Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet Institutt for matematiske fag	MA0002 Brukerkurs i matematikk B Vår 2017 **Løsningsforslag — Øving 1**

Kapittel 7.1: Substitusjon

Teorem 1. *Hvis $u = g(x)$ så er*

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Strategi for å evaluere et integral $\int F(x)\,\mathrm{d}x$ ved hjelp av substitusjon:

Forsøk å finne en funksjon, $g(x)$, (en substitusjon) slik at F kan skrives som $F(x) = f(g(x))g'(x)$. Altså som en (enkel) funksjon, f, av $g(x)$ ganger den deriverte $g'(x)$. Ved å sette $u = g(x)$ er da $\int F(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$ der høyre side ofte er enklere å integrere.

$\boxed{7.1:2}$ Beregn det ubestemte integralet

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av substitusjonen $u = x^3 + 1$.

Løsning:
Vi ser at integranden $F(x)$ kan skrives som $f(g(x))g'(x)$ der f er kvadratrot-funksjonen og der $g(x) = x^3 + 1$ og $g'(x) = 3x^2$.

$$u = x^3 + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \int u^{1/2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3/2}u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

$\boxed{7.1:7}$ Beregn det ubestemte integralet

$$\int 7x^2\sin(4x^3)\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av substitusjonen $u = 4x^3$.

Løsning:

$$u = 4x^3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = 4 \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = 12x^2\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{12} = x^2\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\int 7x^2 \sin(4x^3)\,\mathrm{d}x &= \frac{7}{12}\int \sin u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{7}{12}(-\cos u + C') \\ &= -\frac{7}{12}\cos(4x^3) + C.\end{aligned}$$

$\boxed{7.1{:}12}$ Beregn det ubestemte integralet

$$\int x e^{(1-3x^2)}\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av substitusjonen $u = 1 - 3x^2$.

Løsning:

$$u = 1 - 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = -6x\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{\mathrm{d}u}{6} = x\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\int x e^{(1-3x^2)}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{6}\int e^u\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{6}(e^u + C') \\ &= -\frac{1}{6}e^u + C.\end{aligned}$$

$\boxed{7.1{:}24}$ Beregn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x}\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av substitusjon.

Løsning:
Siden det er lett å kjenne at derivativ av $x^4 - 4x$ vil være $4x^3 - 4,$ altså $4(x^3 - 1)$, velger vi å substituere

$$u = x^4 - 4x \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = 4x^3 - 4\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = 4(x^3 - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}(\ln|u| + C') \\ &= \frac{1}{4}\ln|x^4 - 4x| + C\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.1:40}}$ Vis fram at $\int g'(x)\sin[g(x)]\,\mathrm{d}x = -\cos[g(x)] + C$ ved hjelp av substitusjon.

Løsning:
Vi ser at integranden inneholder faktoren $g'(x)$, som er den deriverte av $g(x)$. Vi forsøker derfor med substitusjonen

$$u = g(x) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

som gir oss

$$\begin{aligned}\int g'(x)\sin[g(x)]\,\mathrm{d}x = &= \int \sin u\,\mathrm{d}u \\ &= -\cos u + C \\ &= -\cos[g(x)] + C.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.1:56}}$ Beregn det bestemte integralet

$$\int_1^2 \frac{x}{(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)}\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av substitusjon.

Løsning:
Her ser vi to mulighter for substitusjonen. Enten $u = x^2 + 1$ eller $u = \ln(x^2 + 1)$. La oss vurdere begge deler:
Hvis $u = x^2 + 1 \implies \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. (NB! Husk å endre verdiene i bestemte integraler.) Derfor når

$$x = 1 \implies u = 2; \text{ og når } x = 2 \implies u = 5.$$

Den substitusjonen gir oss følgende:

$$\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{u\ln(u)}\,\mathrm{d}u.$$

som vi ikke kan løse uten en substitusjon til (dvs. $\ln(u) = t \implies \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, prøv selv!). Derfor prøver vi det andre alternativet, som er $u = \ln(x^2+1)$; som gir oss:

$$u = \ln(x^2+1) \implies \mathrm{d}u = \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x; \text{og}$$
$$x = 1 \implies u = \ln 2;\ \text{og når } x = 2 \implies u = \ln 5.$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \text{ (den substitusjon reduserer arbeid og gjør integralet lettere)}\\ &= \frac{1}{2}[\ln|u|]_{\ln(2)}^{\ln(5)}\\ &= \frac{1}{2}[\ln|\ln(5)-\ln(2)|]\\ &= \frac{1}{2}[\ln\Big|\frac{\ln 5}{\ln 2}\Big|] \approx 0.4235.\end{aligned}$$

$\boxed{7.1{:}59}$ (valgfritt) Beregn det ubestemte integralet

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av substitusjon, med hensyn til

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

.

Løsning:
Vi vet at $\cos x$ er deriverte av $\sin x$ og dermed velger vi å substitusjon:

$$\begin{aligned} u = \sin x \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \cos x\\ \Rightarrow \quad &\int \cot x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C\end{aligned}$$

Kapittel 7.2: Delvis integrasjon

Teorem 2.

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Altså hvis integranden er et produkt av to funksjoner der vi gjenkjenner den ene faktoren, $v'(x)$, som den deriverte av $v(x)$, kan vi ved delvis integrasjon "flytte" den deriverte over til den andre faktoren $u(x)$.

Håpet er at integralet på høyre side blir lettere å evaluere enn integralet til venstre. En huskeregel kan være som følger:

$\int$ av $fg = f$ ganger "integralet av g" - $\int$ "deriverte av f" ganger "integralet av g".

$\boxed{\text{7.2:3}}$ Evaluer det ubestemte integralet

$$\int 2x\cos(3x-1)\,\mathrm{d}x$$

ved delvis integrasjon.

Løsning:
Den deriverte av x er 1, så hvis vi flytter den deriverte fra $\cos(3x-1) = (\sin(3x-1))'$ til den andre faktoren x, håper vi at det resulterende integralet blir lettere å løse:

$$\begin{aligned}\int 2x\cos(3x-1)\,\mathrm{d}x &= \frac{2x\sin(3x-1)}{3} - 2\int 1\cdot\frac{\sin(3x-1)}{3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2x\sin(3x-1)}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{-\cos(3x-1)}{3} + C'\right] \\ &= \frac{2x\sin(3x-1)}{3} + \frac{2}{9}\cos(3x-1) + C.\end{aligned}$$

Merk at ved å bytte rollene til x og $\cos(3x-1)$, får vi også at

$$\int 2x\cos(3x-1)\,\mathrm{d}x = x^2\cos(3x-1) - \int 3\cdot x^2(-\sin(3x-1))\,\mathrm{d}x.$$

Dette resulterer bare i et integral som er *værre* å løse enn det opprinnelige.

$\boxed{\text{7.2:13}}$ Evaluér det ubestemte integralet

$$\int x\ln 3x\,\mathrm{d}x$$

ved delvis integrasjon.

Løsning:
Integralet av x er $\frac{x^2}{2}$, så

$$\begin{aligned}\int x\ln 3x \,\mathrm{d}x &= \ln 3x\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln 3x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln 3x - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.2:25}}$ Evaluér det bestemte integralet

$$\int_0^{\pi/3} e^x \sin x\,\mathrm{d}x$$

ved delvis integrasjon.

Løsning:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} e^x\sin x\,\mathrm{d}x &= \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} e^x\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[e^{\pi/3}\sin(\pi/3) - e^0\sin(0)\right] - \int_0^{\pi/3} e^x\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} e^x\cos x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Vi ser at den andre delen skal igjen løses ved bruk av delvis integrasjon. Dermed får vi:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} e^x\sin x\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3} - \left[\left[e^x\cos x\right]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} e^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3} - \left[\left[e^{\pi/3}\cos(\pi/3) - e^0\cos 0\right] + \int_0^{\pi/3} e^x\sin x\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3} - \left[\frac{1}{2}e^{\pi/3} - 1 + \int_0^{\pi/3} e^x\sin x\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3} - \frac{1}{2}e^{\pi/3} + 1 - \int_0^{\pi/3} e^x\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Nå står integralet

$$\int_0^{\pi/3} e^x\sin x\,\mathrm{d}x$$

på begge sidene av likning, så hvis vi lar

$$\int_0^{\pi/3} e^x\sin x\,\mathrm{d}x = I$$

så:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} e^x \sin x \,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3} - \frac{1}{2}e^{\pi/3} + 1 - \int_0^{\pi/3} e^x \sin x \,\mathrm{d}x \\ \implies I &= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/3} - \frac{1}{2}e^{\pi/3} + 1 - I \\ \implies I + I &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + 1 \\ \implies I &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) e^{\pi/3} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

det vil si:

$$\int_0^{\pi/3} e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) e^{\pi/3} + \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{7.2:37}}$ (a) Ved bruk av delvis integrasjon vis at:

$$\int x^n e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,\mathrm{d}x + C.$$

(b) Evaluér det ubestemte integralet

$$\int x^2 e^{-3x}\,\mathrm{d}x$$

ved bruk av formel i (a).

Løsning:
(a) Som vi vet, integralet av e^{ax} er $\frac{e^{ax}}{a}$, så:

$$\begin{aligned}\int x^n e^{ax}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \int \frac{e^{ax}}{a}\cdot n x^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int e^{ax}x^{n-1}\,\mathrm{d}x + C.\end{aligned}$$

(b) Ved bruk av formel vi fikk i (a):

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-3x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{-3}x^2 e^{-3x} - \int \frac{e^{-3x}}{-3}2x^{2-1}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}\int x e^{-3x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

vi bruker også samme formel på andre delen av intergralet som gir oss:

$$\begin{aligned}\int x e^{-3x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{-3}x e^{-3x} - \frac{1}{-3}\int 1\cdot e^{-3x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}x e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}x e^{-3x} + \frac{1}{3}\frac{e^{-3x}}{-3} + C' \\ &= -\frac{1}{3}x e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C'\end{aligned}$$

derfor får vi:

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-3x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C'\right] \\ &= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.2:57}}$ Evaluér det ubestemte integralet

$$\int \frac{x}{x+3}\,\mathrm{d}x$$

.

Løsning:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x+3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x+3-3}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x+3}{x+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-3}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int 1\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= x - 3\ln|x+3| + C\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.2:64}}$ Evaluér det ubestemte integralet ved bruk av enten substitusjon eller delvis integrasjon.

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Løsning:
Denne oppgaven er lett å løse ved bruk av trignometriske formeler.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

La

$$u = (\sin x - \cos x) \implies \mathrm{d}u = (\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x.$$

Ved å erstatte disse verdine, får vi:

$$\begin{aligned}\int \frac{(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sin x - \cos x| + C\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.1:15}}$ (valgfritt) Beregn det ubestemte integralet

$$\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$$

ved hjelp av delvis integrasjon.

Løsning:
Her $\sec^2 x$ er den deriverte av $\tan x$ så:

$$\begin{aligned}\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x &= x \tan x - \int \tan x \cdot 1 \, \mathrm{d}x \\ &= x \tan x - \int \tan x \, \mathrm{d}x \\ &= x \tan x - \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$