MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 5

1 Gjør oppgave 6, 9, 11, 17, 18, 21, 22, 32 og 34 på side **78-82**, samt oppgave 7, 10, 11, 16, 22 og 17 på side **92-96**.

2 Et nytt tallsystem

Vi skal nå innføre et nytt tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. Skal vi innføre et nytt tallsystem, så må vi spørre oss hvilke egenskaper ønsker vi at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:

- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutativ*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.
- *additiv invers:* Gitt z, så eksisterer z' slik at

$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:

- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
- *distributive lover:*
  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *høyre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.
- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at

$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$

- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer z' slik at

$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$

- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker 2×2-matriser over de reelle tallene.

La A være en 2×2-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La

$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

For eksempel,

$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$

og

$$Y = A - \sqrt{2}A^3$$

er elementer i S.

(a) La $X = a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3$ og $Y = b_0 I_2 + b_1 A + b_2 A^2 + b_3 A^3$ være elementer i S. Vis at

  (i) I_2 er i S og $0_{2\times 2}$ er i S.

  (ii) $X - Y$ er i S.

  (iii) XY er i S.

(b) Forklar uten regning hvorfor vi har følgende:

- $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,
- $X + Y = Y + X$,
- Det eksisterer 0_S i S slik at

$$0_S + X = X = X + 0_S,$$

- Gitt X i S, så eksisterer det X' i S slik at

$$X + X' = 0_S = X' + X.$$

- $X(YZ) = (XY)Z$,
- $X(Y + Z) = XY + XZ$,
- $(X + Y)Z = XZ + YZ$,
- $I_2 X = X = X I_2$,

for alle X, Y og Z i S.