



Norges teknisk-naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

MA0001 Brukerkurs i
matematikk A
Høst 2017

Løsningsforslag — Øving 11

Innleveringsoppgaver

Oppgave 4, Eksamen 2013 Anta at endringen i temperatur T i et vekstkammer (målt i Fahrenheit) over en 12-timers periode er gitt ved ligningen

$$\frac{d}{dt}T(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

for $0 \leq t \leq 12$. Temperaturen ved tid $t = 0$ er $T(0) = 45$. Hva er temperaturen etter 3 timer?

Løsning:

Vi finner de anti-deriverte til $\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$:

$$\begin{aligned}T(t) &= \int \frac{d}{dt}T(t) dt \\&= \int \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) dt \\&= \frac{6}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + C.\end{aligned}$$

Vi bruker initialbetingelsen og finner at

$$45 = T(0) = \frac{6}{\pi} \sin(0) + C = C.$$

Dermed er $T(t) = \frac{6}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 45$ og

$$\begin{aligned}T(3) &= \frac{6}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}3\right) + 45 \\&= \frac{6}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 45 \\&= \frac{6}{\pi} + 45.\end{aligned}$$

Oppgave 3, Eksamen 2015 Finn alle anti-deriverte av

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad x > 0.$$

Løsning:

Funksjonen f er på formen $f(x) = cx^r$ der $c = 1/\sqrt{2}$ og $r = -1/2$. Dermed er alle anti-deriverte gitt ved

$$\begin{aligned}\int f(x) \, dx &= c \int x^r \, dx \\ &= c \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{-1/2+1} x^{-1/2+1} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1/2} x^{1/2} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} x^{1/2} + C \\ &= \sqrt{2} \sqrt{x} + C \\ &= \sqrt{2x} + C.\end{aligned}$$

3 Finn alle anti-deriverte av

$$f(x) = \frac{3}{x} + \sin(3x) + \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x} + x^3 + 3^x.$$

Løsning:

$$\begin{aligned}\int f(x) \, dx &= \int \left(\frac{3}{x} + \sin(3x) + \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x} + x^3 + 3^x \right) \, dx \\ &= \int \left(3x^{-1} + \sin(3x) + x^{-3} + x^{1/3} + x^3 + e^{\ln(3)x} \right) \, dx \\ &= 3 \ln x - \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + \frac{1}{1/3+1} x^{1/3+1} + \frac{1}{3+1} x^{3+1} \frac{1}{\ln 3} e^{\ln(3)x} + C \\ &= 3 \ln x - \frac{1}{3} \cos(3x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4} x^{4/3} + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{\ln 3} 3^x + C.\end{aligned}$$

4 Finn alle anti-deriverte av

$$f(x) = \frac{1}{1/4 + x^2}.$$

Hint: arctan!

Løsning:

Vi vet at

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nå er

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1/4 + x^2} \\ &= \frac{4}{1 + 4x^2} \\ &= \frac{4}{1 + (2x)^2}. \end{aligned}$$

Så vi bruker regelen $\int f(ax) = \frac{1}{a}F(ax) + C$.

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= \int \frac{4}{1 + (2x)^2} \, dx \\ &= 4 \int \frac{1}{1 + (2x)^2} \, dx \\ &= 4 \cdot \frac{\arctan(2x)}{2} + C & \left(\text{fordi } \int \frac{1}{1 + (x)^2} \, dx = \arctan x + C \right) \\ &= 2 \arctan(2x) + C. \end{aligned}$$

Anbefalte øvingsoppgaver

Fra Avsnitt 5.8 (side 272–273) i *Calculus for Biology and Medicine*, 3. utgave av Claudia Neuhauser.

- 1, 3, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29, 37.
- 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71.

OBS: Disse oppgavene skal *ikke* leveres inn!