MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Øving 4

Med forbehold om feil. Sende gjerne beskjed til mads.sandoy@ntnu.no hvis du finner noen.

$\boxed{1}$ Gjør 19, 20, 21 og 29 på **side 43**.

Utfordring: Gjør oppgave 35 på **side 45**.

19)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1}E\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

20)

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

projiserer ned på x-aksen og

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

projiserer ned på y-aksen.

Vektoren $\mathbb{v} = (5,7)^t$ projiserer ned på $P_1\mathbb{v} = (5,0)^t$, og $P_1P_2\mathbb{v} = (0,0)^t$.

21)

$$R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

roterer alle vektorene med $\pi/4$ radianer. Kolonnene til R er resutatene av å rotere $(1, 0)$ og $(0, 1)$!

29) $u_2 = (0,7, 0,3)^t$ og $u_3 = (0,65, 0,35)^t$. Kompentene adderer til 1. De er alltid positive, og komponentene vil fortsette å addere til 1.

$\boxed{2}$ Gjør 1, 2, 8, 11, 12, 19 og 25 på **side 53**.

1 Multipliser likning 1 med $l_{21} = \frac{10}{2} = 5$ og subtraher fra likning 2 for å finne $2x + 3y = 1$ og $-6y = 6$. De ledende posisjonene som skal markeres er 2 og -6.

2 $-6y = 6$ medfører at $y = -1$. Fra dette får vi at $2x + 3y = 2x - 3 = 1$ eller at $x = 2$. Når høyresiden endres til $(4, 44)$ fører det til at løsningen endres til $y = -4$, og $x = 8$. Altså når høyresiden multipliseres med 4, multipliseres løsningen med 4.

8 Hvis $k = 3$ må eliminasjonen mislykkes: det vil ikke finnes noen løsning. Hvis $k = -3$, får man at eliminasjonen gir $0 = 0$ i likning 2: det finnes uendelig mange løsninger. Hvis $k = 0$, får man at et radbytte er nødvendig: det finnes nøyaktig en løsning.

11 (a) En annen løsning er $\frac{1}{2}(x + X, y + Y, z + Z)$. (b) Hvis 25 plan møtes i to punkter, møtes de langs hele linjen gjennom de to punktene.

12 Eliminasjonen fører til dette øvre triangulære systemet, hvorpå man må gjøre substitusjon.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 8 \\ y + 3z &= 4 \\ 8z &= 8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

19 Rad 2 gir $3y - 4z = 5$, slik at rad 3 blir $(q + 4)z = t - 5$. Hvis $q = -4$ er systemet singulært, altså man får ikke en tredje ledende posisjon. Isåfall får man at hvis $t = 5$, er den tredje likningen $0 =$ slik at man får uendelig mange løsninger. Hvis man velger $z = 1$, gir likningen $3y - 4z = 5$ at $y = 3$ og likning 1 gir $x = -9$.

25 $a = 2$ (like kolonner), $a = 4$ (like rader), $a = 0$ (null kolonne).

$\boxed{3}$ Gjør oppgave 12, 16, 17 og 26 på **side 66-69**.

12) Det første produktet er

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

hvor i rader og også kolonner er reverserte.

Det andre produktet er

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

16) (a) Aldrene til X og Y er x og y: $x - 2y = 0$ og $x + y = 33$; $x = 22$ og $y = 11$ (b) Linjen $y = mx + c$ inneholder $x = 2$, $y = 5$ og $x = 3$, $y = 7$ når $2m + c = 5$ og $3m + c = 7$. Da er $m = 2$ stigningstallet.

17) Parabelen $y = a + bx + cx^2$ passerer gjennom de 3 punktene når

$$\begin{aligned} a + b + c &= 4 \\ a + 2b + 4c &= 8. \\ a + 3b + 9c &= 14 \end{aligned}$$

Da er $a = 2$, $b = 1$, og $c = 1$. Denne matrisen med kolonner $(1, 1, 1)^t$, $(1, 2, 3)^t$, og $(1, 4, 9)^t$ er en "Vandermonde matrise".

26) (a) Vi legger til to kolonner b og $b*$ for å få $(Abb*)$. Dette eksempelet har

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to x = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}, x* = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Gjør oppgave 1,3,5 og 7 på **side 77-82**.

1) Hvis alle elementene i A, B, C, D er 1, får man at $BA = 3\,\mathbf{ones}(5)$ er 5 ganger 5. $AB = 5\,\mathbf{ones}(3)$ er 3 ganger 3. $ABD = 15\,\mathbf{ones}(3, 1)$ er 3 ganger 1. DC og $A(B + C)$ er begge ikke definerte.

3) $AB + AC$ er lik $A(B + C = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Dette er altså den distributive loven.

5) (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ og $A^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ og $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7) (a) Sann. (b) Usann. (c) Sann. (d) Usann: $(AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2$ er ofte tilfellet.

$\boxed{5}$ Gjør oppgave 1, 3 og 6 på **side 92-96**.

1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ og $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ og $C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2- \\ 0,1 \end{pmatrix}$ slik at $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Her løste vi $AA^{-1} = I$ kolonne for kolonne, noe som er hovedideen ved Gauss-Jordan eliminasjon.

6) (a) Vi man multiplisere $AB = AC$ på venstre side med A^{-1} for å finne $B = C$ siden A er inverterbar. (b) Så lenge $B - C$ har formen $\begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}$, får vi at $AB = AC$ for $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.