MA1102 Grunnkurs i Analyse II
Vår 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 7

12.5:1 For hvilke x konvergerer rekken?

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$

Løsning: b)
Dette er en geometrisk rekke, og konvergerer hvis og bare hvis $|2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/2$.

Løsning: c)
Igjen har vi en geometrisk rekke, denne gangen konvergent hvis og bare hvis $|\ln x| < 1 \Leftrightarrow x < e$. (Her antar vi at x er positiv, slik at $\ln x$ er definert.)

Løsning: e)
La $u = 2\sin x$. Vi har da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n^2}.$$

For $|u| \leq 1$ ser vi at rekken konvergerer ved sammenligning med den konvergente rekken $\sum 1/n^2$. For $|u| > 1$ har vi

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}|u|\frac{(n+1)^2}{n^2} = |u| > 0,$$

så ved forholdstesten (Teorem 12.4.5) divergerer rekken. Det vil si at rekken konvergerer for x slik at $x + \pi n \in [-\pi/6, \pi/6]$ for et heltall n.

12.5:3

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

a) Vis at $\{f_N\}$ konvergerer uniformt mot en funksjon f på $\mathbb{R}$.

b) Forklar hvorfor f er kontinuerlig.

c) Vis at

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$$

for alle x.

Løsning: a)
Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ konvergerer absolutt for alle x ved sammenligning med rekken $\sum 1/n^2$. Ved Weierstrass' M-test konvergerer derfor rekken uniformt på $\mathbb{R}$. Vi kan også vise dette direkte med definisjonen av uniform konvergens:

Grensefunksjonen f er definert ved

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} f_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

For alle x er

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_N(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n^2} \right| \\
&= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \right| \\
&\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \\
&\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to 0
\end{aligned}$$

når $N \to \infty$. Dermed er

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} d_{\mathbb{R}}(f, f_N) &= \lim_{N\to\infty} \sup\{|f(x) - f_N(x)| \colon x \in \mathbb{R}\} \\
&\le \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Løsning: b)
f_N er kontinuerlig for alle N ettersom funksjonen er en endelig sum av kontinuerlige funksjoner. Ved teorem 11.3.8 er f kontinuerlig fordi $\{f_N\}$ konvergerer uniformt mot f.

Løsning: c)

$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lim_{N\to\infty} f_N(t)\,\mathrm{d}t$ per definisjon og ved setning 11.4.1 er

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{N\to\infty} \int_0^x f_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^x \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nt}{n^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \int_0^x \cos nt\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \frac{1}{n}\Big|_0^x \sin nt\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n^3} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{12.6:1 a)}}$ Finn konvergensintervallet til postensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n.$$

Løsning:
Geometrisk rekke, konvergerer for $|x-2| < 1$ og divergerer ellers. Konvergensintervallet er altså $(1, 3)$.

$\boxed{\text{12.6:1 b)}}$ Finn konvergensintervallet til postensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}.$$

Løsning:
Geometrisk rekke, konvergerer for $|x/3| < 1$ og divergerer ellers. Konvergensintervallet er altså $(-3, 3)$.

$\boxed{\text{12.6:1 d)}}$ Finn konvergensintervallet til postensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Løsning:
Forholdstesten gir konvergens for

$$1 > |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = |x+1|.$$

Endepunktet $x = 0$ gir rekken $\sum 1/n^{1/2}$ som divergerer ($p = 1/2 < 1$). Endepunktet $x = -2$ gir rekken $\sum(-1)^n/n^{1/2}$ som konvergerer ved alternerende rekketesten.

Konvergensintervallet er altså $[-2, 0)$.

$\boxed{\text{12.6:1 g)}}$ Finn konvergensintervallet til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

Løsning:
Forholdstesten gir konvergens for

$$\begin{aligned}
1 > |x| \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)!} &= |x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{|x|}{4}.
\end{aligned}$$

Rekken divergerer i endepunktene $x = \pm 4$ fordi $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$: La først $x = 4$ og observer at $(n!)^2 4^n = (2^n n!)^2$ og at

$$2^n n! = 2 \cdots 2 \cdot n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = 2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2.$$

Videre er

$$\frac{2^n n!}{(2n)!} = \frac{\cancel{2n}\cancel{(2n-2)} \cdots \cancel{4} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2n}(2n-1)\cancel{(2n-2)} \cdots 3 \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3},$$

så

$$\begin{aligned}
\frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \\
&= \frac{2^n n!}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1} \\
&= \frac{2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1} \\
&= \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n-2}{2n-3} \cdots \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} \\
&> 1.
\end{aligned}$$

Det følger at $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n > 1 \neq 0$ og rekken divergerer i $x = 4$.

For $x = -4$ vil samme utregning gi $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \neq 0$ fordi grensen ikke eksisterer. Konvergensintervallet er derfor $(-4, 4)$.

$\boxed{\text{12.6:2 f)}}$ Finn konvergensintervallet til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+2n} \right)^n .$$

Løsning:
Rottesten gir konvergens for

$$\begin{aligned} 1 &> \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{nx}{1+2n} \right|^n} \\ &= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+2n} \\ &= \frac{|x|}{2}. \end{aligned}$$

Rekken divergerer i endepunktene $x = \pm 2$ fordi $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$: La først $x = 2$. Da er

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{1+2n} \right)^n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2} \neq 0. \end{aligned}$$

Med $x = -2$ vil samme utregning gi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-2n}{1+2n} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}} \neq 0$$

fordi grensen ikke eksisterer. Konvergensintervallet er dermed $(-2, 2)$.

(Takk til S. Lindqvist for løsningen av de to siste oppgavene.)

$\boxed{\text{12.6:7}}$ **a)** Her er det naturlig å bruke grensesammenlikningstesten. Vi kan anta at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; hvis det ikke er tilfellet vil også $\lim_{n\to\infty} \ln(1 + a_n) \neq 0$ og begge rekkene vil divergere. Vi har at

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &\overset{\text{L'hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \\ &= 1, \end{aligned}$$

hvor vi substituerte $a_n = x$ i første linje. Dette viser at hvis den ene rekken konvergerer (divergerer) så konvergerer (divergerer) den andre også.

b) Her bruker vi resultatet fra **a)** to ganger. Først ser vi at

$$\ln\left[1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)\right]$$

er på formen $\ln(1 + a_n)$, hvor $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$. Dette er igjen på formen $\ln(1 + b_n)$, hvor $b_n = \frac{1}{n^p}$. Altså er det tilstekkelig å bestemme når rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergerer, hvilket vi vet er tilfellet hvis og bare hvis $p > 1$.

c) Vi har at $\sum 1/n$ divergerer $\implies$ $\sum \ln(1+1/n)$ divergerer (fra a)) $\implies$ $\sum \ln(1+1/n)x^n$ divergerer for $x \geq 1$.

Siden følgen $a_n = \ln(1 + 1/n)$ er minkende og går mot 0, konvergerer $\sum \ln(1 + 1/n)x^n$ for $-1 \leq x < 1$.

Bortsett fra i endepunktene må konvergensområdet til rekken være symmetrisk om 0. (Bruk for eksempel lemma 12.6.7.) Dermed divergerer rekken for $x < -1$. Konvergensintervallet er altså $[-1, 1)$.

$\boxed{\text{12.7:1 a)}}$ Finn $f'(x)$ og $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ når

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Løsning:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} n^2 x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^3 x^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}\Big|_0^x t^{n+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^{n+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n} x^n\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

12.7:1 d) Finn $f'(x)$ og $F(x) = \int_4^x f(t)\,\mathrm{d}t$ når

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x-4)^n}{n!}.$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{3^n(x-4)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} n(x-4)^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)}{(n+1)!}(x-4)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!}(x-4)^n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_4^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_4^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (t-4)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \int_4^x (t-4)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \frac{1}{n+1} \Big|_4^x (t-4)^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \frac{1}{n+1} (x-4)^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{n} (x-4)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!} (x-4)^n.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{12.7:3 a)}}$ Forklar hvorfor

$$\frac{x^2}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+2}$$

når $|x| < 1$.

Løsning:
For alle y med $|y| < 1$ er $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$. Så

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{1-x^3} &= x^2 \frac{1}{1-x^3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+2}
\end{aligned}$$

for alle $|x^3| < 1$. Dvs. for alle $|x| < 1$.

$\boxed{\text{12.7:3 b)}}$ Vis at

$$\ln(1-x^3) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$$

når $|x| < 1$.

Løsning:
Vi observerer at $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1-x^3) = -3\frac{x^2}{1-x^3}$, så ved å integrere begge sider finner vi at

$$\begin{aligned}
\ln(1-x^3) + C &= -3\int \frac{x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= -3\int \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+2}\,\mathrm{d}x \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty} \int x^{3n+2}\,\mathrm{d}x \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+3}x^{3n+3} \\
&= -3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3(n+1)}x^{3(n+1)} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3(n+1)}}{n+1} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}.
\end{aligned}$$

Høyre side er 0 når $x = 0$. Derfor er integrasjonskonstanten $C = 0$.

$\boxed{\text{12.7:3 c)}}$ Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{n} = \ln 2,$$

og sammenlign dette resultatet med eksempel 12.7.4.

Løsning:
Potensrekken i oppgave b) konvergerer i endepunktet $x = -1$ ved alternerende rekke-testen. Ved Abels teorem (12.6.9) er summen kontinuerlig i hele konvergensområdet, så

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= \ln(1-(-1)^3) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

Dette er samme formel som i eksempel 12.7.4. Eksponenten $3n+1$ er annenhver jevn og odde.