MA1102 Grunnkurs i Analyse II
Vår 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 4

$\boxed{\text{11.3:1 a)}}$ Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f.

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n, \qquad f(x) = e^{-x^2}.$$

Løsning:
Må vise at $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. La $L = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, hvis den finnes. Da er

$$\begin{aligned}
\ln L &= \ln\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln(f_n(x)), \qquad x^2 \le n \\
&= \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)}{1/n}, \qquad [0/0], \text{ l'Hôp.} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2/n^2}{(1 - x^2/n)(-1/n^2)} \\
&= -\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1 - x^2/n} \\
&= -x^2.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = L = e^{-x^2} = f(x).$$

$\boxed{\text{11.3:1 b)}}$ Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f.

$$f_n = \frac{n^2 x + 7\sin x}{n^2 e^x + n x^3}, \qquad f(x) = x e^{-x}.$$

Løsning:

Må vise at $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x + 7\sin x}{n^2e^x + nx^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x + \frac{7}{n^2}\sin x}{e^x + x^3/n} \\ &= \frac{x}{e^x} = f(x).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{11.3:2 a)}}$ Finn avstanden $d_A(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\}$.

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x^2 - x, \qquad A = [0, 1/2].$$

Løsning:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) - g(x)) = 2 - 2x > 0$$

og $f(x) - g(x) \geq 0$ for alle $x \in A$, så

$$\begin{aligned}d_A(f,g) &= \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\} \\ &= f(1/2) - g(1/2) \\ &= 3/4.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{11.3:2 c)}}$ Finn avstanden $d_A(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\}$.

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = x, \qquad A = [0, 1].$$

Løsning:
Vi finner max til funksjonen $h(x) := |f(x) - g(x)|$. For det første er

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) \geq 0$$

så vi kan droppe absoluttverditegnet. Videre er

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

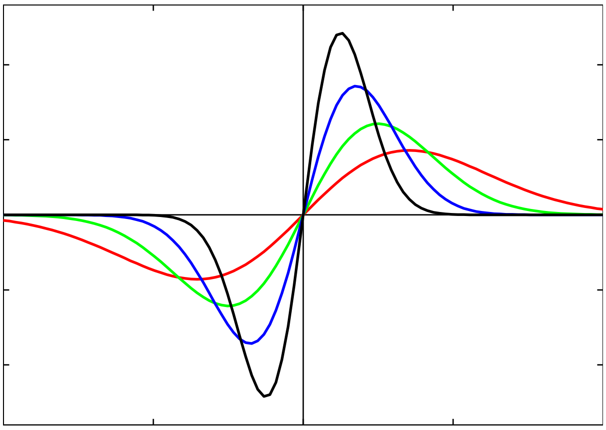
så det eneste kritiske punktet er i $x = 1/4$. I endepunktene er $h = 0$, så dermed er

$$\begin{aligned}d_A(f,g) &= \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\} \\ &= \sup\{h(x) : x \in [0,1]\} \\ &= h(1/4) = 1/4.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{11.3:7}}$

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

Vis punktvis konvergens mot en funksjon f på $\mathbb{R}$. Avgjør om det er uniform konvergens i hvert av de tre intervallene $[0,\infty), [a,\infty), [0,b]$ der $a > 0$ og $b > 0$.



Figur 1: n=1, n=2, n=4, n=8

Løsning:

Punktvis: $f_n(0) = 0$ for alle n. Anta $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} \\ &= x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{nx^2}}, \qquad [\infty/\infty] \text{ l'Hôp} \\ &= x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2 e^{nx^2}} = 0.\end{aligned}$$

Følgen konvergerer altså punktvis mot funksjonen $f(x) \equiv 0$ på $\mathbb{R}$.

(Symbolet $\equiv$ brukes her for å betone at f er *identisk* lik 0. Det er ingen feil i å definere en funksjon f som $f(x) = 0$, men visuelt kan dette kanskje forveksles med ligningen for nullpunktene til funksjonen.)

Uniform:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d_{[0,\infty)}(f, f_n) &= \lim_{n\to\infty} \sup\{|f(x) - nxe^{-nx^2}| \colon 0 \leq x\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup\{nxe^{-nx^2} : 0 \leq x\}.\end{aligned}$$

Vi må finne supremum (maximum) til $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ på $[0, \infty)$ for en gitt n: Funksjonen er positiv for $x > 0$, starter i 0 for $x = 0$ og går mot 0 når x går mot uendelig. Videre er

$$f_n'(x) = ne^{-nx^2} + nxe^{-nx^2}(-2nx) = ne^{-nx^2}(1 - 2nx^2) \tag{0.1}$$

og vi ser at det er ett kritisk punkt i $x = 1/\sqrt{2n}$. Funksjonen må dermed ha et maksimum der. Nå er $f(1/\sqrt{2n}) = \frac{n}{\sqrt{2n}} e^{-1/2} = \sqrt{\frac{n}{2e}}$, så

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d_{[0,\infty)}(f, f_n) &= \lim_{n\to\infty} \sup\{|f(x) - nxe^{-nx^2}| \colon 0 \leq x\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup\{nxe^{-nx^2} : 0 \leq x\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2e}} \\ &= \infty \neq 0.\end{aligned}$$

Konvergensen er altså ikke uniform.

Anta nå at $a > 0$. Fra utrykket for den deriverte i (0.1), ser vi at for store nok n vil f_n være synkende i intervallet $x \in [a, \infty)$. Dermed vil f_n ha maxverdi $f_n(a) = nae^{-na^2}$ og

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d_{[a,\infty)}(f, f_n) &= \lim_{n\to\infty} \sup\{nxe^{-nx^2} : a \leq x\} \\ &= \lim_{n\to\infty} nae^{-na^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

og konvergensen er uniform.

På intervallet $[0, b]$ vil konvergensen ikke være uniform pga. at det kritiske punktet alltid vil ligge i intervallet for store nok n.

11.4:2

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot en funksjon f.

b) Vis at $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Løsning: a)
Hvis $x \leq 0$ så er $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Hvis $x > 0$ så finnes en (stor nok) N slik at $1/n \leq x$ for alle $n > N$. Dermed er også da $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ og grensefunksjonen er nullfunksjonen $f(x) \equiv 0$.

Løsning: b)
Vi har at $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$, men

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/n} n\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n} - 0\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 \\ &= 1 \neq 0.\end{aligned}$$

11.4:3

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

Vis at $f_n \to f$ punktvis mot en funksjon f, men at

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Løsning:
Dette er samme funksjonsfølge som i oppgave 11.3:7 der vi viste at $f(x) \equiv 0$. Høyre side blir selvsagt 0, mens

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= n\int_0^1 xe^{-nx^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{sub: } u = x^2,\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,\ \text{samme grenser}\\ &= \frac{n}{2}\int_0^1 e^{-nu}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{n}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)\Big|_0^1 e^{-nu}\\ &= \frac{1}{2}(1-e^{-n}) \to \frac{1}{2} \text{ når } n \to \infty.\end{aligned}$$

Grafene i Figur 1 forklarer dette fenomenet: Selv om grafen blir smalere blir den også høyere for hver n. Dette skjer på en slik måte at integralet (arealet under grafen) konvergerer mot en positiv verdi og ikke mot null.

$\boxed{\text{11.4:5}}$

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n, \qquad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

a) Vis at $f_n \to f$ punktvis på $(-1,1)$.

b) Vis at $\{f_n\}$ ikke konvergerer uniformt på $(-1,1)$, men konvergerer uniformt på alle intervall av typen $(-a,a)$ der $0 < a < 1$.

c) Vis at

$$\ln(1-x) = -\lim_{n\to\infty}\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right), \qquad x \in (-1,1).$$

Løsning: a)
For alle $x \neq 1$ er $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Det følger da at for alle $x \in (-1,1)$ så er

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} = f(x).$$

Løsning: b)
Vi har at $f(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$, så

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d_{(-1,1)}(f,f_n) &= \lim_{n\to\infty}\sup\{|f(x)-f_n(x)|\colon -1<x<1\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup\left\{\frac{|x|^{n+1}}{1-x}\colon -1<x<1\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\infty\\ &= \infty \neq 0.\end{aligned}$$

La nå $0 < a < 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d_{(-a,a)}(f,f_n) &= \lim_{n\to\infty} \sup\{|f(x)-f_n(x)| \colon -a<x<a\}\\ &= \lim_{n\to\infty} \sup\left\{\frac{|x|^{n+1}}{1-x} \colon -a<x<a\right\}\end{aligned}$$

Telleren i brøken er en like funksjon, og nemneren er en positiv og minkende funksjon. Det betyr at det er nok å se på $0 \le x < a$ når vi skal finne supremum av brøken. Men på dette intervallet er telleren stigende (og positiv), så

$$\begin{aligned}\sup\left\{\frac{|x|^{n+1}}{1-x} \colon -a<x<a\right\} &= \sup\left\{\frac{|x|^{n+1}}{1-x} \colon 0\le x<a\right\}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{|x|^{n+1}}{1-x}\\ &= \frac{a^{n+1}}{1-a}\\ \implies \lim_{n\to\infty} d_{(-a,a)}(f,f_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1-a}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Løsning: c)
La $x \in (-1,1)$ og velg en a mellom x og 1, f.eks. $a = (1+x)/2$. Da er $0 < a < 1$ og $x \in (-a,a)$. Ettersom f_n konvergerer uniformt mot f på intervallet $[-a,a]$, (beregningene i siste del av oppgave 11.4:5 b) vil bli de samme med $[-a,a]$ istedet for $(-a,a)$), vil Setning 11.4.1 gi at $\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Nå er

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t}\\ &= -\ln(1-x)\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty}\int_0^x (1+t+t^2+\cdots+t^n)\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right).\end{aligned}$$