Flerdimensjonal analyse (MA1103)

Øving 9 – Repetisjon av Kapittel 2,3,5

Oppgave 1

Svar på følgende spørsmål (minst et svar er riktig):

a) Hva er en ekvivalent formulering av $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *er kontinuerlig i et opphopningspunkt* $a \in A$?

- ☐ Til en $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \epsilon$ for alle $\mathbf{x} \in A$ slik at $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.
- ☐ Til enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \epsilon$ for alle $\mathbf{x} \in A$ slik at $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.
- ☐ $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

b) La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en funksjon som har partiellderiverte av annen orden. Når gjelder $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$?

- ☐ Hvis f er kontinuerlig i (x, y).
- ☐ Hvis $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er kontinuerlig i (x, y).

c) Linjeintegralet av et skalarfelt $\int_C f\, ds$ er avhengig av orienteringen av kurven C.

- ☐ Ja
- ☐ Nei

d) Anta at $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er et konservativt felt og C en lukket glatt kurve. Hva er $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$?

- ☐ Det er avhengig av kurven.
- ☐ 0

e) La $\mathbf{a}$ være et stasjonært punkt for $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og de annenordens partiellderiverte være kontinuerlige i $\mathbf{a} \in A$. Anta at determinanten til Hesse-matrisen $\det(Hf(\mathbf{a})) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$. Hva er situasjonen?

- ☐ $\mathbf{a}$ er et lokalt minimumspunkt.
- ☐ Dette er umulig.
- ☐ $\mathbf{a}$ må være et sadelpunkt.

e) La $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være to kontinuerlige funskjoner. Da må f har minimums- og maksimumspunkter på mengden $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\mathbf{x}) = 0\}$.

- ☐ Ja
- ☐ Ja, når A er begrenset i $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Nei

Oppgave 2

Avgjør om grenseverdiene eksisterer:

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^2+y^2+x^2y}{x^2+y^2}}$

ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^4+y^2}$

Oppgave 3

La $n \in \mathbb{N}$ være et positivt tall. Vis at når en deriverbar funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er slik at

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \quad \text{for alle} \quad t, x, y \in \mathbb{R},$$

så er

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = nf(x, y).$$

Oppgave 4

a) Anta at C er en glatt kurve av lengde l og at $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er begrenset (dvs det finnes et tall $M > 0$ slik at $|f(x, y, z)| \leq M$ for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$). Vis at $\left|\int_C f\, ds\right| \leq lM$.

b) Anta at C er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t)$, $t \in [1, 2]$ og $f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z}$. Regn ut

$$\int_C f\, ds$$

Oppgave 5

Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er definert for alle (x, y, z) i $\mathbb{R}^3$ ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz, z(x^2 - 4yz^2), y(x^2 - 6yz^2))$.

a) Vis at $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt.

b) Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er kurven i rommet gitt ved $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3, t^2, 1)$, $0 \leq t \leq 1$.

Oppgave 6 (5.9: 20 d)-f))

I denne oppgaven skal vi se på en viktig forskjell mellom funksjoner av henholdsvis én og flere variable.

a) La $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon av én variabel og anta at a og b er to lokale maksimumspunkter for g. Vis at det finnes et lokalt minimumspunkt mellom a og b.

b) La

$$g(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}.$$

Vis at de stasjonære punktene til g er $(-1, 0)$ og $(1, 0)$.

c) Vis at begge de to stasjonære punktene til g er lokale maksimumspunkter.

Oppgave 7

Finn punktet i planet $2x - 3y - z = 6$ som er nærmest punktet $(1, 0, 0)$.