Zadanie numeryczne NUM7

Paweł Wacławik

20 grudnia 2022

1 Sposób uruchomienia

python3 main.py

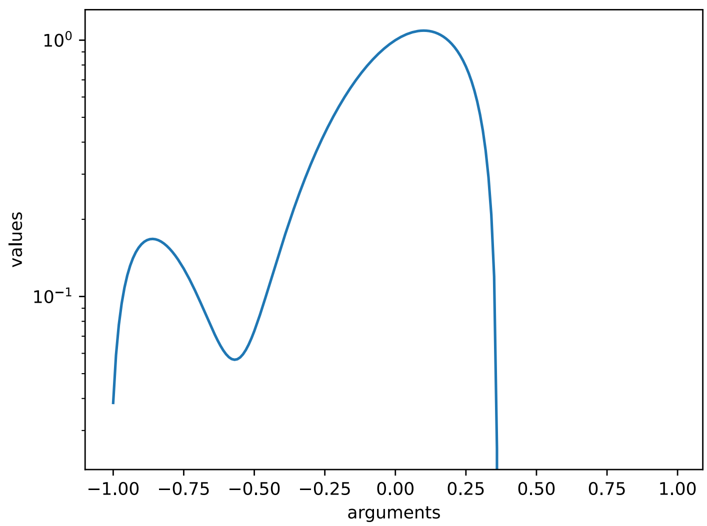
2 Wstęp

Zadanie to polegało na znalezieniu wielomianu interpolacyjnego dla argumentów wyznaczanych z dwóch różnych funkcji, a następnie na podstawie tych punktów znalezienie wartości im odpowiadających po podstawieniu do wzoru. Na podstawie par (x,y) należało znaleźć wielomian interpolacyjny, a następnie go wykreślić. Jak będzie można zauważyć dobór argumentów ma ogromne znaczenie dla końcowego wyniku. Wartości dla wybranych argumentów obliczałem ze wzoru: $y(x) = 1/(1 + 25x^2)$

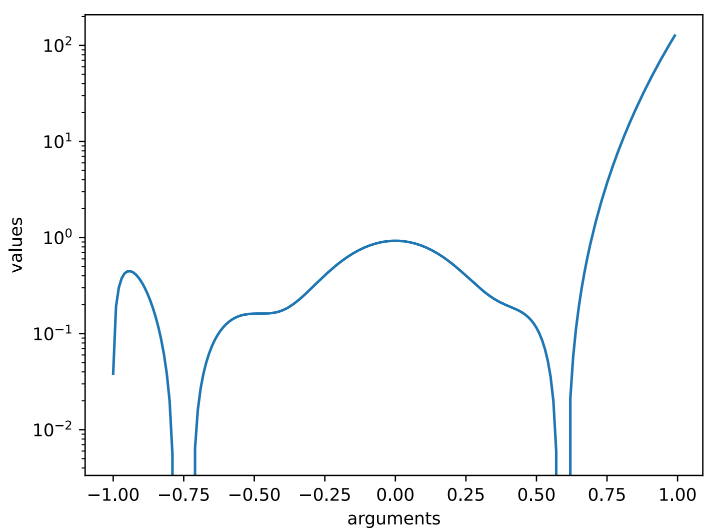
3 Wielomany interpolacyjne oraz wykresy

Pierwsze argumenty tworzą jednorodną siatkę co jak się okazuje nie jest najlepszym wyborem:

Dla n = 5:
-8.23119473618664x^4 $-$ $14.59431690813234x^3$ $-$ $5.703069865913904x^2$ $+$ $1.6215907675702586x^1 + 1.0x^0$

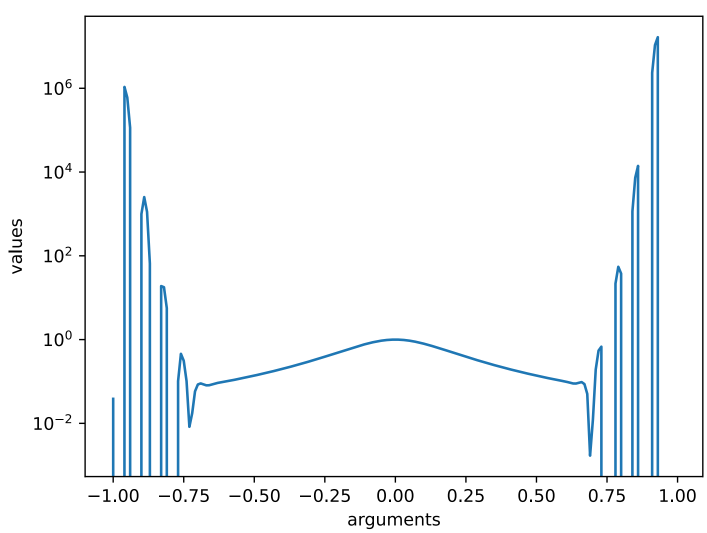


Dla n = 10:
162.72275851684483x^9 $+$ $226.21422029450818x^8$ $-$ $112.9645596315292x^7$ $-$ $223.07239714743721x^6$ $+$ $21.939397944966668x^5$ $+$ $78.98078289272244x^4$ $-$ $1.186370183698796x^3$ $-$ $12.491279836902725x^2$ $+$ $0.008369228297329473x^1$ $+$ $0.9267312104515961x^0$



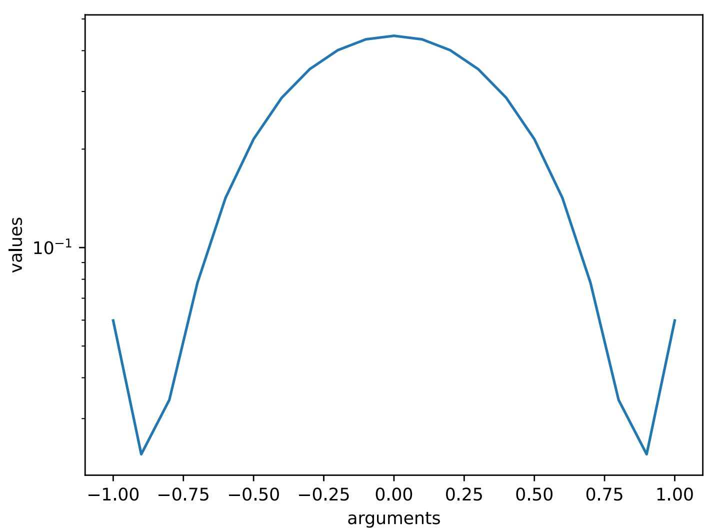
Dla n = 60:

-3.808402691858225e+17x^{59} $- 5.696912574201401e+17x^{58} + 3.3272604669115264e+18x^{57} + 5.173587049124039e+18x^{56} - 1.3632739994310384e+19x^{55} - 2.2116692630579106e+19x^{54} + 3.483678453014791e+19x^{53} + 5.921114329276645e+19x^{52} - 6.22847111720859e+19x^{51} - 1.1142447414843166e+20x^{50} + 8.286630018403592e+19x^{49} + 1.5678945267326124e+20x^{48} - 8.5143084477647e+19x^{47} - 1.7143984971598715e+20x^{46} + 6.929679026342898e+19x^{45} + 1.493396657335036e+20x^{44} - 4.5426267231381545e+19x^{43} - 1.0541448116619253e+20x^{42} + 2.413572470635718e+19x^{41} + 6.126378883282723e+19x^{40} - 1.0730655039014906e+19x^{39} - 2.925026359194123e+19x^{38} + 3.747936599104337e+18x^{37} + 1.180095863082561e+19x^{36} - 1.1770662544479672e+18x^{35} - 3.914625052130805e+18x^{34} + 2.769365067715256e+17x^{33} + 1.1045138162736772e+18x^{32} - 5.8050237493402376e+16x^{31} - 2.5987143207907626e+17x^{30} + 9928271664303730.0x^{29} + 5.121005446851936e+16x^{28} - 1296410944439227.8x^{27} - 8519739353022898.0x^{26} + 156280784063948.75x^{25} + 1177830003958300.2x^{24} - 13465232331134.025x^{23} - 136663838111204.23x^{22} + 1001116088234.1703x^{21} + 13209975737640.902x^{20} - 56613737848.316086x^{19} - 1066772122003.1707x^{18} + 2497663964.911973x^{17} + 72252298192.86261x^{16} - 82652192.3461702x^{15} - 4151350292.134698x^{14} + 2004501.5037741887x^{13} + 206767239.31592992x^{12} - 33915.26104672438x^{11} - 9234594.482006634x^{10} + 378.59702126759146x^{9} + 385416.47663708293x^{8} - 2.5439555903969175x^{7} - 15593.04927781986x^{6} + 0.008875241267474902x^{5} + 624.8949496557472x^{4} - 1.2021737155500524e-05x^{3} - 24.99986213977127 4x^{2} + 2.637110479943327e-09x^{1} + 0.9999999699441827x^{0}$

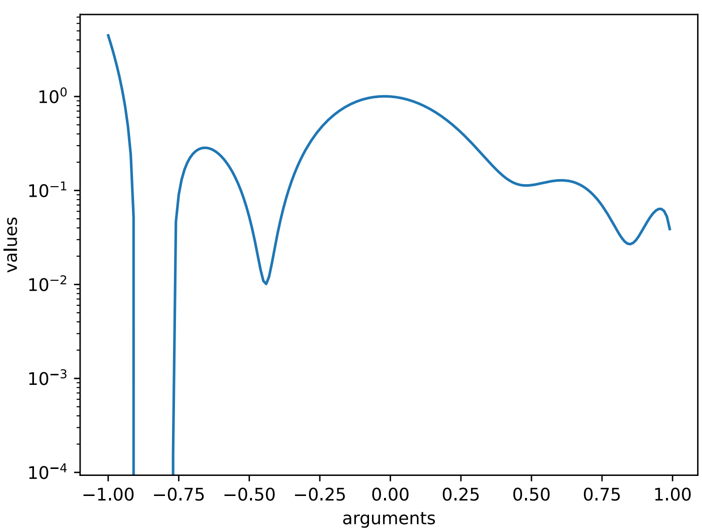


Jak widać dla takiego doboru argumentów dostajemy bardzo słabe odwzorowanie funkcji jakiej szukamy. Dla n = 60 widać oscylacje Rungego. Pojawiają się one, ponieważ otrzymujemy wielomian wysokiego stopnia, któremu narzucamy przejście przez określone punkty. Dla drugiego doboru punktów wykresy wyglądają znacznie lepiej.

Dla n = 5:
0.711566513679865x$^4 + 9.020562075079397e - 16x^3 - 1.0958124310669934x^2 - 4.198030811863873e - 16x^1 + 0.4440886611876045x^0$

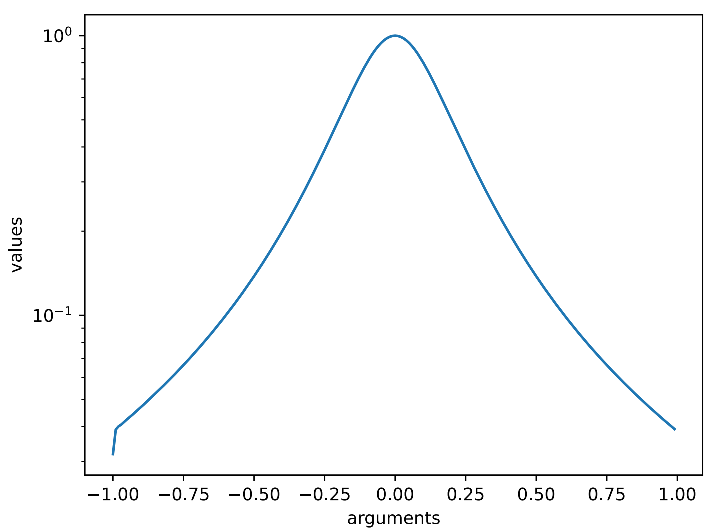


Dla n = 10:
-46.158261230920644x^9 $+$ $47.55375336981703x^8$ $+$ $81.71182410690592x^7$ $-$ $86.08434910321292x^6$ $-$ $46.878345785678576x^5$ $+$ $51.738982040106826x^4$ $+$ $9.605263452597256x^3$ $-$ $11.965216464005834x^2$ $-$ $0.5060908137903634x^1$ $+$ $1.0000000000000007x^0$



Dla n = 60:

$2512028683319.6943\mathrm{x}^{59} - 2611710335411.3315x^{58} - 35798074102127.66x^{57} + 37323072095148.336x^{56} + 241961829351156.03x^{55} - 253056219392631.0x^{54} - 1031954133471603.8x^{53} + 1083026062265885.6x^{52} + 3116815342087059.0x^{51} - 3283817804201278.5x^{50} - 7092506027781147.0x^{49} + 7505294084097259.0x^{48} + 1.2630742736227432e+16x^{47} - 1.3432202021286194e+16x^{46} - 1.805096968087716e+16x^{45} + 1.930445387181774e+16x^{44} + 2.1062210913043536e+16x^{43} - 2.2670306484484612e+16x^{42} - 2.030882325506225e+16x^{41} + 2.2021410413545296e+16x^{40} + 1.6317812298949326e+16x^{39} - 1.7846341957329854e+16x^{38} - 1.098651483615567e+16x^{37} + 1.2136088840842216e+16x^{36} + 6218431953962141.0x^{35} - 6950842896023765.0x^{34} - 2963230763098674.0x^{33} + 3358763948039162.5x^{32} + 1188222629461804.2x^{31} - 1369741428016292.0x^{30} - 400169843539566.5x^{29} + 470835777404696.4x^{28} + 112763863172075.86x^{27} - 136072926988852.73x^{26} - 26443303393024.42x^{25} + 32935430728074.223x^{24} + 5121914692753.658x^{23} - 6642550546499.822x^{22} - 811488304305.4342x^{21} + 1109399352290.0713x^{20} + 103855392481.23143x^{19} - 152351838529.34402x^{18} - 10565243821.359451x^{17} + 17078590925.936031x^{16} + 836890310.531625x^{15} - 1553242792.231537x^{14} - 50243830.41284245x^{13} + 114367306.52171184x^{12} + 2205468.632381831x^{11} - 6867677.709801293x^{10} - 67353.097360238x^{9} + 344732.8930131576x^{8} + 1331.542985334851x^{7} - 15173.696645554077x^{6} - 15.221881181396796x^{5} + 622.7737776181441x^{4} + 0.08232521736169868x^{3} - 24.996543129386435x^{2} - 0.00013299726266622142x^{1} + 1.0x^{0}$



Jak widać drugi dobór punktów jest znacznie lepszy. Argumenty są dobrane na podstawie wielomianu Czebyszewa. Jest to wielomian, który jest zdefiniowany jako wielomian o n współczynnikach, który interpoluje n+1 punktów danych. Wielomian Czebyszewa jest szczególnie popularny, ponieważ jest jednym z najbardziej dokładnych wielomianów interpolacyjnych.
Następne wartości wybieram na podstawie wzoru: $y = x^2$
Dla n = 100: