Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1102 Grunnkurs i Analyse II
Vår 2017

Løsningsforslag — Øving 12

$\boxed{1}$ Vi kan ta utgangspunkt i forholdstesten:

$$\frac{\left|(x+1)^{3(n+1)}/\left((n+1)^2\cdot 8^{n+1}\right)\right|}{\left|(x+1)^{3n}/\left(n^2\cdot 8^n\right)\right|}=\frac{(n+1)^2|x+1|^3}{8n^2}\to\frac{|x+1|^3}{8}$$

når $n\to\infty$, så rekken konvergerer absolutt når $|x+1|^3/8<1$, det vil si $|x+1|<2$, og den divergerer når $|x+1|>2$. Når $|x+1|=2$ er

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x+1)^{3n}}{n^2\cdot 8^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

som er en konvergent rekke.

$\boxed{2}$ Vi deriverer og setter inn:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{1+x^2} & f(1)&=\frac{1}{2}\\
f'(x)&=\frac{-2x}{(1+x^2)^2} & f'(1)&=-\frac{1}{2}\\
f''(x)&=\frac{-2(1+x^2)^2+8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} & f''(1)&=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Det søkte taylorpolynomet er

$$p_2(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{4}(x-1)^2.$$

$\boxed{3}$ Den karakteristiske ligningen $r^2+2r+5=0$ kan skrives $(r+1)^2+4=0$, og har løsninger $r=-1\pm 2i$. Den generelle løsningen til $y''+2y'+5y=0$ kan derfor skrives

$$y=e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x).$$

Initialbetingelsen $y(0)=0$ gir $A=0$. Setter vi inn det og deriverer, får vi $y'=Be^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)$. Av initialbetingelsen $y'(0)=1$ får vi dermed $2B=1$. Den søkte løsningen er altså $y=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$.

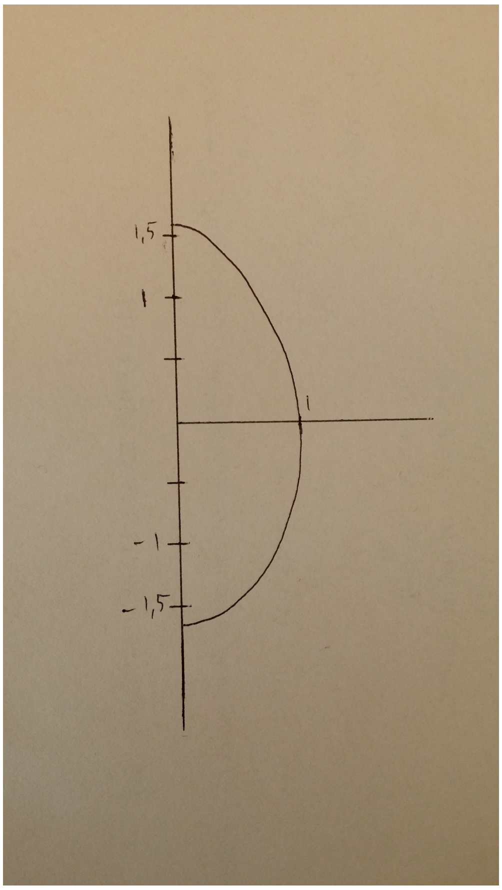
$\boxed{4}$ **a)** Vi ser at x er en like funksjon av t, mens y er en odde funksjon av t. De to symmetriene gjør kurven symmetrisk om x-aksen.

Når t vokser fra -1 til 1, vokser x fra 0 til maksimum $x = 1$ når $t = 0$, og avtar deretter til 0 igjen.

Vi finner også

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2\sqrt{1-t^2},$$

og legger spesielt merke til at dette er positivt, unntatt i endepunktene der den deriverte er 0. Når t vokser fra -1 til 1, vokser y fra $-\pi/2$ til $\pi/2$. Skisse:



b) For buelengden s finner vi

$$ds = \sqrt{(\,\mathrm{d}x)^2 + (\,\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{(-2t\,\mathrm{d}t)^2 + 4(1-t^2)(\,\mathrm{d}t)^2} = 2\,\mathrm{d}t,$$

og dermed for den totale buelengden

$$s = \int_{-1}^{1} 2\,\mathrm{d}t = 4.$$

$\boxed{5}$ Vi finner $f'(x) = \sin x + x\cos x$ og $f''(x) = 2\cos x - x\sin x$. Det er åpenbart at $f'(x) > 0$ for $x \in (0, \pi/2]$ og at $f''(x) < 0$ for $x \in (\pi/2, \pi)$. Videre er $f'(\pi) = -\pi < 0$. Ved skjæringssetningen finnes et nullpunkt for f' i $(\pi/2, \pi)$, og dette nullpunktet er entydig fordi f' avtar i dette intervallet.

Newtons metode for f':

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

Med $x_0 = 2$ får vi

$$x_1 = 2 - \frac{\sin 2 + 2\cos 2}{2\cos 2 - 2\sin 2} = 2.0290\ldots.$$

Maksimumspunktet er i $x = 2.02876\ldots$, så dette er ganske bra.