Flerdimensjonal analyse (MA1103)

Øving 6

Oppgave 1 (3.2: 8)

Anta at $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerlige annenordens partiellderiverte, og at $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ der x og y er to ganger deriverbare. La $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$. Vis at

$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}(t))x'(t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{r}(t))x'(t)y'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}(t))y'(t)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))x''(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))y''.$$

Oppgave 2 (3.3: 2,5)

Regn ut linjeintegralet $\int_C f\,ds$ når

a) $f(x, y) = xy$ og C er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (3t, 4t)$, $t \in [0, 2]$,

b) $f(x, y, z) = z$ og C er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t\sin(t), t\cos(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Oppgave 3 (3.3: 9)

Gjennomfør beviset for setning 3.3.6 (side 186) når de to parametriseringene har motsatt orientering.

Oppgave 4 (3.4: 1,3)

Regn ut linjeintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når

a) $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$ og kurven C er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (2t, -3t)$, $t \in [1, 3]$,

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (zy, x^2, xz)$ og kurven C er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 2]$.

Oppgave 5 (3.4: 6)

Regn ut linjeintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ og C er sirkelen med sentrum i origo og radius 5. C skal gjennomløpes i positiv retning (dvs. mot klokken).

Oppgave 6 (3.4: 8)

La C være omkretsen til trekanten med hjørner i punktene $(0, 0), (\pi, 0)$ og (π, π). Regn ut $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y) = (\cos(x)\sin(y), x)$ og C er positiv orientert (dvs. mot klokken).

Oppgave 7

Avgjør om feltet er konservativt og i så fall finn en potensialfunksjon.

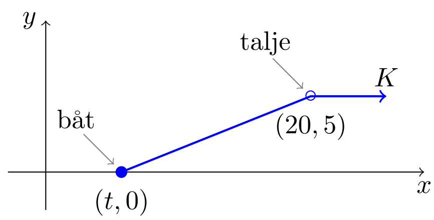
a) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$,

b) $\mathbf{F}(x, y) = (xy, xy)$,

c) $\mathbf{F}(x, y) = (2x\cos(y) + \cos(y), x^2\sin(y) + x\sin(y))$.

Oppgave 8 (3.4: 14)

Figuren viser en båt som blir dratt bortover en flat strand med et tau. Tauet går gjennom en talje som er festet i punktet $(20, 5)$, og trekkraften i tauet er konstant lik K. Posisjonen til båten ved tiden $t \in [0, 20]$ er $(t, 0)$.



a) Vis at arbeidet som kraften utfører er gitt ved

$$W = K \int_0^{20} \frac{20 - t}{\sqrt{25 + (20 - t)^2}} \, dt.$$

b) Finn W.

Oppgave 9 (Eksamen Juni 2016, oppgave 5)

La $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy, x^2, z)$. Beregn linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når

i) C er kurven parametrisert ved $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(2t), \sin^2(t))$.

ii) C er en vilkårlig glatt kurve med startpunkt $(0, 0, 0)$ og endpunkt $(1, -2, \sqrt{2})$.

Oppgavene finnes i boka *Flervariabel analyse med lineær algebra* av T.Lindstrøm og K.Hveberg. Se henvisningen i parentes.