Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4140 Diskret Matematikk
Høst 2017

Løsningsforslag — Øving 2

Seksjon 2.1

$\boxed{5}$ **a)** Ja, mengdene har de samme elementene.

b) Nei, fordi $1 \notin \{\{1\}\}$.

c) Nei, fordi $\emptyset \notin \emptyset$.

$\boxed{24}$ **a)** Potensmengden til enhver mengde inneholder alltid $\emptyset$. Dermed kan ikke $\emptyset$ være potensmengden til en mengde (siden $\emptyset \notin \emptyset$).

b) Dette er potensmengden til $\{a\}$.

c) Dette er ikke en potensmengde fordi $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, a\}$, men $\{\emptyset\}$ er ikke et element i mengden vi ser på. Alternativt kan vi med en gang si at dette ikke er en potensmengde fordi den har kardinalitet 3, som ikke er en potens av 2.

d) Dette er potensmengden til {a, b}.

Seksjon 2.2

$\boxed{18}$ **c)** Vi må vise at ethvert element i $(A - B) - C$ også er et element i $A - C$. Anta at x er i $(A - B) - C$. Da er x i $A - B$, men ikke i C. Siden $x \in A - B$, vet vi at $x \in A$. Siden vi har etablert at $x \in A$, men $x \notin C$, har vi bevist at $x \in A - C$.

d) Bruker bevis ved kontradiksjon. For å vise at mengden på venstre side er tom er det nok å anta at x er et element i den mengden, vise at dette leder til en kontradiksjon (selvmotsigelse), og dermed slutte at ingen slik x eksisterer. Anta at

$$x \in (A - C) \cap (C - B).$$

Da er $x \in A - C$ og $x \in C - B$. Det første utsagnet impliserer per definisjon at $x \notin C$, mens det andre impliserer at $x \in C$. Dette er en selvmotsigelse. Mengden på venstre side må derfor være tom.

$\boxed{46}$ For å telle antall elementer i $A \cup B \cup C$ teller vi først antall elementer i hver mengde og summerer dem sammen. Men nå har vi telt elementene i $A \cap B, A \cap C$ og $B \cap C$ to ganger. Derfor trekker vi fra antall elementer i hvert av disse snittene. Men nå har vi trukket fra for masse, ettersom elementene i $A \cap B \cap C$ har blit telt tre ganger og trukket fra tre ganger. Derfor legger vi til slutt til antall elementer i $A \cap B \cap C$.

Alternativt kan man bruke formelen $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ med $X = A \cup B$ og $Y = C$.

Seksjon 2.3

$\boxed{12}$ Vi ser på en funksjon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

a) $f(n) = n - 1$ er injektiv, for hvis $n - 1 = m - 1$, så er $n = m$.

b) $f(n) = n^2 + 1$ er ikke injektiv, fordi f. eks. $f(-1) = 2 = f(1)$.

c) $f(n) = n^3$ er injektiv, for hvis $n^3 = m^3$ kan vi ta tredjeroten på begge sider og få $n = m$.

d) $f(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ er ikke injektiv, fordi f. eks. $f(1) = 1 = f(2)$.

$\boxed{38}$ Oppgaven er litt løst formulert i boka. Du kan anta at $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ er konstanter, og se på f og g som funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Vi regner ut

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(cx + d) = a(cx + d) + b = (ac)x + (ad + b)$$

for $x \in \mathbb{R}$. På samme måte finner vi

$$(g \circ f)(x) = (ac)x + (cb + d).$$

Funksjonene $f \circ g$ og $g \circ f$ har samme domene og kodomene, så de er like hvis og bare hvis de tar samme verdi for alle $x \in \mathbb{R}$. Fra utregningene over ser vi at de er like hvis og bare hvis $ad + b = cb + d$. Altså er betingelsen $ad + b = cb + d$ nødvendig og tilstrekkelig for at $f \circ g = g \circ f$.

$\boxed{42}$ Husk at $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$, $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ og $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$ for $a, b \in \mathbb{R}$ når vi jobber med reelle tall.

a) $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$.

b) $f^{-1}((0, 1)) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x^2 < 1\} = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

c) $f^{-1}((4, \infty)) = \{x \in \mathbb{R} | x^2 > 4\} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Seksjon 2.4

$\boxed{12}$ **c)** Vi setter inn og får

$$\begin{aligned} -3a_{n-1} + 4a_{n-2} &= -3(-4)^{n-1} + 4(-4)^{n-2} \\ &= -3(-4)^{n-1} - (-4)(-4)^{n-2} \\ &= -3(-4)^{n-1} - (-4)^{n-1} \\ &= -4(-4)^{n-1} \\ &= (-4)^n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Dette viser at $a_n = (-4)^n$ er en løsning av rekurrensligningen.

$\boxed{33}$ **d)**

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=0}^{2}(i + 2i + 3i) = \sum_{i=0}^{2} 6i = 0 + 6 + 12 = 18.$$

Seksjon 2.5

$\boxed{16}$ La B være en tellbar mengde. Vi vil vise at dersom $A \subseteq B$, så er A også tellbar. Vi deler opp beviset i flere tilfeller (cases).

Tilfelle 1: Hvis B er en endelig mengde og $A \subseteq B$, da er også A endelig. Så A er tellbar i dette tilfellet.

Tilfelle 2: Anta at B er en tellbar uendelig mengde. Hvis A er en endelig delmengde av B, da er A tellbar. Anta derfor at $A \subseteq B$ og at A har uendelig mange elementer. Siden B er tellbar kan vi liste opp elementene i B som

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$$

Siden A er en delmengde av B består A av noen av elementene i denne følgen. Disse kan listes i samme rekkefølge som de forekommer i følgen over, og dette gir en liste over elementene i A. Dermed er A tellbar.

Alternativt bevis I: Et mer formelt bevis som formaliserer idéen over kan gis som følger. Anta som over at B er tellbar uendelig og at A er en uendelig delmengde av B. Siden B er tellbar uendelig finnes det en bijeksjon $f\colon \mathbb{N} \to B$. Vi vil bruke f til å finne en bijeksjon $g\colon \mathbb{N} \to A$. La

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} | f(n) \in A\}.$$

n_0 er altså det minste naturlige tallet som gir oss et element i delmengden A når vi plugger det inn i funksjonen f. (At dette er veldefinert følger av *Velordningsprinsippet*

[1] og at A er ikke-tom.) La videre

$$\begin{aligned}
n_1 &= \min\{n \in \mathbb{N} | n > n_0 \wedge f(n) \in A\},\\
n_2 &= \min\{n \in \mathbb{N} | n > n_1 \wedge f(n) \in A\},\\
&\vdots\\
n_k &= \min\{n \in \mathbb{N} | n > n_{k-1} \wedge f(n) \in A\}.
\end{aligned}$$

Hvert steg er veldefinert fordi A er en uendelig mengde (så vi finner alltid et element til i A). Vi definerer nå

$$g(m) = f(n_m) \text{ for } m \in \mathbb{N}.$$

For å vise at g er en bijeksjon kan vi argumentere som følger. Gitt et element $a \in A$, da er $a \in B$ siden $A \subseteq B$. Siden f er surjektiv finnes det et naturlig tall N med $f(N) = a$. Siden $f(N) \in A$ vil N forekomme som en av n_m'ene over hvis vi bare følger prosedyren lenge nok. Og da får vi $g(m) = f(n_m) = f(N) = a$, så g er surjektiv. Hvis $g(m) = g(m')$, da er $f(n_m) = f(n_{m'})$. Og siden f er injektiv har vi at $n_m = n_{m'}$. Følgen n_k er konstruert slik at $n_k < n_{k+1}$ for alle k, så eneste mulighet for at $n_m = n_{m'}$ er at $m = m'$. Dette viser at g er injektiv. Vi har nå vist at g er en bijeksjon, som viser at A har samme kardinalitet som $\mathbb{N}$. Så A er tellbar.

Alternativt bevis II: Den kanskje mest elegante måten å bevise dette på er skissert under.

1. Vis, ved å bruke Velordningsprinsippet, at enhver uendelig undermengde av $\mathbb{N}$ har samme kardinalitet som $\mathbb{N}$.
2. Bruk dette til å vise at en mengde A er tellbar hvis og bare hvis det finnes en injektiv funksjon $f\colon A \to \mathbb{N}$.
3. Vis at sammensetningen av to injektive funksjoner er injektiv.
4. Gitt en tellbar mengde B, en injektiv funksjon $f\colon B \to \mathbb{N}$ og en delmengde $A \subseteq B$. La $\iota\colon A \to B$ betegne funksjonen $\iota(a) = a$. Observer at ι er injektiv og at $f \circ \iota$ gir en injektiv funksjon fra A til $\mathbb{N}$.

[1] Velordningsprinsippet: Enhver ikke-tom delmengde av de naturlige tallene har et minste tall.