MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 11

Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript s, bør gjøre b, og kan gjøre k.

1 Gjør oppgave $1^s, 2^s, 9^b, 11^s, 13^s, 14^s, 19^s$ og 26^b på **side 314-316.**

2 Anse denne oppgaven som merket k. La A være en $n \times n$-matrise med egenverdier $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t\}$ der $\lambda_i \neq \lambda_j$ når $i \neq j$. La $\mathcal{B}_i$ være en basis for E_{λ_i} for $i = 1, 2, \dots, t$. Husk at $E_{\lambda_i} = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \lambda_i \mathbb{x}\}$. Vis at da er $\bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{B}_i$ en basis for $\mathrm{LinSpan}(\bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{B}_i)$.

3 Anse denne oppgaven som merket k. Vis at følgende er ekvivalent for en $n \times n$-matrise A.

1. A er ortogonal.
2. Radvektorene i A er en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$.
3. Kolonnevektorene i A er en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$.

Et nytt tallsystem

Vi skal fortsette med konstruksjonen av vårt nye tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. Vi må spørre oss hvilke egenskaper vi ønsker at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:

- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutativ*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.
- *additiv invers:* Gitt z, så eksisterer z' slik at

$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:

- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
- *distributive lover:*
  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *høyre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.
- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at
$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$
- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer z' slik at
$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$
- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker 2×2-matriser over de reelle tallene.

La A være en 2×2-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La
$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$
For eksempel,
$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$
og
$$Y = A - \sqrt{2} A^3$$
er elementer i S.

Nummereringen av oppgavene følger den fra tidligere øvinger.

(i^k) For hvilke elementer X i S eksisterer det X' slik at
$$XX' = I_2 = X'X?$$
Hvis $X = a_0 I_2 + a_1 A = \begin{bmatrix} a_0 + a_a a & a_1 b \\ -\frac{a_1(1+a^2)}{b} & a_0 - a_1 a \end{bmatrix}$ og a_0 og a_1 er slik at X' eksisterer, hva er X'? Er X' igjen i S?

(j^k) La $R = \{(a_0, a_1) \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, dvs. $R = \mathbb{R}^2$. Definer *addisjon* i R som addisjon i $\mathbb{R}^2$, dvs.
$$(a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1).$$
Definer en operasjon som vi kaller *multiplikasjon* i R ved at
$$(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) = (a_0 b_0 - a_1 b_1, a_0 b_1 + a_1 b_0).$$
La $x = (a_0, a_1)$, $y = (b_0, b_1)$ og $z = (c_0, c_1)$ i R. Forklar uten regning hvorfor følgende holder:

- $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- $x + y = y + x$,
- Det eksister 0_R i R slik at
$$0_R + x = x = x + 0_R,$$
- Gitt x i R, så eksisterer det x' i R slik at
$$x + x' = 0_R = x' + x,$$
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,
- Det eksisterer 1_R i R slik at
$$1_R \cdot x = x = x \cdot 1_R,$$
- $x \cdot y = y \cdot x$,

for alle x, y og z i R.