TMA4140 Diskret Matematikk
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 9

Seksjon 9.6

$\boxed{9}$ Relasjonen er refleksiv og antisymmetrisk, men ikke transitiv da det er en kant fra a til b og en kant fra b til d, men ingen kant fra a til d. Derfor er dette *ikke* en delvis ordning.

$\boxed{18}$ **b)** Ordene listet i alfabetisk rekkefølge blir: open, opened, opener, opera, operand

$\boxed{27}$ Vi lister opp de ordnede parene i relasjonen:

$$(a,a),(a,g),(a,d),(a,e),(a,f),(b,b),(b,g),(b,d),(b,e),(b,f),(c,c),$$
$$(c,g),(c,d),(c,e),(c,f),(g,g)(g,d),(g,e),(g,f),(d,d),(e,e),(f,f).$$

$\boxed{32}$

a) Elementene l og m er maksimale.

b) Elementene a, b og c er minimale.

c) Det ingen største element (siden det er to maksimale elementer).

d) Det er ingen minste element (siden det er tre minimale elementer).

e) Elementene k, l og m er øvre skranker for $\{a,b,c\}$.

f) Elementet k er den minste øvre skranken for $\{a,b,c\}$.

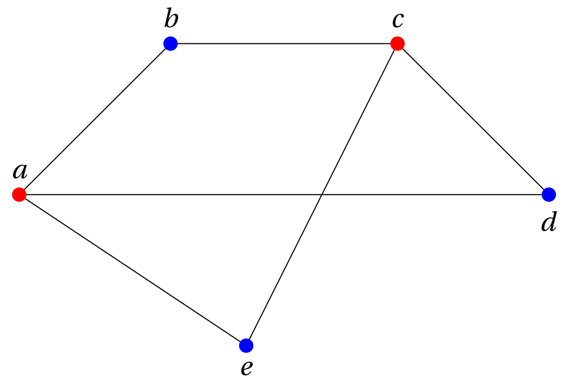
g) Det er ingen nedre skranke for $\{f,g,h\}$.

h) Det er følgelig heller ingen største nedre skranke for $\{f,g,h\}$.

Seksjon 10.2

$\boxed{18}$ La $G=(V,E)$ være en enkel graf med $|V|\geq 2$. Ettersom G er enkel er de mulige verdiene for graden til en node $0,1,2,\ldots,|V|-1$. Observer nå at det ikke er mulig å ha to noder v og w med grad henholdsvis 0 og $|V|-1$. For hvis v er en node med grad 0 er det ingen kant mellom v og w, som betyr at w umulig kan ha grad $|V|-1$, for i så tilfelle ville det vært en kant mellom w og alle andre noder, spesielt v. Fra dette ser vi at det er $|V|-1$ mulige verdier graden til en node i G kan ha. Og siden det er $|V|$ noder kan vi slutte ut fra skuffeprinsippet at minst to noder må ha samme grad. $\square$

22 Grafen er todelt med todeling $\{a, c\}$ og $\{b, d, e\}$. Dette ser vi fra 2-fargeleggingen under.

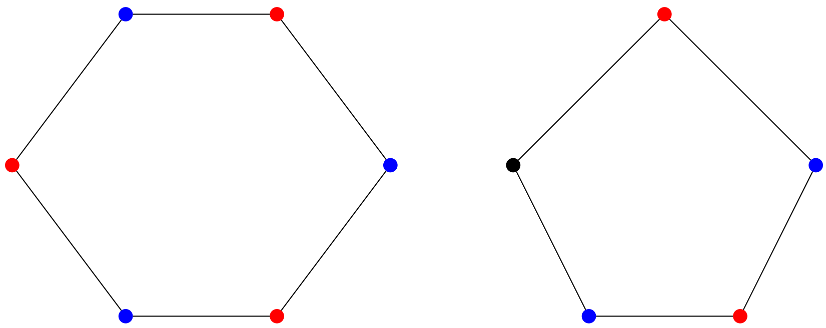


Ved nærmere inspeksjon ser vi at dette faktisk er den komplette todelte grafen $K_{2,3}$.

26 Husk at hvis en graf har K_3 som undergraf er den ikke todelt.

a) K_n er todelt for $n = 1$ og $n = 2$. (Det gir ikke så mye mening å si at grafen med kun én node er todelt, men ifølge definisjonen i boka så er den det.) Når $n \geq 3$ så er ikke K_n todelt fordi den har K_3 som undergraf.

b) C_n, $n \geq 3$, er todelt når n er et partall. Da kan vi nemlig fargelegge annenhver node med rødt og blått og få en 2-fargelegging av C_n. Når n er odde er ikke C_n todelt. Dette er fordi en 2-fargelegging av C_n må ha rødt og blått på annenhver node, men en slik fargelegging kan umulig gå opp når vi har et odde antall noder. Se Figur 1 under.



Figur 1: Til venstre, en 2-fargelegging av C_6. Til høyre, begynnelsen på en 2-fargelegging av C_5. Denne kan umulig gå opp siden den svarte noden både har en rød og en blå nabo.

c) W_n, $n \geq 3$, er aldri todelt siden den har K_3 som undergraf.

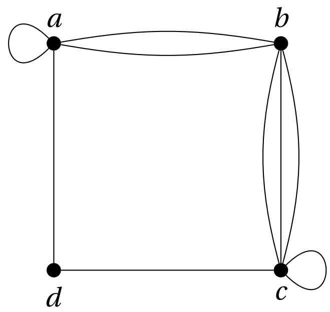
55 Hvis $G = (V, E)$ er en 4-regulær graf med $|E| = 10$ får vi fra Håndhilsningsteoremet (Teorem 1) at

$$20 = 2|E| = \sum_{v \in V} \operatorname{grad}(v) = \sum_{v \in V} 4 = 4|V|.$$

Dermed er $|V| = 5$.

Seksjon 10.3

17 En urettet graf som representeres av nabomatrisen (med hensyn på rekkefølgen a, b, c, d av nodene) er:



19 Nabomatrisen med hensyn på rekkefølgen a, b, c, d blir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23 Den (rettede) grafen som representeres av nabomatrisen (med hensyn på rekkefølgen a, b, c av nodene) er: