講義ノート第 12 回

3　電磁誘導

3.2　自己誘導, 相互誘導

定電圧 V の直流電源, 抵抗値 R の抵抗, インダクタンス L のコイルからなる直列回路を考える.

$$V = RI + L\frac{dI}{dt} \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dI} = -\frac{R}{L}I + \frac{V}{L} = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{V}{R}\right)$$

ここで V は定電圧であるから

$$\frac{d}{dt}\left(I - \frac{V}{R}\right) = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{V}{R}\right)$$
$$I - \frac{V}{R} = ke^{-\frac{R}{L}t}$$

$t = 0$ で $I = 0$ であるとすると, $k = -\frac{V}{R}$

$$I = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

式から分かるように, 定常状態に落ち着くまで電流は時間的に変化する, このような現象を**過渡現象**という. 式 (1) の両辺に電流 I を掛けると

$$IV = RI^2 + LI\frac{dI}{dt} = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$$

IV は電源の仕事率,RI^2 は単位時間当たりのジュール熱, $\frac{1}{2}LI^2$ は誘導起電力に抗して電流を 0 から I にするのに要するエネルギー, を表す.

さて, ソレノイドのエネルギー $\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I$ を, 磁束密度 $B = \mu_0 nI$, 磁束 $\Phi = lnBS$ を用いて書き換える.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Phi I &= \frac{1}{2}lnBSI = \frac{1}{2}lS \cdot \frac{B}{\mu_0}B \\ &= lS \cdot \frac{1}{2\mu_0}B^2\end{aligned}$$

lS はソレノイドの体積であり,$\frac{1}{2}\Phi I$ はエネルギーであるから,$\frac{1}{2\mu_0}B^2$ はエネルギーの密度を表していることになる.

一般に磁場 $\mathbf{B}$ は**エネルギー密度** $\frac{1}{2\mu_0}\left|\mathbf{B}\right|^2$ をもつ.

電流の系について, エネルギーを場による表現に書き換える.

$$\frac{1}{2}\sum_k \Phi_k I_k = \int \frac{1}{2\mu_0}\left|\mathbf{B}\right|^2 dV$$

また電荷の系についても, エネルギーを場による表現に書き換えることができるのは以前示した通りで, 再掲すると

$$\frac{1}{2}\sum_k q_k\phi_k = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\mathbf{E}|^2\, dV$$

3.3 変位電流と Ampère-Maxwell の法則

Ampère の法則は

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{i}$$

両辺の発散をとると,

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{B}) = \mu_0\mathrm{div}\mathbf{i}$$

$$左辺 = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) = 0$$

連続の式 $\mathrm{div}\mathbf{i} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ を用いると右辺は

$$右辺 = \mu_0\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

となるから, 電荷密度に時間変化がある場合は,Ampère の法則がこのままの形では成り立たない.
補正形として何らかのベクトル場 $\mathbf{X}$ を付け加えることにより,$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i}+\mathbf{X})$ を仮定する.
両辺の発散をとると,

$$0 = \mu_0(\mathrm{div}\mathbf{i} + \mathrm{div}\mathbf{X}) = \mu_0\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{X}\right)$$

Gauss の法則 $\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ を用いて,

$$\begin{aligned}0 &= \mu_0\left(-\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\mathrm{div}\mathbf{E} + \mathrm{div}\mathbf{X}\right)\\ &= \mu_0\left(\mathrm{div}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{X}\right)\\ &= \mu_0\mathrm{div}\left(-\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{X}\right)\end{aligned}$$

これが整合するためには,$\mathbf{X} = \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ ととればよい. $\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ のことを, **変位電流密度**あるいは**電束電流密度**という.

Ampère-Maxwell の法則

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{i} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) \tag{2}$$

特に両辺を μ_0 で割った式を, 閉曲面 S について面積分すると,

$$\frac{1}{\mu_0}\int_S \mathrm{rot}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dS} = \int_S \mathbf{i}\cdot\mathbf{dS} + \varepsilon_0\int_S \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\cdot\mathbf{dS}$$

左辺を Gauss の法則により体積積分に書き換えると,

$$\frac{1}{\mu_0}\int_V \mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{B})dV = 0$$

右辺の 1 項目は閉曲面 S から湧き出る全電流を表し,2 項目は閉曲面 S から湧き出る全変位電流を表す.
簡単のためこれらを α, β と略記すると

$$0 = \alpha + \beta \tag{3}$$

例: 放電により $\mathbf{E}$ が弱まりつつあるコンデンサー
閉曲面 S を, コンデンサーの片板だけ覆うようにとる.S から湧き出る電流は $\alpha = I(>0)$
β を求める. 電場 $\mathbf{E}$ の大きさ E は極板の面積を A とすると $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{I}{\varepsilon_0 A}$$

$$\beta = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot \mathbf{dS} = -\varepsilon_0 \frac{I}{\varepsilon_0 A}\cdot A = -\alpha$$

確かに (3) と一致する.

3.4 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式

$$\begin{aligned}
&① \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\
&② \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0\\
&③ \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\\
&④ \quad \mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{i} + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

① ～ ④ から電荷保存が成立することを示す.
④ の両辺を μ_0 で割って発散をとると

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{B}) = \mathrm{div}\mathbf{i} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{E}$$

左辺は 0 となる. 右辺を ① を用いて書き換えると,

$$0 = \mathrm{div}\mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

確かに電荷保存が導かれる.