Øving 8

Matematikk 4K

Uke 42

13.4.

4 For å finne ut om funksjonen er analytisk, sjekker vi at den opprettholder Cauchy-Riemann ligningene, som sier at for analytiske funksjoner er $u_x = v_y$ og $u_y = -v_x$. Vi har at

$$u_x(x,y) = \frac{\partial e^x \cos(y)}{\partial x} = e^x \cos(y)$$

og

$$v_y(x,y) = \frac{\partial - e^x \sin(y)}{\partial y} = -e^x \cos(y) \, .$$

Dermed er ikke Cauchy-Riemann ligningene opprettholdt, og funksjonen kan ikke være analytisk.

11 Vi har at

$$u_x(x,y) = \frac{\partial \sin(x) \cosh(y)}{\partial x} = \cos(x) \cosh(y)$$

og

$$v_y(x,y) = \frac{\partial \cos(x) \sinh(y)}{\partial y} = \cos(x) \cosh(y) \, ,$$

og dermed er $u_x = v_y$. Videre er

$$u_y(x,y) = \frac{\partial \sin(x) \cosh(y)}{\partial y} = \sin(x) \sinh(y)$$

og

$$v_x(x,y) = \frac{\partial \cos(x) \sinh(y)}{\partial x} = -\sin(x) \sinh(y) \, ,$$

og dermed er $u_y = -v_x$. Vi ser at Cauchy-Riemann ligningene opprettholdt i hele det komplekse planet, og funksjonen er dermed analytisk.

15 Regner vi ut de dobbeltderiverte får vi at

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2x\left(x^2+y^2\right)^2 + \left(y^2 - x^2\right) \times 4x\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^4} \\ &= \frac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} u_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2x\left(x^2+y^2\right)^2 - 2xy\cdot 2\cdot 2y\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^4} \\ &= \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}. \end{aligned}$$

Dette medfører at u er harmonisk. For å finne det harmoniske konjugatet integrerer vi $u_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = v_y$ med hensyn på y og får at

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + f(x)$$

og

$$-u_y = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} = v_x$$

medhensyn på x og får

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + g(y).$$

Dermed er $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C$, den tilhørende komplekse funksjonen er $f(z) = \frac{1}{z} + Ci$.

13.5.

15 Vi har at $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$. Bruker vi dette har vi at

$$\begin{aligned} e^{-z^2} &= e^{-(x+iy)^2} = e^{y^2-x^2-2ixy} = e^{y^2-x^2}(\cos(-2xy) + i\sin(-2xy)) \\ &= e^{y^2-x^2}\cos(2xy) - ie^{y^2-x^2}\sin(2xy). \end{aligned}$$

Dermed er den reele delen $e^{y^2-x^2}\cos(2xy)$ og den imaginere delen $-e^{y^2-x^2}\sin(2xy)$.

22 For å finne alle løsningene på $e^z = -2$, må vi løse $e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = -2$. Siden $\Im(-2) = 0$, har vi at $y = n\pi$. Siden -2 er negativt må n være ett oddetall. For å finne x tar vi logaritmen av $|-2|$, og får at $x = \log 2$. Dermed er alle løsningene på formen $z = \log(2) + i(2n+1)\pi$ hvor $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$.

13.6.

13 La oss begynne med å vise at $\cos(z)$ er en jevn funksjone. Vi har at

$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \cos(-z).$$

Tilsvarende har vi at

$$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i} = -\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i} = -\sin(-z).$$

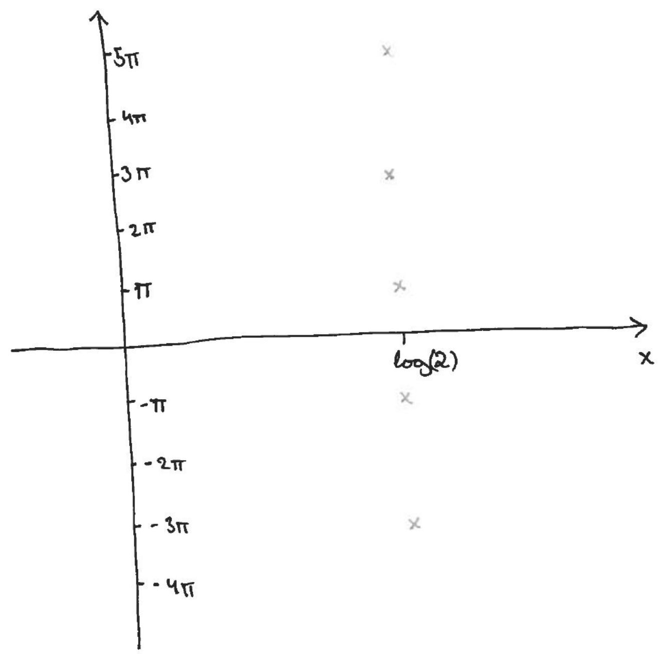
19 Vi har at

$$\sinh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = 0.$$

Ganger vi med 2 på begge sider og flytter over e^{-z} får vi

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^{-z} = e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y)).$$

Dermed har vi at $x = 0$, siden $|e^z| = |e^{-z}|$. Videre må vi ha at $\sin(y) = 0$, noe som er sant hvis $y = n\pi$ hvor $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Løsningene er dermed $z = in\pi$.



Figur 1: Noen av løsningene i oppgave 13.5.22.

13.7.

8 Når $z = 1 \pm i$, har vi at $r = \sqrt{1^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$ og $\tan(\theta) = \pm 1$ noe som betyr at $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$. Skriver vi z på eksponentialform, der vi bare tar vinkler i intervallet $(-\pi, \pi)$ har vi at

$$z = e^{\frac{1}{2}\ln(2) \pm i\pi/4}.$$

Tar vi den prinsipielle logaritmen av z får vi at

$$\mathrm{Ln}(z) = \frac{1}{2}\log(2) \pm i\pi/4.$$

18 Tar vi exponential function på begge sider av $\ln(z) = \frac{\pi i}{2}$ får vi $e^{\ln(z)} = z = e^{i\pi/2} = i$.

13.R.

27 Vi har at

$$v_x = \frac{\partial - e^{-3x}\sin(3y)}{\partial x} = 3e^{-3x}\sin(3y) = -u_y.$$

Integrerer vi med hensyn på y får vi $u(x,y) = e^{-3x}\cos(3y) + f(y)$. Gjør vi det samme for

$$v_y = \frac{\partial - e^{-3x}\sin(3y)}{\partial y} = -3e^{-3x}\cos(3y) = u_x,$$

og integrerer med hensyn på x får vi $v(x,y) = e^{-3x}\cos(3x) + g(y)$. Dermed er

$$v(x,y) = e^{-3x}\cos(3x) + C.$$

Dermed er $f(z) = e^{-3z} + C$.