infty, d \to 0$ の極限で一致する. またこのとき,$\mu_0 \pi a^2 \mathrm{I}$ と $q_m d$ は同じ極限値 m をとる.
図の点 P で $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ とすると,

①
$a \to 0, I \to \infty$ の極限で

$$B_z = \frac{\mu_0 \mathrm{I} a^2}{2(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \to \frac{m}{2\pi z^3}$$

②

$$B_z = \frac{q_m}{4\pi}\left(\frac{1}{(z-\frac{d}{2})^2} - \frac{1}{(z+\frac{d}{2})^2}\right)$$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$ とすると

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{q_m}{4\pi}\left(f(z-\frac{d}{2}) - f(z+\frac{d}{2})\right) \\ &= -\frac{q_m d}{4\pi}\left(\frac{f(z+\frac{d}{2}) - f(z-\frac{d}{2})}{d}\right) \end{aligned}$$

$q_m \to \infty, d \to 0$ の極限で

$$B_z \to -\frac{md}{4\pi} f'(z) = \frac{m}{2\pi z^3}$$

確かに一致する.
一般に, ループ C に沿う電流による $\mathbf{B}$ は,C を境界にもつ磁気双極子の層をなす $\mathbf{B}$ と等しい. これを, 等価磁気双極子層という.

2.7 Lorentz 力

Lorentz 力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{3}$$

両辺に速度 $\mathbf{v}$ を掛けると

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{0})$$

つまり $\mathbf{B}$ は仕事をしないことが分かる.

電流素片に働く力
電流素片がもつ電荷 $dq = \rho S|\mathbf{dl}|$

$$\begin{aligned} \mathbf{dF} &= dq\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \rho S|\mathbf{dl}|\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \rho S|\mathbf{v}|\mathbf{dl} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

ここで $S|\mathbf{v}|\mathbf{dl}$ の単位に注目すると,

$$Cm^{-3} \cdot m^2 \cdot ms^{-1} = A$$

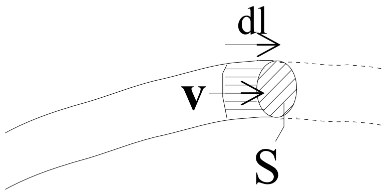

図 6

したがって $S|\mathbf{v}|\mathbf{dl}$ は電流 I を表す.

$$\mathbf{dF} = \mathrm{I}\mathbf{dl} \times \mathbf{B}$$

電流, 磁場,Lorentz 力の方向の関係は, 必要とあらば左手で確認できる.(Fleming の左手の法則) さて今ここで電流の単位アンペアを定義する.
そのために, 平行に並んだ電線を同じ方向に流れる電流を考える.
線電流 I_1 が距離 d 離れた場所に作り出す磁場は,$B_1 = \frac{\mu_0 \mathrm{I}_1}{2\pi d}$ である. そしてその磁場によって I_2 の長さ Δl の部分が受ける Lorentz 力の大きさは,$F = \mathrm{I}_2 \Delta l B_1 = \Delta l \frac{\mu_0 \mathrm{I}_1 \mathrm{I}_2}{2\pi d}$ である.
この状態で $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2, d = 1\mathrm{m}$ としたときに電線 1m あたりに及ぼしあう Lorentz 力が $2 \times 10^{-7}\mathrm{N}$ となるときの電流の値を 1A と定義する.
するとそこから $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\mathrm{NA}^{-2}$ が定まることになる.

例: 一様な磁場中の荷電粒子の運動
運動方程式は

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

だから,

$$\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= qv_y B \\ m\frac{dv_y}{dt} &= -qv_x B \\ m\frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

したがって $v_z = 一定$ であり,x,y 成分については, サイクロトロン振動数 $\omega = \frac{qB}{m}$ とすることにより,

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\omega^2 v_y \end{aligned}$$