Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Øving 8

Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript s, bør gjøre b, og kan gjøre k.

1 Gjør oppgave $7^s, 12^s$ og 18^b på **side 158-163.**

2 Gjør oppgave $15^s, 19^s, 22^b$ og 26^b på **side 175-180.**

3 La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a^s) Finn den reduserte trappeformen til A.

b^s) Bestem rangen til A. Finn en basis for radrommet og en basis for kolonneromet til A.

4 La $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \dots, \mathbb{b}_t\}$ være en mengde med ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^n$.

a^s) La A være en $t \times n$-matrise med $\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2, \dots, \mathbb{b}_{t-1}$ og $\mathbb{b}_t$ som rad nummer 1, $2, \dots, t-1$ og t, henholdsvis. Begrunn hvorfor nullrommet til A er alle vektorene i $\mathbb{R}^n$ som står ortogonalt på alle radene i A, dvs. $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \dots, \mathbb{b}_t\}$.

b^s) La nå $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \dots, \mathbb{b}_t\}$ være en ortonormal mengde av vektorer i $\mathbb{R}^n$ for $t < n$. Vi kaller en mengde av vektorer **ortonormal** hvis alle vektorene i mengden er parvis ortogonale og hver av de har norm/lengde lik 1.

(i) Vis at $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \dots, \mathbb{b}_t\}$ er lineært uavhengig.

(ii) La A være som i (a). Bestem rangen og nulliteten til A.

(iii) Vis at $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \dots, \mathbb{b}_t\}$ kan utvides til en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

5 La A være en $m \times n$-matrise og B en $n \times m$-matrise slik at $AB = I_m$. Avgjør om de følgende påstandene er sanne. Hvis de er sanne, gi et bevis. Hvis ikke, gi et moteksempel.

a^s) Hvis C er en $n \times m$-matrise slik at $CA = I_n$ så er $C = B$.

b^s) Hvis C er en $n \times m$-matrise slik at $AC = I_m$ så er $C = B$.

6 **Utfordring:**

a) La V være et vektorrom med $\dim V = n$. La $W \subseteq V$ være et underrom med $\dim W = n$. Vis at $W = V$.

b) La A være en $m \times n$-matrise. Vis at alle $\mathbb{x}$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrives entydig som

$$\mathbb{x} = \mathbb{x}_{\text{null}} + \mathbb{x}_{\text{rad}},$$

der $\mathbb{x}_{\text{null}} \in N(A)$ og $\mathbb{x}_{\text{rad}} \in R(A)$.