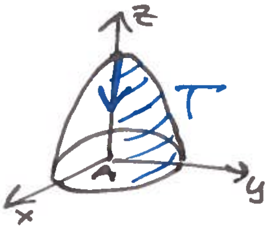
MA1103: Løsningsskisser 13 ØVING

Vanlige forbehold! KH

Oppgave 1

Skal regne ut



$$I = \iint_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_A \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)d(x,y)$$

$\mathbf{F} = (x,y,0)$, $\mathbf{r} = (x,y,f(x,y))$, $T: z = x^2+2y^2 \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

slik at

$$I = \iint_A -(2x^2+4y^2)\,d(x,y) \quad \text{med } A \text{ ellipsen } x^2+2y^2 \leq 2$$

$$\underline{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 \leq 1}$$

Innfører vi $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $v = y$ blir $J(u,v) = \underline{\sqrt{2}}$

$x = \sqrt{2}\,u$, $y = v$

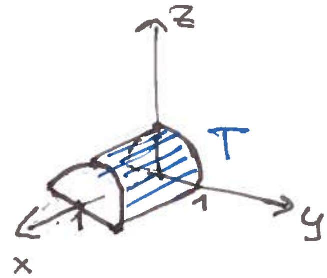
og

$$I = -\iint_{u^2+v^2\leq 1} (2\cdot 2u^2 + 4v^2)\sqrt{2}\,du\,dv \underset{\text{polar}}{=} -4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \underline{\underline{-2\sqrt{2}\,\pi}}$$

Oppgave 2

$$I = \iint_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = ? \quad \text{når } \underline{\mathbf{F} = (0, yz, z^2)} \text{ og}$$



T er gitt ved $\mathbf{r}(\theta,t) = \underline{(t, \cos\theta, \sin\theta)}$;

$0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$

slik at
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{(0, \cos\theta, \sin\theta)}_{\text{pos}}.$$
Altså

$$I = \int_0^1\left[\int_0^\pi (0, \cos\theta\sin\theta, \sin^2\theta)\cdot(0,\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta\right]dt$$

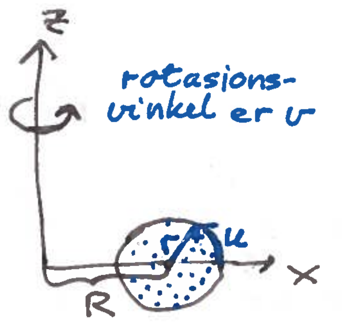
$$= \int_0^\pi \underline{\cos^2\theta\sin\theta} + \underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta}\,\underline{\sin\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = \left[-\cos\theta\right]_0^\pi = \underline{\underline{2}}$$

Oppgave 3 Se s. 262 $(0<r<R$ gitt$)$

$$s(u,v) = \big((R+r\cos u)\cos v, (R+r\cos u)\sin v, r\sin u\big)$$

der $0 \le u, v \le 2\pi$.



a) $\frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v}$ er regnet ut på s. 594:

$(\cdots, \cdots, \underline{-r(R+\cos u)\sin u})$ ← peker inn i torusen

b) $F = (0,0,z) = (0,0,r\sin u)$

$$F\cdot n\, dS = F\cdot\left(-\frac{\partial s}{\partial u}\times\frac{\partial s}{\partial v}\right)dA = r^2(R+\cos u)\sin^2 u\, d(u,v)$$

$$\iint_T F\cdot n\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2(R+\cos u)\sin^2 u\, du\, dv = \underline{\underline{2\pi^2 r^2 R}}$$

Oppgavene 4, 5: Påsketravelt, så vil bare henvise til læreboka og eksempel 6.13.3 (Se også Bemerkning s. 696 for „forklaring".)

PS Skriver opp Oppgave 5 på side 4.

Oppgave 6

$$\iint_T F\cdot n\, dS = \iiint_V \operatorname{div} F\, d(x,y,z) = \iiint_V (3x^2+3y^2+3z^2)\, d(x,y,z)$$

*) Totaloverflata til V

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 3\rho^2 \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{6\pi}{5}}}$$

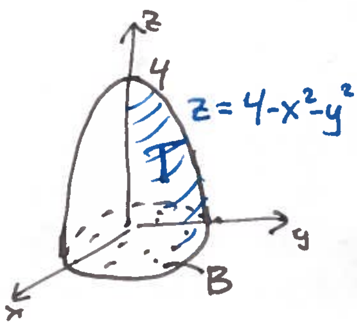
*) $\iint_{\circledast} (x^3, y^3, 0)\cdot(0,0,-1)\,dA = \underline{0}$,
svaret blir det samme om vi bare ser på kuleflata!

Oppgave 7

a) areal $T = \iint_B \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\; d(x,y)$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\; r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^2 = \underline{\frac{\pi}{6}(17^{3/2}-1)}$$



b) $$V = \iint_B (4 - x^2 - y^2)\, d(x,y)$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr \;=\; \underline{\underline{8\pi}}$$

c) $$\underline{\iint_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS} + \iint_B 0\, dA = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_V 4z - 2z - 2z + 8\, dV = \overset{64\pi}{\underline{\underline{8V}}}$$

<u>Oppgave 8</u> Fikk beskjed fra TL om dobbelfeil i bok: Paraboloiden skal være $z = 2 - x^2 - y^2$. Fasit i b) $\frac{\pi}{6}$ [...]

a) $\operatorname{curl}\mathbf{F} = (2xz, 0, z^2+1)$ følger av curl-def.

b) Skjæring paraboloide/kjegle

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2+y^2} \iff 2 - r^2 = r \Rightarrow \underline{r = 1} \text{ pos. rot}$$

Projeksjonen i xy-planet $\underline{r = 1}$ $(\Rightarrow z = \sqrt{1} = \underline{1})$

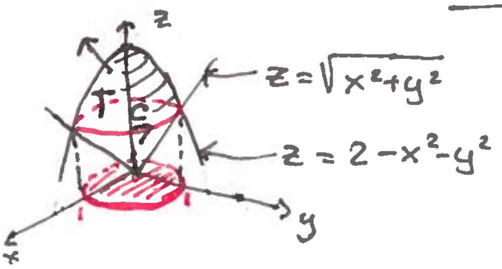
$$A = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, d(x,y)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\right] d\theta = \frac{2}{3\cdot 8}\left[(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^1 \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right)}}$$

c) $$\iint_T \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS \underset{\text{Stoke}}{=} \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_C -y\, dx + x z^2\, dy + z^2\, dz \qquad C \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt \;=\; \underline{\underline{2\pi}}$$



Oppgave 5

Vi skal vise at div $F=0$, og så finne et vektorfelt $G=(P,Q,R)$ slik at curl $G=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=F$

Vi følger eksemplet i boka til punkt og prikke og starter med å velge i) $P=0$ i begge oppgavene.

a) $F=(y-z,\ z-x,\ x-y)$, og div $F=0+0+0=\underline{0}$.

Ønsker nå Q, R slik at

ii) $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=y-z$ iii) $\frac{\partial R}{\partial x}=x-z$ iv) $\frac{\partial Q}{\partial x}=x-y$

Av iii) $R=\frac{1}{2}x^2-xz+\underline{f(y,z)}$ Av iv) $Q=\frac{1}{2}x^2-xy+\underline{g(y,z)}$

Vi velger $\underline{f(y,z)=0}$ og har ii) oppfylt dersom

$-\frac{\partial g}{\partial z}=y-z \Leftrightarrow g(y,z)=\frac{1}{2}z^2-yz+k(y)$. Velger $k(y)=0$

$$\underline{\underline{G=\left(0,\ \tfrac{1}{2}x^2-xy-yz+\tfrac{1}{2}z^2,\ \tfrac{1}{2}x^2-xz\right)}}\text{ passer (Sjekk)}$$

b) $F=(x^2+yz,\ -2xy-2yz,\ xy+z^2)$, div $F=2x-2x-2z+2z=\underline{0}$

Ønsker Q, R slik at (siden $P=0$)

ii) $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=x^2+yz$ iii) $\frac{\partial R}{\partial x}=2xy+2yz$ iv) $\frac{\partial Q}{\partial x}=xy+z^2$

Integrerer opp de to siste, og får

$R=x^2y+2xyz$ ($+f(y,z)$ som velges lik 0)

$Q=\frac{x^2}{2}y+xz^2+g(y,z)$

Innsatt i ii): $x^2+2xz-2xz-\frac{\partial g}{\partial z}=x^2+yz$

eller $\underline{g(y,z)=-\frac{1}{2}yz^2}$ ($+k(y)$, velges lik 0)

$$\underline{\underline{G=\left(0,\ \tfrac{1}{2}x^2y+xz^2-\tfrac{1}{2}yz^2,\ x^2y+2xyz\right)}}\text{ passer (Sjekk)}$$

<u>Bmk</u> <u>Eksistensen</u> av G over er postulert nederst på s 694, Teorem? (G og F byttet om i forhold til i Oppgave 5) — P, Q, R over har tils. 9 uavhengige første ordens part. deriverte; vi har altså 9 „frihetsgrader". Med i) $P(x,y,z)=0$ ($\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial z}=0$) bruker vi opp 3, og med ii) iii) iv) bruker vi opp 3 til. Etter valget $f(y,z)=0$ har vi én frihetsgrad igjen og setter $k(y)=0$.