Løsningsskisser Øving 5, MA1103

Meld fra om feil! K.H.

Oppgave 1 Vi bruker kjerneregelen til å finne $\frac{dy}{dx}$ når $y = y(x)$ er gitt implisitt ved

$$G(x, y) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

der funksjonene som inngår er deriverbare.

a) (*) $\frac{\partial G}{\partial x}\left(\frac{dx}{dx}\right) + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$

(*) Vi kunne ha innført t som en (midlertidig) variabel $x = t$, $y = y(t)$

$$\underline{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G/\partial x\,(x, y(x))}{\partial G/\partial y\,(x, y(x))}} \quad \text{når } \frac{\partial G}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$$

b) $$G(x,y) = x^2 + y^3 + e^y = 0$$

slik at $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial G}{\partial y} = 3y^2 + e^y$, og

$$\underline{\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y^2 + e^y}}$$

Oppgave 2 (2,8:1)

Lineariseringen til $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i a er definert som

$$T_a F(x) = F(a) + F'(a)(x - a)$$

(generalisering av tangentlinjen i én variabel).

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ xy + x \end{pmatrix}; \quad F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y+1 & x \end{pmatrix}$$

Med $a = (-2, 1)$ får vi

$$T_a F(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -4x + 4y - 8 \\ 2x - 2y + 2 \end{pmatrix}}$$

Oppgave 3

Vi skal finne en parametrisering $r(t)$ for kurven

a) $y = e^x$; $r(t) = (t, e^t)$

b) $9x^2 + 16y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4/9} + \frac{y^2}{4/16} = 1$; $u = \frac{x}{2/3}$, $v = \frac{y}{1/2}$ tilfr. $u^2 + v^2 = 1$ som kan parametriseres ved $u = \cos t$, $v = \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$, så

$$\left(\frac{x}{2/3}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/2}\right)^2 = 1$$

$$\underline{r(t) = \left(\tfrac{2}{3}\cos t, \tfrac{1}{2}\sin t\right)}$$

c) linjen gj. $(0,0,0)$ og $(1,2,3)$; $\underline{r(t) = (t, 2t, 3t)}$

Oppgave 4 (3.1:7)

Gitt kurven $r(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

a) Har $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ slik at $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

b) $r'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$, $\|r'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$

$r''(t) = (-a\cos t, -b\sin t) = -(a\cos t, b\sin t) = -r(t)$

c) $O = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$.

Oppgave 5 (3.1:10)

Gitt $r(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\sin t)$

a) $r'(t) = (-2\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t)$, $\|r'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2$

$r''(t) = (-2\cos t, -\sqrt{2}\sin t, -\sqrt{2}\sin t) = -r(t)$

b) $L = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi$

c) Da $x^2 + y^2 + z^2 = 4\cos^2 t + \underbrace{2\sin^2 t + 2\sin^2 t}_{4\sin^2 t} = 4 = 2^2$,
ligger kurven på en kuleflate med sentrum i origo (og radius 2)

d) Da $y = z$ ligger kurven i planet $y = z \Leftrightarrow y - z = 0$
(Kurven er skjæringslinja mellom kuleflata og planet.)

Oppgave 6 (3.1:20)

Har TL definert „kurve"? Vi forstår det slik at det er snakk om billedmengden til en funksjon definert på et intervall, og med en gjennomløpsretning.

$C: r(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, x', y' kont. funksjoner.

$K: s(t) = r(g(t))$, $c \le t \le d$ der $g: [c,d] \to [a,b]$ er en (strengt) voksende bijeksjon med kont. derivert.

a) Har $g^{-1}: [a,b] \to [c,d]$ $s(g^{-1}(t)) = r(g(g^{-1}t)) = r(t)$

Billedmengden til K og C den samme; gjennomløpsretningen like så (fra $r(a)$ til $r(b)$).

b)

$$r(t) = (x(t),\ y(t))\ ;\ a \leq t \leq b$$

$$s(t) = r(g(t)) = (x(g(t)),\ y(g(t))\ ;\ c \leq t \leq d$$

Funksjonene som inngår er deriverbare:

$$r'(t) = (x'(t),\ y'(t))$$

$$s'(t) = (x'(g(t))g'(t),\ y'(g(t))g'(t))$$

og

$$r'(g(t_0)) = \underline{(x'(g(t_0),\ y'(g(t_0)))}$$

$$s'(t_0) = \underline{g'(t_0)(x'(g(t_0)), y'(g(t_0))} \qquad (g'(t_0) \geq 0)$$

c) Skal så vise at buelengden er uavhenging av parametriseringen.

$$\int_c^d \|s'(t)\|\, dt = \int_c^d g'(t)\sqrt{x'(g(t))^2 + y'(g(t))^2}\, dt$$

(MA1101) $\boxed{\begin{matrix} \tau = g(t) \\ g'(\tau) = t \\ g'(t)dt = d\tau \end{matrix}}$

$$= \int_a^b \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}\, d\tau$$

$$= \int_a^b \|r'(\tau)\|\, d\tau$$

Framme!

<u>Oppgave 7</u> (3.2:4) Kjerneregelen for parametriske kurver

Skal regne ut $g'(t)$ når $g(t) = f(r(t), t)$ med $f(x,y,t) = ty^2\ln(x^2+1)$ og $r(t) = (\underset{x}{t^3}, \underset{y}{3t+1})$. Har da:

$$g(t) = f(t^3, 3t+1, t)$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 1 =$$

$$= \frac{2xty^2}{x^2+1}3t^2 + 2ty[\ln(x^2+1)]3 + y^2\ln(x^2+1)$$

$$= \underline{\frac{6t^6(3t+1)^2}{t^6+1} + 6t(3t+1)\ln(x^6+1) + (3t+1)^2\ln(t^6+1)}$$

Oppgave 8 (3.2 : 7)

$f(x,y,t) = 20 + 2t - x^2 + y^2$, $r(t) = (3t - \frac{t^2}{4}, 2t + \frac{t^2}{8})$

$T = f(x,y,t)$. Er $T'(1) > 0$ eller < 0 ?

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 1 = -2(3t - \tfrac{t^2}{4})(3 - \tfrac{2t}{4}) + 2(2t + \tfrac{t^2}{8})(2 + \tfrac{t}{4}) + 2$$

$$T'(1) = -2(3 - \tfrac{1}{4})(3 - \tfrac{1}{2}) + 2(2 + \tfrac{1}{8})(2 + \tfrac{1}{4}) + 2 = 2\,\frac{-67}{32} + 2 < \underline{0}$$

Oppgave 9 (Rett linje korteste veg mellom to punkter!)

Gitt P, Q to punkter i $\mathbb{R}^3$ og la $r_0(t) = tP + (1-t)Q$, $0 \leq t \leq 1$, mens $r(t)$ er en annen kurve mellom Q og P. Vi innfører delepkt. $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = 1$. „Lar vi oppdelingen bli finere og finere er det naturlig å tenke seg at lengden til den brudne kurven nærmer seg seg lengden til den opprinnelig kurven." TL s. 161

$$L(r_0) = \| r_0(0) - r_0(1) \| = \| r(0) - r(1) \| = \| r(t_0) - r(t_N) \|$$
$$= \| r(t_0) - r(t_1) + r(t_1) - r(t_N) \|$$
$$\underset{\text{Trekantulikhet}}{\leq} \| r(t_0) - r(t_1) \| + \underbrace{\| r(t_1) - r(t_N) \|}$$
$$\underset{\text{Trekantulikhet}}{\leq} \| r(t_0) - r(t_1) \| + \underbrace{\| r(t_1) - r(t_2) \| + \| r(t_2) - r(t_N) \|}$$
$$\vdots$$
$$\leq \sum_{i=0}^{N-1} \| r(t_i) - r(t_{i+1}) \|$$

Har da også

$$L(r) = \sup_{\Pi} \sum_{i=0}^{N-1} \| r(t_i) - r(t_{i+1}) \| \geq L(r_0)$$

der Π er en partisjon av $[0,1]$. (Dette er definisjonen av buelengde TL sier er mer tilfredsstillende enn den gitt i 3.1.5.)