Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Seksjon 4.4

21 Siden $2, 3, 5$ og 11 er forskjellige primtall er de parvis relativt primiske. Vi kan derfor bruke det kinesiske restteoremet.

$$\begin{aligned}
m &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330 \\
M_1 &= \frac{330}{2} = 165 \equiv 1 \pmod 2 \\
M_2 &= \frac{330}{3} = 110 \equiv 2 \pmod 3 \\
M_3 &= \frac{330}{5} = 66 \equiv 1 \pmod 5 \\
M_4 &= \frac{330}{11} = 30 \equiv 8 \pmod{11}
\end{aligned}$$

Finner en invers y_k til hver av tallene M_k: $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 1, y_4 = 7$. Dersom vi lar $x_k = a_k M_k y_k$, så er

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \cdot 165 \cdot 1 = 165 \\
x_2 &= 2 \cdot 110 \cdot 2 = 440 \\
x_3 &= 3 \cdot 66 \cdot 1 = 198 \\
x_4 &= 4 \cdot 30 \cdot 7 = 840
\end{aligned}$$

x_1 løser den første ligningen og er null i de andre. x_2 løser den andre ligningen og er null i de andre osv... Summen av disse fire tallene, $x = 1643$, vil da løse alle fire ligningene. Fra det kinesiske restteoremet vet vi at denne løsningen er entydig modulo 330, altså er $x \equiv 1643 \equiv 323 \pmod{330}$. Så svaret er alle tall x som kan skrives på formen $x = 323 + 330k$, hvor k er et heltall.

33 Siden 13 er et primtall som ikke deler 7 så har vi fra Fermats lille teorem at $7^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Ved å bruke dette får vi

$$7^{121} = 7^{10\cdot 12+1} = \left(7^{12}\right)^{10} \cdot 7 \equiv 1^{10} \cdot 7 \equiv 7 \pmod{13}.$$

37 **a)** 11 er et primtall som ikke deler 2, dermed er $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Dette gir

$$2^{340} = \left(2^{10}\right)^{34} \equiv 1^{34} \equiv 1 \pmod{11}.$$

Seksjon 6.1

27 Vi kan velge mellom 3 representanter fra hver av de 50 delstatene. Antall måter komiteen kan dannes på blir da $3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^{50}$.

44 Dersom vi ignorerer det faktum at bordet er rundt og kun teller antall permutasjoner av lengde 4 av de 10 menneskene får vi $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ muligheter. Men vi kan roterer menneskene rundt bordet på fire måter og få den samme bordplasseringen. (For eksempel er sekvensen Gauss-Euler-Euklid-Fermat den samme som Fermat-Gauss-Euler-Euklid). Derfor er svaret $5040/4 = 1260$.

Seksjon 6.2

10 Midtpunktet til segmentet som har endepunktene (a, b) og (c, d) er $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$. Når a, b, c, d er heltall så vil koordinatene til midtpunktet være heltall kun dersom a og c har samme paritet (dvs. at begge er oddetall eller begge er partall), og b og d har samme paritet. Dermed er det pariteten til endepunktene som er viktige. Det er fire mulige kombinasjoner av pariteter: (odde, odde), (odde, like), (like, odde) eller (like, like). Siden vi er gitt fem punkter garanterer skuffeprinsippet at minst to av dem vil ha samme par av pariteter. Koordinatene til midtpunktet mellom disse punktene vil da være heltall. $\square$

18 **a)** Hvis ikke, ville det ha vært 4 eller færre mannlige studenter og 4 eller færre kvinnelige studenter, altså 8 eller færre studenter totalt, som strider mot antagelsen om at det er 9 studenter i klassen.

b) Hvis ikke, ville det vært 2 eller færre mannlige studenter og 6 eller færre kvinnelige studenter, altså 8 eller færre studenter totalt, som strider mot antagelsen om at det er 9 studenter i klassen.

Seksjon 6.3

13 Mennene kan ordnes på rekke på $n!$ måter. Det samme gjelder for for kvinnene. Tilsammen gir det $(n!)^2$ måter. Men rekken kan enten være ordnet $KMKMKM\ldots$ med en kvinne først eller $MKMKMK\ldots$ med en mann først, så vi må gange med to. Altså er svaret $2(n!)^2$.

19 **b)** Vi skal ha akkurat to “heads” blant ti, vi har altså da utplukk av to fra ti (eller ekvivalent åtte “tails” av ti), da får vi

$$\binom{10}{2} = 45.$$

c) Tilsvarende kan vi ha henholdsvis null “tails”, en “tail”, to “tails” eller tre “tails”. Vi har en prosess med “eller”, dermed summerer vi og får,

$$\sum_{i=0}^{3}\binom{10}{i} = \binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3} = 1+10+45+120 = 176.$$

$\boxed{34}$ Det er $C(15,6)$ måter å velge komiteen dersom den kun består av kvinner, $C(15,5)C(10,1)$ måter dersom den består av fem kvinner og en mann og $C(15,4)C(10,2)$ dersom den består av fire kvinner og to menn. Derfor er svaret

$$\binom{15}{6}+\binom{15}{5}\binom{10}{1}+\binom{15}{4}\binom{10}{2} = 5005+30030+61425 = 96460.$$

Seksjon 6.4

$\boxed{9}$ Binomialteoremet gir:

$$(2x-3y)^{200} = \sum_{i=0}^{200}\binom{200}{i}(2x)^i(-3y)^{200-i}.$$

Leddet med $x^{101}y^{99}$ blir

$$\binom{200}{99}(2x)^{101}(-3y)^{99} = -2^{101}3^{99}\binom{200}{99}x^{101}y^{99},$$

altså blir koeffisienten $-2^{101}3^{99}\binom{200}{99}$.