Sprawozdanie NUM9

Paweł Wacławik

7 stycznia 2023

1 Wstęp

Na podstawie zadanej funkcji wzorem:

$$f_n(x) = (\exp x - 2)^n, \tag{1}$$

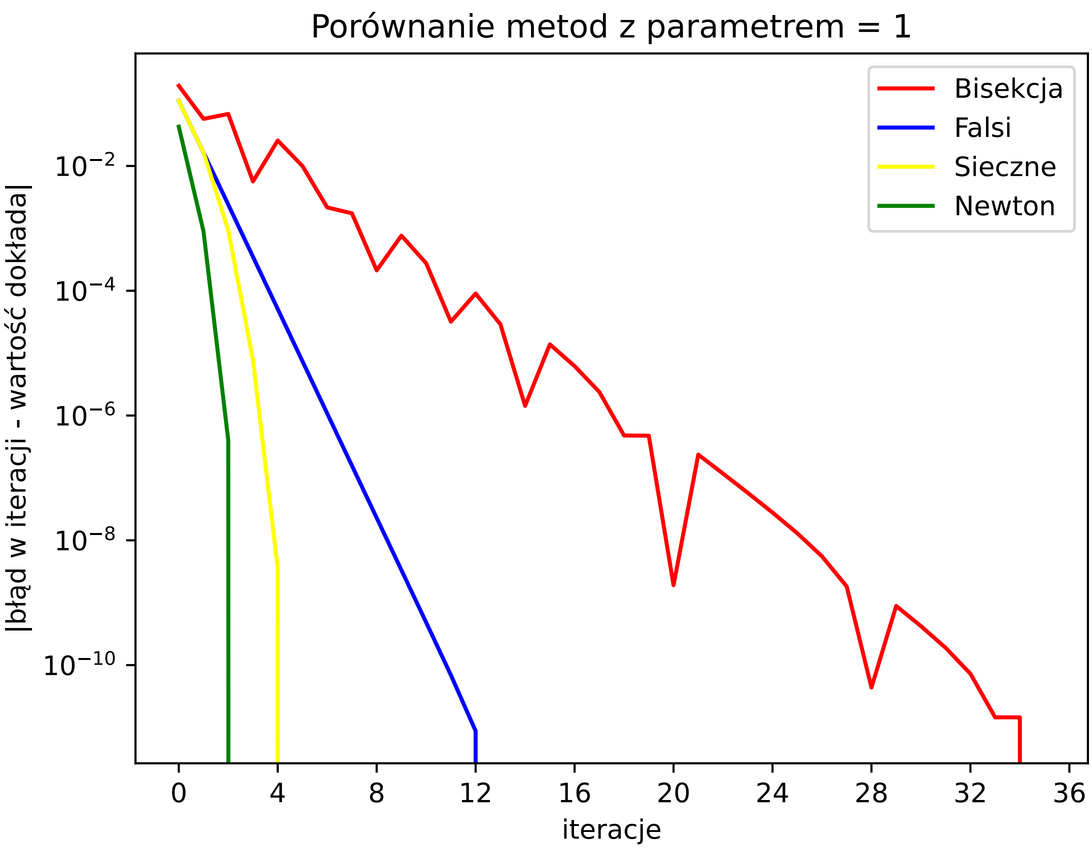
gdzie $n = 1, 2, 3$. Chcemy zneleźć pierwiastek $f_n(x) = 0$ z dokładnością 10^{-10}. Na podstawie powyższej funkcji chcemy porównać ze sobą cztery metody:

- bisekcji
- falsi
- siecznych
- Newtona

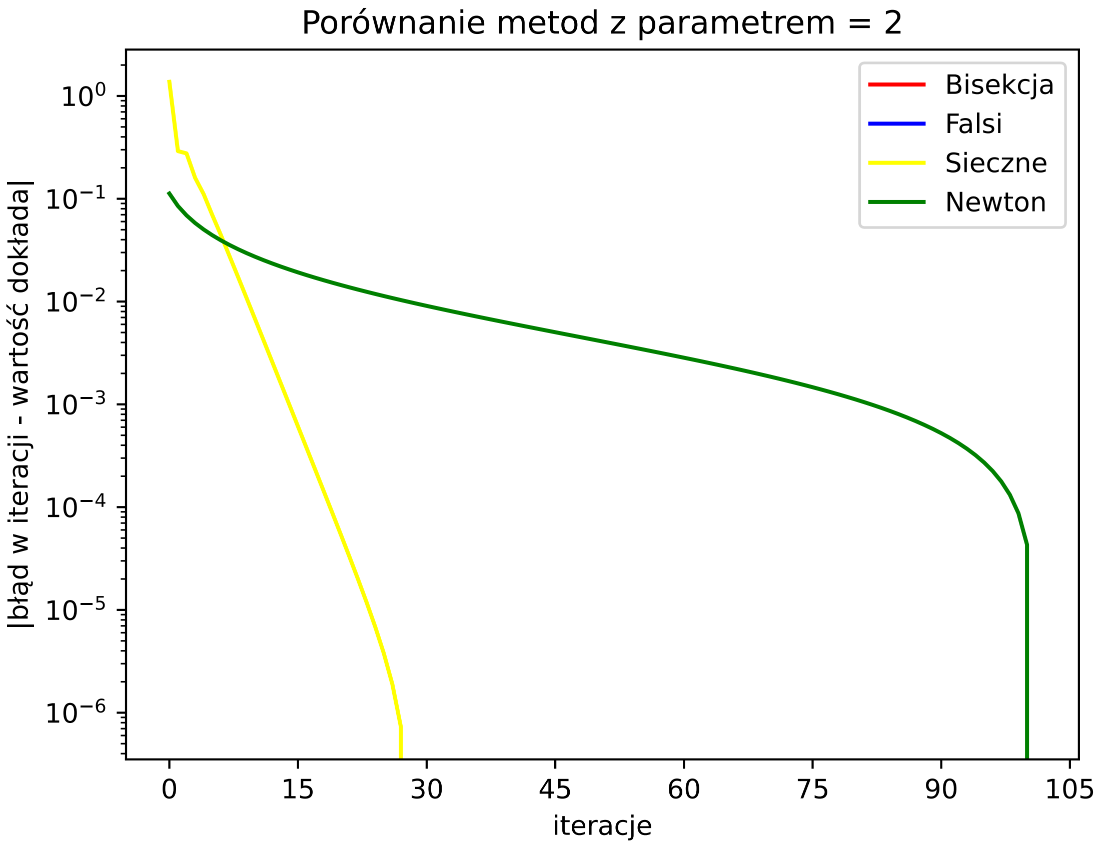
Są to metody, które wykorzystujemy do znajdywania miejsc zerowych funkcji. Czyli takich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość zero.

2 Wyniki

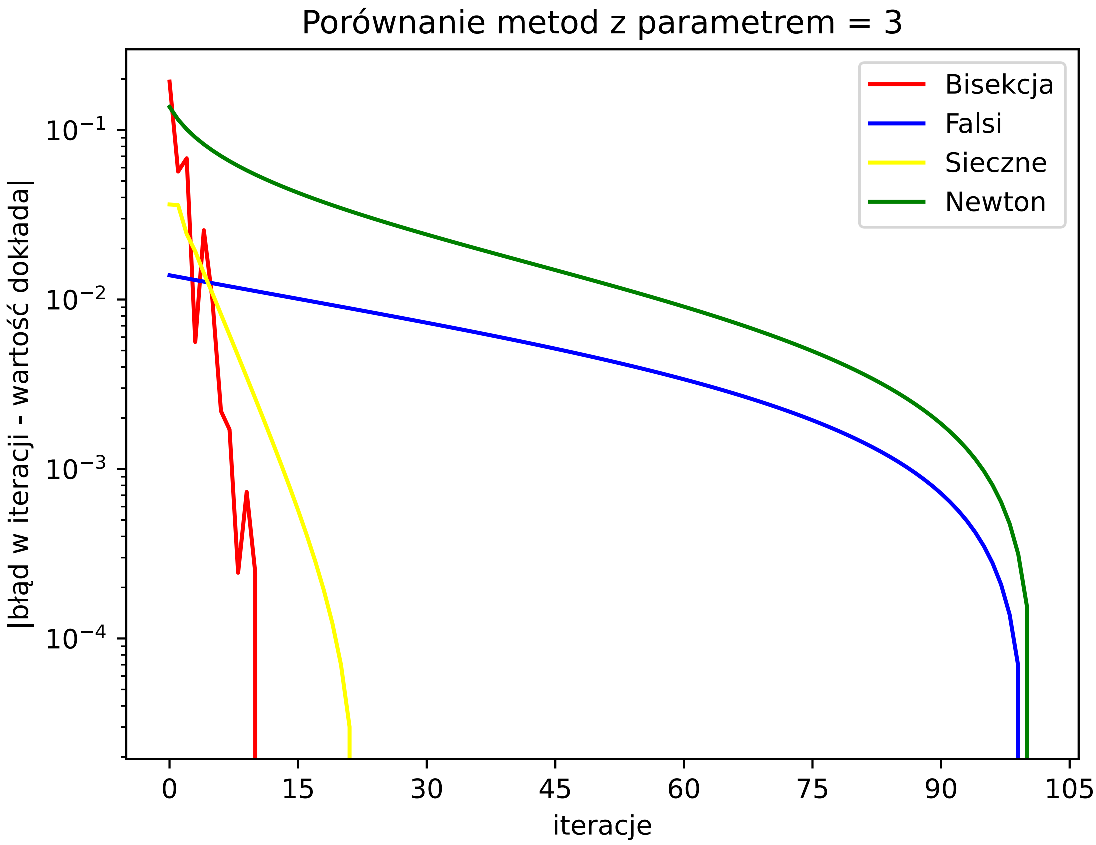
Dla $\exp x - 2$:



Pierwiastek tej funkcji z dokładnością 10^{-10} wynosi: **0.6931471805600254**. Jak widać metoda Newtona jest najszybsza, lecz meotda siecznych jest niewiele gorsza. Natomiast metoda bisekcji bardzo słabo wypada na tle innych metod. Następnie dla $(\exp x - 2)^2$ otrzymujemy:



Jak widać na wykresie metoda bisekcji i falsi nie działją dla pierwiastków parzysto-krotnych, ponieważ nie jest spełniony warunek $f(x_1) * f(x_2) < 0$. Niestety metoda Newtona jest znacznie mniej wydajna kiedy szukany pierwiastek jest więcej niż jedno krotny. Dla tak przedstawionej funkcji najlepsza okazuje się być metoda siecznych. Kolejno dla funkcji $(\exp x - 2)^3$ otrzymujemy:

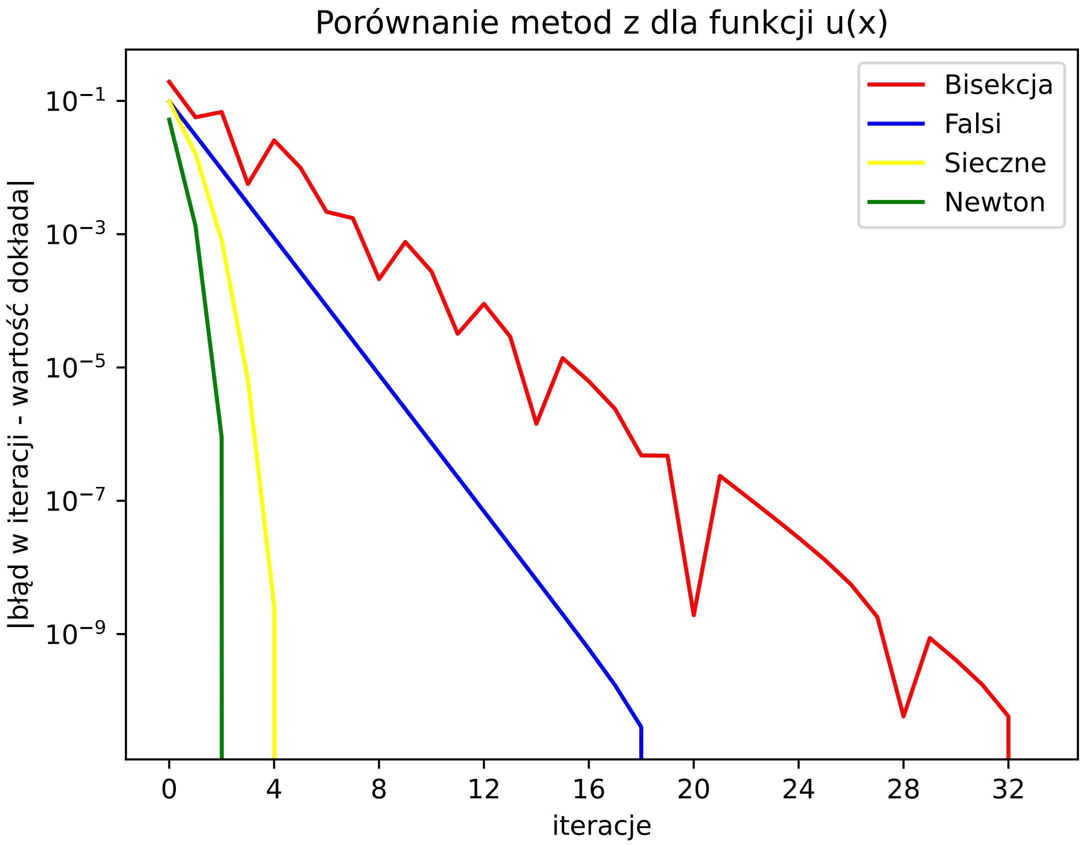


Jak widać tym razem metoda bisekcji jest najszybsza, a następnie jest metoda siecznych. Co może być zaskakujące to metoda Falsi ma bardzo słaby wynik, dzieje się tak dlatego że im wyższa krotnośc pierwiastka tym funkcja jest bardziej spłaszczona w jego otoczeniu, więc metoda falsi potrzebuje bardzo wielu iteracji, żeby znaleźć pierwiastek z zadaną precyzją.

3 Usprawnienie

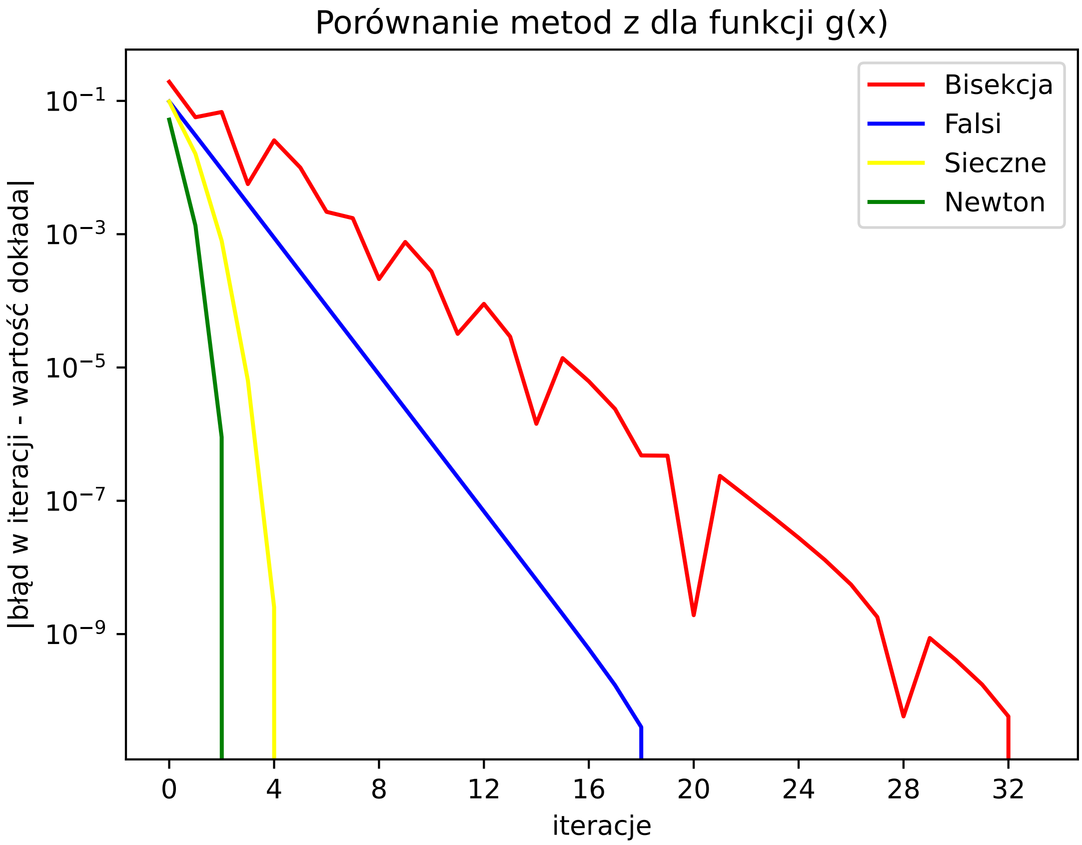
Jak widzieliśmy wcześniej metoda bisekcji, falsi nie działają dla pierwiastków parzysto-krotnych, a także metoda Newtona nagle staje się mało efektywna. Rozważmy więc przypadek dla n = 2 czyli $f(x) = (\exp x - 2)^2$. Tworzymy nową funkcję $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, która posiada dokładnie te sam pierwiastek lecz jest o jednokrotny. Wzór powstałej funkcji przedstawia się nastepująco:

$$u(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\exp x} \tag{2}$$



Dla funkcji (2) otrzymujemy bardzo podobne wyniki jak za pierwszym razem dla funkcji (1) z parametrem n = 1. Zobaczy co się dzieje dla funkcji z parametrem n = 3 czyli $f(x) = (\exp x - 2)^3$. Jak poprzednio tworzymy nową funkcję $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Wzór funkcji g(x) wygląda następująco:

$$g(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 * \exp x} \tag{3}$$



Dla takiej funkcji wykres jest identyczny jak dla funkcji g(x).

4 Podsumowanie

Podsumowywując metoda bisekcji i falsi działają, tylko wtedy kiedy jest spełniony warunek $f(x_1) * f(x_2) < 0$, więc nie możemy ich wykorzystać do szukania pierwiastków parzysto-krotnych. Te dwie metody wymagają także więcej iteracji, a przyajmniej dla pierwiastka jedno krotnego. Metoda falsi dla większych nież jedno-krotne i nieparzysto-krotne pierwiastki staje się bardzo mało efektywna z powodu wypłaszczenia w okolicy pierwiastka. Metoda bisekcji będzie naszym pierwszym wyborem, wtedy kiedy nie będziemy mogli zastosować uspprawnienia opisanego w podrozdziale trzecim. Metoda siecznych zawsze działa, więc będzie ona naszym pierwszym wyborem, lecz jeśli będziemy mogli zastosować wcześniej wspomniane usprawnienie to będziemy wybierać metode Newtona z powodu lepszej efektywności algorytmu.