Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Løsningsforslag — Øving 9

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript s, bør gjøre b, og kan gjøre k. Det er mulig å få godkjent øving ved å kun gjøre oppgavene merket s, men da må man ha valgt en gyldig fremgangsmåte i nesten hvert tilfelle og kun ha eventuelle regnefeil. Det er derfor en fordel å prøve på oppgavene merket b også.

Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

$\boxed{1}$ Gjør oppgave $1^s, 2^s, 7^b, 11^b$ og 18^b på **side 190-193.**

1) (a) Rad- og kolonnedimensjonen er $= 5$, nulliteten er $= 4$, og $\dim(N(A^T)) = 2$. Summen er $5 + 5 + 4 + 2 = 16 = m + n$.

(b) Kolonnerommet er $\mathbb{R}^{\nvDash}$, det venstre nullrommet inneholder kun .

2) A: Radromsbasis $=$ rad $1 = (1, 2, 4)$; nullrommet er $(-2, 1, 0)$ og $(-4, 0, 1)$; kolonneromsbasis $=$ kolonne $1 = (1, 2)$; det venstre nullrommet $(-2, 1)$. B: Radromsbasisen $=$ begge rader $= (1, 2, 4)$ og $(2, 5, 8)$; kolonneromsbasis $=$ to kolonner $= (1, 2)$ og $(2, 5)$; nullrommet $(-4, 0, 1)$; venstre nullromsbasisen er tom siden rommet inneholder kun $\mathbb{y} =$: radene av B er lineært uavhengige.

7) Invertibel 3 ganger 3 matrise A: radromsbasis $=$ kolonneromsbasis $= (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$; nullromsbasis og venstre nullromsbasis er tomme. Matrise $B = [AA]$: radromsbasis $(1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1,$ og $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$; kolonneromsbasis $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$; nullromsbasis $(-1, 0, 0, 1, 0, 0)$ og $(0, -1, 0, 0, 1, 0)$ og $(0, 0, -1, 0, 0, 1)$; venstre nullromsbasis er tom.

11) (a) Ingen løsning medfører $r < n$. Alltid $r \leq n$. Vi kan ikke sammenligne m og n her.
(b) Siden $m - r > 0$, det venstre nullrommet må inneholde en ikke-null vektor.

18) Rad $3 - 2$ rad $2+$ rad $1 =$ nullrad, slik at vektorene $c(1, -2, 1)$ er i det venstre nullrommet.

$\boxed{2}$ Anse denne oppgaven merket s.

Gitt matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 9 & -7 \\ 2 & 6 & -4 & -10 & 8 \\ 3 & 10 & -7 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

La $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$.

Er likningssystemet $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ løsbart for alle $\mathbb{b}$ i $\mathbb{R}^3$? For de $\mathbb{b}$ i $\mathbb{R}^3$ hvor $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ er løsbart, hvor mange løsninger fins det?

Løsning:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 9 & -7 \\ 2 & 6 & -4 & -10 & 8 \\ 3 & 10 & -7 & 6 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 10 & -7 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & -7 \\ 2 & 6 & -4 & -10 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 16 & -15 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & -7 \\ 2 & 6 & -4 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 16 & -15 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -42 & 38 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 16 & -15 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 16 & -15 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det følger at matrisen har full rang, slik at mengden av kolonnene kan reduseres til en basis for $\mathbb{R}^3$. Med andre ord, har vi at $\mathbb{b} \in C(A)$ holder for alle $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$, eller at likningssystemet er løsbart for alle slike $\mathbb{b}$. Siden kolonnene ikke utgjør en basis av $\mathbb{R}^3$ (siden mengden av kolonnene inneholder for mange elementer), må det være uendelige mange løsninger.

$\boxed{3}$ Gjør oppgave $1^s, 2^s, 15^s, 18^k$ og 23^b på **side 254-257.**

1) $\det(2A) = 2^4 \det A = 8$; $\det(-A) = (-1)^4 \det A = \frac{1}{2}$; $\det(A^2) = \frac{1}{4}$; $\det(A^{-1}) = 2$.

2) $\det(\frac{1}{2}A) = (\frac{1}{2})^3 \det(A) = -\frac{1}{8}$ og $\det(-A) = (-1)^3 \det A = 1$; $\det(A^2) = 1; \det(A^{-1}) = -14$.

15) Den første determinanten er 0, den andre er $1 - 2t^2 + t^4 = (1 - t^2)^2$.

18)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

23) $\det(A) = 10$, $\det(A^2) = 100$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{10}$. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ såfremt $\lambda = 2$ eller 5. Disse er altså egenverdier.

$\boxed{4}$ **Utfordring:** La A være en $n \times n$-matrise. La B være matrisen A hvor to rader har byttet plass. Vis at $\det(B) = -\det(A)$, bare ved å bruke definisjonen av determinant av en matrise.

Merk at definisjonen av determinanten gitt i forelesningene svarer til noe slik som følger:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$-a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{k+1} a_{k1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)2} & a_{(k-1)3} & \cdots & a_{(k-1)k} \end{vmatrix}.$$

Merk at i siste ledd på høyrehåndssiden er det kun siste rad som er fjernet. Andre rad er altså med, og er kun ikke notert.

Løsning: Vi viser resultatet ved induksjon. For $n = 1$ holder resultatet åpenbart, siden det er ingen rader å bytte om på. Likeledes kan en enkelt bekrefte at resultatet også holder for $n = 2$: Observer at per definisjon er $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ab) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$.

Anta nå at resultatet holder for alle $n = k - 1$. La A være en $k \times k$-matrise, og la B_{ij} for $1 \leq i < j \leq k - 1$ være matrisen A men hvor rad i og j har vært byttet om på.

$$B_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$-a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i+1} a_{j1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(j-1)2} & a_{(j-1)3} & \cdots & a_{(j-1)k} \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \\ a_{(j+1)2} & a_{(j+1)3} & \cdots & a_{(j+1)k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{j+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)2} & a_{(i-1)3} & \cdots & a_{(i-1)k} \\ a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jk} \\ a_{(i+1)2} & a_{(i+1)3} & \cdots & a_{(i+1)k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{k+1} a_{k1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)2} & a_{(k-1)3} & \cdots & a_{(k-1)k} \end{vmatrix}.$$

Siden de er determinanter av $(k-1) \times (k-1)$-matriser, ser vi ved å sammenligne med det tilsvarende uttrykket for $\det A$ at induksjonshypotesen tar hånd om alle leddene bortsett ifra de følgende:

$$(-1)^{i+1} a_{j1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(j-1)2} & a_{(j-1)3} & \cdots & a_{(j-1)k} \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \\ a_{(j+1)2} & a_{(j+1)3} & \cdots & a_{(j+1)k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{j+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)2} & a_{(i-1)3} & \cdots & a_{(i-1)k} \\ a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jk} \\ a_{(i+1)2} & a_{(i+1)3} & \cdots & a_{(i+1)k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

For disse to kan vi gjøre en litt kjedelig analyse av tilfeller: Hvis i, j er begge odde eller jevne, får vi at det er et odde antall rader mellom rad i og rad j. Siden de er $(k-1)\times(k-1)$-determinanter kan vi ved induksjonhypotesen bytte om radene slik at de er like opptil fortegn med leddene med koeffisientene a_{i1} og a_{j1} i uttrykket for $\det A$, altså at

$$(-1)^{i+1}a_{j1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(j-1)2} & a_{(j-1)3} & \cdots & a_{(j-1)k} \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \\ a_{(j+1)2} & a_{(j+1)3} & \cdots & a_{(j+1)k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1}(-1)^{j-1-i}a_{j1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)2} & a_{(i-1)3} & \cdots & a_{(i-1)k} \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ik} \\ a_{(i+1)2} & a_{(i+1)3} & \cdots & a_{(i+1)k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

og

$$(-1)^{j+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)2} & a_{(i-1)3} & \cdots & a_{(i-1)k} \\ a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jk} \\ a_{(i+1)2} & a_{(i+1)3} & \cdots & a_{(i+1)k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = (-1)^{j+1}(-1)^{j-1-i}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(j-1)2} & a_{(j-1)3} & \cdots & a_{(j-1)k} \\ a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jk} \\ a_{(j+1)2} & a_{(j+1)3} & \cdots & a_{(j+1)k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Siden i, j er antatt både odde eller jevne, får man at $(-1)^{i+1} = (-1)^{j+1}$. Resultatet holder derfor i dette tilfellet siden $(-1)^{j-1-i} = -1$ som følge av at $j - 1 - i$ er odde.

Det er like rett frem å vise at det må holde i tilfellet når i, j ikke begge odde eller jevne holder, slik at det blir overlatt til leseren.

Siden det holder i begge tilfellene, følger det at $n = k-1$ medfører $n = k$, slik at resultatet må holde for alle $n \geq 1$, som var det som skulle vises.

$\boxed{5}$ **Utfordring:** La A være en $n \times n$-matrise slik at A^n er lik nullmatrisen. Vis at $\det(I_n - A) \neq 0$.

Løsning: Man kan observere at $I = I - A^n = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots A^{n-1})$ slik at $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots A^{n-1}$. Siden en matrise B er invertibel hvis og bare hvis $\det B \neq 0$, følger resultatet.