



Norges teknisk-naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i
matematikk B
Vår 2017

Løsningsforslag — Øving 11

Oppgaver fra boken:

10.6 : 3, 8, 12, 19, 31, 33 (valgfritt - 9, 26, 29).

10.6:3 Finn og klassifiser alle kandidater til lokale ekstremalpunkter til funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = x^2y - 4x^2 - 4y.$$

Løsning:

(x, y) er et kritisk punkt hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= (2xy - 8x, x^2 - 4) \\ &\iff \\ 2xy - 8x &= 0 \text{ og } x^2 - 4 = 0 \\ \implies x &= \pm 2 \text{ eller } 0 \text{ og } y = 4 \text{ eller } 0. \end{aligned}$$

Dermed har vi fått tre kritiske punkter $(0,0)$, $(2,4)$ og $(-2,4)$. Vi bruker Determinantmetoden til å klassifisere disse kritiske punkter:

$$\begin{aligned} D &= f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - 8 \\ f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \end{aligned}$$

så på punktet $(2,4)$

$$f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = 4 \quad f_{yy} = 0 \implies D = 0 - 4 = -4 < 0$$

Dermed punkt $(2,4)$ er sal punkt. Nå sjekker vi punkt $(-2,4)$:

$$f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = 4 \quad f_{yy} = 0 \implies D = 0 - 4 = -4 < 0$$

Dermed punkt $(-2,4)$ er også et sal punkt. Til slutt sjekker vi punkt $(0,0)$:

$$f_{xx} = -8 \quad f_{xy} = 0 \quad f_{yy} = 0 \implies D = -8(0) - 0 = 0$$

Når $D = 0$, da er testen ubrukbart eller ikke avgjørende.

10.6:8 Finn og klassifiser alle kandidater til lokale ekstremalpunkter til funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = yxe^{-y}$$

Løsning:

(x, y) er et kritisk punkt hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla f(x, y) \\ &= (ye^{-y}, xe^{-y} - xye^{-y}) \\ &= (ye^{-y}, x(1 - y)e^{-y}) \\ &\iff \\ (x, y) &= (0, 0). \end{aligned}$$

Dermed er $(0,0)$ et kritiske punkt. Vi bruker Determinant-metoden til å klassifisere dette punktet:

$$\begin{aligned} D &= f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -xe^{-y} - x(-ye^{-y} + e^{-y}) = -xe^{-y} + xye^{-y} - xe^{-y} = xe^{-y}(y - 2) \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-y} - ye^{-y} \end{aligned}$$

så på punktet $(0,0)$

$$f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = 1 \quad f_{yy} = 0 \implies D = 0 - 1 = -1 < 0$$

Dermed punkt $(0,0)$ er sal punkt.

10.6:9 Finn og klassifiser alle kandidater til lokale ekstremalpunkter til funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = x \cos y.$$

Løsning:

(x, y) er et kritisk punkt hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla f(x, y) \\ &= (\cos y, -x \sin y) \\ &\iff \\ y &= \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{og} \quad x = 0. \end{aligned}$$

Det er altså uendelig mange kritiske punkter, men alle ligger jevnt fordelt på y -aksen. Vi bruker Determinant-metoden til å klassifisere disse kritiske punktene:

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \cos y \\f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin y\end{aligned}$$

så på punktet $(0, \frac{\pi}{2} + n\pi)$

$$f_{xx} = 0; \quad f_{xy} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^{n+1}; \quad f_{yy} = 0$$

$$\implies D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0 - ((-1)^{n+1})^2 = -(-1)^{2(n+1)} = -((-1)^2)^{n+1} = -1 < 0$$

Dermed punkt $(0,0)$ er sal punkt.

10.6:12 La a og b være to konstanter og la $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y) = ax^2 + by^2.$$

- a) Vis at $\nabla f(0, 0) = \mathbf{0}$.
- b) Finn betingelsene på a og b slik at $(0,0)$ er henholdsvis et lokalt minimum, maksimum og et sadelpunkt.

Løsning: a)

$$\nabla f(0, 0) = \nabla f(x, y)|_{(x,y)=(0,0)} = (2ax, 2by)|_{(x,y)=(0,0)} = (0, 0).$$

Løsning: b)

Andregrads partielle deriverte til f er

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a \\f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \\f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \\D &= f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = 0\end{aligned}$$

Nå er

$$D = 0, \quad f_{xx}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2a,$$

så dermed kan vi konkludere at $(0,0)$ er

- et lokalt minimum hvis og bare hvis a og b begge er positive,
- et lokalt maksimum hvis og bare hvis a og b begge er negative,
- et sadelpunkt hvis og bare hvis a og b har forskjellig fortegn.

10.6:19 Finn absolutt maksimum til funksjonen $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = 2xy - x^2y - xy^2$$

der domenet er trekanten

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}.$$

(tegn figur!)

Løsning:

Funksjonen er deriverbar (og dermed kontinuerlig) på et lukket og begrenset domene. Dermed finnes et absolutt maksimum, og det ligger enten i et kritisk punkt eller på randen. Vi finner først de kritiske punktene:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla f(x, y) \\ &= (2y - 2xy - y^2, 2x - x^2 - 2xy) \\ &\iff \\ 0 &= 2y - 2xy - y^2 = y(2 - 2x - y), \quad \text{og} \\ 0 &= 2x - x^2 - 2xy = x(2 - 2y - x) \\ &\iff \\ y &= 0 \quad \text{eller} \quad y = 2 - 2x \\ &\text{og} \\ x &= 0 \quad \text{eller} \quad x = 2 - 2y \end{aligned}$$

Her er det fire forskjellige kombinasjoner av løsninger: $(x, y) = (0, 0), (2, 0), (0, 2)$ eller $(2/3, 2/3)$. Alle ligger i domenet til f og er kandidater til maksima. Merk at de tre første punktene er hjørnene til trekanten.

Randen består av tre rette linjestykker. Vi må finne kandidater til maksima til f på linjene. På linjestykkene er verdien av f en funksjon av én variabel.

På linjestykket $0 \leq x \leq 2, y = 0$ kan f skrives som

$$f(x, 0) = 0.$$

Vi må nå finne kandidater til maksima til funksjonen f langs linje gitt ved $0 \leq x \leq 2, y = 0$, men fordi $y \equiv 0$, så f har altså verdi 0 langs hele denne linjen.

Linjestykket $x = 0, 0 \leq y \leq 2$ kan f skrives som

$$f(0, y) = 0.$$

Vi må nå finne kandidater til maksima til funksjonen f langs linje gitt ved $0 \leq y \leq 2, x = 0$. Men igjen er $x \equiv 0$, så f har altså verdi 0 langs hele denne linjen.

Linjestykket mellom hjørnene $(0, 2)$ og $(2, 0)$, der $x + y = 2$, kan f skrives som

$$\begin{aligned} f(x, 2 - x) &= 2x(2 - x) - x^2(2 - x) - x(2 - x)^2 \\ &= x(2(2 - x) - x(2 - x) - (2 - x)^2) \\ &= x(4 - 2x - 2x + x^2 - (4 + x^2 - 4x)) \\ &= x(4 - 4x + x^2 - 4 - x^2 + 4x) = x(0) = 0. \end{aligned}$$

Altså er $f = 0$ på hele randen. Nå er

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) &= 2\frac{2}{3}\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{8}{27} > 0 \end{aligned}$$

hvilket beviser at f har et absolutt maksimum i $(x, y) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

(f har absolutt minimum lik 0 i alle punktene på randen)

10.6:26 Anta $f(x, y)$ har et horisontalt tangentplan i $(0, 0)$. Kan du konkludere at f har et lokalt ekstremalpunkt i $(0, 0)$?

Løsning:

Nei. Det kan være et sadelpunkt.

10.6:29 Finn det maksimale volumet en rektangulær boks med seks sider kan ha, når overflatearealet er $A = 48 \text{ m}^2$.

Løsning:

La x, y og z være dimensjonene til boksen. Volumet er da $V = xyz$ og overflatearealet er $A = 2(xy + xz + yz)$. (Tegn figur!).

Det er oppgitt at $A = 48$ så høyden på boksen, z , er en funksjon av x og y :

$$z(x, y) = \frac{A/2 - xy}{x + y} = \frac{24 - xy}{x + y}. \quad (1)$$

Dermed kan volumet, som vi skal maksimere, også uttrykkes som en funksjon av x og y .

$$V(x, y) = xyz(x, y) = xy \frac{24 - xy}{x + y}.$$

Før vi kan maksimere denne funksjonen, må vi vite hvilket domene den har. Alle sidene x, y og z må være ikke-negative, men, som vi ser fra (2), kan ikke x og y være 0 sammtidig. Altså må $x \geq 0$ og $y \geq 0$ og $(x, y) \neq (0, 0)$. Fra (2) ser vi at $xy \leq 24$. Tilsammen gir dette domenet

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{24}{x} \right\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Vi kan *ikke* konkludere at det finnes et absolutt maksimum ettersom domet er ikke lukket og begrenset, men vi kan finne kritiske punkter og avgjøre om de er lokale maksimum. (x, y) er et kritisk punkt hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla V(x, y) \\ &= \left(yz(x, y) + xy \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), xz(x, y) + xy \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right) \end{aligned}$$

nå er

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{24 + y^2}{(x + y)^2}$$

og

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{24 + x^2}{(x + y)^2}$$

så vi må ha

$$y \frac{24 - xy}{x + y} = xy \frac{24 + y^2}{(x + y)^2}$$

og

$$x \frac{24 - xy}{x + y} = xy \frac{24 + x^2}{(x + y)^2}.$$

Dette er ekvivalent med

$$y(24 - xy)(x + y) = xy(24 + y^2)$$

og

$$x(24 - xy)(x + y) = xy(24 + x^2)$$

ettersom $x + y > 0$. Vi forenkler videre:

$$\begin{aligned} 24y^2 - x^2y^2 &= 2xy^3 \\ 24x^2 - x^2y^2 &= 2x^3y \end{aligned}$$

Vi ser at hvis $y = 0$, så medfører det at $x = 0$ og omvendt. Dermed kan vi fastslå at $x > 0$ og $y > 0$.

$$\begin{aligned} 24 - x^2 &= 2xy \\ 24 - y^2 &= 2xy \\ &\iff \\ x^2 &= y^2 \\ 24 &= 3x^2 \\ &\iff \\ (x, y) &= (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

der vi hele tiden har brukt at $x, y > 0$.

Hvis V har et maksimum, så må det altså ligge i $(x, y) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Vi kunne ha sjekket om dette er et lokalt maksimum ved å beregne Determinanten, men vi ville i såfall uansett ikke hatt redskaper til å kunne avgjøre om dette punktet er et *absolutt* maksimum.

Det maksimale volumet, hvis det eksisterer, er

$$V(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot z(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2}.$$

Kommentar:

Ikke overaskende, er det kubene som gir det største volumet. Dette kunne vært forutsett pga. **symmetrien** i funksjonene V og z , nemlig at for alle $(x, y) \in \mathcal{D}$ er

$$z(y, x) = \frac{24 - yx}{y + x} = \frac{24 - xy}{x + y} = z(x, y)$$

og

$$V(y, x) = yxz(y, x) = xyz(x, y) = V(x, y).$$

Så hvis punktet (x_0, y_0) er et absolutt maksimum, er også punktet (y_0, x_0) et absolutt maksimum fordi $V(x_0, y_0) = V(y_0, x_0)$.

Hvis det nå finnes kun ett absolutt maksimum, så må $(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$, dvs $x_0 = y_0$ og vi trenger bare å lete etter det på den parametriserte linjen $c(t) = (t, t)^T$ for $t \in (0, 2\sqrt{6})$. (når $x, y = 2\sqrt{6}$ er $y = 24/x$). På linjen c er volumet gitt som en funksjon av én variabel

$$\begin{aligned} g(t) &= V(t, t) \\ &= t^2 \frac{24 - t^2}{2t} \\ &= \frac{1}{2} (24t - t^3). \end{aligned}$$

Det kritiske punktet er gitt ved

$$0 = g'(t) = \frac{1}{2} (24 - 3t^2)$$

med løsning $t = \sqrt{\frac{24}{3}} = 2\sqrt{2}$. Altså,

hvis V har nøyaktig ett absolutt maksimum, så finnes det i $(x, y) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

10.6:31 Finn det maksimale overflatearealet en rektangulær boks med seks sider kan ha, når volumet er $V = 216 \text{ m}^3$.

Løsning:

La x, y og z være dimensjonene til boksen. Volumet er da $V = xyz$ og overflatearealet er $A = 2(xy + xz + yz)$. (Tegn figur!).

Det er oppgitt at $V = 216$ så høyden på boksen, z , er en funksjon av x og y :

$$z(x, y) = \frac{V}{xy} = \frac{216}{xy}. \quad (2)$$

Dermed kan overflatearealet, som vi skal maksimere, også uttrykkes som en funksjon av x og y .

$$A(x, y) = 2(xy + xz(x, y) + yz(x, y)) = 2\left(xy + \frac{216}{y} + \frac{216}{x}\right).$$

Før vi kan maksimere denne funksjonen, må vi vite hvilket domene den har. Alle sidene x, y og z må være ikke-negative, men, som vi ser fra (2), kan ikke x og y være 0 sammtidig. Altså må $x \geq 0$ og $y \geq 0$ og $(x, y) \neq (0, 0)$. Tilsammen gir dette domenet

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Vi kan *ikke* konkludere at det finnes et absolutt maksimum ettersom domet ikke er lukket og begrenset, men vi kan finne kritiske punkter og avgjøre om de er lokale maksimum. (x, y) er et kritisk punkt hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla A(x, y) \\ &= \left(2y - \frac{432}{x^2}, 2x - \frac{432}{y^2} \right) \end{aligned}$$

så vi må ha

$$2y - \frac{432}{x^2} = 0$$

og

$$2x - \frac{432}{y^2} = 0.$$

Dette er ekvivalent med

$$x^2 y = 216$$

og

$$y^2 x = 216$$

$$x^2 y = 216$$

$$y^2 x = 216$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$y = \frac{216}{x^2}$$

$$216 = x^3$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(x, y) = (6, 6)$$

der vi hele tiden har brukt at $x, y > 0$.

Hvis A har et maksimum, så må det altså ligge i $(x, y) = (6, 6)$. Vi kunne ha sjekket om dette er et lokalt maksimum ved å beregne Determinanten, men vi ville i såfall uansett ikke hatt redskaper til å kunne avgjøre om dette punktet er et *absolutt* maksimum.

Det maksimale overflatearealet, hvis det eksisterer, er

$$A(6, 6) = 2(xy + xz(6, 6) + yz(6, 6)) = 2\left(36 + \frac{216}{6} + \frac{216}{6}\right) = 2(108) = 216 \text{ m}^2.$$

10.6:33 Avstanden fra origo $(0, 0, 0)$ til punktet (x, y, z) er $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Finn den minste avstanden mellom et punkt i planet

$$x + y + z = 1 \tag{3}$$

og origo. (*Hint*: Minimér **kvadratet** av avstanden.)

Løsning:

La punktet (x, y, z) ligge i planet gitt ved ligning (3). Kvadratet av avstanden mellom dette punktet og origo er da

$$s = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ettersom punktet ligger i planet, er $z = 1 - x - y$. Dermed kan s uttrykkes som en funksjon bare av x og y :

$$s(x, y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2.$$

Vi finner de kritiske punktene til s :

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \nabla s(x, y) \\ &= (2x - 2(1 - x - y), 2y - 2(1 - x - y)) \\ &\iff \\ x = y \quad &\text{og} \quad x = 1 - x - y\end{aligned}$$

Dvs. $(x, y) = (1/3, 1/3)$. Domenet til s er \mathbb{R}^2 som ikke er lukket og begrenset, så vi kan ikke konkludere med at det finnes et absolutt minimum. Men hvis det finnes, så må det ligge i $(1/3, 1/3)$ og avstanden fra origo er da

$$\begin{aligned}\sqrt{s(1/3, 1/3)} &= \sqrt{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (1 - 1/3 - 1/3)^2} \\ &= \sqrt{3(1/3)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$