Løsningsskisser 7. ØVING

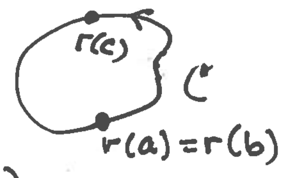
Meld fra om evt. feil! KH

Oppgave 1 (3.4.12)

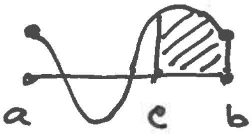
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

der $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ er kontinuerlig og $\underline{\mathbf{r}(a)=\mathbf{r}(b)}$.

Vi skal vise at integralet har samme verdi om vi bruker et annet punkt $\underline{\mathbf{r}(c)}$ som start-/stoppepunkt, $c\in(a,b)$.



$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$
$$= \int_c^b f(t)\,dt + \int_a^c f(t)\,dt$$



Blir kanskje klarere om vi utvider f:

$$\tilde f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{når } t\in[a,b] \\ f(t-p) & \text{når } t\in[b,b+p] \text{ der } \underline{p=b-a} \end{cases}$$

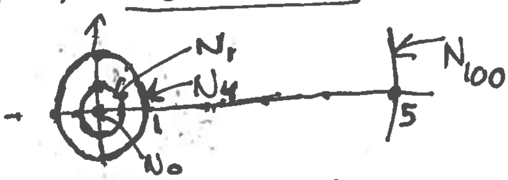
$$\int_c^{c+p} \tilde f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt + \int_b^{b+p} f(t-p)\,dt$$
$$\overset{\boxed{\tau=t-p}}{=} \int_c^b f(t)\,dt + \int_a^b f(\tau)\,d\tau$$

Oppgave 2 (3.7.1)

$$N_c = \{(x,y) : \underline{f(x,y)=c}\}$$

a) $4x^2+3y^2=c$; $c<0 \Rightarrow N_c=\emptyset$, $\underline{N_0=\{0,0\}}$

$\underline{c>0}$: $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{c}{3}}\right)^2} = 1$ $\quad \underline{c=9}$,



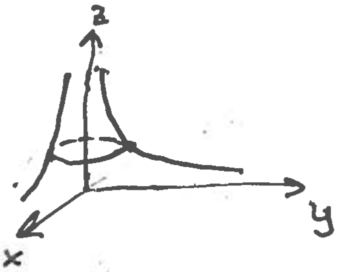
Nivåkurvene er ellipser, tettere og tettere jo større c; flata $z=4x^2+3y^2$ er en elliptisk paraboloide da $z=4x^2$ og $z=3y^2$ er parabler i x,z og y,z. Se Eks. 3.7.1.

b)

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2} = c \quad ; \quad \underline{N_0 = \phi}$$

$\underline{c \neq 0}$: $x^2 - y^2 = \frac{1}{c} = k$

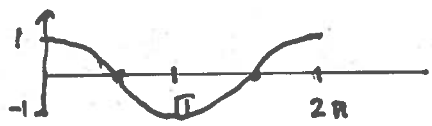
Dette er Eksempel 3.7.2 med c erstattet av $k = \frac{1}{c}$. Nivåkurvene er hyperbler der -0.167 erstattes av $-\frac{1}{0.167}$, 0.167 erstattes av $\frac{1}{0.167}$ osv. Vi ser at funksjonen vokser mot ∞ når vi går langs x-aksen mot origo, mens den synker mot $-\infty$ når vi går langs y-aksen mot origo. Grafen til $z = \frac{1}{x^2-y^2}$ består av fire disjunkte "flak": To som vokser mot ∞ og to som synker mot $-\infty$.



<u>Oppgave 3</u> (3.7.3)

a) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$ <u>Rotasjonsflate</u>!

b) $z = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$



<u>Prøv</u> å tenke deg hvordan flata i a) må modifiseres med θ

<u>Oppgave 4</u> (3.7.4)

a) $w = (x^2+y^2)e^{-z^2} = \underline{r^2 e^{-z^2}}$ med sylinderkoordinater

$w = \underline{\rho^2 \sin^2\phi \; e^{-\rho^2\cos^2\phi}}$ i kulekoordinater

Sylinderkoordinater mest informativt!

b) $w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{r^2+z^2}$, $\underline{w = \frac{1}{\rho^2}}$ mest informativt!

Oppgave 5 (3.7.5)

Tangentplanet er definert i D 3.7.9.

a) $f(x,y) = x^2y$; $(x_0, y_0) = (1,-2)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = -4 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = 1 \end{aligned}\right\}$$

Ligning for tangentplanet i $(1,-2)$

$z = -2 - 4(x-1) + (y+2)$ eller

$\underline{4x - y + z = 4}$

b) $f(x,y) = x e^{-xy}$; $(x_0, y_0) = (1,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-xy} - xy e^{-xy}$ s.a. $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \underline{1}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-xy}$ s.a. $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \underline{-1}$

Ligning for tangentplanet i $(1,0)$

$z = 1 + (x-1) - y$ eller $\underline{-x + y + z = 0}$

Oppgave 6 (3.9.1)

$z = x^2 + y^2$ eller

$\underline{F(x,y) = x\,i + y\,j + (x^2+y^2)k}$

$\underline{\bar{r}(r,\theta) = r\cos\theta\, i + r\sin\theta\, j + r^2 k}$

Oppgave 7

$x^2 + y^2 + z^2 = 16 = 4^2$, 1. oktant : $\underline{0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}}$

$\underline{\bar{r}(\phi,\theta) = 4\sin\phi\cos\theta\, i + 4\sin\phi\sin\theta\, j + 4\cos\phi\, k}$

(siden $r = 4\sin\phi$)

Oppgave 8 (3.9.3 der 1 er erstattet av 2^2)

Vi skal en parametrisering av $x^2+y^2=4$, $0 \le z \le 1$

Da $x^2+y^2=2^2$, får vi vha. sylinderkoordinater:

$\bar{r}(\theta, z) = 2\cos\theta\, i + 2\sin\theta\, j + z\, k \;;\; 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le z \le 1$

Oppgave 9 (3.9.4 med $9 = 3^2$ erstattet av $25 = 5^2$)

Får

$\bar{r}(v, x) = x\, i + 5\cos v\, j + 5\sin v\, k \,;\; 0 \le v < 2\pi,\ x \in \mathbb{R}$

Oppgave 10

(*) $x^2+y^2+z^2 = 1^2+1^2+(\sqrt{2})^2 = 4 \;;\; x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

$$\Rightarrow \underline{z = \sqrt{4-x^2-y^2}} \underset{x^2+y^2 \ne 4}{\Rightarrow} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$(x_0, y_0) = (1,1)$ slik at tangentplanet blir

$$z = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1)$$

eller

$$\underline{\underline{x + y + \sqrt{2}\, z = 4}}$$

Alternativt (og litt enklere) finner vi gradienten til nivåflata (*) i $(1,1,\sqrt{2})$ og har da en normalvektor til flata/tangentplanet.

$\nabla(x^2+y^2+z^2) = 2(x,y,z)$

$(1,1,\sqrt{2})$ normalvektor i punktet $(1,1,\sqrt{2})$

Tilhørende plan:

$$(x-1) + (y-1) + \sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0$$

eller

$$\underline{\underline{x + y + \sqrt{2}\, z = 4}}$$