Vår 2017, Bruell/Hag

Flerdimensjonal analyse (MA1103)

Øving 9 – Repetisjon av Kapittel 2,3,5

Oppgave 1 (SE LÆREBOKA!)

Svar på følgende spørsmål (minst et svar er riktig):

a) Hva er en ekvivalent formulering av $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *er kontinuerlig i et opphopningspunkt* $a \in A$?

- ☐ Til en $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \epsilon$ for alle $\mathbf{x} \in A$ slik at $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.
- ☑ Til enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \epsilon$ for alle $\mathbf{x} \in A$ slik at $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.
- ☑ $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

b) La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en funksjon som har partiellderiverte av annen orden. Når gjelder $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$?

- ☐ Hvis f er kontinuerlig i (x,y).
- ☑ Hvis $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er kontinuerlig i (x,y).

c) Linjeintegralet av et skalarfelt $\int_C f\, ds$ er avhengig av orienteringen av kurven C.

- ☐ Ja
- ☑ Nei

d) Anta at $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er et konservativt felt og C en lukket glatt kurve. Hva er $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$?

- ☐ Det er avhengig av kurven.
- ☑ 0

e) La $\mathbf{a}$ være et stasjonært punkt for $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og de annenordens partiellderiverte være kontinuerlige i $\mathbf{a} \in A$. Anta at determinanten til Hesse-matrisen $\det(Hf(\mathbf{a})) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$. Hva er situasjonen?

- ☐ $\mathbf{a}$ er et lokalt minimumspunkt.
- ☑ Dette er umulig.
- ☐ $\mathbf{a}$ må være et sadelpunkt.

e) La $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være to kontinuerlige funskjoner. Da må f har minimums- og maksimumspunkter på mengden $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\mathbf{x}) = 0\}$.

- ☐ Ja
- ☑ Ja, når A er begrenset i $\mathbb{R}^2$.
- ☐ Nei

Oppgave 2

i) Innfører polarkoordinater ($r \neq 0$):

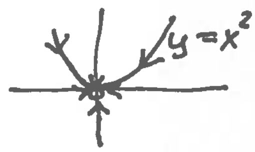
$$u = \frac{x^2+y^2+x^2y}{x^2+y^2} = \frac{r^2+r^3\cos^2 x \sin x}{r^2} = 1 + r\cos^2 x \sin x \underset{(r\to 0)}{\longrightarrow} 1$$

da $|\cos^2 x \sin x| \leq 1$.

Altså $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^u = \underline{\underline{e}}$

ii) Polarkoordinater ikke så nyttige her. Ser på aksene:

$$\left.\frac{4x^2y}{x^4+y^2}\right|_{y=0} = \frac{0}{x^4} = 0$$. Uttrykket 0 på x-aksen (og y-aksen utenfor origo) slik at grensen her blir $\underline{0}$



Hva med $y = x^2$ (som forenkler uttrykket)?

$$\frac{4x^2x^2}{x^4+x^4} = \underline{2}$$ Grensen eksisterer __ikke__.

Oppgave 3

Gitt deriverbar f s.a.

$$(*) \quad f(tx, ty) = t^n f(x,y) \text{ for alle } t, x, y \in \mathbb{R}$$

Ser på $\underline{f(u,v)}$ der $\underline{u = tx}$, $\underline{v = ty}$, og part. der $(*)$ mhp t:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^n f(x,y)\right)$$

$$x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v} = n t^{n-1} f(x,y)$$

$$\frac{u}{t}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{v}{t}\frac{\partial f}{\partial v} = n t^{n-1} f(x,y)$$

$$\underline{u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}} = n\, t^n f(x,y) \underset{(*)}{=} n f(tx,ty) = \underline{n f(u,v)}$$

Framme!

Oppgave 4

Trekantulikhet for integraler

a) $$\underline{\left|\int_C f\,ds\right|} = \left|\int_a^b f(r(t))\,\overset{\text{pos.}}{v(t)}\,dt\right| \leq \int_a^b |f(r(t))|\,v(t)\,dt$$

$$\underline{\leq} \int_a^b M\,v(t)\,dt = M\int_a^b v(t)\,dt = \underline{ML}$$

b) $r'(t) = (1, t^{1/2}, 1)$; $v(t) = \|(1, t^{1/2}, 1)\| = \sqrt{2+t}$

$$f(t, \tfrac{2}{3}t^{3/2}, t) = \frac{t + \frac{2}{3}t^{3/2}}{\frac{2}{3}t^{3/2} + t} = \underline{1}$$

$$\int_C f\,ds = \int_1^2 1\cdot\sqrt{2+t}\,dt = \frac{2}{3}\Big[(2+t)^{3/2}\Big]_1^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}(2^3 - \sqrt{3}^3)}}$$

Oppgave 5

$$F(x,y,z) = (2xyz,\ z(x^2 - 4yz^2),\ y(x^2 - 6yz^2))$$

a) Vil finne ϕ s.a. $\nabla\phi = F$. Må da ha

$$\left.\begin{aligned} \phi &= x^2yz + c(y,z) \\ \phi &= zx^2y - 2y^2z^3 + k(x,z) \\ \phi &= yx^2z - 2y^2z^3 + h(x,y) \end{aligned}\right\}\ \underline{\phi = x^2yz - 2y^2z^3} \text{ passer}$$

b)
$$\int_C F\cdot dr = \phi(2,1,1) - \phi(1,0,1) =$$
$$= (4-2) - 0 = \underline{\underline{2}}$$

Oppgave 6

a) g kont. på $[a,b] \Rightarrow g$ har (lok.) min i $[a,b]$

b) $g(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$

$$\left.\begin{aligned} g_x &= 8xe^y - 8x^3 = 8x(e^y - x^2) = \underline{0} \\ g_y &= 4x^2e^y - 4e^{4y} = \underline{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 = e^y,\ e^{2y} = 1$$

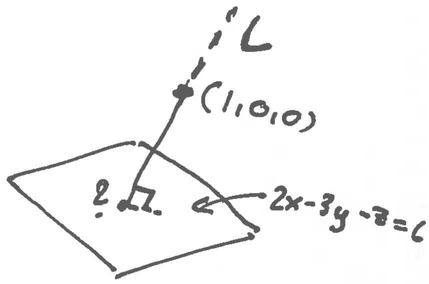
Stasjonære punkter $e^{2y} = 1$, $x^2 = e^y$ ⊃: $\underline{\underline{y = 0, x = \pm 1}}$
DE ENESTE !

c)

$$\left.\begin{aligned} g_{xx} &= 8e^y - 24x^2 \\ g_{xy} &= 8xe^y \\ g_{yy} &= 4x^2e^y - 4^2e^{4y} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &D(1,0) = 16\cdot 12 - 8^2 > 0, \quad A = -16 \\ &D(-1,0) \text{ samme} \qquad\qquad \text{samme} \end{aligned}$$

I flg. 2. derivertesten er både $\underline{(1,0) \text{ og } (-1,0)}$ lok. maks.

Oppgave 7



Kan løses på mange måter!

Uten Lagrange (som ikke har vært på øving ennå):

Plannormal $(2,-3,-1)$, og normallinje L gj. $(1,0,0)$ altså

L: $x = 1 + 2t$, $y = 0 - 3t$, $z = 0 - t$

Skjæring med planet

$$2(1+2t) - 3(-3t) - (-t) = 6$$

$$(4+9+1)t + 2 = 6 \; ; \quad t = 4/14 = \underline{2/7}$$

Altså blir punktets koordinater

$$x = 1 + 4/7 = \underline{11/7} \, , \quad y = \underline{-6/7} \, , \quad z = \underline{-2/7}$$

$\left(\frac{1}{7}(22 + 18 + 2) = 6 \; ; \text{ ok!} \right)$