Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

**Løsningsforslag — Øving 5**

Med forbehold om feil. Gi gjerne beskjed til Mads gjennom mads.sandoy@ntnu.no.

$\boxed{1}$ Gjør oppgave 6, 9, 11, 17, 18, 21, 22, 32 og 34 på side **78-82**, samt oppgave 7, 10, 11, 16, 22 og 17 på side **92-96**.

**6)**

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = A^2 + AB + BA + B^2.$$

$$\text{Men } A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**9)** $AF = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$ og $E(AF)$ er lik $(EA)F$ siden matrisemultiplikasjon er assosiativ.

**17)** (a) Bruk kolonne 2 av $B$.

(b) Bruk kun rad 2 av $A$.

(c)-(d) Bruk rad 2 av først $A$. Kolonne 2 av $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rad 2 av $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rad 2 av $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rad 2 av $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$

**18)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ har $a_{ij} = \min(i,j)$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ har $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

$A = \begin{pmatrix} 1/1 & 1/2 & 1/3 \\ 2/1 & 2/2 & 2/3 \\ 3/1 & 3/2 & 3/3 \end{pmatrix}$ har $a_{ij} = i/j$. Hvilken rang har denne matrisen?

**21)** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^4 = 0$, hvorav sistnevnte holder for alle strengt triangulære $4 \times 4$-matriser. Det vil si, det er kun null på eller under diagonalen for strengt øvre triangulære matriser, og kun null på eller over diagonalen for strengt nedre triangulære matriser. $A$ er et eksempel på en strengt øvre triangulær matrise.

Man får da $A\mathbb{v} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 4z \\ 4t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^3\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 8t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, og $A^4\mathbb{v} = 0$.

**22)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ har $A^2 = -I$; $BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$DE = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -ED.$

**32)** $AX = (A\mathbb{x}_{\mathbb{1}}, A\mathbb{x}_{\mathbb{2}}, A\mathbb{x}) = I$.

**34)** $A\,\mathbf{ones} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$ er lik $\mathbf{ones}\,A = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$ såfremt $b = c$ og $a = d$.

Isåfall har man $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

**7)** (a) I $A\mathbb{x} = (1,0,0)^t$, får man at likning 1 + *likning*2 - likning 3 blir $0 = 1$.

(b) Høyresidene må tilfredsstille $b_1 + b_2 = b_3$.

(c) Rad 3 blir en rad av nuller. Mån får altså ingen tredje ledende ener.

**10)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ og $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

**11)** (a) Det er klart at hvis $B = -A$ så er $A + B = 0$ ikke invertibel.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ er begge ikke invertible, mens summen av de, altså $I$, er det.

**16)**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}.$$

Inversen av hver matrise er den andre delt på $ad - bc$.

**17)**

$$E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Reverser rekkefølgen og bytter ut $-1$ med 1 for å få inverser $E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L = E^{-1}$.

**22)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

## 2 Et nytt tallsystem

Vi skal nå innføre et nytt tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. Skal vi innføre et nytt tallsystem, så må vi spørre oss hvilke egenskaper ønsker vi at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:

- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutativ*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.
- *additiv invers:* Gitt $z$, så eksisterer $z'$ slik at

$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:

- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
- *distributive lover:*

  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *høyre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.
- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at
$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$
- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer $z'$ slik at
$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$
- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker $2 \times 2$-matriser over de reelle tallene.

La $A$ være en $2 \times 2$-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La
$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$
For eksempel,
$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$
og
$$Y = A - \sqrt{2} A^3$$
er elementer i $S$.

(a) La $X = a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3$ og $Y = b_0 I_2 + b_1 A + b_2 A^2 + b_3 A^3$ være elementer i $S$. Vis at

(i) $I_2$ er i $S$ og $0_{2\times 2}$ er i $S$.
Man får $I_2$ ved å velge $a_0 = 1$ og $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, mens man får $0_{2\times 2}$ ved å velge alle koeffisientene lik 0.

(ii) $X - Y$ er i $S$.
Velg $c_i = a_i - b_i$ for $0 \leq i \leq 3$.

(iii) $XY$ er i $S$.
Merk at (ii) medfører at hvis $X, Y \in S$, så er $X + Y \in S$. Merk ytterligere at $a_i b_j A^i \cdot A^j = a_i b_j A^{i+j}$ er i $S$ for $0 \leq i \leq 3$ siden elementene i $S$ har vilkårlige koeffisienter og $A^4 = I$. At $XY$ er i $S$ følger da av å observere at alle leddene i produktet $XY$ er i $S$.

(b) Forklar uten regning hvorfor vi har følgende:

- $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,
- $X + Y = Y + X$,

Disse to punktene følger av at det samme holder for vilkårlige matriser.

- Det eksisterer $0_S$ i $S$ slik at
$$0_S + X = X = X + 0_S,$$

  Vi viste ovenfor at $0_{2\times 2}$ var i $S$ slik at dette følger av at $0_{2\times 2} + X = X = X + 0_{2\times 2}$ holder for vilkårlige $2 \times 2$ matriser.

- Gitt $X$ i $S$, så eksisterer det $X'$ i $S$ slik at
$$X + X' = 0_S = X' + X.$$

  Hvis $X = a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3$, kan vi finne et element i $S$ med koeffisientene $-a_i$ for $0 \leq i \leq 3$.

- $X(YZ) = (XY)Z$,
- $X(Y + Z) = XY + XZ$,
- $(X + Y)Z = XZ + YZ$,
- $I_2 X = X = X I_2$,

for alle $X$, $Y$ og $Z$ i $S$.

Alle av disse siste punktene følger av at de samme egenskapene holder for vilkårlige $2 \times 2$ matriser.