Øving 12

Matematikk 4K

Uke 46

16.1

5 Vi har at

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} e^{z-1}.$$

Ved å bruke at Taylorserien til e^w er $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$, får vi at

$$e^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}.$$

Dette medfører at

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} = \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e\,(z-1)^n}{(n+2)!}.$$

Siden konvergens radien til $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ er ∞ og $\frac{1}{(z-1)^2}$ er endelig for alle verdier utenom 1, har vi at domenet der Laurentserien konvergerer er $0 < |z-1| < \infty$.

11 Maclaurin serien til $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ med konvergensradius 1. Dette medfører at

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(-(z-1))} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Siden vi har at konvergensradiusen til $|w| = |-(z-1)| < 1$ har vi at konvergensradiusen er 1. Vi kan også skrive $\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}$. Setter vi $w = \frac{-1}{z-1}$ i serien over får vi Laurentserien

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(z-1)^n}.$$

Vi har at den konvergerer når $|w| = |\frac{-1}{z-1}| < 1$, noe som medfører $1 < |z-1| < \infty$.

16.2

3 Vi har at $\tan^2(2z) = 0$ hvis

$$\sin(2z) = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = 0.$$

Dette medfører $e^{4iz} = 1$, og vi har at nullpunktene er $z = \frac{n\pi}{2}$, hvor n er ett heltall. Siden tanges er periodisk har alle nullpunktene samme orden. Vi har at nullpunktet $\pi/2$ har orden 2, siden

$$\tan(\pi) = \left(\tan^2(2z)\right)'\Big|_{\pi/2} = \left(4\frac{tan\,(2z)}{\cos^2(2z)}\right)\Big|_{\pi/2} = 0$$

og

$$\left(\tan^2(2z)\right)''\Big|_{\pi/2} = \left.\frac{8\cos^4(2z)+12\sin^2(2z)\cos(2z)}{\cos^6(2z)}\right|_{\pi/2} = 8.$$

Dermed er Taylorserien om punktet på formen

$$\tan^2(2z) = \frac{8}{2!}(z-\pi/2)^2 + \text{høyere ordens ledd} = 4(z-\pi/2)^2 + \text{høyere ordens ledd}.$$

8 Vi har at

$$\tan(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)}$$

har poler der $\cos(\pi z)$ har nullpunkter, siden $\sin(z)$ analytisk i hele det komplekse planet. Ved å bruke definisjonen av $\cos(z)$ får vi at

$$\cos(\pi z) = \frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{2} = 0,$$

noe som medfører $e^{2i\pi z} = -1$. Dermed er nullpunktene av $\cos(\pi z)$, og dermed polene av $\tan(\pi z)$, gitt med $z = \frac{1}{2}+n$, hvor n er ett hertall. Siden $\tan(\pi z)$ er periodisk, vil alle polene ha samme orden. Ved å bruke teorem 4 på side 717, kan vi istedenfor å finne ordenen til polen av $\tan(\pi z)$, finne ordenen til nullpunktet av $1/\tan(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$. Siden vi har at

$$\left(\frac{1}{\tan(\pi z)}\right)'\Big|_{1/2} = -\pi$$

får vi at nullpunktet har orden 1. Dermed har vi simple poler i punktene $z = \frac{1}{2}+n$.

Det eneste igjenværende punktet å sjekke er ∞. For å sjekke dette punktet må vi sjekke hva som er ordenen til polen til $\tan\left(\frac{\pi}{z}\right)$ i punktet 0. Siden vi har at $\lim_{x\to 0}\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$ og $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)}$ ikke eksisterer, kan ikke $\tan(\pi z)$ ha verken poler eller nullpunkter i ∞. Dette medfører at singulariteten er essentiel.

16.3

4 Den eneste singulariteten til $e^{\frac{1}{1-z}}$ er i $z=1$. Skriver vi ut Laurentserien om punktet med å bruke serien for e^z får vi at

$$e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(1-z)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n} = 1 + \frac{-1}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}.$$

Dermed er residuen -1 i punktet $z=1$.

7 Funksjonen $\tan(2\pi z)$ har poler der $\cos(2\pi z)$ har nullpunkter. Løser vi $\cos(2\pi z) = \frac{e^{2\pi iz}+e^{-2\pi iz}}{2} = 0$, får vi $z = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}$, hvor n er ett hertall. Av samme grunn som i oppgave 16.2.8, er alle polene simple. Den eneste polen som er inneholdt i C er $\frac{1}{4}$. For å finne residuen i dette punktet formel 4 på side 721. Dermed er

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{1}{4}}\tan(2\pi z) = \frac{\sin(2\pi/4)}{-2\pi\sin(2\pi/4)} = -\frac{1}{2\pi},$$

siden $\cos(2\pi z)' = -2\pi\sin(2\pi z)$. Bruker vi residue teoremet får vi at

$$\int_C \tan(2\pi z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{2\pi}\right) = -i.$$

9 Polene til funksjonen $\frac{e^{-z^2}}{\sin(4z)}$, er der $\sin(4z) = 0$. Dette medfører $e^{8iz} = 1$, og vi har at nullpunktene er $z = \frac{n\pi}{4}$, hvor n er ett heltall. Vi har også at polene er simple, siden $\left(\sin(4z)\, e^{z^2}\right)'\Big|_{\frac{n\pi}{4}} = 4(-1)^n e^{\frac{n^2\pi^2}{16}} \neq 0$. Vi har at $-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$ er de polene innholdt i C. Ved å bruke formel 4 på side 721 får vi at;

$$\mathrm{Res}_{z=-\pi/4} f(z) = -\frac{e^{-\pi^2/16}}{4},$$

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{4},$$

$$\mathrm{Res}_{z=\pi/4} f(z) = -\frac{e^{-\pi^2/16}}{4}.$$

Dermed er

$$\int_c \frac{e^{-z^2}}{\sin(4z)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{2e^{-\pi^2/16}}{4}\right) = \frac{\pi i - 2\pi i e^{-\pi^2/16}}{4}.$$

16.4

3 Vi kan erstatte $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ og $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Setter vi dette inn i funksjonen får vi

$$\frac{\sin(\theta)^2}{5 - 4\cos(\theta)} = -\frac{\left(z - \frac{1}{z}\right)^2}{20 - 8\left(z + \frac{1}{z}\right)} = -\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{4z\left(5z - 2z^2 - 2\right)} = \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{8z(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)}.$$

Dermed må vi integrere funksjonen $\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{8iz^2(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$. Denne funksjonen har tre poler, nemelig $0, 1/2, 2$, men det er bare $0, 1/2$ som er ineholdt i sirkelen med radius 1.

For å finne residuen i disse punktene kan vi bruke formel 3 og 5* på side 721 og 722, respektivt. Gjør vi dette får vi

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = \left(\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{8i(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)}\right)'\Bigg|_{z=0} = -\frac{5i}{16},$$

$$\mathrm{Res}_{z=1/2} f(z) = \frac{3i}{16}.$$

Bruker vi residue teoremet får vi

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)^2}{5 - 4\cos(\theta)} d\theta = 2\pi i \left(\frac{-2i}{16}\right) = \pi/4.$$

7 Vi har at siden graden til nevneren er mer enn to ganger høyere enn graden til telleren kan vi bruke formel 14 på side 732. Den kompleksifiserte funksjonen av $f(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$ er $f(z) = \frac{1}{z^4 - 1}$. Polene av f er $1, -1, i$ og i, som alle er simple. Av disse polene ligger i i den øvre halvdelen av planet of 1 og -1 på den reele linjen. Bruker vi formel 3 på side 721, får vi at

$$\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{4},$$

$$\mathrm{Res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{Res}_{z=i} f(z) = \frac{i}{4}.$$

Dermed får vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 - 1} dx = 2\pi i \left(\frac{i}{4}\right) + \pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$