Øving 9

Matematikk 4K

Uke 43

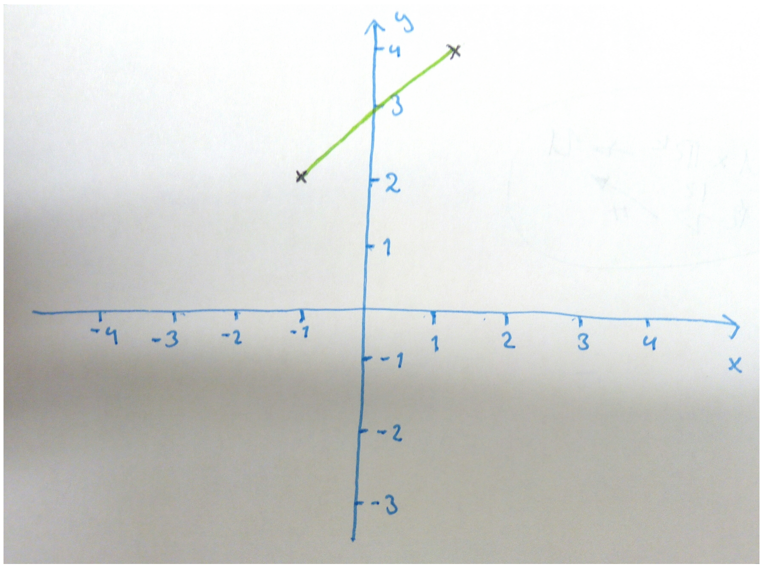
14.1.

11 For å finne en parameterrepresentasjon begynner kan vi foreksempel kreve at for $t = 0$ skal kurven være i $(-1, 2)$ og i tiden $t = 1$ skal kurven være i $(1, 4)$. Siden kurven er en rett linje, er den på formen

$$\gamma(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t).$$

Dermed har vi at $a_1 = -1$ og $a_2 = 2$. Videre får vi at $b_1 = 2$ og $b_2 = 2$. En mulig parameterisering er dermed

$$\gamma(t) = (-1 + 2t, 2 + 2t).$$



Figur 1: Bilde av kurven i oppgave 14.1.11.

26 Vi har at en mulig parameterisering av C er $\gamma(t) = e^{it}$ for $t \in [0, 2\pi)$. Dermed er $\dot{\gamma}(t) = ie^{it}$. Bruker vi teorem 2 på side 647 får vi at

$$\begin{aligned}
\int_C \left(z + z^{-1}\right) dz &= \int_0^{2\pi} \left(e^{it} + e^{-it}\right) ie^{it} dz \\
&= \int_0^{2\pi} \left(ie^{2it} + i\right) dt \\
&= 2\pi i.
\end{aligned}$$

14.2.

2 a) Vi har at $\frac{1}{z-1}$ er analytisk for alle verdier utenom $z = 1$. Dermed vil integralet

$$\int_C \frac{dz}{z-1} = 0$$

for alle simple lukkede kurver som ikke inneholder 1.

b) Vi har at $\frac{e^{1/z^2}}{z^2+4}$ er analytisk for alle verdier utenom $z = 0, 2i, -2i$. Dermed vil integralet

$$\int_C \frac{e^{1/z^2} dz}{z^2+4} = 0$$

for alle simple lukkede kurver som ikke inneholder $0, 2i$ eller $-2i$.

4 Nei, funksjonen kan ikke være analytisk i domenet $1 < z < 3$. Hvis funksjonen hadde vært analytisk i det aktuelle domenet, ville vi hatt at ved å bruke Cauchy teoremet for dobbelt sammenhengende domener at $\int_{|z|=1} f(z)\,dz = \int_{|z|=3} f(z)\,dz$.

21 Siden vi har en singularitet i punktet $z = 2i$ som er inneholdt i kurven $\gamma(t) = \pi e^{it}$ kan vi ikke bruke Cauchy teoremet. Vi har at å integrere over C er det samme som å integrere over C' som er kurven parameterisert av $\gamma(t) = 2i + e^{it}$.

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{z-2i} &= \int_{C'} \frac{dz}{z-2i} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

22 Siden funksjonen $\Re(z)$ ikke er analytisk kan vi ikke bruke Cauchy teoremet. Vi har at

$$\begin{aligned} \int_C \Re(z)\,dz &= \int_0^{\pi} ie^{it}\cos(t)\,dt + \int_{-1}^{1} t dt \\ &= \int_0^{\pi} i\cos^2(t)\,dt - \int_0^{\pi} \cos(t)\sin(t)\,dt + 0 \\ &= \int_0^{\pi} \frac{i\cos(2t)+i}{2} dt - \int_0^{\pi} \frac{\sin(2t)}{2} dt \\ &= \frac{\pi i}{2}. \end{aligned}$$

24 Ved å bruke delbrøksoppspalting kan vi skrive

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2(z-1)} + \frac{-1}{2(z+1)}.$$

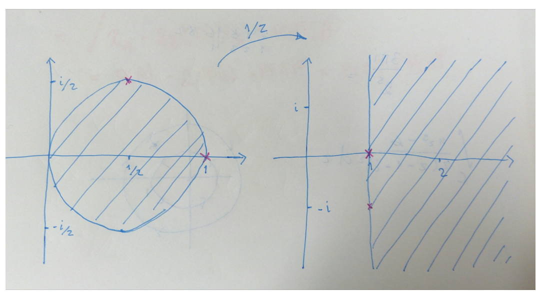
La oss dele opp kurven C i 2-deler; La C_1 være den lukkede kurven som omslutter -1 og går med klokken, og C_2 den delen av kurven som omslutter 1 og går mot klokken. Da har vi at $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$. Siden f er analytisk i alle andre punkter enn ± 1, har vi at å integrere over C_1 er det samme som å integrere over kurven parameterisert av $\gamma_1(t) = -1 + e^{-it}$ og for C_2 har vi at det er det samme som $\gamma_2(t) = 1 + e^{it}$.

Dermed er integralet

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_{C_1}\left(\frac{1}{2(z-1)}+\frac{-1}{2(z+1)}\right)dz+\int_{C_2}\left(\frac{1}{2(z-1)}+\frac{-1}{2(z+1)}\right)dz \\
&= \int_{C_1}\frac{1}{2(z-1)}dz+\int_{C_2}\frac{-1}{2(z+1)}dz \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{-ie^{-it}}{2e^{-it}}dz+\int_0^{2\pi}\frac{-ie^{it}}{2e^{i\pi}}dz \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{-i}{2}dz+\int_0^{2\pi}\frac{-i}{2}dz \\
&= 2i\pi.
\end{aligned}$$

17.1.

14 Möbius transformasjoner sender sirkler og linjer til sirkler og linjer. Siden 0(som er ett punkt på sirkelen) blir sendt uendelig, må sirkelen bli sendt til en linje. Videre har vi at $1 \mapsto 1$ og at $1/2+i/2 \mapsto 1-i$. Dermed blir sirkelen som utgjør randen sendt til linjen der $x=1$. Siden $1/2 \mapsto 2$ har vi at det skraverte området blir sendt til høyre side av linjen.



Figur 2: Bilde av området under funksjonen $f(z)=1/z$.