Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0001 Brukerkurs i matematikk A
Høst 2017

Løsningsforslag — Øving 8

Innleveringsoppgaver

1 Vis at

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Hint: Brøkregelen!

Løsning:
Vi vet at $\tan x$ kan skrives som

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Dermed kan vi bruke brøkregelen for å finne $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} && \left[\text{Brøkregelen:} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right] \\
&= \frac{\cos x \cdot (\cos x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} && (\text{fordi: } \cos^2 x + \sin^2 x = 1)
\end{aligned}$$

Også vet vi at:

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Dermed får vi:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

2 Finn den deriverte av funksjonene

a) $f(x) = x^2 e^{2x}$.

b) $g(x) = \dfrac{1+\sin x}{1+e^x+x^2}$.

c) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

Løsning: a)

$$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2e^{2x}\cdot 2 = e^{2x}(2x+2x^2).$$

Løsning: b)

$$g'(x) = \frac{\cos x(1+e^x+x^2) - (1+\sin x)(e^x+2x)}{(1+e^x+x^2)^2}$$

Løsning: c)
Vi bruker kjerneregelen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Finn den deriverte av funksjonen

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} + x^{1/3} + \sqrt{\sin x} + 4^x.$$

Løsning:

$$\frac{x^2-1}{x+1} = x-1 \qquad \text{for } x \neq -1.$$

$$4^x = e^{\ln(4^x)} = e^{x\ln 4}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + \ln 4 e^{x\ln 4} \\ &= 1 + \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + \ln 4\cdot 4^x. \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Finn en tilnærming til ln(2) ved å bruke Newtons metode fra startpunktet $a_0 = 5$ for å løse ligningen

$$e^x = 2.$$

Hvor mange steg må du ta for å få korrekt verdi til fire desimaler?

Løsning:
Vi vet at $\ln 2 = 0.6931471806$ opptil fire desimaler og vi ønsker å finne en tilnærming til dette ved bruk av Newtons metode. Vi er gitt ligning $e^x = 2$. Dermed får vi:

$$f(x) = e^x - 2 \text{ og } f'(x) = e^x.$$

I Newtons metode bruker vi følgende regel for å nå fram løsningen av en gitt ligning $f(x)$(her $f(x) = e^x - 2$):

Vi velger ett startpunkt som for eksempel $a_0 = 5$ (gitt i oppgaven), og så finner vi tilnærmelser til løsningen i form av en serie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ osv. så langt vi ikke kommer nært nok til løsningen. For å finne forsettelser av a_0, bruker vi formel,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}; \text{ for } n = 0, 1, 2, \ldots; \text{ hvor } f' \text{ er den derverte av funksjonen } f.$$

Derfor begynner vi å finne en tilnærming til $\ln 2$ ved bruk av formelen over:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 5 \\
a_1 &= a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)} = 5 - \frac{f(5)}{f'(5)} = 5 - \frac{e^5 - 2}{e^5} \\
&= 5 - \frac{146.4131591}{148.4131591} = \frac{742.0657955 - 146.4131591}{148.4131591} \\
&= \frac{595.6526364}{148.4131591} = 4.0134758
\end{aligned}$$

I like måte forsetter vi å finne:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = 4.0134758 - \frac{f(4.0134758)}{f'(4.0134758)} \\
&= 3.04961675 \\
a_3 &= a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)} = 3.04961675 - \frac{f(3.04961675)}{f'(3.04961675)} \\
&= 2.14437090 \\
a_4 &= a_3 - \frac{f(a_3)}{f'(a_3)} = 2.14437090 - \frac{f(2.14437090)}{f'(2.14437090)} \\
&= 1.37865431 \\
a_5 &= a_4 - \frac{f(a_4)}{f'(a_4)} = 1.37865431 - \frac{f(1.37865431)}{f'(1.37865431)} \\
&= 0.88248896 \\
a_6 &= a_5 - \frac{f(a_5)}{f'(a_5)} = 0.88248896 - \frac{f(0.88248896)}{f'(0.88248896)} \\
&= 0.70999259
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_7 &= a_6 - \frac{f(a_6)}{f'(a_6)} = 0.70999259 - \frac{f(0.70999259)}{f'(0.70999259)} \\
&= 0.69328827 \\
a_8 &= a_7 - \frac{f(a_7)}{f'(a_7)} = 0.69328827 - \frac{f(0.69328827)}{f'(0.69328827)} \\
&= 0.6931471981 \text{ (som er den korrekte verdi av } \ln 2 = 0.6931471806 \text{ til fire desimaler.)}
\end{aligned}
$$

Altså, vi måtte ta 8 steg for å få korrekt verdi av $\ln 2$ til fire desimaler.

Anbefalte øvingsoppgaver

Fra Avsnitt 4.5 (side 177) i *Calculus for Biology and Medicine*, 3. utgave av Claudia Neuhauser.

- 1, 5, 7, 9, 15, 61, 65.

Fra Avsnitt 4.6 (side 181–183).

- 3, 5, 9, 17, 35, 41, 53, 55.

Fra Avsnitt 5.7 (side 266).

- 1, 3, 5.

OBS: Disse oppgaven skal *ikke* leveres inn!