Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Øving 10

Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript s, bør gjøre b, og kan gjøre k.

1 Gjør oppgave 2^s for matrisene A og B, 12^s, og 16^k på **side 266-272.**

2 Gjør oppgave 1^s a),b), 5^b, $6a)^s$, 11^b, 16^s, 17^b, 31^b, og 34^b på **side 283-287.**

3 **Utfordring:** La $B = [b_{ij}]$ være en $n \times n$-matrise der $b_{ij} = c_{ij}\lambda + c_{ij}$ med $c_{ij}, c'_{ij} \in \mathbb{R}$. Vis at $\det(B)$ er et polynom i λ av grad n. (**Hint:** Induksjon.)

4 Gjør oppgave 2^s, 3^s, 9^b, 10^k, 16^k, og 21^b på **side 298-303**.

Et nytt tallsystem

Vi skal fortsette med noe vi begynte med i forrige øving, nemlig med konstruksjonen av vårt nye tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. så må vi spørre oss hvilke egenskaper ønsker vi at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:

- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutativ*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.
- *additiv invers:* Gitt z, så eksisterer z' slik at

$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:

- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.

- *distributive lover:*
  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *høyre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.
- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at
$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$
- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer z' slik at
$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$
- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker 2×2-matriser over de reelle tallene.

La A være en 2×2-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La
$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$
For eksempel,
$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$
og
$$Y = A - \sqrt{2} A^3$$
er elementer i S.

Nummereringen av oppgavene følger den fra tidligere øvinger.

(g^k) Anta at $b > 0$ og la
$$P = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{b}} & \sqrt{b} \\ -\frac{1}{\sqrt{b}} & 0 \end{bmatrix}$$
når $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$. Vis at
$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(h^k) Vis at $\det(a_0 I_2 + a_1 A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_0 + a_1 a & a_1 b \\ -\frac{a_1(1+a^2)}{b} & a_0 - a_1 a \end{bmatrix}\right) = a_0^2 + a_1^2$.