MA1102 Grunnkurs i Analyse II
Vår 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 9

7.3:1 Newtons Metode.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Finn en tilnærming til nullpunktet vha. to iterasjoner. La x_0 være midtpunktet i det oppgitte intervallet.

a)
$$f(x) = x^5 + 3x - 7 \qquad [1, 2].$$

Løsning: a)
Vi finner den deriverte:

$$f'(x) = 5x^4 + 3,$$

så

$$\begin{aligned}
x_0 &= 3/2, \\
x_1 &= x_0 - \frac{x_0^5 + 3x_0 - 7}{5x_0^4 + 3} \\
&= 598/453 \approx 1.3201, \\
x_2 &= x_1 - \frac{x_1^5 + 3x_1 - 7}{5x_1^4 + 3} \\
&\approx 1.2668.
\end{aligned}$$

Tips til citizen-brukere: Tast inn 1.5 = og skriv deretter

$$ans - \frac{ans^5 + 3ans - 7}{5ans^4 + 3}.$$

En ny iterasjon vil da bli gitt for hver gang man trykker =.

7.3:2 **a)** Skal vise at $f(x) = x^3 + 3x + 9$ har nøyaktig ett nullpunkt. Ser at $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ for alle x, og dermed kan funksjonen ha maksimalt ett nullpunkt (er $f(x_0) = 0$, vil $f(x) > 0$ for alle $x > x_0$). Ser at $f(-2) = -5$ og $f(-1) = 5$. Ettersom f er kontinuerlig, må det da finnes et punkt $x_0 \in (-2, -1)$ slik at $f(x_0) = 0$. Dette viser at f har nøyaktig ett nullpunkt.

For å bruke Newtons metode velger vi $x_0 = -\frac{3}{2}$. Etter fire steg får vi $x \approx -1,6097$.

c) Har $f(x) = x + \sin(x) + 1$ og $f'(x) = 1 + \cos(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ bortsett fra isolerte punkt. Dermed kan f ha bare et nullpunkt. Har at $f(-\pi/2) = -\pi/2$ og $f(0) = 1$, og ettersom må det dermed finnes en $x_0 \in (-\pi/2, 0)$ slik at $f(x_0) = 0$. Dette viser at f har nøyaktig ett nullpunkt.

For å bruke Newtons metode velger vi startverdi $x_0 = -\pi/4$. Etter fire steg får vi $x \approx -0,51097$.

$\boxed{\text{7.3:4}}$ a) Forklar hvorfor funksjonen $f(x) = x^5 + 7x^3 - 20$ har nøyaktig ett nullpunkt i intervallet $(1, 2)$.

b) Bruk Newtons metode tre ganger for å finne en tilnærmet verdi for nullpunktet.

Løsning: a)
Skjæringssetningen:

Ettersom f er kontinuerlig og $f(1) = -12 < 0$ og $f(2) = 68 > 0$ så **finnes** et nullpunkt i intervallet. Ettersom $f'(x) = 5x^4 + 21x^2 > 0$ for alle $x \in (1, 2)$ er f stigende og grafen kan bare krysse x-aksen èn gang. Det finnes altså nøyaktig ett nullpunkt.

b)

$$\begin{aligned}
x_0 &= 3/2, \\
x_1 &= x_0 - \frac{x_0^5 + 7x_0^3 - 20}{5x_0^4 + 21x_0^2} \\
&= \frac{1562}{1161}, \\
x_2 &= x_1 - \frac{x_1^5 + 7x_1^3 - 20}{5x_1^4 + 21x_1^2} \\
&\approx 1.3186, \\
x_3 &= x_2 - \frac{x_2^5 + 7x_2^3 - 20}{5x_2^4 + 21x_2^2} \\
&\approx 1.3179.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.3:6}}$ Tukling med kalkulator viser at $k = 40$ er det største heltallet slik at $k + e^{k/10} < 100$. Dette tallet er en tilnærming til roten i likningen $x + e^{x/10} - 100 = 0$. Vi vil bruke Newtons metode én gang for å finne en bedre tilnærmingsverdi, med $x_0 = k = 40$ som startverdi:

$$x_1 = 40 - \frac{40 + e^4 - 100}{1 + (1/10)e^4} \approx 40,83622 \tag{0.1}$$

$\boxed{\text{8.7:2}}$ a) Eksakt: $\int_1^2 dx/x = \ln 2 - \ln 1 \approx 0.69347$.

Simpsons:

$$\int_1^2 dx/x \approx \frac{1}{3\cdot 6}\left(1+\frac{4\cdot 6}{7}+\frac{2\cdot 3}{4}+\frac{4\cdot 2}{3}+\frac{2\cdot 3}{5}+\frac{4\cdot 6}{11}+\frac{1}{2}\right)$$
$$= 0.69317$$

b) Eksakt: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x dx = 0$ fordi $\sin x$ er odde. Bruker vi Simpsons metode vil leddene som svarer til x_i og x_{2n-i} utligne hverandre, og vi vil også da få 0.

c) Eksakt: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4 \approx 0.785398163$.

Simpsons:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{24}\Bigg(\frac{1}{1+0^2}+\frac{4}{1+(1/8)^2}+\frac{2}{1+(1/4)^2}+$$
$$\frac{4}{1+(3/8)^2}+\frac{2}{1+(1/2)^2}+\frac{4}{1+(5/8)^2}+\frac{2}{1+(3/4)^2}+\frac{4}{1+(7/8)^2}+\frac{1}{1+1^2}\Bigg)$$
$$\approx 0.785398126.$$

$\boxed{8.7{:}7}$ Skal bruke Simpsons metode til å beregne $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ med en nøyaktighet bedre enn 10^{-4}. Etter litt enkel regning får vi at

$$f^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)\mathrm{e}^{-x^2}. \tag{0.2}$$

Når $x \in [0,1]$ er $\mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$ og det er lett å se at $(16x^4 - 48x^2 + 12) < 36$ (dette kan enkelt forbedres, men dette er tilstrekkelig bra). Da er feilen vi gjør når vi bruker Simpsons formel mindre enn 10^{-4} når

$$\frac{36}{2880n^4} < 10^{-4}$$
$$\frac{360000}{2880} < n^4$$
$$3,34 < n.$$

Velger vi $n = 4$ får vi god nok nøyaktighet.

$\boxed{8.7{:}8}$ Bruk Simpsons metode til å beregne

$$I := \int_2^3 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

med en nøyaktighet bedre enn 10^{-4}.

Løsning:
Simpsons Metode: $I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S_n$ der

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=2}^{n} f(x_{2i-2}) + f(x_{2n})\right), \quad \Delta x = \frac{b-a}{2n},\ x_i = a + i\Delta x.$$

Feilestimat:

Det eksisterer en $c \in [a, b]$ slik at

$$I = S_n + \frac{(b-a)^5 f^{(4)}(c)}{2880n^4}.$$

Vi må først finne den fjerdederiverte til $\frac{\sin x}{x}$ og deretter finne n slik at feilen blir mindre enn 10^{-4}.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin x}{x}, \\
f'(x) &= \frac{1}{x}\cos x - \frac{1}{x^2}\sin x, \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2}\cos x - \frac{1}{x}\sin x + \frac{2}{x^3}\sin x - \frac{1}{x^2}\cos x \\
&= \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{2}{x^2}\cos x, \\
f'''(x) &= \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right)\sin x + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x \\
&\quad + \frac{4}{x^3}\cos x + \frac{2}{x^2}\sin x \\
&= \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{3}{x^2}\right)\sin x + \left(\frac{6}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x, \\
f^{(iv)}(x) &= \left(\frac{24}{x^5} - \frac{6}{x^3}\right)\sin x + \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{3}{x^2}\right)\cos x \\
&\quad + \left(-\frac{18}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right)\cos x - \left(\frac{6}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x \\
&= \left(\frac{24}{x^5} - \frac{12}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\sin x + \left(-\frac{24}{x^4} + \frac{4}{x^2}\right)\cos x.
\end{aligned}$$

Vi finner en øvre grense for absoluttverdien av dette vha. trekantulikheten $|a \pm b| \leq |a| + |b|$:

$$\begin{aligned}
|f^{(iv)}(x)| &= \left|\left(\frac{24}{x^5} - \frac{12}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\sin x + \left(-\frac{24}{x^4} + \frac{4}{x^2}\right)\cos x\right| \\
&\leq \left|\left(\frac{24}{x^5} - \frac{12}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\right| |\sin x| + \left|\left(-\frac{24}{x^4} + \frac{4}{x^2}\right)\right| |\cos x| \\
&\leq \left|\left(\frac{24}{x^5} - \frac{12}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\right| + \left|\left(-\frac{24}{x^4} + \frac{4}{x^2}\right)\right| \\
&\leq \left|\frac{24}{x^5}\right| + \left|\frac{12}{x^3}\right| + \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{24}{x^4}\right| + \left|\frac{4}{x^2}\right| \\
&\leq \frac{24}{2^5} + \frac{12}{2^3} + \frac{1}{2} + \frac{24}{2^4} + \frac{4}{2^2} \\
&= 21/4 = 5.25.
\end{aligned}$$

Dermed er feilen begrenset av

$$\begin{aligned}|I - S_n| &= \left|\frac{(b-a)^5 f^{(4)}(c)}{2880n^4}\right| \\ &\leq \frac{1^5 21/4}{2880n^4} \\ &= \frac{7}{3840n^4}\end{aligned}$$

som igjen er mindre enn 10^{-4} hvis $n^4 \geq \frac{70000}{3840}$. Dvs. $n \geq 2.07$. Altså er

$$\begin{aligned}&I \approx S_3 \\ &= \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{3} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=2}^{3} f(x_{2i-2}) + f(x_{2n})\right), \quad \Delta x = \frac{3-2}{2\cdot 3},\ x_i = 2 + i\Delta x \\ &= \frac{1}{18}\left(f(2) + 4f(\frac{13}{6}) + 2f(\frac{14}{6}) + 4f(\frac{15}{6}) + 2f(\frac{16}{6}) + 4f(\frac{17}{6}) + f(3)\right) \\ &\approx \frac{1}{18}(0.45465 + 4\cdot 0.38200 + 2\cdot 0.30989 + 4\cdot 0.23939 + 2\cdot 0.17148 + 4\cdot 0.10708 + 0.04704) \\ &= 0.24324\end{aligned}$$

med en nøyaktighet bedre enn 10^{-4}.