Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1102 Grunnkurs i Analyse II
Vår 2017

Løsningsforslag — Øving 6

$\boxed{\text{12.3:1 c)}}$ Avgjør om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergerer eller divergerer.

Løsning:
Vi vet at $\sqrt{n}$ er en voksende funksjon som går mot uendelig. Da vil $1/\sqrt{n}$ være en synkende funksjon som går mot null. Dermed konvergerer rekken ved testen for alternerende rekker.

$\boxed{\text{12.3:2 c)}}$ Avgjør om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)^n$$

konvergerer eller divergerer.

Løsning:
Vi har at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ved definisjonen av e^x, så er $\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n = e^{-1}$. Dermed går heller ikke leddene i rekken mot 0, og rekken divergerer ved divergenstesten.

$\boxed{\text{12.3:3 a)}}$ Finn en tilnærming av summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

men en feil mindre enn $\epsilon = 0.05$.

Løsning:
Dette er en alternerende rekke der $|a_n| \to 0$. Vi vet da at rekken konvergerer, dvs.

grensen $s = \lim_{N\to\infty} s_N$ eksisterer der $s_N = \sum_{n=1}^N a_n$. Vi vet også at feilen $|s - s_N|$ er begrenset ved

$$|s - s_n| \leq |a_{N+1}|.$$

Vi finner N slik at $|a_{N+1}| \leq \epsilon$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(N+2)^2} = |a_{N+1}| \leq \epsilon \\ \Longleftrightarrow \\ \begin{aligned} N &\geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - 2 \\ &= 2(\sqrt{5}-1) \approx 2.47. \end{aligned}\end{gathered}$$

Altså er

$$\begin{aligned} s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= -\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \\ &= -\frac{29}{144} \end{aligned}$$

en tilnærming til rekken med en feil mindre enn 0.05.

$\boxed{12.3{:}4}$ $|x| < 1$.

a) Vis at $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$

b) Forklar hvorfor $\left|\frac{1}{1+x} - \sum_{n=0}^N (-x)^n\right| \leq x^{N+1}$ for $x \geq 0$.

c) Vis at $\left|\ln(1+x) + \sum_{n=0}^N \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}$ for $x \geq 0$.

d) Finn $\ln(3/2)$ med en nøyaktighet på 0.01.

Løsning: a)
$\sum_{n=0}^\infty (-x)^n$ er en geometrisk rekke (se setning 12.1.1) med sum $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$.

Løsning: b)
Dette er bare feilestimatet for konvergerende alternerende rekker: La $s_N = \sum_{n=1}^N a_n$ der $a_n = (-x)^n$ og la $s = \lim_{N\to\infty} s_N = \frac{1}{1+x}$. Da er

$$\left|\frac{1}{1+x} - \sum_{n=0}^N (-x)^n\right| = |s - s_N| \leq |a_{N+1}| = |(-x)^{N+1}| = x^{N+1}.$$

Merk at vi bare kan bruke dette feilestimatet når $x \geq 0$. Rekken er ikke alternerende for $x < 0$.

Løsning: c)

$$\begin{aligned}\left|\ln(1+x)+\sum_{n=0}^{N}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\right| &= \left|\int_0^x\left(\frac{1}{1+t}-\sum_{n=0}^{N}(-t)^n\right)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\le \int_0^x\left|\frac{1}{1+t}-\sum_{n=0}^{N}(-t)^n\right|\,\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^t |t|^{N+1}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{fra b)}\\ &= \Big|_0^x \frac{t^{N+2}}{N+2}=\frac{x^{N+2}}{N+2}.\end{aligned}$$

(Takk til P. Nyland for denne løsningen.)

Løsning: d)
Vi bruker feilestimatet fra oppgave c). $\ln(3/2)=\ln(1+1/2)$, så vi må finne N slik at $\frac{(1/2)^{N+2}}{N+2}\le\epsilon := 0.01$. Dvs

$$(N+2)2^{N+2}\ge 100.$$

Dette gjøres enklest med en tabell.

N	$(N+2)2^{N+2}$
1	24
2	64
3	160

Altså er

$$\begin{aligned}\ln(3/2) &\approx -\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1/2)^{n+1}}{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}\\ &= \frac{77}{192}\approx 0.401\end{aligned}$$

med en feil mindre enn 0.01.

$\boxed{\text{12.4:1 c)}}$ Absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \qquad a_n=(-1)^n\arcsin\frac{1}{n}.$$

Løsning:
Vi vet at $\arcsin 1/n \approx 1/n$ når n er stor, så leddene er alternerende og går mot null. Vi har derfor konvergens ved alternerende rekke-testen.

Konvergensen er ikke absolutt ved grensesammenligningstesten: La $b_n = 1/n$. Da er

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} n \arcsin(1/n) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \\ &\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 1 > 0\end{aligned}$$

så $\sum |a_n|$ divergerer. Altså $\sum a_n$ er **betinget konvergent.**

$\boxed{\text{12.4:1 e)}}$ Absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Løsning:
Vi ser at $|a_n| \sim 1/\sqrt{n} =: b_n$ så rekken konvergerer fordi leddene er alternerende og går mot null. Konvergensen er betinget fordi $\sum b_n$ divergerer og ved grensesammenligningstesten er

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}\sqrt{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= 1 > 0.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{12.4:1 g)}}$ Absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = (-1)^n \frac{n^{2n}}{(2n)!}.$$

Løsning:
Vi forsøker forholdstesten:

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)^{2n+2}(2n)!}{(2n+2)!n^{2n}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}.\end{aligned}$$

Vi har at

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n} \to e^2$$

når $2n \to \infty$ (dette skal nå være en kjent grense), så

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e^2}{4} > \frac{2^2}{4} = 1$$

og rekken divergerer.

$\boxed{\text{12.4:2 d)}}$ Absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = (-2)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Løsning:
Vi ser at $a_n = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!}$, så

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{n+1}(n+1)!(2n)!}{2^n n!(2n+2)!} = 2\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 < 1$$

og rekken konvergerer absolutt ved forholdstesten.