9.2:72

Løsning:
Den tillhørende Leslie-matrisen er

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1.6 & 3.9 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

og startdistribusjonen av 0-åringer, 1-åringer og 2-åringer er gitt ved

$$\mathbf{N}(0) = \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Vi skal finne $\mathbf{N}(3)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(1) &= L\mathbf{N}(0) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1.6 & 3.9 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \\ 20 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 238 \\ 800 \\ 10 \end{bmatrix} \\
\mathbf{N}(2) &= L\mathbf{N}(1) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1.6 & 3.9 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 238 \\ 800 \\ 10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1319 \\ 190 \\ 80 \end{bmatrix} \\
\mathbf{N}(3) &= L\mathbf{N}(2) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1.6 & 3.9 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1319 \\ 190 \\ 80 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 617 \\ 1055 \\ 19 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Svarene er rundet av til nærmeste heltall. Vi kunne også ha funnet $\mathbf{N}(3)$ ved først å beregne L^3 og deretter beregnet $\mathbf{N}(3) = L^3\mathbf{N}(0)$.

$\boxed{\text{9.3:55}}$ Finn egenvektorer og egenverdier til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Løsning:
Den **karakteristske ligningen** er

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)(3-\lambda) - 2(1) \\
&= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \text{ (denne andregradsligning i } \lambda \text{ kalles for karakteristisk ligning)} \\
&= (\lambda - 4)(\lambda - 1),
\end{aligned}$$

så egenverdiene er

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 4.$$

Finner egenvektoren $\mathbf{v}_1$ tilhørende λ_1:

$$\begin{aligned}
Av_1 = \lambda_1 v_1 \implies \mathbf{0} &= (A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&\iff \\
0 &= u + v \implies u = -v.
\end{aligned}$$

La $v = -t$. Da er $u = t$ og for alle $t \in \mathbb{R}$, er

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

en løsning av ligningssettet og dermed en egenvektor til A. Med $t = 1$ får vi egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Finner egenvektoren $\mathbf{v}_2$:

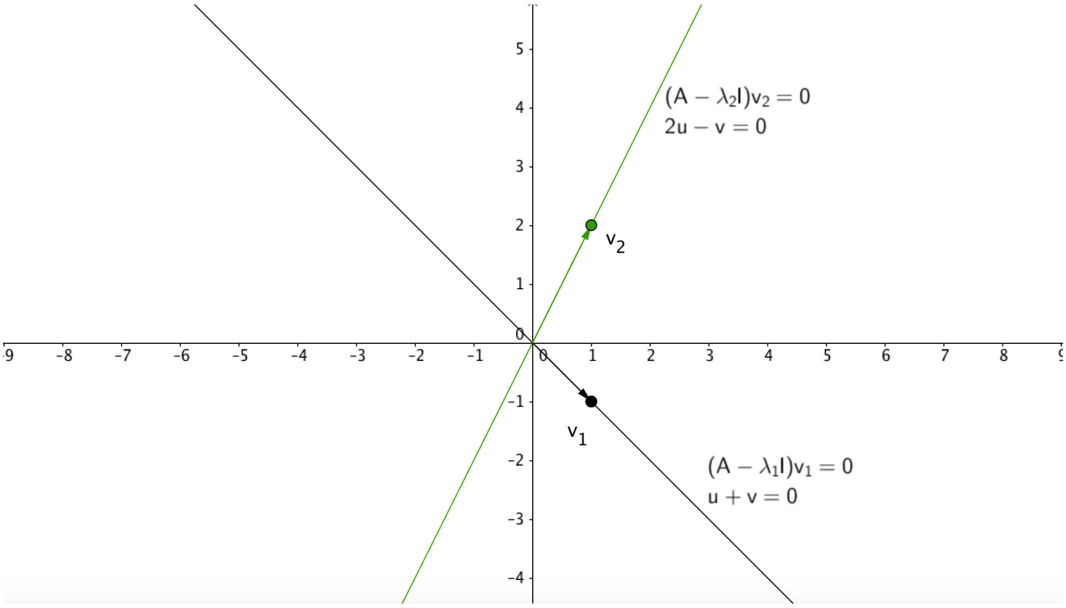
$$\begin{aligned}
Av_2 = \lambda_1 v_2 \implies \mathbf{0} &= (A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&= -2u + v = 0 \text{ og } 2u - v = 0 \\
&\iff \\
2u &= v.
\end{aligned}$$

Dvs. for alle $t \in \mathbb{R}$, er

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

en løsning av ligningssettet og dermed en egenvektor til A. Med $t = 1$ får vi egenvektoren

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



Figur 1

Figur 1 viser egenvektorer v_1 og v_2 sammen linjer hvor Av_1 og Av_2 vil ligge.

$\boxed{\text{9.3:63}}$ La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Avgjør om den reelle delen av begge egenverdiene er negativ uten å beregne dem.

Løsning:
Vi har bevist et teorem som sier at den reelle delen av egenverdiene til en 2x2-matrise er negative hvis og bare hvis $\operatorname{tr} A < 0$ og $\det A > 0$.

Vi beregner at $\operatorname{tr} A = 2 - 3 = -1 < 0$ og $\det A = 2(-3) - (-2)(4) = -6 + 8 = 2 > 0$. Altså er den reelle delen av begge egenverdiene negativ.

$\boxed{\text{9.3:69}}$ La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Vis at $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ er egenvektorer til matrise A og at $\mathbf{u_1}$ og $\mathbf{u_2}$ er lineært uavhengige.

b) Representer $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ som lineær kombinasjon av $\mathbf{u_1}$ og $\mathbf{u_2}$.

c) Bruk resultater fra a) og b) for å beregne $A^{20}\mathbf{x}$.

Løsning a):

Den **karakteristske ligningen** er

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(2-\lambda) - 0(1) \\ &= (-1-\lambda)(2-\lambda), \end{aligned}$$

så egenverdiene er

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Finner egenvektoren $\mathbf{u}_1$ tilhørende λ_1:

$$\begin{aligned} Au_1 = \lambda_1 u_1 \implies \mathbf{0} &= (A - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &\iff \\ 0 &= v \text{ og } u = t(\text{tilfeldig konstant}) \end{aligned}$$

Merk at u er ikke i ligningsystemet pga første kolon, som er $\mathbf{0}$, men det betyr ikke at u = 0. Dermed har vi $v = 0$; $u = t$ og for alle $t \in \mathbb{R}$, er

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en løsning av ligningssettet og dermed en egenvektor til A. Med $t = 1$ får vi egenvektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finner egenvektoren $\mathbf{u_2}$:

$$\begin{aligned} Au_2 = \lambda_1 u_2 \implies \mathbf{0} &= (A - \lambda_2 I)\mathbf{u}_2 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= -3u + v = 0 \iff v = 3u. \end{aligned}$$

Dvs. for alle $t \in \mathbb{R}$, er

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

en løsning av ligningssettet og dermed en egenvektor til A. Med $t = 1$ får vi egenvektoren

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi ønsker å vise at $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er lineært uavhengige. Det kan gjøres på to måter: **Først**, kan vi se at våre to egenverdier λ_1 og λ_2 er ulik og dermed kan vi si at $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er lineært uavhengige. **Andre**, hvis vi antar at $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er lineært avhengige, da bør vi klare å finne en konstant a slik at vi kan skrive: $\mathbf{u}_1 = a\mathbf{u}_2 \implies \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, som er umulig. Dermed, er $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ lineært uavhengige.

Løsning b):

Vi ønsker å skrive $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ til A.

Vi ønsker nå å finne to tall a_1 og a_2 slik at

$$\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = a_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}.$$

Vi ser at a_2 må være -1 og det følger da at $a_1 + (-1) = 1$. Altså at $a_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} = 2\mathbf{u}_1 - 1\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}.$$

Løsning c):

Det følger nå at

$$\begin{aligned}
A^{20}\mathbf{x} = A^{20}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} &= A^{20}(2\mathbf{u}_1 - 1\mathbf{u}_2)\\
&= 2A^{20}\mathbf{u}_1 - A^{20}\mathbf{u}_2\\
&= 2\lambda_1^{20}\mathbf{u}_1 - \lambda_2^{20}\mathbf{u}_2\\
&= (2)(-1)^{20}\mathbf{u}_1 - (2)^{20}\mathbf{u}_2\\
&= 2\mathbf{u}_1 - (1048576)\mathbf{u}_2\\
&= \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1048576\\3145728\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-1048574\\-3145728\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{9.3:77}}$ Anta at

$$L = \begin{bmatrix}7 & 3\\0.1 & 0\end{bmatrix}$$

er en Leslie-matrise for en populasjon med to årsklasser.

a) Finn egenverdiene.

b) Gi en biologisk forklaring på den største egenverdien.

c) Finn den stabile aldersfordelingen. (med dette menes ikke at den totale bestanden nødvendigvis konvergerer, men at den prosentvise fordelingen av hver årsklasse i forhold til den totale bestanden konvergerer.)

Løsning: a)
Finner egenverdiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \det(L - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 0.1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (7-\lambda)(-\lambda) - 3(0.1) \\
&= \lambda^2 - 7\lambda - 0.3
\end{aligned}$$

som gir

$$\lambda = \frac{1}{2}\big(7 \pm \sqrt{50.2}\big).$$

Dvs. $\lambda_1 = \frac{1}{2}\big(7 + \sqrt{50.2}\big)$ og $\lambda_2 = \frac{1}{2}\big(7 - \sqrt{50.2}\big)$.

Løsning: b)
Det er egenvektoren som korresponderer til den egenverdien med størst absoluttverdi som bestemmer utviklingen på sikt. λ_1 er grenseverdien av vekstraten når $t \to \infty$.

Løsning: c)

Merknad: I løsningen nedenfor, er det forklart at hvordan λ_1^t ikke påvirker den stabile andelen av hver årsklasse i forhold til den totale størrelsen på bestanden. Det vil si at vi kan finne den stabile andelen uten å gjøre mellom berengninger, altså bare ved bruk av egenvektor $\mathbf{v}_1$ som tilhører egenverdi λ_1, med størst absoluttverdi.

Vi finner $\mathbf{v}_1$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= (L - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 \\
&= \begin{bmatrix} 7 - \frac{1}{2}\big(7+\sqrt{50.2}\big) & 3 \\ 0.1 & -\frac{1}{2}\big(7+\sqrt{50.2}\big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\big(7-\sqrt{50.2}\big) & 3 \\ 0.1 & -\frac{1}{2}\big(7+\sqrt{50.2}\big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&\Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\big(7 - \sqrt{50.2}\big)u = -3v.$$

Hvis vi lar $u = t$, så er

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{6}\big(7 - \sqrt{50.2}\big) \end{bmatrix}$$

en løsning av ligningssettet og dermed en egenvektor til L. Med $t = 6$ får vi egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 + \sqrt{50.2} \end{pmatrix}.$$

For en startverdi skrevet som en lineærkombinasjon av egenvektorene $\mathbf{N}(0) = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ (dette er mulig fordi egenverdiene er forskjellige og dermed er egenvektorene lineært uavhengige), har vi nå at de framtidige populasjonsnivåene er

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(t) &= L^t\mathbf{N}(0)\\ &= L^t(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2)\\ &= a_1L^t\mathbf{v}_1 + a_2L^t\mathbf{v}_2\\ &= a_1\lambda_1^t\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2^t\mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

Vi ønsker nå å finne den stabile andelen av hver årsklasse i forhold til den totale størrelsen på bestanden. Vi skriver

$$\mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} n(t) \\ m(t) \end{bmatrix}$$

der $n(t)$ og $m(t)$ henholdsvis er antall 0-åringer og 1-åringer ved tiden t. La også

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} n(t) \\ m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\lambda_1^t u_1 + a_2\lambda_2^t u_2 \\ a_1\lambda_1^t v_1 + a_2\lambda_2^t v_2 \end{bmatrix}.$$

Det totale antallet individer ved tiden t er nå

$$\begin{aligned}n(t) + m(t) &= a_1\lambda_1^t u_1 + a_2\lambda_2^t u_2 + a_1\lambda_1^t v_1 + a_2\lambda_2^t v_2\\ &= a_1\lambda_1^t(u_1 + v_1) + a_2\lambda_2^t(u_2 + v_2)\end{aligned}$$

og andelen av 0-åringer i forhold til antallet individer ved tiden t er

$$\begin{aligned}\frac{n(t)}{n(t) + m(t)} &= \frac{a_1\lambda_1^t u_1 + a_2\lambda_2^t u_2}{a_1\lambda_1^t(u_1 + v_1) + a_2\lambda_2^t(u_2 + v_2)}\\ &= \frac{a_1u_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t u_2}{a_1(u_1 + v_1) + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t(u_2 + v_2)}\end{aligned}$$

der vi i siste linje delte på λ_1^t i teller og nevner.

Ettersom $|\lambda_1| = \frac{1}{2}\big(7 + \sqrt{50.2}\big) > \frac{1}{2}\big(\sqrt{50.2} - 7\big) = -\lambda_2 = |\lambda_2|$, vil

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t = 0$$

og dermed vil andelen av 0-åringer i forhold til antallet individer nærme seg tallet

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{n(t)}{n(t) + m(t)} &= \lim_{t\to\infty}\frac{a_1u_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t u_2}{a_1(u_1 + v_1) + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t(u_2 + v_2)}\\ &= \frac{u_1}{u_1 + v_1}\\ &= \frac{6}{6 + (-7 + \sqrt{50.2})} \approx 0.98600\end{aligned}$$

forutsatt at $a_1 \neq 0$. På samme måte finner vi at andelen 1-åringer i forhold til antallet individer nærmer seg tallet

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{n(t)+m(t)} &= \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{n(t)}{n(t)+m(t)}\right) \\ &\approx 1 - 0.98600 = 0.01400.\end{aligned}$$

Merk at vi ikke hadde behov for å vite $\mathbf{N}(0)$ for å komme frem til dette resultatet. Vi trengte også bare å beregne den ene egenvektoren; den som tilsvarte den største egenverdien.

Merknader:
Det er egenvektoren med den tilhørende egenverdien med størst absoluttverdi som bestemmer utviklingen i det lange løp. Hvis denne verdien er større enn 1, vil bestanden vokse mot uendelig. Hvis den er mindre enn 1, vil bestanden dø ut. Eller, hvis verdien er 1, vil bestanden konvergere mot en fordeling proposjonal med egenvektoren. Merk også at startverdien, $\mathbf{N}(0)$, har ingen innvirkning på stabiliteten.