Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 9
Løsningsskisse

Oppgave 1

a) Vi lar her Y være antall fugler som kolliderer med vindmølla i løpet av den gitte perioden på $t = 5$ uker. Siden Y er poissonfordelt med intensitet $\lambda = 1$ fugl/uke, har Y punktsannsynlighet

$$P(Y = y) = \frac{(\lambda t)^y}{y!} e^{-\lambda t} = \frac{5^y}{y!} e^{-5}, \quad y = 0, 1, 2, \ldots.$$

Figur 1 illustrerer denne punktsannsynligheten for verdier av y mellom 0 og 14. Sannsynligheten for at mer enn 10 fugler kolliderer i løpet av vedkommende periode er da

$$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - \sum_{y=0}^{10} \frac{5^y}{y!} e^{-5} = 1 - 0.986 = \underline{\underline{0.014}}.$$

Sannsynligheten for at færre enn fem fugler kolliderer er

$$P(Y < 5) = P(Y \leq 4) = 0.44,$$

og den betingede sannsynligheten for at ingen fugler kolliderer, gitt at færre enn fem gjør det, er

$$P(Y = 0|Y < 5) = \frac{P(Y = 0 \cap Y < 5)}{P(Y < 5)} = \frac{P(Y = 0)}{P(Y < 5)} = \frac{e^{-5}}{0.44} = \underline{\underline{0.015}}.$$

b) Rimelighetsfunksjonen er sannsynligheten for å få $Y = 261$ med parameter $4 \cdot 52\lambda = 208\lambda$. Rimelighetsfunksjonen er en funksjon av parameteren λ.

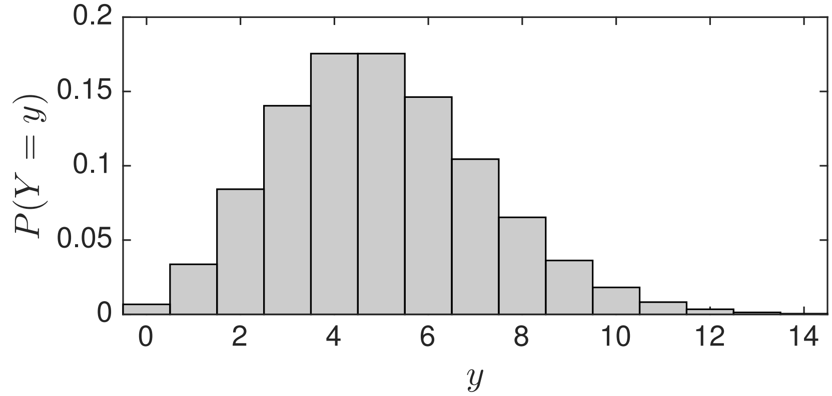
Vi tar logaritmen til rimelighetsfunksjonen for å forenkle utregningene,

$$l(\lambda) = \log P(Y = 261; \lambda) = 261 \log(208\lambda) - \log(261!) - 208\lambda$$

Vi finner maksimum ved å derivere med hensyn på λ,

$$l'(\lambda) = \frac{261}{\lambda} - 208 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{261}{208}.$$

Dette gir $\hat{\lambda} = 261/208 = 1.25$.



Figur 1: Punktsannsynligheten til den stokastiske variabelen Y, som er poissonfordelt med forventningsverdi $\mu = \lambda \cdot t = 5$.

c) Momentgenererende funksjon til en sum av to uavhengige variabler er produktet av de momentgenererende funksjonene for de to variablene. Momengenererende funksjon for en Poisson-fordelt variabel er

$$M_X(t) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{ty} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^y}{y!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^y}{y!} e^{-e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

hvor den siste summen er 1 fordi det er en sum over en Poisson-fordelt variabel med parameter $e^t\lambda$. Da er

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t) = e^{\lambda(e^t-1)} e^{\nu(e^t-1)} = e^{(\lambda+\nu)(e^t-1)}$$

Vi kjenner igjen formen på funksjonen som en momentgenererende funksjon. Dette er momentgenererende funksjon til en Poisson-fordelt tilfeldig variabel med parameter $\lambda + \nu$.

Oppgave 2

a) Sannsynligheten for at ventetiden er lenger enn 2 uker:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - \exp(-0.04 \cdot 2^2)) = \exp(-0.16) = \underline{\underline{0.8521}}.$$

Sannsynligheten for at du må vente minst 5 uker, gitt at du må vente i minst 2 uker:

$$\begin{aligned} P(X > 5 | X > 2) &= \frac{P(X > 5 \cap X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(X > 5)}{P(X > 2)} = \frac{1 - P(X \leq 5)}{P(X > 2)} \\ &= \frac{1 - F(5)}{P(X > 2)} = \frac{1 - (1 - \exp(-0.04 \cdot 5^2))}{0.8521} = \frac{0.3679}{0.8521} = \underline{\underline{0.4317}}. \end{aligned}$$

Sannsynlighetstettheten til X for $x \geq 0$ finner vi ved å derivere $F(x)$:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 0 - (-2\alpha x \exp(-\alpha x^2)) = 2\alpha x \exp(-\alpha x^2), \quad \text{for} \quad x \geq 0.$$

b) SME for α:

Finner først rimelighetsfunksjonen, som er simultanfordelingen for $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sett på som funksjon av x_i'ene og α:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \alpha) \\ &= \prod_{i=1}^{n} 2\alpha x_i \exp(-\alpha x_i^2) = 2^n \alpha^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)\ \exp(-\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2). \end{aligned}$$

Tar logaritmen:

$$l(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha) = \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha) = n\ln 2 + n\ln\alpha + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Deriverer med hensyn på α og setter lik 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha)}{\partial \alpha} = 0 + \frac{n}{\alpha} + 0 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= 0 \\ \frac{n}{\alpha} &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \alpha &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \end{aligned}$$

Dvs. SME for α er $\alpha^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, som er ulik $\hat{\alpha}$. $\hat{\alpha}$ er dermed ikke SME for α.

Estimator $\hat{\mu}$ for μ: $\hat{\mu} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\hat{\alpha}}} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}{2\sqrt{n-1}}$.

Innsatt verdier blir $\hat{\alpha} = 0.029$ og estimatet for μ blir $\hat{\mu} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\hat{\alpha}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{0.029}} = 5.2$ uker.

c) Sannsynlighetsfordelingen for $Y = X^2$ finner vi ved å bruke transformasjonsformelen. La $Y = u(X) = X^2$ slik at $X = w(Y) = \sqrt{Y}$ (har at $X > 0$). Dermed er

$$f_Y(y) = f_X(w(y))\ |w^{'}(y)| = 2\alpha\sqrt{y} \exp(-\alpha(\sqrt{y})^2)\ |\frac{1}{2\sqrt{y}}| = \alpha \exp(-\alpha y).$$

Dette er sannsynlighetstettheten i eksponensialfordelingen med forventning $1/\alpha$, og dermed har vi vist at Y er eksponensialfordelt.

Forventningsverdi for $\hat{\alpha}$:

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \mathrm{E}\left(\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right) = (n-1)\cdot \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right) = (n-1)\cdot \frac{1}{(1/\alpha)(n-1)} = \frac{n-1}{n-1}\ \alpha = \alpha.$$

Her har vi brukt resultatet oppgitt i oppgaveteksten.

Siden $\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha$, er $\hat{\alpha}$ forventningsrett.

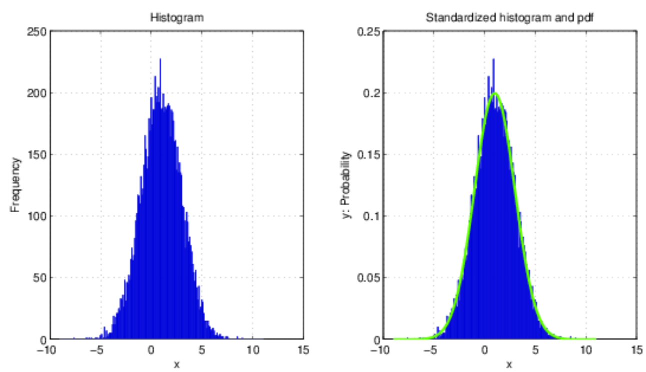
Oppgave 3

Scriptet *run_confds.m* simulerer n data $x_1, \ldots, x_n$ fra en normalfordeling med forventningsverdi $\mu = 1$ og varians $\sigma^2 = 2^2$ ved å trekke n ganger fra en standard normalfordeling $y_i \sim N(0, 1)$ og utføre lineærtransformasjonen

$$x_i = \mu + \sigma \cdot y_i \ , \ \ i = 1, \ldots, n$$

Fra uttrykket kan vi greit regne på at da vil $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. *(I Matlab trekker man fra en standard normalfordeling med funksjonen 'randn').*

Kjører vi scriptet får vi et histogram av $n = 10000$ simulerte data $x_1, \ldots, x_n$, som f.eks. kan se slik ut

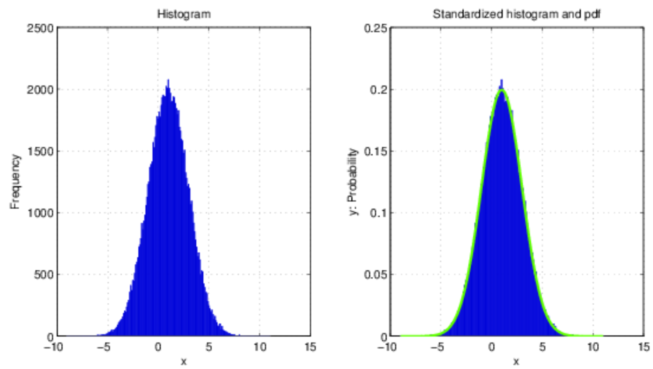


Figur 2: Histogram av $n = 10000$ simulerte data fra $N(1, 2^2)$

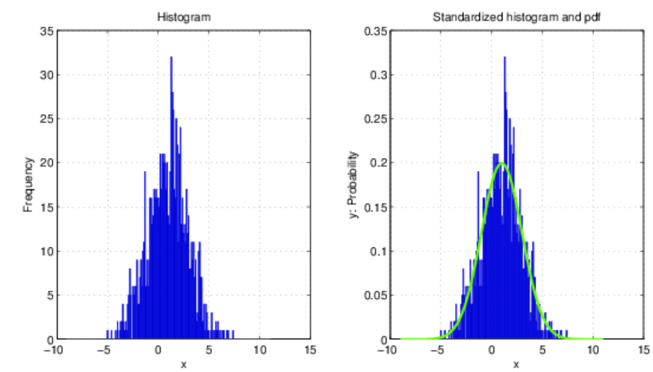
Histogrammet til høyre er standardisert, altså transformert slik at areal under histogramsøylene blir 1. I plottet er det i grønt også tegnet inn kurven for normalfordelingen med forventning 1 og standardavvik 2. Vi ser at de simulerte dataene overlapper normalfordelingen de kommer fra veldig bra. Dette siden vi simulerer såpass mange datapunkter. Det resulterende gjennomsnittet $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.0047$ er veldig nærme den sanne forventningsverdien som også ligger innenfor det estimerte konfidensintervalet [0.96591.0434].

Trekker vi stedet $n = 100000$ data (setter altså parameteren 'n' i scriptet til 100000) kan histogrammet f.eks. se ut som i Fig.2 med estimert forventningsverdi $\hat{\mu} = 0.9983$ og estimert 95% konfidensinterval $[0.9859, 1.0107]$. Igjen er estimatet tilnærmet likt sann forventnigsverdi, som ligger innenfor konfidensintervalet, og overlappen mellom dataene og normalkurven er enda bedre.

Trekker vi $n = 1000$ data (setter altså parameteren 'n' i scriptet til 1000) kan histogrammet f.eks. se ut som i Fig.3. med estimert forventningsverdi $\hat{\mu} = 0.9594$ og estimert 95% konfidensinterval [0.83741.0815]. Estimatet er fortsatt bra, men ikke like nærme som i tilfellene med høyere n. Vi ser også at estimert konfidensinterval er litt bredere, og at overlappen mellom dataene og normalkurven er dårligere (dette er også fordi vi har så liten oppløsning på histogrammet).



Figur 3: Histogram av $n = 100000$ simulerte data fra $N(1, 2^2)$



Figur 4: Histogram av $n = 1000$ simulerte data fra $N(1, 2^2)$

Det estimerte konfidensintervalet er beregnet som

$$\left[\hat{\mu} - 1.96 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \;\;,\;\; \hat{\mu} + 1.96 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

Når datamengden vokser og estimatet på standardaviket ikke varierer mye ser vi at faktoren $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ går mot 0, altså blir konfidensintervalet smalere jo større datamengden er. Vi merker oss også at vi her har brukt kvantilen $z_{0.025} = 1.96$ fra en normalfordeling selv om vi her bruker estimert varians. Med ukjent varians burde vi egentlig brukt kvantiler fra t-fordeling, men siden datamangden er så stor ($n \geq 1000$) vil t-fordeling med $n - 1$ frihetsgrader være tilnærmet lik standard normalfordeling.

Oppgave 4

a) I dette punktet lar vi X være en bestemt pH-måling, og antar at X er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 6.8$ og varians $\sigma^2 = 0.060^2$. Sannsynligheten for at resultatet av målingen er under 6.74 er da

$$\begin{aligned} P(X < 6.74) &= P(\frac{X - 6.8}{0.06} < \frac{6.74 - 6.8}{0.06}) \\ &= \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \\ &= 1 - 0.841 = \underline{\underline{0.159}}. \end{aligned}$$

Videre er sannsynligheten for at resultatet av målingen ligger mellom 6.74 og 6.86 lik

$$\begin{aligned} P(6.74 < X < 6.86) &= P(X < 6.86) - P(X < 6.74) \\ &= P(\frac{X - 6.8}{0.06} < \frac{6.86 - 6.8}{0.06}) - 0.159 \\ &= \Phi(1) - 0.159 = 0.841 - 0.159 = \underline{\underline{0.682}}. \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at avviket $|X - \mu|$ overstiger 0.06 er

$$\begin{aligned} P(|X - \mu|) > 0.06) &= P(X - \mu < -0.06) + P(X - \mu > 0.06) \\ &= P(\frac{X - \mu}{0.06} < -1) + P(\frac{X - \mu}{0.06} > 1) \\ &= \Phi(-1) + 1 - \Phi(1) = 2(1 - \Phi(1)) = \underline{\underline{0.318}}. \end{aligned}$$

Den samme sannsynligheten kan også regnes ut som følger:

$$\begin{aligned} P(|X - \mu|) > 0.06) &= 1 - P(6.74 < X < 6.86) \\ &= 1 - 0.682 = \underline{\underline{0.318}}. \end{aligned}$$

b) Vi laster opp fila i Matlab og sjekker hvor stor andel av målingene som er lavere enn 6.74.

```
data=load('pH.txt')
N= length(data) %Antall elementer i datasettet. Her: 53.

prob1=sum(data<6.74)/N
```

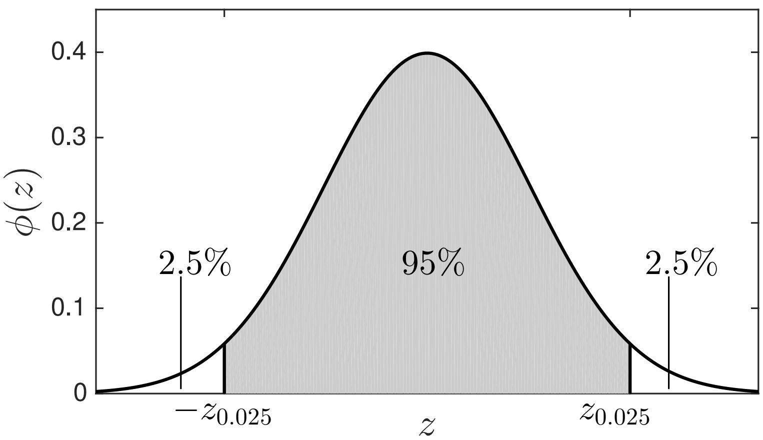
På samme måte undersøker vi hvor stor andel av målingene som er mellom 6.74 og 6.86, og andel målinger der forskjellen mellom målt verdi og $\mu = 6.8$ er større enn 0.06.

```
prob2=sum(data>6.74 & data < 6.86)/N

mu=6.8
prob3=sum(abs(data-mu)>0.06)/N
```

Datasettet gir svarene `prob1=0.0755`, `prob2=0.6415` og `prob3=0.3396` som de empiriske sannsynlighetene for henholdsvis $P(X < 6.74)$, $P(6.74 < X < 6.86)$ og $P(|X - \mu| < 0.06)$. Datasettet gir sannsynligheter som er i nærheten av det vi fant i oppgave **a)**. Hadde vi hatt enda flere målinger i datasettet, ville vi forventet at datasettet hadde gitt oss sannsynligheter som var enda nærmere de teoretiske verdiene fra **a)**.

c) Her er Y gjennomsnittet av de N uavhengige målingene $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_N$, som alle er normalfordelte med forventningsverdi μ og varians σ^2. Siden Y er en lineærkombinasjon



Figur 5: Sannsynlighetstettheten $\phi(z)$ til den standard normalfordelte stokastiske variabelen Z. Kvantilene $\pm z_{0.025} = \pm 1.96$ er markert.

av normalfordelte tilfeldige variable, vet vi at Y selv er normalfordelt. Forventningsverdien og variansen til Y er henholdsvis

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \frac{1}{N}\cdot N\mu = \mu$$

og

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{N^2}\cdot N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N},$$

slik at $Y \sim N(\mu, \sigma^2/N)$.

Den tilfeldige variabelen

$$Z = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{Y - \mu}{\sqrt{\sigma^2/N}}$$

er standard normalfordelt, $Z \sim N(0, 1)$. Et 95% konfidensintervall for μ kan konstrueres ved å ta utgangspunkt i et tilsvarende konfidensintervall for Z (se figur 5), og så manipulere dette slik at μ isoleres,

$$\begin{aligned}
0.95 &= 1 - 2\cdot 0.025 \\
&= P\left(-z_{0.025} \le Z \le z_{0.025}\right) \\
&= P\left(-z_{0.025} \le \frac{Y-\mu}{\sqrt{\sigma^2/N}} \le z_{0.025}\right) \\
&= P\left(Y - z_{0.025}\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} \le \mu \le Y + z_{0.025}\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}\right).
\end{aligned}$$

Vi bruker Matlab til å regne ut gjennomsnittet av de 53 målingene i `pH.txt` og regner ut et konfidensintervall for μ basert på det spesifikke datasettet:

```
N=53
sigma=0.06
y=mean(data)
CI=[y-1.96*sqrt(sigma^2/N),y+1.96*sqrt(sigma^2/N)]
```

For dette datasettet er $y = 6.8108$. Setter vi inn den observerte verdien $y = 6.8108$, variansen $\sigma^2 = 0.060^2$, og 0.025-kvantilen til standard normalfordelingen $z_{0.025} = 1.96$, får vi konfidensintervallet:

$$\left[y - z_{0.025}\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}, y + z_{0.025}\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}\right] = \left[6.8108 - 1.96\sqrt{\frac{0.060^2}{53}}, 6.8108 + 1.96\sqrt{\frac{0.060^2}{53}}\right]$$
$$= \underline{\underline{[6.7946, 6.8269]}}.$$