MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 8

Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript s, bør gjøre b, og kan gjøre k.

Gi beskjed til øvingslærer ved å sende mail til mads.sandoy@ntnu.no.

$\boxed{1}$ Gjør oppgave $7^s, 12^s$ og 18^b på **side 158-163.**

7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & b_1 \\ 3 & 8 & 2 & b_2 \\ 2 & 4 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & -2 & -2 & b_3 - 2b_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 + 4b_1 \end{pmatrix}.$$

12) (a) Hvis $A\mathbb{x}_1 = \mathbb{b}$ og $A\mathbb{x}_2 = \mathbb{b}$ får man at både $\mathbb{x}_1 - \mathbb{x}_2$ og $\mathbb{x} =$ løser $A\mathbb{x} =$.

(b) $A(2\mathbb{x}_1 - 2\mathbb{x}_2) =$, $A(2\mathbb{x}_1 - \mathbb{x}_2) = \mathbb{b}$.

18) Rangen er 2; rangen er 3 såfremt ikke $q = 2$, i hvilket tilfelle rangen er 2. Merk at den transponerte har samme rang.

$\boxed{2}$ Gjør oppgave $15^s, 19^s, 22^b$ og 26^b på **side 175-180.**

15) De n uavhengige vektorene spenner et rom av dimensjon n. De er en basis for det rommet. Hvis de er kolonnene av A, er m ikke mindre enn n $(m \geq n)$. Invertibel hvis $m = n$.

19) n uavhengige kolonner gir at rangen er n. Kolonnene spenner $\mathbb{R}^m$ gir at rangen er m. Kolonnene er en basis for $\mathbb{R}^m$ gir at rangen er $m = n$. Rangen teller antallet uavhengige kolonner.

22) (a) Sann. (b) Usann siden det kan være tilfellet at basisvektorene for $\mathbb{R}^6$ ikke er i S.

26) (a) Basis for alle diagonale (3×3)-matriser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) For å få en basis for de symmetriske matrisene legger vi til de følgende:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Skjevsymmetriske matriser:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a^s) Finn den reduserte trappeformen til A.

Løsning:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & -10 & 5 \\ 0 & 7 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 10/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/7 & -4/7 \\ 0 & 1 & 10/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b^s) Bestem rangen til A. Finn en basis for radrommet og en basis for kolonneromet til A.

Løsning: Rangen til A er lik antall ikke-null rader i den reduserte trappeformen, som er her lik 2.

En basis for radrommet er gitt ved radene i den reduserte trappeformen, hvilket her blir $(1, 0, 1/7, -4/7)^t$ og $(0, 1, 10/7, -5/7)^t$.

En basis for kolonnerommet gis av kolonnene av **matrisen** som tilsvarer de ikke-frie variablene (og ikke av den reduserte trappeformen), hvilket her blir $(3, 1, 2)^t$ og $(-1, 2, 3)^t$.

4 La $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$ være en mengde med ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^n$.

a^s) La A være en $t \times n$-matrise med $\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_{t-1}$ og $\mathbb{b}_t$ som rad nummer 1, $2, \ldots, t-1$ og t, henholdsvis. Begrunn hvorfor nullrommet til A er alle vektorene i $\mathbb{R}^n$ som står ortogonalt på alle radene i A, dvs. $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$.

Løsning: Vi vet fra definisjonen av matrisemultiplikasjon at $A\mathbb{u}$ gis ved vektoren som har hver komponent lik prikkproduktet av $\mathbb{u}$ med den tilsvarende raden av A. Fra dette følger resultatet umiddelbart.

b^s) La nå $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$ være en ortonormal mengde av vektorer i $\mathbb{R}^n$ for $t < n$. Vi kaller en mengde av vektorer **ortonormal** hvis alle vektorene i mengden er parvis ortogonale og hver av de har norm/lengde lik 1.

(i) Vis at $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$ er lineært uavhengig.

Løsning: Vi antar at $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$ ikke er lineært uavhengig for å få en kontradiksjon. La $\mathbb{b}_j = \Sigma_{i\neq j} c_i \mathbb{b}_i$. Med andre ord antar vi at vi har en relasjon av lineær avhengighet. Man får da $\|\mathbb{b}_j\|^2 = \mathbb{b}_j \cdot \Sigma_{i\neq j} c_i \mathbb{b}_i = 0$ gitt at $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$ skal være ortonormal. Med andre ord har vi en kontradiksjon, slik at resultatet må holde.

(ii) La A være som i (a). Bestem rangen og nulliteten til A.

Løsning: Rangen til en matrise er lik antallet ikke-null rader i den reduserte trappeformen til matrisen. Siden radrommet til A har en basis med t elementer, vil det måtte være t ikke-null rader i den reduserte trappeformen, slik at rangen til A er t. Fra side 184 i læreboken vet vi at $\dim N(A) + \dim R(A) = n = \dim \mathbb{R}^n$, slik at nulliteten til A er lik $n - t$.

(iii) Vis at $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$ kan utvides til en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

Løsning: Dette er Gram-Schmidt. Hvis $\mathbb{u} \in \mathbb{R}^n$ ikke er i det lineære spennet til $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$, kan vi betrakte $\mathbb{b}'_{t+1} = \mathbb{u} - \Sigma_{1\leq i\leq t} \frac{\mathbb{b}_i \cdot \mathbb{u}}{\|\mathbb{b}_i\|^2}$. La $\mathbb{b}_{t+1} = \frac{\mathbb{b}'_{t+1}}{\|\mathbb{b}'_{t+1}\|}$. Ved å gjenta argumentet i (a), så kan vi se at $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t, \mathbb{b}_{t+1}\}$ er en lineært uavhengig mende, og den er åpenbart ortonormal.

5 La A være en $m \times n$-matrise og B en $n \times m$-matrise slik at $AB = I_m$. Avgjør om de følgende påstandene er sanne. Hvis de er sanne, gi et bevis. Hvis ikke, gi et moteksempel.

a^s) Hvis C er en $n \times m$-matrise slik at $CA = I_n$ så er $C = B$.

Løsning: $I_n \cdot B = CA \cdot B = C \cdot AB = C \cdot I_n$.

b^s) Hvis C er en $n \times m$-matrise slik at $AC = I_m$ så er $C = B$.

Løsning:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Man kan se at $AB = AC$ men at $B \neq C$ for $c \neq 0$.

6 **Utfordring:**

a) La V være et vektorrom med $\dim V = n$. La $W \subseteq V$ være et underrom med $\dim W = n$. Vis at $W = V$.

Løsning: Vi viser et kontradiksjonsbevis. Siden både V og W har dimension n, må de per definisjonen av dimensjon ha henholdsvis basiser $\mathcal{B}_V$ og $\mathcal{B}_W$ bestående av n vektorer. La $\mathbb{v} \in \mathcal{B}_V$. Vi antar at $\mathbb{v}$ ikke er i det lineære spennet av $\mathcal{B}_W$. Med denne antagelsen får vi at $\mathcal{B}_W \cup \{\mathbb{v}\}$ består av $n+1$ lineært uavhengige vektorer siden $\mathcal{B}_W$ er en basis.

Vi kan fortsette å legge til elementer fra $\mathcal{B}_V$ til vi har en basis av V. Men denne basisen kommer til å ha $n + k > n$ elementer for en $k > 0$, noe som ikke kan holde siden alle basiser av et vektorrom har like antall elementer. Se for eksempel det siste resultatet på side 170 i læreboken. Med andre ord har vi en kontradiksjon, vår antagelse kan ikke holde, og det følger at ethvert element i $\mathcal{B}_V$ er i det lineære spennet av $\mathcal{B}_W$. Dette gir at $V \subseteq W$, slik at $V = W$.

b) La A være en $m \times n$-matrise. Vis at alle $\mathbb{x}$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrives entydig som

$$\mathbb{x} = \mathbb{x}_{\text{null}} + \mathbb{x}_{\text{rad}},$$

der $\mathbb{x}_{\text{null}} \in N(A)$ og $\mathbb{x}_{\text{rad}} \in R(A)$.

Løsning: Vi har lyst til å bruke forrige oppgave til å løse denne. Fra side 184 i læreboken vet vi at $\dim N(A) + \dim R(A) = n = \dim \mathbb{R}^n$. Merk at vi har observasjon (*): Gitt $\mathbb{v} \in N(A)$ og $\mathbb{w} \in R(A)$, så vet vi at $\mathbb{v} \cdot \mathbb{w} = 0$. Man kan se dette ved å tenke på hva man gjør når man multipliserer matriser med vektorer.

Vi velger nå basiser $\mathcal{B}_{N(A)} = \{\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_s\}$ og $\mathcal{B}_{R(A)} = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_t\}$ av henholdsvis $N(A)$ og $R(A)$. Man kan se at at $\mathbb{u}_i$ ikke kan være i det lineaære spennet av $\mathcal{B}_{R(A)}$: Anta det motsatt, nemlig $\mathbb{u}_i = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_t\mathbb{v}_t$. Da får man $\|\mathbb{u}_i\|^2 \neq 0 = c_1\mathbb{u}_i \cdot \mathbb{v}_1 + \cdots + c_t\mathbb{u}_i \cdot \mathbb{v}_t$ fra (*). Merk at $\|\mathbb{u}\| = 0$ kun når $\mathbb{u} = 0$ samtidig som $\mathbb{u}_i \neq 0$ må holde siden $\mathcal{B}_{N(A)}$ skal være en basis. (På samme måte kan vi vise at $\mathbb{v}_i$ ikke kan være i det lineære spennet av $\mathcal{B}_{N(A)}$.)

Vi kan legge til elementer fra $\mathcal{B}_{R(A)}$ inntil $\mathcal{B}_{N(A)}$ til vi får en basis. For å se dette, merk at hvis vi får et forhold av lineær avhengighet, så kan vi bruke (*) og få at et element $\mathcal{B}_{R(A)}$ må være i det lineære spennet til $\mathcal{B}_{N(A)}$, noe vi nettopp viste ikke var mulig. Det følger at $\mathcal{B}_{N(A)} \cup \mathcal{B}_{R(A)}$ har n elementer. Fra forrige oppgave må dette være en basis for $\mathbb{R}^n$. Ethvert element i et vektorrom kan uttrykkes på en unik måte som en lineær kombinasjon av basisvektorerenee i en gitt basis, slik at det vi har vist er ekivalent med det som skulle vises.