Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1102 Grunnkurs i Analyse II
Vår 2017

Løsningsforslag — Øving 8

12.8:1 d) Finn Taylor-rekken til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

om punktet $x = 1$. Finn konvergensintervallet I, og vis at rekken konvergerer mot f i I.

Løsning:
Vi merker oss at

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

for alle x slik at $|1-x| < 1$. Dvs. for $x \in (0,2) =: I$. Ved setning 12.8.3 må denne potensrekken være Taylor-rekken til f.

12.8:1 e) Finn Taylor-rekken til funksjonen

$$f(x) = \ln(x+1)$$

om punktet $x = 0$. Finn konvergensintervallet I, og vis at rekken konvergerer mot f i I.

Løsning:

Vi ser at

$$f(x) = \ln(x+1) = \int_1^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

så ved setning 12.7.1 og ved forrige oppgave har vi at for alle $x + 1 \in (a - r, a + r) =$

$(1-1, 1+1) = (0,2)$, dvs. for $x \in (-1,1)$, er

$$\begin{aligned}
\int_1^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} &= \int_1^{x+1} \sum_{n=0}^{\infty} (1-t)^n \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^{x+1} (1-t)^n \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big|_1^{x+1} - \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.
\end{aligned}$$

Ved setning 12.8.3 må denne potensrekken være Taylor-rekken til f. Konvergensintervallet til denne potensrekken er $I := (-1,1]$, så ved Abels teorem (12.6.9) holder også likheten ved $x = 1$. Dvs.

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= f(1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

12.8:3 b) Bruk Taylor-rekken til $g(x)$ om $x = 0$ til å funne Taylor-rekken til $f(x)$:

$$g(x) = e^x, \qquad f(x) = e^{-x^3}.$$

Løsning:
Vi har at Taylor-rekken til g er

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

så

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(-x^3) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^3)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

12.8:3 d) Bruk Taylor-rekken til $g(x)$ om $x = 0$ til å funne Taylor-rekken til $f(x)$:

$$g(x) = \ln(1+x), \qquad f(x) = \ln(1-x^3).$$

Løsning:
Vi har at Taylor-rekken til g er

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \forall\, x \in (-1, 1],$$

så

$$\begin{aligned} f(x) &= g(-x^3) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-x^3)^n \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}, \end{aligned}$$

for alle x slik at $-x^3 \in (-1, 1]$. Dvs. $\forall\, x \in [-1, 1)$.

$\boxed{\text{12.8:3 f)}}$ Bruk Taylor-rekken til $g(x)$ om $x = 0$ til å funne Taylor-rekken til $f(x)$:

$$g(x) = e^x, \qquad f(x) = x^2 e^x.$$

Løsning:
Vi har at Taylor-rekken til g er

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

så

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 g(x) \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{12.8:14}}$

a) Finn konvergensområdet til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n+1}.$$

b) Finn summen $S(x)$ til rekken.

Løsning: a)
Forholdstesten gir konvergens for

$$\begin{aligned} 1 &> \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\ &= 3|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \\ &= 3|x|. \end{aligned}$$

Dvs. for $|x| < 1/3$. Det er konvergens i endepunktet $x = -1/3$ ved alternerende rekketesten, og det er divergens i $x = 1/3$ ved sammenligning med den harmoniske rekken. Konvergensområdet er derfor $I := [-1/3, 1/3)$.

Løsning: b)
Vi ser at

$$xS(x/3) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

så

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xS(x/3)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} xS(x/3) &= \int \left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{d}x \\ &= -\ln(1-x) + C. \end{aligned}$$

Vi ser at $C = 0$, så $S(x/3) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$, dvs.

$$S(x) = -\frac{\ln(1-3x)}{3x}.$$

12.8:15

a) Finn konvergensområdet til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

b) Finn summen $S(x)$ til rekken.

c) Benytt resultatet i b) til å beregne $\arctan(1/2)$ med en nøyaktighet bedre enn 0.01.

Løsning: a)
Vi ser at konvergensområdet er $I := [-1, 1]$.

Løsning: b)
Vi ganger med x og deriverer:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xS(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n\\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Altså er $xS(x) = \arctan x + C$. Men vi ser at $C = 0$ og $S(x) = \frac{\arctan x}{x}$ for $x \in I \setminus \{0\}$ og $S(0) = 1$.

Løsning: c)

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\ &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tS(t))\,\mathrm{d}t\\ &= xS(x) - 0\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\end{aligned}$$

så

$$\arctan(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}.$$

Dette er en konvergerende alternerende rekke, så feilen mellom den Nte delsummen og rekken er mindre enn det første utelatte leddet:

$$\begin{aligned}|S(1/2) - S_N(1/2)| &\le |a_{N+1}|\\ &= \frac{1}{2^{2N+3}(2N+3)}.\end{aligned}$$

Dette er mindre enn 0.01 allerede for $N = 1$. Dermed er

$$\begin{aligned}\arctan(1/2) &\approx S_2(1/2)\\ &= \sum_{n=0}^{1}(-1)^n\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24}\\ &= \frac{11}{24} \approx 0.4583.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{12.8:18}}$ a) Avgjør for hvilke x rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$$

konvergerer.

b) Finn summen av rekken vha. derivasjon og integrasjon.

Løsning: a)
Forholdstesten vil vise at det er konvergens på intervallet $(-1, 1)$. Rekken divergerer i endepunktene.

Løsning: b)
La $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$. Da er

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

og for $x \neq 0$ er

$$\frac{S'(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{S'(t)}{t} \, \mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) t^n \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^x t^n \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{n+1} \Big|_0^x t^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{1}{1-x} - 1.
\end{aligned}$$

Vi løser for S:

$$\frac{S'(x)}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$S'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Dette må nå integreres. Vi skriver

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(1-x)^2} &= \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x},
\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} S(x) &= \int S'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1-x} + \ln(1-x) + C. \end{aligned}$$

Integrasjonskonstanten er gitt ved $0 = S(0) = 1 + C$.

$$S(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x), \qquad x \in (-1, 1).$$

12.10:1 **a)** Likheten som står i oppgaven er direkte usann. Den riktige likheten er $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$. Se eksempel 12.8.6 i boka; den eneste forskjellen er et fortegn.

b) Binomisk rekke med $\alpha = -1/2$ i formelen gitt i setning 12.10.1 i boka. Se eksempel 12.10.3 for å finne $\binom{-1/2}{n}$.

c) Skriver $(1-x)^{1/3} = (1 + (-x))^{1/3}$. Dette er en binomisk rekke med $\alpha = 1/3$: $(1-x)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (-1)^n x^n$. Vi skriver ut $\binom{1/3}{n}$ for $n > 1$:

$$\begin{aligned} \binom{1/3}{n} &= \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)\cdots(-n+4/3)}{n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n}. \end{aligned}$$

Altså kan vi skrive rekken som

$$(1-x)^{1/3} = 1 - \frac{x}{3} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} x^n.$$

d) Her skal det stå $\sqrt{1-x^2}$ på venstre side av ligningen. Erstatt x med $-x^2$ i eksempel 12.10.2 i boka.

12.10:2 Vi skal finne Taylor-rekken til $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Dette passer ikke direkte inn i noen kjent formel, så vi deriverer:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{0.1}$$

Vi ser at $f'(x)$ er på formen $(1+y)^\alpha$ for $\alpha = -1/2$ og $y = x^2$, og dermed kan vi bruke setning 12.10.1 til å finne Taylor-rekken til $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^{2n}. \tag{0.2}$$

Taylor-rekken til $f(x)$ får vi ved å integrere rekken over:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \tag{0.3}$$

I eksempel 12.10.3 i boka vises det at

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \tag{0.4}$$

og dermed kan vi skrive

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot (2n+1)} x^{2n+1} \tag{0.5}$$