Løsnings-skisser Øving 10

Vanlige forbehold!
Kari H.

Oppgave 1

a) $f(x,y) = 4x-3y$ når $x^2+y^2=1$ har maks. og min. da skjæringskurven blir en ellipse i planet $z = 4x-3y$, og må ha topp- og bunnpunkt.

Løsning ved Lagrange:

$\nabla f = (4,-3)$, $\nabla g = (2x, 2y)$

Søker λ slik at

$$\left.\begin{aligned} 4 &= \lambda 2x \\ -3 &= \lambda 2y \end{aligned}\right\} \underset{(\lambda \neq 0)}{\Longrightarrow} \quad x = \frac{2}{\lambda}, \; y = -\frac{3}{2\lambda}$$

og $x^2+y^2=1$, dvs. $\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1$; $\lambda^2 = \frac{25}{4}$, $\lambda = \pm\frac{5}{2}$.

$\underline{\lambda = 5/2}$: $x = \frac{2}{\lambda} = \underline{4/5}$, $y = \underline{-\frac{3}{5}}$ $\Rightarrow f(x,y) = \underline{5}$

$\underline{\lambda = -5/2}$: $x = \underline{-\frac{4}{5}}$, $y = \underline{\frac{3}{5}}$ $\Rightarrow f(x,y) = \underline{-5}$

Altså har f maks. verdi 5 i punktet $(4/5, -3/5)$,
og min. verdi -5 i punktet $(-4/5, 3/5)$.

Bmk Kunne løst problemet i x med $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, eller ved å innføre $x = \cos t$, $y = \sin t$ og studere $4\cos t - 3\sin t$.

b) $\nabla f = (y,x)$, $\nabla g = (18x, 2y)$, $9x^2+y^2=18$ $(*)$

Søker λ s.a. $$\left.\begin{aligned} y &= \lambda 18x \\ x &= \lambda 2y \end{aligned}\right\} \underset{(\lambda \neq 0)}{\Longrightarrow} \quad y^2 = 9x^2$$

Innsatt i $(*)$ $x^2=1$, $y^2=9$ slik at $\underline{x=\pm 1}$, $\underline{y = \pm 3}$

Altså har $f = xy$ maksverdi 3 i $\underline{(1,3) \text{ og } (-1,-3)}$
minverdi -3 i $\underline{(1,-3) \text{ og } (-1,3)}$

Merk Problemet har løsning:
Topp- og bunnpunkt på skjæringskurven mellom den elliptiske sylinderen $9x^2+y^2=18$ og den hyperbolske flata $z = xy$.

Oppgave 2

Vil minimere $f(x,y,z) = \underline{x^2+y^2+z^2}$

når $\underline{x^2+y^2=1}$ (1) og $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ (2)

Løses rett fram:

$1+z^2$ har minste verdi når $z=0$. Men kan

vi ha $z=0$ i (2)? Betyr $1 - xy - 0^2 = 1 \Leftrightarrow$ $\underline{x \text{ eller } y = 0}$

Får punktene $\underline{\underline{(0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0)}}$

Bmk Med Lagrange er det fort gjort å overse

muligheten $z=0$!

Oppgave 3

a) $$\iint_{[1,2]\times[2,4]} xy \, d(x,y) = \int_1^2 x\left[\int_2^4 y\,dy\right]dx = \left[\int_2^4 y\,dy\right]\left[\int_1^2 x\,dx\right] = \frac{(4^2-2^2)(2^2-1)}{2\cdot 2} = \underline{\underline{9}}$$

b) $$\iint_R x\cos xy \, d(x,y) = \int_1^2\left[\int_\pi^{2\pi} x\cos xy \, dy\right]dx$$

$$\int_1^2 \left[\sin xy\right]_{y=\pi}^{y=2\pi} dx = \int_1^2 \sin(2\pi x) - \sin(\pi x)\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x) + \frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}}}$$

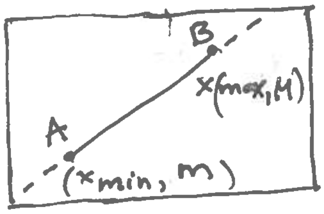
Oppgave 4

En kontinuerlig funksjon på en lukket, begrenset mengde (her R) har såvel maksimum M som minimum m. Altså har vi uten videre

$$m|R| \le \iint_R f(x,y)\,d(x,y) \le M|R| \Leftrightarrow m \le \underbrace{\frac{\iint_R f(x,y)\,d(x,y)}{|R|}}_{q} \le M$$

$m \neq M$:

Ved å bruke skjæringssetningen på segmentet / linja som forbinder (x_{min}, m) og (x_{max}, M) er vi framme:



$m < M$

Studer $g(x,y) = f(x,y) - q$; en kont. funksjon som er negativ i A, positiv i B. Altså fins $(\bar{x}, \bar{y})$ på linja der $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = q$

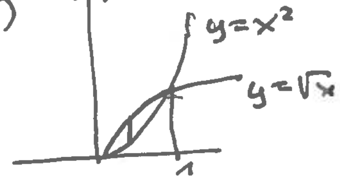
Oppgave 5

a) $$\iint_R y \, d(x,y) = \int_1^2 \left(\int_y^{y^2} y \, dx \right) dy$$

$$= \int_1^2 y(y^2 - y) \, dy$$

$$= \left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} \right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{17}{12}}}$$

b)

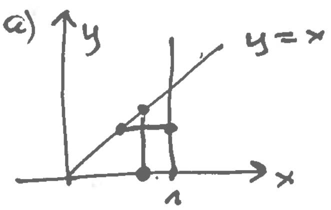


$$\iint_R x^2 y \, d(x,y)$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \, dx = \cdots = \underline{\underline{\frac{3}{56}}}$$

Oppgave 6

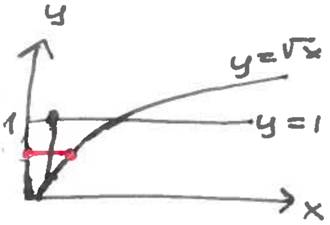
a)



$$\int_0^1 \left[\int_y^1 e^{x^2} dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2} dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{e-1}{2}}}$$

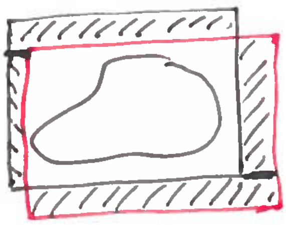
b) $$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 e^{x/y^2}\,dy\right] = \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} e^{x/y^2}\,dx\right] dy$$



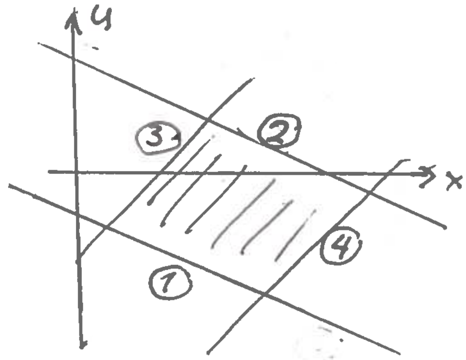
$$= \int_0^1 \left[y^2 e^{x/y^2}\right]_{x=0}^{x=y^2}$$

$$= \int_0^1 y^2(e-1)\,dy = \underline{\underline{\frac{e-1}{3}}}$$

Oppgave 7



Forskjellen er en endelig union av rektangler der integranden er 0.



Oppgave 8

$$I = \iint_R xy\, d(x,y) = ?$$

R er avgrenset av linjene

① $y = -\frac{1}{2} - \frac{x}{2}$ ② $y = \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$

③ $y = x - 1$ ④ $y = x - 4$

Vil innføre $\left.\begin{aligned} u &= x + 2y \\ v &= x - y \end{aligned}\right\}$ $u - v = 3y$ og $\underline{y = \frac{1}{3}(u-v)}$
$u + 2v = 3x$ og $\underline{x = \frac{1}{3}(u+2v)}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \underline{-\frac{1}{3}}$$

$A:\ -1 \le \underbrace{x+2y}_{u} \le 3,\ 1 \le \underbrace{x-y}_{v} \le 4$

Dermed

$$I = \int_1^4 \left[\int_{-1}^3 \frac{1}{9}(u+2v)(u-v)\frac{1}{3}\,du\right] dv$$

$$= \frac{1}{27}\int_1^4 \left[\int_{-1}^3 u^2 + uv - 2v^2\,du\right] dv = \frac{1}{27}\int_1^4 \left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^2 v}{2} - 2v^2 u\right]_{u=-1}^{u=3}$$

$$= \frac{1}{27}\int_1^4 \frac{28}{3} + 4v - 8v^2 \, dv$$

$$= \frac{1}{27}\left(28 + 30 - \frac{8}{3} 63\right) = \underline{\underline{-110/27}}$$

<u>Oppgave</u> 9 (*A* 5.10:20) Litt lin. alg. forutsettes, i Boka!

Oppgaven er noe slurvete presentert.

A er altså en <u>symmetrisk</u> matrise $(a_{ij} = a_{ji})$.

$\underline{f(x) = (Ax)\cdot x}$ $(n \geq 2)$

a) $Ax = \lambda x \Rightarrow f(x) = (\lambda x)\cdot x = \lambda \underbrace{\|x\|^2}_{g(x)}$

b) Vanlig utmultiplisering

c) $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ er en lukket, begrenset mengde. Altså har den kontinuerlige funksjonen f – polynom i $(x_1, \cdots, x_n)$ – både maksimum og minimum restriktert til S. For disse punktene, $\bar{x}$, finnes det ved Lagrange en konstant λ slik at

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x}) \quad \text{der } g(\bar{x}) = \|\bar{x}\|^2 = 1$$

Utfører partiellderivasjonen og får

$$2A\bar{x} = 2\lambda\bar{x} \iff A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

Altså er <u>maksimums- og minimumspunktene egenvektorer</u> til A! A er symmetrisk og har reelle egenverdier $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ med tilhørende ortonormale egenvektorer $v_1, \cdots, v_n$. (Kor 4.10.13): $f(v_k) \overset{a)}{=} \lambda_k$. Det følger at maksimumsverdien til f på S er den største egenverdien λ_n mens minimumsverdien er den minste, λ_1.