MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 7

Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript s, bør gjøre b, og kan gjøre k.

$\boxed{1}$ Gjør oppgave $1^s, 2^s, 4^s, 5^b, 10^s, 12^b, 13^s, 20a)^s, 23^s$ og 25^b på **side 131-134.**

1) $x + y \neq y + x$ og $x(y + z) \neq (x + y) + z$ og $(c_1 + c_2)x \neq c_1x + c_2x$.

2) Når $c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$, er det kun $1 \cdot x = x$ som feiler.

4) Nullvektoren i matriserommet M er $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ og $-A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Det minste underrommet av M som inneholder matrisen A består av alle matriser cA.

5) (a) En mulighet: Matrisene cA danner et underrom som ikke inneholder B. (b) Ja: underromet må inneholde $A - B = I$. (c) Matrisene hvis diagonal er lik null.

10) De eneste underrommene er (a) planet med $b_1 = b_2$; (d) de lineære kombinasjonene av $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$; og (e) planet med $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

12) For planet $x + y - 2z =$, er summen av $(4, 0, 0)$ og $(0, 4, 0)$ ikke i planet. (Merk at planet ikke inneholder $(0, 0, 0)$.

13) Det parallelle planet $\mathbb{P}_0$ har likning $x + y - 2z = 0$. Velg to punkter, for eksempel $(2, 0, 1)$ og $(0, 2, 1)$, og summen av de $(2, 2, 2)$ kan da ses å være i $\mathbb{P}_0$. (Merk at planet her inneholder $(0, 0, 0)$.

20) (a) Eliminasjon leder til $0 = b_2 - 2b_1$ og $0 = b_1 + b_3$ i likning 2 og 3: Løsning finnes kun hvis $b_2 = 2b_1$ og $b_3 = -b_1$; (b) Eliminasjon leder til $0 = b_1 + b_3$ i likning 3, slik at løsning finnes kun hvis $b_3 = -b_1$.

23) Den ekstra kolonnen utvider kolonnerommet såfremt $\mathbb{b}$ ikke allerede er i kolonnerommet.

25) Løsningen til $A\mathbb{z} = \mathbb{b} + \mathbb{b}^*$ er $\mathbb{z} = \mathbb{x} + \mathbb{y}$. Hvis $\mathbb{b} + \mathbb{b}^*$ er i $C(A)$, altså kolonnerommet til A, så er også summen av de i kolonnerommet til A, per definisjonen av et vektorrom.

$\boxed{2}$ Gjør oppgave $1^s, 5^s$ og 13^b på **side 142-148.**

1) (a) $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Frie variabler x_2, x_4, x_5 og ledende variabler x_1, x_3.

(b) $U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Fri x_3 og ledende x_1, x_2.

5) (a) Usant: Enhver singulær kvadratisk matrise vil ha frie variabler. (b) Sant: En invertibel kvadratisk matrise har ingen frie variabler. (c) Sann: Det er kun n kolonner til å holde ledende enere. (d) Sann: Kun m rader til å holde de ledende enerene.

13) Fyll inn 12 så 3 og så 1 for å få den fullstendige løsningen i $\mathbb{R}^3$ til $x - 3y - z = 12$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = en partikulær løsning + alle nullroms løsningene.

$\boxed{3}$ Gjør oppgave $3^s, 4^s$ og 5^b på **side 158-163.**

3) $\mathbb{x}_{\text{complete}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1\ 0 \end{pmatrix}$. Matrisen er singulær men likningene er fortsatt løselige; $\mathbb{b}$ er i kolonnerommet. Vår partikulære løsning har frie variabel $y = 0$.

4) $\mathbb{x}_{\text{complete}} = \mathbb{x}_p + \mathbb{x}_n = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0) + x_2(-3, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, -2, 1)$.

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & b_1 \\ 2 & 5 & -4 & b_2 \\ 4 & 9 & -8 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 - b_2 \end{pmatrix}$ er løselig hvis $b_3 - 2b_1 - b_2 = 0$.

Bakover-substitusjon gir den partikulære løsningen $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ og den spesielle løsningen til $A\mathbb{x} = 0$: $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ b_2 - 2b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{4}$ Gjør oppgave $1^s, 2^b, 5^k, 13^b$ og 16^b på **side 175-180**

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0$ gir $c_3 = c_2 = c_1 = 0$. Så de 3 kolonnevektorene er uavhengige.

Men $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ c \end{pmatrix} = 0$ løses med $\mathbb{c} = (1, 1, -4, 1)$. Da er $\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2 - 4\mathbb{v}_3 + \mathbb{v}_4 = .$ Altså avhengighet.

2) $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ er uavhengige (-1'ene er i forskjellige posisjoner). Alle de seks vektorene i $\mathbb{R}^4$ er i planet $(1, 1, 1, 1) \cdot \mathbb{v} = 0$ slik at ingen valg av fire av disse kan være uavhengige.

5) (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -18/5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Merk at $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, altså at kolonnene adderer til .

13) Kolonnerommet og radrommet av A og U har alle den samme dimensjonen, altså 2. Radrommene til A og U er de samme, siden radene av U er kombinasjoner av radene av A, og omvendt.

16) Disse basisene er ikke unike! (a) $(1, 1, 1, 1)$ for rommet av alle konstant vektorene (c, c, c, c). (b) $(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)$ for rommet av vektorene komponenter som summer til 0. (c) $(1, -1, -1, 0), (1, -1, 0, -1)$ for rommet ortogonalt til $(1, 1, 0, 0)$ og $(1, 0, 1, 1)$. (d) Kolonnene av I er en basis for dens kolonnerom, den tomme mengden er en basis for nulrommet til I, altså $N(I) = Z = \{\}$.

Et nytt tallsystem

Vi skal fortsette med noe vi begynte med i forrige øving, nemlig med konstruksjonen av vårt nye tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. så må vi spørre oss hvilke egenskaper ønsker vi at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:

- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutativ*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.

- *additiv invers:* Gitt z, så eksisterer z' slik at

$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:

- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
- *distributive lover:*
  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *høyre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.
- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at

$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$

- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer z' slik at

$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$

- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker 2×2-matriser over de reelle tallene.

La A være en 2×2-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La

$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

For eksempel,

$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$

og

$$Y = A - \sqrt{2} A^3$$

er elementer i S.

Nummereringen av oppgavene følger den fra forrige øving.

(e^k) Anta at $A^2 = -I_2$. Vis at da er

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix},$$

for a og b i $\mathbb{R}$, der $b \neq 0$.

Løsning: Generelt har vi for en 2×2-matrise A over $\mathbb{R}$ at

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

for a, b, c og d i $\mathbb{R}$.

Betrakt så

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Merk at siden $a^2, d^2 \geq 0$ for $a, d \in \mathbb{R}$, så gir $a^2 + bc = -1$ og $bc + d^2 = -1$ at $b, c \neq 0$. Det følger at siden $ab + bd = (a + d)b = 0$, så er $a = -d$. Løser man $a^2 + bc = -1$ for c, får man $c = -\frac{1+a^2}{b}$.

(f^k) Anta at $A^2 = -I_2$. La

$$S' = \{a_0 I_2 + a_1 A \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Vis at $S = S'$. Vis at

$$(a_0 I_2 + a_1 A)(b_0 I_2 + b_1 A) = (a_0 b_0 - a_1 b_1) I_2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) A.$$

Løsning: Det er klart at $S' \subseteq S$ gitt beskrivelsen av S'. Gitt et element X i S, husker vi at per definisjon er

$$X = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3.$$

Men

$$X = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 = a_0 I + a_1 A - a_2 I - a_3 A = (a_0 - a_2) I + (a_1 - a_3) A \in S'.$$

For det andre punktet, er det igjen tilstrekkelig å regne ut:

$$(a_0 I_2 + a_1 A)(b_0 I_2 + b_1 A) = a_0 I_2 b_0 I_2 + a_0 I_2 b_1 A + a_1 A b_0 I_2 + a_1 A b_1 A = a_0 b_0 I_2 + a_0 b_1 A + a_1 b_0 A - a_1 b_1 I_2$$

slik at

$$(a_0 I_2 + a_1 A)(b_0 I_2 + b_1 A) = (a_0 b_0 - a_1 b_1) I_2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) A,$$

som var det som skulle vises.