MA1101 Grunnkurs Analyse I Høst 2017

Løsningsforslag — Øving 11

9.5.1 a) Har at

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}[\arctan x]_0^b = \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0)$$
$$= \lim_{b\to\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2}$$

f) La oss først finne en antiderivert av $\frac{1}{(\sin x)^2}$. Merk at $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$. Da er

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2}dx = \int \frac{1}{(\cos(x-\frac{\pi}{2}))^2}dx = \tan(x-\frac{\pi}{2}) + C$$

siden $\int \frac{1}{(\cos x)^2}dx = \tan x + C$. Dermed har vi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x)^2} = \lim_{a\to 0^+}[\tan(x-\frac{\pi}{2})]_a^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{a\to 0^+}(\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}) - \tan(a-\frac{\pi}{2}))$$
$$= \lim_{a\to 0^+}(-\tan(a-\frac{\pi}{2})) = \infty$$

så grensen finnes ikke. Vi konkluderer med at integralet divergerer.

9.5.4 a) Arealet under grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$, $1 \le x < \infty$, er

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}[\ln|t|]_1^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty$$

Volumet vi får om vi dreier A rundt x-aksen er

$$V = \int_0^\infty \pi(f(x))^2 dx = \pi\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \pi\lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{x}]_1^b = \pi\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b} - (-\frac{1}{1}))$$
$$= \pi(0+1) = \pi < \infty$$

b) Arealet under grafen til $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $0 < x \le 1$, er

$$B = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}[2\sqrt{x}]_a^1$$
$$= \lim_{a\to 0^+}(2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}) = 2 < \infty$$

Volumet vi får når vi dreier B om x-aksen er

$$V = \int_0^1 \pi(g(x))^2 dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \pi\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}dx$$
$$= \pi[\ln|x|]_a^1 = \pi\lim_{a\to 0^+}(\ln 1 - \ln a) = \pi\lim_{a\to 0^+} -\ln a = \infty$$

9.5.10 La oss først se på $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x|\ln x|^p}$. For $0 < x \leq \frac{1}{2}$ er $|\ln x| = -\ln x$. Vi ser derfor på $I_1 = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(-\ln x)^p}$.

Sett $u = -\ln x$, da er $du = -\frac{1}{x}dx$. La oss se på det tilsvarende ubestemte integralet.

$$\int \frac{dx}{x(-\ln x)^p} = -\int \frac{du}{u^p} = \begin{cases} -\ln|u| & \text{hvis} \quad p = 1 \\ -\frac{u^{1-p}}{1-p} & \text{hvis} \quad p \neq 1 \end{cases}$$

Obs: Her har vi ikke tatt med $+C$, ettersom vi skal bruke det ovenstående til å regne ut et bestemt integral, og da forsvinner konstanter uansett.

Så om $p = 1$, er

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(-\ln x)^p} = -\lim_{y\to 0^+} [\ln|\ln x|]_y^{\frac{1}{2}} = -\lim_{y\to 0^+} (\ln|\ln \frac{1}{2}| - \ln|\ln y|) = \infty$$

Om $p \neq 1$ er

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(-\ln x)^p} = -\lim_{y\to 0^+} \left[\frac{(-\ln x)^{1-p}}{1-p}\right]_y^{\frac{1}{2}} = -\lim_{y\to 0^+} \left(\frac{(-\ln \frac{1}{2})^{1-p}}{1-p} - \frac{(-\ln y)^{1-p}}{1-p}\right)$$

Det første leddet her betyr ingenting. Dersom $p < 1$ vil $\frac{(-\ln y)^{1-p}}{1-p} \to \infty$ når $y \to 0^+$.
Dersom $p > 1$ vil $\frac{(-\ln y)^{1-p}}{1-p} \to 0$ når $y \to 0^+$.
Vi konkluderer med at I_1 konvergerer for $p > 1$ og divergerer for $p \leq 1$.
Vi ser nå på $I_2 = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x|\ln x|^p}$. For $2 \leq x < \infty$ er $|\ln x| = \ln x$. Sett $u = \ln x$, som gir $du = \frac{1}{x}dx$. La oss finne en antiderivert:

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int \frac{du}{u^p} = \begin{cases} \ln|u| & \text{hvis} \quad p = 1 \\ \frac{u^{1-p}}{1-p} & \text{hvis} \quad p \neq 1 \end{cases}$$

Hvis $p = 1$ er da

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{y\to\infty} [\ln|\ln x|]_2^{\infty} = \lim_{y\to\infty} (\ln|\ln y| - \ln|\ln 2|) = \infty$$

Dersom $p \neq 1$, er

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{y\to\infty} \left[\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right]_2^{\infty} = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}\right)$$

Av samme grunner som over vil dette divergere om $p < 1$ og konvergere om $p > 1$. Vi konkluderer med at $I_2 = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x|\ln x|^p}$ er konvergent om $p > 1$, og divergent om $p \leq 1$.

Ekstraoppgave 9.5.14 a) Volumet av Gabriels trompet er

$$V = \int_1^{\infty} \pi(f(x))^2 dx = \lim_{y\to\infty} \pi \int_1^{y} \frac{dx}{x^2} = \pi \lim_{y\to\infty} \big[-\frac{1}{x}\big]_1^y$$
$$= \pi \lim_{y\to\infty} (-\frac{1}{y} - (-\frac{1}{1})) = \pi \lim_{y\to\infty} (1 - \frac{1}{y}) = \pi$$

Så Gabriels trompet har endelig volum.

b) Overflatearealet av Gabriels trompet finner vi ved den oppgitte formelen:

$$A = 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+(-\frac{1}{x^2})^2}dx$$
$$= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$$

Vi vet at $\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} > 1 > 0$,

$$A > 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot 1dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

og dette siste integralet divergerer mot ∞ ved Setning 9.5.4. Ved sammenlikningskriteriet 9.5.11 vil integralet som gir arealet også være divergent mot ∞. Altså har Gabriels trompet uendelig overflate.

10.1.1 f) Vi har at $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Om y er en løsning av differensiallikningen $y' + xy = x^3$ må vi ha at

$$\frac{1}{1+x^2} + x \arctan x = x^3$$

som ikke er tilfelle. For å "vise" dette ser vi for eksempel at venstre og høyre side er ulike for $x = 0$. Venstre side blir 1 mens høyre side blir 0. Dermed er y ikke en løsning av differensiallikningen.

10.1.5 Vi skriver om likningen til

$$xy' + y = xe^{x^2}, \quad x > 0$$

Vi gjenkjenner venstre side som $\frac{d}{dx}(xy)$ ved produktregelen. Derfor er

$$(xy)' = xe^{x^2}$$

Høyre side gjenkjenner vi som $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^{x^2})$ ved kjerneregelen (eller vi kan bruke substitusjon for å finne dette, sett $u = x^2$). Dermed er

$$(xy)' = (\frac{1}{2}e^{x^2})'$$

Vi integrerer begge sider og får

$$xy = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

ved analysens fundamentalteorem. Da er løsningene gitt ved

$$y(x) = \frac{1}{x}(\frac{1}{2}e^{x^2} + C) = \frac{1}{2x}e^{x^2} + \frac{C}{x}$$

for $C \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

$\boxed{10.2.1}$ Veksten i befolkningen per år er $0.02y(t)$. Tilskuddet per år på grunn av innvandring er 40000, slik at $y'(t) = 0.02y(t) + 40000$. Ekvivalent skriver vi $y'(t) - 0.02y(t) = 40000$. Integrerende faktor er $e^{\int -0.02dt} = e^{-0.02t}$. Vi multipliserer ligningen med denne og får

$$e^{-0.02t}y' - 0.02e^{-0.02t}y = 40000e^{-0.02t}$$

Med andre ord

$$(e^{-0.02t}y)' = 40000e^{-0.02t}$$

Ved å integrere begge sider av likningen får vi

$$e^{-0.02t}y(t) = -2000000e^{-0.02t} + C$$

som vi skriver om til den generelle løsningen

$$y(t) = Ce^{0.02t} - 2000000$$

Initialbetingelsen $y(0) = 2000000$ gir

$$y(0) = C - 2000000 = 2000000$$

som gir $C = 4000000$. Løsningen blir derfor

$$y(t) = 4000000e^{0.02t} - 2000000$$

$\boxed{10.2.16}$ Opplysningene i oppgaven gir $T'(t) = \alpha(T(t) - 10)$, hvor α er konstanten som angir hvordan $T'(t)$ blir ut fra temperaturdifferansen $T(t) - T_{\text{omgivelser}}$, og her er $T_{\text{omgivelser}} = 10$. Ved å skrive om får vi

$$T'(t) - \alpha T(t) = -10\alpha$$

Integrerende faktor eg $e^{-\alpha t}$. Vi multipliserer hele likningen med denne og får

$$e^{\alpha t}T'(t) - \alpha e^{-\alpha t}T(t) = -10\alpha e^{-\alpha t}$$

Vi kjenner igjen venstresiden som $(e^{-\alpha t}T)'$, og høyresiden som $10(e^{-\alpha t})'$. Ved å integrere begge sider får vi derfor

$$e^{-\alpha t}T(t) = 10e^{-\alpha t} + C$$

som vi kan skrive om til

$$T(t) = 10 + Ce^{\alpha t}$$

Vi må nå finne C og α. Siden $T(0) = 70$ har vi

$$70 = T(0) = 10 + Ce^{\alpha \cdot 0} = 10 + C$$

så $C = 60$. Videre er $T(30) = 40$, så

$$\begin{aligned} 40 &= T(30) = 10 + 60e^{\alpha \cdot 30} \\ \Longleftrightarrow 30 &= 60e^{30\alpha} \\ \Longleftrightarrow \frac{1}{2} &= e^{30\alpha} \end{aligned}$$

Tar ln på begge sider:

$$30\alpha = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$$
$$\iff \alpha = -\frac{\ln 2}{30}$$

Dermed ender vi opp med

$$T(t) = 10 + 60e^{\frac{\ln 2}{30}t}$$

Temperaturen ved $t = 60$ er da

$$T(60) = 10 + 60e^{-\frac{\ln 2}{30}\cdot 60} = 25$$

10.3.4 $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$, så $e^{\frac{1}{3}x^3}$ er integrerende faktor. Ved å multiplisere likningen med denne faktoren får vi

$$e^{\frac{1}{3}x^3}y' + x^2 e^{\frac{1}{3}x^3}y = x^2 e^{\frac{1}{3}x^3}$$

Venstresiden gjenkjenner vi som $(e^{\frac{1}{3}x^3}y)'$, og høyresiden gjenkjenner vi som $(e^{\frac{1}{3}x^3})'$, så ved å integrere får vi

$$e^{\frac{1}{3}x^3}y = e^{\frac{1}{3}x^3} + C$$

som vi skriver om til

$$y = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3}$$

Det gjenstår å finne C. Vi vet at $y(1) = 0$, så

$$1 + Ce^{-\frac{1}{3}1^3} = 0$$
$$\iff Ce^{-\frac{1}{3}} = -1$$
$$\iff C = -e^{\frac{1}{3}}$$

Dermed er

$$y(x) = 1 - e^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

10.4.3 Har at

$$T'(x) = -\frac{aT^2}{b+x}$$

som vi skriver om til

$$\frac{1}{T^2}T' = -\frac{a}{b+x}$$

vi integrerer begge sider med hensyn på x:

$$\int \frac{1}{(T(x))^2}T'(x)dx = -\int \frac{a}{b+x}$$

Men venstre side er bare $\int \frac{1}{T^2}dT$ ved substitusjon/kjerneregelen. Dermed får vi

$$-\frac{1}{T} = -a\ln|b+x| + C$$

som vi først skriver om til

$$\frac{1}{T} = a\ln|b+x| + C$$

Ved å invertere begge sider får vi

$$T = \frac{1}{a \ln|b+x| + C}$$

Det gjenstår å finne C. Vi vet at $T(0) = T_0$. Altså

$$T_0 = \frac{1}{a \ln|b+0| + C} = \frac{1}{a \ln|b| + C}$$

Vi inverterer igjen og får

$$\frac{1}{T_0} = a \ln|b| + C \Longleftrightarrow C = \frac{1}{T_0} - a \ln|b|$$

Ved å sette dette inn i uttrykket for T får vi

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{a \ln|b+x| + \frac{1}{T_0} - a \ln|b|} \\ &= \frac{T_0}{T_0(a \ln|b+x| - a \ln|b|) + 1} \\ &= \frac{T_0}{T_0 a \ln|\frac{b+x}{b}| + 1} \end{aligned}$$