Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

9.1.1 a) Merk at $(-\cos x)' = \sin x$, så delvis integrasjon gir

$$\int x\sin x dx = \int x(-\cos x)' dx = x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x)dx$$
$$= -x\cos x + \int 1\cdot \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

b) Merk at $(\frac{1}{2}x^2)' = x$, så delvis integrasjon gir

$$\int x\ln x dx = \int (\frac{1}{2}x^2)'\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x(\ln x)' dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

d) Merk at $(e^x)' = e^x$, så delvis integrasjon gir

$$\int x^2e^x dx = \int x^2(e^x)' dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

Så vi må finne $\int xe^x dx$. Delvis integrasjon nok en gang gir

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)'e^x dx = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + C$$

Dermed er

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

e) Merk først at $\arctan x = 1\cdot\arctan x = (x)'\cdot\arctan x$. Da får vi ved delvis integrasjon

$$\int \arctan x dx = \int (x)'\arctan x dx = x\arctan x - \int x(\arctan x)' dx$$
$$= x\arctan x - \int x\frac{1}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

Antiderivert av $\frac{2x}{1+x^2}$ er $\ln(1+x^2) + C$ (Se oppgave 8.4.2 e)). Dermed er

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

9.1.14 Volumet kan uttrykkes som

$$V = \int_0^\pi 2\pi x f(x)dx = 2\pi\int_0^\pi x\sin x dx$$

Vi fant i 9.1.1a) at $\int x \sin x dx = -x\cos x + \sin x + C$. Dermed blir

$$V = 2\pi[-x\cos x + \sin x]_0^\pi = 2\pi(-\pi\cos\pi + \sin\pi + 0\cos 0 - \sin 0)$$
$$= 2\pi(-\pi(-1)) = 2\pi^2$$

$\boxed{9.2.1}$ a) Sett $u = \sqrt{x}$. Da blir $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, og dermed

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \sin u du = 2(-\cos u) + C$$
$$= -2\cos(\sqrt{x}) + C$$

b) Sett $u = \sqrt{x}$. Da er $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, og vi får

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = 2\int \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{u^2}{1+u^2}du$$
$$= 2\int \frac{u^2+1-1}{1+u^2}du2\int(1 - \frac{1}{1+u^2})du = 2u - 2\arctan u + C$$
$$= 2\sqrt{x} - 2\arctan(\sqrt{x}) + C$$

d) Sett $u = e^x$. Da er $du = e^x dx$, og vi får

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin(u) + C$$
$$= \arcsin(e^x) + C$$

e) Sett $u = \sqrt{x}$. Da er $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ og vi får

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int ue^u du$$

Delvis integrasjon (Se oppgave 9.1.1d)) gir

$$\int ue^u du = ue^u - e^u + C$$

Vi substituerer tilbake $u = \sqrt{x}$ og får at

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$\boxed{9.2.23}$ Volumet er gitt ved

$$V = \int_0^1 \pi(\arcsin x)^2 dx = \pi\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$$

Vi finner først integralet $\int(\arcsin x)^2 dx$. La $u = \arcsin x$, altså $\sin u = x$. Da er $dx = \cos u du$. Merk at $\arcsin(\sin u) = u$. Da får vi

$$\int(\arcsin x)^2 dx = \int(\arcsin(\sin u))^2\cos u du = \int u^2\cos(u)du$$

Dette kan vi løse ved delvis integrasjon:

$$\int u^2 \cos(u)du = u^2 \sin u - \int 2u \sin(u)du$$
$$= u^2 \sin(u) - (2u(-\cos u) - 2\int(-\cos u)du) = u^2 \sin u + 2u\cos u - 2\sin u + C$$

Vi substituerer nå inn $u = \arcsin x$ og bruker at $\sin(\arcsin x) = x$:

$$\int(\arcsin x)^2 dx = (\arcsin x)^2 \sin(\arcsin x) + 2\arcsin x \cos(\arcsin x) - 2\sin(\arcsin x) + C$$
$$= x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x \cdot \cos(\arcsin x) - 2x + C$$

Volumet blir da

$$\begin{aligned}
V &= \pi[x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x \cos(\arcsin x) - 2x]_0^1 \\
&= \pi(1 \cdot (\arcsin(1))^2 + 2\arcsin(1) \cdot \cos(\arcsin(1)) - 2 \cdot 1 - \\
&\quad - (0 \cdot (\arcsin 0)^2 + 2\arcsin(0) \cdot \cos(\arcsin 0) - 2 \cdot 0) \\
&= \pi(1 \cdot (\frac{\pi}{2})^2 + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}) - 2 - 0) \\
&= \frac{\pi^3}{4} - 2\pi
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{9.2.28}}$ a) Vi får

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)dt = [tg(t)]_{f(a)}^{f(b)} - \int_{f(a)}^{f(b)} tg'(t)dt$$

ved delvis integrasjon. Da er

$$[tg(t)]_{f(a)}^{f(b)} = f(b)g(f(b)) - f(a)g(f(a)) = f(b)b - f(a)a$$

siden g er inversfunksjonen til f. Vi ser på integralet $\int_{f(a)}^{f(b)} tg'(t)dt$. Siden g er strengt monoton kan vi bruke substitusjon. La $x = g(t)$ slik at $t = f(x)$ og $dx = g'(t)dt$. De nye grensene er nå $g(f(a)) = a$ og $g(f(b)) = b$. Totalt får vi

$$\int_{f(a)}^{f(b)} tg'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

Til sammen får vi

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)dt = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(t)dt$$

som var det vi skulle vise.

b) Vi beholder notasjonen fra a). La $g(t) = \arcsin\sqrt{t}$. Inversfunksjonen finner vi ved

$$y = \arcsin\sqrt{t} \Longrightarrow \sin y = \sqrt{t} \Longrightarrow t = (\sin x)^2$$

Altså er inversfunksjonen $f(t) = (\sin x)^2$. Grensene var 0 og 1. Fra a) vet vi at disse skal være på formen $(\sin a)^2$ og $(\sin b)^2$. Mer presist har vi at

$$(\sin a)^2 = 0 \quad \text{og} \quad (\sin b)^2 = 1$$

som gir $a = 0$ og $b = \frac{\pi}{2}$. f er kontinuerlig og strengt monoton, så fra a) er

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arcsin\sqrt{t}dt &= bf(b) - af(a) - \int_a^b f(t)dt \\ &= \frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{2})^2 - 0\cdot(\sin 0)^2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos(2t))dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos(2t))dt\end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $(\sin t)^2 = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$. Da får vi at

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos(2t))dt &= [\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot 0) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Dermed er

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{t}dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

9.3.1 d) Merk at $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, så vi forsøker å skrive

$$\frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Vi multipliserer med $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ på begge sider og får

$$x + 7 = A(x-2) + B(x+1) = (A+B)x + (B-2A)$$

Dette gir de to likningene

$$A + B = 1 \quad \text{og} \quad B - 2A = 7$$

som har løsning $A = -2$, $B = 3$. Dermed er

$$\frac{x+7}{x^2-x-2} = -\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$$

Vi kan nå løse integralet

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-2}dx = \int(-\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2})dx = -\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + C$$

9.3.37 a) $u^2 - 1 = (u+1)(u-1)$, så vi skriver

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$$

Ved å multiplisere begge sider med $u^2 - 1 = (u+1)(u-1)$ får vi

$$1 = A(u-1) + B(u+1) = (A+B)u + (B-A)$$

Dette gir likningssystemet

$$A + B = 0, \quad B - A = 1$$

som har løsning $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$. Dermed er

$$\frac{1}{u^2 - 1} = -\frac{\frac{1}{2}}{u+1} + \frac{\frac{1}{2}}{u-1}$$

Vi kan nå løse integralet

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u^2-1} du &= \int (-\frac{\frac{1}{2}}{u+1} + \frac{\frac{1}{2}}{u-1}) du = -\frac{1}{2} \ln|u+1| + \frac{1}{2} \ln|u-1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \end{aligned}$$

b) Vi har at

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x}{1 - (\sin x)^2}$$

så

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - (\sin x)^2} dx$$

Sett $u = \sin x$. Da er $du = \cos x dx$, og vi får

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1}{1 - u^2} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

ved å bruke resultatet fra a). Da blir

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx &= \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi}{6} - 1}{\sin \frac{\pi}{6} + 1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin 0 - 1}{\sin 0 + 1} \right| \\ &= \frac{\ln 3}{2} \end{aligned}$$

c) Buelengden er gitt ved

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

med $f(x) = \ln(\cos x)$. Har at

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

Så

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (f'(x))^2} &= \sqrt{1 + (-\frac{\sin x}{\cos x})^2} = \sqrt{1 + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}} = \sqrt{\frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(\cos x)^2}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

siden $|\cos x| = \cos x$ for $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$. Ved å bruke b) får vi da

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx = \frac{\ln 3}{2}$$