Øving 10

Matematikk 4K

Uke 44

14.3

5 Av Cauchy integralformel vet vi at

$$2\pi i f\left(a\right)=\int_C \frac{f\left(z-a\right)}{z-a}dz,$$

hvor C er orientert mot klokken og inneholder a. Dermed har vi at

$$\frac{\pi i}{2}=\frac{2\pi i\cos\left(2\times 0\right)}{4}=\int_C \frac{\cos\left(2z\right)}{4z}dz.$$

12 Vi har at $z^2+4z+3=\left(z+1\right)\left(z+3\right)$. Dermed er den eneste singulariteten som er inneholdt i kurven lik $z=-1$. Dermed får vi av Cauchy integralteoremet at

$$\frac{-2\pi i}{-1+3}=-\pi i=\int_C \frac{z}{z^2+4z+3}dz.$$

14.4

2 Observer at punktet $z_0=1/2$ er inneholdt i kurven. Vi har at $f\left(z\right)=z^6/2^6$, da er $f^5\left(z\right)=6!z/2^6$. Videre har vi at

$$f^5\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi i}{5!}=\frac{2\pi i6!}{2^6 5!\times 2}=3\pi i/32=\int_C \frac{f\left(z\right)}{2^6\left(z-1/2\right)^6}dz=\int_C \frac{f\left(z\right)}{\left(2z-1\right)^6}dz.$$

10 Om vi ser på bildet har vi ett dobelt samenhengende domene. I dette tilfellet har vi at ved å først følge C_1, deretter $-C_3$, gå rundt C_2 og tilsist tilbake med C_3, får vi en kurve som bare inneholder $z_0=i+1$. Setter vi $f\left(z\right)=\frac{4z^3-6}{z}$ får vi at $f'\left(z\right)=\frac{12z^3-4z^3+6}{z^2}=\frac{8z^3+6}{z^2}$, og om vi setter inn punktet z_0 får vi $f\left(1+i\right)=8+5i$. Bruker vi Teorem 1 på side 664 får vi

$$\int_C \frac{4z^3-6}{z\left(z-1-i\right)^2}dz=2\pi i f'\left(i+1\right)=2\pi i\left(8+5i\right)=16\pi i-10\pi.$$

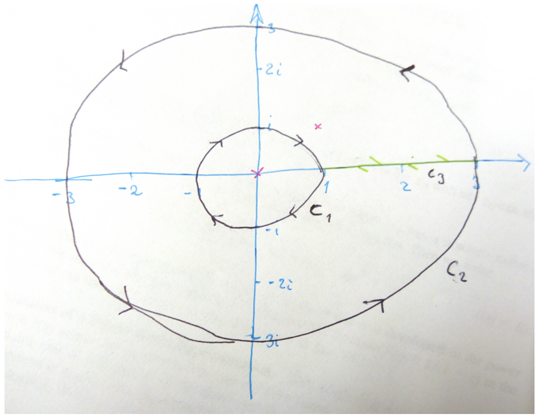
18 Vi har at $f\left(z\right)=\sinh\left(z\right)$, i dette tilfellet har vi at den deriverte er

$$f^{(n)}\left(z\right)=\begin{cases}\sinh\left(z\right) & \text{hvis } n \text{ er jevn,}\\ \cosh\left(z\right) & \text{hvis } n \text{ er odd.}\end{cases}$$

Dermed har vi at

$$f^{(n)}\left(0\right)=\begin{cases}0 & \text{hvis } n \text{ er jevn,}\\ 1 & \text{hvis } n \text{ er odd.}\end{cases}$$

$$\int_C \frac{\sinh\left(z\right)}{z^n}dz=\frac{2\pi i}{\left(n-1\right)!}f^{n-1}\left(0\right)=\begin{cases}0 & \text{hvis } n \text{ er odd,}\\ \frac{2\pi i}{(n-1)!} & \text{hvis } n \text{ er jevn.}\end{cases}$$



Figur 1: Bilde av integrasjonen i oppgave 14.4.10.

15.1

17 Av Teorem 2 på side 674 kan vi se på den reele delen og den imaginere delen hver for seg og skjekke om de konvergerer istedenfor. får vi at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n)} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}.$$

Bruker vi alternerende rekke testen har vi at hver av sekvensene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n)}$ konvergerer. Dette medfører at rekken konvergerer.

23 Hvis vi bruker ratio testen på serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+i)^{2n}}{(2n)!},$$

får vi at

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(1+i)^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n(1+i)^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1+i)^2}{(2n+1)(2n+2)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} = 0.$$

Siden vi har at $L < 1$ er serien absolutt konvergent, og dermed også konvergent.

24 Bruker vi ratiotesten på

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3i)^n n!}{n^n},$$

får vi at

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(3i)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(3i)^n n!}{n^n}} \right| = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 3 \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 3/e > 1.$$

Siden vi har at $L > 1$ er serien divergent.

15.2

7 Vi har at serien er sentrert i $\pi/4$, siden $z_0 = \pi/4$. Bruker vi Cauchy-Hadamard formelen får vi at

$$1/R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

Dermed er konvergensradiusen $R = \infty$.

17 Vi har at serien er sentrert i origo, siden $z_0 = 0$. La oss først se på konvergensradiusen til

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} w^n.$$

Bruker vi Cauchy-Hadamard formelen får vi at

$$1/R' = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(3)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{(3)^n}{n(n+1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n(n+1)}{(n+2)(n+1)} = 3.$$

Dermed har vi at $R' = 1/3$, noe som medfører at konvergensradiusen til

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^{2n},$$

er $1/\sqrt{3} = R$. Om vi istedenfor ser på

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^{2n+1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^{2n},$$

har vi at konvergensradiusen også er $1/\sqrt{3}$.