MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 9

8.3.6 a) La $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ være en antiderivert av f. Da er $F'(x) = f(x)$ og $G(x) = F(g(x))$. Kjerneregelen gir da

$$G'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

som var det vi skulle vise.

b) i) Med notasjonen fra a) er $G(x) = \int_0^{\sin x} te^{-t}dt$, $f(t) = te^{-t}$, $g(x) = \sin x$. Da blir

$$G'(x) = f(g(x))g'(x) = \sin x \cdot e^{-\sin x}\cos x$$

ii) Med notasjonen fra a) er $G(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$, $f(t) = e^{-t^2}$, og $g(x) = \sqrt{x}$. Da får vi

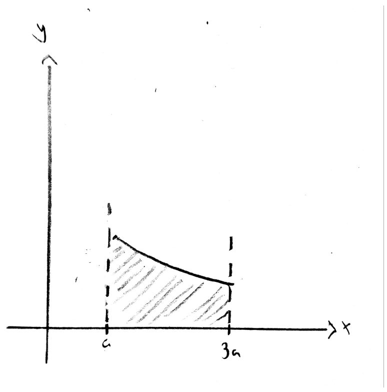
$$G'(x) = f(g(x))g'(x) = e^{-\sqrt{x}^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$$

iii) I notasjonen fra a) er $G(x) = \int_{\sin x}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\sin x}(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}})dt$, $g(x) = \sin x$, og $f(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Så

$$G'(x) = f(g(x))g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}}\cos x = -\frac{1}{\cos x}\cos x = -1$$

hvor vi har brukt at $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$.

8.3.8 Fra figuren under ser vi at arealet er arealet av det skraverte området, altså arealet under grafen mellom $x = a$ og $x = 3a$. Dette vet vi er lik $g(a) = \int_a^{3a} e^{-x^2}dx$, $a \in (0, \infty)$.



La F være en antiderivert av e^{-x^2} slik at $g(a) = F(3a) - F(a)$. Vi deriverer med hensyn på a:

$$g'(a) = F'(3a) \cdot (3a)' - F'(a) = 3e^{-(3a)^2} - e^{-a^2} = 3e^{-9a^2} - e^{-a^2}$$

Vi finner kritisk punkt ved å sette $g'(a) = 0$. Altså må vi løse

$$3e^{-9a^2} = e^{-a^2} \Longrightarrow 3e^{-8a^2}e^{-a^2} = e^{-a^2}$$

Vi kan dividere med e^{-a^2} siden $e^{-a^2} \neq 0$ for alle a. Da får vi

$$3e^{-8a^2} = 1 \Longrightarrow e^{-8a^2} = \frac{1}{3}$$

Ved å ta naturlig logaritme på begge sider får vi

$$-8a^2 = \ln(\frac{1}{3}) = -\ln 3 \Longrightarrow a^2 = \frac{\ln 3}{8}$$

Altså får vi $a = \sqrt{\frac{\ln 3}{8}}$. Vi ser også at $\lim\limits_{a \to 0} g(a) = 0$. Siden e^{x^2} er strengt avtakende for $x \geq 0$ har vi og at

$$g(a) \int_a^{3a} e^{-x^2} dx \leq (3a - a)e^{-a^2} = 2ae^{-a^2}$$

så $\lim_{a \to \infty} g(a) = 0$. Dermed er $a = \sqrt{\frac{\ln 3}{8}}$ et globalt maksimum for g.

Bemerkning: I oppgavene 8.4.1 og 8.4.2 under vil vi bruke substitusjon for å løse integralene, selv om substitusjon som teknikk ikke dekkes før Kapittel 9.2. Integralene er derimot såpass "rett frem" at man helt fint kan gjette på hva den antideriverte skal være.

8.4.1 c) Vi skriver først om:

$$\int \frac{1}{1 + 2x^2} dx = \int \frac{1}{1 + (\sqrt{2}x)^2} dx$$

Hvis vi nå setter $u = \sqrt{2}x$ får vi $du = \sqrt{2}dx$ og dermed

$$\int \frac{1}{1 + (\sqrt{2}x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2}x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1 + u^2} du$$

Vi husker nå at $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, så vi får

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan u + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x) + C$$

e) Vi trekker først ut $\sqrt{7}$ i nevneren

$$\int \frac{4}{\sqrt{7 - x^2}} dx = \frac{4}{\sqrt{7}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{\sqrt{7}})^2}} dx$$

Sett nå $u = \frac{x}{\sqrt{7}}$. Da blir $du = \frac{1}{\sqrt{7}}dx$, og vi får

$$\frac{4}{\sqrt{7}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{7}})^2}}dx = 4\int \frac{du}{1-u^2}$$

Vi husker nå at $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, og dermed får vi at

$$4\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = 4\arcsin(u) + C = 4\arcsin(\frac{x}{\sqrt{7}}) + C$$

8.4.2 c) Sett $u = e^x$. Da er $du = e^x dx$ og vi får

$$\int e^x \cos(e^x)dx = \int \cos(u)du = \sin(u) + C = \sin(e^x) + C$$

e)

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

Husk at $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$. Vi trenger derfor bare finne $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$. Sett $u = x^2$. Da er $du = 2xdx$, og vi får

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}du = \frac{1}{2}\ln|1+u| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Dermed blir

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}dx = \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

8.5.6 Vi skriver først om summen litt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{2n})\frac{\pi}{2n}$$

Vi gjenkjenner $\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{2n})\frac{\pi}{2n}$ som en Riemannsum for $\sin(x)$ for intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ og utvalget $\{\frac{1\cdot\pi}{2n}, \frac{2\cdot\pi}{2n}, ..., \frac{(n-1)\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\}$, altså $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$. Vi får dermed at

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{2n})\frac{\pi}{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0)) = 1$$

Den opprinnelige grenseverdien er da

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{2n})\frac{\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\cdot 1 = \frac{2}{\pi}$$

Bemerkning: Vi trenger egentlig ikke skrive om summen i oppgave 8.5.6. Vi kan godt se på $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{1}{n}$, og da får vi en Riemannsum for $\int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2}x)dx$. Grensen blir uansett $\frac{2}{\pi}$.

$\boxed{\text{Ekstraoppgave 8.5.3}}$ Siden f er kontinuerlig er $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ kontinuerlig deriverbar. Vi følger hintet om at

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Siden F er kontinuerlig deriverbar kan vi bruke middelverdisetningen. For hver i finnes $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ slik at

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$$

eller med andre ord

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Vi tar utvalget $U = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Da blir

$$R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a)$$

$\boxed{\text{8.6.1 h)}}$ $f(x) \leq 0$ for $x \in [-1, 0]$. Arealet er da

$$-\int_{-1}^{0} f(x)dx = -\int_{-1}^{0} xe^{x^2}dx$$

Vi ser at $(\frac{1}{2}e^{x^2})' = xe^{x^2}$ (eller vi kan finne den antideriverte med substitusjon). Dermed er

$$-\int_{-1}^{0} xe^{x^2}dx = -[\frac{1}{2}e^{x^2}]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}e^{0^2} + \frac{1}{2}e^{1^2} = \frac{1}{2}(e-1)$$

$\boxed{\text{8.6.5g)}}$ Volumet er

$$V = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \pi f(x)^2 dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$$

Vi finner en antiderivert av $(\tan x)^2$. Vi vet at $(\tan x)' = (\tan x)^2 + 1$. Dermed er $\tan x - x$ en antiderivert. Da får vi

$$V = \pi[\tan x - x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi(\tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \tan(-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}) = 2\pi - \frac{\pi^2}{2}$$

$\boxed{\text{8.6.7c)}}$ Volumet er

$$V = \int_0^2 2\pi x f(x)dx = \pi \int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}dx$$

Vi fant en antiderivert i oppgave 8.4.2e). En antiderivert er $\ln(1+x^2)$. Dermed er

$$V = \pi[\ln(1+x^2)]_0^2 = \pi(\ln(1+2^2) - \ln(1+0^2)) = \pi \ln 5$$

8.6.11d) Buelengden er $L = \int_1^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ med $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2}$. Da er

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

og vi får

$$\begin{aligned} 1+(f'(x))^2 &= 1+(\sqrt{x}-\frac{1}{4\sqrt{x}})^2 = 1+(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x}) = x+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x} \\ &= (\sqrt{x}+\frac{1}{4\sqrt{x}})^2 \end{aligned}$$

Dermed er buelengden

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx = \int_1^4 (\sqrt{x}+\frac{1}{4\sqrt{x}})dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{x}]_1^4 \\ &= \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{4} - (\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{1}) = \frac{31}{6} \end{aligned}$$

Ekstraoppgave 8.6.23 a) $0 \le y \le h$ gir at $0 \le x \le \sqrt{h}$, så volumet er gitt ved

$$V = \int_0^{\sqrt{h}} 2\pi x\cdot x^2 dx = 2\pi\int_0^{\sqrt{h}} x^3 dx = 2\pi[\frac{1}{4}]_0^{\sqrt{h}} = \frac{\pi}{2}h^2$$

b) Fra a) har vi volum som funksjon av høyden h:

$$V(h) = \frac{\pi}{2}h^2 \Longrightarrow h = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{V}$$

Vi ønsker å finne $h'(t)$ ved tidpunktet t_0 når $h = 1$. Vi deriverer begge sider med hensyn på t og får ved kjerneregelen

$$h'(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{V}}V'(t)$$

$V'(t) = 2(m^3/s)$ fra oppgaveteksten. Volumet $V(h)$ når $h = 1m$ er $V(1) = \frac{\pi}{2}m^3$. Til sammen gir dette

$$h'(t_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cdot 2 = \frac{2}{\pi}$$

Vannhøyden øker med $\frac{2}{\pi}m/s$ når vannhøyden er $1m$.