Flerdimensjonal analyse (MA1103)

Øving 5

Oppgave 1

La $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en deriverbar funskjon av 2 variable og anta at det finnes en deriverbar funksjon $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at

$$G(x, y(x)) = 0 \qquad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Vis at

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, y(x))} \qquad \text{når} \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0.$$

b) Anta at y er implisitt gitt ved

$$x^2 + y^3 + e^y = 0.$$

Regn ut $\frac{dy}{dx}$ (avhengig av x og y).

Oppgave 2 (2.8: 1)

Finn lineariseringen til funksjonen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ xy + x \end{pmatrix}$$

i punktet $\mathbf{a} = (-2, 1)$.

Oppgave 3

Finn en parametrisering $\mathbf{r}(t)$ for kurven:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + 16y^2 = 4\}$

c) En linje i $\mathbb{R}^3$ som går gjennom $(0, 0, 0)$ og $(1, 2, 3)$.

Oppgave 4 (3.1: 7)

En kurve er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

a) Vis at denne kurven er ellipsen med ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

c) Vis at omkretsen til ellipsen er $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}\, dt$.

Oppgave 5 (3.1: 10)

Vi har $\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), \sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\sin(t))$.

a) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

b) Finn buelengden fra $t = 0$ til $t = 2\pi$.

c) Vis at kurven ligger på en kuleflate med sentrum i origo.

d) Vis at kurven ligger i planet $y - z = 0$.

Oppgave 6 (3.1: 20)

En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, der x og y har kontinuerlige deriverte x', y'. Anta at $g : [c, d] \to [a, b]$ er en voksende funksjon med kontinerlig derivert og at $g(c) = a, g(d) = b$.

a) Forklar at $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(g(t))$, $c \leq t \leq d$, er en annen parametrisering av den samme kurven.

b) La $\mathbf{a} = \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{r}(g(t_0))$ være et punkt på kurven. Vi kan regne ut to tangentvektorer i punktet $\mathbf{a}$, nemlig $\mathbf{s}'(t_0)$ og $\mathbf{r}'(g(t_0))$. Vis at disse vektorene er parallelle (vi godtar at den ene eller begge er lik $\mathbf{0}$).

c) Vis at buelengden til kurven blir den samme uansett hvilken av de to parametriseringene vi velger.

Oppgave 7 (3.2: 4)

Anta at $f(x, y, t) = ty^2 \ln(x^2 + 1)$ og $\mathbf{r}(t) = (t^3, 3t + 1)$. Regn ut $g'(t)$ når $g(t) = f(\mathbf{r}(t), t)$.

Oppgave 8 (3.2: 7)

Temperaturen i et punkt (x, y) ved tiden t er $f(x, y, t) = 20+2t-x^2+y^2$. En person befinner seg ved tiden t i punktet $\mathbf{r}(t) = \left(3t - \frac{t^2}{4}, 2t + \frac{t^2}{8}\right)$. Er temperaturen som personen opplever økende eller avtagende ved tiden $t = 1$?

Oppgave 9 (***A***)

De gamle grekere visste at en rett linje er den korteste veien mellom to punkter. De kunne ikke bevise det fordi de først og fremst manglet en definisjon av buelengde. De tenkte på dette som mer eller mindre åpenbart. Bruk hvordan buelengden er introdusert og trekantulikheten for å argumentere for at hvis $\mathbf{r}_0(t) = tP + (1 - t)Q$ er en rett linje mellom P og Q i $\mathbb{R}^3$, så gjelder

$$L(\mathbf{r}_0) \leq L(\mathbf{r})$$

for hver annen kurve $\mathbf{r}$ mellom P og Q. Her er $L(\mathbf{r})$ buelengden av kurven $\mathbf{r}$ fra P til Q.

A: Denne oppgave er en ekstra oppgave (frivillig), som er litt mer teoretisk eller omfangsrik.

Oppgavene finnes i boka *Flervariabel analyse med lineær algebra* av T.Lindstrøm og K.Hveberg. Se henvisningen i parentes.