MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 6

$\boxed{6.3.19}$ Vi ser på funksjonen $f(x) = e^{2e^x}$. Betrakt nå

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^n}}{e^{2e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{e^x}} \frac{e^{x^n}}{e^{e^x}}$$

For en gitt n kan vi finne M_n slik at for $x > M_n$ er $e^x > x^n$. For $x > M_n$ er da

$$\frac{e^{x^n}}{e^{e^x}} < 1$$

som medfører at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^n}}{e^{2e^x}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{e^x}} = 0$$

$\boxed{6.3.24}$ Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{hvis} \quad x > 0 \\ 0 & \text{hvis} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

viser vi først kontinuitet i 0. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ er klart. Merk at når $x \to 0^+$ vil $\frac{1}{x} = \infty$. Dermed har vi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$$

hvor vi har gjort variabelbyttet $t = \frac{1}{x}$. Dette viser at f er kontinuerlig i $x = 0$.

Vi viser nå at f er deriverbar i 0. Med andre ord vil vi vise at

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Det er klart at

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

Videre er

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$$

Vi gjør nå byttet $t = \frac{1}{x}$. Når $x \to 0^+$ vil $t \to \infty$. Får da at

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$$

Dermed er f deriverbar i 0.

Bemerkning: I begge oppgavene over kan L'Hopitals regel brukes, men i løsningsforslaget har dette blitt unngått for å vise at man kan evaluere grenseverdier uten denne "regelen". Forøvrig kunne man i 6.3.24 vise at f er deriverbar i 0, og dette ville implisert kontinuitet i 0 ved Setning 6.1.9.

6.4.2e) Vi skriver om funksjonen til

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)e^x & \text{hvis} \quad x \in [1,2) \\ (x-2)e^x & \text{hvis} \quad x \in [2,3] \end{cases}$$

De kritiske punktene til funksjonen er endepunktene til intervallet $[1,3]$, altså $x=1$ og $x=3$, samt punkter $c \in (1,3)$ hvor $f'(c)=0$ eller $f'(c)$ ikke eksisterer.

For $1 < x < 2$ er $f(x) = -(x-2)e^x$, som gir $f'(x) = e^x(1-x)$. Dette er ulik 0 for $x \in (1,2)$.

For $2 < x < 3$ er $f(x) = (x-2)e^x$, som gir $f'(x) = e^x(x-2)$, som er ulik 0 for $x \in (2,3)$.

Videre er f ikke deriverbar i $x=2$, siden

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)e^x - 0}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} -e^x = -e^2$$

mens

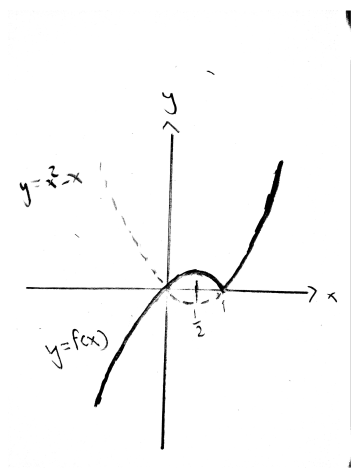
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)e^x - 0}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} e^x = e^2$$

Dermed er de kritiske punktene $1,2$ og 3. Vi har at $f(1)=e$, $f(2)=0$ og $f(3)=e^3$. Dermed kan vi konkludere med at f har maksimumsverdi $y=e^3$ for $x=3$, og minimumsverdi $y=0$ i $x=2$.

6.4.4

a) For $x<1$ er $f(x) = x(1-x)$, som gir $f'(x) = 1-2x$ og $f''(x) = -2 < 0$.
For $x > 1$ er $f(x) = x(x-1)$, som gir $f'(x) = 2x-1$ og $f''(x) = 2 > 0$.
Ved Setning 6.4.7 er f konkav i $(-\infty, 1]$ og konveks i $[1,\infty)$. $x=1$ er et vendepunkt.

b) Ved utregningene i a) er $f'(x) \geq 0$ på $(-\infty, \frac{1}{2}]$ og på $[1,\infty)$. Vi ser også at for $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ er $f'(x) = 1-2x \leq 0$, så f avtar på $[\frac{1}{2}, 1]$. Vi konkluderer da med at f har et lokalt maksimum i $x = \frac{1}{2}$ (med $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$) og et lokalt minimum i $x=1$ (med $f(1)=0$). En skisse av funksjonen blir



$\boxed{6.5.7}$ Vi skal finne eventuelle asymptoter til $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Siden f er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$ har f ingen vertikale asymptoter.

Vi ser så på eventuelle skrå asymptoter. Metoden er beskrevet i 6.5.5. Først tar vi for oss $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

Betrakt nå $\lim_{x\to\infty}(f(x) - 1\cdot x)$. I utregningen under vil vi "gange med den konjugerte".

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0\end{aligned}$$

Vi konkluderer med at $y = x$ er en (skrå) asymptote for f når $x \to \infty$.

Til slutt ser vi på tilfellet $x \to -\infty$. I utregningen nedenfor, husk at $|x| = \sqrt{x^2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x|to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{-|x|} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1\end{aligned}$$

Ser så på

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-1)\cdot x) &= \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0\end{aligned}$$

så $y = -x$ er en (skrå) asymptote for f når $x \to -\infty$.

$\boxed{7.1.2}$ Volumet av sylinderen er gitt ved $\pi r^2 h$, hvor r er radien til grunnflaten og h er høyden av sylinderen. Hvis vi jobber med alle størrelser i dm, har vi kravet at $\pi r^2 h =$

1. Det samlede arealet av topp- og bunnflaten er $2 \cdot \pi r^2$, mens arealet til "veggen" i sylinderen er $2\pi r h$. Siden materialet som brukes til "veggen" er dobbelt så dyrt som det som brukes i bunn- og toppflaten, kan vi beskrive kostnaden K som

$$K = 2 \cdot 2\pi r h + 1 \cdot 2\pi r^2 = 4\pi r h + 2\pi r^2$$

Kravet $\pi r^2 h = 1$ gir $h = \frac{1}{\pi r^2}$. Ved å sette dette inn i uttrykket for kostnaden får vi en kostnadsfunksjon som funksjon av radien r:

$$K(r) = 4\pi r \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{4}{r} + 2\pi r^2 = 2\pi(r^2 + \frac{2}{\pi r})$$

Vi deriverer dette uttrykket med hensyn på r og setter lik 0:

$$K'(r) = 2\pi(2r - \frac{2}{\pi r^2}) = 0$$

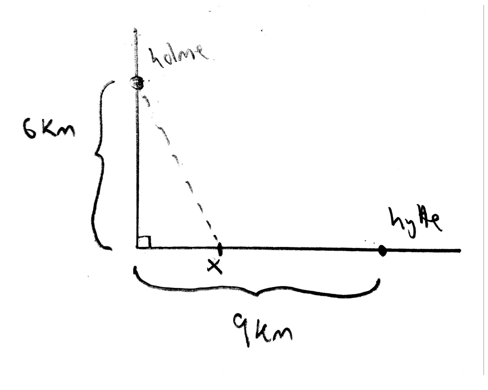
Altså løser vi $2r - \frac{2}{\pi r^2} = 0$. Dette gir $r = r^{-\frac{1}{3}}$. $r = \pi^{-\frac{1}{3}}$ er det eneste indre kritiske punktet ($r \in (0, \infty)$). Vi ser også fra uttrykket for $K(r)$ at $K(r) \to \infty$ både når $r \to 0$ og når $r \to \infty$. Altså er $r = \pi^{-\frac{1}{3}}$ det globale minimumet.

Vi finner så h.

$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi(\pi^{-\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \pi^{-\frac{1}{3}} = r$$

Altså blir $r = h = \pi^{-\frac{1}{3}}$.

$\boxed{7.1.6}$ Vi lager først en skisse av situasjonen.



Lengden vi ror er $\sqrt{6^2 + x^2}$ (Pythagoras) og lengden vi går er $9-x$. Da blir funksjonen vi må minimere

$$T(x) = \frac{\sqrt{6^2 + x^2}}{3} + \frac{9-x}{5}$$

hvor $x \in [0, 9]$. Dette er en kontinuerlig funksjon på et lukket, begrenset intervall. Vi deriverer og får

$$T'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+6^2}} - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2+6^2}} - \frac{1}{5}$$

Vi setter dette lik 0 og løser

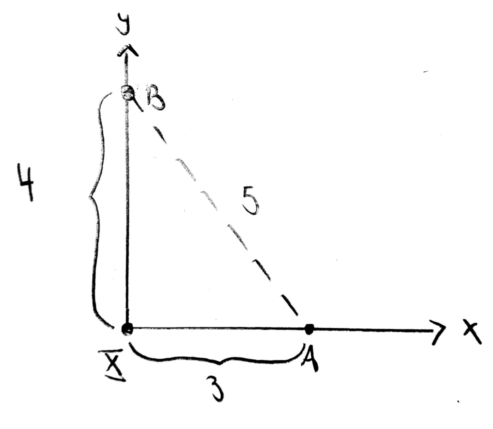
$$\begin{aligned} T'(x) = 0 \quad & \iff \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2+6^2}} - \frac{1}{5} = 0 \\ & \iff 5x = 3\sqrt{x^2+6^2} \\ & \implies 25x^2 = 9x^2 + 9 \cdot 36 \\ & \iff 16x^2 = 9 \cdot 36 \\ & \iff x^2 = \frac{6^2 \cdot 3^2}{4^2} \\ & \implies x = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Dette er det eneste indre kritiske punktet i $[0, 9]$. Vi har nå 3 kritiske punkt: 0, $\frac{9}{2}$, og 9. Vi sammenligner funksjonsverdien i de tre punktene.

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{\sqrt{6^2+0^2}}{3} + \frac{9-0}{5} = \frac{19}{5} \\ T(\frac{9}{2}) &= \frac{\sqrt{6^2+(\frac{9}{2})^2}}{3} + \frac{9-\frac{9}{2}}{5} = \frac{17}{5} \\ T(9) &= \frac{\sqrt{6^2+9^2}}{3} + \frac{9-9}{5} = \frac{\sqrt{117}}{3} \end{aligned}$$

Av disse er $T(\frac{9}{2})$ minst, så $x = \frac{9}{2}$ minimerer funksjonen.

$\boxed{7.2.8}$ Vi lager først en skisse av situasjonen



La $s(t)$ være avstanden mellom bil A og bil B ved tidspunktet t. Vi har plassert et koordinatsystem med origo i X, nord som positiv y-akse, og øst som positiv x-akse. La derfor $x(t)$ være posisjonen til bil A og la $y(t)$ være posisjonen til bil B ved tidspunkt t. Da er $s(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ ved Pythagoras. La nå t_0 være tidspunktet beskrevet i oppgaven. Da er

$$x(t_0) = 3, \quad x'(t_0) = -80, \quad y(t_0) = 4, \quad y'(t_0) = 50,$$

og $s(t_0) = \sqrt{x(t_0)^2 + y(t_0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Oppgaven etterlyser $s'(t_0)$. Vi deriverer $s(t)^2$ og får

$$(s(t)^2)' = 2s(t)s'(t) = 2y(t)y'(t) + 2x(t)x'(t)$$

Ved å isolere for $s'(t)$ får vi følgende uttrykk

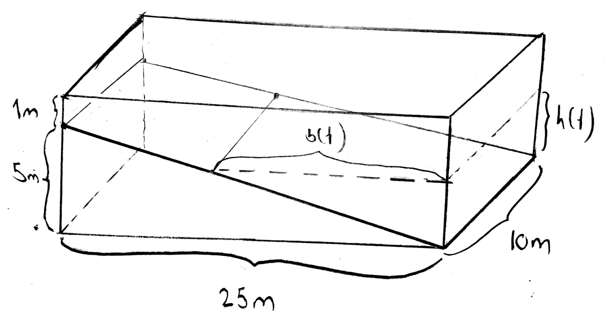
$$s'(t) = \frac{1}{s(t)}(y(t)y'(t) + x(t)x'(t))$$

Dette gir

$$s'(t_0) = \frac{1}{5}(3 \cdot (-80) + 4 \cdot 50) = \frac{1}{5}(-240 + 200) = -8 < 0$$

Så avstanden er avtagende i dette øyeblikket og avtar med -8km/t.

$\boxed{7.2.9}$ Vi lager først en skisse av situasjonen.



La $V(t)$ være vannvolum ved tiden t og la $h(t)$ være høyden i dyp ende ved tiden t. Størrelsen $b(t)$ på skissen over er avstanden fra veggen ved dyp ende til det høyeste punktet vannet treffer det skrå gulvet. Vi vet at $V'(t) = 2000\text{l/min} = 2\text{m}^3/\text{min}$. Den etterspurte størrelsen er $h(t_0)$ der t_0 er tidspunktet når $h(t_0) = 3$. $V(t)$ kan uttrykkes ved $h(t)$

$$V(t) = \frac{1}{2}b(t)h(t) \cdot 10 = 5b(t)h(t)$$

Formlikhet (se skisse) gir

$$\frac{b(t)}{h(t)} = \frac{25}{5} = 5 \Longrightarrow b(t) = 5h(t)$$

Så $V(t) = 5 \cdot 5h(t)h(t) = 25h(t)^2$. Ved å derivere dette uttrykket får vi

$$V'(t) = 25 \cdot 2h(t)h'(t) = 50h(t)h'(t)$$

Ved å isolere for $h'(t)$ får vi

$$h'(t) = \frac{V'(t)}{50h(t)}$$

Det er viktig å få alt i samme enhet, slik at ikke noen ting er oppgitt i liter ($= \text{dm}^3$) og andre ting er oppgitt i kubikkmeter. Vi har valgt å ha alt i meter, så da er $h(t_0) = 3$ og $V'(t_0) = 2$. Dette gir

$$h'(t_0) = \frac{2}{50 \cdot 3} = \frac{1}{75}$$

Så høyden øker med $\frac{1}{75}$m/min ved tidspunktet t_0 (eller $\frac{4}{3}$cm/min om en vil).