Øving 11

Matematikk 4K

Uke 45

15.3

1 I kalkulus lærer vi at potensrekker $\sum_{n=0} a_n x^n$ opprettholder teorem 3 og 4 og om Cauchy produktet. Videre vet lærer vi om Taylor serier, og om at enkelte funksjoner; som e^x, har en Taylor serie representasjon som konvergerer til den orginale funksjonen overalt. Ved å se på de reele tallene som et subset av de komplekse, har vi at matrialet i delkapitelet er en generalisering av det vi lærte i kalkulus.

7 Vi skal finne konvergensradien til $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} (z+2i)^{2n}$.

a) Bruker vi Hademar formelen på serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} w^n$ får vi

$$1/R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{5n} \right| = 1/5.$$

Dermed konvergerer summen for $|w| = |(z+2i)^2| < 5$, som medfører at $|(z+2i)| < \sqrt{5}$. Så konvergensradien er $\sqrt{5}$.

b) Vi kan bruke at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} (z+2i)^{2n} = \frac{(z+2i)}{2\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(\frac{z+2i}{\sqrt{5}} \right)^{2n-1}.$$

Den antideriverte til denne serien er

$$\frac{(z+2i)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{\sqrt{5}} \right)^{2n}.$$

Vi har at serien $\sum_{n=1}^{\infty} w^n$, konvergerer for $|w| \le 1$. Setter vi $w = \left(\frac{z+2i}{\sqrt{5}}\right)^2$ får vi at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{\sqrt{5}} \right)^{2n}$$

konvergerer for $|z+2i| \le \sqrt{5}$. Dette medfører at konvergensradiusen til den orginale sekvensen er $\sqrt{5}$.

15 Vi skal finne konvergensradien til $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n n(n-1)}{3^n} (z-i)^n$.

a) Bruker vi Hademar formelen får vi

$$1/R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{5^{n+1} n(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{5^n n(n-1)}{3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5(n+1)}{3(n-1)} \right| = 5/3.$$

Dermed er konvergensradien 3/5.

b) Vi kan bruke at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n n(n-1)}{3^n} (z-i)^n = \frac{25(z-i)^2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (n+2)(n+1)}{3^n} (z-2i)^n .$$

Ser vi på serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (n+2)(n+1)}{3^n} (z-i)^n$ har vi at denne serien er den andrederiverte av serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n} (z-i)^n$. Siden derivering ikke forandrer konvergensradien, og konvergensradien til $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5(z-i)}{3}\right)^n$ er $3/5$, siden $\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ har konvergensradius 1. Dermed har vi at konvergensradien er $3/5$.

15.4

5 Vi har at

$$\frac{1}{8+z^4} = \frac{1}{8} \frac{1}{1-(-z^4/8)}.$$

Ved å bruke at

$$\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w},$$

kan vi ved å sette $w = \frac{-z^4}{8}$ få at

$$\frac{1}{8+z^4} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} z^{4n}.$$

Videre vet vi at serien konvergerer når $|w| < 1$, noe som medfører at $|z^4/8| < 1$ som er ekvivalent med at $|z| < 8^{1/4}$ som er konvergensradien.

9 Vi vet at $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$, noe som medfører at $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$ ved å sette $w = -t^2$. Denne serien konvergerer overalt, siden konvergensradien til e^w er ∞. Ved å bruke teorem 4 i seksjon 15.3, har vi at

$$\int_0^z e^{-t^2} dz = e^0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)\, n!},$$

som også har konvergensradius ∞.

24 Vi har at $z(z-2) = (z-1)^2 - 1$, og dermed er $e^{z(z-2)} = \frac{e^{(z-1)^2}}{e}$. Siden serien for $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ har vi at

$$e^{(z-1)^2}/e = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n!}.$$

Siden vi har at serien konvergerer for $|w| = |(z-1)^2| < \infty$ er konvergensradien ∞.

15.5

10 Av teorem 1 på side 699 har at serien konvergerer uniformt for alle $|z| \leq r$ hvor r er ekte mindre en konvergensradien. Ved å bruke Hademar teoremet har vi at

$$1/R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0,$$

og dermed er $R = \infty$. Ved å sette $r = 10^{20}$ har vi at serien konvergerer uniformt for $|z| \leq 10^{20}$.

18e Hvis $x = 0$ har vi $s_n = 0^2 \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(1+0^2)^m} = 0$, og dermed konvergerer sekvensen til 0.

Når $x \neq 0$ har vi at

$$s_n = x^2 \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(1+x^2)^m} = x^2 \frac{\sum_{m=0}^{n-1} \left(1+x^2\right)^m}{\left(1+x^2\right)^n}.$$

Ved å bruke at $\sum_{m=1}^{n-1} w^m = \frac{w^n - 1}{w-1}$ har vi at

$$x^2 \frac{\sum_{m=0}^{n-1} \left(1+x^2\right)^m}{\left(1+x^2\right)^n} = x^2 \frac{\frac{\left(x^2+1\right)^n - 1}{x^2}}{\left(1+x^2\right)^n} = 1 - \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}.$$

Siden $x \neq 0$ har vi at $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 0$, og dermed er $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$