Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 3

Kapittel 8.2: Likevektspunkter og deres stabilitet

La oss si vi har en differensialligning på formen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \tag{0.1}$$

der g er en gitt funksjon. Hva kan man si om egenskapene til løsningene av (0.1) *uten* å løse differensialligningen? Det er klart at hvis g har et nullpunkt i $\hat{y}$, dvs. $g(\hat{y}) = 0$, så vil den konstante funksjonen

$$y(x) \equiv \hat{y} \tag{0.2}$$

være en løsning av (0.1) (begge sider i (0.1) er alltid lik null). Vi sier da at funksjonen (0.2) er en **likevektsløsning** av (0.1).

Det er også klart at grafen til en løsning av (0.1) vil stige hvis g er positiv og grafen vil synke hvis g er negativ.

En viktig egenskap til likevektsløsningene er deres **stabilitet**. Dette avgjøres ikke av likevektsløsningen selv, men av løsninger med en graf som starter nær $\hat{y}$: Anta at vi er gitt en initialbetingelse $y(x_0) = y_0$ der y_0 er et tall *nær* likevektspunktet $\hat{y}$. Vi sier at $\hat{y}$ er en **stabil** likevektsløsning hvis løsningen til initialverdiproblemet vil fortsette å nærme seg $\hat{y}$. Vi sier at $\hat{y}$ er en **ustabilt** likevektsløsning hvis løsningen fjerner seg fra $\hat{y}$.

Følgende teorem gjør det enkelt å kategorisere et likevektsløsninger.

Teorem 1. *En likevektsløsning $\hat{y}$ til differensialligningen* (0.1) *er stabilt hvis $g'(\hat{y}) < 0$. En likevektsløsning er ustabilt hvis $g'(\hat{y}) > 0$.*

8.2:5 Anta at en populasjon vekser i henhold til logistisk ligning med indre vesktrate $r = 1.5$. Anta at bæreevne til populasjon er $K = 100$.

a) Finn differensialligningen som beskriver veksthastighet til denne populasjonen.

b) Finn likevektsløsningene til denne differensialligningen. Tegn og bruk grafen til å drøfte stabiliteten til likevektsløsningene.

c) Beregn egenverdiene (se def. i boken) til hver likevektsløsning og avgjør stabiliteten til likevektsløsningene. Sammenlign svarene ift punkt (a.)

Løsning: a)
La N være antall befolkningen på tidspunkt t. I forhold til logisktisk ligning kan vi representere befolkningsvekst som:

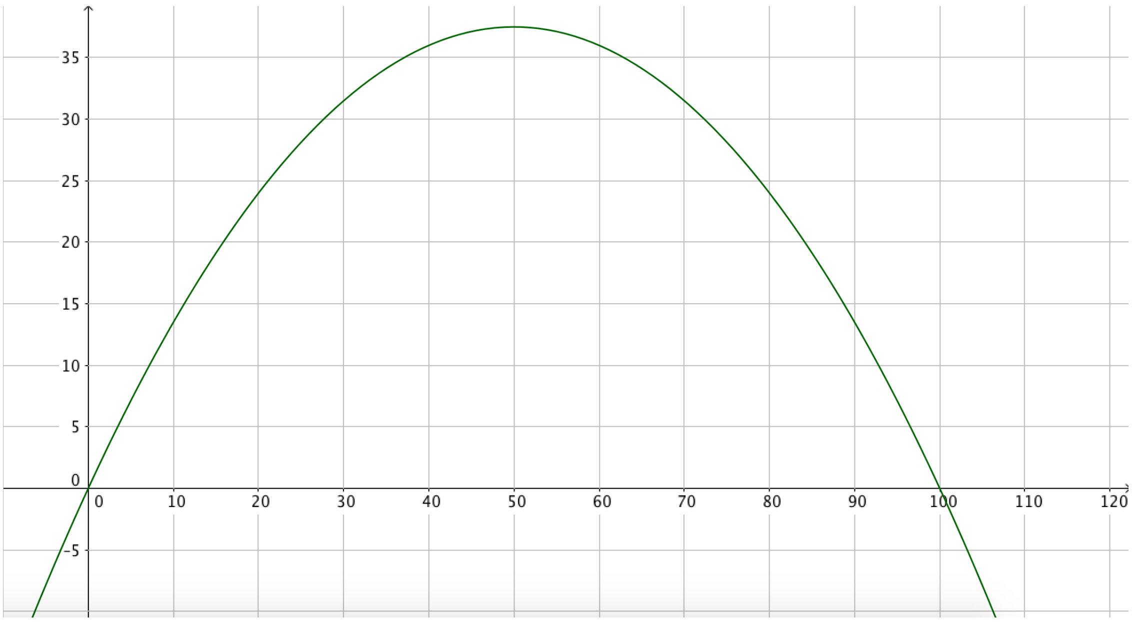
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= rN\left(1-\frac{N}{K}\right)\\ &= 1.5N\left(1-\frac{N}{100}\right) \text{ ved å erstatte verdiene av r og K}\\ &= 1.5N\left(\frac{100-N}{100}\right)\\ &= 0.015N(100-N)\end{aligned}$$

b)
Ved å sette

$$g(N) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0 \implies 0.015N(100-N) = 0$$

får vi to likevektsløsningene som er:

$$N = 0 \text{ og } N = 100$$



Figur 1: Grafen av $g(N)$ har to nullpunkter

Som vi ser av figur 1, har g nullpunkter i $N = 0$ og $N = 100$. Hvis $N > 0$ så er g positiv og N vil stige å gå bort fra 0. Altså, $N = 0$ er en **ustabil likevektsløsning**. Hvis $N < 100$ så er g positiv og N vil stige og vil gå mot $N = 100$; også når $N > 100$ så er g negativ og N vil synke og gå mot $N = 100$. Dermed er $N = 100$ en **stabil likevektsløsning**.

c)
Vi finner egenverdiene til likevektsløsningene: Vi har at $g(N) = 0.015N(100-N) =$

$0.015(100N - N^2)$, så $g'(N) = 0.015(100 - 2N)$. Dette gir at

$$\lambda_1 = g'(N = 0) = 0.015(100 - 2(0)) = 1.5 > 0$$

og

$$\lambda_2 = g'(N = 100) = 0.015(100 - 2(100)) = 0.015(-100) = -1.5 < 0$$

som bekrefter at $N = 100$ er en **stabil likevektsløsning** og at $N = 0$ er en **ustabil likevektsløsning**.

$\boxed{\text{8.2:7}}$ Anta at en populasjon vekser i henhold til logistisk ligning med indre vesktrate $r = 2$. Anta at $N(0) = 10$.

a) Finn bæreevnen K hvis populasjon vekser størst når populasjonsstørrelse er 1000.

b) Hvis $N(0) = 10$, hvor lenge vil det ta før populasjon når 1000?

c) Finn $\lim_{t\to\infty} N(t)$.

Løsning:
a)
La N være antall befolkningen på tidspunkt t. I forhold til logisktisk ligning kan vi representere befolkningsvekst som:

$$g(N) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

vi prøver å finne et punkt for g, hvor populasjon vekser mest ved bruk av derivativ av funksjon $g(N)$. Dermed

$$\begin{aligned} g'(N) = \frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2} &= rN\left(\frac{-1}{K}\right) + r(1)\left(1 - \frac{N}{K}\right) = r\left(-\frac{N}{K} + 1 - \frac{N}{K}\right) \\ &= r\left(1 - \frac{2N}{K}\right) \end{aligned}$$

Vi ser at

$$g'(N) = \frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2} < 0 \iff N > \frac{K}{2} \text{ og } g'(N) = \frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2} > 0 \iff N < \frac{K}{2}$$

Dermed er $\frac{K}{2}$ maksimalpunkt for $g(N) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ og derfor $\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2} = 0$ når $N = \frac{K}{2}$ (se side 207, Fermat's Teorem i 3. utgave av boka), og det gir oss at $K = 2N = 2000$.

b)
Vi vet at løsning av logistisk ligning er:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

ved bruk av verdier $r, K, N = 1000$ og $N(0) = N_0 = 10$ får vi

$$\begin{aligned}
1000 &= \frac{2000}{1 + \left(\frac{2000}{10} - 1\right)e^{-2t}} \\
&= \frac{2000}{1 + (200 - 1)e^{-2t}} \\
&\implies 1 + 199e^{-2t} = \frac{2000}{1000} = 2 \\
&\implies 199e^{-2t} = 2 - 1 = 1 \\
&\implies e^{-2t} = \frac{1}{199} \implies -2t = \ln\left|\frac{1}{199}\right| \\
&\implies t = \frac{-1}{2}\ln\left|\frac{1}{199}\right| \approx 2.65
\end{aligned}$$

c)

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}} = K = 2000.$$

$\boxed{8.2{:}10}$ Anta at en fisk populasjon vekser i henhold til logistisk ligning hvor en bestemt antall fisk er tatt ut ved hastighet proporsjonal populasjon størrelse. Hvis $N(t)$ er populasjon størrelse på tidspunkt t, så

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - hN.$$

Anta at $r = 2$ og $K = 1000$.

a) Finn likevektsløsningene til denne differensialligningen. Tegn og bruk grafen til å drøfte stabiliteten til likevektsløsningene når $h = 0.1$ og finn maksimalt innhøstingsrate.

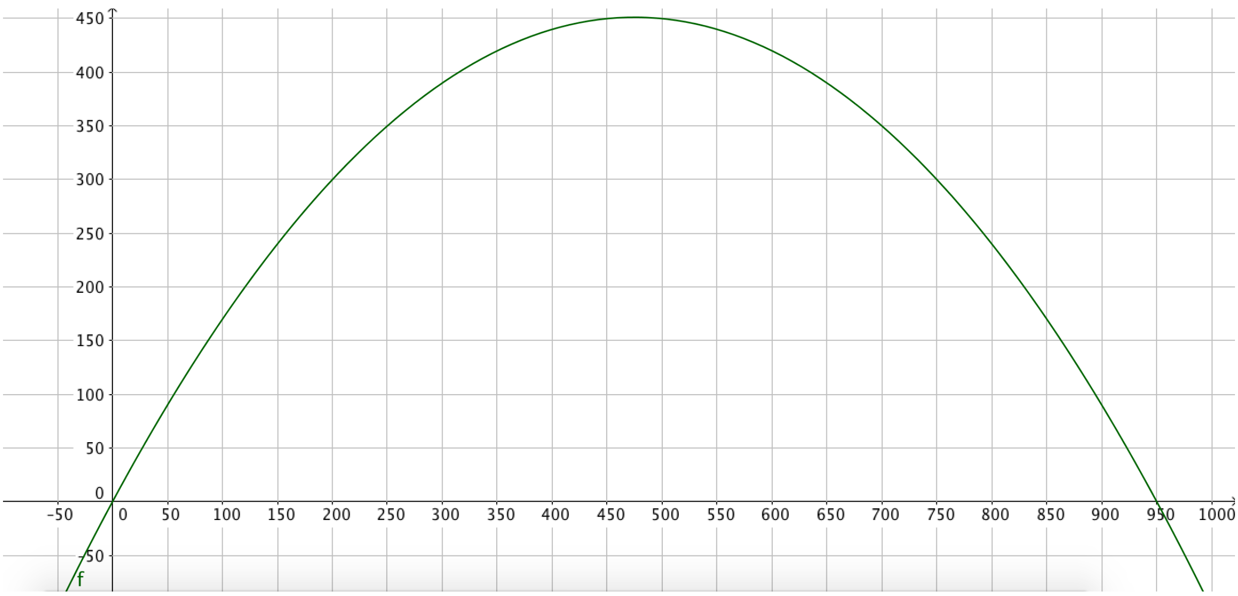
b) Vis at hvis $h < r = 2$, så er det en nontrivial likevektsløsning.

c) Bruk egenverdier og grafen til hver likevektsløsning og avgjør stabiliteten til likevektsløsningene. Sammenlign svarene ift punkt (b.)

Løsning: a)
For å finne like vektsløsning, vi lar $g(N) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0 \implies$:

$$
\begin{aligned}
g(N) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - hN = 0 \\
&\implies rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - hN = 0 \\
&\implies rN(K - N) - hKN = 0 \implies rN(K - N - \frac{Kh}{r}) = 0 \\
&\implies N = 0 \text{ eller } K - N - \frac{Kh}{r} = 0, \text{ i.e., } N = K\left(1 - \frac{h}{r}\right)
\end{aligned}
$$

ved å erstatte verdiene K, r og h, vi får to likevektløsningene for vekst modell, $N = 0$ og $N = 1000(1 - \frac{0.1}{2}) = 1000 - 50 = 950$. I grafen under kan vi se at $N = 0$ er **ustabil** likevektsløsning mens $N = 950$ er **stabil**.



For å finne maksimalt innhøstingsrate (h), ønsker vi at N skull være positivt når system er i stabil situasjon. Når vi går tilbake til likevesktløsningene, har vi en stabil likevesktsløsning, som er:

$$N = K\left(1 - \frac{h}{r}\right).$$

For å ha positivt populasjon størrelse må vi ha

$$N = K\left(1 - \frac{h}{r}\right) > 0$$

når system er stabil på denne likevektsløsning. Dermed har vi en begresning på h at

$$1 - \frac{h}{r} > 0 \implies 1 > \frac{h}{r} \implies h < r = 2$$

og maksimalt kan h være 2.

Løsning: b)
Vi prøver å finne egenverdier av $g(N)$.

$$g'(N) = r(1)\left(1 - \frac{N}{K}\right) + rN\left(\frac{-1}{K}\right) - h$$
$$= r - \frac{rN}{K} - \frac{rN}{K} - h = r - h - \frac{2rN}{K}$$

På $N = 0$, er

$$g'(0) = r - h$$

som skull være < 0 hvis system skull være stabil på punkt 0, dvs:

$$r - h < 0 \implies h > r$$

men her $r = 2$ og $h = 0.1$, i.e., $h < r$ som betyr at system er ustabil når $N = 0$ (trivial løsning) og dermed har vi bare et nontrivial likevektsløsning når $h < r$, som er:

$$N = K\left(1 - \frac{h}{r}\right)$$

Løsning: c)
Vi får samme resultater når vi sammenligne grafen i punkt (a.) og egenverdier i punkt (b.).

8.2.12 Konsentrusjonen $C(t)$ er beskrevet av følgende diff. Ligning:

$$\frac{dC}{dt} = 3(20 - C(t)) \quad , \quad t \geq 0 \quad . \quad (*)$$

a) Vi skal løse $(*)$ for $C(0) = 5$

$$\frac{dC}{dt} = 3(20 - C(t)) \quad \Big| \cdot \frac{dt}{C(t) - 20}$$

$$\frac{1}{C(t) - 20}\, dC = -3\, dt$$

$$\int \frac{1}{C - 20}\, dC = \int -3\, dt$$

$$\ln|C - 20| = -3t + K \quad , \quad \text{så}$$

$$|C - 20| = e^{-3t + K} = e^{K} \cdot e^{-3t} \quad ,$$

$$C - 20 = \pm e^{K} \cdot e^{-3t}$$

$c(t) = 20 \pm e^K \cdot e^{-3t}$, $c(0) = 5$ gir

$5 = 20 \pm e^K \cdot e^{-3\cdot 0} = 20 \pm e^K$, så

$\pm e^K = 5 - 20 = -15$, og dermed er

$\underline{c(t) = 20 - 15 \cdot e^{-3t}}$

b) $\lim_{t\to\infty} 20 \pm e^K \cdot e^{-3t} = \underline{20}$

c) $c(t) = 10$, vi løser:

$10 = 20 - 15 e^{-3\cdot t}$

$-10 = -15 e^{-3t}$

$\frac{10}{15} = e^{-3t}$

$\ln(10/15) = -3t$, så

$t = -3 \cdot \ln(10/15) = 3 \cdot \ln(15/10) = \underline{3 \cdot \ln(3/2)}$

8.2.14

a) 1000 liter og 2 kg salt gir en konsentrasjon på: $2000 g / 1000 \text{ liter} = \underline{2 g/\text{liter}}$

b) Vil ha 1g/liter med salt, dvs. at vi vil ha 1000 g fordelt på 1000 liter. Dersom vi bytter ut 500 liter av saltvann med rent vann får vi:

$2g/\text{liter} \cdot 500 \text{ liter} + 0g/\text{liter} \cdot 500 \text{ liter} = 1000 g$ salt

som gir $1000g / 1000 \text{ liter} = \underline{1g \cdot \text{liter}^{-1}}$

c) Vi setter opp en differensialligning for konsentrasjonen, som vi kaller $C(t)$.

La a være raten til pumpen og V volumet.

Vi får

konsentrasjon på det som strømmer ut.

$$\frac{dCV}{dt} = -a \cdot C$$

ettersom det ikke strømmer noe salt inn,

så $\dfrac{dC}{dt} = -\dfrac{a}{V} \cdot C$, $V = 1000$ liter, $a = 1$ liter$\cdot s^{-1}$ eller $a = 2$ liter$\cdot s^{-1}$

Vi løser:

$$\frac{1}{C}\, dC = -\frac{a}{V}\, dt$$

$$\ln|C| = \int -\frac{a}{V}\, dt = -\frac{a}{V} \cdot t + K$$

$$C = \pm e^{K} \cdot e^{-a/V \cdot t}$$

ved starten $(t=0)$ er $C = 2g \cdot \text{liter}^{-1}$, så

$$2 = \pm e^{K} \cdot e^{0} = \pm e^{K}$$ og dermed får vi

$$C(t) = 2e^{-a/V \cdot t} = 2e^{-a/1000 \cdot t}$$

Vi finner tiden det tar å halvere salt-konsentrasjonen: $1 = 2e^{-a/V \cdot t}$, $\frac{1}{2} = e^{-a/V \cdot t}$

$\ln(1/2) = -a/V \cdot t$, $t = \ln(2) \cdot \dfrac{V}{a}$

$V = 1000$, så $t = \ln(2) \cdot 1000/a$

$a = 1$ gir $t = \ln(2) \cdot 1000$ og $a = 2$ gir $t = \ln(2) \cdot 500$.

Da har vi hhv. pumpet inn ≈ 693 liter

$1000 \cdot \ln(2)\, s \cdot 1$ liter$\cdot s^{-1} = 1000 \cdot \ln(2)$ liter og

$500 \cdot \ln(2)\, s \cdot 2$ liter$\cdot s^{-1} = 1000 \cdot \ln(2)$ liter, som er mer enn i b).

$\boxed{8.2{:}25}$ Anta at antall befolkningen på et tidspunkt t er $N(t)$, og anta at

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0.3N(N-17)\left(1 - \frac{N}{200}\right) \text{for} t \geq 0.$$

a) Finn alle likevektsløsningene til denne differensialligningen.

b) Beregn egenverdiene til hver likevektsløsning og avgjør stabiliteten til likevektsløsningene.

c) Tegn og bruk grafen til hver likevektsløsning og avgjør stabiliteten til likevektsløsningene. Sammenlign svarene ift punkt (b.)

Løsning: a)
Ved inspeksjon, kan vi se at $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ har tre likevelstløsninger, nemlig, $N = 0, N = 17$ og $N = 200$.

Løsning: b)
Lar

$$g(N) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}.$$

For å finne egenverdier vi må derivere $g(N)$:

$$\begin{aligned} g(N) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= 0.3N(N-17)\left(1 - \frac{N}{200}\right) = 0.3(N^2 - 17N)\left(1 - \frac{N}{200}\right) \\ \implies g'(N) &= 0.3\left[(2N-17)\left(1 - \frac{N}{200}\right) + (N^2 - 17N)\left(\frac{-1}{200}\right)\right] \\ &= \frac{0.3}{200}\Big[(2N-17)(200-N) - (N^2 - 17N)\Big] \end{aligned}$$

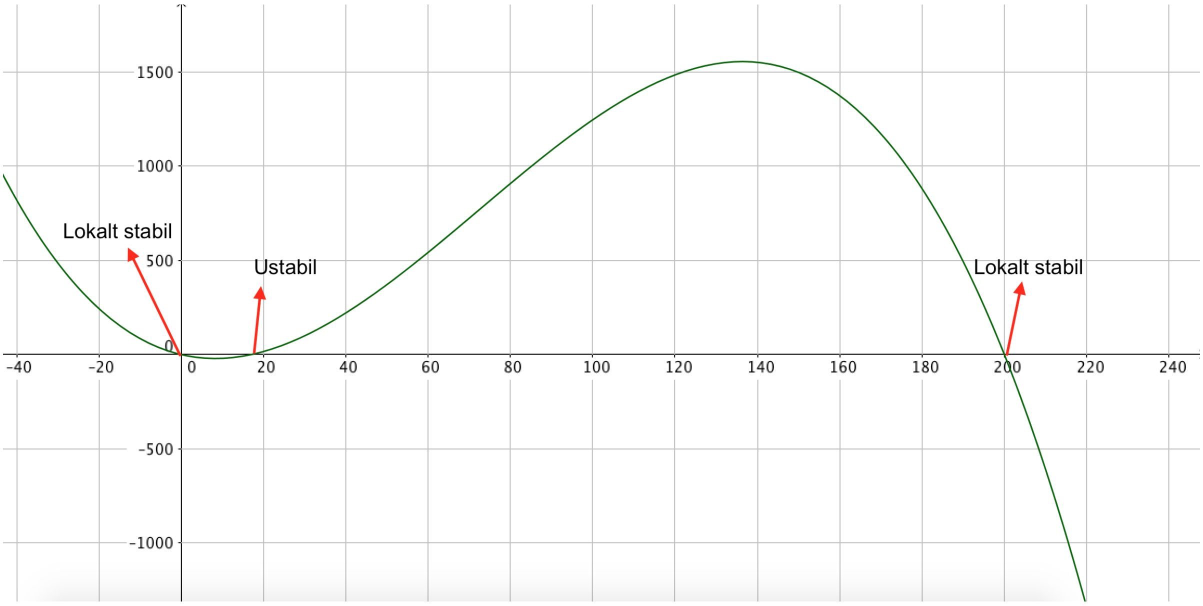
Vi finner egenverdier ift alle likevekstløsninger:

$$g'(0) = \frac{0.3}{200}\Big[(0-17)(200-0)-(0)\Big] = 0.3(-17) < 0 \implies \text{N=0 er en } \textbf{stabil} \text{ likevektsløsning.}$$

$$\begin{aligned} g'(17) &= \frac{0.3}{200}\Big[(2(17)-17)(200-17) - ((17)^2 - 17(17))\Big] \\ &= \frac{0.3}{200}\Big[(17)(183) - (0)\Big] = \frac{0.3}{200}(17)(183) > 0 \\ &\implies \text{N=17 er en } \textbf{ustabil} \text{ likevektsløsning.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(200) &= \frac{0.3}{200}\Big[(2(200)-17)(200-200) - ((200)^2 - 17(200))\Big] \\ &= \frac{0.3}{200}\Big[(400)(0) - (40000 - 3400)\Big] = \frac{0.3}{200}(-36600) < 0 \\ &\implies \text{N=200 er en } \textbf{stabil} \text{ likevektsløsning.} \end{aligned}$$

Løsning: c)
I grafen under får vi bekreftet våre resultater både fra punkt (a.) og (b.)



$\boxed{\text{8.1:33}}$ Finn løsningen av differensialligning:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+y)^3.$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+y)^3 &\implies \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^3} = \mathrm{d}x \\
&\implies \int \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^3} = \int \mathrm{d}x \implies \frac{-1}{2}\frac{1}{(1+y)^2} = x + C \\
&\implies (1+y)^-2 = -2(x+C) \implies 1+y = (-2(x+C))^{-1/2} \\
&\implies y = -1 \pm (-2(x+C))^{-1/2}.
\end{aligned}$$