TMA4245 Statistikk
Vår 2017

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 6
Løsningsskisse

Oppgave 1 Vi lar X være en bestemt pH-måling, og antar at X er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 6.8$ og varians $\sigma^2 = 0.060^2$. Sannsynligheten for at resultatet av målingen er under 6.74 er da

$$\begin{aligned} P(X < 6.74) &= P(\frac{X-6.8}{0.06} < \frac{6.74-6.8}{0.06}) \\ &= \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \\ &= 1 - 0.841 = \underline{\underline{0.159}}. \end{aligned}$$

Videre er sannsynligheten for at resultatet av målingen ligger mellom 6.74 og 6.86 lik

$$\begin{aligned} P(6.74 < X < 6.86) &= P(X < 6.86) - P(X < 6.74) \\ &= P(\frac{X-6.8}{0.06} < \frac{6.86-6.8}{0.06}) - 0.159 \\ &= \Phi(1) - 0.159 = 0.841 - 0.159 = \underline{\underline{0.682}}. \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at avviket $|X - \mu|$ overstiger 0.06 er

$$\begin{aligned} P(|X-\mu|) > 0.06) &= P(X - \mu < -0.06) + P(X - \mu > 0.06) \\ &= P(\frac{X-\mu}{0.06} < -1) + P(\frac{X-\mu}{0.06} > 1) \\ &= \Phi(-1) + 1 - \Phi(1) = 2(1-\Phi(1)) = \underline{\underline{0.318}}. \end{aligned}$$

Den samme sannsynligheten kan også regnes ut som følger:

$$\begin{aligned} P(|X-\mu|) > 0.06) &= 1 - P(6.74 < X < 6.86) \\ &= 1 - 0.682 = \underline{\underline{0.318}}. \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Fra oppgaveteksten har vi den betingede sannsynlighetsfordelingen til T gitt λ,

$$f_{T|\lambda}(t|\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

og sannsynlighetsfordelingen til λ,

$$f_\lambda(\lambda) = \theta e^{-\lambda\theta}, \quad \lambda \geq 0,$$

hvor θ inngår som en parameter. Simultanfordelingen til T og λ er da gitt ved

$$f_{T,\lambda}(t,\lambda) = f_{T|\lambda}(t|\lambda)\cdot f_\lambda(\lambda) = \lambda\theta e^{-\lambda(t+\theta)},$$

og marginalfordelingen til T kan finnes ved å integrere ut "mellomleddet" λ,

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \int_0^\infty f_{T,\lambda}(t,\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \lambda\theta e^{-\lambda(t+\theta)}d\lambda \\
&= \theta\left(\left[\lambda\left(-\frac{1}{t+\theta}\right)e^{-\lambda(t+\theta)}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{t+\theta}e^{-\lambda(t+\theta)}d\lambda\right) \\
&= \theta\left(0 - 0 + \left[\frac{1}{(t+\theta)^2}e^{-\lambda(t+\theta)}\right]_0^\infty\right) \\
&= \theta\left(0 + \frac{1}{(t+\theta)^2}\right) = \frac{\theta}{(t+\theta)^2}.
\end{aligned}$$

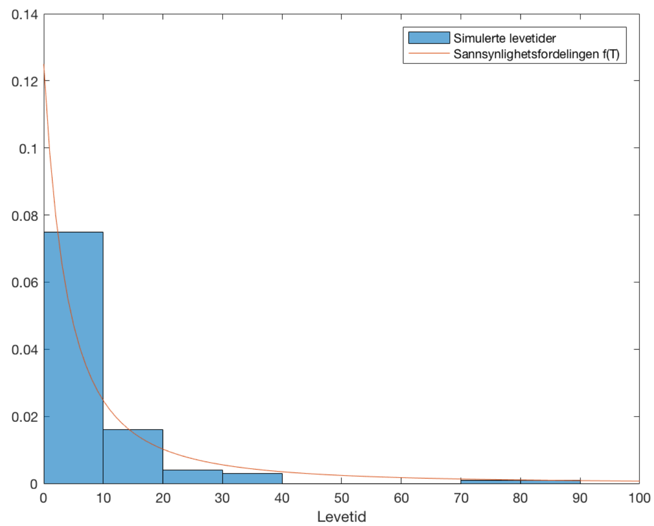
b) Simuleringen kan gjennomføres i Matlab på følgende måte:

```
theta=8 #Konstant verdi.

N=100 #Vi er interessert i levetiden til 100 komponenter.

for i=1:N

    #Simuler parameterverdien lambda
    #fra en eksponensialfordeling med parameterverdi theta:
    lambda=exprnd(theta);

    #Simuler levetiden til en
    #komponent med parameterverdi lambda.
    #Denne er eksponensialfordelt gitt lambda.
    t(i)=exprnd(lambda);

end
```

c) Histogram og plott av sannsynlighetstettheten lages i Matlab:

```
figure
histogram(t,'Normalization','pdf')
hold on

T=linspace(0,100,100)
plot(T,theta./(T+theta).^2)
```

Resultatet er vist i figuren nedenfor. Vi ser at den teoretiske levetiden stemmer ganske bra med de simulerte verdiene. Merk at histogrammet du oppnår kan se noe annerledes ut enn det du ser her. Dette skyldes at man vil ende opp med forskjellige levetider fra en simulering til en annen.



Oppgave 3 For eksponentialfordelingen har vi

$$\begin{aligned}
P(X \geq t+s|X>s) &= \frac{P(X \geq t+s \cap X>s)}{P(X>s)} \\
&= \frac{P(X \geq t+s)}{P(X>s)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} \\
&= e^{-\lambda t} = \underline{\underline{P(X \geq t)}}.
\end{aligned}$$

For den geometriske fordelingen har vi, for en vilkårlig $a \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$P(X \geq a) = P(\text{Ingen suksesser på de første } a-1 \text{ forsøkene}) = (1-p)^{a-1},$$

og vi får dermed

$$\begin{aligned}
P(X \geq t+s|X>s) &= \frac{P(X \geq t+s \cap X>s)}{P(X>s)} \\
&= \frac{P(X \geq t+s)}{P(X>s)} \\
&= \frac{P(X \geq t+s)}{P(X \geq s+1)} \\
&= \frac{(1-p)^{(t+s)-1}}{(1-p)^{(s+1)-1}} \\
&= \frac{(1-p)^{t+s-1}}{(1-p)^{s}} \\
&= (1-p)^{t-1} = \underline{\underline{P(X \geq t)}}.
\end{aligned}$$