Flerdimensjonal analyse (MA1103)

Øving 3

Oppgave 1 (2.3: 1)

Finn grenseverdiene

a) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{x+y}}{x^2+3y}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cos(x+y)$.

Oppgave 2

Anta at

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{for} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{for} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vis at f er ikke kontinuerlig i punkt (0,0).

Oppgave 3 (2.4: 1)

Finn de partiellderiverte til f.

a) $f(x,y) = x^3y + 3xy^4$

b) $f(x,y) = \frac{x^2+x^3}{y}$

c) $f(x,y) = x^2 \ln(xy^2)$

d) $f(x,y,z) = (x+y)e^{-z}$

Oppgave 4 (2.4: 2)

Finn gradienten til funksjonen:

a) $f(x,y) = x^2y$

b) $f(u,v,w) = we^{u\cos(v)}$

Oppgave 5 (2.4: 3)

Finn den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$:

a) $f(x,y) = 3xy + y^2; \quad \mathbf{a} = (1,2); \quad \mathbf{r} = (3,-1)$

b) $f(x,y) = \ln(x+y^2); \quad \mathbf{a} = (1,0); \quad \mathbf{r} = (-1,1)$

Oppgave 6 (2.4: 4)

I hvilken retning vokser funksjonen hurtigst i det angitte punktet?

a) $f(x, y) = -x^2y + 7y^3; \quad \mathbf{a} = (4, -3)$

b) $f(x, y, z) = (x^2 - y^2)e^z; \quad \mathbf{a} = (1, -1, 3)$

Oppgave 7 (2.4: 7)

Anta at

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{for} \qquad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{for} \qquad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Vis at $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Hva er $\nabla f(0, 0)$?

b) Vis at selv om de retningsderiverte til f existerer i $\mathbf{0}$, er funksjonen verken kontinuerlig eller deriverbar i punktet.

c) Bruk definisjonen av retningsderivert til å vise at $f'(\mathbf{0}; \mathbf{r}) = \frac{r_1^2}{r_2}$ der $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, $r_2 \neq 0$.

d) Vis at for denne funksjonen gjelder ikke likheten $f'(\mathbf{0}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}$. Hvorfor motsier det ikke setning 2.4.8?

Oppgave 8

Begrunn at funksjonen $f(x, y) = (x + y)^3 \sin\left(\frac{1}{x+y}\right)$ er deriverbar i $(0, 0)$.

Oppgavene finnes i boka *Flervariabel analyse med lineær algebra* av T.Lindstrøm og K.Hveberg. Se henvisningen i parentes.