Øving 1

Matematikk 4K

Uke 35

6.1.

5. Ved å bruke formel 10 i tabell 6.1 får vi at $\mathscr{L}(\sinh(t)) = \frac{1}{s^2-1}$. Teorem 2 om s-forskyvning medfører at $\mathscr{L}\left(e^{3t}\sinh(t)\right) = \frac{1}{(s-3)^2-1} = \frac{1}{(s-4)(s-2)}$.

16. Funksjonen gitt i oppgaven kan skrives som

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & \text{for } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{for } 2 \leq t \end{cases}.$$

Hvis vi bruker den formelle definisjonen av Laplace-transformasjon får vi

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(f) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\, dt + \int_2^\infty e^{-st} \times 0 dt \\ &= -\left.\frac{te^{-st}}{s}\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-st}}{s} dt - \left.\frac{2-t}{s} e^{-st}\right|_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{-st}}{s} dt \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} \\ &= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} \end{aligned}$$

23. Ved å bruke variabelskiftet $t = r/c$, har vi at

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(f(ct)) &= \int_0^\infty e^{-st} f(ct)\, dt = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-sr/c} f(r)\, dr \\ &= F(s/c)/c. \end{aligned} \tag{1}$$

For å finne $\mathscr{L}(\cos(\omega t))$ må vi dele opp i to tilfeller:

Når $\omega = 0$, får vi at $\cos(0t) = 1$ og dermed er $\mathscr{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{s}$.

For $\omega \neq 0$ observer at $\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$, og vi kan dermed anta at $\omega > 0$. Ved å bruke (1) sammen med det faktum at $\mathscr{L}(cos(t)) = \frac{s}{s^2+1}$ får vi at

$$\mathscr{L}(cos(\omega t)) = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \frac{s/\omega^2}{s^2/\omega^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

30. Bemerk at $\frac{4s+32}{s^2-16} = 4\frac{s}{s^2-4^2} + 8\frac{4}{s^2-4^2}$. Ved å bruke lineariteten til invers Laplace-transformasjoner sammen med formel 9 og 10 i tabell 6.1 får vi at

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left(4\frac{s}{s^2-4^2} + 8\frac{4}{s^2-4^2}\right) &= 4\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-4^2}\right) + 8\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2-4^2}\right) \\ &= 4\cosh(4t) + 8\sinh(4t) \\ &= 6e^{4t} - 2e^{-4t}. \end{aligned}$$

38. Ved å bruke s-forskyvning får sammen med formel 3 i tabell 6.1

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{(s+1)^3}\right) &= e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^3}\right)\\ &= 3t^2/e^t.\end{aligned}$$

6.2.

3. I oppgaven er vi gitt følgende initial verdi problem:

$$y''+y'-6y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$$

Ved å bruke teorem 2 i boken, får vi

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{L}(y''+y'-6y) = s^2\mathcal{L}(y)-y'(0)-sy(0)+s\mathcal{L}(y)-y(0)-6\mathcal{L}(y)\\ &= \left(s^2+s-6\right)\mathcal{L}(y)-s-2.\end{aligned}$$

Deretter løser vi for $\mathcal{L}(y)$ og får

$$\mathcal{L}(y)=\frac{s+2}{s^2+s-6}=\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2-(5/2)^2}+\frac{3/2}{(s+1/2)^2-(5/2)^2}.$$

Bruker vi først s-forskyving og deretter formel 9 og 10 i tabell 6.1, blir svaret

$$\begin{aligned}y &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2-(5/2)^2}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3/2}{(s+1/2)^2-(5/2)^2}\right)\\ &= e^{-t/2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s-(5/2)^2}\right)+\frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5/2}{s^2-(5/2)^2}\right)\right)\\ &= e^{-t/2}\left(\cosh(5t/2)+\frac{3}{5}\sinh(5t/2)\right)\\ &= \frac{4}{5}e^{2t}+\frac{1}{5}e^{-3t}.\end{aligned}$$

16. For å finne Laplace-transformasjonen av $f(t)=t\cos(4t)$ bruker vi at

$$f'(t)=\cos(4t)-4t\sin(4t)$$

og

$$f''(t)=-4\sin(4t)-4\sin(4t)-16t\cos(4t)=-8\sin(4t)-16f(t).$$

Hvis vi tar Laplace-transformasjonen til f'' og bruker teorem 1 får vi at

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= s^2\mathcal{L}(f)-sf(0)-f'(0)\\ &= s^2\mathcal{L}(f)-1.\end{aligned}$$

På den annen side er Laplace-transformasjonen til f'' gitt med

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= -8\mathcal{L}(\sin(4t))-16\mathcal{L}(f)\\ &= -\frac{32}{s^2+16}-16\mathcal{L}(f).\end{aligned}$$

Løser vi for $\mathcal{L}(f)$ får vi at

$$\mathcal{L}(f)=\left(1-\frac{32}{s^2+16}\right)/\left(s^2+16\right)=\frac{s^2-16}{(s^2+16)^2}.$$

23 Vi har at $\frac{2}{s^2+s/3} = \frac{1}{s}\frac{2}{s+1/3}$. Bruker vi s-forskyvning får vi at

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+1/3}\right) = e^{-t/3}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) = 2e^{-t/3}.$$

Teorem 3 sier nå at

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{2}{s+1/3}\right) = \int_0^t 2e^{-\tau/3}d\tau = 6 - 6e^{-t/3}.$$

6.3.

4. Vi kan representere funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & 0 < t < \pi \\ 0 & \text{for andre verdier av } t \end{cases}$$

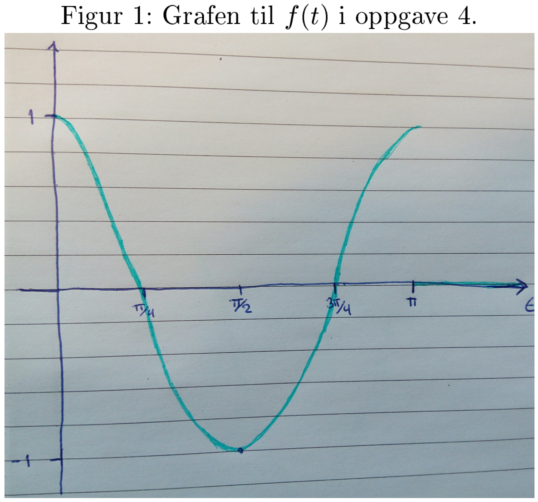
ved

$$f(t) = \cos(2t) - u(t-\pi)\cos(2t),$$

hvor u er Heaviside funksjonen. For å finne Laplace-transformasjonen bruker vi formel 4**

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(f) &= \frac{s}{s^2+4} - \mathscr{L}(u(t-\pi)\cos(2t)) \\ &= \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\mathscr{L}(\cos(2(t+\pi))) \\ &= \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\mathscr{L}(\cos(2t)) \\ &= \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+4} \\ &= \frac{s(1-e^{-\pi s})}{s^2+4}. \end{aligned}$$

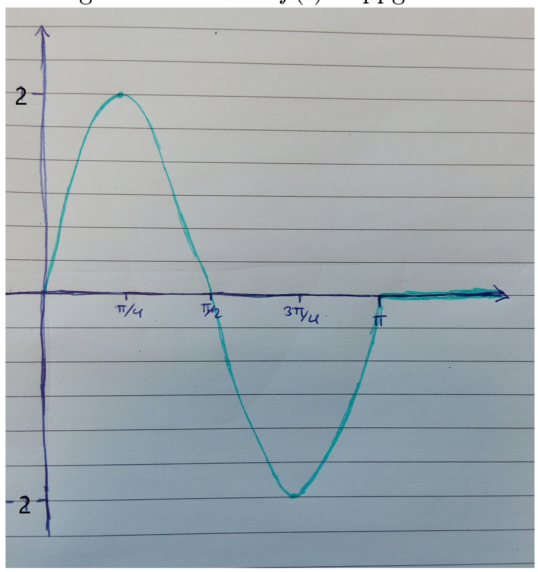
Figur 1: Grafen til $f(t)$ i oppgave 4.



13. Ved å bruke teorem 1 formel 4* og at $\sin(2t) = \mathscr{L}^{-1}\left(2/\left(s^2+4\right)\right)$ får vi

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left(4\left(1-e^{-\pi s}\right)/\left(s^2+4\right)\right) &= 2\sin(2t) - \mathscr{L}^{-1}\left(4e^{-\pi s}/\left(s^2+4\right)\right) \\ &= 2\sin(2t) - 2u(t-\pi)\sin(2(t-\pi)) \\ &= 2\sin(2t) - 2u(t-\pi)\sin(2t). \end{aligned}$$

Figur 2: Grafen til $f(t)$ i oppgave 13.



21. Vi har $y'' + 4y = 4\cos(t) - 4u(t-\pi)\cos(t)$. Tar vi Laplace-transformasjonen til den venstre siden får vi
$$\mathscr{L}(y''+4y) = s^2\mathscr{L}(y) - sy(0) - y'(0) + 4\mathscr{L}(y) = \left(s^2+4\right)\mathscr{L}(y) - sy(0) - y'(0).$$
Gjør vi det samme på høyre side får vi
$$\mathscr{L}(4\cos(t) - 4u(t-\pi)\cos(t)) = \frac{4s}{s^2+1} - 4e^{-\pi s}\mathscr{L}(\cos(t+\pi)) = \frac{4s}{s^2+1} + \frac{4e^{-\pi s}s}{s^2+1}.$$
Løser vi for $\mathscr{L}(y)$ får vi
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(y) &= y(0)\frac{s}{s^2+4} + y'(0)/2\frac{2}{s^2+4} + \frac{4s}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{4e^{-\pi s}s}{(s^2+4)(s^2+1)} \\
&= y(0)\frac{s}{s^2+4} + y'(0)/2\frac{2}{s^2+4} + \frac{4}{3}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4} + \frac{se^{-\pi s}}{s^2+1} - \frac{se^{-\pi s}}{s^2+4}\right) \\
&= y(0)\frac{s}{s^2+4} + y'(0)/2\frac{2}{s^2+4} + \frac{4}{3}\left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{s}{s^2+4} + \frac{se^{-\pi s}}{s^2+4}\right).
\end{aligned}$$
Tar vi invers Laplace-transformasjonen på begge sider får vi
$$\begin{aligned}
y(t) &= y(0)\cos(2t) + y'(0)\sin(2t)/2 + \frac{4}{3}(\cos(t) - u(t-\pi)\cos(t)) \\
&\quad -\frac{4}{3}\cos(2t) - \frac{4}{3}\mathscr{L}^{-1}\left(se^{-\pi s}/\left(s^2+4\right)\right) \\
&= y(0)\cos(2t) + y'(0)\sin(2t)/2 + \frac{4}{3}(\cos(t) - u(t-\pi)\cos(t)) - \frac{4}{3}\cos(2t) \\
&\quad -\frac{4}{3}u(t-\pi)\cos(2(t-\pi)) \\
&= \left(y(0) - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}u(t-\pi)\right)\cos(2t) + y'(0)\sin(2t)/2 + \frac{4}{3}\cos(t) - \frac{4}{3}u(t-\pi)\cos(t).
\end{aligned}$$
Setter vi inn initialdataene $y'(0) = 1$ og $y(0) = \frac{8}{3}$ får vi at løsningen er
$$y(t) = \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}u(t-\pi)\right)\cos(2t) + \sin(2t)/2 + \frac{4}{3}\cos(t) - \frac{4}{3}u(t-\pi)\cos(t).$$

33. Den eletriskmotoriske spenningen er gitt ved formelen $v(t) = 100(t-2)u(t-2)$. I dette tilfellet må vi løse integralligningen

$$10i(t) + 100\int_0^t i(\tau)\,d\tau = 100(t-2)u(t-2).$$

Hvis vi tar Laplace-transformasjonen på begge sider og løser for $\mathscr{L}(i(t))$ får vi

$$\begin{aligned} 10\mathscr{L}(i(t)) + 100\mathscr{L}(i(t))/s &= 100e^{-2s}/s^2 \\ \mathscr{L}(i(t))(s+10) &= 10e^{-2s}/s \\ \mathscr{L}(i(t)) &= \frac{10e^{-2s}}{s(s+10)}. \end{aligned}$$

Vi har at

$$\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-2s}/(s+10)\right) = u(t-2)\,e^{-10(t-2)}.$$

Dermed får vi at

$$i(t) = 10\int_0^t u(\tau-2)\,e^{-10\tau+20}d\tau = 10\frac{1}{10}u(t-2)\left(1-e^{-10t+20}\right) = u(t-2)\left(1-e^{-10t+20}\right).$$