Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 11

Seksjon 11.1

3

a) Rotnoden er a.

b) De interne nodene er a, b, c, d, f, h, j, q, og t.

c) Bladnodene er $e, g, i, k, l, m, n, o, p, r, s, u$.

d) Barna til j er q og r.

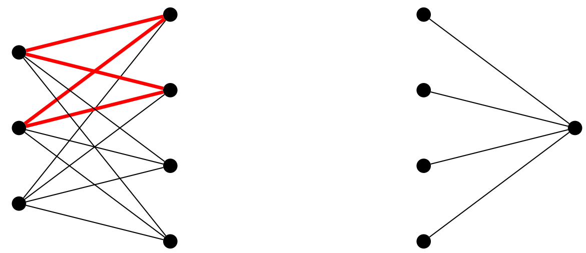
e) Forelderen til h er c.

f) Søsknene til o er kun p.

g) Forfedrene til m er f, b, og a.

h) Etterkommerne til b er e, f, l, m, og n.

16 Hvis $m \geq 2$ og $n \geq 2$ så har $K_{m,n}$ en enkel krets (av lengde 4), og dermed er $K_{m,n}$ ikke et tre når $m, n \geq 2$. Men $K_{1,n}$ og $K_{m,1}$ har ingen enkle kretser så disse er trær for alle $m, n \geq 1$. Faktisk er $K_{1,n}$ og $K_{m,1}$ henholdsvis fulle n-trær og m-trær av høyde 1. Se eksempler på dette i Figur 1 under.



Figur 1: Til venstre, en enkel krets av lengde 4 i $K_{3,4}$, markert med rødt. Til høyre, $K_{4,1}$ som ikke har noen enkle kretser.

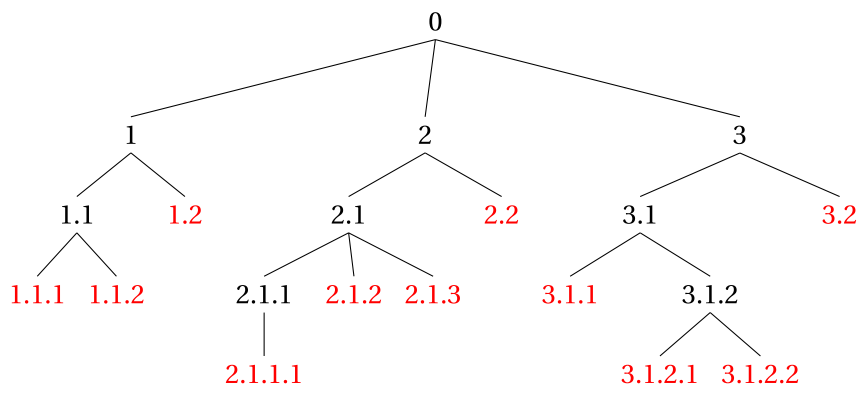
22 En slik «brevkjede» kan representeres som et fullt 5-tre på følgende måte. Personen som startet kjeden er rotnoden og hver person som har mottatt et brev representeres av en node i treet. Hvis en person sendte brevet videre til fem andre personer er disse fem personene barn av denne personen i treet.

Vi får oppgitt at til sammen 10 000 personer sendte brevet videre. Dette betyr at treet vårt har 10 000 interne noder. Fra Teorem 4 ii) med $m = 5$ og $i = 10000$ får vi at treet har

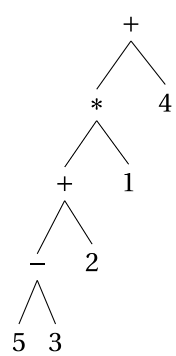
$5 \cdot 10000 + 1 = 50001$ noder og $4 \cdot 10000 + 1 = 40001$ bladnoder. Alle personene bortsett fra den som starter kjeden mottar brevet, så 50000 personer mottar brevet. De personene som ikke sender brevet videre er bladnoder, så det er 40001 personer som ikke sender brevet videre.

Seksjon 11.3

6 **a)** For å se om de gitte adressene kan være adressene til bladnodene i et ordnet tre tegner vi først inn bladnodene med disse adressene på riktig nivå og forsøker å fullføre treet. Gjør vi dette får vi følgende ordnede tre, hvor bladnodene vi startet med er i rødt:



22 **a)** Husk at operatorene er interne noder og tallene er bladnoder. Det ordnede treet som har preordningstraversering gitt ved $+ * + - 5\ 3\ 2\ 1\ 4$ er:



Dette treet representerer følgende uttrykk (på infiks-form): (((5-3)+2)*1) + 4.

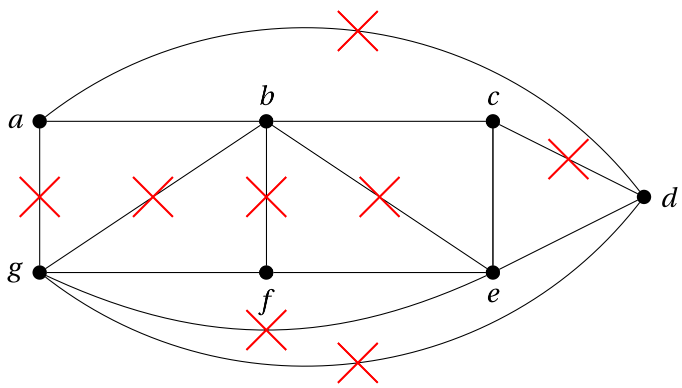
24 **a)** Vi regner ut postfiks-uttrykk ved å iterativt finne første operator som etterfølger to tall og utfører denne operasjonen. Her bruker vi paranteser for å markere hvilken

operasjon vi utfører i hvert steg. Vi får

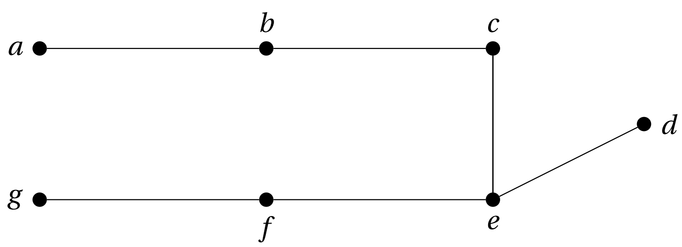
$$\begin{aligned} 5\,(2\;1\;-)-\;3\;1\;4\;+\;+\;* &= 5\;1\;-\;3\;1\;4\;+\;+\;* = (5\;1\;-)\;3\;1\;4\;+\;+\;* \\ &= 4\;3\;1\;4\;+\;+\;* = 4\;3\;(1\;4\;+)\;+\;* \\ &= 4\;3\;5\;+\;* = 4\;(3\;5\;+)\;* \\ &= 4\;8\;* = 32. \end{aligned}$$

Seksjon 11.4

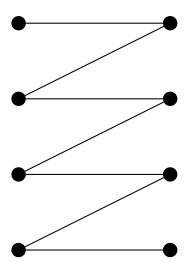
3 For å finne et utspenningstre til grafen fjerner vi kanter fra enkle kretser til det ikke er flere enkle kretser igjen. Vi kan for eksempel fjerne følgende kanter (markert med rødt kryss):



Da får vi følgende utspenningstre:



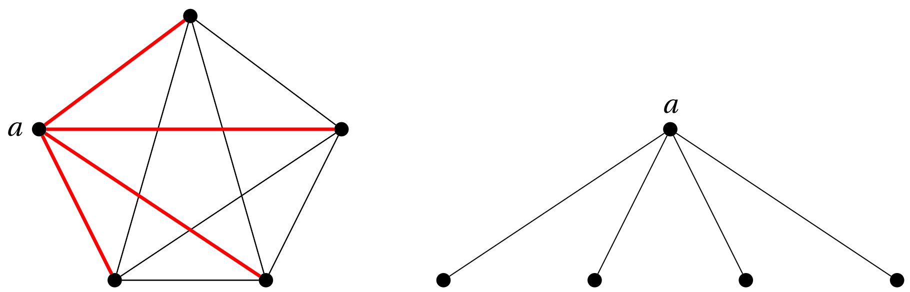
7 **b)** Vi kan lage et spenntre for $K_{4,4}$ ved å for eksempel starte øverst og besøke noder på annenhver side av grafen. Da kan vi få følgende utspenningstre:



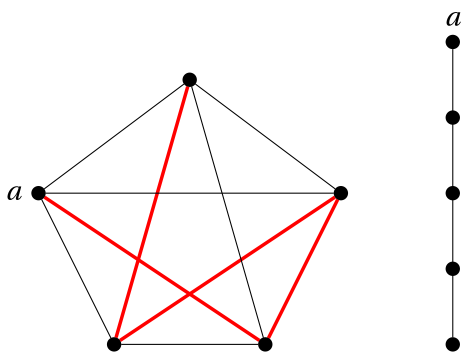
$\boxed{20}$ I et bredde-først søk velges først en vilkårlig node som rotnode. Deretter blir alle naboene til denne noden lagt til som noder på nivå 1. Siden alle noder er nabo med alle andre noder i K_n vil vi nå ha produsert et utspenningstre hvor alle noder unntatt rotnoden er barn av rotnoden, med andre ord har vi fått grafen $K_{1,n-1}$.

I et dybde-først søk velges først en vilkårlig node som rotnode. Deretter går vi fra rotnoden videre til en av naboene, legger denne til i treet, og fortsetter videre til en nabo av noden vi akkurat la til, helt til vi ikke kan gå til nye noder. Igjen, siden alle er naboer i K_n vil vi nå alle nodene fra rotnoden, så vi vil få et utspenningstre som er en enkel sti av lengde $n-1$.

Se eksempler på dette i Figur 2 og Figur 3 under.



Figur 2: Til venstre, et bredde-først søk i K_5 med a som rotnode. Til høyre, det resulterende utspenningstreet.



Figur 3: Til venstre, et dybde-først søk i K_5 med a som rotnode. Til høyre, det resulterende utspenningstreet.