MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 3

2.2.3b) Vi skriver om

$$\frac{2-7\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{7}{4}\sqrt{2}$$

Korollar 2.2.2 gir at $\frac{7}{4}\sqrt{2}$ er irrasjonal (siden vi vet $\frac{7}{4}$ er rasjonal og $\sqrt{2}$ er irrasjonal). Da gir Korollar 2.2.2 også at $\frac{1}{2} - \frac{7}{4}\sqrt{2}$ er irrasjonalt. Altså er tallet irrasjonalt.

2.2.3c) Vi forenkler uttrykket

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} - 6(\frac{1}{\sqrt{2}} - 4) &= 3\sqrt{2} - 6(\frac{\sqrt{2}}{2} - 4) \\ &= 3\sqrt{2} - 6\frac{\sqrt{2}}{2} + 6\cdot 4 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 24 = 24 \end{aligned}$$

Altså er tallet rasjonalt.

2.3.3c) Vi må løse de to likningene

$$x - 3 < 6 \quad \text{og} \quad -(x-3) = -x + 3 < 6$$

Løsningene er $x < 9$ og $x > -3$. Vi ser at for $x \in [-3, 9]$ er $|x-3| \leq 6$, med likhet hvis og bare hvis $x = -3$ eller $x = 9$. Vi ser også at for $x < -3$ og $x > 9$ er $|x-3| > 6$. Altså er minste øvre skranke lik 9 og største nedre skranke er -3.

2.3.6 a) Vi merker oss først at siden A og B er ikke-tomme, begrensede mengder, finnes både supremum sup (minste øvre skranke) og infimum inf (største nedre skranke) til både mengden A og til mengden B.

Per definisjon har vi at $\sup A \geq a$ for alle $a \in A$, og $\sup B \geq b$ for alle $b \in B$. Fra dette får vi umiddelbart at $\sup A + \sup B \geq \sup(A+B)$.

Vi ønsker nå å vise at disse størrelsene er like. For dette vil vi bruke et bevis ved motsigelse. Anta derfor at $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$. La

$$d = |\sup A + \sup B - \sup(A+B)|.$$

Ved definisjonen av $\sup A$ kan vi nå finne $a_0 \in A$ med $|a_0 - \sup A| < d/2$. Vi kan gjøre det samme for B, altså vi kan finne en $b_0 \in B$ med $|b_0 - \sup B| < d/$. Da er $a_0 + b_0 \in A + B$ og ved trekantulikheten får vi

$$\begin{aligned} |a_0 + b_0 - (\sup A + \sup B)| &\leq |a_0 - \sup A| + |b_0 - \sup B| \\ &< d/2 + d/2 = d. \end{aligned}$$

Men dette betyr jo at vi har funnet $a_0 + b_0 \in A + B$ med avstand strengt mindre enn d fra $\sup A + \sup B$. Antakelsen var jo at alle elementer i $A + B$ hadde avstand minst d fra $\sup A + \sup B$, så dette er en motsigelse. Antakelsen $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$ må da være feil, så vi konkluderer med at $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

b) Denne oppgaven er nesten helt lik den forrige oppgaven. Per definisjon har vi at $\inf A \leq a$ for alle $a \in A$ og $\inf B \leq b$ for alle $b \in B$. Vi får da umiddelbart at $\inf A + \inf B \leq \inf(A + B)$.

Anta så at $\inf(A + B) > \inf A + \inf B$. Igjen ønsker vi å komme frem til en selvmotsigelse. La d være det positive tallet

$$d = |\inf(A + B) - (\inf A + \inf B)|.$$

Ved definisjonen av $\inf A$ kan vi finne $a_0 \in A$ med $|a_0 - \inf A| < d/2$. På samme måte kan vi ved definisjonen av $\inf B$ finne $b_0 \in B$ med $|b_0 - \inf B| < d/2$. Ved trekantulikheten får vi da

$$\begin{aligned} |a_0 + b_0 - (\inf A + \inf B)| &\leq |a_0 - \inf A| + |b_0 - \inf B| \\ &< d/2 + d/2 = d \end{aligned}$$

Men $a_0 + b_0 \in A + B$. Så vi har funnet et element i $A + B$ med avstand strengt mindre enn d fra $\inf A + \inf B$. Antakelsen vår var at alle elementer i $A + B$ hadde avstand minst d fra $\inf A + \inf B$, så dette er en motsigelse. Antakelsen må være feil, så vi konkluderer med at $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Bemerkning: I 2.3.6 a) og b) kan man vise utsagnet direkte. Vi tar for oss a). Som ovenfor får vi $a+b \leq \sup A + \sup B$ for alle $a \in A$ og $b \in B$. Så vi får $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$ som før. La nå $\varepsilon > 0$. Da kan vi finne $a \in A$ med $a > \sup A - \varepsilon/2$ og $b \in B$ med $b > \sup B - \varepsilon/2$. Totalt er da $a + b > \sup A + \sup B - \varepsilon$, og følgelig $\sup(A + B) > \sup A + \sup B - \varepsilon$. Siden $\varepsilon > 0$ var vilkårlig må vi ha at $\sup(A + B) \geq \sup A + \sup B$, og det følger at $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

4.3.1a) Vi dividerer med n^4 i teller og nevner og bruker regnereglene for grenseverdier

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{8n^4 + 2n}{3n^4 - 7} &= \lim_{n\to\infty} \frac{8 + \frac{2n}{n^4}}{3 - \frac{7}{n^4}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(8 + \frac{2}{n^3})}{\lim_{n\to\infty}(3 - \frac{7}{n^4})} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 8 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^4}} = \frac{8+0}{3-0} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

4.3.3c) Uttrykket slik det står i oppgaven er vanskelig å evaluere. Vi multipliserer derfor teller og nevner med noe lurt"og bruker tredje kvadratsetning:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

Så ved å multiplisere med $\sqrt{n^2+n}+n$ i teller og nevner, fikk vi noe vi kan håndtere. Legg merke til at for å bruke tredje kvadratsetning for å bli kvitt kvadratroten i telleren måtte vi multiplisere med akkurat $\sqrt{n^2+n}+n$. Vi dividerer nå med n i teller og nevner for å evaluere uttrykket. Dette er det samme som å dividere med n^2 under rottegnet. Dette gir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}+\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

hvor vi har brukt $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$. Totalt har vi at

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \frac{1}{2}.$$

4.3.11 Vi deler opp i tre deler: Konvergens, divergens mot ∞, og divergens mot $-\infty$.

Anta først at $|A| < \infty$, altså at vi har konvergens. Vi må vise at for alle $\varepsilon > 0$ finnes et naturlig tall N slik at for alle $n \geq N$ er $|c_n - A| < \varepsilon$. Siden $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ vet vi at det finnes et naturlig tall N_a slik at for alle $n \geq N_a$ er $|a_n - A| < \varepsilon$. Tilsvarende, siden $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ vet vi at det finnes et naturlig tall N_b slik at for alle $n \geq N_b$ er $|b_n - A| < \varepsilon$. La $N = \max(N_a, N_b)$. For $n \geq N$ er da

$$|c_n - A| \leq \max(|a_n - A|, |b_n - A|) < \varepsilon,$$

så vi har at $\lim_{n\to\infty} c_n = A$, som var det vi skulle vise.

Anta nå at både a_n og b_n divergerer mot ∞. Vi må vise at for alle reelle tall K kan vi finne et naturlig tall N slik at for alle $n \geq K$ er $c_n \geq K$. Per antakelse om at $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ vet vi at vi kan finne et naturlig tall N_a slik at for alle $n \geq N_a$ er $a_n \geq K$. Siden $c_n \geq a_n$ konkluderer vi med at $c_n \geq K$ for alle $n \geq N_a$. Altså er $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$.

Anta til slutt at både a_n og b_n divergerer mot $-\infty$. Vi må vise at for ethvert reelt tall K finnes det et naturlig tall N slik at for alle $n \geq N$ er $c_n \leq K$. Per definisjon, gitt en slik K vet vi at det finnes et naturlig tall N_b slik at for alle $n \geq N_b$ er $b_n \leq K$. Siden $c_n \leq b_n$ konkluderer vi med at $c_n \leq K$ for alle $n \geq N_b$, og dermed har vi at $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$, som var det vi skulle vise.

4.3.13 (Ekstraoppgave) a) Følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ definert ved $a_n = \frac{1}{n^2}$ og $b_n = \frac{1}{n}$ har

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

og

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

b) $a_n = \frac{1}{n}$ og $\frac{1}{n^2}$ har

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

og

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

c) $a_n = \frac{1}{n}$ og $\frac{1}{2n}$ har

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

og

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

4.3.14 (Ekstraoppgave)

a) Følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ definert ved $a_n = n^2$, $b_n = n$ har

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

og

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} (n^2 - n) = \infty$$

b) Vi snur bytter bare om på tilfellet i forrige oppgave, si $a_n = n$ og $b_n = n^2$. Da er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty,$$

og

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} (n - n^2) = -\infty$$

c) Vi så i oppgave 4.3.3c) at $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n) = \frac{1}{2}$. Vi får da et eksempel ved å sette $a_n = \sqrt{n^2+n}$ og $b_n = n$.

4.3.19

a) Vi viser først at $x_2 > x_1$ impliserer at følgen er strengt voksende, altså at $x_{n+1} > x_n$ for alle n. Vi gjør dette ved induksjon, med $P_n : x_{n+1} > x_n$. P_1 er sann per antakelse. Anta så at P_k holder, altså at $x_{k+1} > x_k$. Vi må vise at dette medfører at P_{k+1} holder. Vi merker oss at siden $a > 0$ er $x_k \geq 0$ for alle k (dette ser vi rett fra hvordan vi definerer ledd nummer k). Dette medfører at $x_{k+1} > x_k$ impliserer at $x_{k+1}^2 > x_k^2$ (dette kunne vi ikke sagt om leddene kunne vært negative!) Dermed har vi

$$x_{k+2} = \frac{x_{k+1}^2 + 2}{3} > \frac{x_k^2 + 2}{3} = x_{k+1}$$

som et utsagnet P_{k+1}. Ulikheten fikk vi fra antakelsen om at P_k er sann. Dermed holder P_n for alle n.

Vi antar nå at $x_2 < x_1$ og viser at dette medfører at følgen er strengt avtagende. Dette er nesten samme beviset som over. La nå $P_n : x_{n+1} < x_n$. Vi viser ved induksjon at P_n er sann for alle n. Igjen holder P_1 per antakelse. Anta så at P_k holder. Igjen er $x_k \geq 0$, så vi vet at $x_k < x_{k+1}$ impliserer $x_k^2 < x_{k+1}^2$. Da får vi

$$x_{k+2} = \frac{x_{k+1}^2 + 2}{3} < \frac{x_k^2 + 2}{3} = x_{k+1}$$

som er utsagnet P_{k+1}. Ulikheten fikk vi fra antakelsen om at P_k er sann. Dermed holder P_n for alle n.

b) Vi finner først potensielle grenseverdier. La x være en grenseverdi av $\{x_n\}$. Da har vi

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+2}{3} = \frac{x^2+2}{3}$$

Vi skriver dette om til likningen $x^2 - 3x + 2 = 0$, som også kan skrives $(x-1)(x-2) = 0$ (faktoriser med abc-formelen). Fra dette vet vi at dersom følgen konvergerer, er grenseverdien 1 eller 2. Vi noterer oss at hvis $x_1 = 1$ er grenseverdien 1, og hvis $x_1 = 2$ er grenseverdien 2 (Sett inn verdiene 1 eller 2 og se at du får konstante følger). Vi ser nå på "alle andre mulige startverdier".

For alle andre $a > 0$ vil $x_2 > x_1$ eller $x_2 < x_1$. (Dette vet vi siden hvis $x_2 = x_1$ ville vi fått konstantfølger, og de to eneste konstantfølgene er $x_n = 1$ for alle n, og $x_n = 2$ for alle n, ved argumentet over) Vi vet fra a) at dette medfører at følgen er henholdsvis strengt synkende og strengt avtagende. Vi ønsker derfor å finne for hvilke $a > 0$ vi har at $x_2 > x_1$, og for hvilke $a > 0$ vi har at $x_2 < x_1$. La oss se på $x_2 > x_1$ først. Dette er ekvivalent med

$$\frac{a^2+2}{3} > a$$

eller med andre ord

$$a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2) > 0$$

- For $a < 1$ er $a - 1 < 0$ og $a - 2 < 0$, så produktet er > 0.
- For $1 < a < 2$ er $a - 1 > 0$ og $a - 2 < 0$, så produktet er < 0.
- For $a > 2$ er $a - 1 > 0$ og $a - 2 > 0$, så produktet er > 0.

Med andre ord er $x_2 > x_1$ hvis $0 < a < 1$ eller $a > 2$. Siden de eneste to potensielle grenseverdiene er 1 og 2, kan vi nå konkludere med at dersom $a > 2$ er $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Dersom $0 < a < 1$ er følgen strengt voksende, og vi trenger bare å vise at den er oppad begrenset av 1 for å konkludere med at da vil $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Men det er klart at for $0 < a < 1$ er $\frac{a^2+2}{3} < \frac{1^2+2}{3} = 1$. Dermed er $x_1 < 1$. Men da er jo $x_2 = \frac{x_1^2+2}{3} < \frac{1^2+2}{3} = 1$, og så videre for $x_3, x_4, ...$ Så følgen er oppad begrenset av 1 og vi konkluderer med at $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ i dette tilfellet.

Til slutt ser vi på tilfellet $x_2 < x_1$. Vi må finne hvilke a dette svarer til. Dette er ekvivalent med å løse

$$\frac{a^2+2}{3} < a,$$

eller med andre ord

$$a^2 - 3a + 2 < 0$$

Ved akkurat samme analyse av fortegnene til faktorene $(a-1)$ og $(a-2)$ som over finner vi at dette er tilfredsstilt for $1 < a < 2$. Følgen er da strengt avtagende og nedad begrenset (leddene kan aldri bli negative). Vi vet at dette betyr at følgen er konvergent, så eneste mulige grenseverdi er 1.

For å oppsummere: Følgen $\{x_n\}$ konvergerer mot 1 dersom $0 < a < 2$, konvergerer mot 2 dersom $a = 2$, og divergerer mot ∞ dersom $a > 2$.