MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 8

9.4:7 Finn lengden av $\mathbf{x} = (1, 3)^T$, hvor T står for transpose av vektor.

Løsning:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}.$$

9.4:14 Normalisér vektoren $\mathbf{x} = (0, -3, 1, 3)^T$.

Løsning:
Å normalisere en vektor betyr å finne vektoren som peker i samme retning og har lengde en.

$$\mathbf{x} = (0, -3, 1, 3)^T, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{0 + 9 + 1 + 9} = \sqrt{19}.$$

Den normaliserte vektoren er derfor

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{\sqrt{19}}(0, -3, 1, 3)^T.$$

9.4:19 Bruk skalarproduktet for å finne lengden av $\mathbf{x} = (0, -1, 2)^T$.

Løsning:
Lengden av en n-dimensjonal vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)^T$ er:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + ... + (x_n)^2}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}|^2 &= (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + ... + (x_n)^2 \\
&= (x_1)(x_1) + (x_2)(x_2) + (x_3)(x_3) + ... + (x_n)(x_n) \\
&= (\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \text{ (dvs. scalar produkt av vektor } \mathbf{x} \text{ med seg selv).} \\
&\implies |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.
\end{aligned}$$

Derfor, for $\mathbf{x} = (0, -1, 2)^T$,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = ((0)^2 + (-1)^2 + (2)^2) = 1 + 4 = 5.$$

og

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{5}.$$

$\boxed{\text{9.4:25}}$ Finn vinkelen mellom $\mathbf{x} = (0, -1, 3)$ og $\mathbf{y} = (-3, 1, 1)$.

Løsning:
Vi har at

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= 0(-3) + 1(-1) + 1(3) = 0 - 1 + 3 = 2 \\
|\mathbf{x}| &= \sqrt{0 + 1 + 9} = \sqrt{10} \\
|\mathbf{y}| &= \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11},
\end{aligned}$$

så

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{110}}.$$

Dermed er vinkelen melom vektorene

$$\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{110}}\right) \approx 1.3789,$$

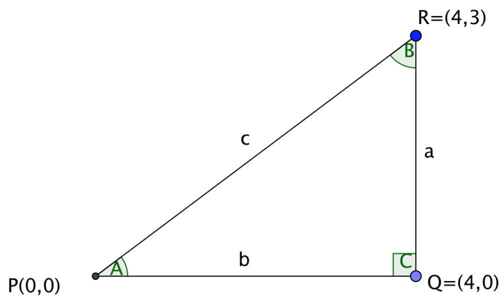
eller 79.01°.

$\boxed{\text{9.4:31}}$ Punkter P=(0,0), Q=(4,0) og R=(4,3) former et trekant.

a) Bruk trigonometriske regler for å finne ut lengden til alle sider og vinkeler mellom dem.

b) Bruk resultater fra dette seksjon (dvs. skalar prodkutet og vinkel regel) for å løse (a.)

Løsning a.):



Her er trekant PQR (som er rettvinklet) og vi representer sider som a, b og c, og vinkeler som A, B og C. Vi bruker avstand formel (distance formula) for å finne lengden til sider PR, PQ og QR.
Side a, Q(4,0), R(4,3) $= \sqrt{(4-4)^2 + (0-3)^2} = 3.$
Side c, P(0,0), R(4,3) $= \sqrt{(0-4)^2 + (0-3)^2} = 5.$
Side b, P(0,0), Q(4,0) $= \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2} = 4.$
$\angle$PQR $= 90°$.

$\angle\text{QPR} = \tan A = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \implies \angle\text{QPR} = \tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 36.9°$.
$\angle\text{PRQ} = 90° - \tan^{-1}\frac{3}{4} = 90° - 36.9° \approx 53.1°$.

Løsning b.):
$\vec{QR} =< x_1, y_1 >=< 4-4, 3-0 >=< 0, 3 > \implies$ lengde av $\vec{a} = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2} = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} = 3$.
$\vec{PR} =< x_2, y_2 >=< 4-0, 3-0 >=< 4, 3 > \implies$ lengde av $\vec{c} = \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$.
$\vec{PQ} =< x_3, y_3 >=< 4-0, 0-0 >=< 4, 0 > \implies$ lengde av $\vec{b} = \sqrt{(x_3)^2 + (y_3)^2} = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = 4$.
Altså, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 4(4)+0(3) = 16$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 0(4)+3(0) = 0$ og $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 4(0)+3(3) = 9$. Dermed,

$$\cos A = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} \implies A = \cos^{-1}\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} \implies A = \cos^{-1}\frac{16}{20} = \cos^{-1}(0.8) = 36.9°.$$

$$\cos B = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|} \implies B = \cos^{-1}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|} \implies B = \cos^{-1}\frac{9}{15} = \cos^{-1}(0.6) = 53.1°.$$

$$\cos C = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{b}||\mathbf{a}|} \implies C = \cos^{-1}\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{b}||\mathbf{a}|} \implies C = \cos^{-1}\frac{0}{20} = \cos^{-1}(0) = 90°.$$

$\boxed{\text{9.4:40}}$ Finn (standard)ligningen for planet i $\mathbb{R}^3$ som går gjennom punktet $\mathbf{r}_0 = (1, 0, -3)^T$ og har normalvektor $\mathbf{n} = (1, -2, -1)^T$.

Løsning:
Punktet $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ ligger i planet hvis og bare hvis $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, så ligningen for planet er gitt ved

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{n}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= (1, -2, -1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+3 \end{pmatrix} \\ &= x - 1 - 2y - (z+3) \\ &= x - 2y - z - 4. \end{aligned}$$

Ekstra:
Planet kan parametriseres ved f.eks. å la $z = t$ og $y = s$ være frie variabler. Da må $x = 2s + t + 4$ så planet er verdimengden av funksjonen $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{x}(s, t) = \begin{pmatrix} 2s + t + 4 \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{9.4:48}}$ Finn en parametrisk beskrivelse av linjen i planet som går gjennom punktet $\mathbf{x}_0 = (2, 1)^T$ og $\mathbf{x}_1 = (3, 5)^T$. Finn deretter standardligningen til linjen.

Løsning:
Retningen på linjen er $\mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = (1, 4)^T$ og en parametrisering av linjen er

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \\ &= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

eller på komponentform

$$\begin{aligned}x(t) &= 2 + t \\ y(t) &= 1 + 4t.\end{aligned}$$

Vi kan nå eliminere t for å finne sammenhengen mellom x og y:

$$y - 4x = 1 + 4t - 8 - 4t = -7.$$

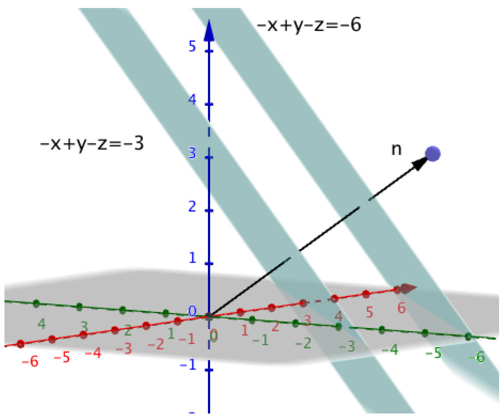
9.4:65 Gitt er planet som går gjennom $\mathbf{r}_0 = (0, -2, 1)^T$ med normalvektor $\mathbf{n} = (-1, 1, -1)^T$. Finn en linje som går gjennom punktet (5,-1,0) og er parallell til planet.

Løsning:
Et punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ ligger i planet hvis og bare hvis

$$0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x - 0\\ y - (-2)\\ z - 1\end{bmatrix} = -x + y + 2 - z + 1 = -x + y - z + 3.$$

Dermed har vi ligning av plan som er gitt, $-x + y - z = -3$. Vi ønsker ligning av linje som går gjennom punktet (5,-1,0) og er parallell til planet $-x + y - z = -3$.
Når to planer er paralelle, har de samme normal vektor (som er vist i figur under.) Dermed har vi normal vektor $\mathbf{n} = (-1, 1, -1)^T$ og et punkt $\mathbf{r}_0 = (5, -1, 0)$ som ligger i planet parallell til $-x + y - z = -3$. For å finne ligning til det planet antar vi et punkt $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ og vi vet at $\mathbf{r}_1$ ligger i det parallelle planet hvis og bare hvis

$$0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1 - 5\\ y_1 + 1\\ z_1 - 0\end{bmatrix} = -x_1 + 5 + y_1 + 1 - z_1 = -x_1 + y_1 - z_1 + 6.$$



Nå har vi to planer $-x+y-z=-3$ og $-x_1+y_1-z_1=-6$ som er parallelle til hverandre og punkt (5,-1,0) ligger i $-x_1+y_1-z_1=-6$. Vi ønsker å finne ligning til linjer i planet $-x_1+y_1-z_1=-6$ (alle linjer i dette plan vil være paralelle til $-x+y-z=-3$).
For å få til det, trenger vi å finne et punkt til i planet $-x_1+y_1-z_1=-6$, som kan gjøres ved å finne en tilfeldig løsning av ligning $-x_1+y_1-z_1=-6$. Jeg velger punkt (4, -2, 0).
Nå har vi to punkter (5,-1,0) og (4, -2, 0) i planet $-x_1+y_1-z_1=-6$ slik at vi kan finne et retningsvektor (direction vector) $\mathbf{v}$ for en linje som går gjennom (5,-1,0) og (4, -2, 0).
For å finne $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{v}=[5,-1,0]-[4,-2,0]=[5-4,-1-(-2),0-0]=[1,1,0].$$

Når vi vet både posisjon vektor $\mathbf{r}_1$ (som er punkt (5,-1,0)) og retningsvektor $\mathbf{v}$ (som er (1,1,0)) for et linje i planet $-x_1+y_1-z_1=-6$, kan vi skrive punkter på linjen både i vektor og parametriske former som:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_1+t\mathbf{v}$$

hvor, $\mathbf{r}$=tilfeldig punkt på linje, $\mathbf{r}_1$=posisjon vektor (gitt punkt på linje) og $\mathbf{v}$=retningsvektor for linje. Også i parametrisk form:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+t\mathbf{v}=\begin{bmatrix}5\\-1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

hvor $\mathbf{r}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, \mathbf{r}_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}, \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ og $t\in\mathbb{R}$. På komponentform blir dette

$$\begin{aligned}x&=5+t\\y&=-1+t\\z&=0\end{aligned}$$

$\boxed{\text{9.4:66}}$ Finn en linje på parametrisk form som står vinkelrett på planet $x+2y-z+1=0$.

Løsning:
Planet har normalvektor $\mathbf{n}=(1,2,-1)^T$ (det er bare å lese av koeffisientene i ligningen), så den parametriske linjen $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0+t\mathbf{n}$ står vinkelrett på planet for alle $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^3$.

Ekstra:
Hvis dét ikke synes innlysende, kommer her er et bevis for denne påstanden. La $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ være to punkter på linjen og la $\mathbf{y}_1=(x_1,y_1,z_1)^T$ og $\mathbf{y}_2=(x_2,y_2,z_2)^T$ være to punkter i planet. Vi må vise at

$$(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\cdot(\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)=0.$$

Det finnes to tall a og b slik at $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}(a)$ og $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}(b)$. Dermed er

$$\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1=\mathbf{x}(b)-\mathbf{x}(a)=\mathbf{x}_0+b\mathbf{n}-\mathbf{x}_0-a\mathbf{n}=(b-a)\mathbf{n}$$

uavhengig av $\mathbf{x}_0$ og

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) &= (b-a)\mathbf{n} \cdot (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \\ &= (b-a)(1, 2, -1) \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \\ &= (b-a)(x_2 - x_1 + 2(y_2 - y_1) - (z_2 - z_1)) \\ &= (b-a)(x_2 + 2y_2 - z_2 - (x_2 + 2y_2 - z_2)) \\ &= (b-a)(-1 - (-1)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

F.eks. med $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ får vi linjen

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2t \\ z &= -t. \end{aligned}$$