Flerdimensjonal analyse (MA1103)

Øving 12

Oppgave 1 (6.5: 4)

Regn ut arealet avgrenset av kurven $\mathbf{r}(t) = (a\cos^3(t), b\sin^3(t)), t \in [0, 2\pi]$, der a ob b er to positive tall.

Oppgave 2 (6.5: 7)

La D være området i $\mathbb{R}^2$ som består av punkter (x, y) som oppfyller ulikhetene $x^2 + y^2 \leq 1$ og $y \geq 0$. La C være randen til D orientert mot urviseren. Finn verdien av kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathbf{F}(x, y) = (xy + \ln(x^2 + 1), 4x + e^{y^2} + 3\arctan(y))$

Oppgave 3 (6.5: 12)

En ellipse har ligningen

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$$

a) Finn sentrum og halvaksene til ellipsen, og lag en skisse av ellipsen i koordinatsystemet.

b) Vis at $\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos(t), -2 + 3\sin(t)), t \in [0, 2\pi)$, er en parametrisering av ellipsen. Regn ut $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x)$$

og C er ellipsen med positv orientering.

c) Regn ut

$$\iint_R (1 - 2y)\, d(x, y),$$

der R er området avgrenset av ellipsen.

Oppgave 4 (6.5: 13)

Det er en nær sammenheng mellom Greens teorem og teorien for konservative vektorfelt i seksjon 3.5. Bruk Greens teorem til å vise at dersom $\mathbf{F}$ er et konservativt felt, så er $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for alle enkle, lukkede, stykkevis glatte kurver C.

Oppgave 5 (6.9: 1,2)

Beregne trippelintegralene:

i) $\iiint_A xyz\, d(x, y, z)$ når $A = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

ii) $\iiint_A (xy + z)\, d(x, y, z)$ når $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq x^2y\}$.

Oppgave 6 (6.10: 5)

Regn ut

$$\iiint_R \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y,z),$$

der $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

Oppgave 7 (6.11: 3)

Finn volumet av den delen av kulen $x^2+y^2+z^2 = R^2$ som ligger over kjegleflaten $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.

Oppgave 8 (6.11: 11)

R er området i $\mathbb{R}^3$ avgrenset av flatene $z = 6 - x^2 - y^2$ og $z = x^2 - 4x + y^2$.

a) Vis at integralet $I = \iiint_R y\, d(x,y,z)$ er lik

$$\iint_S (6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy)\, d(x,y)$$

der $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) Regn ut integralet i a)

c) C er skjæringskurven mellom flatene $z = 6 - x^2 - y^2$ og $z = x^2 - 4x + y^2$, og den er orientert mot klokken sett ovenfra. Vis at C har parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos(t), 2\sin(t), 1 - 4\cos(t))$$

og regn ut kurveintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der $\mathbf{F}(x,y,z) = (z,y,x)$.

Oppgavene finnes i boka *Flervariabel analyse med lineær algebra* av T.Lindstrøm og K.Hveberg. Se henvisningen i parentes.