12.1:1 Finn summen til den geometriske rekken

a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$
c) $4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{54} + \dots$

Løsning: a)
Vi gjenkjenner at

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-(-1/3)} = 3/4.$$

Løsning: c)
Må ha $a_0 = 4$ og

$$r = \frac{r^{n+1}a_0}{r^n a_0} = \frac{-2/3}{4} = -1/6.$$

Så

$$4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{54} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n 4 = \frac{4}{1-(-1/6)} = 24/7.$$

12.1:3 b) Vis at rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \qquad |x| < 1$$

er konvergent og geometrisk. Finn summen

Løsning:
Rekken er geometrisk fordi $a_{n+1}/a_n = x^{2n+2}/x^{2n} = x^2$ ikke avhenger av n. Når $|x| < 1$ er $|x^2| < 1$, så rekken konvergerer med sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

12.1:7 a) Bruk Taylor-polynomene til $\ln(1-x)$ om $x = 0$ til å vise at

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

for alle $x \in (-1, 1)$.

b) Vis at
$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Løsning: a)
La $f(x) = \ln(1-x)$. Da er

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1-x) & f(0) &= 0, \\
f'(x) &= -\frac{1}{1-x} & f'(0) &= -1, \\
f''(x) &= -\left(-\frac{-1}{(1-x)^2}\right) = -\frac{1}{(1-x)^2} & f''(0) &= -1, \\
f'''(x) &= -\frac{2}{(1-x)^3} & f'''(0) &= -2, \\
f^{(iv)}(x) &= -\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4} & f^{(iv)}(0) &= -3!
\end{aligned}$$

Ut ifra dette ser vi at $f^{(n)}(0) = -(n-1)!$ for alle $n \geq 1$. Dermed er det Nte Taylor-polynomet gitt ved

$$(T_N f)(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = -\sum_{n=1}^{N} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = -\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}.$$

Vi må nå bevise at $\lim_{N\to\infty} T_N f = f$ punktvis. Dette er vanskelig, fordi Lagranges restledd er

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} x^{N+1} = -\frac{1}{(N+1)!} \frac{N!}{(1-c)^{N+1}} x^{N+1} = -\frac{1}{N+1} \left(\frac{x}{1-c}\right)^{N+1}$$

for en c mellom 0 og x. Problemet er at vi ikke kan anta at $\frac{|x|}{1-c}$ er mindre enn 1 og derfor ikke kan påstå at R_N går mot 0 når $N \to \infty$. Vi må bruke Taylors formel for restleddet:

$$\begin{aligned}
R_N(x) &= \frac{1}{N!} \int_0^x f^{(N+1)}(t)(x-t)^N \, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^x \frac{(x-t)^N}{(1-t)^{N+1}} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Vi har at $|x| < 1$ så $|t| \geq |x||t| \geq |x|t$. Videre har x og t samme fortegn og $|x| \geq |t|$ fordi integrasjonsvariablelen t går fra 0 til x. Dermed er $|x-t| = |x| - |t|$ og vi har bevist følgende ulikhet:

$$\begin{aligned}
|x-t| &= |x| - |t| \\
&\leq |x| - |x|t \\
&= |x|(1-t).
\end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
|R_N(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^N}{(1-t)^{N+1}} \,\mathrm{d}t \right| \\
&\le \left| \int_0^x \left| \frac{(x-t)^N}{(1-t)^{N+1}} \right| \mathrm{d}t \right|, \qquad \text{trekantulikheten for integraler} \\
&= \left| \int_0^x \frac{1}{1-t} \left| \frac{x-t}{1-t} \right|^N \,\mathrm{d}t \right| \\
&\le \left| \int_0^x \frac{1}{1-t} |x|^N \,\mathrm{d}t \right|, \qquad \text{fra ulikheten over} \\
&= |x|^N |\ln(1-x)|
\end{aligned}$$

og vi kan endelig vise at

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} |f(x) - (T_N f)(x)| &= \lim_{N\to\infty} |R_N(x)| \\
&\le |\ln(1-x)| \lim_{N\to\infty} |x|^N \\
&= 0
\end{aligned}$$

fordi $|x| < 1$.

Løsning: b)
Fra regnereglene for ln og fra a) har vi at

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= -\ln(1/2) \\
&= -\ln(1-1/2) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.
\end{aligned}$$

$\boxed{12.2{:}2}$ Integraltesten: Vis at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

konvergerer for $p > 1$ og divergerer for $p \le 1$.

Løsning:
Definér funksjonen $f\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}.$$

Da er f positiv, kontinuerlig og $f(n) = n^{-1}(\ln n)^{-p}$. Den er også avtagende for alle $x \in [2,\infty)$ og $p > 0$ fordi x og $(\ln x)^p$ da er stigende. (For $p \le 0$ er rekken $\ge \sum 1/n$, som divergerer.) Fra integraltesten vet vi da at rekken $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ konvergerer hvis og bare hvis integralet $\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergerer:

$$
\begin{aligned}
\int_2^R f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_2^R \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}, && u := \ln x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x \\
&= \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{\mathrm{d}u}{u^p} && u(2) = \ln 2,\ u(R) = \ln R \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-p}\Big|_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{u^{p-1}}, & p \neq 1 \\ \Big|_{\ln 2}^{\ln R} \ln u, & p = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{(\ln R)^{p-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}}\right), & p \neq 1 \\ \ln(\ln R) - \ln(\ln 2), & p = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

og vi ser at

$$
\begin{aligned}
\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \int_2^R f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \frac{1}{p-1}\frac{1}{(\ln 2)^{p-1}} < \infty, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \\ \infty, & p = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{12.2:3 a)}}$ Sammenligning- eller grensesammenligningstesten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \frac{7n^2+3}{4n^3-2}.$$

Løsning:
Vi ser at $a_n \sim 1/n$ når n er stor og mistenker derfor at rekken divergerer. Vi har at

$$\frac{7n^2+3}{4n^3-2} = \frac{7+3/n^2}{4n-2/n^2} \geq \frac{7}{4n}.$$

Altså, $a_n \geq \frac{7}{4} b_n$ der $b_n = 1/n$ og $\sum b_n$ divergerer. Rekken $\sum a_n$ divergerer derfor ved sammenligningstesten. (Merk at den nødvendige ulikheten ikke hadde vært like enkel å oppnå hvis det hadde vært $-$ i telleren og/eller $+$ i nevneren. Rekken ville likevel ha divergert og grensesammenligningstesten hadde vært enklere å bruke.)

$\boxed{\text{12.2:3 f)}}$ Sammenligning- eller grensesammenligningstesten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \sin\frac{1}{n}.$$

Løsning:
Vi vet at $\sin x \approx x$ når x er liten. Dette betyr at $a_n \approx 1/n =: b_n$ og vi mistenker derfor divergens. Ved grensesammenligningstesten vil rekken divergere hvis $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n > 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n/b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= 1 > 0.\end{aligned}$$

Ok.

$\boxed{\text{12.2:3 i)}}$ Sammenligning- eller grensesammenligningstesten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \sqrt{n^3+1} - n^{3/2}.$$

Løsning:
Det er best å omskrive leddene til

$$\begin{aligned}a_n &= \left(\sqrt{n^3+1} - n^{3/2}\right) \frac{\sqrt{n^3+1} + n^{3/2}}{\sqrt{n^3+1} + n^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^3+1} + n^{3/2}} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{n^3} + n^{3/2}} \\ &= \frac{n^{2/3}}{2}\end{aligned}$$

Rekken $\sum n^{2/3}$ konvergerer siden $2/3 < 1$, så rekken vår konvergerer ved sammenligningstesten.

$\boxed{\text{12.2:5 d)}}$ Forholdstest eller rottest:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \frac{e^n}{n!}.$$

Løsning:
Dette er en positiv rekke og ved forholdstesten er

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1} n!}{e^n (n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} \\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

og rekken konvergerer.

$\boxed{\text{12.2:5 e)}}$ Forholdstest eller rottest:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \frac{2^n}{n^n}.$$

Løsning:
Dette er en positiv rekke og ved rottesten er

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

og rekken konvergerer.

$\boxed{\text{12.2:5 g)}}$ Forholdstest eller rottest:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \frac{4^n n!}{n^n}.$$

Løsning:
Dette er en positiv rekke og ved forholdstesten er

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}(n+1)!n^n}{4^n n!(n+1)^{n+1}}\\ &= 4\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Dette er et ubestemt 1^∞-uttrykk. La $L := \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$. Da er

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{1/(n+1)}, \qquad [0/0]\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n}\frac{1}{(n+1)^2}}{-1/(n+1)^2}\\ &= -\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = -1.\end{aligned}$$

Altså er $L = e^{-1}$ og $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4/e > 1$ og rekken divergerer.

(Ved å huske den kjente grensen $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ kan denne oppgaven løses litt enklere:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1} \to e^{-1}.)$$

$\boxed{\text{12.2:9}}$ Konvergens eller divergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{2^n}.$$

Løsning:
Vi benytter det faktum at $1+2+\cdots+n = \frac{(n+1)n}{2}$. Dermed er $a_n = \frac{(n+1)n}{2^{n+1}}$ og forholdstesten gir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n2^n}{n(n-1)2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n-1)} \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

og rekken konvergerer.