Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

# MA1102 Grunnkurs i Analyse II
Vår 2017

**Løysingsforslag – Øving 3**

$\boxed{11.1{:}1}$ Finn $T_4 f$ om 0 når $f(x) = e^{x^2}$.
(Merknad: $e^{x^2} = e^{(x^2)}$, ikkje $(e^x)^2$).

**Løysing:**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{x^2} & f(0) &= 1,\\
f'(x) &= 2xe^{x^2} & f'(0) &= 0,\\
f''(x) &= (2+4x^2)e^{x^2} & f''(0) &= 2,\\
f'''(x) &= (12x+8x^3)e^{x^2} & f'''(0) &= 0,\\
f^{(iv)}(x) &= (12+48x^2+16x^4)e^{x^2} & f^{(iv)}(0) &= 12.
\end{aligned}
$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
T_4 f(x) &= \sum_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i\\
&= 1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4\\
&= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4.
\end{aligned}
$$

$\boxed{11.1{:}2}$ Finn $T_3 f$ om 1 når $f(x) = \sqrt{x}$.

**Løysing:**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} & f(1) &= 1,\\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & f'(1) &= 1/2,\\
f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} & f''(1) &= -1/4,\\
f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2} & f'''(1) &= 3/8.
\end{aligned}
$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
T_3 f &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3\\
&= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{11.1:5}}$ Finn $T_3 f$ om 1 når $f(x) = \sinh x$.

**Løysing:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh x & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cosh x & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= \sinh x & f''(0) &= 0, \\ &\text{osb.} \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} T_5 f(x) &= \sum_{i=0}^{5} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{11.1:10}}$ Finn $T_3 f$ om 1 når $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 7$.

**Løysing:**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 3x^2 + 2x - 7 & f(1) &= -7, \\ f'(x) &= 4x^3 - 6x + 2 & f'(1) &= 0, \\ f''(x) &= 12x^2 - 6 & f''(1) &= 6, \\ f'''(x) &= 24x & f'''(1) &= 24. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} T_3 f &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 \\ &= -7 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{11.2:2}}$ Finn Taylorpolynomet til $f(x) = \sin x$ av grad 4 om punktet 0. Vis at $|R_4 f(b)| \leq \frac{|b|^5}{120}$ for alle $b$.

**Løysing:**
Deriverer $f$ mange gongar:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f^{(3)}(x) &= -\cos x \\ f'(x) &= \cos x & f^{(4)}(x) &= \sin x \\ f''(x) &= -\sin x & f^{(5)}(x) &= \cos x \end{aligned}$$

Dermed er Taylor-polynomet til $f$ av grad 4 om 0

$$\begin{aligned} T_4 f(x) &= \sin 0 + (\cos 0)x - \frac{\sin 0}{2}x^2 - \frac{\cos 0}{6}x^3 + \frac{\sin 0}{24}x^4 \\ &= x - \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

For å finne ei øvre grense for absoluttverdien til restleddet bruker vi korollar 11.2.2. Sidan $-1 \leq \cos x \leq 1$ for alle $x$, har vi $|f^{(5)}(x)| \leq 1$ for alle $x$. Då får vi frå korollar 11.2.2 at

$$|R_4 f(b)| \leq \frac{1}{(4+1)!}|b|^5 = \frac{|b|^5}{120}.$$

$\boxed{\text{11.2:6}}$ Finn

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

vha. et passende Taylor-polynom.

**Løysing:**
Vi har

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \\ \implies \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-2}}{i!} \\ &= \lim_{x\to 0} \left( \frac{1}{2} + x \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{(i+3)!} \right). \end{aligned}$$

Den siste summen er eit Taylor-polynom som konvergerer rundt 0, så $x$ gongar summen går mot 0, og grenseverdien blir 1/2.

$\boxed{\text{11.2:10}}$

a) Finn $T_6 \sin(x)$ om $x = 0$.
b) Bruk a) til å estimere

$$I := \int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

**Løysing:** a)

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ \implies T_6 \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \end{aligned}$$

som for øvrig gir

$$\sin x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$
$$\implies T_{12}\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}.$$

**Løysing:** b)
Bruker utrekninga frå a) til å estimere $I$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \\ &\approx \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \\ &= \frac{2867}{9240}(\approx 0.310281). \end{aligned}$$

Absoluttverdien til feilen er

$$\left|\int_0^1 \sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1)(2n-1)!}\right|.$$

Her har vi ein alternerande sum der absoluttverdien til ledda aldri aukar, så aboluttverdien til summen er ikkje større enn absoluttverdien til det første leddet, som er $1/(15\cdot 7!) = 1/75600 < 0.00002$.

$\boxed{\text{11.2:15}}$ **a)** Deriverer $g$ to gongar:

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+x)^{1/3} \\ g'(x) &= \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} \\ g''(x) &= -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3} \end{aligned}$$

Taylor-polynomet til $g$ av grad 2 om 0 er

$$\begin{aligned} T_2 g(x) &= (1+0)^{1/3} + \frac{1}{3}(1+0)^{-2/3}x - \frac{\frac{2}{9}(1+0)^{-5/3}}{2}x^2 \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2. \end{aligned}$$

**b)** Den tredjederiverte til $g$ er

$$g^{(3)}(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}.$$

Dette er ein avtakande funksjon. For $x \geq 0$ har vi

$$0 \leq g^{(3)}(x) \leq g^{(3)}(0) = \frac{10}{27}.$$

Dermed er

$$|g^{(3)}(x)| \leq \frac{10}{27}$$

for alle $x \geq 0$. Frå korollar 11.2.2 får vi då

$$|R_2 g(x)| \leq \frac{10/27}{(2+1)!}|x^3| = \frac{5}{81}x^3.$$

**c)** Vi skriv om uttrykket $\sqrt[3]{1003}$ slik at vi kan estimere det ved å bruke $g$ anvendt på eit tal nær 0, og bruker Taylor-polynomet frå (a) til å finne ein tilnærma verdi:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1003} &= \sqrt[3]{1000 \cdot 1.003} \\
&= \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{1 + 0.003} \\
&= 10 \cdot g(0.003) \\
&\approx 10 \cdot T_2 g(0.003) \\
&\approx 10.0099900.
\end{aligned}$$

Ved å bruke den øvre grensa for restleddet frå b) får vi

$$\begin{aligned}
|R_2 g(0.003)| &\leq \frac{5}{81} \cdot 0.003^3 \\
&\approx 1.67 \cdot 10^{-9}.
\end{aligned}$$

Dermed er feilen i tilnærminga vår maksimalt $1.67 \cdot 10^{-9}$, så dei 7 desimalane vi har tatt med må vere riktige.