MA1201 Lineær algebra og geometri
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

Husk at utfordringene er ikke obligatoriske.

Oppgaver man skal gjøre merkes med superskript s, bør gjøre b, og kan gjøre k.

$\boxed{1}$ Gjør oppgave 2^s for matrisene A og B, 12^s, og 16^k på **side 266-272.**

2) $\det A = -2$, uavhengige; $\det B = 0$, avhengige; $\det C = -1$, avhengige men $\det D = 0$ siden dens undermatrise B har avhengige rader.

12)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

og

$$AC^T \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Dette medfører at $A^{-1} = \frac{1}{4}C^T = C^T / \det A$.

16) $1, 1$ kofaktoren av n ganger n matrisen er F_{n-1}. $1, 2$ kofaktoren har en 1 kolonne 1, med kofaktor F_{n-2}. Multipliser med $(-1)^{1+2}$ og også (-1) fra $1, 2$ posisjonen for å finne $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, slik at disse determinantene er Fibonaccitall.

$\boxed{2}$ Gjør oppgave 1^s a),b), 5^b, $6a)^s$, 11^b, 16^s, 17^b, 31^b, og 34^b på **side 283-287.**

1) (a) $\det A = 3$, $\det B_1 = 6$, $\det B_2 = 3$, slik at $x_1 = \frac{-6}{3} = -2$ og $x_2 \frac{3}{3} = 1$. (b) $\det A = 4$, $\det B_1 = 3$, $\det B_2 = 2$, $\det B_3 = 1$. Derfor er $x_1 \frac{3}{4}$ og $x_2 = \frac{-1}{2}$ og $x_3 = \frac{1}{4}$.

5) Hvis den første kolonnen i A er også den høyresiden b, så er $\det A = \det B_1$. Både B_2 og B_3 er singulære siden en kolonne opptrer flere ganger. Derfor er $x_1 \det B_1 / \det A = 1$ og $x_2 = x_3 = 0$.

6) (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

11) Kofaktorene av A er heltall. Divisjon med $\det A = \pm 1$ gir heltall elementer i A^{-1}.

16) (a) Areal $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 10$

(b) og (c) Areal $\frac{10}{2} = 5$, da disse trekantene er halve parallellogrammet i (a).

31)

34) Grunnflate areal $\|\mathbb{u} \times \mathbb{v}\| = 10$, høyde $\|\mathbb{w} \cos\theta = 2$, volum $(10)(2) = 20$.

$\boxed{3}$ **Utfordring:** La $B = [b_{ij}]$ være en $n \times n$-matrise der $b_{ij} = c_{ij}\lambda + c'_{ij}$ med $c_{ij}, c'_{ij} \in \mathbb{R}$. Vis at $\det(B)$ er et polynom i λ av grad n. (**Hint:** Induksjon.)

Løsning: Dette er ganske rett fram hvis man tar hintet. Vi bytter litt på notasjonen slik at vi ser på $A = [a_{ij}]$ og ikke B. Det er klart at det holder for $n = 1$, siden da er $|A| = |a_{11}| = c_{11}\lambda + c'_{11}$.

Anta så at det holder for alle $n \leq k - 1$, og merk at det følgende holder per definisjon:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}$$

$$-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{k+1}a_{k1}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{(k-1)2} & a_{(k-1)3} & \cdots & a_{(k-1)k}\end{vmatrix}.$$

Observer at alle leddene på høyresiden er determinanter av matriser på formen $A = [a_{ij}]$ med $a_{ij} = c_{ij}\lambda + c'_{ij}$ med koeffisienter lineære polynom i λ. Merk at summer av produkter av polynomer i λ er polynomer i λ. Denne observasjonen og induksjonshypotesen medfører at induksjonssteget holder, slik at også resultatet selv holder.

$\boxed{4}$ Gjør oppgave 2^s, 3^s, 9^b, 10^k, 16^k, og 21^b på **side 298-303**.

2) A har $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 5$ med egenvektorer $\mathbb{x}_1 = (-2, 1)$ og egenvektorer $\mathbb{x}_2(1, 1)$. Matrisen $A + I$ har de samme egenvektorene, men med egenverdier økt med 1 til 0 og 6. Merk at siden determinanten er lik produktet av egenverdiene, er $A + I$ singulær.

3) A har $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -1$ med $\mathbb{x}_1 = (1,1)$ og $\mathbb{x}_2 = (2,-1)$. A^{-1} har de samme egenvektorene med egenverdier $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2}$ og $\frac{1}{\lambda_2} = -1$.

9) (a) Multipliser med A: $A(A\mathbb{x}) = A(\lambda\mathbb{x}) = \lambda A\mathbb{x}$ gir $A^2 = \lambda^2\mathbb{x}$.

(b) Multipliser med A^{-1}: $\mathbb{x} = A^{-1}A\mathbb{x}A^{-1}\lambda\mathbb{x} = \lambda A^{-1}\mathbb{x}$ medfører at $A^{-1}\mathbb{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbb{x}$. Hvorfor er vi trygge på å kunne dele på λ her?

(c) Adder $I\mathbb{x} = \mathbb{x}$: $(A+I)\mathbb{x} = (\lambda+1)\mathbb{x}$.

10) $\det(A - \lambda I) = d^2 - 1,4\lambda + 0,4$ slik at A har egenverdier $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 0,4$ med $x_1 = (1,2)$ og $x_2 = (1,-1)$. A^∞ har $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 0$ med de samme egenvektorene. A^{100} har $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = (0,4)^{100}$ hvilket er nærme null, slik at A^{100} er veldig nærme A^∞: de har de samme egenvektorene og egenverdier svært nærme hverandre.

16) Velg $\lambda = 0$ i $\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$ for å finne $\det A = (\lambda_1)(\lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_n)$.

21) $(A - \lambda I)$ har samme determinant som $(A - \lambda I)^T$ siden enhver kvadratisk matrise har $\det M = \det M^T$. Merk dog at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{og} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har forskjellige egenvektorer.

Et nytt tallsystem

Vi skal fortsette med konstruksjonen av vårt nye tallsystem som kan sees på som en utvidelse av de reelle tallene. Vi må spørre oss hvilke egenskaper vi ønsker at et tallsystem skal ha. Først, hvilke egenskaper har de reelle tallene $\mathbb{R}$?

(i) To operasjoner, *addisjon* $+$ og *multiplikasjon* $\cdot$.

(ii) Addisjon:

- *assosiativ*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
- *kommutativ*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- *additivt nøytralt element* 0: $0 + z = z = z + 0$.
- *additiv invers:* Gitt z, så eksisterer z' slik at

$$z + z' = 0 = z' + z.$$

(iii) Multiplikasjon:

- *assosiativ:* $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
- *distributive lover:*
  - *venstre distributiv lov:* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3$.
  - *høyre distributiv lov:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3$.

- *multiplikativt nøytralt element* 1*:* eksisterer 1 slik at

$$1 \cdot z = z = z \cdot 1.$$

- *multiplikativ invers:* gitt $z \neq 0$, så eksisterer z' slik at

$$z \cdot z' = 1 = z' \cdot z.$$

- *kommutativ:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Konstruksjonen av vårt nye tallsystem skal tilfredsstille disse egenskapene, og den bruker 2×2-matriser over de reelle tallene.

La A være en 2×2-matrise over $\mathbb{R}$ slik at $A^4 = I_2$. La

$$S = \{a_0 I_2 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

For eksempel,

$$X = I_2 + 2A - 3A^2 - A^3$$

og

$$Y = A - \sqrt{2}A^3$$

er elementer i S.

Nummereringen av oppgavene følger den fra tidligere øvinger.

(g^k) Anta at $b > 0$ og la

$$P = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{b}} & \sqrt{b} \\ -\frac{1}{\sqrt{b}} & 0 \end{bmatrix}$$

når $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$. Vis at

$$PAP^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right].$$

Løsning: Merk at:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{b} \\ \frac{1}{\sqrt{b}} & \frac{a}{\sqrt{b}} \end{bmatrix}.$$

Man får da

$$PAP^{-1} = P \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{b} \\ \frac{1}{\sqrt{b}} & \frac{a}{\sqrt{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{b}} & \sqrt{b} \\ -\frac{1}{\sqrt{b}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{b} & 0 \\ -\frac{a}{\sqrt{b}} & \frac{1-a^2+a^2}{\sqrt{b}} \end{bmatrix} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right].$$

(h^k) Vis at $\det(a_0 I_2 + a_1 A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_0 + a_1 a & a_1 b \\ -\frac{a_1(1+a^2)}{b} & a_0 - a_1 a \end{bmatrix}\right) = a_0^2 + a_1^2$.

Løsning: Her er det bare å regne ut og sjekke at det stemmer.