8.3:3

Løsning:
Vi er gitt at

$$a = 100, b = 0.01, N = 10000 \text{ og } I(0) = 1 \text{ når } t = 0.$$

Vi vet at:

$$\begin{aligned} N(t) &= S(t) + I(t) + R(t) \\ &\implies N(0) = S(0) + I(0) + R(0) \\ &\text{men vi vet at } I(0) = 0 \text{ og } R(0) = 0. \text{ Derfor har vi} \\ &N(0) = S(0) + 1 \implies S(0) = N(0) - 1 = 10000 - 1 = 9999 \end{aligned}$$

For at smitten skal spre seg må vi ha:

$$R_0 = \frac{bS(0)}{a} > 1.$$

Vi prøver å finne ut om $R_0 > 1$.

$$R_0 = \frac{bS(0)}{a} = \frac{(0.01)(9999)}{100} = \frac{9999}{10000} = 0.9999 < 1$$

Som vi ser at $R_0 < 1$ så vil ikke smitten spre seg.

8.3:4

Løsning:
a)
Vi ser fra boka at ligning (8.74) og (8.75) er:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -bSI \text{ ....}(8.74)$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = bSI - aI \text{ ....}(8.75)$$

ved divisjon får vi:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}S/\,\mathrm{d}t} &= \frac{bSI - aI}{-bSI} \\
&= \frac{-I(a-bS)}{-bSI} = \frac{(a-bS)}{bS} \\
\implies \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} &= \frac{a}{bS} - \frac{bS}{bS} = \frac{a}{bS} - 1 \text{ når I} > 0. \text{ ....}(8.84)
\end{aligned}
$$

Vi løser nå ligning (8.84) når $R(0) = 0, I(0) = I_0$ og $S(0) = S_0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} &= \frac{a}{bS} - 1 \\
&\implies \mathrm{d}I = \left(\frac{a}{bS} - 1\right)\mathrm{d}S = \frac{a}{b}\frac{\mathrm{d}S}{S} - \mathrm{d}S \\
&\implies \int \mathrm{d}I = \int \left(\frac{a}{b}\frac{\mathrm{d}S}{S} - \mathrm{d}S\right) = \frac{a}{b}\int \frac{\mathrm{d}S}{S} - \int \mathrm{d}S \\
&\implies I(t) = \frac{a}{b}\ln S(t) - S(t) + C
\end{aligned}
$$

Når $R(0) = 0, I(0) = I_0$ og $S(0) = S_0$, så:

$$
\begin{aligned}
I(0) &= \frac{a}{b}\ln S(0) - S(0) + C \\
&\implies C = I(0) + S(0) - \frac{a}{b}\ln S(0) = I_0 + S_0 - \frac{a}{b}\ln S_0 \\
&\implies C = N - \frac{a}{b}\ln S_0
\end{aligned}
$$

fordi $N(0) = I(0) + S(0) + R(0) = I_0 + S_0 + 0$. Dermed får vi at:

$$
I(t) = \frac{a}{b}\ln S(t) - S(t) + N - \frac{a}{b}\ln S_0.
$$

b)

For å finne maksimum verdi av $I(t)$ for $t > 0$, setter vi:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} &= bSI - aI = 0 \\
&= bSI - aI = 0 \implies (bS - a)I = 0 \implies bS - a = 0.
\end{aligned}
$$

fordi I $\neq 0$ for t > 0. Dermed får vi $S = \frac{a}{b}$, som vil si at $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} > 0$ når $S > \frac{a}{b}$ og $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} < 0$ når $S < \frac{a}{b}$. Derfor $\frac{a}{b}$ er maksimal punkt for $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$.

c)
Vi vet at I(t) er maksimum på $\frac{a}{b}$, så vi har:

$$I_{max} = N - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \ln \frac{(a/b)}{S_0}.$$

d)
Når

$$\frac{a}{b} < S_0 \implies \frac{a/b}{S_0} < 1 \implies \ln \frac{a/b}{S_0}$$

vil være negativt. Dette betyr at

$$I_{max} = N - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \ln \frac{a/b}{S_0} = N - \frac{a}{b} - C' \frac{a}{b}$$

antar at $\ln \frac{a/b}{S_0} = C'$. Det vil si at

$$I_{max} = N - \frac{a}{b}(1 + C')$$

reduserende finksjon av parameter $\frac{a}{b}$, når $\frac{a}{b} < S_0$. Hvis $a > b, I_{max}$ vil redusere så langt $\frac{a}{b} < S_0$ og hvis $a < b, I_{max}$ vil øke så langt $\frac{a}{b} < S_0$. Dette betyr at hvis "a"øker, vil antall personer med smitte redusere og når b"øker, vil antall personer med simtte øke. Dvs smitte er mindre alvorlig når a er høy og den er mer alvorlig når b er høy, som er i samsvar med verdien av I_{max}.

8.3:12

Løsning: a)
Vi er gitt at V = biomasse av planten og N = nummer av herbivor, også:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = aV\left(1 - \frac{V}{K}\right) - bVN$$

og

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = cVN - dN$$

Når N=0, dvs det er ingen herbivor, så har vi:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = aV\left(1 - \frac{V}{K}\right) - 0 = aV\left(1 - \frac{V}{K}\right)$$

som er et logistisk vekst modell og det betyr at planten vokser i følge en logistikt vekst modell hvis det finnes ingen herbivor. For å finne likevekstløsningen må vi sette:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = aV\left(1 - \frac{V}{K}\right) = 0$$

som gir oss V=0 og V=K som to likevekstløsningene.

Løsning: b)
Når det finnes herbivore, vil de medvirke et reduserende antall av biomasse til planten. Det vil si at (-bVN) indikerer raten til i hvor stort grad blir planten spist opp av herbivor. For å diskutere dynamikken av herbivore, ønsker vi å finne ut for hvilke betingelser vil N vekser, altså, når $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ er høyere enn 0.

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = cVN - dN = (cV - 1)N > 0$$

altså ikke bare N $>$ 0 for t$>$ 0 (som er nødvendig) men også $cV - 1$ må være mer enn 0. Det vil si

$$cV - 1 > 0 \implies cV > 1 \implies V > \frac{1}{c}.$$

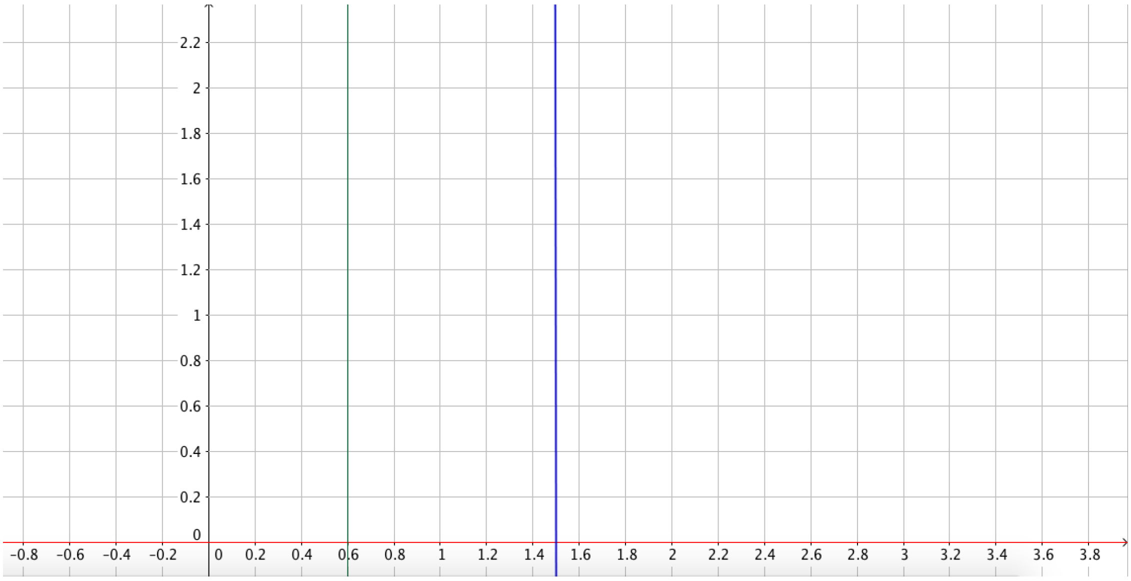
Dermed vil herbivor befolkningen øke når $V > \frac{1}{c}$ og redusere når $V < \frac{1}{c}$.

Løsning: c)
Først finner likevekstløsningene for både V og N.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0 &\implies aV\left(1 - \frac{V}{K}\right) - bVN = 0 \\
&\implies V\left(a\left(1 - \frac{V}{K}\right) - bN\right) = 0 \\
&\implies \text{ enten } V = 0\text{; eller } a\left(1 - \frac{V}{K}\right) - bN = 0 \\
&\implies \text{ enten } V = 0\text{; eller } a\left(1 - \frac{V}{K}\right) = bN \\
&\implies \text{ enten } V = 0\text{; eller } 1 - \frac{V}{K} = \frac{bN}{a} \\
&\implies \text{ enten } V = 0\text{; eller } \frac{V}{K} = 1 - \frac{bN}{a} \\
&\implies \text{ enten } V = 0\text{; eller } V = K\big(1 - \frac{bN}{a}\big).
\end{aligned}$$

også

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0 &\implies cVN - dN = 0 \\
&\implies N(cV - d) = 0 \\
&\implies \text{ enten } N = 0\text{; eller } cV - d = 0 \\
&\implies \text{ enten } N = 0\text{; eller } cV = d \implies V = \frac{d}{c}.
\end{aligned}$$



Fra grafen over, ser vi at rikelighet av plantebiomasse er avhengig av bare antall herbivorer pga. lineær relasjon mellom V og N, i.e.,

$$V = K\big(1 - \frac{bN}{a}\big).$$