MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Øving 6

Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript s, bør gjøre b, og kan gjøre k.

1 Gjør oppgave 22^s, 23^s, 25^s, 30^b, og 34^k **på side 92-96**, og gjør 1^s, 2^s, og 4^k på side **på side 117-122**.

2 **Utfordring:** La A og B være to symmetriske matriser. Vis at produktet $A \cdot B$ er symmetrisk hvis og bare hvis matrisene A og B er symmetriske og kommuterer, dvs. både $A^T = A$, $B^T = B$, og $AB = BA$.

3 Gjør oppgave 1^s, 4^s, 5^b, og 10^s a), b), d) **på side 131-134**.

Et nytt tallsystem

Vi skal fortsette med noe vi begynte med i forrige øving, nemlig med konstruksjonen av vårt nye tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. så må vi spørre oss hvilke egenskaper ønsker vi at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:

- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutativ*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.
- *additiv invers:* Gitt z, så eksisterer z' slik at

$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:

- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
- *distributive lover:*

  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *høyre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.

- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at
$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$
- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer z' slik at
$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$
- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker 2×2-matriser over de reelle tallene.

La A være en 2×2-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La
$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$
For eksempel,
$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$
og
$$Y = A - \sqrt{2}A^3$$
er elementer i S.

Nummereringen av oppgavene følger den fra forrige øving.

(c^k) La $X = a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3$ og $Y = b_0 I_2 + b_1 A + b_2 A^2 + b_3 A^3$ være elementer i S. Vis at
$$X \cdot Y = Y \cdot X.$$

Løsning: La $A^0 = I$. Vi får da at $A^i \cdot A^j = A^{i+j} = A^j \cdot A^i$ for i et helltall, $i \geq 0$. Siden skalarmultiplikasjon kommuterer med matrisemultiplikasjon, altså at for matriser M og skalerer c har man $Mc = cM$, følger det at
$$X \cdot b_i A^i = a_0 I_2 \cdot b_i A^i + a_1 A \cdot b_i A^i + a_2 A^2 \cdot b_i A^i + a_3 A^3 \cdot b_i A^i$$
$$b_i A^i \cdot a_0 I_2 + b_i A^i \cdot a_1 A + b_i A^i \cdot a_2 A^2 + b_i A^i \cdot a_3 A^3.$$

Siden dette gjelder for hvert ledd i Y, får vi at $X \cdot Y = Y \cdot X$, som var det som skulle vises.

(d^k) Vis at vi har

(i) $0 = I_2 - A^4 = (I_2 - A)(I_2 + A)(I_2 + A^2)$.

Løsning: Husk at $A^4 = I_2$, slik at $A^4 - I_2 = 0$. Merk at siden de involverte matrisene kommuterer med hverandre, er dette i essens det samme som konjugatsetningen.

$$\begin{aligned}(I_2 - A)(I_2 + A)(I_2 + A^2) &= (I_2^2 + A - A - A^2)(I_2 + A^2)\\ &= (I_2 - A^2)(I_2 + A^2)\\ &= (I_2^2 + A^2 - A^2 - A^4)\\ &= I_2 - A^4.\end{aligned}$$

(ii) Anta at $\det(I_2 - A) \neq 0$ og at $\det(I_2 + A) \neq 0$. Vis at $I_2 + A^2 = 0$, dvs. $A^2 = -I_2$.

Løsning: Fra VGS-pensum vet vi at $\det M \neq 0$ hvis og bare hvis matrisen M er invertibel. Dette vil også bli vist senere i kurset. Siden $\det(I_2 - A) \neq 0$ og $\det(I_2 + A) \neq 0$, er $I_2 - A$ og $I_2 + A$ begge invertible. Det følger at vi kan regne som følger:

$$(I_2 + A)^{-1}(I_2 - A)^{-1}(I_2 - A)(I_2 + A)(I_2 + A^2) = (I_2 + A)^{-1}(I_2 - A)^{-1}0 = 0$$

$$I_2 I_2 (I_2 + A^2) = (I_2 + A^2) = 0.$$