Med forbehold om feil. Kontakt gjerne mads.sandoy@ntnu.no hvis du finner noen.

$\boxed{1}$ Gjør oppgave 1, 2, 3, 5, 12, 18, 18 med $c, d \geq 0, c + d \leq 1$, og 29 på side 8-10.

1) Man kan se at kombinasjonene gir (a) en linje i $\mathbb{R}^3$ (b) et plan i $\mathbb{R}^3$ og (c) hele $\mathbb{R}^3$.

2) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (2, 3)$ og $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (6, -1)$ blir diagonalene til parallellogrammet med $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ som sider forstått som vektorer med utgangspunkt i origo.

3) Dette problemet er det motsatte av det forrige. Her blir vi gitt diagonalene $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ og $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ og skal finne sidene. Man får $\mathbf{v} = (3, 3)$ og $\mathbf{w} = (2, -2)$.

5) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-2, 3, 1)$ og $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = (0, 0, 0)$ medfører at $2\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w} = (-2, 3, 1)$. Siden kombinasjonen av de blir $(0, 0, 0)$, ligger $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i samme plan.

12) Kombinasjonene av vektorene $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ og $\mathbf{i} + \mathbf{j} = (1, 1, 0)$ fyller xy-planet.

18) Kombinasjonene $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ med $0 \leq c \leq 1$ og $0 \leq d \leq 1$ fyller parallellogrammet med sider $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

18 med $0 \leq c, d$ og $0 \leq c + d \leq 1$) Kombinasjonene $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ med de gitte begrensningene fyller trekanten med sider $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ og $\mathbf{v} - \mathbf{w}$. For å se dette, merk at siden $c\mathbf{v}$ og $d\mathbf{w}$ er vektorer parallelle med og kortere enn henholdsvis $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, medfører parallellogramloven for vektoraddisjon at de ligger i parallellogrammet definert av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

Observer nå at $t\mathbf{v} + (1 - t)\mathbf{w} = t(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}$ er en kombinasjon omfattet av betingelsene og gir linjestykket mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Anta at $c \geq d$ slik at hvis $k = c + d$, så får man at $1 - d \geq k - d = c$. Siden problemet er symmetrisk i c og d kan vi anta dette uten tap av generalitet. Dette medfører at $((1 - d) - c)\mathbf{w}$ er en vektor parallell med $\mathbf{w}$ og i samme retning siden koeffisienten er ikke-negativ, altså større eller lik 0. Vi får da at

$$c\mathbf{v} + d\mathbf{w} + ((1 - d) - c)\mathbf{w} = c\mathbf{v} + d\mathbf{w} + (1 - d)\mathbf{w} - c\mathbf{w} = c\mathbf{v} + (1 - c)\mathbf{w},$$

som altså er en vektor med endepunkt på linjestykket mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Siden $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ ligger i parallellogrammet og endepuntket dens ble forskjøvet til å ligge på dette linjestykket ved å addere en vektor parallell med $\mathbf{w}$ og i samme retning som $\mathbf{w}$, får vi at $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ må ligge i trekanten definert av $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ og $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, hvilket var det som skulle vises.

29) For de første spørsmålet, kan vi observere at for vilkårlige valg av tre vektorer i $\mathbb{R}^2$ vil det finnes en kombinasjon av de som er null. Slik at hvis vi har en kombinasjon som produserer $\mathbb{b}$, så får med en gang mange flere.

Observer så at $3\mathbb{u} - 2\mathbb{v} + \mathbb{w} = 3(1,3) - 2(2,7) + 1(1,5) = (0,0)$. Samtidig har vi at $-2\mathbb{u} + 1\mathbb{v} + 0\mathbb{w} = \mathbb{b} = (0,1)$.

Med hensyn til det andre spørsmålet, kan vi observere at hvis vi velger de tre vektorene slik at de alle ligger på en linje som ikke inneholder $\mathbb{b}$ finnes det ikke en eneste kombinasjon som gir $\mathbb{b}$.

$\boxed{2}$ Utfordring: La det være gitt tre vektorer $\mathbb{u}_1$, $\mathbb{u}_2$, $\mathbb{u}_3$ i $\mathbb{R}^2$, ikke alle på en linje. Hvilken mengde i planet er

$$\{c_1\mathbb{u}_1 + c_2\mathbb{u}_2 + c_3\mathbb{u}_3 \,|\, c_1, c_2, c_3 \geq 0,\ c_1 + c_2 + c_3 = 1,\ c_i \in \mathbb{R}\}?$$

Løsning 1: Det er tilstrekkelig å forskyve $\mathbb{u}_1$, $\mathbb{u}_2$, $\mathbb{u}_3$ i $\mathbb{R}^2$ langs $-\mathbb{u}_i$ for en $i \in \{1,2,3\}$ og benytte variasjonen av oppgave 18. Med andre ord får vi nye vektorer $\mathbb{u}'_j = \mathbb{u}_j + (-1)\mathbb{u}_i$, hvorav en av de vil være lik nullvektoren. Likeledes vil hvert punkt i mengden forskyves langs den samme vektoren. Man kan bekrefte at dette gir et tilsvarende system som i variasjonen av oppgave 18. Siden vi vet hva mengden blir med de nye vektorene, trenger vi kun å observere at vi kommer tilbake til det gamle systemet ved å forskyve de nye vektorene langs $\mathbb{u}_i$, noe som også forskyver mengden.

Løsning 2: Denne løsningen er tungvint og litt keitete sammenlignet med den foregående, og bruker konseptet av en konveks mengde, altså en mengde av punkter slik at for ethvert valg av to punkter fra denne mengden er linjestykket mellom de to punktene også inneholdt i mengden. Det som vises er at mengden oppgitt i oppgaven er det konvekse skråget ("convex hull") av punktene/vektorene oppgitt.

La oss kalle denne mengden $\mathcal{T}$. Vi kan umiddelbart merke oss at for ethvert valg av to punkter i $\mathcal{T}$, så inneholder $\mathcal{T}$ alle punktene på linjestykket mellom disse to punktene. For å se dette, la $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2 \in \mathcal{T}$, og la $\mathbb{v}_i = c_{\mathbb{v}_i,1}\mathbb{u}_1 + c_{\mathbb{v}_i,2}\mathbb{u}_2 + c_{\mathbb{v}_i,3}\mathbb{u}_3$. Vi kan beskrive punktene $\mathbb{y}$ på linjestykket som de som kan uttrykkes på formen

$$\mathbb{y} = t\mathbb{v}_2 + (1-t)\mathbb{v}_1 = t(\mathbb{v}_2 - \mathbb{v}_1) + \mathbb{v}_1,$$

for $t \in [0,1]$.

For å vise at $\mathbb{y} \in \mathcal{T}$, er det tilstrekkelig å vise at

$$\mathbb{y} = c_{\mathbb{y},1}\mathbb{u}_1 + c_{\mathbb{y},2}\mathbb{u}_2 + c_{\mathbb{y},3}\mathbb{u}_3$$

med $c_{\mathbb{y},1} + c_{\mathbb{y},2} + c_{\mathbb{y},3} = 1$ og $c_{\mathbb{y},1}, c_{\mathbb{y},2}, c_{\mathbb{y},3} \geq 0$. Vi kan merke oss at

$$\begin{aligned}
c_{\mathbb{y},1} + c_{\mathbb{y},2} + c_{\mathbb{y},3} &= tc_{\mathbb{v}_2,1} + (1-t)c_{\mathbb{v}_1,1} + tc_{\mathbb{y}_2,2} + (1-t)c_{\mathbb{v}_1,2} + tc_{\mathbb{v}_2,3} + (1-t)c_{\mathbb{v}_1,3} \\
&= tc_{\mathbb{v}_2,1} + tc_{\mathbb{y}_2,2} + tc_{\mathbb{v}_2,3} + (1-t)c_{\mathbb{v}_1,1} + (1-t)c_{\mathbb{v}_1,2} + (1-t)c_{\mathbb{v}_1,3} \\
&= t(c_{\mathbb{v}_2,1} + c_{\mathbb{y}_2,2} + c_{\mathbb{v}_2,3}) + (1-t)(c_{\mathbb{v}_1,1} + c_{\mathbb{v}_1,2} + c_{\mathbb{v}_1,3}) \\
&= t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

hvor likheten mellom de to siste linjene følger av at $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2 \in \mathcal{T}$.

Siden $t \in [0,1]$ holder, har vi at $t, (1-t) \geq 0$, slik at

$$c_{\mathbb{v}_i,1}, c_{\mathbb{v}_i,2}, c_{\mathbb{v}_i,3} \geq 0$$

medfører at

$$tc_{\mathbb{v}_2,1}, tc_{\mathbb{v}_2,2}, tc_{\mathbb{v}_2,3} \geq 0$$

og

$$(1-t)c_{\mathbb{v}_1,1}, (1-t)c_{\mathbb{v}_1,2}, (1-t)c_{\mathbb{v}_1,3} \geq 0,$$

som igjen medfører at

$$c_{\mathbb{y},i} = tc_{\mathbb{v}_2,i} + (1-t)c_{\mathbb{v}_1,i} \geq 0.$$

Det følger at $\mathcal{T}$ inneholder alle punktene på linjestykkene mellom $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2$ og $\mathbb{u}_3$. Ved å velge et punkt på linjestykket mellom $\mathbb{u}_i$ og $\mathbb{u}_j$ for så å betrakte linjestykket mellom dette punktet og $\mathbb{u}_k$, hvor i, j og k er alle forskjellige og $i, j, k \in \{1,2,3\}$, finner vi at $\mathcal{T}$ inneholder alle punktene på innsiden av trekanten definert av $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2$ og $\mathbb{u}_3$ betraktet som punkter. Merk også at enhver trekant har samme egenskap som $\mathcal{T}$ har, nemlig at de er mengder slik at for vilkårlige valg av to punkter, vil mengdene inneholde alle punktene på linjestykket mellom de to punktene.

Vi skal nå vise at $\mathcal{T}$ ikke inneholder mer enn punktene inneholdt i trekanten definert av $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2$ og $\mathbb{u}_3$. La derfor $\mathbb{x}$ være et punkt utenfor trekanten, og la $\mathbb{a} = 1/3\mathbb{u}_1 + 1/3\mathbb{u}_2 + 1/3\mathbb{u}_3$. Merk at $\mathbb{a}$ er inneholdt i trekanten siden det, for eksempel, ligger på linjesegmentent mellom $\frac{1}{2}\mathbb{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbb{u}_2$ og $\mathbb{u}_3$, punkter som er begge inneholdt i trekanten. Observer i denne sammenhengen at enhver trekant har samme egenskap som $\mathcal{T}$ har, nemlig at de er mengder slik at for vilkårlige valg av to punkter, vil mengdene inneholde alle punktene på linjestykket mellom de to gitte punktene.

Linjestykket utspent av $\mathbb{x}$ og $\mathbb{a}$, altså $t(\mathbb{x} - \mathbb{a}) + \mathbb{a}$ for $t \in [0,1]$, vil da møte linjestykket utspent av $\mathbb{u}_i$ og $\mathbb{u}_j$ for noen i og j i $\{1,2,3\}$ i et punkt. La dette punktet være $\mathbb{x}'$. Merk at

$$\mathbb{x}' = t'(\mathbb{x} - \mathbb{a}) + \mathbb{a}$$

for en $t' \in (0,1)$. Som en konsekvens har man at $\mathbb{x} = \frac{1}{t'}\mathbb{x}' + \mathbb{a} - \frac{1}{t'}\mathbb{a}$. Siden $\mathbb{x}'$ ligger på linjestykket mellom $\mathbb{u}_i$ og $\mathbb{u}_j$, følger det at $\mathbb{x}' = c_{\mathbb{x}',i}\mathbb{u}_i + c_{\mathbb{x}',j}\mathbb{u}_j$ for $c_{\mathbb{x}',i} + c_{\mathbb{x}',j} = 1$, altså at $c_{\mathbb{x}',k} = 0$, hvor i, j, k er alle forskjellige. Observer nå at dette medfører at

$$c_{\mathbb{x},k} = (1 - \frac{1}{t'})c_{\mathbb{a},k} < 0,$$

hvor ulikheten følger av at $\frac{1}{t'} > 1$ siden $t' \in (0,1)$. Med andre ord ligger ikke $\mathbb{x}$ i $\mathcal{T}$, hvilket var det som gjenstod å vise.

$\boxed{3}$ Gjør oppgave 1, 2, 4, 7 (a) og (b), 8, 9, og 27 på side 18-21.

1) $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = -2,4 + 2,4 = 0$, $\mathbb{u} \cdot \mathbb{w} = -0,6 + 1,6 = 1$, $\mathbb{u} \cdot (\mathbb{v} + \mathbb{w}) = \mathbb{u} \cdot \mathbb{v} + \mathbb{u} \cdot \mathbb{w} = 0 + 1 = 1$, $\mathbb{w} + \mathbb{v} = 4 + 6 = 10 = \mathbb{v} \cdot \mathbb{w}$.

2) $\|\mathbb{u}\| = 1$, $\|\mathbb{v}\| = 5$ og $\|\mathbb{w}\| = \sqrt{5}$, slik at $|\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}| = 0 < 1\cdot 5$ og $|\mathbb{v}\cdot\mathbb{w}| = 10 < 5\sqrt{5}$, som altså bekrefter Schwarz ulikheten.

4) (a) $\mathbb{v}\cdot(-\mathbb{u}) = -1$.

(b) $(\mathbb{v}+\mathbb{w})\cdot(\mathbb{v}-\mathbb{w}) = \mathbb{v}\cdot\mathbb{v}+\mathbb{w}\cdot\mathbb{v}-\mathbb{v}\cdot\mathbb{w}-\mathbb{w}\cdot\mathbb{w} = 1+c-c-1 = 0$.

(c) $(\mathbb{v}-2\mathbb{w})\cdot(\mathbb{v}+2\mathbb{w}) = \mathbb{v}\cdot\mathbb{v}-4\mathbb{w}\cdot\mathbb{w} = 1-4 = 3$.

7) (a)

$$\cos\theta = \frac{\mathbb{v}\cdot\mathbb{w}}{\|\mathbb{v}\|\|\mathbb{w}\|} = \frac{1}{2} \implies \theta = \pi/3.$$

(b)

$$\cos\theta = 0 \implies \theta = \pi/2.$$

8) (a) Usant: $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$ kan være vilkårlige vektorer i planet ortogonale med $\mathbb{u}$.

(b) Sant: $\mathbb{u}\cdot(\mathbb{v}+2\mathbb{w}) = \mathbb{u}\cdot\mathbb{u}+2\mathbb{u}\cdot\mathbb{w} = 0$.

(c) Sant: $\|\mathbb{u}-\mathbb{v}\|^2 = (\mathbb{u}-\mathbb{v})\cdot(\mathbb{u}-\mathbb{v})$ blir likt $\mathbb{u}\cdot\mathbb{u}+\mathbb{v}\cdot\mathbb{v} = 2$ såfremt $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = \mathbb{v}\cdot\mathbb{u} = 0$.

9) Hvis $v_2w_2/v_1w_1 = -1$, så får man $v_2w_2 = -v_1w_1$, eller $v_1w_1 + v_2w_2 = \mathbb{v}\cdot\mathbb{w} = 0$, som er ekvivalent med at de er ortogonale, som var det som skulle vises.

27) Observer at summen av de to følgende linjene er $2\|\mathbb{v}\|^2 + 2\|\mathbb{w}\|^2$:

$$\|\mathbb{v}+\mathbb{w}\|^2 = (\mathbb{v}+\mathbb{w})\cdot(\mathbb{v}+\mathbb{w}) = \mathbb{v}\cdot\mathbb{v}+\mathbb{v}\cdot\mathbb{w}+\mathbb{w}\cdot\mathbb{v}+\mathbb{w}\cdot\mathbb{w}.$$

$$\|\mathbb{v}-\mathbb{w}\|^2 = (\mathbb{v}-\mathbb{w})\cdot(\mathbb{v}-\mathbb{w}) = \mathbb{v}\cdot\mathbb{v}-\mathbb{v}\cdot\mathbb{w}-\mathbb{w}\cdot\mathbb{v}+\mathbb{w}\cdot\mathbb{w}.$$

$\boxed{4}$ Utfordring:

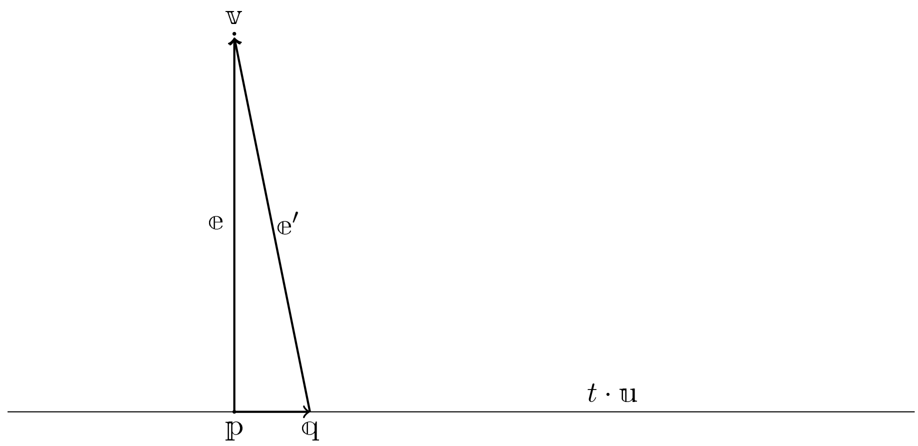
1) La det være gitt $\mathbb{u} = (1,2)$ i $\mathbb{R}^2$. Beskriv mengden $\mathcal{L}$ i $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathcal{L} = \{\mathbb{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbb{u}\cdot\mathbb{x} = 3\}.$$

La $\mathbb{x} = (x_1, x_2)$. Vi regner og finner at $\mathbb{u}\cdot\mathbb{x} = 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 = 3$, som vil si at $x_1 = 3 - 2x_2$. Rydder vi litt, finner vi at vi kan skrive $\mathbb{x} = (3,0) + (-2,1)x$, hvor vi har utskiftningen $x := x_2$. Med andre ord består $\mathcal{L}$ av $\mathbb{x} = (3,0) + (-2,1)x$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og mengden er altså en linje.

2) La det være gitt to vektorer $\mathbb{u} = (1, 1, 0)$ og $\mathbb{v} = (2, 0, 3)$ i $\mathbb{R}^3$. Linjen utspent av $\mathbb{u}$ er alle punktene i $\mathbb{R}^3$ på formen $t \cdot \mathbb{u} = (t, t, 0)$ for $t \in \mathbb{R}$. Hva er korteste avstand fra punktet $\mathbb{v}$ til linjen utspent av $\mathbb{u}$?

Vi kan begynne ved å betrakte vektorer $\mathbb{e}$ med utgangspunkt i et punkt $\mathbb{p}$ på linjen utspent av $\mathbb{u}$ og som endepunkt i $\mathbb{v}$. Gitt dataene, ser vi at $\mathbb{e} = \mathbb{v} - \mathbb{p}$. Problemet reduserer til å finne det valget av $\mathbb{p}$ som minimerer denne avstanden.



Ut fra figuren virker det som om å velge $\mathbb{p}$ slik at $\mathbb{e}$ står vinkelrett på $t \cdot \mathbb{u}$ er optimalt. Den pytagoreiske læresetningen for vektorer medfører at hvis e' ikke møter $t \cdot \mathbb{u}$ vinkelrett, så er $\|\mathbb{e}\|^2 + \|\mathbb{q} - \mathbb{p}\|^2 = \|\mathbb{e}'\|^2$, som gir $\|\mathbb{e}\|^2 \leq \|\mathbb{e}'\|^2$.

Siden $\mathbb{p}$ ligger på $t \cdot \mathbb{u}$, får vi at $\mathbb{p} = (p, p, 0)$. Vi regner så ut at

$$\mathbb{u} \cdot (\mathbb{v} - \mathbb{p}) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot p - 1 \cdot p = 0,$$

eller at $2 - 2p = 0$, slik at $p = 1$. Som konsekvens blir $\mathbb{e} = (1, -1, 3)$, og vi finner at $\|\mathbb{e}\| = \sqrt{11}$, hvilket var det som skulle vises.