講義ノート第 5 回

1　静電場

1.11　静電ポテンシャル

1.11.1　静電場は渦を持つか？

空間の任意の位置に電荷 $q_i(i = 1, 2, 3...)$ が固定された静電場の式は,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \tag{1}$$

この静電場の回転は, 回転の線形性から, 各電荷による電場の回転の重ね合わせとなる.

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = \sum_i \mathrm{rot}\left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}\right) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}\right) \tag{2}$$

$\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$
$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} = R$ とすると,

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}\right) = \mathrm{rot}\begin{pmatrix} \frac{x-x_i}{R^3} \\ \frac{y-y_i}{R^3} \\ \frac{z-z_i}{R^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z-z_i}{R^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y-y_i}{R^3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x-x_i}{R^3}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z-z_i}{R^3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-y_i}{R^3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-x_i}{R^3}\right) \end{pmatrix} \tag{3}$$

z 成分だけ計算する.

$$\text{z 成分} = (y - y_i)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^3}\right) - (x - x_i)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R^3}\right) \tag{4}$$

$$= -3(y - y_i)\frac{1}{R^4}\frac{\partial R}{\partial x} + 3(x - x_i)\frac{1}{R^4}\frac{\partial R}{\partial y} \tag{5}$$

$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x-x_i}{R}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y-y_i}{R}$ より,

$$\text{z 成分} = -3(y - y_i)\frac{x - x_i}{R^5} + 3(x - x_i)\frac{y - y_i}{R^5} = 0 \tag{6}$$

他の成分も同様に 0 となる. したがって

静電場の回転

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}(\text{静電場は渦なし}) \tag{7}$$

静電場に渦がないことを直観的に理解するには,1 つの点電荷に注目すればよいが, これは明らかに渦なしと分かる.(図 1) すると静電場には重ね合わせの原理が成り立つから, 任意の静電場に対して回転が 0 となり, 渦な

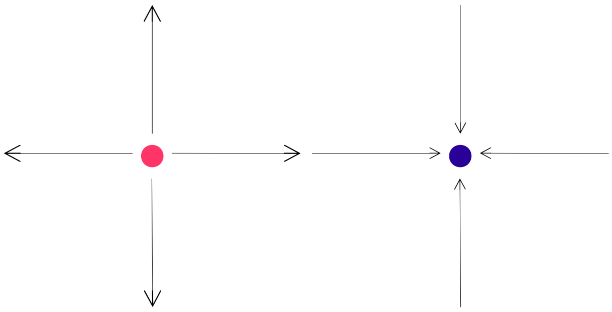

図 1

しであることが分かる.

式 (7) は Maxwell 方程式のひとつを静電場の場合に適応したものとなっている. ただし, 電場が時間に依存する場合にはその式に補正が入る.(後述)

1.11.2　線積分は経路に依存するか？

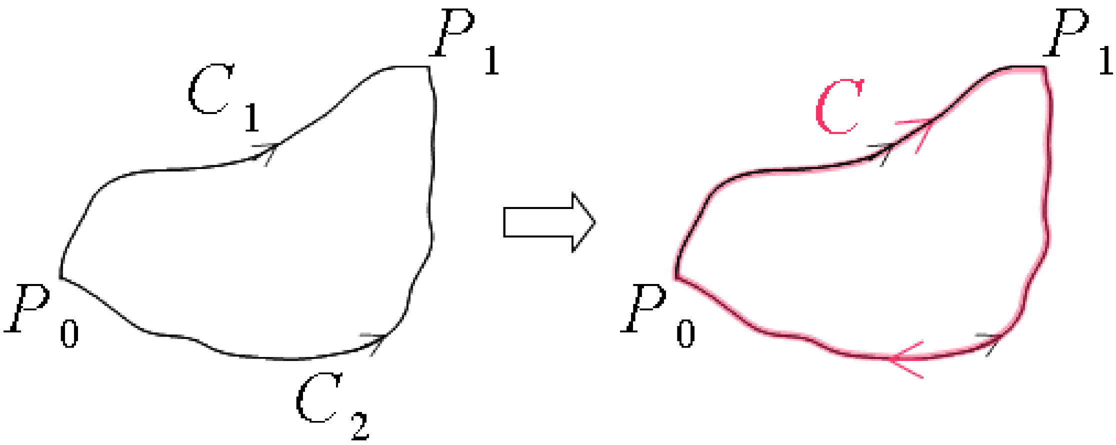

図 2

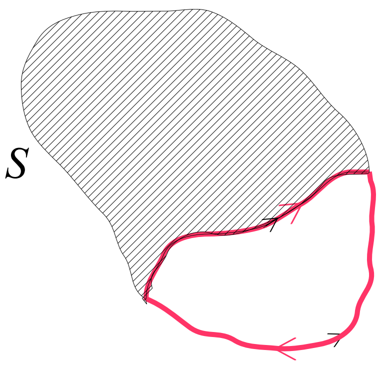

図 3

P_0 から P_1 に向かう異なる経路 C_1,C_2 について, 電場 $\mathbf{E}$ の線積分の差をとる.

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \tag{8}$$

ここで $-\int_{C_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot -\mathbf{dl}$ に着目すると, これは P_1 から P_0 に向かう経路 C_2 に沿った電場の線積分となっている. したがって $\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$ と方向に注意して経路をつなげると, 図 2 のような有向ループ C に沿った線積分となる. よって

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{C} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \tag{9}$$

ここで, 有向ループ C をふちにもつ任意の曲面 S をとると,Stokes の定理より,

$$\int_{C} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{S} \mathrm{rot}\mathbf{E} \cdot \mathbf{dS}(\text{面積分}) \tag{10}$$

もう一度繰り返すが, 静電場は渦なしだから,

$$\int_{S} \mathrm{rot}\mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \int_{S} \mathbf{0} \cdot \mathbf{dS} = 0 \tag{11}$$

よって

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \tag{12}$$

となり, 静電場の線積分は, 端点の位置のみにより, 途中の経路によらないことがわかる.
特に, ループ (閉路) についての線積分はループの形によらず 0 となる.

1.11.3 静電ポテンシャル (電位)

さて, スカラー場 ϕ(**静電ポテンシャル**あるいは**電位**と) を以下のように定義する.

静電ポテンシャル (電位)

$$\phi = -\int_{P_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \tag{13}$$

P_0 は $\phi(P_0) = 0$ となるように選ぶ.$\mathbf{r}$ は任意の位置である.
線積分は $P_0 \to \mathbf{r}$ の経路によらないので, 端点のみで指定する定積分は意味を持つ.

ではどのような意味を持つか.
次元は,$[\phi] = [\mathbf{E}] \times [\text{長さ}] = \frac{N}{C} \cdot m = \frac{J}{C}$
よって電位はエネルギーと結びついていることが分かる.

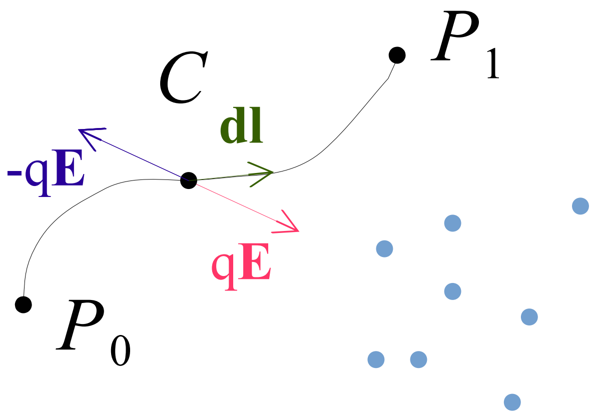

図 4

電場 $\mathbf{E}$ の中を P_0 から P_1 まで, 経路 C に沿って電荷 q を移動するには, 経路の各点で電場による力 $q\mathbf{E}$ を相殺するように $-q\mathbf{E}$ の力をかけて行う.
それに要する仕事は

$$\int_C (-q\mathbf{E}) \cdot \mathbf{dl} = -q \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = q\left(\phi(P_1) - \phi(P_0)\right) = q\phi(P_1) \tag{14}$$

例

原点 O に点電荷 q を固定する.

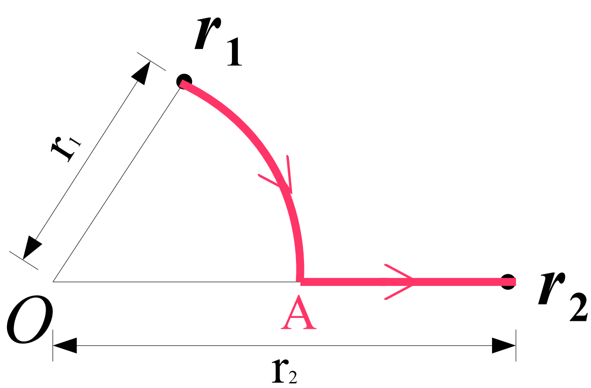

図 5

有向経路に沿った, 電場の線積分は,

$$\int_{\mathbf{r}_1 \to A \to \mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{\mathbf{r}_1 \to A} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} + \int_{A \to \mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \tag{15}$$

$\mathbf{r}_1 \to A$ の区間は $\mathbf{E}$ と $\mathbf{dl}$ が常に直交するから,$\int_{\mathbf{r}_1 \to A} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0$
$A \to \mathbf{r}_2$ の区間は明らかで,

$$\int_{A \to \mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2} dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{16}$$

次に, 位置 $\mathbf{r_1}$ と位置 $\mathbf{r_2}$ の電位の差を求める. 電位が 0 になる基準の点を P_0 とすると,

$$\phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2) = -\int_{P_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} - \left(-\int_{P_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}\right) \tag{17}$$

$$= \int_{\mathbf{r}_1}^{P_0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_{P_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \tag{18}$$

原点に１個の点電荷 q がある場合

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \\ |\mathbf{r}| = r \\ r_2 \to \infty \end{cases} \tag{19}$$

とすると, 無限遠 ∞ を基準点とする電位は,$\phi(\infty) = 0$ となるから,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{20}$$

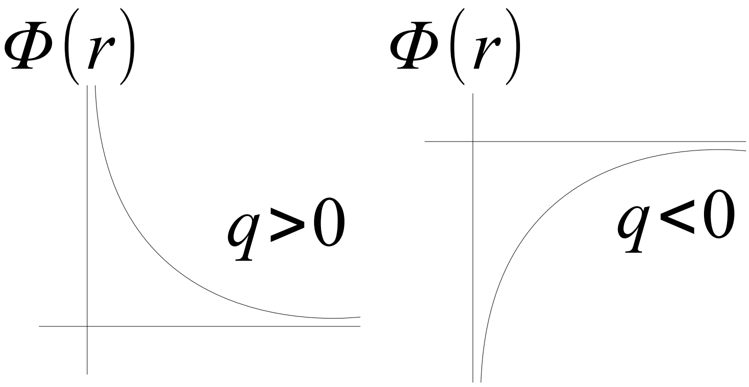

図 6

点電荷集団の場合

($\mathbf{r}_i$ に q_i を固定)

電場について重ね合わせの原理が成り立つため, 電位についても重ね合わせの原理が成り立ち, $\phi(\infty) = 0$ とすると,

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \tag{21}$$

さて, 電位と電場はどのような関係によって結ばれているか.
そのために位置 $\mathbf{r}$ と, そこからわずかに移動した位置 $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ の電位差を考える.
まず式 (17),(18) から,

$$\phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \tag{22}$$

左辺で,$\delta\mathbf{r}$ は微小変位だから,$\delta\mathbf{r}$ の 2 次以上の補正項を無視すると,

$$\phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - \phi(x, y, z) \simeq \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\delta z \tag{23}$$

右辺で,$\delta\mathbf{r}$ は微小変位だから, 電場を位置 $\mathbf{r}$ で代表させて線積分すると,

$$-\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \simeq -\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{r} = -E_x\delta x - E_y\delta y - E_z\delta z \tag{24}$$

$\delta\mathbf{r}$ が任意の微小変位であるから, 両辺の係数を比較して,

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{25}$$

さて, 任意のスカラー場 V の**勾配** **(gradient)** を以下のように定義する.

スカラー場 V の勾配

$$\mathbf{grad}\, V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{26}$$

すると電場と電位の関係は以下のように書ける.

電場と電位の関係

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,\phi \tag{27}$$

例

原点に 1 つの点電荷がある場合,$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると, 電位は,$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ となる.
勾配の x 成分に-を掛けたものは,

$$-(\mathbf{grad}\,\phi)_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{28}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3} = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)_x \tag{29}$$

$$= E_x \tag{30}$$

1.11.4 等電位面

電位が $\phi(x,y,z) = \phi_0$, つまり一定値をとる面を, **等電位面**という.
電位 ϕ となる等電位面は, その勾配 $\mathbf{grad}\phi$ に垂直となる.
また, 勾配の符号を変えたものが電場であるから, 電場も等電位面に垂直になる.

$$\mathbf{grad}\,\phi \perp \text{等電位面} \tag{31}$$

$$\mathbf{E} \perp \text{等電位面} \tag{32}$$

例[*1]

原点に 1 つの点電荷がある場合, 電位は $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ であるため, 等電位面は, 点電荷を中心とする球面となる.
したがって電場は等電位面と垂直となる.

[*1] ここからは第 6 回の内容ですが, 切りの都合で続けて書かせて頂きます.

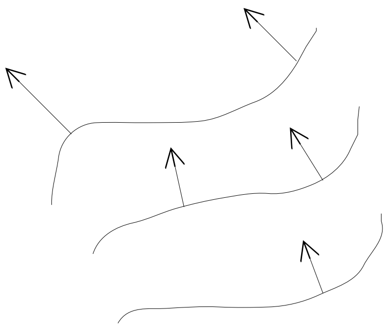

図 7

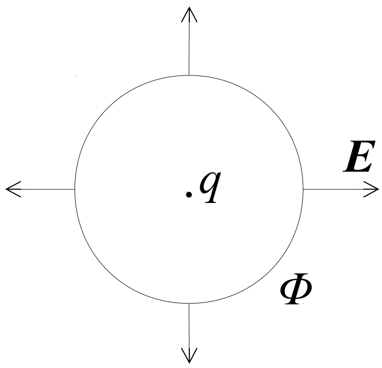

図 8

任意の静電場について,等電位面 $\perp$ $\mathbf{E}$ となることを証明する.

証明

ある等電位面上の位置 $\mathbf{r}$ と, そこからわずかにずれた位置 $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$ の間の電位差は,

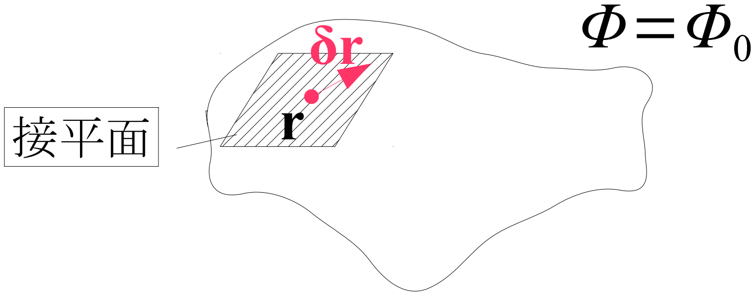

図 9

$$\phi(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})-\phi(\mathbf{r}) = \delta x\frac{\partial\phi}{\partial x}+\delta y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\delta z\frac{\partial\phi}{\partial z}+\begin{pmatrix}\delta\mathbf{r}\text{ についての}\\ 2\text{ 次以上の補正}\end{pmatrix} \tag{33}$$

$$= \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{grad}\,\phi+\begin{pmatrix}\delta\mathbf{r}\text{ についての}\\ 2\text{ 次以上の補正}\end{pmatrix} \tag{34}$$

変位を表すベクトル $\delta\mathbf{r}$ を等電位面に対する接平面内に取ると,$\delta\mathbf{r}$ についての 1 次の項は消え,

$$\phi(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})-\phi(\mathbf{r})=0+\left(\begin{array}{l}\delta\mathbf{r}\text{ についての}\\ 2\text{ 次以上の補正}\end{array}\right) \tag{35}$$

となる. よって $\delta\mathbf{r}$ が接平面内 (とみなせる) ならば,

$$\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{grad}\,\phi=0 \Leftrightarrow \delta\mathbf{r}\perp\mathbf{grad}\,\phi \Leftrightarrow \text{接平面}\perp\mathbf{E} \tag{36}$$

(証明終)