Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 2

Dette oppgavesettet er tilpasset pensum i andre forelesningsuke. Oppgavene omhandler blant annet kombinatorikk og sannsynlighetsregning, inkludert opptelling av antall gunstige og mulige utfall. Andre aktuelle begreper er betinget sannsynlighet, Bayes' teorem, loven om total sannsynlighet og venndiagrammer.

Oppgave 1

En kartong med 10 pakker vaskepulver er ved en feil kommet til å inneholde 2 undervektige pakker, mens de øvrige 8 har riktig vekt. Feilen blir oppdaget, og en trekker (uten tilbakelegging) en og en pakke av gangen og kontrollveier inntil en vet hvilke to pakker som er undervektige og kan fjerne disse.

a) Hva er sannsynligheten for at den første pakken som trekkes er undervektig?

b) Hva er sannsynligheten for at den andre pakken som trekkes er undervektig, når en vet at den første pakken som ble trukket hadde riktig vekt?

c) Tenk deg at den første trukne pakken *ikke* kontrollveies før den andre pakken trekkes. Hvor stor er da sannsynligheten for at pakken som trekkes i andre trekning er undervektig?

d) Hvor stor er sannsynligheten for at de to undervektige pakkene ikke er funnet når 4 pakker er trukket og kontrollveid?

e) La X betegne antall pakker som må kontrollveies før en vet hvilke to pakker som er undervektige. Utled sannsynlighetfordelingen for X ved å finne $P(X = x)$ for ethvert mulig utfall x. Fremstill punktsannsynligheten grafisk.

Oppgave 2

En engelsktalende turist besøker et europeisk land der morsmålet ikke er engelsk. Til turistens fortvilelse viser det seg at få innfødte snakker engelsk. Først føler turisten seg desorientert, men så blir han fortalt at det statistisk sett er slik at

- en av 10 innfødte snakker engelsk
- en av 5 personer han møter er turist
- en av to turister snakker engelsk

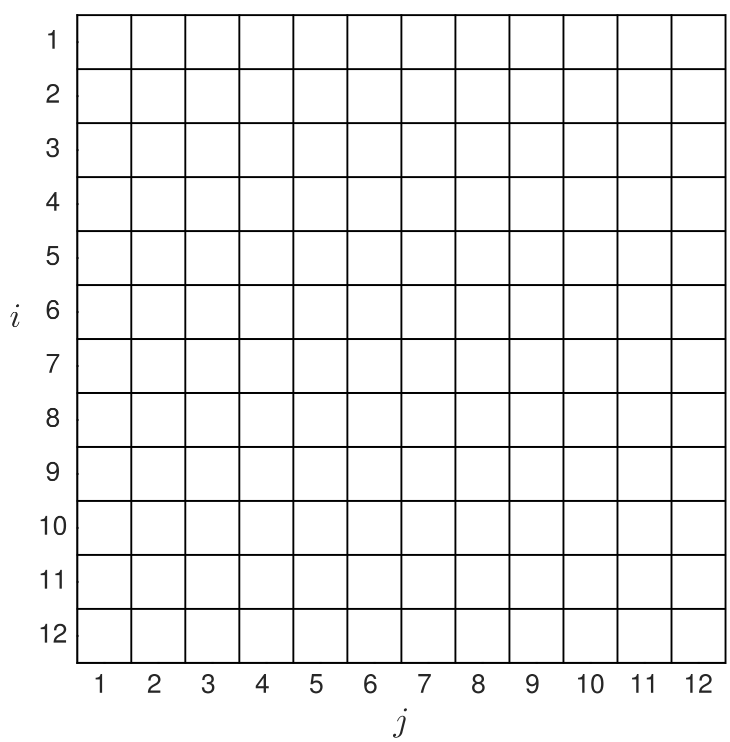
Ved hjelp av sannsynlighetsregning klarer turisten å få et overblikk over situasjonen sin.

a) Lag først et venndiagram over situasjonen.

b) Finn sannsynligheten for at en person som turisten vår møter snakker engelsk.

c) Hva er sannsynligheten for at en person som turisten møter er en innfødt gitt at personen snakker engelsk?

Oppgave 3 Undervannssøk (Bayesiansk oppdatering)
En ønsker å lokalisere et skipsvrak som ligger på havbunnen. Vraket antas å ligge innenfor et rektangulært leteområde bestående av 12×12 jamnstore celler, som vist i figuren under. Det antas videre at det kun er ett vrak i leteområdet, og at det befinner seg i nøyaktig en av de 144 cellene.



La de tilfeldige variablene X_{ij} for $i = 1, \dots, 12$ og $j = 1, \dots, 12$ være definert slik at

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis vraket befinner seg i celle } (i, j) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}.$$

Da har vi, på grunn av antakelsene over, at

$$\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} X_{ij} = 1.$$

A priori har en størst tro på at vraket er nær midten av leteområdet, og mindre tro på det ligger ute i kanten. Dette modelleres med apriorifordelingen

$$p_0(i,j) = P(X_{ij} = 1) = C \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\cdot 8}\left((i-6.5)^2 + (j-6.5)^2\right)\right\},$$

definert for $i = 1, \ldots, 12$ og $j = 1, \ldots, 12$, hvor normeringskonstanten C bestemmes av kravet

$$\sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1}^{12} P(X_{ij} = 1) = 1.$$

a) Bruk Matlab til å beregne verdien av $p_0(i,j)$ for hver celle. Visualiser apriorifordelingen.

Søket foregår ved at en undersøker en celle om gangen, og går videre til neste celle dersom en ikke finner noe. Man starter med celle $(1,1)$ og går gjennom området rad for rad, slik at rekkefølgen blir $(1,1), (1,2), \ldots, (1,12), (2,1), (2,2), \ldots (12,12)$. Hvis og når vraket lokaliseres, avsluttes søket umiddelbart. Definer de tilfeldige variablene Y_{ij} for $i = 1, \ldots, 12$ og $j = 1, \ldots, 12$ slik at

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis vraket er funnet i celle } (i,j) \text{ etter å ha undersøkt den} \\ 0 & \text{hvis celle } (i,j) \text{ er undersøkt uten noe funn} \end{cases}.$$

Sannsynligheten for å finne vraket, gitt at man undersøker riktig celle, antas å være 90%, det vi si at

$$P(Y_{ij} = 1 | X_{ij} = 1) = \ell = 0.90 \quad \text{og} \quad P(Y_{ij} = 0 | X_{ij} = 1) = 1 - \ell = 0.10.$$

Undersøker man feil celle, får man aldri noe utslag, så

$$P(Y_{ij} = 1 | X_{ij} = 0) = 0 \quad \text{og} \quad P(Y_{ij} = 0 | X_{ij} = 0) = 1.$$

Se nå på situasjonen hvor celle $(1,1)$ er undersøkt uten funn. Vi har med andre ord observert $Y_{1,1} = 0$.

b) Vis at posteriorisannsynligheten for at vraket likevel er i celle $(1,1)$ er

$$p_1(1,1) = P(X_{1,1} = 1 | Y_{1,1} = 0) = \frac{p_0(1,1)(1-\ell)}{1 - p_0(1,1)\ell},$$

og at posteriorisannsynligheten for at vraket er i en annen celle $(i,j) \neq (1,1)$ er

$$p_1(i,j) = P(X_{ij} = 1 | Y_{1,1} = 0) = \frac{p_0(i,j)}{1 - p_0(1,1)\ell}.$$

Anta nå at de k første cellene i rekkefølgen over er undersøkt. Vi har altså observert $Y_{1,1} = Y_{1,2} = \ldots = Y_{i_k,j_k} = 0$, og $k = 12(i_k - 1) + j_k$ for $k = 1, \ldots, 144$. La $p_k(i,j)$ betegne verdien av posteriorifordelingen i celle (i,j) i denne situasjonen,

$$p_k(i,j) = P(X_{ij} = 1 | Y_{1,1} = Y_{1,2} = \ldots = Y_{i_k,j_k} = 0).$$

c) Vis at $p_k(i,j)$ og $p_{k-1}(i,j)$ oppfyller

$$p_k(i,j) = \begin{cases} \frac{p_{k-1}(i,j)(1-\ell)}{1-p_{k-1}(i_k,j_k)\ell} & \text{for } (i,j) = (i_k,j_k) \\ \frac{p_{k-1}(i,j)}{1-p_{k-1}(i_k,j_k)\ell} & \text{for } (i,j) \neq (i_k,j_k) \end{cases}.$$

d) Bruk sammenhengen i **c)** til å lage et Matlab-skript som kan beregne posteriorifordelingen $p_k(i,j)$ i alle cellene for en vilkårlig, gyldig verdi av k. Visualiser posteriorifordelingen for minst en verdi av k som oppfyller $0 < k < 144$. Gjør det samme for $k = 144$. Sammenlign med apriorifordelingen i **a)** og kommenter.

Fasit

1. **a**) 0.2 **b**) 0.22 **c**) 0.2 **d**) 0.867

2. **b**) 0.18 **c**) 0.444