MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 4

5.1.1c) $ln(x)$ er definert for $x > 0$, så $ln(\sin x)$ er definert når $\sin x > 0$. $\sin x > 0$ for $x \in (2\pi n, 2\pi n + \pi)$, for n heltall. (Husk at sin er periodisk med periode 2π. Altså er $\sin(x) = \sin(x + 2\pi n)$ for alle heltall n). Altså er definisjonsmengden

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (2\pi n, (2n+1)\pi)$$

5.1.5d) Vi skal vise at $f(x) = x^3$ er kontinuerlig i punktet $x = 2$. La $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det finnes $\delta > 0$ slik at $|x - 2| < \delta$ gir $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$. Vi merker oss at siden $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ er $|f(x) - f(2)| = |x^3 - 2^3| = |x - 2||x^2 + 2x + 4|$. La n_ε være det minste heltallet større enn eller lik $2 + \varepsilon$. Da er

$$|(2+\varepsilon)^2 + 2(2+\varepsilon) + 4| \leq |n_\varepsilon^2 + 2n_\varepsilon + 4|.$$

Velg $\delta < \frac{\varepsilon}{|n_\varepsilon^2 + 2n_\varepsilon + 4|}$. Da er $|x - 2| < \delta < \frac{\varepsilon}{|n_\varepsilon^2+2n_\varepsilon+4|}$, og dermed

$$\begin{aligned} |f(x) - f(2)| &= |x^3 - 2^3| = |x-2||x^2+2x+4| \\ &< \frac{\varepsilon}{|n_\varepsilon^2 + 2n_\varepsilon + 4|}||n_\varepsilon^2 + 2n_\varepsilon + 4| = \varepsilon \end{aligned}$$

som viser at x^3 er kontinuerlig i punktet 2.

Bemerkning: I Eksempel 5.1.2 og 5.1.3 i boka innføres hjelpestørrelsen $h = x - a$ og de deler opp i to tilfeller. Man kan gjerne gjøre dette i denne oppgaven også. Det er en smaksak hva man liker best.

5.1.6b) Vi viser diskontinuitet ved motsigelse. Anta at $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ er kontinuerlig i $x = 0$. Altså antar vi at gitt en vilkårlig $\varepsilon > 0$ finnes det $\delta > 0$ slik at $|x - 0| = |x| < \delta$ gir at $|f(x) - f(0)| = |\cos(\frac{1}{x}) - 0| = |\cos(\frac{1}{x})| < \varepsilon$. Spesielt antar vi da at dette holder for $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Vi vil nå framtvinge en motsigelse. Antakelsen om kontinuitet i $x = 0$ sier nå at det finnes $\delta > 0$ slik at for $x \in (-\delta, \delta)$ er $|\cos(\frac{1}{x})| < \frac{1}{2}$. Velg nå et naturlig tall k slik at $2\pi k > \frac{1}{\delta}$. Ekvivalent er $\frac{1}{2\pi k} < \delta$, altså $\frac{1}{2\pi k} \in (-\delta, \delta)$. Men

$$|\cos(\frac{1}{\frac{1}{2\pi k}})| = |\cos(2\pi k)| = 1 > \frac{1}{2}$$

Dette er en motsigelse. Altså er ikke f kontinuerlig i $x = 0$.

Bemerkning: En alternativ løsning som ikke bruker Definisjon 5.1.1 direkte bygger på Setning 5.1.10. Følgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2\pi k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerer mot 0 når $k \to \infty$, men den tilhørende følgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\cos(\frac{1}{x_k}))_{k\in\mathbb{N}} = (\cos(\frac{1}{\frac{1}{2\pi k}}))_{k\in\mathbb{N}} = (\cos(2\pi k))_{k\in\mathbb{N}}$. Sistnevnte følge er konstant lik 1 og kan dermed ikke konvergere mot $f(0) = 0$. Ved Setning 5.1.10 kan vi da konkludere med at f ikke er kontinuerlig i 0.

5.1.6c) Pass på definisjonen her! $x = 1$ er ikke i definisjonsmengden til f.

5.1.9e) (Ekstraoppgave) Husk: I et hvert intervall (a, b), med $a < b$, finnes både rasjonale og irrasjonale tall. Tilsynelatende er da f diskontinuerlig i alle x. La oss gjøre dette presist. Vi deler opp i to tilfeller (man kan lett gjøre begge tilfeller samtidig, bevisene for de to tilfellene vil være nesten identiske).

Anta først at y er et rasjonalt tall, og dermed også at $f(y) = 1$. Anta f er kontinuerlig i y. For alle $\varepsilon > 0$ finnes det da $\delta > 0$ slik at $|x - y| < \delta$ impliserer $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Spesielt holder dette for $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Under antakelse om kontinuitet i y finnes det altså $\delta > 0$ slik at $x \in (y - \delta, y + \delta)$ impliserer $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Men $(y - \delta, y + \delta)$ inneholder også irrasjonale tall. La x være et slikt irrasjonalt tall. Da er $|x - y| < \delta$, men $|f(x) - f(y)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}$. Dette er en motsigelse. Siden y var et vilkårlig rasjonalt tall konkluderer vi med at f er diskontinuerlig i alle rasjonale tall.

Anta så at y er irrasjonal. Da er $f(y) = 0$. Vi viser at f er diskontinuerlig i y. Anta for motsigelse at f er kontinuerlig i y, altså at for alle $\varepsilon > 0$ finnes det $\delta > 0$ slik at $|x - y| < \delta$ impliserer $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Igjen holder dette spesielt for $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Under antakelse om kontinuitet finnes det da $\delta > 0$ slik at $x \in (y - \delta, y + \delta)$ gir $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$. Men $(y - \delta, y + \delta)$ inneholder også rasjonale tall. La x være et slikt rasjonalt tall. Da er $|x - y| < \delta$, men $|f(x) - f(y)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$. Dette er en motsigelse. Siden y var et vilkårlig irrasjonalt tall konkluderer vi med at f er diskontinuerlig i alle irrasjonale tall.

Dermed er f diskontinuerlig for alle reelle tall x.

5.1.17 (Ekstraoppgave) Vi viser først at $(0, 1]$ ikke er en åpen mengde. Problemet ligger i at $1 \in (0, 1]$. Hvis $(0, 1]$ er åpen finnes det per definisjon $\delta > 0$ slik at $(1-\delta, 1+\delta) \subset (0, 1]$. Dette er ikke mulig siden $1 + \delta > 1$. Altså er ikke $(0, 1]$ åpen.

Vi viser så at dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, så er mengden $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$ åpen. La $y \in A$. Da er $f(y) \neq 0$ per definisjon. La $\varepsilon = |f(y) - 0| = |f(y)| > 0$. Betrakt det åpne intervallet $(f(y) - \varepsilon, f(y) + \varepsilon)$. Merk at dette intervallet inneholder ikke 0. Siden f er kontinuerlig vet vi at det finnes $\delta > 0$ slik at $x \in (y - \delta, y + \delta)$ gir $f(x) \in (f(y) - \varepsilon, f(y) + \varepsilon)$. Spesielt er $f(x) \neq 0$ for $x \in (y - \delta, y + \delta)$, så $(y - \delta, y + \delta) \subset A$. Siden $y \in A$ var vilkårlig, konkluderer vi med at A er en åpen mengde.

5.2.1b) $f(x) = e^x - x - 2$ er en sum av kontinuerlige funksjoner, altså kontinuerlig. Vi har at $f(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 0 - 2 = -1 < 0$ og $f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 > 0$. At $e^2 - 4 > 0$ følger av at $e > 2$ og derfor $e^2 > 2^2 = 4$. Det følger da av skjæringssetningen at f har et nullpunkt i $[0, 2]$.

5.2.3b) Vi har at

$$g(\frac{\pi}{6}) = (\frac{\pi}{6})^3 < \frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{\pi}{6})$$

og

$$g(\frac{\pi}{3}) = (\frac{\pi}{3})^3 > \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{3})$$

Da gir Korollar 5.2.2 at det finnes $c \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ slik at $sin(c) = c^3$, altså at f og g skjærer hverandre i det gitte intervallet.

5.2.6 Skriv om

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = x^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n})$$

For $|x|$ stor nok er $|\frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}| < |a_n|$, og da vil faktoren $(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n})$ ha samme fortegn som a_n. Siden n er et oddetall vil $lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ og $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$. Fortegnet til a_n bestemmer nå hvilken "ende" f går mot $-\infty$ og hvilken "ende" den går mot ∞, men uansett må det finnes et tall M slik at $f(M)$ og $f(-M)$ har motsatte fortegn. Siden funksjonen er kontinuerlig på $[-M, M]$ gir skjæringssetningen at f har et nullpunkt på intervallet $(-M, M)$.

5.2.7 (Ekstraoppgave)

a) Vi skal vise at det finnes et klokkeslett der hun er like høyt oppe begge dager. Vi lar fjellets høyde være H. Vi lar så $f(t)$ stå for klatrerens høyde over bakken ved et klokkeslett t under oppstigningen og $g(t)$ høyden under nedstigningen. Begge funksjonene er kontinuerlige, og siden $f(7) = 0 < H = g(7)$ og $f(15) = H > 0 = g(15)$, gir Korollar 5.2.2 at funksjonsgrafene må skjære hverandre for en verdi $t_0 \in (7, 15)$. Altså er hun like høyt oppe ved klokkeslettet t_0 begge dager.

b) Hun må fortsatt være ved lik høyde ved et tidspunkt begge dager. Hun var ikke oppe før klokken 15 første dagen, så vi kan konkludere at $f(10) < H = g(10)$. I tillegg er $f(16) = H > 0 = g(16)$. (Hvis hun kom opp kl. 15 første dagen, var hun ved samme høyden kl. 16 samme dag per antakelse). Ved Korollar 5.2.2 kan vi igjen konkludere med at det finnes et klokkeslett $t_1 \in (10, 16)$ hun var like høyt oppe begge dager.

5.2.8 La $g(x) = x$. f tar verdier i $[0, 1]$, så vi har at $f(0) \geq 0 = g(0)$ og $f(1) \leq 1 = g(1)$. Både f og g er kontinuerlige, så Korollar 5.2.2 gir at det finnes en $x \in [0, 1]$ slik at $f(x) = g(x) = x$, altså at f har et fikspunkt.

5.3.1b) $x - 1 > 0$ på intervallet, og $sin^2(x) + e^x > 0$ på intervallet. Så dette er en komposisjon av kontinuerlige funksjoner, altså er f kontinuerlig på det lukkede, begrensede intervallet $[1.0001, 3]$. Ekstremalverdisetningen gir da at f har maksimums- og minimumsverdier på intervallet.

5.3.3 a) La $A = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ og $B = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Da finnes det $M_A \in \mathbb{R}$ slik at for $x < M_A$ er $|f(x)| < |A| + 1$ og det finnes M_B slik at for $x > M_B$ er $|f(x)| < |B| + 1$. La $M = \max(|M_A|, |M_B|)$ og la $C = \max(|A|, |B|)$. For $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$ er da $|f(x)| < C + 1$, altså er f begrenset utenfor $[-M, M]$. Ved Setning 5.3.2 er f også begrenset på $[-M, M]$. Altså er f begrenset.

b) Fra a) vet vi at f er begrenset. Dermed finnes $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ og $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Vi har videre at $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \geq 0$ og $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leq 0$. Siden $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty}$ finnes M slik at for $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$ er $f(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ og $f(x) \geq \inf_{x\in\setminus} f(x)$. Men dette betyr jo at f oppnår både sin største og sin minste verdi på $[-M, M]$, så f har både maksimal- og minimalpunkter.

5.3.5 (Ekstraoppgave) Vi viser at $V_f = [f_{min}, f_{max}]$. For å gjøre dette viser vi inklusjonen begge veier.

Merk at $V_f \subset [f_{min}, f_{max}]$ holder per definisjon av minimum og maksimum.

For å vise den andre inklusjonen, merk at ekstremalverdisetningen garanterer at f oppnår både sitt minimum og sitt maksimum på det lukkede, begrensede intervallet $[a, b]$ siden f er kontinuerlig. Så det gjenstår å vise at f også oppnår alle verdier mellom f_{min} og f_{max} også. Dette følger direkte fra skjæringssetningen, men la oss skrive det helt ut. La $f_{min} \leq d \leq f_{max}$. Da er funksjonen $g(x) = f(x) - d$ negativ i minimumspunktet til f og positiv i maksimumspunktet, altså finnes det en verdi c mellom minimumspunktet og maksimumspunktet hvor $f(c) - d = 0$ ved skjæringssetningen. Men det betyr jo at $f(c) = d$. Altså har vi vist at $[f_{min}, f_{max}] \subset V_f$.

5.3.6 Skriv om

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = x^n(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n})$$

La M være slik at for $|x| > M$ er $|\frac{a_{n-1}}{x} + \cdots \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}| < 1$. Da er $1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$ strengt positiv for $|x| > M$. Nå er det bare å observere at $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty = \lim_{x\to\infty} x^n$ når n er partall. Dermed er $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} = \infty$.

Vi viser nå at det finnes et tall K slik at $P(x) > K$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi har at $P(0) = a_0$. Siden $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} = \infty$ finnes $A > 0$ slik at $x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A]$ impliserer at $P(x) > a_0$. f er kontinuerlig på det lukkede, begrensede intervallet $[-A, A]$, og vi har ved ekstremalverdisetningen at det finnes et minimumspunkt i dette intervallet, si K'. Per definisjon er $f(x) \geq K'$ for alle $x \in [-A, A]$, og siden $K' \leq a_0$ er $f(x) \geq K'$ for alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A]$ også. Enhver $K < K'$ vil nå ha den ønskede egenskapen.