講義ノート第 11 回

3　電磁誘導

復習

静電場では

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$$

電荷は保存され

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{i} = 0$$

電荷に働く Lorentz 力は

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

電場が時間変化するときは $\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$ の右辺に補正項が要る.

3.1　Faraday の電磁誘導の法則

有向ループ C を貫く磁束

有向ループ C を貫く磁束は,C をふちとする曲面 S にわたる面積分であり,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} \tag{1}$$

表裏の定め方は Ampère の法則のときと同様.

注:S の取り方によらない.

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} - \int_{S'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \int_{S \cup \overline{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \int \mathrm{div}\mathbf{B} dV = 0$$

Φ の単位は $\mathrm{Wb} = \mathrm{JA}^{-1}$

$$\Phi = \int \mathbf{B}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{dS} = \Phi(t)$$

C に沿う起電力

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} [JC^{-1}] \tag{2}$$

注: 静電場だと Stokes の定理より

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_S \mathrm{rot}\mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = 0$$

Faraday の法則

磁束 Φ が時間とともに変化するとそれを妨げる（打ち消す）向きに,C に起電力 $\mathcal{E}$ が生じる. この起電力を誘導起電力という.(C が導線であれば, 電流が生じる.) 誘導起電力の大きさは

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{3}$$

単位は $\mathrm{Wbs^{-1} = JA^{-1}s^{-1} = JC^{-1}}$

起電力の向きに関する法則は Lenz の法則ともいう.

例:C は一定,$\mathbf{B}$ が時間変化する場合.

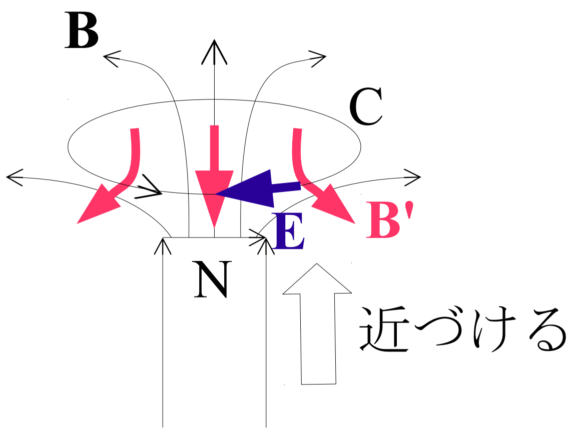

図 1

$$\frac{d\Phi}{dt} > 0, \mathcal{E} < 0$$

C における $\mathbf{E}$ は C の向きと逆.$\mathbf{B}$' は $\mathbf{B}$ を打ち消す向き.

例:$\mathbf{B}$ が一定,C が時間変化する場合.

$$\Phi = -Bl(vt + const.)$$
$$\text{Lorentz 力} \quad F = qvB$$

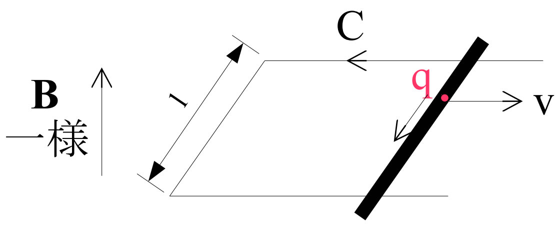

図 2

のとき

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{l} = -vBl = -\frac{d\Phi}{dt}$$

となり,Lorentz 力と整合する.

さて,Faraday の法則 (3) を出発点として, 静電場で成り立つ $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$ を補正する.

左辺の起電力を有向ループ C に沿う線積分に書き換えると, 式 (2) より,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

右辺の磁束を磁束密度の, 有向ループ C をふちとする曲面 S にわたる面積分で書き換えると, 式 (1) より,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}$$

Stokes の定理によって, 左辺の線積分を面積分に書き換えると,

$$\int_S \mathrm{rot}\mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}$$

右辺の時間微分を磁束密度にかけると,

$$\int_S \mathrm{rot}\mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{dS}$$

曲面 S は任意であるから,

電場の回転

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

3.2 自己誘導, 相互誘導

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = LI$$

比例定数 L を自己誘導係数 (インダクタンス) といい, 単位は $\mathrm{WbA}^{-1} = \mathrm{H}$

例: ソレノイド

単位長の巻き数 n, 長さ l, 断面積 S のソレノイドを考える.

$$B = \mu_0 n I$$
$$\Phi = BSln = \mu_0 n^2 l S I$$

よってソレノイドの自己インダクタンスは,

$$L = \mu_0 n^2 l S$$

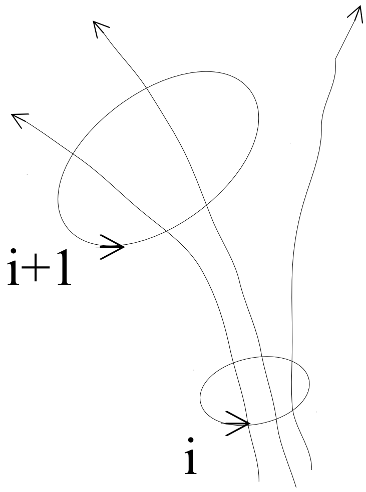

図 3

一般に,i 番目のループを貫く磁束を $\Phi_i(\mathrm{I_1, I_2 ... I_n})(\mathrm{i} = 1, 2 ... \mathrm{n})$ とすると,

i 番目のループを貫く磁束

$$\Phi_i(I_1, ..., I_n) = \sum_{j=i}^{n} L_{ij} I_j$$

L_{ii} : 自己インダクタンス

$L_{ij}(i \neq j)$: 相互インダクタンス

例: 単位あたりの巻き数 n_1, n_2, 断面積 S_1, S_2 のソレノイド

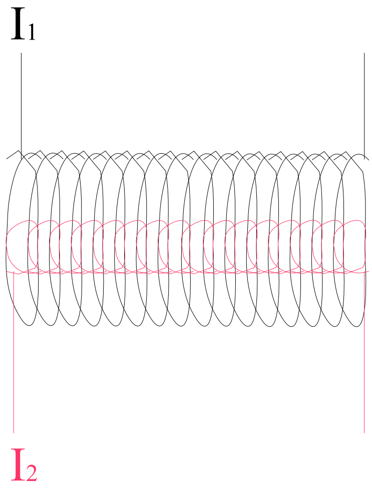

図 4

$$\Phi_1(I_1 = 0, I_2) = L_{11}0 + L_{12}I_2$$
$$\Phi_2(I_1, I_2 = 0) = L_{21}I_1 + L_{22}0$$

また,

$$\Phi_1(I_1 = 0, I_2) = \mu_0 n_2 I_2 \cdot l n_1 S_2$$
$$\Phi_2(I_1, I_2 = 0) = \mu_0 n_1 I_1 \cdot l n_2 S_2$$

よって

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l S_2$$

一般に $L_{ij} = L_{ji}$ が成り立つ.

交流回路

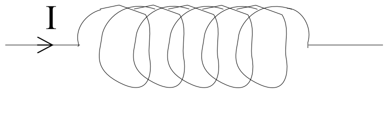

図 5

コイルの起電力の大きさは

$$\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = L\left|\frac{dI}{dt}\right|$$

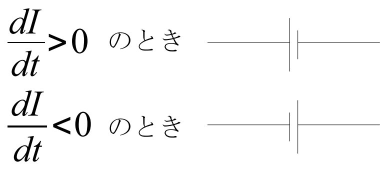

図 6

LCR 回路

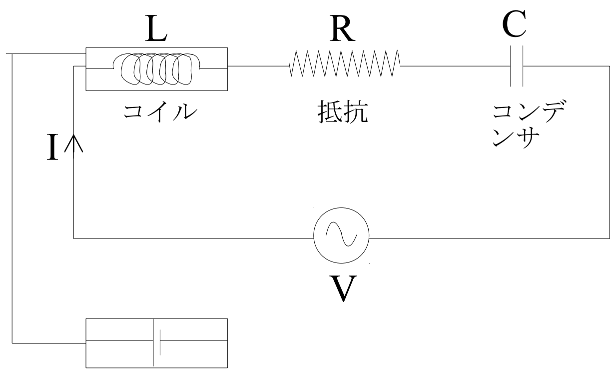

図 7

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}Q=V$$

両辺を時間微分して,$\frac{dQ}{dt}=I$ と書き換えると,

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=\frac{dV}{dt}$$

となり,I についての 2 階の微分方程式が得られる.
とくに $\frac{dV}{dt}=0$ でも電流は振動する.
抵抗が 0 であるときは LC 回路といい (ただし $\frac{dV}{dt}=const.$), 電流 I は単振動する.