Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag


**Løsningsforslag — Øving 5**

**5.4.1b)** Vi bruker "regnereglene" for grenseverdier og finner at

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4+\sqrt{x}+e^{x^2}}{7+\sin(\sqrt{x})} &= \frac{\lim_{x\to 0^+}x^4+\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}+\lim_{x\to 0^+}e^{x^2}}{\lim_{x\to 0^+}7+\lim_{x\to 0^+}\sin(\sqrt{x})}\\ &= \frac{0+0+1}{7+0}=\frac{1}{7}\end{aligned}$$

**5.4.2c)** Å vise $\lim_{x\to 1}2x^2+1=3$ ved å bruke definisjonen betyr at gitt $\varepsilon>0$ må vi vise at det finnes $\delta>0$ slik at for $0<|x-1|<\delta$ er $|(2x^2+1)-3|<\varepsilon$. Vi skriver om

$$|(2x^2+1)-3| = |2x^2-2| = 2|x^2-1| = 2|x-1||x+1|$$

Dette minner veldig om hvordan vi viste kontinuitet av funksjoner i et punkt. Som i boka kan vi innføre hjelpestørrelsen $h=x-1$ om vi ønsker. Da må vi i så fall dele opp i to tilfeller. I stedet for lar vi $n_\varepsilon$ være det minste heltallet større enn eller lik $2+\varepsilon$. Med $\delta=\frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ får vi da $0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}<\varepsilon$, og at $|x+1|=|(x-1)+2|\leq|x-1|+2<\varepsilon+2\leq n_\varepsilon$ og dermed

$$2|x-1||x+1|<2\frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}n_\varepsilon=\varepsilon$$

Dermed har vi vist at $\lim_{x\to 1}2x^2+1=3$.

**Ekstraoppgave 5.4.3** a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+4x^4}{3x^3-2x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{7+4x^2}{3x-2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{7+4x^2}{3x-2}\\ &= \frac{\lim_{x\to 0}7+\lim_{x\to 0}4x^2}{\lim_{x\to 0}3x-\lim_{x\to 0}2}=\frac{7+0}{0-2}=-\frac{7}{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+2x+7}{\sqrt{x}-4x^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}{\frac{\sqrt{x}}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{\frac{\sqrt{x}}{x^2}-4}\\ &= \frac{\lim_{x\to\infty}8+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}}{\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2}-\lim_{x\to\infty}4}\\ &= \frac{8+0+0}{0-4}=-2\end{aligned}$$

c) Her vil vi benytte oss av trikset med å "gange med den konjugerte".

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+\frac{x}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} = \frac{\lim_{x\to\infty}3}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\lim_{x\to\infty}1} \\
&= \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

d) Merk at $x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$. Da får vi

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

**Ekstraoppgave 5.4.4b)** Vi må se hvorvidt $\lim_{x\to4^+}f(x) = \lim_{x\to4^-}f(x) = f(4)$. For $x>4$ er $|x-4| = x-4$, så for $x>4$ er $f(x)=\frac{x-4}{x-4}=1$. Da er

$$\lim_{x\to4^+}f(x) = \lim_{x\to4^+}1 = 1 \neq 0 = f(4)$$

Det følger at funksjonen er diskontinuerlig i punktet 4.

**5.4.4c)** Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{hvis} \quad 0<x\le 6 \\ \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} & \text{hvis} \quad x>6 \end{cases}$$

skal vi sjekke hvorvidt $f$ er kontinuerlig i $x=6$. Vi må altså sjekke hvorvidt $\lim_{x\to6^-}f(x) = \lim_{x\to6^+} = f(6)$. Vi finner umiddelbart at

$$\lim_{x\to6^-}f(x) = \lim_{x\to6^-}\frac{1}{6} = f(6)$$

Dermed gjenstår det bare å se hvorvidt $\lim_{x\to6^+}f(x)$ er lik disse to størrelsene. Vi observerer at $x-6=(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+3}+3)$ ved tredje kvadratsetning, og dermed får vi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to6^+}f(x) = \lim_{x\to6^+}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} &= \lim_{x\to6^+}\frac{\sqrt{x+3}-3}{(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+3}+3)} \\
&= \lim_{x\to6^+}\frac{1}{\sqrt{x+3}+3} = \frac{1}{\sqrt{6+3}+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Det følger at funksjonen er kontinuerlig i punktet 6.

**6.1.1h)** Ved 6.1.4v) er

$$Df(x) = \frac{D[\cos(\sqrt{x})]x^2 - \cos(\sqrt{x})D[x^2]}{(x^2)^2} = \frac{D[\cos(\sqrt{x})]x^2 - \cos(\sqrt{x}) \cdot 2x}{x^4}$$

Ved kjerneregelen er $D[\cos(\sqrt{x})] = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (bruker $\sqrt{x}$ som kjerne). Dermed er

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{-\sin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}x^2 - \cos(\sqrt{x}) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \cos(\sqrt{x}) \cdot 2x}{x^4} \\ &= -\frac{\sin(\sqrt{x})\sqrt{x} - 4\cos(\sqrt{x})}{2x^3} \end{aligned}$$

**6.1.3c)** Merk at $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$. Da er $\ln f(x) = x \ln x$, som vi deriverer med produktregelen

$$D[x \ln x] = D[x] \ln x + x D[\ln x] = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Logaritmisk derivasjon gir nå

$$Df(x) = D[x^x] = f(x) D[\ln |f(x)|] = x^x(\ln x + 1)$$

**6.1.11**

a) For $f(x) = |x-1|$ finnes ikke $f'(1)$ fordi grenseverdien

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \tag{1}$$

ikke finnes. La oss gjøre dette presist. Hvis grenseverdien skal finnes må de ensidige grenseverdiene finnes og være lik hverandre. Merk at $f(1) = |1-1| = 0$. For $x > 1$ er $|x-1| = x - 1$. Da får vi

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - 0}{x - 1} = 1$$

For $x < 1$ er $|x - 1| = -(x-1)$. Da får vi

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1) - 0}{x - 1} = -1$$

De ensidige grenseverdiene er ikke like, altså finnes ikke grenseverdien og dermed finnes ikke $f'(1)$.

b) Med $g(x) = (x-1)|x-1|$ må vi nå vise at

$$g'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

finnes. Igjen har vi at $g(1) = 0$. For $x > 1$ er $g(x) = (x-1)^2$, og for $x < 1$ er $g(x) = -(x-1)^2$. De ensidige grenseverdiene blir da

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} -(x-1) = 0$$

og

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$$

De to ensidige grenseverdiene er derfor like, og dermed finnes $g'(1)$. Utregningen viser at $g'(1) = 0$.

Ekstraoppgave 6.1.13 Vi må sjekke om

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

med $f$ gitt som

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{hvis} \quad x > 0 \\ x^2 & \text{hvis} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Har at $f(0) = 0^2 = 0$, og

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

For den andre grenseverdien, merk at $1-\cos x = 2\sin^2(\frac{x}{2})$. Vi vil under bruke at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos x}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{4\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Grenseverdiene er ulike, så $f$ er ikke deriverbar i 0.

Ekstraoppgave 6.1.17 Vi viser dette ved induksjon. Vi ønsker altså å vise utsagnet

$$P_n : D^{(n)}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{(n-k)} f(x) D^{(k)} g(x).$$

for alle $n \geq 0$. Utsagnet holder trivielt i tilfellet $n = 0$:

$$P_0 : D^{(0)}[f(x)g(x)] = f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} D^{(0-k)} f(x) D^{(k)} g(x)$$

Vi antar så at utsagnet holder for $m$, altså

$$P_m : D^{(m)}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} D^{(m-k)} f(x) D^{(k)} g(x)$$

er sann. Ser så på $P_{m+1}$.

$$\begin{aligned}
D^{(m+1)}[f(x)g(x)] = D[D^{(m)}[f(x)g(x)]] &= D[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D^{(m-k)}f(x)D^{(k)}g(x)] \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D[D^{(m-k)}f(x)D^{(k)}g(x)] \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(D^{(m-k+1)}f(x)D^{(k)}g(x) + D^{(m-k)}f(x)D^{(k+1)}g(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D^{(m-k+1)}f(x)D^{(k)}g(x) + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D^{(m-k)}f(x)D^{(k+1)}g(x)
\end{aligned}$$

Vi har splittet opp summene her. Dette er egentlig ikke nødvendig, men det kan være lettere å gjøre resten av oppgaven om man gjør det. Vi ønsker til slutt å sette sammen summene igjen, og summere fra 0 til $m+1$. Mer presist ønsker vi at summen over skal kunne skrives på formen

$$\sum_{k=0}^{m+1} a_k D^{(m-k+1)}f(x)D^{(k)}g(x).$$

Så vi må finne $a_k$ ved å "plukke ut" de rette koeffisientene i summene ovenfor. Det er tre tilfeller:

$a_0$: $a_0$ er koeffisienten som skal stå foran $D^{(m-0+1)}f(x)D^{(0)}g(x)$ i den nye summen. Dette leddet finnes kun i den første summen ovenfor, og koeffisienten er $\binom{m}{0}$. (Merk for argumentet nedenfor at $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m+1}{0}$).

$a_{m+1}$: $a_{m+1}$ er koeffisienten som skal stå foran

$$D^{(m-(m+1)+1)}f(x)D^{(m+1)}g(x) = D^{(0)}f(x)D^{(m+1)}g(x)$$

Dette leddet finner vi kun i andre summen ovenfor, hvor koeffisienten er $\binom{m}{m}$. (Merk for argumentet nedenfor at $\binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$).

$a_k$, $0 < k < m+1$: Dersom $0 < k < m+1$ finnes $D^{(m-k+1)}f(x)D^{(k)}g(x)$ i begge summene ovenfor. I første summen er koeffisienten $\binom{m}{k}$. I den andre summen er koeffisienten foran leddet $\binom{m}{k-1}$. Vi summerer disse koeffisientene og får at

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} &= \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!} \\
&= \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m-k+1}\right) \\
&= \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}\left(\frac{m-k+1+k}{k(m-k+1)}\right) \\
&= \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}\frac{m+1}{k(m-k+1)} \\
&= \frac{(m+1)!}{(k)!(m-k+1)!} = \binom{m+1}{k}
\end{aligned}$$

Sammen med bemerkningene ovenfor slår vi sammen summene igjen og får at

$$\begin{aligned} D^{(m+1)}[f(x)g(x)] &= \sum_{k=0}^{m+1} a_k D^{(m-k+1)} f(x) D^{(k)} g(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} D^{(m+1-k)} f(x) D^{(k)} g(x) \end{aligned}$$

Dermed holder $P_{m+1}$ under antakelse om at $P_m$ holder. Det følger at $P_n$ holder for alle $n \geq 0$.

Vi bruker nå resultatet til å finne $D^{(4)}[e^x \sin x]$ La $f(x) = e^x$ og $g(x) = \sin x$. Merk at $D^{(n)} e^x = e^x$ for alle $n$. Videre er $D^{(0)} \sin x = \sin x$, $D^{(1)} \sin x = \cos x$, $D^{(2)} \sin x = -\sin x$, $D^{(3)} \sin x = -\cos x$, og $D^{(4)} \sin x = \sin x$. Videre er $\binom{4}{0} = 1 = \binom{4}{4}$, $\binom{4}{1} = 4 = \binom{4}{3}$, og $\binom{4}{2} = 6$. Vi plugger dette inn i resultatet ovenfor og får at

$$\begin{aligned} D^{(4)} e^x \sin x = &\binom{4}{0} D^{(4)} e^x D^{(0)} \sin x + \binom{4}{1} D^{(3)} e^x D^{(1)} \sin x + \binom{4}{2} D^{(2)} e^x D^{(2)} \sin x + \\ &+ \binom{4}{3} D^{(1)} e^x D^{(3)} \sin x + \binom{4}{4} D^{(0)} e^x D^{(4)} \sin x \\ &= e^x \sin x + 4e^x \cos x + 6e^x(-\sin x) + 4e^x(-\cos x) + e^x \sin x \\ &= -4e^x \sin x \end{aligned}$$

**6.2.1c)** Ved Korollar 6.2.5 må vi se hvor $f'(x)$ er positiv og negativ. Ved kjerneregelen er

$$f'(x) = D[\sin(x^2)] = 2x \cos(x^2)$$

Vi må nå analysere fortegnene til $2x$ og $\cos(x^2)$. Vi vet allerede at $2x \geq 0$ når $x \geq 0$, og $2x \leq 0$ når $x \leq 0$. Med andre ord må vi bare finne når $\cos(x^2)$ er positiv og når den er negativ.

$\cos x \geq 0$ for

$$x \in \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [2\pi n - \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$$

Dette finner vi ved å observere at $\cos x \geq 0$ i $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ og så bruke at $\cos x$ er periodisk med periode $2\pi$. Tilsvarende får vi at $\cos x \leq 0$ for

$$x \in \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [2\pi n + \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{3\pi}{2}]$$

Oppgaven er dermed redusert til å finne ut når $x^2$ er i disse to intervallene. La oss først se på når $\cos(x^2) \geq 0$. Siden $x^2 \geq 0$, trenger vi kun finne når

$$x^2 \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [2\pi n - \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$$

Merk nå at $x^2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ hvis og bare hvis $x \in [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$. På samme vis er $x^2 \in [2\pi n - \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$ med $n \geq 1$ hvis og bare hvis $x \in [-\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \sqrt{2\pi n - \frac{\pi}{2}}] \cup [\sqrt{2\pi n - \frac{\pi}{2}}, \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}]$. Så $\cos x^2 \geq 0$ når

$$x \in [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ([-\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \sqrt{2\pi n - \frac{\pi}{2}}] \cup [\sqrt{2\pi n - \frac{\pi}{2}}, \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}])$$

Tilsvarende vil vi finne når $\cos x^2 \leq 0$. Siden $x^2 \geq 0$, trenger vi kun å finne når

$$x^2 \in \bigcup_{n=0}^{\infty}[2\pi n + \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{3\pi}{2}]$$

Merk nå at $x^2 \in [2\pi n+\frac{\pi}{2}, 2\pi n+\frac{3\pi}{2}]$ med $n \geq 0$ hvis og bare hvis $x \in [-\sqrt{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}, -\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}] \cup [\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \sqrt{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}]$. Dermed er $\cos x^2 \leq 0$ når

$$x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \left([-\sqrt{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}, -\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}] \cup [\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \sqrt{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}]\right)$$

Alt som gjenstår nå er å finne når $2x$ og $\cos x^2$ har like og ulike fortegn.

1. Både $2x$ og $\cos x^2$ er $\geq 0$ når $x \in [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[\sqrt{2\pi n - \frac{\pi}{2}}, \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}]$.
2. Både $2x$ og $\cos x^2$ er $\leq 0$ når $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty}[-\sqrt{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}, -\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}]$.
3. $2x \geq 0$ og $\cos x^2 \leq 0$ når $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty}[\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \sqrt{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}]$.
4. $2x \leq 0$ og $\cos x^2 \geq 0$ når $x \in [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[-\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, -\sqrt{2\pi n - \frac{\pi}{2}}]$.

Dermed kan vi si at $f$ vokser på

$$[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[\sqrt{2\pi n - \frac{\pi}{2}}, \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}] \cup \bigcup_{n=0}^{\infty}[-\sqrt{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}, -\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}]$$

og $f$ er avtagende på

$$[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0] \cup \bigcup_{n=0}^{\infty}[\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \sqrt{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[-\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, -\sqrt{2\pi n - \frac{\pi}{2}}]$$

**6.2.2a)** Merk at $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 - 0 > 0$, og $f(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$. Siden $f$ er kontinuerlig, garanterer skjæringssetningen at $f$ har et nullpunkt i $[0, \frac{\pi}{4}]$. Den deriverte er $f'(x) = -\sin x - 1 \leq 0$ for alle $x$, så spesielt er $f$ avtagende på $[0, \frac{\pi}{4}]$, dermed har $f$ nøyaktig ett nullpunkt på intervallet.

**Ekstraoppgave 6.2.6** Først merker vi oss at $f(1) = 1 - 1^{\frac{2}{3}} = 1 - 1 = 0$, og $f(-1) = 1 - (-1)^{\frac{2}{3}} = 1 - ((-1)^2)^{\frac{1}{3}} = 1 - 1 = 0$. Så $f(1) = f(-1)$.

Vi deriverer $f$ og får at $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, som er definert på $(-1, 1)$ utenom i punktet 0. På $(-1, 1)$ er $x^{\frac{1}{3}} < 1$, så $x^{-\frac{1}{3}} \neq 0$ for $\in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Dette bryter ikke med Rolles teorem siden $f'$ er udefinert i $0 \in (-1, 1)$, og Rolles teorem sier bare noe om funksjoner som er deriverbar i alle indre punkter på intervallet de er definert på.

**6.2.7** Merk først at utsagnet holder trivielt for $x = 0$. Anta derfor at $x \neq 0$. $f(x) = \sin x$ er deriverbar, så middelverdisetningen sier at for alle $x$ finnes $c \in (0, x)$ (eller $c \in (x, 0)$ om $x$ skulle være negativ) slik at

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = f'(c) = \cos c$$

Men $\sin 0 = 0$, så dette sier jo bare at $\frac{\sin x}{x} = \cos c$, eller med andre ord, $\sin x = x \cos c$. Vi tar absoluttverdier og bruker at $|\cos c| \leq 1$ for alle $c \in \mathbb{R}$, som umiddelbart gir

$$|\sin x| = |x \cos c| \leq |x| \cdot 1 = |x| \tag{2}$$

som var det vi skulle vise.

**Ekstraoppgave 6.2.11** a) Anta uten tap av generalitet at $y < x$. $f(x) = \sin x$ er deriverbar på hele $\mathbb{R}$, så ved middelverdisetningen finnes $c \in (y, x)$ slik at

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = f'(c) = \cos c$$

Ved å ta absoluttverdi og så bruke at $|\cos c| \leq 1$ får vi

$$|\sin x - \sin y| = |\cos c||x - y| \leq |x - y|,$$

som var det vi skulle vise.

b) $f(x) = \tan x$ er deriverbar for $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, og vi har $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Anta uten tap av generalitet at $y < x$ (med $y, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ved middelverdisetningen får vi

$$\frac{\tan x - \tan y}{x - y} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

for en $c \in (y, x)$. Siden $\cos c \leq 1$ er $\frac{1}{cos^2 c} \geq 1$. Vi tar absoluttverdi og bruker $\frac{1}{\cos^2 c} \geq 1$. Dette gir.

$$\frac{|\tan x - \tan y|}{|x - y|} = \frac{1}{\cos^2 c} \geq 1$$

som vi kan skrive om til

$$|\tan x - \tan y| \geq |x - y|$$

som var det vi skulle vise.

**6.2.19** Siden dette holder for alle $a, b \in \mathbb{R}$ har vi at

$$|f'(a)| = \lim_{b \to a} \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \leq \lim_{b \to a} \frac{K|b - a|^2}{|b - a|} = \lim_{b \to a} K|b - a| = 0$$

Altså er $f'(a) = 0$ for alle $a \in \mathbb{R}$. Korollar 6.2.4 gir da at $f$ er konstant.

**Ekstraoppgave 6.2.23** a) For $x \neq 0$ er $f$ en komposisjon av deriverbare funksjoner, så vi kan bare derivere $x^2 \sin \frac{1}{x}$ direkte:

$$\begin{aligned} D(x^2 \sin \frac{1}{x}) &= D[x^2] \sin \frac{1}{x} + x^2 D[\sin \frac{1}{x}] = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2(-\frac{1}{x^2}) \cos \frac{1}{x} \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Dette gjelder kun for $x \neq 0$. For $x = 0$ må vi bruke definisjonen av den deriverte. Vi har at

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

La nå $t = 1/x$. Når $x \to 0^-$ vil $t \to -\infty$. Dermed får vi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{\sin t}{t} = 0$$

Den andre ensidige grensen behandles nesten helt likt:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

La nå $t = 1/x$. Når $x \to 0^+$ vil $t \to \infty$. Dermed får vi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\sin t}{t} = 0$$

De to ensidige grenseverdiene er like, som viser at den deriverte i punktet 0 eksisterer, og utregningen viser at den er lik 0, som var det vi skulle vise.

b) Den deriverte av en sum er summen av de deriverte, så vi får umiddelbart at $g'(0) = f'(0) + D[\frac{x}{2}] = f'(0) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
La nå $a > 0$ og betrakt intervallet $(-a, a)$. Å vise at $g$ ikke er voksende på intervallet er det samme som å vise at det finnes $x_0 \in (-a, a)$ slik at $g'(x_0) < 0$. Vi vet at $g'(0) = \frac{1}{2} > 0$, så vi trenger kun se på $x \in (-a, 0) \cup (0, a)$, hvor $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - cos \frac{1}{x}$. Vi trenger med andre ord at

$$g'(x_0) = 2x_0 \sin \frac{1}{x_0} - \cos x_0 + \frac{1}{2} < 0$$

for $x_0 \in (-a, a)$. Velg $n \in \mathbb{N}$ så stor at $\frac{1}{2\pi n} < a$. Da er $\frac{1}{2\pi n} \in (-a, a)$, og

$$\begin{aligned} g'(\frac{1}{2\pi n}) &= 2(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}) \sin(\frac{1}{2\pi n}) - \cos(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}) + \frac{1}{2} \\ &= 2(\frac{1}{2\pi n}) \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) + \frac{1}{2} \\ &= 0 - 1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$

Dette viser at et slikt intervall $(-a, a)$ ikke kan finnes.
Dette strider ikke mot Korollar 6.2.5, siden $g'$ ikke er kontinuerlig på $(a, b)$ for noe intervall $(a, b)$ med $a < 0 < b$. Dette kan ses av at $\cos \frac{1}{x}$ er diskontinuerlig på et slikt intervall (viste dette på tidligere øving), men $2x \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ er kontinuerlig på samme intervall. Altså må $g'$ være diskontinuerlig i 0.