

電磁気学：講義ノート

目次

1	静電場	2
1.1	電荷	2
1.2	Coulomb の法則	2
1.3	電場	4
1.4	面積分	6
1.5	Gauss の法則 (積分形)	7
1.6	Gauss の法則の応用	9
1.7	ベクトル場の発散	10
1.8	体積積分	12
1.9	Gauss の定理と Gauss の法則の微分形	12
1.10	ベクトル場の回転との Stokes の定理	15
1.11	静電ポテンシャル	21
1.12	静電ポテンシャル	28
1.13	静電エネルギー	28
1.14	導体	31
2	定常電流と静磁場	34
2.1	電荷保存と連続の式	34
2.2	Biot-Savart の法則	36
2.3	磁束密度の発散	41
2.4	ベクトルポテンシャル	42
2.5	Ampère の法則	44
2.6	Ampère の法則	46
2.7	ループ電流と等価磁気双極子層	48
2.8	Lorentz 力	49
3	電磁誘導	51
3.1	Faraday の電磁誘導の法則	51
3.2	自己誘導, 相互誘導	53
3.3	自己誘導, 相互誘導	57
3.4	変位電流と Ampère-Maxwell の法則	57
3.5	Maxwell 方程式	59
3.6	電磁波	60

第 1 回

1 静電場

1.1 電荷

電荷は、観測者の座標系によらず保存する。物体のもつ電荷の大きさはある量の整数倍であることが知られており、それを**電気素量**といい、記号 e で表す。電気素量の値は $1.602 \times 10^{-19} \text{C}$ であることが 1909 年に R. Millikan らによって計測された。電気素量は電子の電荷の絶対値と陽子の電荷に等しい。以降我々が静電場を議論する上では、**点電荷**、すなわち数学的な一点に有限の電荷が集中しているモデル、が有効である。

1.2 Coulomb の法則

互いに静止している 2 つの点電荷の間に働く力 (**Coulomb 力**) を考える。
力の大きさ F は以下の式で表される。

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

Coulomb 力は**作用・反作用の法則**を満たすので、互いの点電荷に働く力の大きさは等しく、向きは反対方向である。力の向きは q_1 と q_2 を通る直線上になる。この力が引力か斥力か、は $q_1 q_2$ の符号によって決まる。すなわち、

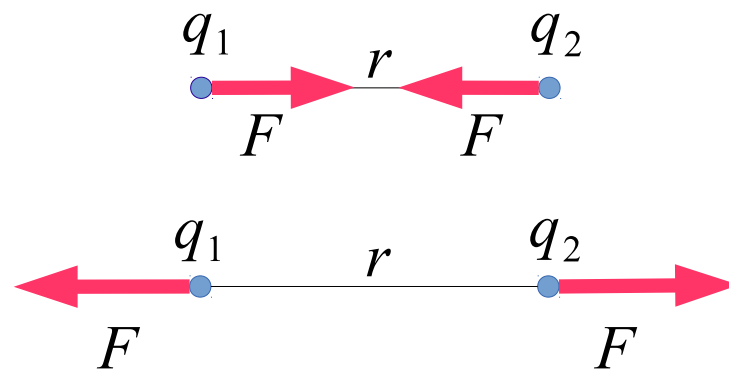


図 1

$$\begin{cases} q_1 q_2 < 0 \text{ のとき引力} \\ q_1 q_2 > 0 \text{ のとき斥力} \end{cases} \quad (2)$$

となる。

さて、ここで万有引力と Coulomb 力の比はどのくらいになるのか計算する。

例として、二つの陽子が距離 r だけ離れて静止している状況を考える。

$$\frac{\text{Coulomb 力}}{\text{万有引力}} = \frac{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}}{G \frac{m^2}{r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{G m^2} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 [\text{Nm}^2 \text{C}^{-2}] \\ \text{陽子の電荷 (電気素量)} 1.6 \times 10^{-19} [\text{C}] \\ \text{陽子の質量} 1.7 \times 10^{-27} [\text{kg}] \\ \text{万有引力定数} 6.7 \times 10^{-11} [\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}] \end{cases} \quad (4)$$

(4) の値を用いて計算をすると, 結果は

$$\frac{\text{Coulomb 力}}{\text{万有引力}} \simeq 10^{36} \quad (5)$$

となり, Coulomb 力の大きさ (あるいは万有引力の小ささ) が分かる.*1

ここまで直線上に静止した点電荷について考えてきたが, 今度は空間に自由に配置された点電荷について考えるために, Coulomb 力のベクトルによる表記を学ぶ.

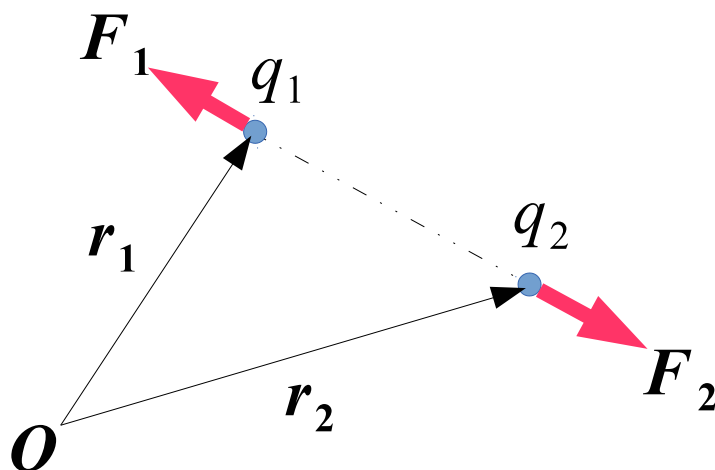


図 2

点電荷 q_2 から q_1 に働く力 \mathbf{F}_1 をつくる, Coulomb 力の大きさは式 (1) で表されるので, これに向きの情報を付加するために, 直線方向の単位ベクトルを作ればよい. 点電荷 q_2 から q_1 に向かうベクトルは $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ である. 点電荷間の距離は, $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ である.

したがって単位ベクトルは $\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$ とわかる. 式 (1) で r を $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ に書き直せば,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (6)$$

いま, $|q_1 q_2|$ の絶対値を外したが, それによって力の方向は (2) を満たすようになる. (6) が, 点電荷 q_2 から q_1 に働く Coulomb 力のベクトル表記である. 逆に, 点電荷 q_1 から q_2 に働く力 \mathbf{F}_2 は, 式 (6) で r_1 と r_2 を入れかえて,

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (7)$$

さて, 式 (6) と式 (7) の和をとると,

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \quad (8)$$

これは Coulomb 力に作用・反作用の法則が成り立つことを示している.

Coulomb 力には重ね合わせの原理が成り立つ. 静電場における重ね合わせの原理とはすなわち, 複数の点電荷が配置されている空間において, ある点電荷が他の点電荷集団から受ける力は, その点電荷と個々の点電荷との間に働く力 (二体力) の和に等しい.

*1 これは陽子の例ですが, 他の粒子について計算してみても Coulomb 力の大きさが分かるでしょう.

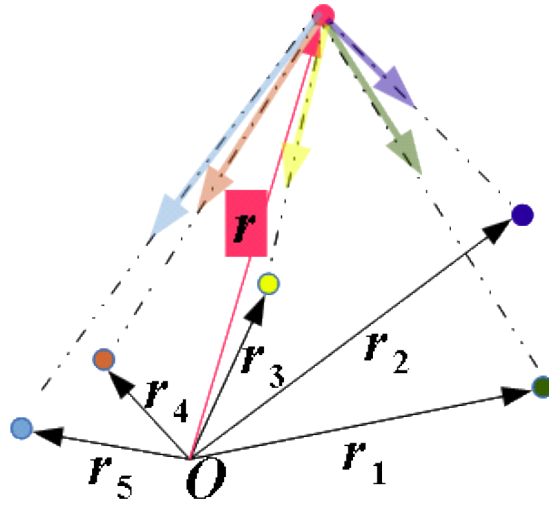


図 3

位置 \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) に電荷 q_i の点電荷が配置, 固定されている空間を考える.

位置 \mathbf{r} に電荷 q の点電荷を配置するとき, 点電荷 q_i から受ける力 \mathbf{F}_i は, 式 (6), (7) と同様に考え,

$$\mathbf{F}_i = \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (9)$$

点電荷 q が電荷集団から受ける力は, 重ね合わせの原理から,

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = q \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (10)$$

1.3 電場

式 (10) で, 電荷集団は固定されていて動かない (静的) であるから, 新たに

$$\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (11)$$

として, 電気素量の電荷をもつ点電荷を, 空間の位置 \mathbf{r} に配置したとき, その電荷にはたらく Coulomb 力を表す $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を導入する. これを, 位置 \mathbf{r} における**電場**と呼ぶ. これによって式 (10) は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (12)$$

電荷は位置 \mathbf{r} によらないから, 式 (12) を見ると Coulomb 力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ に重ね合わせの原理が成り立つということは, 電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ にも重ね合わせの原理が成り立つことがわかる.

最後に, 電場の性質について述べる. 電場は電荷を空間の任意の位置に配置した時, それが空間の各位置でどのような力を受けるかを表す. 力はベクトルであるから, 式 (12) から位置 \mathbf{r} における電場もベクトルである. 電荷は任意の位置に配置できるから, 空間のあらゆる位置に電場のベクトルが存在することになり, 空間がベクトルで埋め尽くされているということになる. このような性質から, 電場は**ベクトル場**^{*2}である. 1.2 節までは Coulomb 力を, 離れた電荷間を時間を介さずに伝わる力であると考えても良かった. このような考え方を**遠隔作用**という. しかし電場を導入したいま, Coulomb 力はあらかじめ空間に存在する電場を介して伝わるという考え方ができるようになった. このような考え方を**近接作用**という. 結論としては, Coulomb 力は近接作用の力である.^{*3} 電場の視覚表現は**電気力線**によってなされる. 電気力線は, **向きづけられた曲線群で, 各点における接線が電場の向きと一致する**, という性質をも

^{*2} 対応する言葉に**スカラー場**があり, これは空間の各点にスカラー値を対応させた場である. 温度分布や液体の濃度分布などが好例.

^{*3} このことは講義が進むにつれて明らかになるでしょう.

つ. 図 4 は正電荷をもつひとつの点電荷から生じる電気力線である. この電場と, 絶対値が等しい負電荷をもつひとつの点電荷によって生じる電場が重ね合わさってできる電場の式 (電気力線の形はよく知られているが) がどうなるかは, 演習問題 1 を参考にされたい.

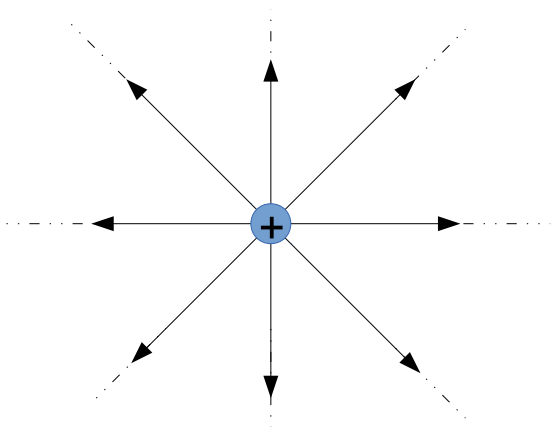


図 4

第 2 回

1.4 面積分

面積分の考え方に慣れる為に, 以下の例を考える.

例 1

単位時間あたりの窓に垂直に入り込む風量を求めたい. 単位時間単位面積あたりの風の流れを $A[\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ とする

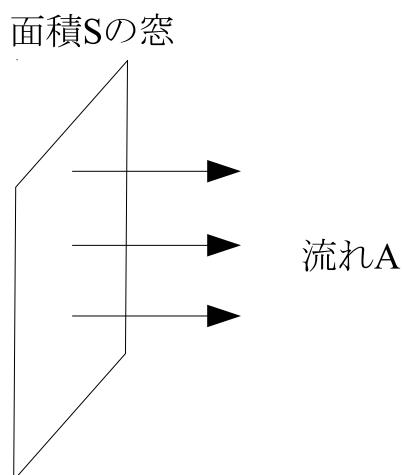


図 1

と, 求める量は $AS[\text{kgs}^{-1}]$ である.

例 2

次に窓が風の流れに垂直ではない場合を考える. 風の流れをベクトル \mathbf{A} で表す. ここで面積を表すベクトル \mathbf{S} (面ベ

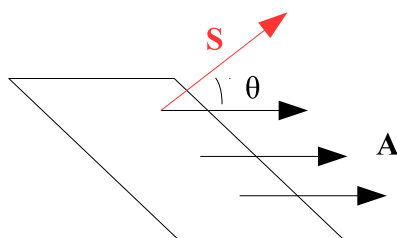


図 2

クトル) を, 向きが平面に垂直で, 大きさが平面の面積に等しくなるようにとる. 面ベクトル \mathbf{S} と流れのベクトル \mathbf{A} のなす角を θ とすると, 単位時間に窓を垂直に通過する風量は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = AS \cos \theta \quad (1)$$

このスカラー量をフラックス^{*4}(flux) という.

例 3

さて例 1,2 の話を一般化したい. そのために \mathbf{A} は物理量の流れを表すベクトル量とする.

任意の曲面で, 位置ごとに流れが異なる曲面を考える. 曲面を面積微小面 $\Delta \mathbf{S}_i (i=1,2,3\dots)$ に分割するとそれぞれの微小面での流れの方向は一定と考えることができ, 微小部分でのフラックスは式 (1) のように表すことができる. 曲面

^{*4} 流束ともいいます.

全体にわたって微小部分のフラックスの和をとると

$$\sum_i \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i \quad (2)$$

ここで $\Delta \mathbf{S}_i$ を 0 に近づけ極限をとると,

$$\lim_{\Delta \mathbf{S}_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

式 (3) の右辺を, ベクトル場 \mathbf{A} の S についての**面積分**という.

注 1: S の各点で \mathbf{A} が法線方向 (ただしその方向が, 閉曲面の外から内か, 内から外か, は閉曲面全体に渡って揃っているとする.) を向いており, 大きさ $|\mathbf{A}|=A$ が一定のとき.

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S |\mathbf{A}| |d\mathbf{S}| \cos \theta = A \times \cos \theta \times (\text{閉曲面 } S \text{ の面積}) \quad (4)$$

$$\begin{cases} \text{ベクトル場 } \mathbf{A} \text{ が閉曲面の内から外を向くとき } \theta = 0 \\ \text{ベクトル場 } \mathbf{A} \text{ が閉曲面の外から内を向くとき } \theta = \pi \end{cases} \quad (5)$$

注 2: 面積分の結果は $[\mathbf{A} \text{ の単位}] \times [\text{面積の単位}]$ の次元をもつ.

1.5 Gauss の法則 (積分形)

内と外が定まった閉曲面を S , 電場を \mathbf{E} , S 内の電荷を Q , 真空の誘電率を ε_0 とすると, 以下の **Gauss の法則**が成り立つ.

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (6)$$

左辺を S を貫く**電束** (electrical flux) という.

式 (6) から, Gauss の法則の意味は, **任意の閉曲面内の全電荷は, その閉曲面を貫く電束に等しい**, ということだと分かる.

以下, **Coulomb の法則**と静電場の**重ね合わせの原理**によって Gauss の法則を導出する.

Step1: 1つの点電荷 q を中心とする半径 R の球面 S の場合

半径 R の球の表面積は $4\pi R^2$ であり, 点電荷が距離 R 離れた位置に作り出す電場の大きさは, 第 1 回でやったように, $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ であり, この場合は式 (4) が適用できるので, 電気力線が球面を内側から外側に貫くことに注意すると

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \times E \times 4\pi R^2 = 4\pi\varepsilon_0 R^2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = q \quad (7)$$

となり, Gauss の法則 (6) が成り立つ.

Step2: 任意の閉曲面 S の内側に 1 つの点電荷がある場合

まず補助定理から述べる. 図 3 の状況で以下の式が成立する.

$$\varepsilon_0 \int_{\Delta S_1} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int_{\Delta S_2} \mathbf{E} d\mathbf{S} \quad (8)$$

つまり微小面 ΔS_1 と微小面 ΔS_2 を貫く電気力線の本数が等しいということである.

証明

(煩いので, 両辺の ε_0 は省略する.)

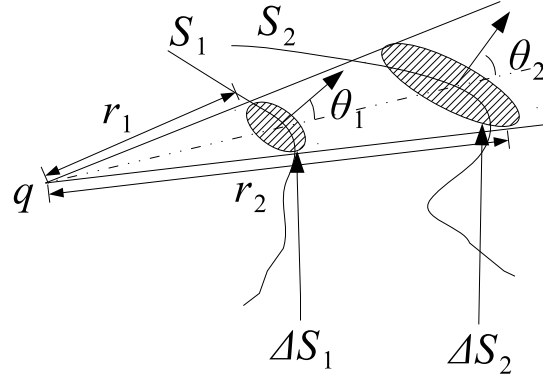


図 3

面ベクトル $\Delta \mathbf{S}_1$ と $\Delta \mathbf{S}_2$ と, それぞれの位置での電場のなす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると, それぞれの面を貫く電束は,

$$\int_{\Delta S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \Delta S_1 \cos \theta_1 \quad (9)$$

$$\int_{\Delta S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \Delta S_2 \cos \theta_2 \quad (10)$$

ここで面ベクトルがそれぞれの位置における電場と垂直になるように面 ΔS_1 と面 ΔS_2 をそれぞれ θ_1, θ_2 傾けると, その面積は $\Delta S_1 \cos \theta_1, \Delta S_2 \cos \theta_2$ となる. 傾けた二つの面は互いに平行となるから, 傾けた面それぞれを底面, 点電荷 q のある点を頂点とする二つの錐体は相似な立体となる. したがって明らかに,

$$\Delta S_1 \cos \theta_1 : \Delta S_2 \cos \theta_2 = r_1^2 : r_2^2 \Leftrightarrow \frac{\Delta S_1 \cos \theta_1}{r_1^2} = \frac{\Delta S_2 \cos \theta_2}{r_2^2} \quad (11)$$

これを式 (9) あるいは式 (10) に代入すると, ただちに,

$$\int_{\Delta S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (12)$$

(証明終)

さて S_1, S_2 は任意の閉曲面であるから, S_1 を球面としても問題ない. すると式 (7), (8) より,

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \int_{\text{球面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (13)$$

したがって任意の閉曲面に対しても Gauss の法則 (6) が成り立つ.

注: 閉曲面 S の外側に点電荷 q がある場合は, 式 (8) の簡単な応用であり,

$$\epsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (14)$$

Step3: 任意の静電場の場合

空間の位置 \mathbf{r}_i に点電荷 q_i が固定されているとする. ($i=1,2,3,\dots$) 点電荷 q_i が位置 \mathbf{r} につくる電場は,

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (15)$$

電場には重ね合わせの原理が成り立つので,

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i \quad (16)$$

式 (13),(16) より,

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int_S (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots) \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \int_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} + \dots = \sum_i q_i = Q \quad (17)$$

したがって, 任意の静電場に Gauss の法則 (6) が成り立つ.

1.6 Gauss の法則の応用

半径 r の球面 S の中心に点電荷 q が存在する場合

点電荷から出る全ての電気力線は, 点電荷を中心とする球面と直交するので, 式 (4),(6) から

$$\varepsilon_0 \times 4\pi r^2 \times E_r = q \Leftrightarrow E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (18)$$

これで, Gauss の法則から Coulomb の法則を導くことができた.

半径 r の球内一様に電荷が分布している場合

$0 \leq r \leq a$ の場合

$$\varepsilon_0 \times 4\pi r^2 \times E_r = Q \left(\frac{r}{a} \right)^3 \Leftrightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r \quad (19)$$

$a \leq r$ の場合

$$\varepsilon_0 \times 4\pi r^2 \times E_r = Q \Leftrightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (20)$$

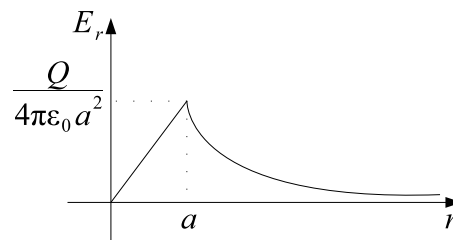


図 4

第3回

1.7 ベクトル場の発散

3次元空間閉領域 V の表面 ∂V におけるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ のフラックスの総量 Φ は,1.4節でやった通り,

$$\Phi = \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1)$$

V の内部から外部へ向かうベクトル場 \mathbf{A} の寄与を一般に正とする.

V の表面 ∂V から発散するフラックスの総量を湧き出しという.

閉領域 V の体積を同じく V とすると, V における単位体積あたりの平均の湧き出しは

$$\frac{\Phi}{V} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

閉領域 V をどんどん小さくしていくと, 体積 V は 0 に近づき, 閉領域は内部の 1 点 \mathbf{r} で代表できるようになる. この極限をベクトル場 \mathbf{A} の点 \mathbf{r} における**発散** (divergence) といい, $\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ と表す.

—— 発散 (divergence) ——

$$\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

発散は線形性を有する. すなわち点 \mathbf{r} における任意のベクトル場 \mathbf{A}, \mathbf{B} について, c を定数として以下が成り立つ.

$$\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div}\mathbf{A} + \text{div}\mathbf{B} \quad (4)$$

$$\text{div}(c\mathbf{A}) = c \text{div}\mathbf{A} \quad (5)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(x, y, z) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$ と表すとき, 以下の式が成り立つ.*5

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (6)$$

*5 ここでは扱わなかったが, 微分演算子 $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ を用いると, $\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$ と表記が簡単になる.

証明

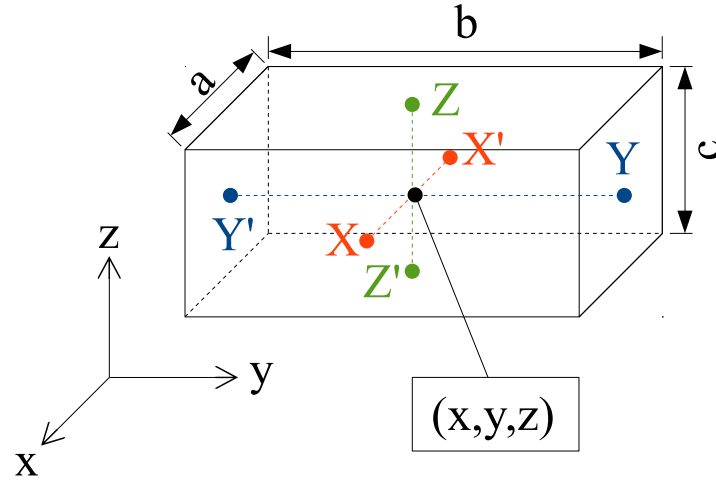


図 1

点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を中心とする閉領域 V を考える.

発散を考えるとき $V \rightarrow 0$ の極限を考えるので, V は勝手な形にしても問題ない, ここでは全ての面が xy, yz, zx 平面のいずれかに平行な直方体とする.

微小な直方体であるから, 6 面それぞれのフラックスは, それぞれの面の中心の点におけるベクトル場の面に垂直な成分と面積の積となる.

各面に図 1 のように記号をふる. 各面のフラックスは, V の内部から外部に向かう \mathbf{A} の寄与を正とする事と, 座標軸の取り方に注意すると,

$$\begin{cases} X : A_x(x + \frac{a}{2}, y, z)bc \\ X' : -A_x(x - \frac{a}{2}, y, z)bc \\ Y : A_y(x, y + \frac{b}{2}, z)ac \\ Y' : -A_y(x, y - \frac{b}{2}, z)ac \\ Z : A_z(x, y, z + \frac{c}{2})ab \\ Z' : -A_z(x, y, z - \frac{c}{2})ab \end{cases} \quad (7)$$

したがって点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ における発散は, V を微小にしていき,

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \frac{1}{abc} \{ A_x(x + \frac{a}{2}, y, z)bc - A_x(x - \frac{a}{2}, y, z)bc \quad (8)$$

$$+ A_y(x, y + \frac{b}{2}, z)ac - A_y(x, y - \frac{b}{2}, z)ac \quad (9)$$

$$+ A_z(x, y, z + \frac{c}{2})ab - A_z(x, y, z - \frac{c}{2})ab \} \quad (10)$$

はじめの 2 項だけに着目する. (y, z は変化しないので $A_x(x + \frac{a}{2})bc - A_x(x - \frac{a}{2})bc$ として, x の関数とみる.)

$A_x(x + \frac{a}{2}), A_x(x - \frac{a}{2})$ の x まわりの Taylor 展開は,

$$A_x(x + \frac{a}{2}) = A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x}(x + \frac{a}{2} - x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}(x + \frac{a}{2} - x)^2 + \dots \quad (11)$$

$$A_x(x - \frac{a}{2}) = A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x}(x - \frac{a}{2} - x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}(x - \frac{a}{2} - x)^2 + \dots \quad (12)$$

それぞれの式の第 3 項以降には, いま $a \rightarrow 0$ で考えているため, 「微小量の 2 乗以上」が現れる. これを無視すると, (一次近似)

$$A_x(x + \frac{a}{2}) = A_x(x) + \frac{a}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \quad (13)$$

$$A_x(x - \frac{a}{2}) = A_x(x) - \frac{a}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \quad (14)$$

差をとると,

$$bc \left\{ A_x \left(x + \frac{a}{2} \right) - A_x \left(x - \frac{a}{2} \right) \right\} \quad (15)$$

$$= bc \left\{ A_x(x) + \frac{a}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} - A_x(x) + \frac{a}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right\} \quad (16)$$

$$= abc \frac{\partial A_x}{\partial x} \quad (17)$$

A_y, A_z の項についても同様に考えると, $abc \frac{\partial A_y}{\partial y}, abc \frac{\partial A_z}{\partial z}$ となる. したがって,

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow \frac{1}{abc} \left(abc \frac{\partial A_x}{\partial x} + abc \frac{\partial A_y}{\partial y} + abc \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \quad (18)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (19)$$

(証明終)

1.8 体積積分

$\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ をスカラー場とする.

領域 V に対し, スカラー場 φ の体積積分を定義したい.

V を微小領域 V_1, V_2, \dots に分割していき, それぞれの領域を代表するスカラー場の値を領域内の点 \mathbf{r}_i での値とする. スカラー場 $\varphi(\mathbf{r}_i)$ と微小領域 V_i の積を領域 V にわたって足し合わせ, $V_i \rightarrow 0$ とする. この極限をスカラー場 φ の体積積分と定義する.

——— 体積積分 ———

$$\int_V \varphi(\mathbf{r}) dV = \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i \varphi(\mathbf{r}_i) V_i \quad (20)$$

例

V 内で $\varphi = c$ (一定) のとき,

$$\int_V \varphi dV = \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i c V_i = cV \quad (21)$$

1.9 Gauss の定理と, Gauss の法則の微分形

——— Gauss の定理 ———

$$\int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV \quad (22)$$

$$\text{面積分} \quad \text{体積積分} \quad (23)$$

証明

任意の閉領域 V を V_1 と V_2 に分割するとき, 新たに生じた面を通過するベクトル場は, V_1 と V_2 に対して, 大きさは

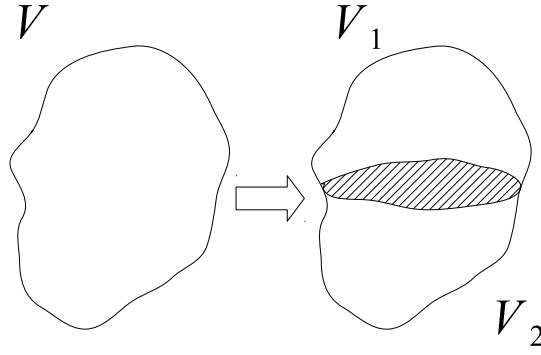


図 2

同じだが, 方向が

V_1 にとって内 \rightarrow 外 のとき, V_2 にとって, 外 \rightarrow 内

V_1 にとって外 \rightarrow 内 のとき, V_2 にとって, 内 \rightarrow 外

となり, 方向が逆となるから, 新たに生じる面からの, フラックスへの寄与は 0 となる. したがって,

$$\int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial V_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\partial V_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (24)$$

分割を繰り返すと,

$$\int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \int_{\partial V_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{\partial V_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (25)$$

V_i を微小とすると次々と

$$\int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i V_i \frac{1}{V_i} \int_{\partial V_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (26)$$

$$\rightarrow \sum_i V_i \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \quad (27)$$

$$\rightarrow \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV \quad (28)$$

(証明終)

Gauss の法則

$$\epsilon_0 \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = (\text{V 内の全電荷}) = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV [C] \quad (29)$$

$\rho(\mathbf{r})$: 電荷密度 (スカラー場) [Cm^{-3}]

Gauss の定理から,

$$\epsilon_0 \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (30)$$

$$\int_V (\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} dV - \rho) dV = 0 \quad (31)$$

領域 V は任意であるから,

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} dV - \rho = 0 \quad (32)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (33)$$

これは Maxwell 方程式のひとつでもある。

例 半径 a の球一様に分布した電荷

1.6 節でやったように,

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} & (r > a) \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \mathbf{r} & (r \leq a) \end{cases} \quad (34)$$

$$(r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad (35)$$

$r > a$ のとき

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right\} \quad (36)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - 3 \cdot \frac{x}{r^4} \cdot \frac{2x}{2r} + \frac{1}{r^3} - 3 \cdot \frac{y}{r^4} \cdot \frac{2y}{2r} + \frac{1}{r^3} - 3 \cdot \frac{z}{r^4} \cdot \frac{2z}{2r} \right) \quad (37)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) \quad (38)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right) = 0 \quad (39)$$

$r \leq a$ のとき

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \quad (40)$$

$$= \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{\left(\frac{4\pi a^3}{3}\right)} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (41)$$

第 4 回

1.10 ベクトル場の回転との Stokes の定理

1.10.1 線積分

例を通じて線積分を学ぶ.

例 1

物体が力 \mathbf{F} を受けて直線上を l 動いたとき, 力 \mathbf{F} がした仕事は $F \times l$

例 2

力 \mathbf{F} がした仕事は, 変位を表すベクトルを \mathbf{l} , なす角を θ とすると, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{l} = Fl \cos \theta$

例 3

物体が力 \mathbf{F} を受けて, 経路上を, 移動するとき,

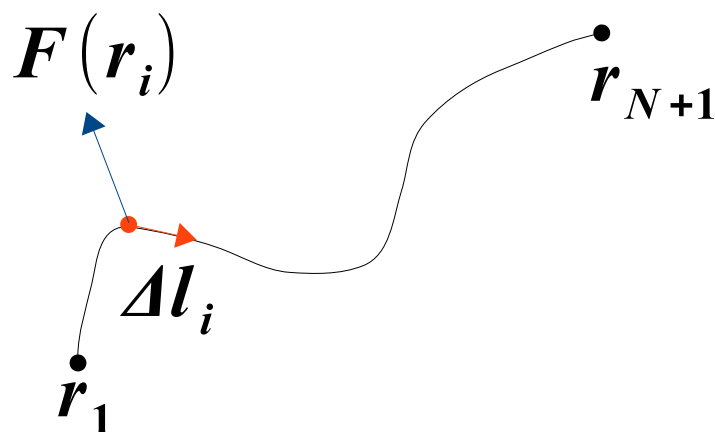


図 1

まず経路を N 区間に分割する. 分割点それぞれの位置が \mathbf{r}_i , 経路の始点と終点の位置が $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{N+1}$ であるとする, 分割が十分細かければ, 物体は各区間では, \mathbf{r}_i から \mathbf{r}_{i+1} に向かうベクトル $\Delta \mathbf{l}_i$ の方向に運動し, 力が一定と見なせる. したがって各区間で力 \mathbf{F} が物体にした仕事は, $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{l}_i$ となる. これを全区間にわたって足し合わせて, 分割を十分細かくする ($N \rightarrow \infty$) と, 変位ベクトルの長さ $|\Delta \mathbf{l}_i|$ は 0 に近づき, \mathbf{F} がした仕事について以下の式が得られる.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{|\Delta \mathbf{l}_i| \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{l}_i \quad (1)$$

ここで C とは向きがある経路 (有向経路) である.

簡単な場合について考える.

C 上で常に,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{l}_i // \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \\ \text{力の大きさ } |\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)| \text{ が } i \text{ によらず一定} \end{cases} \quad (2)$$

が成り立つ場合,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F \times (\text{有向経路 } C \text{ の長さ}) \times (\pm 1) \quad (3)$$

ただし, ± 1 は運動の向きによる.

1.10.2 ベクトル場の回転

ベクトル場 \mathbf{A} の渦巻き具合を定式化する．まず閉じた有向経路 (有向ループ) について, 渦を以下のように定義する．

有向ループ C についてのベクトル場 \mathbf{A} の渦 (vortex)

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (4)$$

空間の 1 点での渦を定式化したい．

そのために単位面積あたりの渦について考えてから, 有向ループを小さくしていく．

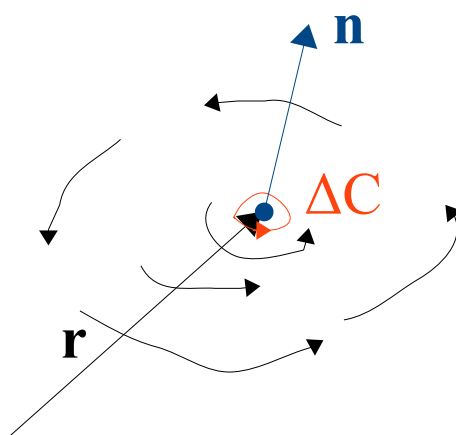


図 2

微小有向ループがある平面上にあるとすると, 平面に対する法線ベクトル \mathbf{n} をとることができる．

ただし \mathbf{n} と垂直な平面内の微小有向ループ ΔC に沿って右ねじを巻いたとき, ねじが $+\mathbf{n}$ 方向に進み, \mathbf{n} は単位ベクトルとする．単位面積あたりの渦は, 渦を微小有向ループの囲む面積で割ると得られる．

$$\frac{\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{(\Delta C \text{ の囲む面積})} \quad (5)$$

微小ループを小さくした極限を, ベクトル場 \mathbf{A} の, 位置 \mathbf{r} における回転 (rotation) といい, $\text{rot} \mathbf{A}$ と表す．これは大きさが式 (5) で表せ, 方向が微小有向ループのある平面の法線と等しいベクトルである．

ベクトル場 \mathbf{A} の位置 \mathbf{r} における回転の \mathbf{n} 方向成分

$$(\text{rot} \mathbf{A})_{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \frac{\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{(\Delta C \text{ の囲む面積})} \quad (6)$$

ベクトル場の回転には以下の式が成り立つ．

$$\text{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

証明

回転の z 成分 $(\text{rot} \mathbf{A})_z$ のみ導出する．

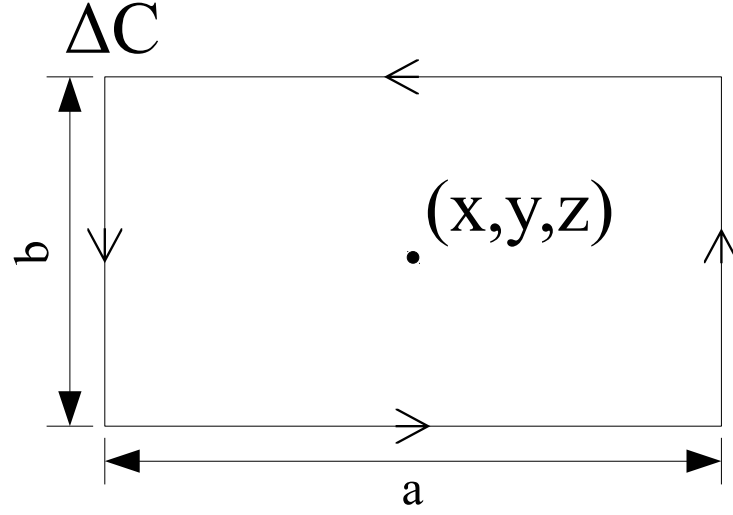


図 3

有向ループに垂直な単位ベクトル \mathbf{n} : z 軸方向
 ΔC : xy 平面内の微小ループ

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = a \left(A_x \left(x, y - \frac{b}{2}, z \right) - A_x \left(x, y + \frac{b}{2}, z \right) \right) \quad (8)$$

$$+ b \left(A_y \left(x + \frac{a}{2}, y, z \right) - A_y \left(x - \frac{a}{2}, y, z \right) \right) \quad (9)$$

1.7 節の証明で用いたのと同様の近似によって,

$$A_x \left(x, y - \frac{b}{2}, z \right) = A_x(x, y, z) - \frac{b}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (10)$$

$$A_x \left(x, y + \frac{b}{2}, z \right) = A_x(x, y, z) + \frac{b}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (11)$$

差をとって

$$A_x \left(x, y - \frac{b}{2}, z \right) - A_x \left(x, y + \frac{b}{2}, z \right) = -b \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (12)$$

同様に

$$A_y \left(x + \frac{a}{2}, y, z \right) - A_y \left(x - \frac{a}{2}, y, z \right) = a \frac{\partial A_y}{\partial x} \quad (13)$$

したがって $a, b \rightarrow 0$ においては

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow ab \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (14)$$

よって

$$(\text{rot} \mathbf{A})_z = \lim_{a, b \rightarrow 0} \frac{1}{ab} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (15)$$

$(\text{rot} \mathbf{A})_x$, $(\text{rot} \mathbf{A})_y$ も同様に導かれる.

(証明終)

例

$\mathbf{A} = (-ky, kx, 0), k > 0$ つまり, 平面一様に渦がある場合.*6

$$\text{rot}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(kx) \\ \frac{\partial}{\partial z}(-ky) - \frac{\partial}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial}{\partial x}(kx) - \frac{\partial}{\partial y}(-ky) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix} \quad (16)$$

ベクトル場の回転は線形性を有する.

$$\begin{cases} \text{rot}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\text{rot}\mathbf{A} \\ \text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot}\mathbf{A} + \text{rot}\mathbf{B} \end{cases} \quad (17)$$

1.10.3 Stokes の定理

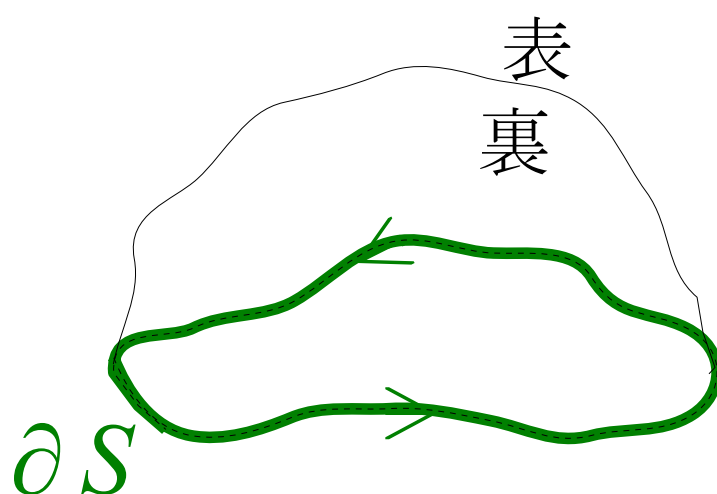


図 4

表裏つき曲面 S について ∂S を S の境界として定まる有向ループとする.*7

∂S の方向は, それに沿って右ねじを巻くと S を裏から表に貫くように定める. すると以下の定理が成り立つ.

— Stokes の定理 —

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (18)$$

$$\text{ふちに沿った線積分} = \text{回転の面積分} \quad (19)$$

証明

曲面を曲面上の曲線によって 2 つに分割すると, 曲面の境界として定まる有向ループも 2 つになる. 2 つの有向ループは共通部分をもつが, その方向は逆となっているのでその部分の線積分は打ち消しあい, 分割前の線積分と等しくなる.

*6 渦の様子を描いてみると良いでしょう.

*7 分かり難くて申し訳ありませんが, この図の場合はヘルメットのような曲面を想定しています.

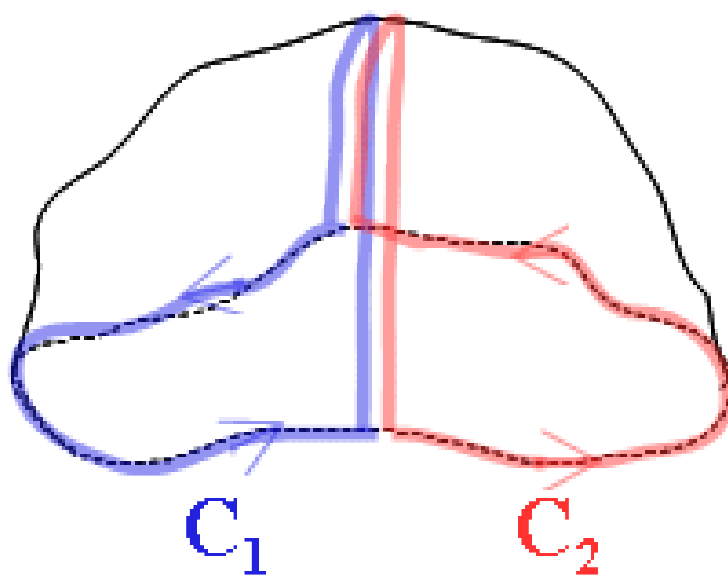


図 5

したがって分割を繰り返しても有向ループに沿ったベクトル場の線積分は不変であるので,

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (20)$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (21)$$

$$= \sum_{i=1}^N (C_i \text{ の囲む面積}) \frac{1}{(C_i \text{ の囲む面積})} \int_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (22)$$

ここで

$$(\text{rot} \mathbf{A})_{n_i} = \frac{1}{(C_i \text{ の囲む面積})} \int_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (23)$$

である. また, C_i の囲む面積を ΔS_i とすると, $N \rightarrow \infty$ において次々に

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \sum_i \Delta S_i (\text{rot} \mathbf{A})_{n_i} \quad (24)$$

$$\rightarrow \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (25)$$

(証明終)

例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -ky \\ kx \\ 0 \end{pmatrix}, \text{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix} \quad (26)$$

であるとき,

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = kr \times 2\pi r = 2\pi kr^2 \quad (27)$$

$$\int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 2k \times \pi r^2 = 2\pi kr^2 \quad (28)$$

1.10.4 まとめ

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} (\text{湧き出し}) \xrightarrow{\text{単位体積あたり, 極限}} \operatorname{div} \mathbf{A} (\text{発散}) : \text{スカラー} : \text{Gauss の定理} \quad (29)$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} (\text{渦}) \xrightarrow{\text{単位面積あたり, 極限}} \operatorname{rot} \mathbf{A} (\text{回転}) : \text{ベクトル} : \text{Stokes の定理} \quad (30)$$

第 5 回

1.11 静電ポテンシャル

1.11.1 静電場は渦を持つか？

空間の任意の位置に電荷 $q_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ が固定された静電場の式は,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (1)$$

この静電場の回転は, 回転の線形性から, 各電荷による電場の回転の重ね合わせとなる.

$$\text{rot} \mathbf{E} = \sum_i \text{rot} \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \quad (2)$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} = R \text{ とすると,}$$

$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) = \text{rot} \begin{pmatrix} \frac{x - x_i}{R^3} \\ \frac{y - y_i}{R^3} \\ \frac{z - z_i}{R^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z - z_i}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y - y_i}{R^3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x - x_i}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z - z_i}{R^3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y - y_i}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x - x_i}{R^3} \right) \end{pmatrix} \quad (3)$$

z 成分だけ計算する.

$$z \text{ 成分} = (y - y_i) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^3} \right) - (x - x_i) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R^3} \right) \quad (4)$$

$$= -3(y - y_i) \frac{1}{R^4} \frac{\partial R}{\partial x} + 3(x - x_i) \frac{1}{R^4} \frac{\partial R}{\partial y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x - x_i}{R}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y - y_i}{R} \text{ より,}$$

$$z \text{ 成分} = -3(y - y_i) \frac{x - x_i}{R^5} + 3(x - x_i) \frac{y - y_i}{R^5} = 0 \quad (6)$$

他の成分も同様に 0 となる. したがって

—— 静電場の回転 ——

$$\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ (静電場は渦なし)} \quad (7)$$

静電場に渦がないことを直観的に理解するには, 1 つの点電荷に注目すればよいが, これは明らかに渦なしと分かる. (図 1) すると静電場には重ね合わせの原理が成り立つから, 任意の静電場に対して回転が 0 となり, 渦なしであることが分かる.

式 (7) は Maxwell 方程式のひとつを静電場の場合に適応したものとなっている. ただし, 電場が時間に依存する場合にはその式に補正が入る. (後述)

1.11.2 線積分は経路に依存するか？

P_0 から P_1 に向かう異なる経路 C_1, C_2 について, 電場 \mathbf{E} の線積分の差をとる.

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (8)$$

ここで $-\int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot -d\mathbf{l}$ に着目すると, これは P_1 から P_0 に向かう経路 C_2 に沿った電場の線積分となっている. したがって $\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ と方向に注意して経路をつなげると, 図 2 のような有向ループ C に沿った線積分とな

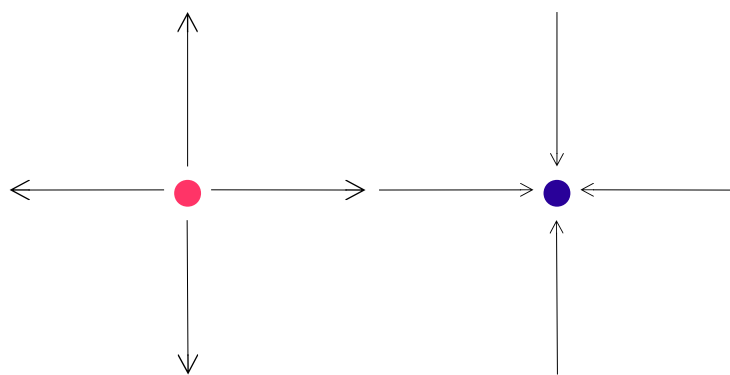


図 1

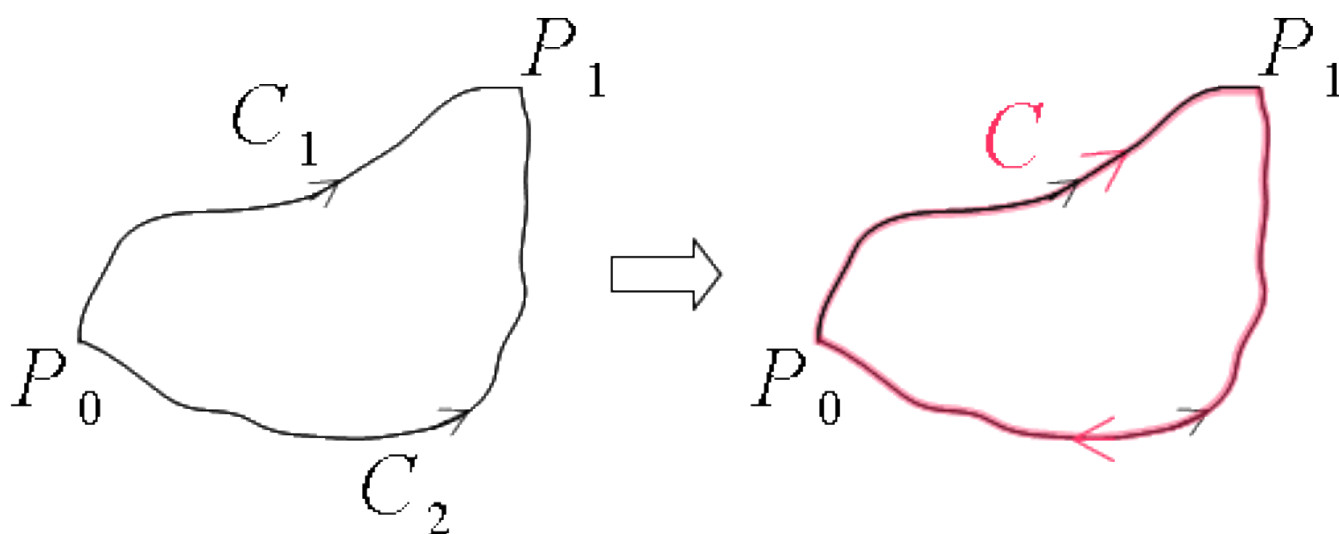


図 2

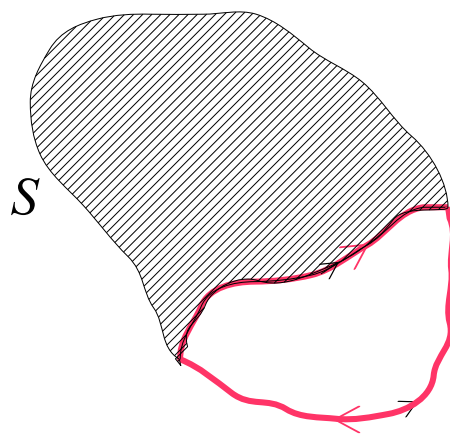


図 3

る. よって

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9)$$

ここで, 有向ループ C をふちにもつ任意の曲面 S をとると, Stokes の定理より,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \text{ (面積分)} \quad (10)$$

もう一度繰り返すが, 静電場は渦なしだから,

$$\int_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (11)$$

よって

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (12)$$

となり, 静電場の線積分は, 端点の位置のみにより, 途中の経路によらないことがわかる.
特に, ループ (閉路) についての線積分はループの形によらず 0 となる.

1.11.3 静電ポテンシャル (電位)

さて, スカラー場 ϕ (静電ポテンシャルあるいは電位と) を以下のように定義する.

静電ポテンシャル (電位)

$$\phi = - \int_{P_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (13)$$

P_0 は $\phi(P_0) = 0$ となるように選ぶ. \mathbf{r} は任意の位置である.

線積分は $P_0 \rightarrow \mathbf{r}$ の経路によらないので, 端点のみで指定する定積分は意味を持つ.

ではどのような意味を持つか.

次元は, $[\phi] = [\mathbf{E}] \times [\text{長さ}] = \frac{N}{C} \cdot m = \frac{J}{C}$

よって電位はエネルギーと結びついていることが分かる.

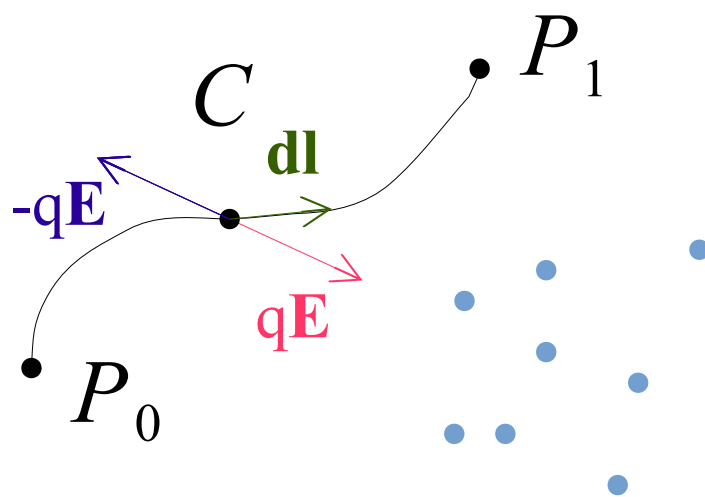


図 4

電場 \mathbf{E} の中を P_0 から P_1 まで, 経路 C に沿って電荷 q を移動するには, 経路の各点で電場による力 $q\mathbf{E}$ を相殺するように $-q\mathbf{E}$ の力をかけて行う.

それに要する仕事は

$$\int_C (-q\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = -q \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q(\phi(P_1) - \phi(P_0)) = q\phi(P_1) \quad (14)$$

例

原点 O に点電荷 q を固定する.

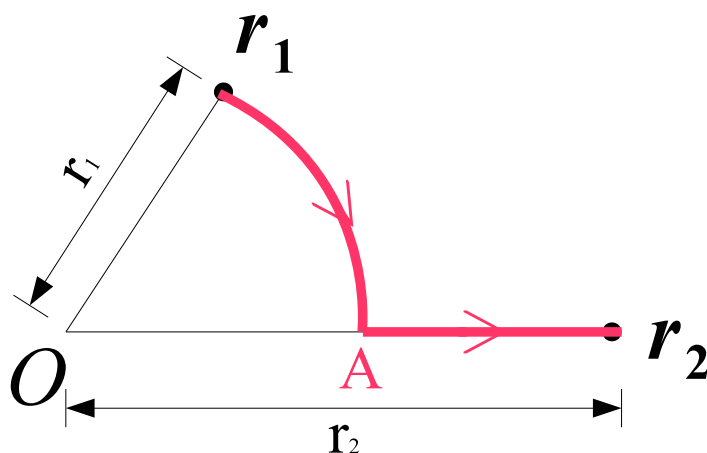


図 5

有向経路に沿った, 電場の線積分は,

$$\int_{\mathbf{r}_1 \rightarrow A \rightarrow \mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}_1 \rightarrow A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{A \rightarrow \mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (15)$$

$\mathbf{r}_1 \rightarrow A$ の区間は \mathbf{E} と $d\mathbf{l}$ が常に直交するから, $\int_{\mathbf{r}_1 \rightarrow A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

$A \rightarrow \mathbf{r}_2$ の区間は明らかで,

$$\int_{A \rightarrow \mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (16)$$

次に, 位置 \mathbf{r}_1 と位置 \mathbf{r}_2 の電位の差を求める. 電位が 0 になる基準の点を P_0 とすると,

$$\phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2) = - \int_{P_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \left(- \int_{P_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (17)$$

$$= \int_{\mathbf{r}_1}^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (18)$$

原点に1個の点電荷 q がある場合

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \\ |\mathbf{r}| = r \\ r_2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (19)$$

とすると, 無限遠 ∞ を基準点とする電位は, $\phi(\infty) = 0$ となるから,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (20)$$

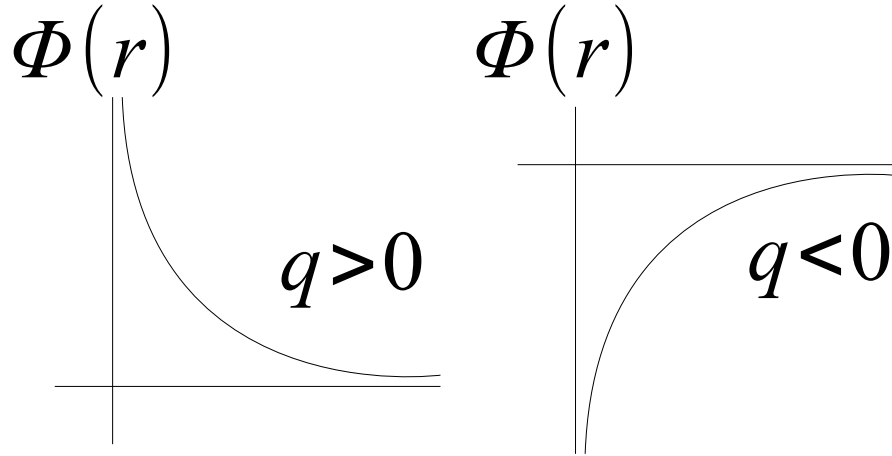


図 6

点電荷集団の場合

(\mathbf{r}_i に q_i を固定)

電場について重ね合わせの原理が成り立つため, 電位についても重ね合わせの原理が成り立ち, $\phi(\infty) = 0$ とすると,

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (21)$$

さて, 電位と電場はどのような関係によって結ばれているか.

そのために位置 \mathbf{r} と, そこからわずかに移動した位置 $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ の電位差を考える.

まず式 (17),(18) から,

$$\phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (22)$$

左辺で, $\delta\mathbf{r}$ は微小変位だから, $\delta\mathbf{r}$ の 2 次以上の補正項を無視すると,

$$\phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - \phi(x, y, z) \simeq \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\delta z \quad (23)$$

右辺で, $\delta\mathbf{r}$ は微小変位だから, 電場を位置 \mathbf{r} で代表させて線積分すると,

$$- \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \simeq -\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{r} = -E_x\delta x - E_y\delta y - E_z\delta z \quad (24)$$

$\delta\mathbf{r}$ が任意の微小変位であるから, 両辺の係数を比較して,

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (25)$$

さて, 任意のスカラー場 V の**勾配 (gradient)** を以下のように定義する.

スカラー場 V の勾配

$$\mathbf{grad} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (26)$$

すると電場と電位の関係は以下のように書ける.

電場と電位の関係

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \phi \quad (27)$$

例

原点に 1 つの点電荷がある場合, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とすると, 電位は, $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ となる.
勾配の x 成分に-を掛けたものは,

$$-(\mathbf{grad} \phi)_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (28)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)_x \quad (29)$$

$$= E_x \quad (30)$$

1.11.4 等電位面

電位が $\phi(x, y, z) = \phi_0$, つまり一定値をとる面を, **等電位面**という.

電位 ϕ となる等電位面は, その勾配 $\mathbf{grad} \phi$ に垂直となる.

また, 勾配の符号を変えたものが電場であるから, 電場も等電位面に垂直になる.

$$\mathbf{grad} \phi \perp \text{等電位面} \quad (31)$$

$$\mathbf{E} \perp \text{等電位面} \quad (32)$$

例*8

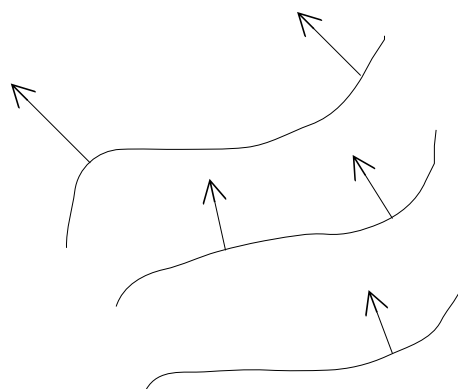


図 7

原点に 1 つの点電荷がある場合, 電位は $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ であるため, 等電位面は, 点電荷を中心とする球面となる. したがって電場は等電位面と垂直となる.

*8 ここからは第 6 回の内容ですが, 切りの都合で続けて書かせて頂きます.

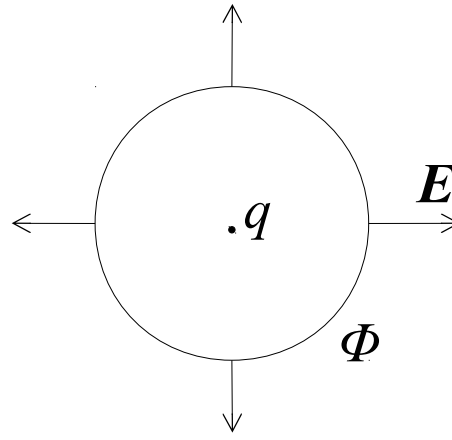


図 8

任意の静電場について,等電位面 $\perp \mathbf{E}$ となることを証明する.

証明

ある等電位面上の位置 \mathbf{r} と, そこからわずかにずれた位置 $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ の間の電位差は,

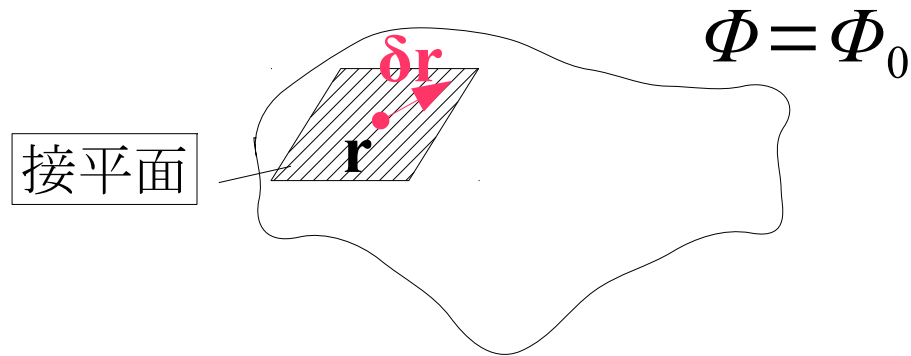


図 9

$$\phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \delta y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \delta z \frac{\partial \phi}{\partial z} + \left(\begin{array}{l} \delta\mathbf{r} \text{ についての} \\ 2 \text{ 次以上の補正} \end{array} \right) \quad (33)$$

$$= \delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad} \phi + \left(\begin{array}{l} \delta\mathbf{r} \text{ についての} \\ 2 \text{ 次以上の補正} \end{array} \right) \quad (34)$$

変位を表すベクトル $\delta\mathbf{r}$ を等電位面に対する接平面内にとると, $\delta\mathbf{r}$ についての 1 次の項は消え,

$$\phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = 0 + \left(\begin{array}{l} \delta\mathbf{r} \text{ についての} \\ 2 \text{ 次以上の補正} \end{array} \right) \quad (35)$$

となる. よって $\delta\mathbf{r}$ が接平面内 (とみなせる) ならば,

$$\delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad} \phi = 0 \Leftrightarrow \delta\mathbf{r} \perp \mathbf{grad} \phi \Leftrightarrow \text{接平面} \perp \mathbf{E} \quad (36)$$

(証明終)

第 6 回

1.12 静電ポテンシャル

ここまで,Coulomb の法則から出発し静電場の性質がいくつか分かった. その一部が

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$$

である.

2つの性質は,Poisson 方程式 によって1つにまとめられる.

2式から電場 \mathbf{E} を消すと,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{grad} \phi)_x + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{grad} \phi)_y + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{grad} \phi)_z \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi \end{aligned}$$

ここで微分演算子 Laplacian を以下のように定義する.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

すると以下の Poisson 方程式が得られる.

Poisson 方程式

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

これは静電場の法則を集約した式であるから, 静電場の問題はこの Poisson 方程式の解を求めることに集約される.

また,Poisson 方程式の重要な性質として, 電荷密度 ρ と境界条件が指定されると解が一意的である, というものがある. 境界条件とは境界における ϕ の値, あるいは $\operatorname{grad} \phi$ の法線成分の値のことである.

例

ある閉曲面があり, その内部は電荷が全く無く空洞であり, 境界で等電位であるとする. 内部空洞の電場 \mathbf{E} を求めたい.

そのためにまず Poisson 方程式から, 空洞における電位 ϕ を求める.

内部ではいたるところ電荷が存在しないから, 電荷密度 ρ は0である. したがって Poisson 方程式は, $\Delta \phi = 0$

ここで境界条件を考えると, 境界では電位は一定値 ϕ_0 をとる. したがって $\phi(\mathbf{e}) = \phi_0$ としてみると, これは Poisson 方程式を満たす.

したがってこれが解であり (解の一意性) 空洞内部から境界まで至るところ等電位であることがわかる.

求める電場は, $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi_0 = 0$ である.

1.13 静電エネルギー

2体間の静電エネルギー U_{12} を無限遠を基準として以下のように定義する.

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

すると n 体の静電エネルギー E は, 全ての電荷が十分離れている状態を基準として以下のように書ける.

$$E = \begin{array}{cccc} U_{12} & +U_{13} & \cdots & +U_{1n} \\ & +U_{23} & \cdots & +U_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & +U_{n-1n} \end{array}$$

$U_{ij} = U_{ji}$ であるから

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^n U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right)$$

ここで, 位置 \mathbf{r} の静電ポテンシャルが

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}$$

であるから式中の

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

は $\phi(\mathbf{r}_i)$ から $i = j$ となる部分を除いたものとなる. したがって

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\phi(\mathbf{r}_i) - \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i|} \right)$$

しかしこのままでは無限大に発散する項が出てしまい,(古典電磁気学では) 物理的な意味を持たない. この項を自己エネルギーという. したがってこの項を無視して落とすという操作をとる.

すると n 体静電エネルギーの最終的な形は

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi(\mathbf{r}_i) \quad (2)$$

さて, 電荷密度 ρ が与えられた場合, 静電エネルギーは体積積分として以下のように書かれる.

$$E = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV$$

Gauss の法則 (微分形) $\rho = \epsilon_0 \text{div} \mathbf{E}$ により電荷密度を電場によって表示すると,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \text{div} \mathbf{E} \phi(\mathbf{r}) dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \phi dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \int \int \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \phi dx dy dz \end{aligned}$$

x, y, z は対称だから, x だけに注目する. x の寄与は

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int \int \left(\int \frac{\partial E_x}{\partial x} \phi dx \right) dy dz = \frac{\epsilon_0}{2} \int \int \left(\left[E_x(x, y, z) \phi(x, y, z) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int E_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right) dy dz$$

$x = \pm\infty$ で $E_x = 0$ と仮定すると,

$$\left[E_x(x, y, z) \phi(x, y, z) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

よって $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -E_x$ と合わせて

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int \int \left(\int \frac{\partial E_x}{\partial x} \phi dx \right) dydz = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \int \left(- \int E_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right) dydz = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \int \int E_x^2 dx dy dz = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_x^2 dV$$

y と z の寄与も同様に書き換えると,

$$E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 dV \quad (3)$$

さて式 (2) をみると, 電荷があると静電エネルギーが生じることがわかるが, さらに重要なのは, 静電エネルギーの別の表示である式 (3) に含まれるのは電荷ではなく電場ということである. つまり**電場はエネルギーをもつ**のである.

式 (3) の $\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2$ を電場のエネルギー密度 [Jm^{-3}] という.

例: コンデンサー

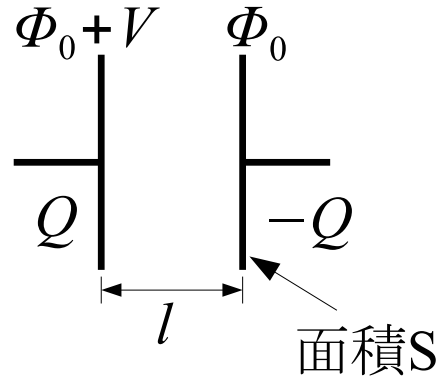


図 1

電気容量 C のコンデンサーについて式 (2),(3)2 通りの方法で静電エネルギー E を求める. コンデンサーを 2 体とみなすと, 式 (2) から

$$\frac{1}{2} Q(\phi_0 + V) + \frac{1}{2} (-Q)\phi_0 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

電場の大きさは $|\mathbf{E}| = \frac{V}{l}$ となるので, 式 (3) から

$$E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{V}{l} \right)^2 Sl = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{l} V^2 = \frac{1}{2} CV^2$$

第 7 回

1.14 導体

内部を電荷が自由に移動できる物質を導体という. 一方, 内部で電荷が自由に移動できない物質を絶縁体という. 以下に導体と絶縁体の例を挙げる.

導体

金属, 黒鉛, イオン溶液

抵抗率: $10^{-8} \sim 10^{-6} \Omega m$

絶縁体

ゴム, ガラス, 大部分のプラスチック, 木, 空気

抵抗率: $10^{10} \Omega m$

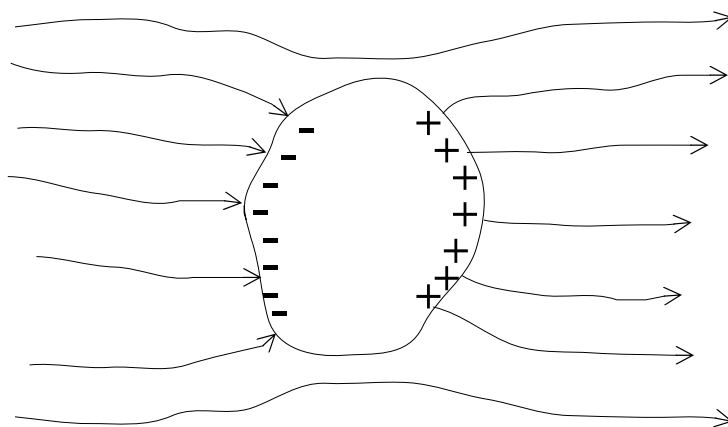


図 1

導体内では電荷が自由に動くことができる. そのような電荷を誘導電荷と呼ぶ. 導体を一様な電場の中に置くと, 誘導電荷は外部の電場によって導体内を移動して, 静的状態となる. 静的状態では外部電場と, 誘導電荷によって導体内につくりだされる電場は重ね合わせて完全に打ち消しあう. したがって静的状態にある導体内では $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ が成り立つ. Gauss の法則 (微分形) より導体内の電荷密度は $\rho = \epsilon_0 \text{div} \mathbf{E} = 0$ となり, 電荷は導体の表面にだけ分布する. したがって 11 節の例から, 導体は等電位であることが分かる. 特に導体表面は等電位面であり, $\mathbf{E} \perp$ 導体表面 となる.

例: 静電遮蔽

図のような中空導体を考える. 中空領域では電荷密度が 0 とすると, 中空領域と導体の境界は等電位面となる. その

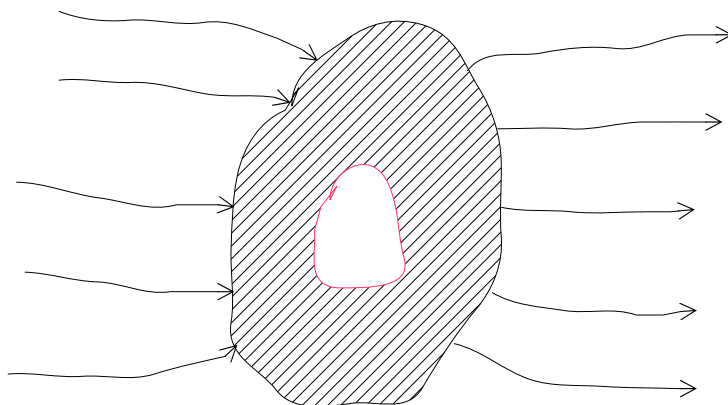


図 2

電位を ϕ_0 とする. ここで中空領域では $\rho = 0$ であるから, Poisson 方程式より $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ 解は容易に $\phi = \phi_0$ と分かる. 中空領域の電場は $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi_0 = \mathbf{0}$ このように導体に囲まれた中空領域ではいたるところ電場は $\mathbf{0}$ である.*9このような効果を**静電遮蔽**という.

例: 電気鏡映

導体表面至るところで $\phi = 0$ とする.

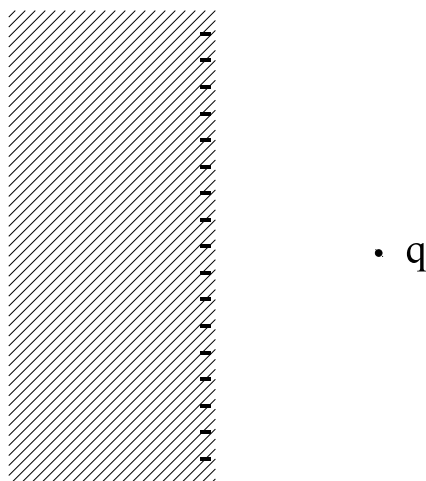


図 3

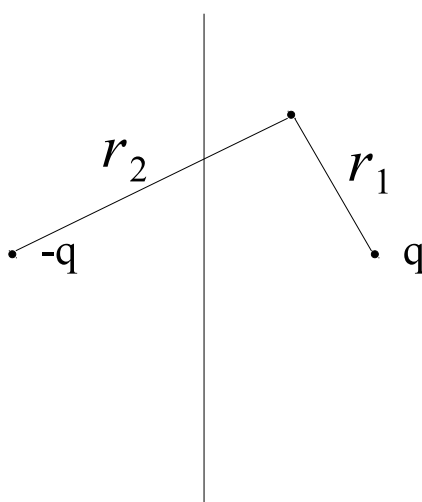


図 4

いま, 導体を無いものと仮定し, 代わりに導体表面があった $x=0$ に関して対称な位置に電荷 $-q$ の電荷があると仮想する. これを仮想電荷という. すると電位は以下のように書ける.

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

ここで, この静電ポテンシャルには以下が成立する.

$$\phi = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 0 & (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

ここで $x > 0$ の領域に限って話を進めると, もとの問題の Poisson 方程式と, 境界条件を満たすので, 解の一意性からこれはもとの問題の電位を与えていると結論してよい.

*9 間違えて「電場は存在しない」など書かないようにしたい.

電荷は距離 $2l$ 離れた自身の電気鏡映からの引力と等しい力を受ける.

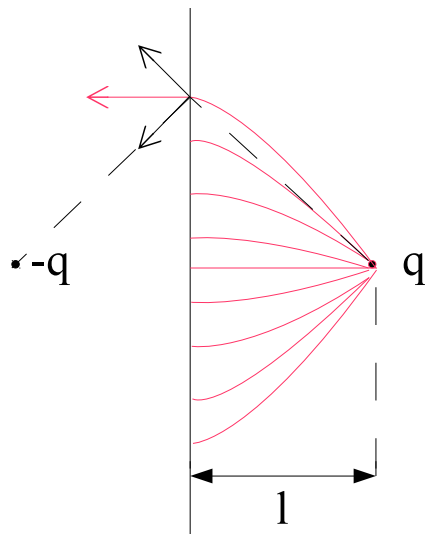


図 5

2 定常電流と静磁場

2.1 電荷保存と連続の式

ある時刻 t に点 \mathbf{r} 近傍の微小領域に, 電荷 q_i が速度 $\mathbf{v}_i (i=1,2,\dots,N)$ をもって存在する状況を考える. すると点 \mathbf{r} の電荷密度 $[Cm^{-3}]$ は, 微小領域を物理的に意味をもつ程度に小さくしていくという極限を " $V \rightarrow 0$ ", と表すことにより,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{V}$$

ここで単位時間あたりに単位断面積を通過する電荷を表すベクトル量として電流密度を以下のように定義する.

電流密度

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i}{V} \quad (1)$$

単位は $[Cms^{-1}m^{-3}] = [Cm^{-2}s^{-1}] = [Am^{-2}]$ である.

電流密度はベクトル場をなす.

電流密度に関する保存則を導出してみる.

ある閉領域 V を仮定する. 電流密度の V の表面にわたる積分は上の定義から, 単位時間あたりに V の表面を通過する電荷となる. V の表面を内側から外側に貫く方向を正とすると, これは V 内の全電荷の時間変化率に $-$ を掛けたものに等しくなる. したがって

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \\ &= -\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV \end{aligned}$$

さてここで Gauss の定理を用いると, 面積分を体積積分に書き換えることができる. つまり,

$$\int_{\partial V} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{i} dV$$

合わせて

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{i} \right) dV = 0$$

これがどんな領域でも成り立つから以下の保存則が成り立つ.

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{i} = 0 \quad (2)$$

これは電荷が保存されることを意味している.

また, この式は流体に対して成り立つ一般的な式である.

特に定常状態では電荷密度の時間変化が 0 であるから $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ より $\text{div} \mathbf{i} = 0$

$|\mathbf{E}|$ が大きくなく等方的な物質では近似的に

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \sigma^{-1} \mathbf{i} \quad (3)$$

σ : 伝導率, σ^{-1} : 抵抗率

例

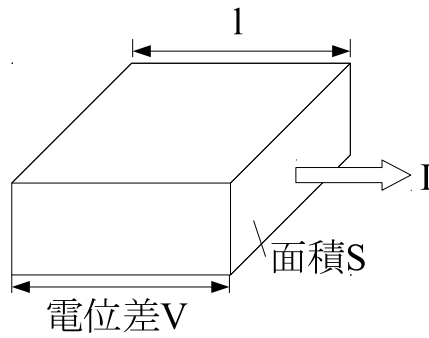


図 6

$$\begin{aligned} I &= S|\mathbf{i}| \\ V &= l|\mathbf{E}| \end{aligned}$$

であるから抵抗は

$$R = \frac{V}{I} \cdot \frac{l|\mathbf{E}|}{S|\mathbf{i}|} = \frac{l}{S} \sigma^{-1}$$

電場 \mathbf{E} のもとで電流密度 \mathbf{i} が生じているとき, 電場のする仕事率を体積で割ったものは,

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q_i \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_i}{V} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = \sigma |\mathbf{E}|^2$$

これはジュール熱や光となって散逸される.

第 8 回

2.2 Biot-Savart の法則

ベクトル積 (外積)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ とすると } \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

性質 1

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

とくに, $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ ならば,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = -k(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

性質 2

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= a_x(a_y b_z - a_z b_y) \\ &\quad + a_y(a_z b_x - a_x b_z) \\ &\quad + a_z(a_x b_y - a_y b_x) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

同様に $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ となり, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a} と \mathbf{b} とともに直交することがわかる.

性質 3

\mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角を θ とすると,

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ は \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす平行四辺形の面積となっている.

さて, 定常電流があると静磁場が生じるが, それを定式化したい. 以下, 簡単のため定常電流を線電流として議論をする.

微小区間の線電流が離れた微小な場所に生じさせる磁場について考える.

$d\mathbf{l}$ は微小であるから, 位置 \mathbf{r} と $d\mathbf{l}$ の距離は一定であるとみなしてよい.

大きさ

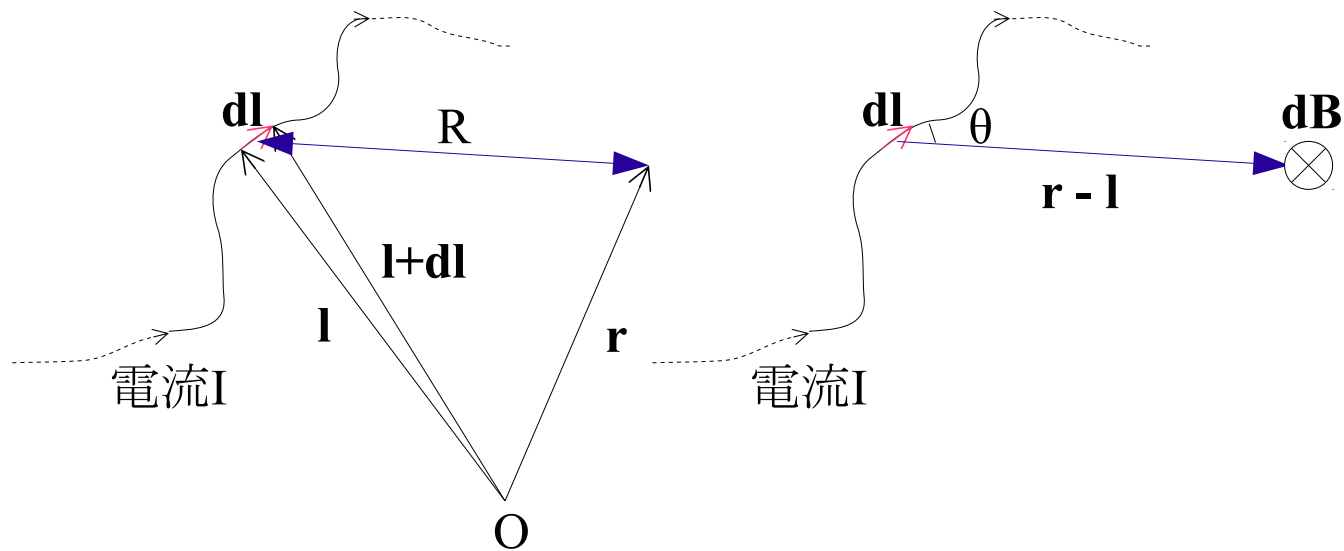


図 1

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\mathbf{l} \sin \theta|}{R^2} = \left| \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l})}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|^3} \right|$$

向き



大きさと向きの両方を含む式は,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l})}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|^3}$$

これを線電流にそって線積分したものが, 位置 \mathbf{r} における線電流によって生じる磁場である.

— Biot-Savart の法則 —

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l})}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|^3} \quad (1)$$

$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} [\text{NA}^{-2}]$: 真空の透磁率

\mathbf{B} 磁束密度 $[\text{T}] = [\text{NA}^{-1}\text{m}^{-1}] = [\text{Wbm}^{-2}] = [\text{JA}^{-1}\text{m}^{-2}] = [10^4 \text{gauss}]$

例 1: 直線電流

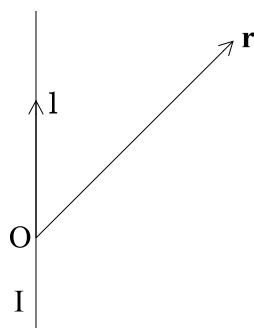


図 2

$$\mathbf{dl} = (0, 0, dl)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{l} = (x, y, z - l)$$

$$\mathbf{dl} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dl \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ydl \\ xdl \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{dl} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l})}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - l)^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -ydl \\ xdl \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで $l = z + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \tan \theta$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(x^2 + y^2 + (z - l)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^2 + y^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

となるから,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

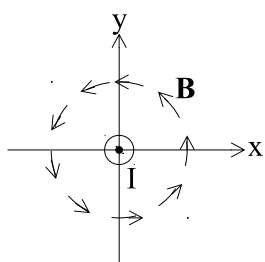


図 3

例 2: 円電流

中心軸上の位置 $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ での \mathbf{B} を求める.

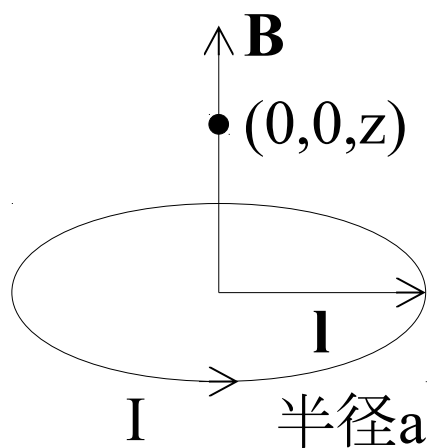


図 4

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= (a \cos \theta, a \sin \theta, 0) \\ \mathbf{dl} &= (-a \sin \theta d\theta, a \cos \theta d\theta, 0) \\ \mathbf{r} - \mathbf{l} &= (-a \cos \theta, -a \sin \theta, z)\end{aligned}$$

$$\mathbf{dl} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l}) = \begin{pmatrix} -a \sin \theta d\theta \\ a \cos \theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \cos \theta \\ -a \sin \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} za \cos \theta d\theta \\ za \sin \theta d\theta \\ a^2 d\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} za \cos \theta d\theta \\ za \sin \theta d\theta \\ a^2 d\theta \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

例3: ソレノイド

半径 a , 単位長さあたりの巻き数 n のソレノイドについて, 中心軸上の磁束密度の大きさ B を求める. すると例2の

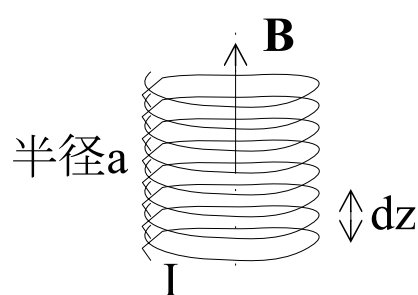


図5

結果の z 成分について, I を $Indz$ に置き換えて $-\infty$ から ∞ まで積分すればよいので,

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 a^2 Indz}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$z = a \tan \theta$ とおくと,

$$B = \frac{\mu_0 In}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \mu_0 In$$

さて, 2.1 節で定義した電流密度を用いて, Biot-Savart の法則を書き換える. 電流密度 $\mathbf{i} = \mathbf{i}(\mathbf{r})$ が与えられているとき, 位置 \mathbf{r}' まわりについて, 電流と電流密度の関係は微小体積 $d\mathbf{r}'^{*10}$ を用いて以下のように書き直せる.

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{i}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

すると式 (1) の電流密度を用いた表記が得られる.

— Biot-Savart の法則 —

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' \quad (2)$$

^{*10} 記号として紛らわしいが, これはスカラー量なので注意されたい.

第9回

2.3 磁束密度の発散

磁束密度の発散がどうなるか考える.

先に結論から言ってしまうと, 磁場に対して電場のときのような Gauss の法則が得られる.

—— 磁場に対する Gauss の法則 ——

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

発散が 0 ということは, 直観的に「磁束が出て行くだけ, または入り込むだけということはない。」と解釈できるので, 以下のように言い換えることができる.

磁気単極子 (monopole) は存在しない (見つかっていない) .

もし monopole が存在したら, N 極だけ, または S 極だけの磁石が存在することになり, 前者は $\operatorname{div}\mathbf{B} > 0$, 後者は $\operatorname{div}\mathbf{B} < 0$ となってしまう.

式 (1) を証明する.

証明

—— Biot-Savart の法則 ——

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' \quad (2)$$

これを用いて導出する.

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{r}' = (x', y', z'), \mathbf{i}(\mathbf{r}') = (i_x(\mathbf{r}'), i_y(\mathbf{r}'), i_z(\mathbf{r}')), |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = R$$

とする. また, 表記を簡略にするため, 電流密度が位置 \mathbf{r}' に依存することは省略して $\mathbf{i} = (i_x, i_y, i_z)$ とする. まず先に

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^3} \right) &= -\frac{3(x - x')}{R^5} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R^3} \right) &= -\frac{3(y - y')}{R^5} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R^3} \right) &= -\frac{3(z - z')}{R^5} \end{aligned}$$

次に \mathbf{B} の外積を書き下した形で発散をとると,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{i_y(z - z') - i_z(y - y')}{R^3} \right\} d\mathbf{r}' \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{i_z(x - x') - i_x(z - z')}{R^3} \right\} d\mathbf{r}' \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{i_x(y - y') - i_y(x - x')}{R^3} \right\} d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

3 項の被積分関数はつなげて以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^3} \right) \{i_y(z-z') - i_z(y-y')\} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R^3} \right) \{i_z(x-x') - i_x(z-z')\} \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R^3} \right) \{i_x(y-y') - i_y(x-x')\} \\
& = -\frac{3(x-x')}{R^5} \{i_y(z-z') - i_z(y-y')\} - \frac{3(y-y')}{R^5} \{i_z(x-x') - i_x(z-z')\} \\
& - \frac{3(z-z')}{R^5} \{i_x(y-y') - i_y(x-x')\} \\
& = 0
\end{aligned}$$

よって $\text{div}\mathbf{B} = 0$ が示された.

(証明終)

2.4 ベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (3)$$

積分は全空間にわたる体積積分とする.

線電流の場合, 電線上以外では電流密度の値が 0 となるから, 積分は電線 C に沿う線積分で十分であり,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi} \int_C \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|}$$

さて, 磁束密度とベクトルポテンシャルの間には以下の関係が成り立つ (というより, 以下の関係が成り立つようにベクトルポテンシャルを定義しているのである.)

磁束密度とベクトルポテンシャルの関係

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (4)$$

証明

x, y, z は対称となっているから, x 成分だけを計算する.

$$\begin{aligned} (\text{rot}\mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int \frac{i_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' - \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{i_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \right) \end{aligned}$$

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R$ とすると,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{y - y'}{R^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{z - z'}{R^3}$$

なので

$$\begin{aligned} (\text{rot}\mathbf{A})_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i_y(\mathbf{r}')(z - z') - i_z(\mathbf{r}')(y - y')}{R^3} d\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\}_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' \\ &= \{\mathbf{B}(\mathbf{r})\}_x \end{aligned}$$

同様の計算により, $(\text{rot}\mathbf{A})_y = \{\mathbf{B}(\mathbf{r})\}_y, (\text{rot}\mathbf{A})_z = \{\mathbf{B}(\mathbf{r})\}_z$ となり, $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ が証明できた.

(証明終)

式 (2), (3) を見比べると, ベクトルポテンシャルに表れる積分は, Biot-Savart の法則に表れる積分より単純な形になっていることがわかる. ここでベクトルポテンシャルのもつ不定性について考えたい.

そこで任意のスカラー場 ψ が $\text{rot}(\text{grad}\psi) = \mathbf{0}$ を満たすことに注目する. **証明**

対称性から, x 成分だけ計算する.

$$\begin{aligned} \{\text{rot}(\text{grad}\psi)\}_x &= \frac{\partial}{\partial y} (\text{grad}\psi)_z - \frac{\partial}{\partial z} (\text{grad}\psi)_y \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

計算の最後に, スカラー場は連続的微分可能であり, 偏微分が可換であることを利用した.

同様に $\{\text{rot}(\text{grad}\psi)\}_y = 0, \{\text{rot}(\text{grad}\psi)\}_z = 0$ であるから, $\text{rot}(\text{grad}\psi) = \mathbf{0}$ が示された.

(証明終)

したがってベクトル場の回転が線形であることを用いると, 式 (4) は

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = \text{rot}\mathbf{A} + \mathbf{0} = \text{rot}\mathbf{A} + \text{rot}(\text{grad}\psi) = \text{rot}(\mathbf{A} + \text{grad}\psi)$$

したがってベクトルポテンシャルには $+\text{grad}\psi$ の不変性がある.*11

例 1

z 軸方向に一様な磁場を考える.

磁束密度を

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

*11 これはゲージ不変性と関係している.

とすると, 式 (4) を満たすベクトルポテンシャルの例は,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -\frac{B}{2}y \\ \frac{B}{2}x \\ 0 \end{pmatrix}$$

またベクトルポテンシャルの不定性から \mathbf{A}' を \mathbf{A} とスカラー場の勾配の和で表せるはずであり, 確かに

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \begin{pmatrix} -\frac{B}{2}y \\ -\frac{B}{2}x \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} + \text{grad} \left(-\frac{B}{2}xy \right)$$

例 2

円電流の場合, 例えば

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \log(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

とすると $\text{rot} \mathbf{A}$ が 2.2 節の例でやった円電流の \mathbf{B} と一致することが分かる.

2.5 Ampère の法則

Ampère の法則 (微分形)

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (5)$$

この法則の意味するところは, 線電流があると, その線電流に巻きつくように磁束密度 \mathbf{B} が生じる, ということである. また, 磁場 \mathbf{B} の回転の方向が電流の方向と一致するようになっている. この法則を証明するのにいくつかの関係式が必要である.

$$\textcircled{1} \quad \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \text{grad}(\text{div} \mathbf{A})$$

$$\textcircled{2} \quad \Delta \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = -\mathbf{i}(\mathbf{r})$$

$$\textcircled{3} \quad \text{div} \mathbf{A} = 0$$

① 証明

$$\text{右辺} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \text{div} \mathbf{A} \\ \frac{\partial}{\partial y} \text{div} \mathbf{A} \\ \frac{\partial}{\partial z} \text{div} \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

計算するだけであるから, 以下の証明は省略する. 右辺と左辺を書き下した結果が一致すればよい.

② 証明

静電ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

両辺に左から Laplacian を掛けると,

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \Delta \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

これを静電ポテンシャルの Poisson 方程式 $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ と比較することで,

$$\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = -\rho(\mathbf{r})$$

これが任意の電荷密度について成立するので順々に $\rho = i_x, i_y, i_z$ としたものを組んで電流密度 \mathbf{i} とすれば ② が成り立つ.

③ の証明は Web の補遺を参照されたい.

①, ②, ③ を用いて Ampère の法則を導く.

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{B} &= \text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) \\ &= -\Delta\mathbf{A} + \text{grad}(\text{div}\mathbf{A}) = -\Delta\mathbf{A} \\ &= -\Delta \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

(証明終)

Biot-Savart の法則から 2 つの式が得られた. ひとつは $\text{div}\mathbf{B} = 0$ であり, これは電流が定常でなくても成立する. もうひとつは $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{i}$ であり, これは電流が定常でないと補正が入る.

第 10 回

2.6 Ampère の法則

Ampère の法則 (微分形)

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{i} \quad (1)$$

Ampère の法則の積分形を導出したい.

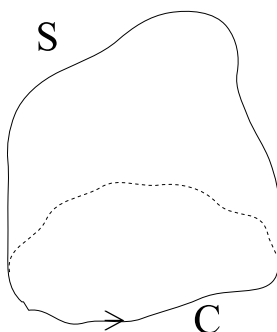


図 1

C 上に沿って右ねじを巻いたときに進む方向に裏 \rightarrow 表を定める.(面積の正負を定める.) 有向ループをふちにもつ任意の曲面 S にわたる式 (1) の面積分を考える.

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \mu_0 \int_S = \mu_0(S \text{ を貫く全電流}) \\ &= \mu_0(C \text{ を貫く全電流}) \end{aligned}$$

また Stokes の定理より,

$$\int_S \text{rot}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

注

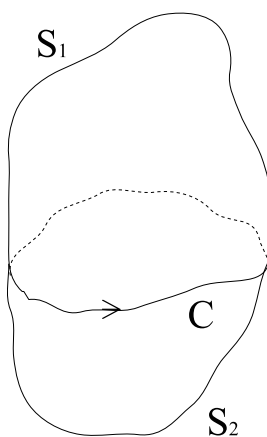


図 2

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{S_2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} \\ \int_{S_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \text{div}\mathbf{i} dV = 0 \end{aligned}$$

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (\text{C を貫く全電流}) \quad (2)$$

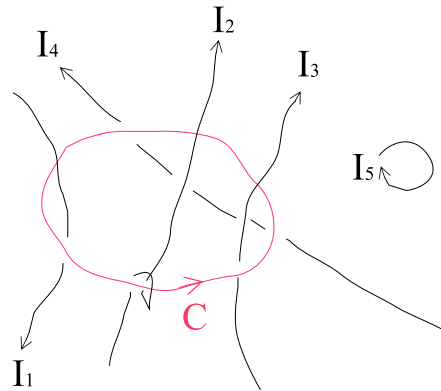


図 3

例

図 3 では,

$$\mu_0 (\text{C を貫く全電流}) = \mu_0 (-I_1 + 2I_2 + I_3)$$

例 1: 円電流

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

例 2: ソレノイド

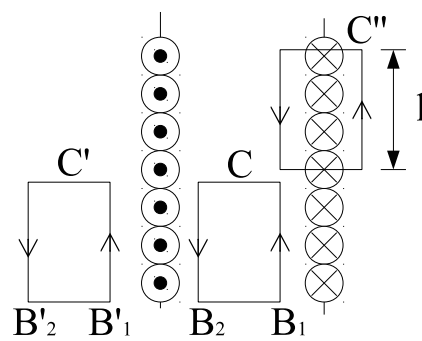


図 4

$$C' : lB'_1 - lB'_2 = \mu_0 \cdot 0$$

$$B'_1 = B'_2 = B'$$

したがってソレノイドの外部で磁束密度は一様である.

同様に

$$C : lB_1 - lB_2 = \mu_0 \cdot 0$$

$$B_1 = B_2 = B$$

したがってソレノイドの内部でも磁束密度は一様である.

$$C'' : lB' - lB = -\mu_0 l n I$$

$B = \mu_0 n I$ であることは以前導いたから, $B' = 0$ となる. つまりソレノイドの外部では磁束密度は $\mathbf{0}$ である.

2.7 ループ電流と等価磁気双極子層

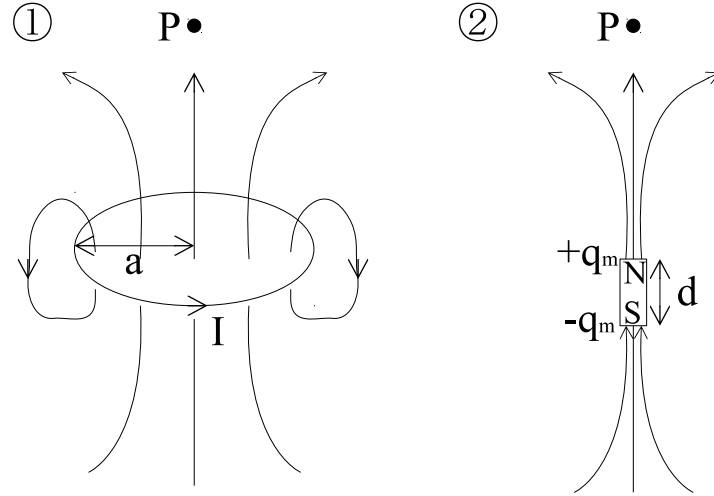


図 5

仮想的磁荷 $\pm q_m [Wb] = [JA^{-1}]$ を考えることで, 円電流によって生じる磁場と類似した Coulomb 的磁場をつくることができる. その磁束密度の大きさは $|\mathbf{B}| = \frac{q_m}{4\pi r^2}$

実はこの 2 つの磁場は, $a \rightarrow 0, I \rightarrow \infty, q_m \rightarrow \infty, d \rightarrow 0$ の極限で一致する. またこのとき, $\mu_0 \pi a^2 I$ と $q_m d$ は同じ極限值 m をとる.

図の点 P で $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ とすると,

①

$a \rightarrow 0, I \rightarrow \infty$ の極限で

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{m}{2\pi z^3}$$

②

$$B_z = \frac{q_m}{4\pi} \left(\frac{1}{(z - \frac{d}{2})^2} - \frac{1}{(z + \frac{d}{2})^2} \right)$$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$ とすると

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{q_m}{4\pi} \left(f(z - \frac{d}{2}) - f(z + \frac{d}{2}) \right) \\ &= -\frac{q_m d}{4\pi} \left(\frac{f(z + \frac{d}{2}) - f(z - \frac{d}{2})}{d} \right) \end{aligned}$$

$q_m \rightarrow \infty, d \rightarrow 0$ の極限で

$$B_z \rightarrow -\frac{md}{4\pi} f'(z) = \frac{m}{2\pi z^3}$$

確かに一致する.

一般に, ループ C に沿う電流による \mathbf{B} は, C を境界にもつ磁気双極子の層をなす \mathbf{B} と等しい. これを, 等価磁気双極子層という.

2.8 Lorentz 力

— Lorentz 力 —

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

両辺に速度 \mathbf{v} を掛けると

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + 0)$$

つまり \mathbf{B} は仕事をしないことが分かる.

電流素片に働く力

電流素片がもつ電荷 $dq = \rho S |\mathbf{dl}|$

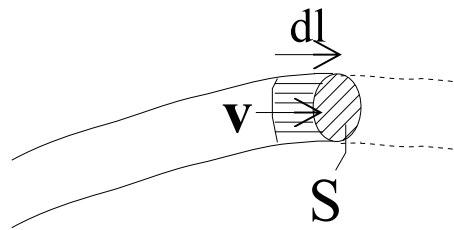


図 6

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= dq \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \rho S |\mathbf{dl}| \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \rho S |\mathbf{v}| \mathbf{dl} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

ここで $S|\mathbf{v}|\mathbf{dl}$ の単位に注目すると,

$$Cm^{-3} \cdot m^2 \cdot ms^{-1} = A$$

したがって $S|\mathbf{v}|\mathbf{dl}$ は電流 I を表す.

$$d\mathbf{F} = I \mathbf{dl} \times \mathbf{B}$$

電流, 磁場, Lorentz 力の方向の関係は, 必要とあらば左手で確認できる. (Fleming の左手の法則) さて今ここで電流の単位アンペアを定義する.

そのために, 平行に並んだ電線を同じ方向に流れる電流を考える.

線電流 I_1 が距離 d 離れた場所に作り出す磁場は, $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$ である. そしてその磁場によって I_2 の長さ Δl の部分が受ける Lorentz 力の大きさは, $F = I_2 \Delta l B_1 = \Delta l \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$ である.

この状態で $I_1 = I_2, d = 1m$ としたときに電線 1m あたりに及ぼしあう Lorentz 力が $2 \times 10^{-7} N$ となるときの電流の値を 1A と定義する.

するとそこから $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{NA}^{-2}$ が定まることになる.

例: 一様な磁場中の荷電粒子の運動

運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

だから,

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= qv_y B \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -qv_x B \\ m \frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

したがって $v_z = \text{一定}$ であり, x,y 成分については, サイクロトロン振動数 $\omega = \frac{qB}{m}$ とすることにより,

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\omega^2 v_y \end{aligned}$$

第 11 回

3 電磁誘導

復習

静電場では

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}\end{aligned}$$

電荷は保存され

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i} = 0$$

電荷に働く Lorentz 力は

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

電場が時間変化するときは $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$ の右辺に補正項が要る.

3.1 Faraday の電磁誘導の法則

—— 有向ループ C を貫く磁束 ——

有向ループ C を貫く磁束は, C をふちとする曲面 S にわたる面積分であり,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1)$$

表裏の定め方は Ampère の法則のときと同様.

注: S の取り方によらない.

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S \cup \bar{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0$$

Φ の単位は $\text{Wb} = \text{JA}^{-1}$

$$\Phi = \int \mathbf{B}(x, y, z, t) \cdot d\mathbf{S} = \Phi(t)$$

—— C に沿う起電力 ——

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} [\text{JC}^{-1}] \quad (2)$$

注: 静電場だと Stokes の定理より

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Faraday の法則

磁束 Φ が時間とともに変化するとそれを妨げる（打ち消す）向きに, C に起電力 \mathcal{E} が生じる. この起電力を誘導起電力という. (C が導線であれば, 電流が生じる.) 誘導起電力の大きさは

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3)$$

単位は $\text{Wb s}^{-1} = \text{J A}^{-1} \text{s}^{-1} = \text{J C}^{-1}$

起電力の向きに関する法則は Lenz の法則ともいう.

例: C は一定, B が時間変化する場合.

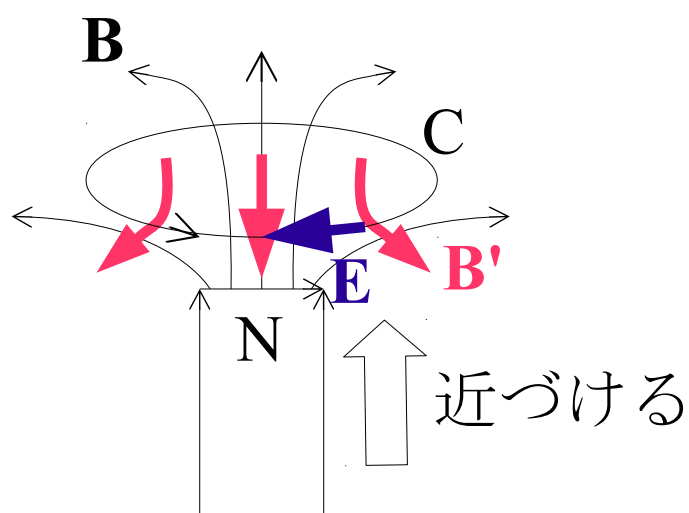


図 1

$$\frac{d\Phi}{dt} > 0, \mathcal{E} < 0$$

C における \mathbf{E} は C の向きと逆. \mathbf{B}' は \mathbf{B} を打ち消す向き.

例: B が一定, C が時間変化する場合.

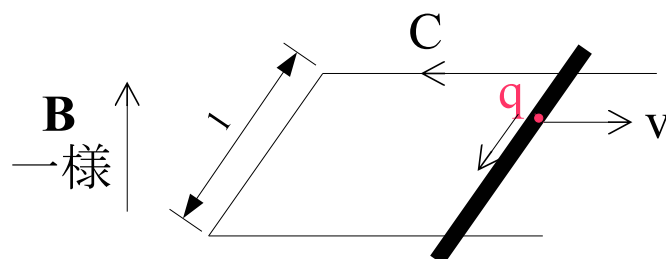


図 2

$$\Phi = -Bl(vt + \text{const.})$$

$$\text{Lorentz 力 } F = qvB$$

のとき

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{l} = -vBl = -\frac{d\Phi}{dt}$$

となり, Lorentz 力と整合する.

さて, Faraday の法則 (3) を出発点として, 静電場で成り立つ $\text{rot}\mathbf{E} = 0$ を補正する.

左辺の起電力を有向ループ C に沿う線積分に書き換えると, 式 (2) より,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

右辺の磁束を磁束密度の, 有向ループ C をふちとする曲面 S にわたる面積分で書き換えると, 式 (1) より,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}$$

Stokes の定理によって, 左辺の線積分を面積分書き換えると,

$$\int_S \text{rot}\mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}$$

右辺の時間微分を磁束密度にかけると,

$$\int_S \text{rot}\mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{dS}$$

曲面 S は任意であるから,

電場の回転

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

3.2 自己誘導, 相互誘導

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = LI$$

比例定数 L を自己誘導係数 (インダクタンス) といい, 単位は $\text{WbA}^{-1} = \text{H}$

例: ソレノイド

単位長の巻き数 n , 長さ l , 断面積 S のソレノイドを考える.

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 n I \\ \Phi &= BSln = \mu_0 n^2 l S I \end{aligned}$$

よってソレノイドの自己インダクタンスは,

$$L = \mu_0 n^2 l S$$

一般に, i 番目のループを貫く磁束を $\Phi_i(I_1, I_2, \dots, I_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とすると,

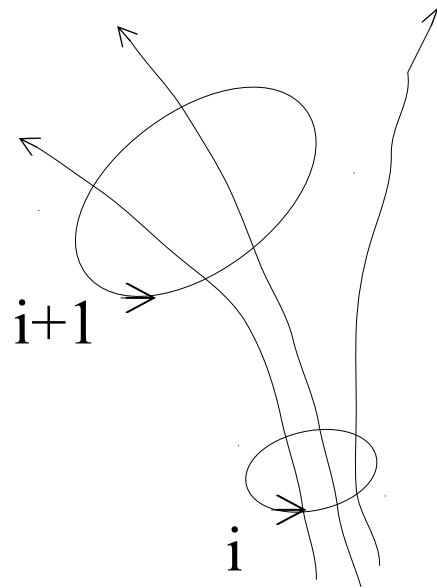


図 3

— i 番目のループを貫く磁束 —

$$\Phi_i(I_1, \dots, I_n) = \sum_{j=i}^n L_{ij} I_j$$

L_{ii} : 自己インダクタンス

$L_{ij} (i \neq j)$: 相互インダクタンス

例: 単位あたりの巻き数 n_1, n_2 , 断面積 S_1, S_2 のソレノイド

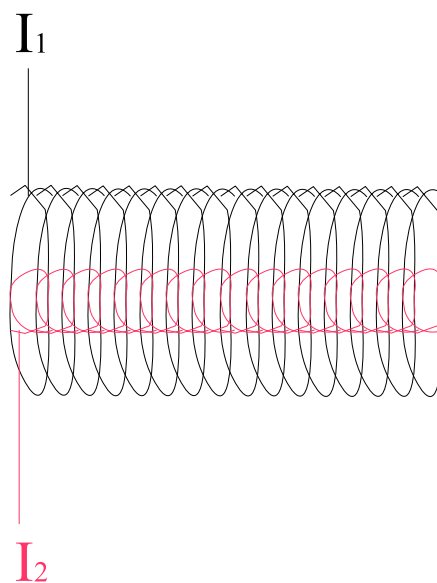


図 4

$$\begin{aligned}\Phi_1(I_1 = 0, I_2) &= L_{11}0 + L_{12}I_2 \\ \Phi_2(I_1, I_2 = 0) &= L_{21}I_1 + L_{22}0\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\Phi_1(I_1 = 0, I_2) &= \mu_0 n_2 I_2 \cdot l n_1 S_2 \\ \Phi_2(I_1, I_2 = 0) &= \mu_0 n_1 I_1 \cdot l n_2 S_2\end{aligned}$$

よって

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l S_2$$

一般に $L_{ij} = L_{ji}$ が成り立つ.

交流回路

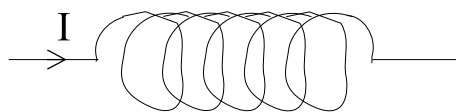


図 5

コイルの起電力の大きさは

$$\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = L \left| \frac{dI}{dt} \right|$$

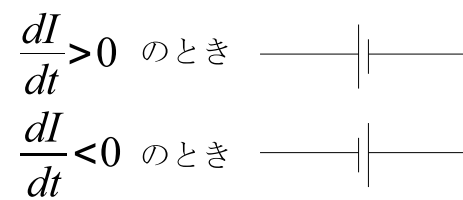


図 6

LCR 回路

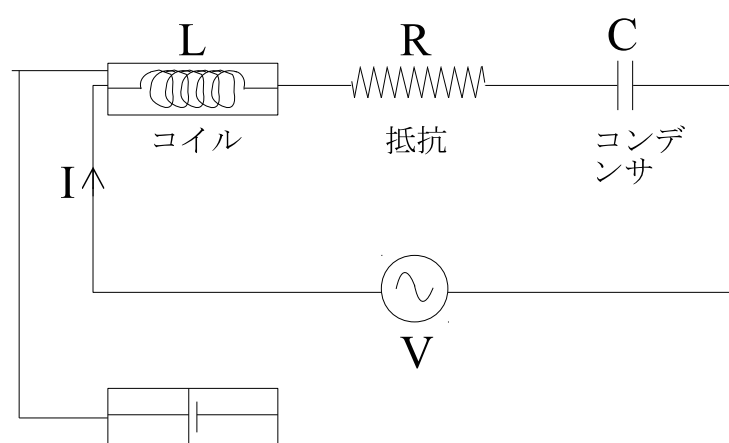


図 7

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V$$

両辺を時間微分して, $\frac{dQ}{dt} = I$ と書き換えると,

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}$$

となり, I についての 2 階の微分方程式が得られる.

とくに $\frac{dV}{dt} = 0$ でも電流は振動する.

抵抗が 0 であるときは LC 回路といい (ただし $\frac{dV}{dt} = \text{const.}$), 電流 I は単振動する.

第 12 回

3.3 自己誘導, 相互誘導

定電圧 V の直流電源, 抵抗値 R の抵抗, インダクタンス L のコイルからなる直列回路を考える.

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{V}{L} = -\frac{R}{L} \left(I - \frac{V}{R} \right)$$

ここで V は定電圧であるから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(I - \frac{V}{R} \right) &= -\frac{R}{L} \left(I - \frac{V}{R} \right) \\ I - \frac{V}{R} &= k e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

$t = 0$ で $I = 0$ であるとする, $k = -\frac{V}{R}$

$$I = \frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

式から分かるように, 定常状態に落ち着くまで電流は時間的に変化する, このような現象を**過渡現象**という. 式 (1) の両辺に電流 I を掛けると

$$IV = RI^2 + LI \frac{dI}{dt} = RI^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right)$$

IV は電源の仕事率, RI^2 は単位時間当たりのジュール熱, $\frac{1}{2} LI^2$ は誘導起電力に抗して電流を 0 から I にするのに要するエネルギー, を表す.

さて, ソレノイドのエネルギー $\frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi I$ を, 磁束密度 $B = \mu_0 nI$, 磁束 $\Phi = l n B S$ を用いて書き換える.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Phi I &= \frac{1}{2} l n B S I = \frac{1}{2} l S \cdot \frac{B}{\mu_0} B \\ &= l S \cdot \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \end{aligned}$$

$l S$ はソレノイドの体積であり, $\frac{1}{2} \Phi I$ はエネルギーであるから, $\frac{1}{2 \mu_0} B^2$ はエネルギーの密度を表していることになる. 一般に磁場 \mathbf{B} は**エネルギー密度** $\frac{1}{2 \mu_0} |\mathbf{B}|^2$ をもつ.

電流の系について, エネルギーを場による表現に書き換える.

$$\frac{1}{2} \sum_k \Phi_k I_k = \int \frac{1}{2 \mu_0} |\mathbf{B}|^2 dV$$

また電荷の系についても, エネルギーを場による表現に書き換えることができるのは以前示した通りで, 再掲すると

$$\frac{1}{2} \sum_k q_k \phi_k = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 dV$$

3.4 変位電流と Ampère-Maxwell の法則

Ampère の法則は

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$$

両辺の発散をとると,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{B}) = \mu_0 \operatorname{div}\mathbf{i}$$

$$\text{左辺} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$$

連続の式 $\operatorname{div}\mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ を用いると右辺は

$$\text{右辺} = \mu_0 \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

となるから, 電荷密度に時間変化がある場合は, Ampère の法則がこのままの形では成り立たない.

補正形として何らかのベクトル場 \mathbf{X} を付け加えることにより, $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{X})$ を仮定する.

両辺の発散をとると,

$$0 = \mu_0(\operatorname{div}\mathbf{i} + \operatorname{div}\mathbf{X}) = \mu_0 \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{X} \right)$$

Gauss の法則 $\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ を用いて,

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_0 \left(-\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E} + \operatorname{div}\mathbf{X} \right) \\ &= \mu_0 \left(\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{X} \right) \\ &= \mu_0 \operatorname{div} \left(-\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{X} \right) \end{aligned}$$

これが整合するためには, $\mathbf{X} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ととればよい. $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ のことを, **変位電流密度**あるいは**電束電流密度**という.

Ampère-Maxwell の法則

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2)$$

特に両辺を μ_0 で割った式を, 閉曲面 S について面積分すると,

$$\frac{1}{\mu_0} \int_S \operatorname{rot}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

左辺を Gauss の法則により体積積分に書き換えると,

$$\frac{1}{\mu_0} \int_V \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{B}) dV = 0$$

右辺の 1 項目は閉曲面 S から湧き出る全電流を表し, 2 項目は閉曲面 S から湧き出る全変位電流を表す.

簡単のためこれらを α, β と略記すると

$$0 = \alpha + \beta \quad (3)$$

例: 放電により \mathbf{E} が弱まりつつあるコンデンサー

閉曲面 S を, コンデンサーの片板だけ覆うようにとる. S から湧き出る電流は $\alpha = I (> 0)$

β を求める. 電場 \mathbf{E} の大きさ E は極板の面積を A とすると $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A} \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{I}{\varepsilon_0 A}$$

$$\beta = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\varepsilon_0 \frac{I}{\varepsilon_0 A} \cdot A = -\alpha$$

確かに (3) と一致する.

3.5 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad & \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \textcircled{2} \quad & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \textcircled{3} \quad & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \textcircled{4} \quad & \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

① ~ ④ から電荷保存が成立することを示す.

④ の両辺を μ_0 で割って発散をとると

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E}$$

左辺は 0 となる. 右辺を ① を用いて書き換えると,

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

確かに電荷保存が導かれる.

第 13 回

3.6 電磁波

真空中では至るところ電荷密度 $\rho = 0$, 電流密度 $\mathbf{i} = \mathbf{0}$ である. したがって真空中の Maxwell 方程式は以下のようになる.

真空中の Maxwell 方程式

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \\ \textcircled{2} \quad & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \textcircled{3} \quad & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \textcircled{4} \quad & \operatorname{rot} \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

\mathbf{E}, \mathbf{B} の $\mathbf{0}$ でない解を求める.

まず, 任意のベクトル場 \mathbf{A} には以下の式が成立する.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (1)$$

③ 両辺の回転をとると,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

左辺を式 (1) を用いて書き換えると

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$$

① より真空中の電場の発散は 0 であるから

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\Delta \mathbf{E}$$

次に右辺の時間微分を回転の外側に出してから, ④ を用いて書き換えると

$$\operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

まとめると

$$-\Delta \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2)$$

④ についても同様の操作をすると

$$\Delta \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (3)$$

ここで光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ を用いて式 (2), (3) を整理された形に書き直すと

$$\begin{cases} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = \mathbf{0} \end{cases}$$

これは 3 次元の波動方程式の形になっている。^{*12} 光は電磁波であることがわかる。

1 次元のとき

Laplacian のうち $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ だけを考えると、電磁場を位置 x , 時間 t に依存する関数 $f(x, t)$ とすることで

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x, t) = 0 \quad (4)$$

例えば解は以下のように書ける。

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \delta)$$

k : 波数, ω : 振動数, δ : 初期位相

これが式 (4) を満たす為の、解の条件は $k = \frac{\omega}{c}$ (分散関係)

3 次元のとき^{*13}

波の進行方向を向き、各成分が波数である**波数ベクトル** $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ を導入することで

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \end{cases} \quad (5)$$

の形で解を探す。

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

で \mathbf{E} に式 (5) を代入して解き進めると、解の条件の 1 つは

$$\omega = c |\mathbf{k}| = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

これが 3 次元の**分散関係**である。次に式 (5) を真空中の Maxwell 方程式の ①, ②, ③ に代入して解き進めることで以下の結果が得られる。

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{e}, \mathbf{k} \perp \mathbf{b}, \mathbf{k} \times \mathbf{e} = \omega \mathbf{b}$$

よって電場と磁場と波数ベクトルは互いに垂直になっていることがわかる。

また電磁波には重ね合わせが成り立つ。つまり、 $(\mathbf{E}, \mathbf{B}), (\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ が解であるならば $(\mathbf{E} + \mathbf{E}', \mathbf{B} + \mathbf{B}')$ も解である。

^{*12} 演算子 $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ は d'Alembertian といい、記号 \square で表す。これを用いるとさらに簡単な形 $\square \mathbf{E} = \mathbf{0}, \square \mathbf{B} = \mathbf{0}$ で表すことができる。

^{*13} 大分端折りました。申し訳ありません。