Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

10.4:7 Finn ligningen til tangentplanet i $(x_0, y_0) = (1, 0)$ til funksjonen

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

Løsning:
$z_0 = f(x_0, y_0) = f(1, 0) = e$ og

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot e^{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2e$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot e^{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0,$$

så ligning til tangentplanet vil være gitt ved

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= e + 2e \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0) \\ &= 2ex - e. \end{aligned}$$

10.4:10 Finn ligningen til tangentplanet i $(x_0, y_0) = (1, 1)$ til funksjonen

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

Løsning:
$z_0 = f(1, 1) = \ln 2$ og

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1,$$

så

$$\begin{aligned}
z - z_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&= z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&= \ln 2 + 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 1) \\
&= x + y + \ln 2 - 2.
\end{aligned}$$

10.4:19 Finn lineariseringen til

$$f(x, y) = \sqrt{x} + 2y$$

i $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Løsning:
$f(x_0, y_0) = f(1, 0) = 1$ og

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) &= \frac{1}{2} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2, & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) &= 2,
\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}
L(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + 2(y - 0) \\
&= \frac{x}{2} + 2y + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

10.4:25 Finn lineariseringen til

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

i (0,0) og bruk den til å finne en tilnærming til $f(0.1, 0.05)$. Sammenlign med den eksakte verdien av $f(0.1, 0.05)$.

Løsning:
$f(x_0, y_0) = f(0, 0) = 1$ og

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x+y}, & \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 1 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x+y}, & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= 1.
\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}L(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\ &= 1 + 1(x-0) + 1(y-0)\\ &= x + y + 1.\end{aligned}$$

$$L(0.1, 0.05) = 1.15 \approx 1.1618 = f(0.1, 0.05).$$

$\boxed{10.4{:}28}$ Finn lineariseringen til

$$f(x,y) = \tan(2x - 3y^2)$$

i (0,0) og bruk den til å finne en tilnærming til $f(0.03, 0.05)$. Sammenlign med den eksakte verdien av $f(0.03, 0.05)$.

Løsning:
$f(x_0,y_0) = f(0,0) = 0$ og

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2}{\cos^2(2x-3y^2)}, & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 2\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-6y}{\cos^2(2x-3y^2)}, & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0.\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}L(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\ &= 0 + 2(x-0) + 0(y-0)\\ &= 2x.\end{aligned}$$

$$L(0.03, 0.05) = 0.06 \approx 0.053 = f(0.03, 0.05).$$

$\boxed{10.5{:}3}$ La $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ der $x(t) = t$ og $y(t) = \sin t$. Finn $w'(\frac{\pi}{3})$ når

$$w(t) = f(x(t), y(t)).$$

Løsning:

$$\begin{aligned}w'(t) &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= \frac{1 \cdot x(t)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-\cos t \cdot y(t)}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} w'(\pi/3) &= \frac{\pi/3}{\sqrt{(\frac{\pi}{3})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} - \frac{1/2 \cdot \sqrt{3}/2}{\sqrt{(\frac{\pi}{3})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{(\frac{\pi}{3})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{9} + \frac{3}{4}}}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{10.5:12}}$ Finn $\frac{dy}{dx}$ når

$$\cos(x^2 + y^2) = \sin(x^2 - y^2).$$

Løsning:
La $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$F(x, y) = \sin(x^2 - y^2) - \cos(x^2 + y^2).$$

Anta y er en funksjon av x, dvs. $y = y(x)$. Da er $0 = F(x, y(x))$ for alle x og

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} F(x, y(x)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

og såfremt $\frac{\partial F}{\partial y}(x, (y(x))$ ikke er null, er

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \\ &= -\frac{2x\cos(x^2 - y^2) + 2x\sin(x^2 + y^2)}{-2y\cos(x^2 - y^2) + 2y\sin(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{x}{y} \cdot \frac{\cos(x^2 - y^2) + \sin(x^2 + y^2)}{\cos(x^2 - y^2) - \sin(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

Kan dette forenkles videre?

$\boxed{\text{10.5:19}}$ Finn gradienten til

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 - 3xy}.$$

Løsning:
Vi har at $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2 - 3y}{2\sqrt{x^3 - 3xy}}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-3x}{2\sqrt{x^3 - 3xy}}$, så gradienten til f er gitt ved

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{3x^2 - 3y}{2\sqrt{x^3 - 3xy}}, \frac{-3x}{2\sqrt{x^3 - 3xy}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 3xy}}(3x^2 - 3y, -3x).$$

$\boxed{\text{10.5:28}}$ Finn den retningsderiverte av

$$f(x,y) = x^3y^2$$

i $(x_0, y_0) = (2,3)$ i retningen av vektoren $(-2,1)$.

Løsning:

La

$$\mathbf{u} = \frac{(-2,1)^T}{|(-2,1)^T|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Den retningsderiverte av f i (x_0, y_0) i retning $\mathbf{u}$ er da

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0) &= \nabla f(x_0,y_0)\mathbf{u} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(3x_0^2y_0^2, 2x_0^3y_0)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{-6x_0^2y_0^2 + 2x_0^3y_0}{\sqrt{5}} \\
&= 2x_0^2y_0\frac{-3y_0 + x_0}{\sqrt{5}} \\
&= 2\cdot 2^2 3\frac{-3\cdot 3 + 2}{\sqrt{5}} \\
&= -\frac{168}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{10.5:35}}$ I hvilken retning øker

$$f(x,y) = 3xy - x^2$$

mest i punktet $(-1,1)$?

Løsning:
Funksjonen øker mest i retningen til gradienten. Dvs i retning

$$\begin{aligned}
\nabla f(-1,1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x,y)=(-1,1)} \\
&= (3y - 2x, 3x)\,\Big|_{(x,y)=(-1,1)} \\
&= (5, -3).
\end{aligned}$$

Altså i negativ y-retning.

$\boxed{\text{10.5:43}}$ Se oppgaveteksten i boken. Vi skal finne gradienten til

$$f(x,y) = \frac{4}{|x| + |y| + 1}$$

i punktet $(3,1)$.

Løsning:
For å løse denne oppgaven trenger vi å derivere funksjonen $|x|$. Det gjøres kanskje enklest ved å bruke at $|x| = \sqrt{x^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}|x| &= \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{x}{|x|} \\ &= \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Merk at $\frac{x}{|x|}$ ikke er definert for $x = 0$, så $|x|$ er ikke deriverbar i $x = 0$. Vi finner nå at gradienten er

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \left(-\frac{4\frac{x}{|x|}}{(|x| + |y| + 1)^2}, -\frac{4\frac{y}{|y|}}{(|x| + |y| + 1)^2}\right) \\ &= -\frac{4}{(|x| + |y| + 1)^2}\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right)\end{aligned}$$

for alle x og y utenfor koordinataksene. Dermed er

$$\nabla f(3, 1) = -\frac{4}{25}(1, 1).$$