Innleveringsoppgaver

1 La $a > 0$. Etterhvert tall $x > 0$ kan skrives som

$$x = a^{\log_a(x)}.$$

Vis at

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Hint: Regn ut $\ln(x)$!

Løsning:

Vi er gitt at

$$x = a^{\log_a(x)}.$$

La oss ta ln (natural logaritm) på begge sidene av ligning. Det gir oss:

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln(a^{\log_a(x)}) \\ &= \log_a(x) \cdot \ln(a) \qquad\qquad [\text{fordi } \ln(m^n) = n\ln(m)] \\ \implies \frac{\ln(x)}{\ln(a)} &= \log_a(x). \end{aligned}$$

2 La f være en jevn funksjon og g være en odde funksjon. Vis at funksjonen gitt ved

$$h(x) = f(x)g(x)$$

er en odde funksjon. Vis at h er jevn dersom f og g er begge jevne eller begge odde.

Løsning:

Definisjon 1. *En funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er **jevn** hvis $f(-x) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.*

Definisjon 2. *En funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er **odde** hvis $f(-x) = -f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.*

La f være jevn og la g være odde. Vi må vise at funksjonen $h := fg$ er odde. La $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(-x)g(-x) \\ &= f(x)(-g(x)) \\ &= -h(x). \end{aligned}$$

Altså er h en odde funksjon.

Hvis f og g begge er jevne, så er $h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = h(x)$ og h er jevn.

Hvis f og g begge er odde, så er $h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)(-g(x)) = h(x)$ og h er jevn.

$\boxed{3}$ Definer funksjonen f ved regelen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{hvis } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

Forklar hvorfor f er en-til-en (injektiv) og finn inversfunksjonen f^{-1}.

Hint: Tegn en skisse av grafen til funksjonen! Betrakt de to tilfellene hver for seg.

Løsning:
For $x > 0$ er $f(x) = x^2$ positiv og strengt stigende fra 0, og for $x < 0$ er $f(x) = -x^2$ negativ og strengt voksende mot 0. Dermed vil en horisontal linje bare krysse grafen til f én gang og f er dermed injektiv.

Vi finner den inverse funksjonen f^{-1}: Vi løser ligningen $x = f(y)$ mhp. y. Da vil $f^{-1}(x) = y$: Anta først at $y \geq 0$. Da er $x = f(y) = y^2$, så $x \geq 0$ og $\sqrt{x} = \sqrt{y^2} = |y| = y$.

Anta nå at $y < 0$. Da er $x = f(y) = -y^2$, så $x < 0$ og $\sqrt{-x} = \sqrt{y^2} = |y| = -y$. Vi setter sammen og finner at

$$f^{-1}(x) = y = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{hvis } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Hva blir grenseverdien av følgen definert ved

$$a_n = \sqrt{n^2 + 9} - \sqrt{n^2 - n + 9}.$$

Løsning:
Vi ser at uttrykket blir på den ubestemte formen $\infty - \infty$ når vi lar $n \to \infty$. Trikset her er konjugat-setningen: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n^2+9} - \sqrt{n^2-n+9} \\
&= (\sqrt{n^2+9} - \sqrt{n^2-n+9}) \cdot 1 \\
&= (\sqrt{n^2+9} - \sqrt{n^2-n+9}) \frac{\sqrt{n^2+9} + \sqrt{n^2-n+9}}{\sqrt{n^2+9} + \sqrt{n^2-n+9}} \\
&= \frac{n^2+9-(n^2-n+9)}{\sqrt{n^2+9} + \sqrt{n^2-n+9}} \\
&= \frac{n}{\sqrt{n^2+9} + \sqrt{n^2-n+9}}.
\end{aligned}$$

Uttrykket er nå på formen ∞/∞ når $n \to \infty$. Det er fremdeles ubestemt, men er nå mer håndterlig. Vi deler på n oppe og nede:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2+9} + \frac{1}{n}\sqrt{n^2-n+9}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}(n^2+9)} + \sqrt{\frac{1}{n^2}(n^2-n+9)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{n}{n^2}+\frac{9}{n^2}}},
\end{aligned}$$

og vi ser at

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{n}{n^2}+\frac{9}{n^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0+0}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$