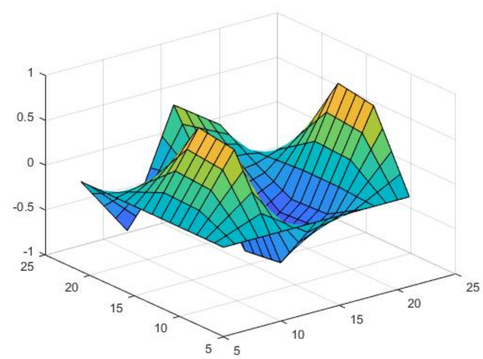
Øving 6

Matematikk 4K

Uke 40

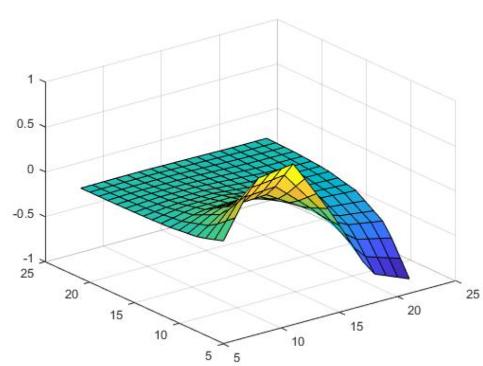
12.1.

5 Bølgelingningen er gitt på formen: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Regner vi ut de deriverte av $u(x,t) = \sin(at)\sin(bx)$ får vi $u_{tt} = -a^2\sin(at)\sin(bx)$ og $u_{xx} = -b^2\sin(at)\sin(bx)$. Dermed oppretholder $u(x,t)$ bølgeligningen for $c^2 = a^2/b^2$.



Figur 1: Figur av u i oppgave 12.1.5.

6 Varmeligningen er gitt på formen: $u_t = c^2 u_{xx}$. Regner vi ut de deriverte av $u(x,t) = -e^{-t}\sin(x)$ får vi $u_t = e^{-t}\sin(x)$ og $u_{xx} = e^{-t}\sin(x)$. Dermed oppretholder $u(x,t)$ varmeligningen for $c^2 = 1$.

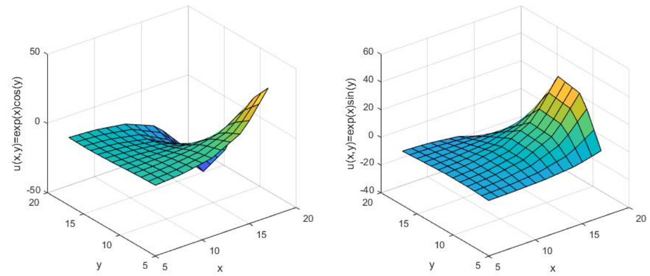


Figur 2: Figur av u i oppgave 12.1.6.

10 Den to dimensjonale Laplace ligningen er gitt på formen: $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Regner vi ut de deriverte av $u(x, y) = e^x \cos(y)$ får vi $u_{yy} = -e^x \cos(y)$ og $u_{xx} = e^x \cos(y)$.

Regner vi ut de deriverte av $v(x, y) = e^x \sin(y)$ får vi $v_{yy} = -e^x \sin(y)$ og $v_{xx} = e^x \sin(y)$.

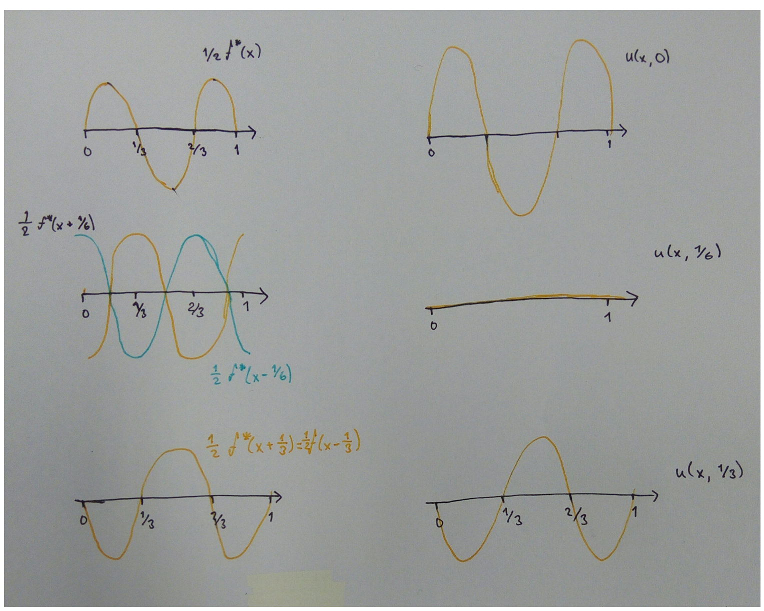
Dermed vil både u og v opprettholde Laplace ligningen.



Figur 3: Figur av u i oppgave 12.1.10.

12.3.

5 I denne oppgaven skal vi løse bølgeligningen $u_{tt} = u_{xx}$, der vi har blitt oppgitt initialdataene $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = k \sin(3\pi x)$ og $u_t(x, 0) = 0$. Siden $u_t(x, 0) = 0$ har vi at $B_n^* = 0$. Vi har B_n er gitt ved odde Fourrier serien til $u(x, 0)$, og dermed har vi at $B_3 = k$, og resten er 0. Løsningen av problemet er dermed gitt med $u(x, t) = k \cos(3\pi t) \sin(3\pi x)$.



11 Denne oppgaven er lik som over, bortsett fra at vi $u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/4] \\ x - 1/4 & x \in [1/4, 1/2] \\ 3/4 - x & x \in [1/2, 3/4] \\ 0 & x \in [3/4, 1] \end{cases}$ For å finne

de odde leddene av Fourier serien regner vi

$$
\begin{aligned}
B_n &= 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx \\
&= 2\int_{1/4}^{1/2} x\sin(n\pi x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{1/4}^{1/2}\sin(n\pi x)\,dx - 2\int_{1/2}^{3/4} x\sin(n\pi x)\,dx + \frac{3}{2}\int_{1/2}^{3/4}\sin(n\pi x)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(2\sin(\pi n/2) - \sin(\pi n/4) - \sin(3\pi n/4)\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ jevn} \\ \frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{\pi^2 n^2} & \text{for } n = 8m+1 \\ \frac{-2\left(2+\sqrt{2}\right)}{\pi^2 n^2} & \text{for } n = 8m+3 \\ \frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{\pi^2 n^2} & \text{for } n = 8m+5 \\ \frac{2\left(-2+\sqrt{2}\right)}{\pi^2 n^2} & \text{for } n = 8m+7. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dermed er løsningen

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{\pi^2 (8n+1)^2}\cos((8n+1)\pi t)\sin((8n+1)\pi x) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2\left(2+\sqrt{2}\right)}{\pi^2 (8n+3)^2}\cos((8n+3)\pi t)\sin((8n+3)\pi x) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{\pi^2 (8n+5)^2}\cos((8n+5)\pi t)\sin((8n+5)\pi x) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\left(\sqrt{2}-2\right)}{\pi^2 (8n+7)^2}\cos((8n+7)\pi t)\sin((8n+7)\pi x).
\end{aligned}
$$

12.6.

7 La oss begynne med å regne ut konstanten c^2:

$$
c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} = \frac{1.04}{0.056 \times 10.6} = 1.752.
$$

Dermed er $\lambda_n^2 = \frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} = 0.173 n^2$. For å finne B_n finner vi de odde leddene til Fourrier serien:

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{10}\int_0^{10} x(10-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right)dx \\
&= \frac{400}{(\pi n)^3}\left(1-(-1)^n\right) \\
&= \begin{cases} \frac{800}{\pi^3 n^3} & \text{for odde verdier av } n \\ 0 & \text{for jevne verdier av } n \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dermed er løsningen

$$
u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{800}{(2n+1)^3 \pi^3}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{10}\right)e^{-0.173(2n+1)^2 t}.
$$

10 La oss løse problemer i oppgave 7, der vi har endret initialdatane til $u(0,t) = 100$, $u(L,t) = 0$ og $u(0,t) = 100$. Ved å istednefor se på $v(x,t)$ definert av $u(x,t) = v(x,t) - 10x + 100$ har vi at $v(x,t)$ løser varmeligningen med initialdata $v(0,t) = v(10,t) = 0$ og $v(x,0) = 10x$, $v_t(x,0) = 0$.

For å finne $v(x,t)$ finner vi de odde Fourier koffisientene;

$$B_n = \frac{2}{10}\int_0^{10} 10x \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx = \frac{-200\,(-1)^n}{n\pi}.$$

Bruker vi konstanten c vi fant i oppgave 12.6.7 får vi

$$u(x,t) = -10x + 100 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{200\,(-1)^n}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) e^{-0.173 n^2 t}.$$

Evaluerer vi i $x = 5$ får vi at

$$u(5,t) = 50 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{200\,(-1)^n}{\pi\,(2n+1)} e^{-0.173(2n+1)^2 t}.$$

Setter vi inn tidene $t = 1, 2, 3, 10, 50$ får vi $99.24, 94.10, 87.69, 61.29, 50.01$, respektivt.

19 For å finne potensialet regner vi ut A_n^*:

$$\begin{aligned} A_n^* &= \frac{2}{2\sinh(n\pi)} \int_0^2 1000 \sin(\pi x/2) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \begin{cases} \frac{1000}{\sinh(\pi)} & \text{når } n = 1 \\ 0 & \text{for andre verdier av } n \end{cases}. \end{aligned}$$

Dermed er potensialet

$$u(x,t) = \frac{1000}{\sinh(\pi)} \sin(\pi x/2) \sinh(\pi y/2).$$