Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

# MA1201 Lineær algebra og geometri
## Høst 2017

**Øving 12**

Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript $s$, bør gjøre $b$, og kan gjøre $k$.

**1** Gjør oppgave $5^s, 6^s, 10^b$ og $12^b$ på **side 345-349.**

**2** Anse denne oppgaven som merket $s$.

**a)** La $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til $A$.

**b)** La $Q(x, y) = 3x^2 + 8xy + 3y^2$.

(i) Skriv $Q(x, y) = \mathbb{x}^T B \mathbb{x}$ for en symmetrisk $2 \times 2$-matrise $B$ og $\mathbb{x} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$.

(ii) Finn en ortogonal matrise $P$ slik at $P^T BP$ er en diagonalmatrise.

(iii) Bestem hvilket kjeglesnitt ligningen $3x^2 + 8xy + 3y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 8 = 0$ beskriver (ellipse, hyperbel eller parabel), og lag en skisse i $xy$-planet.

**3** Anse denne oppgaven som merket $s$.

Et kjeglesnitt klassifiseres i et degenerert kjeglesnitt (et punkt, en linje eller to linjer), en ellipse, en hyperbel eller en parabel. Betrakt kjeglesnittet gitt ved følgende likning

$$-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy + \frac{1}{2}y^2 + (\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1)y = 0.$$

Bestem dette kjeglesnittet ved først å overføre den kvadratiske formen

$$-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy + \frac{1}{2}y^2$$

til standard form uten blandingsledd $xy$ ved bruk av en symmetrisk matrise $A$ og en ortogonal matrise $P$. Oppgi ditt valg av $A$ og $P$.

**4** Gjør oppgave $3^b$ og $12^b$ på **side 407-410.**

**5** Gjør oppgave $5^b, 6^b, 17^b$ og $26^k$ på **side 418-420.**

**6** Gjør oppgave $1^s, 2^s, 3^b, 6^b, 15^s, 16^k$ og $17^b$ på **side 436-437.**

$\boxed{7}$ Anse denne oppgaven som merket $s$.

Finn alle komplekse tall $z$ med

$$z^4 = 8 + 8\sqrt{3}i.$$

Skisser løsningene i det komplekse planet.

$\boxed{8}$ Anse denne oppgaven som merket $s$.

**a)** Skriv det komplekse tallet $\sqrt{3} - i$ på polarform, og bruk dette til å finne alle komplekse tall $z$ slik at

$$z^3 = \sqrt{3} - i.$$

Skisser løsningene i det komplekse planet.

**b)** For to reelle tall $z_1$ og $z_2$, så vil alltid $z_1 + z_2$ og $z_1 z_2$ igjen være reelle tall. Hvilke par av komplekse tall $(z_1, z_2)$ har egenskapen at $z_1 + z_2$ og $z_1 z_2$ er reelle tall?

## Et nytt tallsystem

Vi skal fortsette med konstruksjonen av vårt nye tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. Vi må spørre oss hvilke egenskaper vi ønsker at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:

- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutativ*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.
- *additiv invers:* Gitt $z$, så eksisterer $z'$ slik at

$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:

- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
- *distributive lover:*
  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *høyre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.
- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at

$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$

- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer $z'$ slik at

$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$

- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker $2 \times 2$-matriser over de reelle tallene.

La $A$ være en $2 \times 2$-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La

$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

For eksempel,

$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$

og

$$Y = A - \sqrt{2}A^3$$

er elementer i $S$.

**Nummereringen av oppgavene følger den fra tidligere øvinger. Resultater eller antagelser fra tidligere øvinger kan være nødvendig for å løse oppgavene.**

Som i forrige øving, la $R = \{(a_0, a_1) \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, dvs. $R = \mathbb{R}^2$. Definer *addisjon* i $R$ som addisjon i $\mathbb{R}^2$, dvs.

$$(a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1).$$

Definer en operasjon som vi kaller *multiplikasjon* i $R$ ved at

$$(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) = (a_0 b_0 - a_1 b_1, a_0 b_1 + a_1 b_0).$$

La $x = (a_0, a_1)$, $y = (b_0, b_1)$ og $z = (c_0, c_1)$ i $R$.

($k^k$)
- Hva er $0_R$ i $R$?
- Hva er $1_R$ i $R$?
- La $i = (0, 1)$ i $R$. Vis at $i^2 = -1_R$.
- La $x = (a_0, a_1)$ være i $R$ der $x \neq (0, 0)$. Finnes det en $x'$ i $R$ slik at $x \cdot x' = 1_R = x' \cdot x$?

($l^k$) Hva har vi gjort i (a)–(k)?