

TMA4150 Vår 2016

Øving 8

Norges teknisk—naturvitenskapelige universitet Institutt for matematiske fag

## Fra boka:

Seksjon 18: 15, 18, 37, 46 Seksjon 19: 1, 2, 12, 23, 29

## Eksamensoppgaver

Eksamen Høst 2010, oppg 4 Eksamen Vår 2011, oppg 3 Eksamen Høst 2011, oppg 4

- 1 La  $n \in \mathbb{Z}$  være et heltall (ikke nødvendigvis positivt!) og definer  $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Vis at dette er en ring og at  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{n}] \subseteq \mathbb{C}$ .
- 2 La  $M_n(\mathbb{Z})$  være ringen av alle  $n \times n$ -matriser over  $\mathbb{Z}$ . Finn alle enhetene og nulldivisorene i  $M_n(\mathbb{Z})$ .

  Hint: Determinant.
- a) La R og S være to ringer med enhet. Vis at et element  $(a, b) \in R \times S$  er enhet i  $R \times S$  hvis og bare hvis a er enhet i R og b er enhet i S.
  - **b)** La m, n være to positive heltall med gcd(m, n) = 1. Definer  $f : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  ved  $f(a) = (a \mod m, a \mod n)$ . Vis at f er en ringisomorfi.
  - c) Eulers phi-funksjon  $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$  er definert ved at  $\phi(n) = |\{a|1 \leq a \leq n, \gcd(a,n) = 1\}|$ . Med andre ord,  $\phi(n)$  er antall heltall mindre enn eller lik n som er relativt primisk til n. Vis at  $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$  når n og m er reltivt primiske.

*Hint:*Se på antall enheter i  $\mathbb{Z}_{mn}$  og  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ .

- En ikke-triviell ringhomomorfi  $f: R \to S$  der R og S er ringer med enhet der  $0_R \neq 1_R$  og  $0_S \neq 1_S$ , er en ringhomomorfi slik at  $f(1_R) = 1_S$ .
  - a) Vis at dersom  $f: R \to S$  er en ikke-triviell ringhomomorfi, så er f(0) = 0 og f(-1) = -1.
  - **b)** Vis at den eneste ringhomomorfi  $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$  er triviell. Hint: Hva måte f(i) være dersom f var ikketriviell?