

Flerdimensjonal analyse (MA1103)

Øving 4

Oppgave 1 (2.5: 1)

Regn ut de annenordens partiellderiverte til funksjonene:

a) $f(x, y) = 3x^2y + 2y^2x$

b) $f(x, y) = x \sin(y)$

Oppgave 2 (Eksamen 05/2013 Oppgave 1)

Fra fysiske lover kan en se at om K er et homogent legeme i \mathbb{R}^3 , så må temperaturen $T = T(x, y, z, t)$ i K være en løsning til *varmelikningen*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

der (x, y, z) er posisjonen i legemet, t er tiden, og k er en materialkonstant. Vis at $T(x, y, z, t) = 2x - y + z$ er en løsning til varmelikningen.

Oppgave 3 (2.5: 2)

Regn ut de partiellderiverte:

a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x}$ når $f(x, y, z) = x^2 y e^{xz}$

b) $\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial z \partial x \partial z}$ når $f(x, y, z) = x^2 y^3 \cos(xyz)$

Oppgave 4 (2.7: 1)

La $f(u, v) = u^2 + v$, $g(x, y) = 2xy$, $h(x, y) = x + y^2$. Bruk kjerneregelen til å finne de partiellderiverte av $k(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$.

Oppgave 5 (2.7: 5)

Vi har to deriverbare funksjoner $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Anta at $\mathbf{G}(1, -2) = (1, 2, 3)$ og at

$$\mathbf{G}'(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}'(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finn Jacobi-matrisen til den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$ i punktet $(1, -2)$.

Oppgave 6 (2.6: 1)

Finn Jacobi-matrisen til funksjonene.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y, x + y^2)$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{x^2 y + z}, xyz^2)$.

Oppgave 7 (2.5: 4)

I denne oppgaven skal vi se på en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ slik at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Funksjonen er gitt ved

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{når } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Vis at $f(x, 0) = 0$ for alle x og at $f(0, y) = 0$ for alle y . Bruk dette til å vise at $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

b) Vis at for $(x, y) \neq (0, 0)$ er

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{x(y^4 + 4x^2 y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

c) Vis at $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ ved å bruke

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h}.$$

Vis på tilsvarende måte at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

Oppgave 8 (2.7: 8)

Temperaturen T i et område avhenger av posisjonen; vi kan tenke oss at den er gitt som en deriverbare funksjon $T = f(x, y)$ av to variable der x og y er vanlige korrdinater. Vi innfører nå polarkoordinater r og θ på vanlig måte slik at $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$. Vi får da temperaturen som en funksjon $T(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ av r og θ .

a) Vis at

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta), \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos(\theta). \end{aligned}$$

b) En radiomerket fugl beveger seg i området. Radiosignalene viser hvordan avstanden r og vinkelen θ varierer med tiden; vi har $r = g(t)$ og $\theta = h(t)$. Vis at temperaturendringene fuglen opplever er gitt ved

$$T'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta) \right) g'(t) + \left(-\frac{\partial f}{\partial x} r \sin(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos(\theta) \right) h'(t)$$

der vi må sette inn $r = g(t)$, $\theta = h(t)$, $x = g(t) \cos(h(t))$, $y = g(t) \sin(h(t))$.