Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Løsningsforslag — Øving 11

Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript s, bør gjøre b, og kan gjøre k.

$\boxed{1}$ Gjør oppgave $1^s, 2^s, 9^b, 11^s, 13^s, 14^s, 19^s$ og 26^b på **side 314-316.**

1) Egenvektorer i X og egenvektorer i Λ. Man får da at $A = X\Lambda X^{-1}$ er

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den andre matrisen har $\lambda = 0$ (og rang 1) og $\lambda = 4$. Man får da at $A = X\Lambda X^{-1}$ er

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

2) Som i forrige oppgave, lar vi X bestå av egenvektorer og Λ av egenverdier langs diagonalen, her 2 og 5.

$$A = X\Lambda X^{-1}X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

9) (a) Likningene er $\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}$ med $A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Denne matrisen har $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ med $x_1 = (1, 1)$, $x_2 = (1, -2)$.

(b)

$$A^n = X\Lambda^n X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-0,5)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \to A^\infty = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

11) (a) Sann; (b) Usann; (c) Usann.

13) $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$; de eneste egenvektorene er $\mathbb{x} = (c, -c)$.

14) Rangen av $A - 3I$ er $r = 1$. Å endre hvilket som helst element forskjellig fra $a_{12} = 1$ gjør A diagonaliserbar (den nye A vil ha to forskjellige egenvektorer).

19)

$$B^k = X\Lambda^k X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^k & 5^k - 4^k \\ 0 & 4^k \end{bmatrix}.$$

26) Det er to problemer: Nullrommet og kolonnerommet kan overlappe, slik at $\mathbb{x}$ kan være i begge. Det kan forekomme at det ikke er r lineært uavhengige egenvektorer i kolonnerommet.

$\boxed{2}$ Anse denne oppgaven som merket k. La A være en $n \times n$-matrise med egenverdier $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t\}$ der $\lambda_i \neq \lambda_j$ når $i \neq j$. La $\mathcal{B}_i$ være en basis for E_{λ_i} for $i = 1, 2, \ldots, t$. Husk at $E_{\lambda_i} = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \lambda_i \mathbb{x}\}$. Vis at da er $\bigcup_{i=1}^t \mathcal{B}_i$ en basis for $\text{LinSpan}(\bigcup_{i=1}^t \mathcal{B}_i)$.

Løsning: Det er åpenbart at $\bigcup_{i=1}^t \mathcal{B}_i$ spenner $\text{LinSpan}(\bigcup_{i=1}^t \mathcal{B}_i)$ slik at det kun gjenstår å vise at vektorene i $\bigcup_{i=1}^t \mathcal{B}_i$ er lineært uavhengige. Vi bruker induksjon, og vi antar at basiselementene i hver $\mathcal{B}_i$ er ordnet i en bestemt rekkefølge. Grunnsteget er åpenbart. La derfor $\bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{B}_i \cup \{\mathbb{b}_{k,1}, \ldots, \mathbb{b}_{k,l-1}\}$ være en lineært uavhengig mengde, og la $\mathbb{b}_{i,l} \in \mathcal{B}_i$. Vi lar induksjonssteget bestå av å vise at $\bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{B}_i \cup \{\mathbb{b}_{k,1}, \ldots, \mathbb{b}_{k,l-1}, \mathbb{b}_{k,l}\}$ er en lineært uavhengig mengde.

Betrakt nå

$$\mathbb{b}_{i,l} = \sum_{1 \le i \le k} \sum_{1 \le j \le l-1} c_{i,j} \mathbb{b}_{i,j}.$$

Man får da at

$$A\mathbb{b}_{k,l} = \lambda_{k,l} \mathbb{b}_{k,l} = \sum_{1 \le i \le k} \sum_{1 \le j \le l-1} \lambda_{i,j} c_{i,j} \mathbb{b}_{i,j}.$$

Hvis $\lambda_{k,l} = 0$ får vi så en kontradiksjon siden vi da har en relasjon av lineær avhengighet mellom elementer i en basis. Samtidig får vi også en slik relasjon hvis $\lambda_i \neq 0$ siden vi da får

$$\mathbb{b}_{i,l} = \sum_{1 \le i \le k} \sum_{1 \le j \le l-1} \lambda_{i,j} c_{i,j} \mathbb{b}_{i,j} = \sum_{1 \le i \le k} \sum_{1 \le j \le l-1} \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{k,l}} c_{i,j} \mathbb{b}_{i,j}$$

slik at vi også i dette tilfellet får en kontradiksjon. Med andre ord må induksjonssteget holde, og resultatet følger ved induksjon.

$\boxed{3}$ Anse denne oppgaven som merket k. Vis at følgende er ekvivalent for en $n \times n$-matrise A.

(i) A er ortogonal.

(ii) Radvektorene i A er en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$.

(iii) Kolonnevektorene i A er en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$.

Løsning: Husk at en matrise A kalles ortogonal hvis $A^T A = AA^T = I$. Husk også at en mengde vektorer $\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_m\}$ er ortonormal hvis $\mathbb{v}_i \cdot \mathbb{v}_j$ er lik 1 hvis $i = j$ og null ellers. Med andre ord, en ortonormal mengde er en mengde ortogonale enhetsvektorer.

(i) medfører (iii): Merk at $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} = [c_1|c_2|\cdots|c_n]$ hvor c_i er den i-ende kolonnen. Siden A er ortogonal, får vi ved å sammenligne begge sidene av $A^T A = I$ at $c_i^T \cdot c_j$ er lik 1 hvis $i = j$ og 0 ellers. (Husk at et element i en identitetsmatrise er lik 1 hvis det ligger på diagonalen og er null ellers.) Siden dette er det samme som at kolonnene danner en ortonormal mengde, følger implikasjonen.

(iii) medfører (i): Vi kan kjøre argumentet ovenfor baklengs og få at hvis kolonnene danner en ortonormal mengde, så får man at $A^T A = I$. Siden A er en kvadratisk matrise, medfører $A^T A = I$ at $A^T = A^{-1}$, slik at også $AA^T = I$, som er tilstrekkelig.

Bevis for (i) medfører (ii) og (ii) medfører (i) kan gis ved argumenter nesten identiske med kun noen få endringer: vi ser på radene som en ortonormal mengde og $AA^T = I$ istedenfor kolonnene som en ortonormal mengde og $A^T A = I$.

Et nytt tallsystem

Vi skal fortsette med konstruksjonen av vårt nye tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. Vi må spørre oss hvilke egenskaper vi ønsker at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:

- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutativ*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.
- *additiv invers:* Gitt z, så eksisterer z' slik at

$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:

- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
- *distributive lover:*
  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *høyre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.
- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at

$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$

- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer z' slik at
$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$
- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker 2×2-matriser over de reelle tallene.

La A være en 2×2-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La

$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

For eksempel,

$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$

og

$$Y = A - \sqrt{2}A^3$$

er elementer i S.

Nummereringen av oppgavene følger den fra tidligere øvinger.

(i^k) For hvilke elementer X i S eksisterer det X' slik at

$$XX' = I_2 = X'X?$$

Hvis $X = a_0 I_2 + a_1 A = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 a & a_1 b \\ -\frac{a_1(1+a^2)}{b} & a_0 - a_1 a \end{bmatrix}$ og a_0 og a_1 er slik at X' eksisterer, hva er X'? Er X' igjen i S?

Løsning: $X = a_0 I_2 + a_1 A$ har en multiplikativinvers X' hvis og bare hvis $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$, eller hvis det er ikke tilfellet at $a_0 = a_1 = 0$. At dette må holde følger fra siste oppgave fra forrige øving.

For andre del av oppgaven, kan man utvide matrisen til X med I_2 og finne inversen som en matrise, man kan bruke Cramer's regel, eller så kan man gjøre som følger:

Man kan også observere

$$\begin{aligned}(a_0 I_2 + a_1 A)(a_0' I_2 + a_1' A) &= a_0 a_0' I_2 + a_1 a_1'(-I_2) + a_0 a_1' A + a_0' a_1 A \\ &= (a_0 a_0' - a_1 a_1') I_2 + (a_0 a_1' + a_0' a_1) A\end{aligned}$$

og se at hvis $a_0 a_0' - a_1 a_1' = 1$ og $a_0 a_1' + a_0' a_1 = 0$ holder, så må $X' = a_0' I_2 + a_1' A$ være tilstrekkelig. (Merk at gitt $X = a_0 I_2 + a_1 A$ så svarer dette til å løse et likningssystem bestående av to likninger i to ukjente som er løselig siden $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$.) Dette viser i tillegg at X' er også i S.

(j^k) La $R = \{(a_0, a_1) \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, dvs. $R = \mathbb{R}^2$. Definer *addisjon* i R som addisjon i $\mathbb{R}^2$, dvs.

$$(a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1).$$

Definer en operasjon som vi kaller *multiplikasjon* i R ved at

$$(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) = (a_0 b_0 - a_1 b_1, a_0 b_1 + a_1 b_0).$$

La $x = (a_0, a_1)$, $y = (b_0, b_1)$ og $z = (c_0, c_1)$ i R. Forklar uten regning hvorfor følgende holder:

- $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- $x + y = y + x$,
- Det eksister 0_R i R slik at
$$0_R + x = x = x + 0_R,$$
- Gitt x i R, så eksisterer det x' i R slik at
$$x + x' = 0_R = x' + x,$$
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,
- Det eksisterer 1_R i R slik at
$$1_R \cdot x = x = x \cdot 1_R,$$
- $x \cdot y = y \cdot x$,

for alle x, y og z i R.

Løsning: Det er tilstrekkelig å velge en 2×2-matrise A som tilfredsstiller $A^2 = -I_2$, og se at hvis vi lar (a_0, a_1) svare til $a_0 I_2 + a_1 A$, så vil mengden S definert av A og $\mathbb{R}^2$ ha de samme operasjonene: definisjonen for addisjon og multiplikasjon for $\mathbb{R}^2$ svarer til operasjonene for S som gitt i denne og tidligere øvinger. Alle egenskapene man skal vise for $\mathbb{R}^2$ følger da av at egenskapene holder for S, som er nettopp det vi har vist i denne og foregående øvinger.