Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Løsningsforslag — Øving 3

$\boxed{1}$ Gjør oppgave 1, 3, 4, 5, 6, 9 a) og b), 10, 11, 15, 16, 17, og 18 på side 41-43.

1) Radbildet til $A = I$ har tre ortogonale plan $x = 2$, $y = 3$ og $z = 4$. Disse er ortogonale til x-, y-, og z-aksene.

Kolonnevektorene er $\mathbb{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbb{j} = (0, 1, 0)$ og $\mathbb{k} = (0, 0, 1)$. Man får at $\mathbb{b} = (2, 3, 4) = 2\mathbb{i} + 3\mathbb{j} + 4\mathbb{k}$, altså at $\mathbb{b}$ er en lineær kombinasjon av $\mathbb{i}$, $\mathbb{j}$, og $\mathbb{k}$.

3)

Løsningen endres ikke. Det andre planet (som altså svarer til den andre raden) og kolonnene endres.

4)

Hvis $z = 2$, følger det at $x + y = 0$ og $x - y = 2$ gir punktet $(x, y, z) = (1, -1, 2)$. Hvis $zz = 0$ følger det at $x + y = 6$ og $x - y = 4$ gir $(5, 1, 0)$. Halvveis mellom disse er $(3, 0, 1)$.

5)

Hvis x, y, z tilfredsstiller de første to ligningene tilfredsstiller de også den tredje ligningen, som altså er summen av de første to.

Linjen av løsninger inneholder $\mathbb{v} = (1, 1, 0)$ og $\mathbb{w} = (1/2, 1, 1/2)$ og $\mathbb{u} = \frac{1}{2}\mathbb{v} + \frac{1}{2}\mathbb{w}$ og alle kombinasjoner $c\mathbb{v} + d\mathbb{v}$ med $c + d = 1$. Merk vel at kravet er $c + d = 1$. Tillatter du vilkårlige c og d får du et plan.

9)

(a) $A\mathbb{x} = (18, 5, 0)$ og **(b)** $A\mathbb{x} = (3, 4, 5, 5)$.

10)

Svarene blir som i forrige oppgave. Uansett om man gjør det med rader eller kolonner får man 9 forskjellige multiplikasjoner når A er 3 ganger 3.

11)

$A\mathbb{x}$ er lik $(14, 22)$ og $(0, 0)$ og $(9, 7)$.

15)

(a) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

16) $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

17) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gir oss $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$, mens $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sender $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ tilbake til $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Q er inversen til P.

$QP = I$ og $Q = P^{-1}$.

18) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ og $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ subtraherer den første komponenten fra den andre.

$\boxed{2}$ **a)** Løs det homogene ligningssystemet gitt ved

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b) Løs det inhomogene ligningssystemet gitt ved

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

Vi løser begge på en gang ved gjøre om til en matrise, og gjøre operasjoner på radene av matrisen. $r_i + c \cdot r_j$ betyr legg til c ganger rad j til rad i, mens kun $c \cdot r_j$ betyr å multiplisere rad j med c:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1+(-3)\cdot r_2} \\ \xrightarrow{r_3+3\cdot r_1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -7 & 8 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & -4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{(1/4)\cdot r_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -7 & 8 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{r_2+(-2)\cdot r_3} \\ \xrightarrow{r_1+5\cdot r_3} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1/3)\cdot r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{r_2+\cdot r_1} \\ \xrightarrow{r_3+(-2)\cdot r_1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Vi får da for det homogene systemet at:

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_4 \\ x_1 &= -x_4 \\ x_2 &= 3x_4 \end{aligned}$$

a) Alle løsningene for det homogenet systemet er derfor gitt ved $\{a(-1,3,-1,1) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

b) For det inhomogene systemet får vi:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_4 &= 1 \\ x_2 - 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Siden vi kan velge $x_4 = 0$, får vi at $(1,1,1,0)$ er en løsning av det inhomogene lignings-systemet, slik at alle løsningene er gitt ved $\{(1,1,1,0) + a(-1,3,-1,1) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{3}$ **a)** Finn redusert trappeform for matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

og løs likningssystemet

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 4z & = & 1 \\ -2x & + & y & - & 5z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & -2 \end{array}$$

b) For hvilke verdier av a har likningssystemet

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 4z & = & 1 \\ -2x & + & y & - & 5z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & (a^2-2)z & = & a-4 \end{array}$$

(i) ingen løsning?
(ii) nøyaktig én løsning?
(iii) uendelig mange løsninger?

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-2)\cdot r_1]{r_2+2\cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2\cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dette svarer til at $x = 1 - 4z$ og $y = 2 - 3z$. La $z = t$. Vi ser at ligningssystemet har uendelig mange løsninger: $\{(1,2,0) + t(-4,-3,1) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

b) Vi kan fortsatt bruke radoperasjoner for å finne en fin, forenklet form av matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & a^2-2 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-2)\cdot r_1]{r_2+2\cdot r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & a^2-10 & a-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2\cdot r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{pmatrix}$$

Vi kan finne redusert trappeform såfremt $a^2 - 4 \neq 0$, eller at $a = 2$ eller $a = -2$. Siden den reduserte trappeform har en ledende ener i hver rad, blir det nøyaktig én løsning for $a \neq \pm 2$.

For $a = 2$, får vi likningssystemet i a), og altså uendelig mange løsninger. For $a = -2$, tilsvarer siste rad av matrisen $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -4$, altså ingen løsninger.