Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript s, bør gjøre b, og kan gjøre k.

1 Gjør oppgave $5^s, 6^s, 10^b$ og 12^b på **side 345-349.**

5) $\lambda = 0, 4, -2$; enhetsvektorene er $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$ og $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$ og $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$.

6) $\lambda = 10$ og -5 i $\Lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ må normaliseres til enhetsvektorer i $Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

10) Hvis $A^3 = 0$ så er all $\lambda^3 = 0$ slik at alle $\lambda = 0$ slik som med $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hvis A er symmetrisk så følger det at $A^3 = Q\Lambda^3 Q^T = 0$ krever at $\Lambda = 0$. Den eneste symetriske A er derfor $Q0Q^T = 0$, altså nullmatrisen.

12) Hvis $\mathbb{x}$ er ikke reell, så følger det at $\lambda = \frac{1}{\mathbb{x}^T\mathbb{x}}\mathbb{x}^T A\mathbb{x}$ ikke er alltid reell. Man kan ikke anta reelle egenvektorer.

2 Anse denne oppgaven som merket s.

a) La $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A.

b) La $Q(x, y) = 3x^2 + 8xy + 3y^2$.

(i) Skriv $Q(x, y) = \mathbb{x}^T B\mathbb{x}$ for en symmetrisk 2×2-matrise B og $\mathbb{x} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$.

(ii) Finn en ortogonal matrise P slik at $P^T BP$ er en diagonalmatrise.

(iii) Bestem hvilket kjeglesnitt ligningen $3x^2 + 8xy + 3y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 8 = 0$ beskriver (ellipse, hyperbel eller parabel), og lag en skisse i xy-planet.

Løsning: Se LF for oppgave 3 på eksamenen høsten 2015.

$\boxed{3}$ Anse denne oppgaven som merket s.

Et kjeglesnitt klassifiseres i et degenerert kjeglesnitt (et punkt, en linje eller to linjer), en ellipse, en hyperbel eller en parabel. Betrakt kjeglesnittet gitt ved følgende likning

$$-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy + \frac{1}{2}y^2 + (\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 0.$$

Bestem dette kjeglesnittet ved først å overføre den kvadratiske formen

$$-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy + \frac{1}{2}y^2$$

til standard form uten blandingsledd xy ved bruk av en symmetrisk matrise A og en ortogonal matrise P. Oppgi ditt valg av A og P.

Løsning: Se LF for oppgave 5 eksamenen høsten 2012.

$\boxed{4}$ Gjør oppgave 3^b og 12^b på **side 407-410.**

3) (d) er ikke lineær.

12) $T(\mathbb{v}) = (4,4)$; $(2,2)$;$(2,2)$; hvis $\mathbb{v} = (a,b) = b(1,1) + \frac{a-b}{2}(2,0)$ følger det at $T(\mathbb{v}) = b(2,2) + (0,0)$.

$\boxed{5}$ Gjør oppgave $5^b, 6^b, 17^b$ og 26^k på **side 418-420.**

5) $T(\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2 + \mathbb{v}_3) = 2\mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2 + 2\mathbb{w}_3$; A ganger $(1,1,1)$ gir $(2,1,2)$.

6) $\mathbb{v} = c(\mathbb{v}_2 - \mathbb{v}_3)$ gir $T(\mathbb{v}) =$; nullrommet er $(0,c,-c)$; løsningene er $(1,0,0) + (0,c,-c)$.

17) Å permutere/endre rekkefølgen av basisvektorene gjøres av en permutasjonsmatise. Å forandre lengden av basisvektorene gjøres av en positiv diagonal matrise.

26) Matrisen for $T(\mathbb{v}_i) = \lambda \mathbb{v}_i$ er $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

$\boxed{6}$ Gjør oppgave $1^s, 2^s, 3^b, 6^b, 15^s, 16^k$ og 17^b på **side 436-437.**

1) (a)(b)(c) har summer $4, -2+2i, 2\cos\theta$ og produkter $5, -2i, 1$. Merk at $(e^{i\theta})(e^{-i\theta}) = 1$.

2) I polar form er disse $\sqrt{5}e^{i\theta}, 5e^{2i\theta}, \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-i\theta}, \sqrt{5}$.

3) Absoluttverdiene er $r = 10, 100, \frac{1}{10}$, og 100. Vinklene er $\theta, 2\theta, -\theta$ og $-\theta$.

6) $\frac{1}{z}$ har absoluttverdier $\frac{1}{r}$ og vinkel $-\theta$. $\frac{1}{r}e^{-i\theta} \cdot re^{i\theta} = 1$.

15) (a) $2e^{i\pi/3}, 4e^{2i\pi/3}$; (b) $e^{2i\theta}, e^{4i\theta}$; (c) $7e^{3\pi i/2}, 49e^{3\pi i}$ $(= -49)$; (d) $\sqrt{50}e^{-\pi i/4}, 50e^{-\pi i/2}$.

16) $r = 1$, vinkel $\frac{\pi}{2} - \theta$; multipliser med $e^{i\theta}$ for å få $e^{i\pi/2} = i$.

17) $a + ib = 1,\ i,\ -1,\ -i,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$. Roten $\bar{w} = w^{-1} = e^{-2\pi i/8}$ er $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{7}$ Anse denne oppgaven som merket s.

Finn alle komplekse tall z med

$$z^4 = 8 + 8\sqrt{3}i.$$

Skisser løsningene i det komplekse planet.

Løsning: Se LF for oppgave 4 eksamen høsten 2012.

$\boxed{8}$ Anse denne oppgaven som merket s.

a) Skriv det komplekse tallet $\sqrt{3} - i$ på polarform, og bruk dette til å finne alle komplekse tall z slik at

$$z^3 = \sqrt{3} - i.$$

Skisser løsningene i det komplekse planet.

b) For to reelle tall z_1 og z_2, så vil alltid $z_1 + z_2$ og $z_1 z_2$ igjen være reelle tall. Hvilke par av komplekse tall (z_1, z_2) har egenskapen at $z_1 + z_2$ og $z_1 z_2$ er reelle tall?

Løsning: Se LF for oppgave 3 eksamen høsten 2011.

Et nytt tallsystem

Vi skal fortsette med konstruksjonen av vårt nye tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. Vi må spørre oss hvilke egenskaper vi ønsker at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:

- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutativ*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.

- *additiv invers:* Gitt z, så eksisterer z' slik at
$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:

- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
- *distributive lover:*
  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *høyre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.
- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at
$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$
- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer z' slik at
$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$
- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker 2×2-matriser over de reelle tallene.

La A være en 2×2-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La
$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$
For eksempel,
$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$
og
$$Y = A - \sqrt{2} A^3$$
er elementer i S.

Nummereringen av oppgavene følger den fra tidligere øvinger. Resultater eller antagelser fra tidligere øvinger kan være nødvendig for å løse oppgavene.

Som i forrige øving, la $R = \{(a_0, a_1) \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, dvs. $R = \mathbb{R}^2$. Definer *addisjon* i R som addisjon i $\mathbb{R}^2$, dvs.
$$(a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1).$$
Definer en operasjon som vi kaller *multiplikasjon* i R ved at
$$(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) = (a_0 b_0 - a_1 b_1, a_0 b_1 + a_1 b_0).$$
La $x = (a_0, a_1)$, $y = (b_0, b_1)$ og $z = (c_0, c_1)$ i R.

(k^k) • Hva er 0_R i R?

- Hva er 1_R i R?
- La $i = (0, 1)$ i R. Vis at $i^2 = -1_R$.
- La $x = (a_0, a_1)$ være i R der $x \neq (0, 0)$. Finnes det en x' i R slik at $x \cdot x' = 1_R = x' \cdot x$?

(l^k) Hva har vi gjort i (a)–(k)?

Løsning: (k) Alle disse egenskapene følger fra sammenhengen mellom R og S etablert i forrige øving, og egenskapene vi har demonstrert for S i tidligere øvinger.

- Man se at $0_S = 0I_2 + 0A$ tilfredsstiller $0_S + a_0I_2 + a_1A = a_0I_2 + a_1A = a_0I_2 + a_1A + 0_S$ for vilkårlige elementer $a_0I_2 + a_1A \in S$, slik at sammenhengen mellom R og S gir at $0_R = (0, 0)$.
- Siden $I_2 \cdot (a_0I_2 + a_1A) = a_0I_2 + a_1A = (a_0I_2 + a_1A) \cdot I_2$, må $1_R = (1, 0)$ holde.
- Siden $i = (0, 1)$ i R svarer til A i S, og ved antagelse holder $A^2 = -I_2$ hvorav I_2 fra forrige punkt svarer til 1_R, følger det at $i^2 = -1_R$.
- Siden $x = (a_0, a_1) \neq (0, 0)$ svarer til $X = a_0I_2 + a_1A$ i S med $(a_0, a_1) \neq (0, 0)$, følger det fra forrige øving at det finnes en X' i S slik at $XX' = X'X = 1_2$. Denne X' må da svare til en x' i R slik at $x \cdot x' = x' \cdot x = 1_R$.

(l) Siden det er lett å se at R svarer til de komplekse tallene $\mathbb{C}$ om enn med litt annen form, følger det at vi har vist at de komplekse tallene kan konstrueres som et vektorrom med basis 2×2-matrisene I_2 og et valg av en 2×2-matrise A som tilfredsstiller $A^2 = -I_2$ med ytterligere struktur i form av en multiplikasjon gitt som matrisemultiplikasjon. Man kan altså se at egenskapene til multiplikasjonen og addisjonen av de komplekse tallene følger av egenskapene av de tilsvarende matriseoperasjonene begrenset til dette vektorrommet med dets multiplikative struktur.