Eksamen MA3301
12. desember 2012

Løsningsforslag

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{1}$

a) Her er øyeblikksbildene

$(q_1,\ \Delta\, a\, \underline{\Delta}\, a\,),\ (q_2,\ \Delta\, a\, a\, \underline{a}\,),\ (q_1,\ \Delta\, a\, \underline{a}\, a\,),\ (h_a,\ \Delta\, a\, \underline{a}\, a\,)$

b) Her er en kjøring av M på blankt bånd.

$(q_0,\ \underline{\Delta}\,),\ (q_1,\ \Delta\, \underline{\Delta}\,),\ (q_2,\ \Delta\, a\, \underline{\Delta}\,),\ (q_1,\ \Delta\, a\, a\, \underline{\Delta}\,),\ (q_2,\ \Delta\, a\, a\, a\, \underline{\Delta}\,),\ \ldots$

Maskinen stopper ikke, så det tomme ordet er ikke med i språket til M. Den aksepterer derimot enhver innputstreng av formen ax for en vilkårlig streng x. Siden $\Sigma = \{a\}$ er $L(M) = \{a^n \mid n \geq 1\}$.

$\boxed{2}$

a) Språket L er konkatenasjonen av språkene L_1 og L_2, der

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{og} \quad L_2 = \{b^m c^m \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Altså er $L = \{a^n b^{n+m} c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

b) Det er kun 2 0-produksjoner, $U \to \Lambda$ og $V \to \Lambda$, men alle variablene er 0-variabler. En gramatikk uten 0-produksjoner er

$$\begin{aligned} S &\to UV, \mid U \mid V, \\ U &\to aUb \mid ab, \\ V &\to bVc \mid bc. \end{aligned}$$

En gramatikk på redusert Chomsky normalfor blir $G_1 = (\{S, U, V, X, Y\}, \{a, b, c\}, S, P_1)$, der P_1 er gitt ved

$$\begin{aligned} S &\to UV, \mid U \mid V, \\ U &\to aX \mid ab, \\ V &\to bY \mid bc, \\ X &\to Ub, \\ Y &\to Vc. \end{aligned}$$

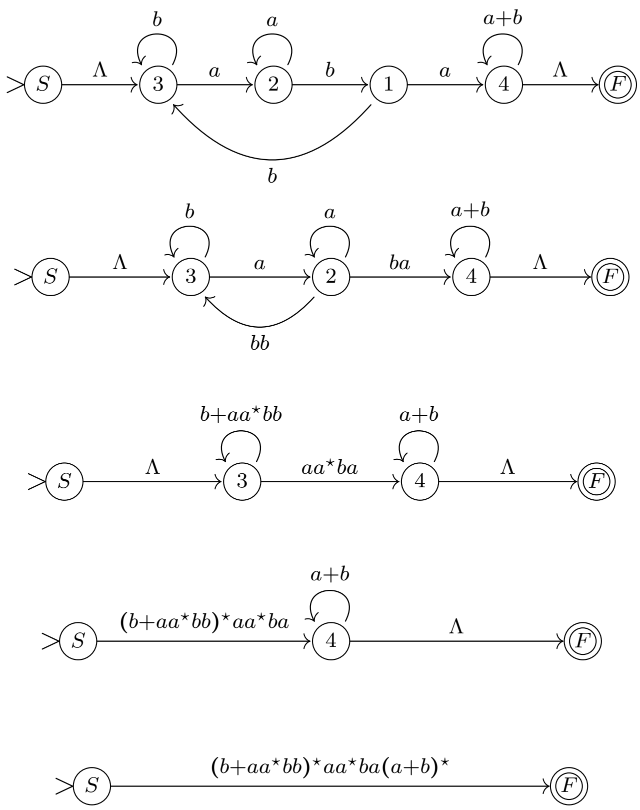
Det er kun 2 enhetsproduksjoner, $S \to U$ og $S \to V$. Siden S ikke forekommer på høyre side i noen av produksjonene blir produksjonene i gramatikken G_2 på strikt Chomsky normalform følgende.

$$\begin{aligned} S &\to UV, \mid aX \mid ab \mid bY \mid bc, \\ U &\to aX \mid ab, \\ V &\to bY \mid bc, \\ X &\to Ub, \\ Y &\to Vc. \end{aligned}$$

c)

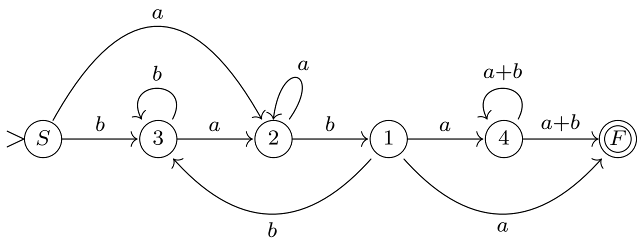
a	U	X			S
	b				
		b			V
			b	V	Y
				c	
					c

3 **a)**



Et enklere uttrykk med samme språk er $(a+b)^\star aba(a+b)^\star$, men dette fremkommer så vidt jeg vet ikke ved noen standard metode.

b) Vi fjerner først alle Λ-transisjoner og legger til direkte transisjoner der det er mulig. Da får vi



De Λ-lukkede tilstandsmengdene er $\{S,3\}$, $\{3\}$, $\{2\}$, $\{1\}$, $\{4,F\}$, $\{F\}$, $\emptyset$. Tabellen blir

	a	b	
$\{S,3\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	
$\{3\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	
$\{1\}$	$\{4,F\}$	$\{3\}$	
$\{4,F\}$	$\{4,F\}$	$\{4,F\}$	$*$
$\{F\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$*$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	

Denne automaten er deterministisk. Tilstandene $\{F\}$ og $\emptyset$ er uoppnåelige, så en deterministisk endelig automat med samme språk er

	a	b	
$\{S,3\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	
$\{3\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	
$\{1\}$	$\{4,F\}$	3	
$\{4,F\}$	$\{4,F\}$	$\{4,F\}$	$*$

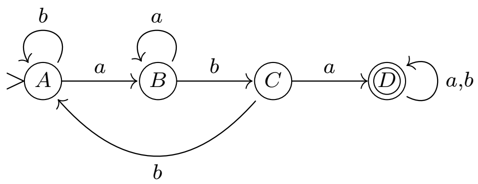
	a	b	
0	2	1	
1	2	1	
2	2	3	
3	4	1	
4	4	4	$*$

Vi døper om tilstandene og får tabellen til høyre.

c) Her kommer en algoritme som bestemmer standardautomaten.

	a	b		a	b		a	b		a	b
0	2	1	A	A	A	A	A	A	A	B	A
1	2	1	A	A	A	A	A	A	A	B	A
2	2	3	A	A	A	A	A	B	B	B	C
3	4	1	A	B	A	B	C	A	C	D	A
4	4	4	B	B	B	C	C	C	D	D	D

Dette skjemaet viser at standardautomaten har 4 tilstander. Her er den.



4 **a)** i) Nei. Språket $\{a,b\}^*$ er regulært og inneholder språket $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, som ikke er regulært. Det vises ved hjelp av Pumpelemmaet, for dersom $w = xyz \in L$ med $|y| > 0$, så må $|y| = 2k$ inneholde like mange a-er som b-er. Dermed kan ikke $xy^n z \in L$ for her blandes a-ene og b-ene.

ii) Nei. Det tommespråket $\emptyset$ er regulært og inneholder ikke noe ekte delspråk.

b) i) Ja. Dette fordi regulære språk er lukket under operasjonene komplement og katenasjon.

ii) Ja. Dersom $L = \mathrm{L}(M)$ der M er en endelig automat med en begynnelsestilstand S og kun en godkjennende tilstand $F \neq S$, så er $L^R = \mathrm{L}(M^R)$ der M^R er automaten vi får ved å bytte om begynnelsestilstanden og slutttilstanden og snu alle pilene i M. Vi kan også se dette ved strukturell induksjon. La $\mathit{Reg}^R \subseteq \mathit{Reg}$ være mengden av regulære språk med den egenskapen at dersom $L \in \mathit{Reg}^R$, så er $L^R \in \mathit{Reg}$. Med andre ord, Reg^R består av alle regulære språk som er slik at det reverserte spåket også er regulært. For å vise at $\mathit{Reg}^R = \mathit{Reg}$ er det tilstrekkelig å vise at Reg^R inneholder språkene $\emptyset$, $\{\Lambda\}$, $\{\sigma\}$, der σ er en bokstav, samt at Reg^R er lukket under union, konkatenasjon og Kleene stjerne operasjonen. Alt dette er greitt, fordi $\emptyset^R = \emptyset$, $\{\Lambda\}^R = \{\Lambda\}$, $\{\sigma\}^R = \{\sigma\}$, $(L \cup M)^R = L^R \cup M^R$, $(LM)^R = M^R \cup L^R$ og $(L^R)^* = (L^*)^R$. ∎

5 **a)** At Turingmaskinen A beregner funksjonen f betyr at vi har $(q_0, \underline{\Delta}x) \vdash_A^* (h_a, \underline{\Delta}f(x))$ for $x \in D$, og for $x \notin D$ så enten stopper ikke maskinen med input X eller den stopper i tilstanden h_r.

b) At språket M er Turing-avgjørbart betyr at den karakteristiske funksjonen til M er Turing-beregnbar.

c) At språket L kan Turing-reduseres til språket M, $L \leq_T M$, betyr ar det finnes en Turing-beregnbar funksjon $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, med $f^{-1}(M) = L$. Dersom M er Turing-avgjørbart, så er også L Turing-avgjørbart.

6 **a)** La e være en koding av Turingmaskiner og strenger. Dersom T er en Turingmaskin og x en streng og T med innput x stopper med konfigurasjonen $(q, u\underline{\sigma}v)$, så vil den universelle Turingmaskinen med innput $e(T)e(x)$ stoppe med konfigurasjonen eller øyeblikksbildet $(h_a, \underline{\Delta}e(u)e(q)e(\sigma)e(v))$. Dersom T ikke stopper så stopper heller ikke U.