1.3.25 Vi skal bevise at for alle naturlige tall $n \geq 2$ gjelder

$$P_n : \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

Vi bruker induksjon. Grunntilfellet $n = 2$ verifiseres som følger:

$$P_2 : \sum_{k=2}^{2} \binom{2}{2} = 1 \quad \text{og} \quad \binom{2+1}{3} = \binom{3}{3} = 1$$

Vi antar så at P_m holder, og viser at dette impliserer P_{m+1}. Eksplisitt antar vi at

$$P_m : \sum_{k=2}^{m} \binom{k}{2} = \binom{m+1}{3}$$

holder. Vi har at

$$\sum_{k=2}^{m+1} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{m} \binom{k}{2} + \binom{m+1}{2} = \binom{m+1}{3} + \binom{m+1}{2}$$

hvor vi har brukt antakelsen P_m. Det gjenstår å vise at

$$\binom{m+1}{3} + \binom{m+1}{2} = \binom{m+2}{3}$$

Vi gjør følgende utregning

$$\begin{aligned}
\binom{m+1}{3} + \binom{m+1}{2} &= \frac{(m-1)m(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(m+1)m)}{1 \cdot 2} \\
&= \frac{m(m+1)}{2 \cdot 3}((m-1)+3) \\
&= \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} = \binom{m+2}{3}
\end{aligned}$$

altså holder P_{m+1} under antakelsen om at P_m holder. Siden P_2 holder konkluderer vi med at P_n holder for alle $n \in \mathbb{N}$.

2.1.1c) $-3 < -2$ og $4 > 1$, så $[-2, 1) \subset (-3, 4)$. Dermed kan vi si at

$$(-3, 4) \cup [-2, 1) = (-3, 4)$$

2.1.1f) Operasjonen er ekvivalent med å fjerne $(2,4)\cap(1,3)$ fra $(2,4)$. Vi finner at $(2,4)\cap(1,3) = (2,3)$. Dette gir

$$(2,4) \setminus (1,3) = (2,4) \setminus (2,3) = [3,4)$$

2.1.2a) $\varnothing \subset (1,5)$, så $\varnothing \cup (1,5) = (1,5)$.

Ekstraoppgave 2.1.2b) $\varnothing\cap(1,5) = \varnothing$. (Tenk hvilke elementer som er felles for den tomme mengden og intervallet $(1,5)$).

Ekstraoppgave 2.1.2c) $\varnothing \setminus (1,5) = \varnothing$

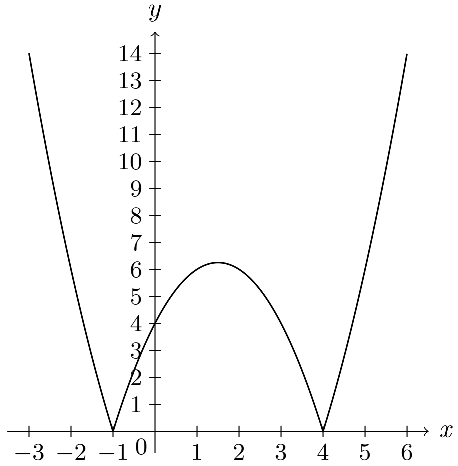
2.1.4d) Det er to viktige punkter å passe på her: Når $x+1=0$, altså $x=-1$, og når $x-4=0$, altså $x=4$. Dette er nullpunktene for grafen vår.

Husk følgende formulering av absoluttverdi: $|y| = \max(y,-y)$.

Vi deler inn i tre tilfeller:

1. Hvis $x \leq -1$ er $|x+1| = -(x+1)$ og $|x-4| = -(x-4)$. I dette området vil grafen altså se ut som $-(x+1)(-(x-4)) = (x+1)(x-4)$, altså en annengradsfunksjon med positivt annengradsledd.
2. Hvis $-1 \geq x \leq 4$ er $|x+1| = x+1$ og $|x-4| = -(x-4)$. I dette området ser grafen ut som $(x+1)(-(x-4)) = -(x+1)(x-4)$, altså en annengradsfunksjon med negativt annengradsledd.
3. Hvis $x \geq 4$ er $|x+1| = x+1$ og $|x-4| = x-4$. I dette området vil grafen altså se ut som $(x+1)(x-4)$, altså en annengradsfunksjon med positivt annengradsledd.

Å notere seg dette er nok til å gi en grov skisse av grafen. Vi kan også enkelt finne at grafen har et lokalt toppunkt ved å derivere funksjonsuttrykket og sette uttrykket lik null. Da vil vi finne at $x = \frac{3}{2}$ er et lokalt toppunkt. Dette er ikke viktig nå, dette er hovedsakelig en oppgave i å forstå absoluttverdier. Grafen vil se slik ut:



2.1.9 Vi skal vise at for $x, y, z \in \mathbb{R}$ gjelder

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

Vi baserer oss på trekantulikheten, Teorem 2.2.1 i boka, som sier at

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

for alle $a, b \in \mathbb{R}$. Nå vil vi benytte oss av et mye brukt triks"i matematikken, nemlig å legge til null". Vi legger til og trekker fra samme element, her z, og får

$$|x - y| = |x + (-z + z) - y| = |(x - z) + (z - y)|$$

Trekantulikheten gir nå umiddelbart

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$$

som var det vi skulle vise.

Ekstraoppgave 2.1.12 Dette er kun ren regning. Vi baserer oss på tipset i boka

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$$

Vi flytter $2\sqrt{ab}$ over på andre siden og deler på 2 og får

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

som var det vi skulle vise.

2.2.2d) Dette er bare utregning:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}}{2} &= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}^2 - 1} - \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

som er et rasjonalt tall.

2.2.14a) Merk først av alt at utsagnet holder trivielt dersom $b \leq a$. Vi kan derfor anta at $b \geq a$.

Bernoulli's prinsipp sier at for $x \geq -1$ har vi $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi skriver a som $1 + (a - 1)$. Siden $a > 1$ merker vi oss at $a - 1 > 0$.

Vi får

$$a^n = (1 + (a - 1))^n \geq 1 + n(a - 1)$$

Ved Arkimedes prinsipp finner vi $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq \frac{b}{a-1}$. Dette er mulig siden $a - 1 \neq 0$. Dette gir

$$a^n \geq 1 + n(a - 1) \geq 1 + \frac{b}{a - 1}(a - 1) = 1 + b > b$$

som var det vi skulle vise.

$\boxed{\text{2.3.2a)}}$ $1 \geq x$ for alle $x \in \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$, så mengden har en øvre skranke.

$\boxed{\text{2.3.2c)}}$ Anta at en slik øvre skranke finnes, det vil si, anta det finnes $m \in \mathbb{R}$ slik at $m \geq \frac{1}{x}$ for alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da finnes $k \in \mathbb{N}$ slik at $10^k \leq m \leq 10^{k+1}$. Men da er

$$\frac{1}{10^{-k-2}} = 10^{k+2} > m$$

en motsigelse. Dermed er $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{R}\}$ ikke oppad begrenset.