Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Eksamen MA2301
10. desember 2010

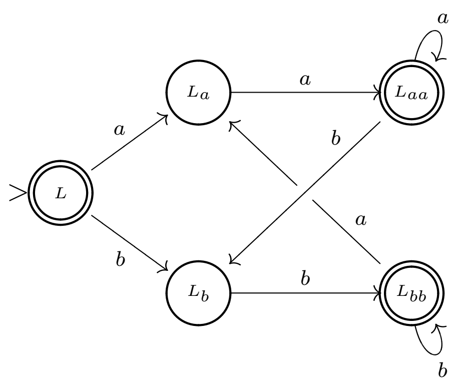
Løsningsforslag

$\boxed{1}$ **a)** Både $(aaa^\star + bbb^\star)^\star$ og $(aa + aaa + bb + bbb)^\star$ er regulære uttrykk som har L som språk.

b) i) Alle ord i det deriverte språket L_a begynner med minst en a, altså $\{a\}\{a\}^*L$. $L_a = \{a\}L \cup \{aa\}L$. Vi har $L_{aa} = L \cup \{a\}L$ og $L_{ab} = \emptyset$.

ii) Dersom $aaax$ har en isolert bokstav må denne forekomme inne i x, og derfor vil aax ha en isolert bokstav. Det omvendte holder også, derfor er $L_{aaa} = L_{aa}$. ∎

c) Bruker vi de deriverte språkene som tilstander får vi den minimale automaten.



$\boxed{2}$ **a)** i) Derivasjonene $S \mapsto \Lambda$, $S \mapsto a$, og$S \mapsto b$ viser at $\{\Lambda, a, b\} \subseteq \mathrm{L}(G)$. Dersom $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$, har vi en derivasjon $S \to aSa \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} axa$ som viser at også $axa \in \mathrm{L}(G)$. På samme måte vises at $x \in \mathrm{L}(G) \Rightarrow bxb \in \mathrm{L}(G)$. Altså er $L \subseteq \mathrm{L}(G)$ i følge det strukturelle induksjonsprinsippet. ∎

ii) La $\mathrm{L}_n(G)$ være mengden av ord i språket $\mathrm{L}(G)$ med derivasjon av lengde n, og la $P(n)$ være utsagnet $\mathrm{L}_n(G) \subseteq L$. Vi antar at $P(k)$ er sann for alle $k < n$. Dersom vi under denne antagelsen kan vise at $P(n)$ holder følger det fra induksjonsprinsippet at $P(n)$ holder for alle n og følgelig $\mathrm{L}(G) \subseteq L$, fordi $\mathrm{L}(G) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{L}_n(G)$.
La $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$ være en derivasjon av lengde n. Siden $\{\Lambda, a, b\} \subseteq L$ kan vi anta at derivasjonen starter med $S \to aSa$ eller $S \to bSb$. Induksjonshypotesen viser da at $x = aya$ eller $x = byb$ for en $y \in L$. Invarians viser at $x \in L$. ∎

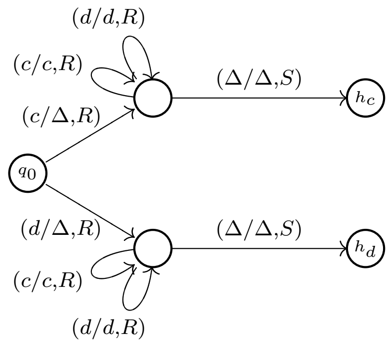
b) i) Det er kun en 0-variabel, nemlig S. Vi finner gramatikken G_1 ved å sløyfe produksjonen $S \mapsto \Lambda$ og føye til produksjonene $S \mapsto aa$ og $S \mapsto bb$. Gramatikken G_1 er altså gitt ved

$$S \to \ a \mid b \mid aa \mid bb \mid aSa \mid bSb.$$

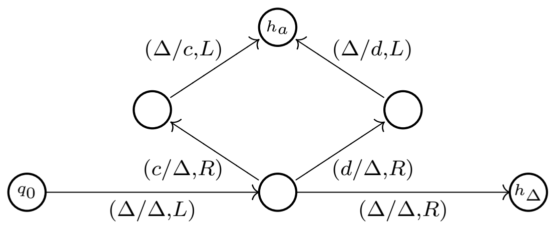
ii) En gramatikk på Chomskys normalform G_2 er gitt ved produksjonene

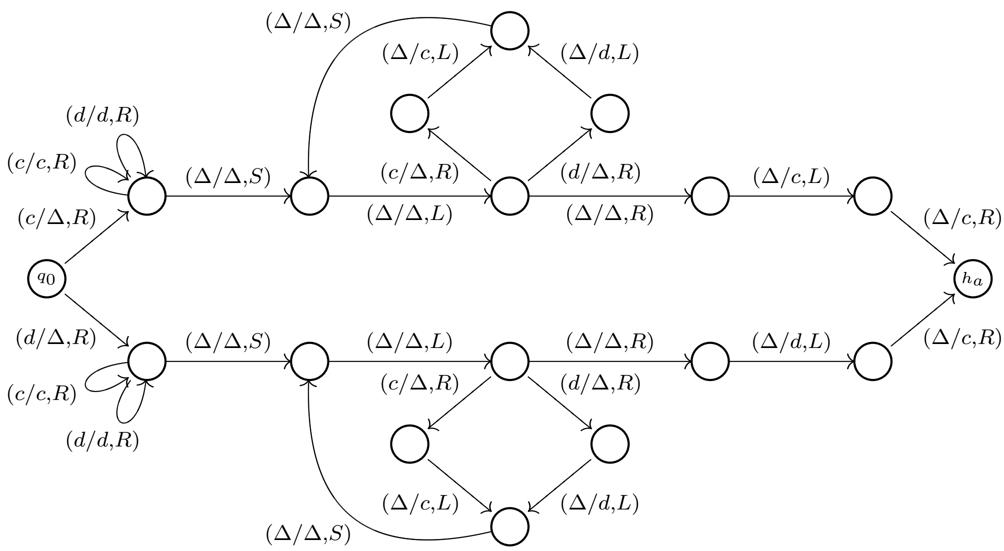
$$\begin{aligned} S &\rightarrow a \mid b \mid AA \mid BB \mid AX \mid AY, \\ X &\rightarrow SA, \\ Y &\rightarrow SB, \\ A &\rightarrow a, \\ B &\rightarrow b. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ **a)** Her er grafen til N_1.



b) Her er N_2 og den samensatte maskinen I_c.





Alle piler som mangler er av typen $(x/x, S)$ og fører til tilstanden h_r.

$\boxed{4}$ **a)** Tabell.

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
f_0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0
f_1	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$n+1$
f_2	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	$n+2$
f_3	3	5	7	9	11	13	$\cdots$	$2n+3$
f_4	5	13	29	61	125	253	$\cdots$	

b) Vi gjetter på $f_4(n) = 2^{n+3} - 3$. Dette blir vår induksjonshypotese.

Vi ser at det stemmer for $n = 0$. Funksjonen f_4 er definert ved rekursjon og vi har $f_4(n+1) = h(n, f_4(n)) = f_3(f_4(n))$. Induksjonshypotesen gir oss da $f_4(n+1) = 2(f_4(n)) + 3 = 2(2^{n+3} - 3) + 3 = 2^{(n+1)+3} - 3$. ∎

$\boxed{5}$ (i) Det vil si at det finnes en Turingberegnbar (rekursiv) totalfunksjon $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, med egenskapen at en streng x er med i språket L hvis og bare hvis $f(x)$ er med i M. Med andre ord $L = f^{-1}(M)$

(ii) Da kan vi si at språket L er Turingavgjørbart. En Turingmaskin som avgjør L kan vi få ved å sette sammen den som beregner funksjonen f med en som avgjør M.

$\boxed{6}$ (i) Vi sier at $\text{Step}_T(x) = n$ dersom $q_0, \underline{\Delta} x \vdash_T^{(n)} h_\tau, v\underline{\sigma}w$. Tidskompleksitetsfunksjonen til T er da

$$\tau_T(n) = \max\{\text{Step}_T(x) \mid l(x) \leq n\}$$

Vi sier at T er en polynom tid Turingmaskin dersom det finnes et polynom P slik at $\tau_T(n) \leq P(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Det betyr at L kan reduseres til M ved hjelp av en funksjon f, og at funksjonen f kan beregnes av en polynom tid Turingmaskin.

(iii) Dersom $L \leq_P M$ ved hjelp av funksjonen f som beregnes av maskinen T_1, $M \leq_P N$ ved hjelp av funksjonen g beregnet av T_2, og tidskompleksitetsfunksjonene τ_{T_1} og τ_{T_2} er dominerte av henholdsvis polynomene P_1 og P_2, så vil på en innstreng x av lengde $l(x) \leq n$, T_1 produsere en utstreng som er begrenset av $P_1(n)$. Følgelig vil T_2 med denne innstrengen ikke bruke mer enn $P_2(P_1(n))$ skritt. Dette betyr at den sammensatte maskinen $T_1 \circ T_2$ har en tidskompleksitetsfunksjon som er dominert av $P_1 + P_2 \circ P_1$ og dette er et polynom av grad $\deg(P_1)\deg(P_2)$. Funksjonen $g \circ f$ kan beregnes av den sammensatte maskinen $T_1 \circ T_2$, og siden $(g \circ f)^{-1}(N) = f^{-1} \circ g^{-1}(N) = f^{-1}(g^{-1}(N)) = f^{-1}(M) = L$, er reduserbarhet i polynom tid er en transitiv relasjon. ∎