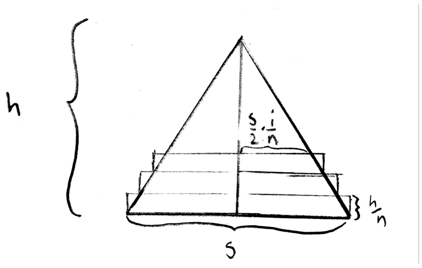
MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 8

$\boxed{8.1.1}$ Vi estimerer først volumet utenfra. Dette er nesten nøyaktig likt kjegleeksempelet side 399 i boka.



Hvert "lag" har høyde $\frac{h}{n}$, og lag i har lengde (og bredde) $2\cdot\frac{s}{2}\frac{i}{n} = \frac{si}{n}$, hvor h er høyden til pyramiden og s er sidelengden til pyramiden på bunnen. Volumet til lag i er da $V_i = \frac{h}{n}(\frac{si}{n})^2 = \frac{hs^2i^2}{n^3}$. Vi får følgende estimat for volumet utenfra

$$V_{ut} = \sum_{i=1}^{n}\frac{hs^2i^2}{n^3} = \frac{hs^2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{hs^2}{n^3}(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6})$$

Tilsvarende er som i kjegleeksempelet får vi følgende estimat for volumet innenfra

$$V_{inn} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{hs^2i^2}{n^3} = \frac{hs^2}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{hs^2}{n^3}(\frac{(n-1)^3}{3}+\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{n-1}{6})$$

Merk at $V_{inn} < V < V_{ut}$, hvor V er det faktiske volumet til pyramiden. Siden $\lim_{n\to\infty} V_{inn} = \lim_{n\to\infty} V_{ut} = \frac{hs^2}{3}$ konkluderer vi med at $V = \frac{hs^2}{3}$.

$\boxed{8.2.1}$ $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x) = \frac{1}{x}$. Vi skal bestemme $O(\Pi)$ og $N(\Pi)$ med $\Pi = \{1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2\}$.

$$\begin{aligned} O(\Pi) &= \frac{1}{5}(1+\frac{1}{\frac{6}{5}}+\frac{1}{\frac{7}{5}}+\frac{1}{\frac{8}{5}}+\frac{1}{\frac{9}{5}}) = \frac{1}{5}(1+\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\frac{5}{8}+\frac{5}{9}) \\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9} \approx 0.746 \end{aligned}$$

$$N(\Pi) = \frac{1}{5}(\frac{1}{\frac{6}{5}} + \frac{1}{\frac{7}{5}} + \frac{1}{\frac{8}{5}} + \frac{1}{\frac{9}{5}} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$
$$\approx 0.646$$

8.2.3 Skal bestemme $O(\Pi)$ og $N(\Pi)$ for $f(x) = \sin x$ på $[0, \pi]$ med partisjonen $\Pi = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$. Merk at vi har symmetri om $x = \frac{\pi}{2}$, altså at $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Derfor får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}O(\Pi) &= \frac{\pi}{6}\sin(\frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{12}\sin(\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{12}\sin(\frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}\sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{\pi}{12}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2)\end{aligned}$$

Så

$$O(\Pi) = \frac{\pi}{6}(3 + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2})$$

Helt tilsvarende

$$\frac{1}{2}N(\Pi) = \frac{\pi}{6}\cdot 0 + \frac{\pi}{12}\sin(\frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{12}\sin(\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{6}\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{12}(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3})$$

Så

$$N(\Pi) = \frac{\pi}{6}(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3})$$

Nøtt: 8.2.11

i) Siden ethvert intervall inneholder irrasjonale tall vil $N(\Pi) = 0$ uansett hvordan partisjonen Π velges.

ii) La $\varepsilon > 0$. Ved bemerkningen før Setning 8.2.3 må vi vise at vi kan finne en øvre trappesum slik at $N(\Pi) < \varepsilon$.

Observer først at for alle N har vi bare endelig mange x slik at $f(x) > \frac{1}{N}$: q må da være mindre enn N, dvs. et av tallene $1, 2, 3, ..., N-1$. For hvert av disse fins det endelig mange p (siden $p \leq q$). Altså finnes bare et endelig antall $x \in [0, 1]$ med $f(x) > \frac{1}{N}$.

Vi kan nå danne en øvre trappesum med vilkårlig smale rektangler om disse endelig mange punktene, areal til sammen så lite vi måtte ønske, for eksempel $< \frac{1}{N}$. Resten av rektanglene har areal $< \frac{1}{N} \cdot 1$ (siden 1 er lengden på intervallet), og $O(\Pi) < 2 \cdot \frac{1}{N}$. Ønsker vi $O(\Pi) < \varepsilon$ velger vi da N slik at $\frac{1}{N} < \varepsilon/2$. Dette viser at f er integrerbar og at

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

8.2.16 a) Hvis $c = 0$ er dette trivielt. Hvis $c \neq 0$ merker vi oss at en trappesum for $cf(x)$ egentlig bare er c ganger en trappesum for $f(x)$.

b) Under antakelse om at f og g er integrerbare funksjoner på $[a,b]$ vet vi at

$$\inf_{\Pi} O(\Pi|f) = \sup_{\Pi} N(\Pi|f)$$

og

$$\inf_{\Pi} O(\Pi|g) = \sup_{\Pi} N(\Pi|g)$$

Vi må vise at

$$\inf_{\Pi} O(\Pi|f+g) = \sup_{\Pi} N(\Pi|f+g) \tag{1}$$

Først merker vi oss at $\inf_{\Pi} O(\Pi|f+g) \geq \sup_{\Pi} N(\Pi|f+g)$ alltid holder.
Vi ser også at $O(\Pi|f+g) \leq O(\Pi|f) + O(\Pi|g)$ for hver partisjon Π. Om dette er uklart tegn gjerne en figur. Videre

$$\begin{aligned}
\inf_{\Pi} O(\Pi|f+g) &\leq \inf_{\Pi}(O(\Pi|f) + O(\Pi|g)) \\
&= \inf_{\Pi} O(\Pi|f) + \inf_{\Pi} O(\Pi|g) \\
&= \sup_{\Pi} N(\Pi|f) + \sup_{\Pi} N(\Pi|g) \\
&= \sup_{\Pi} N(\Pi|f+g)
\end{aligned}$$

hvor overgangene fra første til andre linje og fra tredje til fjerde linje holder ved Oppgave 2.3.6, og overgangen fra andre til tredje linje holder per antakelse om integrerbarhet av f og g. Vi har vist ulikhet begge veier, så Likning 1 holder. Det følger at $f+g$ er integrerbar på $[a,b]$.

$\boxed{\text{8.2.17}}$ Vi ønsker å bruke Setning 8.2.3 som sier at monotone funksjoner er integrerbare. Betrakt derfor partisjoner av $[a,b]$ som inneholder punktene $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, og la maskevidden gå mot null. Da kan vi konkludere med at $\sup_{\Pi} N(\Pi|f) = \inf_{\Pi} O(\Pi|f)$ (med Π partisjon av $[a,b]$) siden dette er tilfelle for hvert av intervallene (x_{i-1}, x_i), $i = 1, ..., n$, ettersom f er monoton på disse intervallene. Vi konkluderer med at f er integrerbar på $[a,b]$.

Bemerkning 1: Merk at det er viktig i argumentet over at $x_0, x_1, ..., x_n$ er punkter i partisjonene vi betrakter slik at vi kan bruke at $\sup_{\Pi_i} N(\Pi_i|f) = \inf_{\Pi_i} O(\Pi_i|f)$, hvor Π_i er en partisjon av (x_{i-1}, x_i). Det er da vi vet vi kan bruke at monotone funksjoner er integrerbare.

Bemerkning 2: Et alternativt bevis for Oppgave 8.2.17 som bruker at summen av integrerbare funksjoner igjen er integrerbar (som vi viste i Oppgave 8.2.16 b)), går som følger:

Definer funksjonene $f_i \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis} \quad x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0 & \text{hvis} \quad x \in [a,b] \setminus [x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

for $i = 1, 2, ..., n$. Ved Oppgave 8.2.16 er en sum av integrerbare funksjoner igjen integrerbar, så det holder nå å vise at f_i er integrerbar for alle $i = 1, 2, ..., n$. Men f_i er en monoton funksjon på (x_{i-1}, x_i) som er utvidet til å være lik 0 utenfor dette intervallet. Vi kan derfor behandle f_i som en monoton funksjon (øvre og nedre trappesummer blir identisk lik null utenfor intervallet). Monotone funksjoner er integrerbare ved Setning 8.2.3, så vi er ferdig.

Bemerkning 3: Enda en måte å løse Oppgave 8.2.17 på er å bruke Setning 8.3.1 (som strengt tatt kommer etter oppgaven hvis man følger boka), og at monotone funksjoner er integrerbare.

8.3.1 a)

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

b)

$$\int_0^2 2x^3 dx = 2\int_0^2 x^3 dx = 2[\frac{1}{4}x^4]_0^2 = 2\frac{1}{4}(2^4 - 0^2) = 8$$

c)

$$\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - (-e^0) = 1 - e^{-1}$$

d)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \arcsin(\frac{1}{2}) - \arcsin(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}$$

e)

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

f)

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_1^{\sqrt{3}} = \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

8.3.5

a) Ved analysens fundamentalteorem er f en antiderivert til e^{-t^2} på $[0, x]$. Har da at $f'(x) = e^{-x^2}$.

b) Ved analysens fundamentalteorem er f en antiderivert til $\frac{\sin t}{t}$ på $[1, x]$. Det følger at $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$.

c) Ved analysens fundamentalteorem er f en antiderivert til $\arctan(t^2)$ på $[1, x]$. Det følger at $f'(x) = \arctan(x^2)$.