10.5:1 a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Løsning:
Den karakteristiske ligningen er

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 + r - 6 \\ &= (r+3)(r-2) \end{aligned}$$

med de to reelle røttene $r_1 = -3$ og $r_2 = 2$. Den generelle løsningen er dermed gitt ved

$$y(x) = Ce^{-3x} + De^{2x}, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

10.5:1 f) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' - y' + \frac{y}{4} = 0.$$

Løsning:
Den karakteristiske ligningen er

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 - r + \frac{1}{4} \\ &= \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

med én rot $r_1 = 1/4$. Den generelle løsningen er dermed gitt ved

$$y(x) = Ce^{x/2} + Dxe^{x/2}, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

10.5:2 c) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + 16y = 0.$$

Løsning:
Den karakteristiske ligningen er

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 + 16 \\ &= (r - 4i)(r + 4i) \end{aligned}$$

med komplekse røtter $r = \pm 4i$. Den generelle løsningen er dermed gitt ved

$$y(x) = C \cos 4x + D \sin 4x, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

10.5:2 d) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' - 8y' + 20y = 0.$$

Løsning:
Den karakteristiske ligningen er

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 - 8r + 20 \\ &= (r - 4 + 2i)(r - 4 - 2i) \end{aligned}$$

med komplekse røtter $r = 4 \pm 2i$. Den generelle løsningen er dermed gitt ved

$$y(x) = e^{4x}(C \cos 2x + D \sin 2x), \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

10.6:1 a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

b) Finn en partikulær løsning til

$$y'' - y' - 2y = e^x.$$

c) Finn løsningen til problemet

$$y'' - y' - 2y = e^x, \qquad y(0) = y'(0) = 2.$$

Løsning: a)
Den karakteristiske ligningen er

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 - r - 2 \\ &= (r + 1)(r - 2) \end{aligned}$$

med de to reelle røttene $r_1 = -1$ og $r_2 = 2$. Den generelle løsningen er dermed gitt ved

$$y_h(x) = Ce^{-x} + De^{2x}, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

Løsning: b)
Vi benytter regel 2 (s.547) og forsøker å finne en partikulærløsning på formen

$$y_p(x) = Ae^x.$$

Nå er $y_p' = y_p'' = y_p$, så

$$\begin{aligned} e^x &= y_p'' - y_p' - 2y_p \\ &= -2y_p = -2Ae^x \\ &\iff \\ A &= -1/2. \end{aligned}$$

Altså

$$y_p(x) = -e^x/2$$

er en partikulær løsning.

Løsning: b)
Ved Lemma 10.6.1 er alle løsningene på formen

$$y(x) = y_p(x) = y_h(x) = -e^x/2 + Ce^{-x} + De^{2x}, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

Vi bruker initialbetingelsene og finner at

$$\begin{aligned} 2 &= y(0) \\ &= -1/2 + C + D. \\ 2 &= y'(0) \\ &= \Big|_{x=0} - e^x/2 - Ce^{-x} + 2De^{2x} \\ &= -1/2 - C + 2D. \end{aligned}$$

Vi løser det lineære ligningssystemet: Ved addisjon av de to ligningene finner vi at $4 = -1 + 3D$. Dvs. $D = 5/3$. Innsatt i den første ligningen gir dette $2 = -1/2 + C + 5/3$. Dvs. $C = 5/6$ og løsningen på problemet er

$$y(x) = -e^x/2 + \frac{5}{6}e^{-x} + \frac{5}{3}e^{2x}.$$

$\boxed{\text{10.6:11}}$ a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

b) Finn løsningen til problemet

$$y'' + 2y' + 2y = 1 + x + 2e^{2x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Løsning: a)
Den karakteristiske ligningen er $0 = r^2 + 2r + 2$ som har de komplekse løsningene $r = -1 \pm i$. Så den generelle homogene løsningen er

$$y_h(x) = e^{-x}(C \cos x + D \sin x).$$

Løsning: b)
Vi kombinerer regel 1 og 2 og forsøker å finne en partikulærløsning på formen

$$y_p(x) = Ax + B + Ee^{2x}.$$

Nå er

$$\begin{aligned} y_p' &= A + 2Ee^{2x} \\ y_p'' &= 4E^{2x}, \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} 1 + x + 2e^{2x} &= y_p'' + 2y_p' + 2y_p \\ &= 4E^{2x} + 2(A + 2Ee^{2x}) + 2(Ax + B + Ee^{2x}) \\ &= 2A + 2B + 2Ax + 10E^{2x} \\ &\iff \\ E = 1/5, &\quad A = 1/2, \quad B = 0. \end{aligned}$$

Dette gir generell løsning

$$y = y_p + y_h = x/2 + e^{2x}/5 + e^{-x}(C\cos x + D\sin x)$$

og initialbetingelsene gir

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) \\ &= 1/5 + C, \\ 1 &= y'(0) \\ &= \Big|_{x=0} 1/2 + \frac{2}{5}e^{2x} - e^{-x}(C\cos x + D\sin x) + e^{-x}(-C\sin x + D\cos x) \\ &= 1/2 + 2/5 - C + D. \end{aligned}$$

Dvs. $C = -1/5$ og $D = -1/10$. Løsningen på problemet er altså

$$y(x) = x/2 + e^{2x}/5 - \frac{e^{-x}}{10}(2\cos x + \sin x).$$

$\boxed{\text{10.8:2a}}$ Eulers metode:

$$y'(x) = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$
$$x_n = x_0 + nh, \qquad y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.$$

Eulers midtpunktsmetodemetode:

$$y'(x) = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

$$x_n = x_0 + nh, \qquad y_n = y_{n-1} + f(x^*_{n-1}, y^*_{n-1})h.$$

der

$$x^*_n = x_n + h/2, \qquad y^*_n = y_n + f(x_n, y_n)h/2.$$

Bruk Eulers metode og Eulers midtpunktsmetode til å finne en tilnærming til $y(1)$ gitt initialverdiproblemet

$$y' = \sin y + x, \qquad y(0) = 2.$$

Bruk skrittlengde $h = 1/4$.

Løsning:
Eulers metode:

Vi har $f(x,y) = x + \sin y$ og

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/4, \quad x_2 = 1/2, \quad x_3 = 3/4$$

og $x_4 = 1$ vi må finne y_4.

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) = 2. \\ y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)h \\ &= 2 + f(0,2)/4 \\ &= 2 + \sin(2)/4 \\ &\approx 2.2273. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)h \\ &= y_1 + (\sin y_1 + 1/4)/4 \\ &\approx 2.4879. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)h \\ &= y_2 + (\sin y_2 + 1/2)/4 \\ &\approx 2.7649. \end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned} y(1) \approx y_4 &= y_3 + f(x_3, y_3)h \\ &= y_3 + (\sin y_3 + 3/4)/4 \\ &\approx 3.0444. \end{aligned}$$