MA0001, Brukerkurs i Matematikk A.

LF Øving 7 — HØST 2017

1.) Bruk definisjonen av den deriverte,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h},$$

til å regne ut den deriverte av $f(x) = 3x - x^2$.

$\boxed{\text{Løsning}}$ Vi er gitt at $f(x) = 3x - x^2$; og vi bør bruke definisjonen for å finne ut deriverte av $f(x)$.

For å bruke definisjonen trenger vi:

$$f(x+h) = 3(x+h) - (x+h)^2 = 3x + 3h - (x^2 + h^2 + 2xh)$$
$$= 3x + 3h - x^2 - h^2 - 2xh.$$

$$f(x+h) - f(x) = 3x + 3h - x^2 - h^2 - 2x - (3x - x^2)$$
$$= \cancel{3x} + 3h - \cancel{x^2} - h^2 - 2xh - \cancel{3x} + \cancel{x^2}$$
$$= 3h - h^2 - 2xh$$

Vi dividerer både (på venstre og høyre) sider med h:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3h - h^2 - 2xh}{h} = \frac{\cancel{h}(3 - h - 2x)}{\cancel{h}}$$
$$= 3 - h - 2x.$$

Tar $\lim_{h \to 0}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 3 - h - 2x = 3 - 2x$$

Dette gir:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3 - 2x$ er den deriverte av $f(x) = 3x - x^2$.

2.) I denne oppgaven skal vi regne ut den deriverte av:

$$g(x) = \frac{3x - x^2}{\sqrt{x}}$$

på to måter.

a) Bruk brøkregelen.

Løsning: Brøkregelen for å finne ut den deriverte av en funksjon $\omega(x)$ på form; $\omega(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ er:

$$\omega'(x) = \frac{p'(x)\,q(x) - p(x)\,q'(x)}{(q(x))^2}$$

Vi har funksjonen $g(x) = \frac{3x - x^2}{\sqrt{x}}$, og vi bruker brøkregelen for å finne,

$$g'(x) = \frac{(3-2x)\sqrt{x} - (3x - x^2)\,1/2(\sqrt{x})^{-1/2}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1}{x}\left[\sqrt{x}\,(3-2x) - (3x - x^2)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[3\sqrt{x} - 2x^{3/2} - \frac{1}{2}(3\sqrt{x} - x^{3/2})\right] = \frac{1}{x}\left(3\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{3/2}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}\cdot x^{3/2}\right) = \frac{3}{2}(x)^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$$

b) Forenkle funksjonsuttrykk før derivasjon.

Løsning: Vi har $g(x) = \frac{3x - x^2}{\sqrt{x}}$; som kan skrives som

$$g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{x^2}{\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} - (x)^{2-\frac{1}{2}} = 3x^{1/2} - x^{3/2}$$

Som gir, $$g'(x) = 3\left(\frac{1}{2}x^{1/2-1}\right) - \frac{3}{2}\left(x^{3/2-1}\right)$$

$$= \frac{3}{2}(x)^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}(x)^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right).$$

3.) Finn den deriverte av: $h(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$.

Løsning: Vi kan finne $h'(x)$ på 2 måter:

(i) $h'(x) = 2\cos(x)(-\sin x) + 2\sin(x)\cos(x)$ (Kjerneregelen).

$$= -2\,\cancel{\sin(x)\cos(x)} + 2\,\cancel{\sin(x)}\cos(x)$$

$$= 0$$

(ii) $h(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$ og vi vet at $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

$\Rightarrow h(x) = 1$ (konstant) $\Rightarrow h'(x) = 0$ (derivasjon av konstant er 0).