MA1102 Grunnkurs i Analyse II
Vår 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

$\boxed{3.1{:}1}$ **b)** $(4+8i)-(7-3i)=-3+5i$

c) $2i+3(4+i)=12+5i$

d) $(5+2i)(3+i)=15+6i+5i+2i^2=13+11i$

g)

$$\frac{-5+2i}{5-4i}=\frac{(-5+2i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)}=\frac{-33-10i}{41}=-\frac{33}{41}-\frac{10}{41}i$$

i) $(7+2i)^{-1}=(7-2i)((7+2i)(7-2i))^{-1}=(7-2i)(53)^{-1}=\frac{7}{53}-\frac{2}{53}i$

$\boxed{3.1{:}3}$ **b)** $\overline{4-6i}=4+6i$

f)

$$\begin{aligned}\overline{(2-3i)+i\frac{4+5i}{1-i}} &= \overline{(2-3i)}+\bar{i}\frac{\overline{4+5i}}{\overline{1-i}}\\ &= (2+3i)-i\frac{4-5i}{1+i}\\ &= (2+3i)-\frac{(4i+5)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\ &= (2+3i)-\frac{9-i}{2}\\ &= -\frac{5}{2}+\frac{7}{2}i\end{aligned}$$

$\boxed{3.1{:}5}$ **a)** Skal løse likningen $2iz=3+4i$. Ganger med $-\frac{1}{2}i$ på begge sider:

$$z=-(3+4i)\frac{1}{2}i=2-\frac{3}{2}i. \tag{0.1}$$

d) Skal løse likningen

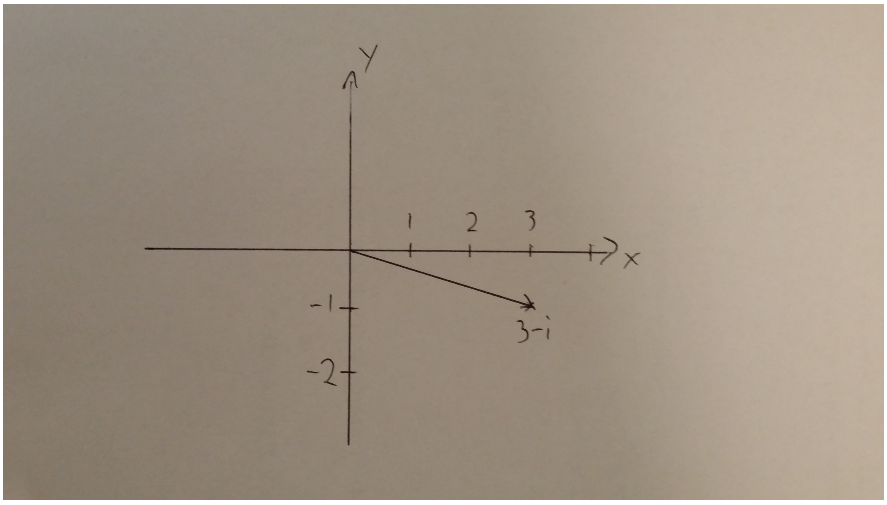
$$\frac{3-4i}{z}=\frac{2+3i}{z-i}. \tag{0.2}$$

Ganger med $z(z-i)$ på begge sider og får:

$$\begin{aligned}
(z-i)(3-4i) &= z(2+3i) \\
3z - 4iz - 3i - 4 &= 2z + 3iz \\
z(1-7i) &= 4+3i \\
z &= \frac{4+3i}{1-7i} \\
z &= \frac{(4+3i)(1+7i)}{50} = \frac{-17+31i}{50}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{3.1:10}}$ Skriv $z = a + bi$ og $w = c + di$. $z + w$ reell betyr at $b = -d$. zw reell betyr at $ad + bc = 0 \implies a = c$ eller $b = d = 0$. Hvis $a = c$, er $w = a - bi = \overline{z}$. Hvis $b = d = 0$, er z og w reelle.

$\boxed{\text{3.2:2 } \textbf{c)}}$



$\boxed{\text{3.2:3}}$ **a)** $r = 1$, $\theta = \pi/2$.

e) $r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, $\theta = \cos^{-1}(1/2) = \pi/3$

$\boxed{\text{3.2:4}}$ **a)** Betrakter vi $z = 2 - 2i$ som en vektor i planet har den lengde $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. Skriver vi z på formen $a + ib$ ser vi at $a > 0$ og $a = -b$, og dermed blir vinkelen med reelle aksen (argumentet) $-\pi/4 = 7\pi/4$.

c)

$$r = \sqrt{27^2 + 9^2 3} = \sqrt{3^2 9^2 + 9^2 3} = 18\sqrt{3}. \tag{0.3}$$

For å finne argumentet observerer vi først at siden både realdelen og imaginærdelen er positive ligger punktet i første kvadrant og dermed er $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Deretter bruker vi forholdet

$$\sin(\theta) = \frac{9\sqrt{3}}{18\sqrt{3}} = \frac{1}{2}. \tag{0.4}$$

Denne likningen har løsning $\theta = \pi/6$ i første kvadrant.

3.2:5 d) $\theta = 3\pi/2$ betyr at $a = 0$ og b er negativt. $r = 1/2$ gir dermed at tallet er $(-1/2)i$.

3.2:10 c) La $z = a + ib$. Da er $z - (i+1) = (a-1) + i(b-1)$ og $|z - (i+1)| = \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2}$. Vi ser da at likningen $|z - (i+1)| = r$ oppfylles av alle punkter på sirkelen med radius r og sentrum i $(1,1)$ (når du skal se for deg komplekse tall i planet kan det være nyttig å tenke på realdelen a som x og imaginærdelen b som y i det kjente og kjære kartesiske koordinatsystemet). Dermed vil mengden

$$\{z : |z - (i+1)| \geq 1/2\} \tag{0.5}$$

bestå av alle punkter som ligger *på eller utenfor* sirkelen med radius 1/2 og sentrum $(1,1)$.

3.3:2 b) Bruker Eulers formel $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2+i\pi/3} &= \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{i\pi/3} \\
&= \mathrm{e}^2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) \\
&= \frac{\mathrm{e}^2}{2} + i\frac{\mathrm{e}^2\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

3.3:3 b) $r = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$. Vi ser geometrisk at $\theta = -\pi/4$, så vi får $4 - 4i = 4\sqrt{2}e^{-\pi i/4}$.

3.3:5 a) Det er gitt at $z = 2\mathrm{e}^{i\pi/4}$ og $w = 4\mathrm{e}^{i\pi/6}$. For å regne ut zw og z/w kan vi bruke standard regneregler for eksponensialfunksjoner som for reelle tall:

$$zw = (2\mathrm{e}^{i\pi/4})(4\mathrm{e}^{i\pi/6}) = 8\mathrm{e}^{i\pi/4+i\pi/6} = 8\mathrm{e}^{i5\pi/12}, \tag{0.6}$$

$$z/4 = (2\mathrm{e}^{i\pi/4})(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-i\pi/6}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\pi/4-i\pi/6} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\pi/12} \tag{0.7}$$

3.3:8 For å regne ut $(1+i)^{804}$ skriver vi først $(1+i)$ på formen $re^{i\theta}$. Tallet $1+i$ tilsvarer vektoren $(1,1)$ i planet, så $r = \sqrt{2}$ og $\theta = \pi/4$. Får da at

$$(1+i)^{804} = 2^{402}\mathrm{e}^{i201\pi} = 2^{402}(\cos(201\pi) + i\sin(201\pi)) = -2^{402}. \tag{0.8}$$

For $\sqrt{3}-i$ gjør vi tilsvarende: $r = \sqrt{3+1} = 2$, og $\sin(\theta) = -\frac{1}{2}$. Ettersom $\sqrt{3}-i$ ligger i fjerde kvadrant finner vi $\theta = -\pi/6$. Får da at

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-i)^{173} &= 2^{173}\mathrm{e}^{-i173\pi/6} \\ &= 2^{173}(\cos(-173\pi/6) + i\sin(-173\pi/6)) \\ &= -2^{172}(\sqrt{3}+i).\end{aligned}$$