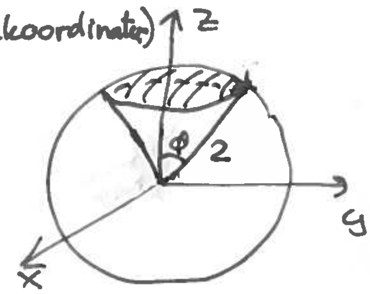
Meld fra om feil! (Gikk litt fort) KH

LØSNINGS-SKISSER ØVING 8

Oppgave 1 (Repetisjonsoppgave i kulekoordinater)



Kuleflate $x^2+y^2+z^2 = 2^2$, $z \ge 0$

Kjegle $z^2 = 3(x^2+y^2)$

$x=0: \; z=\sqrt{3}\,y$, $\frac{y}{z}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\underline{\phi=\frac{\pi}{6}}$

Dermed har vi parameteriseringen

$r(\phi,\theta) = (2\sin\phi\cos\theta,\; 2\sin\phi\sin\theta,\; 2\cos\phi)$

der $0\le\phi\le\frac{\pi}{6}$, $0\le\theta<2\pi$.

Oppgave 2 (Omvendt/Invers funksjonsteorem)

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^2+y+1 \\ x-y-2 \end{bmatrix}, \quad F(0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ som gir } \underline{F'(0,0)} = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

Da $\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$, er F injektiv i en omegn om $(0,0)$ og har en omvendt funksjon G definert i en omegn om $F(0,0)=(1,-2)$ med $\underline{G'(1,-2)} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Ser så på $(-1,-1)$ i stedet for $(0,0)$:

$$F(-1,-1) = \begin{bmatrix} 1-1+1 \\ -1+1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad F'(-1,-1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ med } \det \neq 0.$$

Altså er F injektiv i en omegn om $(-1,1)$ og har en omvendt funksjon H definert i en omegn om $F(-1,-1)=(1,-2)$ med

$$H'(1,-2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = -\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

Oppgave 3 Ligningen

$$(*) \quad \underbrace{x^3 + y^3 + y - 1}_{F(x,y)} = 0$$

oppfyller betingelsene i Implisitt funksjonsteorem, spesielt er $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 1 \neq 0$. Da fins for hvert punkt (x_0, y_0) på kurven $(*)$ en omegn U_0 om x_0 slik at $y = f(x)$, $x \in U_0$, er deriverbar. Av $(*)$

$$3x^2 + 3y^2 f'(x) + f'(x) = 0 \quad (x \in U_0)$$

eller $f'(x) = -\frac{3x^2}{1+3y^2}$. Altså vil $f'(x_0) = -\frac{3x_0^2}{1+3y_0^2}$

Oppgave 4 (Tilsvarende i tre variable. Konkret (x_0, y_0, z_0))

Gitt $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2e^z + z$. Ønsker $f(-1,2,0) = -4$, og ser på

$$F(x,y,z) = xy^2e^z + z + 4 = 0; \quad F(-1,2,0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(-1,2,0)} = xy^2e^z + 1\Big|_{(-1,2,0)} = -3 \neq 0$$

Da fins omegn U_0 om $(-1,2)$ s.a. $z = g(x,y)$, $F(x,y,g(x,y)) = 0$ der

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_* = -\left.\frac{F_x}{F_z}\right|_* = -\left.\frac{y^2e^z}{xy^2e^z+1}\right|_* \underset{* = (-1,2,0)}{=} -\frac{4}{-4+1} = \frac{4}{3}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_* = -\left.\frac{F_y}{F_z}\right|_* = -\left.\frac{2xye^z}{xy^2e^z+1}\right|_* = -\frac{(-2)\cdot 2}{-4+1} = -\frac{4}{3}$$

STASJONÆRE PUNKTER. LOK. MAKS/MIN- OG SADEL:

Oppgave 5

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ f_y &= 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \end{aligned}\right\} (2,-1) \text{ stasjonært punkt}$$

5b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x - y = \underline{0} \Leftrightarrow y = 2x \\ f_y = 2y - x = \underline{0} \Leftrightarrow x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4y \Rightarrow \underline{y = 0}$$

Ser at $\underline{\underline{(0,0)}}$ er stasjonert punkt (det eneste).

Oppgave 6

$f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 6y$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 6x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2y = 2 - 6x \\ f_y = 2x + 4y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = -3 - x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underline{x = 1, y = -2}$$

Det stasjonære punktet er altså $\underline{\underline{(1,-2)}}$

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx} = 6 \\ f_{xy} = 2 \\ f_{yy} = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{c} AC - B^2 = 24 - 4 > 0 \\ A > 0 \end{array}$$

Ved 2. deriverttesten er $\underline{(1,-2) \text{ et lokalt min.}}$

Oppgave 7

$f(x,y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$. Stasjonære pkt:

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 3x^2 + 10x - 6y = 0 \\ f_y = 6y - 6x = 0 \Leftrightarrow y = x \end{array}\right\} \Leftrightarrow x(3x+4) = 0,\ y = x$$

Stasjonære punkter: $\underline{\underline{(0,0),\ (-\tfrac{4}{3}, -\tfrac{4}{3})}}$

$f_{xx} = 6x + 10$, $f_{xy} = -6$, $f_{yy} = 6$

$(0,0)$ er $\underline{\text{lokalt min.}}$ da $AC - B^2 = 60 - 36 > 0$, $A > 0$

$(-\tfrac{4}{3}, -\tfrac{4}{3})$ er et $\underline{\text{sadelpunkt}}$ da $AC - B^2 = (-8)6 - 36 < 0$

Oppgave 8

$f(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$

$f_x = yz - 2x$, $f_y = xz - 2y$, $f_z = xy - 2z$

Vi ser at $\underline{(0,0,0) \text{ er et kritisk punkt}}$, og det eneste med en koordinat lik 0. Finner de andre, dvs. løser systemet for $x, y, z \neq 0$

i) $f_x = yz - 2x = 0$ ii) $f_y = xz - 2y = 0$ iii) $f_z = xy - 2z = 0$

Av i) $x = yz/2$

Innsatt i ii) $\cancel{y}\frac{z^2}{2} = 2\cancel{y}$ og i iii) $\frac{y^2 \cancel{z}}{2} = 2\cancel{z}$

$z = \pm 2$, $y = \pm 2$, $x = \pm 2$

Tilsammen $(2,2,2)$, $(2,-2,-2)$, $(-2,2,-2)$, $(-2,-2,2)$

(i tilegg til $(0,0,0)$

Hessematrisa er

$$\begin{bmatrix} -2 & z & y \\ z & -2 & x \\ y & x & -2 \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = -2I$$

Negative egenverdier ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$), så $(0,0,0)$ er et lokalt maksimum. (En liten kontroll siden fasit sier "minimum": $f(0,0,0) = 0$, $f(0.1, 0.1, 0.1) = 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-2} < 0$).

Egenverdier for $(2,2,2)$:

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\left[(\lambda+2)^2 - 4\right] - 2 \cdot 2\lambda + 2(-\lambda)$$

$$= (\lambda+2)^2 \lambda - 6\lambda = (\lambda+2)^2(\lambda-6)$$

Både positive og negative egenverdier, så $(2,2,2)$ er et sadelpunkt

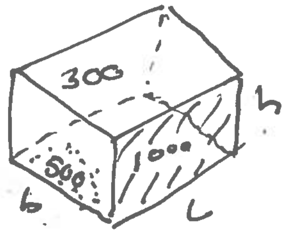
Tilsvarende for de tre resterende :)

(Litt mye arbeid!)

Oppgave 9

Gitt

$lbh = 5000 \ (m^3)$; $b = \frac{5000}{lh}$



$$f(l,h) = \underbrace{lh}_{\text{areal glassplate}} \cdot 1000 + \underbrace{3 \cdot \frac{5000}{l}}_{\text{areal sidekanter}} \cdot 300 + \underbrace{\frac{5000}{h}}_{\text{areal bunn}} \cdot 500$$

sidekanten rett over glassplata

$$= (1000 + 300)\, lh + 300 \cdot \frac{5000}{l} \cdot 2 + \frac{25000 \cdot 100}{h})$$

Stemmer!

Studerer $\boxed{f(x,y) = 13xy + \frac{30000}{x} + \frac{25000}{y}}$ $(x,y>0)$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 13y - \frac{30000}{x^2} = 0; \quad y = \frac{30000}{x^2} \\ f_y &= 13x - \frac{25000}{y^2} = 0; \quad x = \frac{25000}{13y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{x^3 = \frac{6^3}{78} 10^3}$$

Kritisk punkt $\underset{(l)}{x} = \underline{\frac{60}{\sqrt[3]{78}}}$, $\underset{(h)}{y} = \frac{30000}{x^2} = \underline{\frac{50}{\sqrt[3]{78}}}$

Ligger i „problemets natur" at dette gir minimum!
(For en analyse, se s. 520-521)

Oppgave 10

$F : A \to A$ kont., A lukket og begrenset

a) $f(x) = \|x - F(x)\|$ kontinuelig da sammensatt av tre kontinuerlige funksjoner $(x \to F(x) \to (x - F(x)) \to \|x - F(x)\|)$.
En kont. funksjon på en lukket, begrenset mengde har et minimumspunkt (d)!

b) Påstand: $F(d) = d$. Bevis: Dersom $F(d) \neq d$, har vi
$\|F(F(d)) - F(d)\| < \|\underbrace{F(d) - d}_{f(d)}\| \leq \|F(F(d)) - F(d)\|$ Motsigelse!

F kan ikke ha to fikspunkt: $\|\underset{d_1}{\underset{\parallel}{F(d_1)}} - \underset{d_2}{\underset{\parallel}{F(d_2)}}\| < \|d_1 - d_2\|$ —

c) Se på
i) $P: A = \underset{\text{ikke lukket}}{\overline{B}(1) \setminus 0} \to A$

$P(x) = \frac{1}{2} x$
Ikke fikspunkt

ii) $Q: A = \underset{\text{ikke begrenset}}{\mathbb{R}^m \setminus B(1)} \to A$
$Q(x) = 2x$
Ikke fikspunkt