## Innleveringsoppgaver

$\boxed{1}$ La $f(x) = 2 - x + 2\sin x - x\cos x$.

**a)** Finn en tilnærming av integralet

$$\int_1^3 f(x)\,dx$$

ved å bruke midtpunktmetoden med $n = 4$.

**b)** Regn ut $f''(x)$.

**c)** Finn et tall $K$ slik at $|f''(x)| \leq K$ for alle $1 \leq x \leq 3$.

**d)** Gi et estimat for feilen

$$\left| \int_1^3 f(x)\,dx - M_4 \right|.$$

**e)** Hvor mange steg $n$ må du gjøre for å garantere at

$$\left| \int_1^3 f(x)\,dx - M_n \right| \leq \frac{1}{100}?$$

(Du skal ikke regne ut $M_n$, bare antall steg $n$.)

**Midtpunktmetoden:** Gitt $a < b$ og $n$ og en kontinuerlig funksjon $f$ på $[a, b]$, la

$$\begin{aligned}
\Delta x &:= \frac{b-a}{n}, \\
x_k &= a + k\Delta x, \qquad k = 0, \ldots n, \\
c_k &= \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \qquad k = 1, \ldots n.
\end{aligned}$$

$$M_n := \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x.$$

Hvis $|f''(x)| \leq K$ for alle $x \in [a, b]$, så er

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - M_n \right| \leq K\frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

**Løsning: a)**

$$f(x) = 2 - x + 2\sin x - x\cos x. \qquad a = 1,\ b = 3,\ n = 4.$$

$$
\begin{aligned}
\Delta x &:= \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}, \\
x_k &= a + k\Delta x = 1 + \frac{k}{2}, \qquad k = 0, \dots n, \\
c_k &= \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots n.
\end{aligned}
$$

$$
c_1 = \frac{5}{4},\ c_2 = \frac{7}{4},\ c_3 = \frac{9}{4},\ c_4 = \frac{11}{4}.
$$

$$
\begin{aligned}
M_4 &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} f(c_k) \\
&\approx 5.0292.
\end{aligned}
$$

**Løsning: b)**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2 - x + 2\sin x - x\cos x, \\
f'(x) &= -1 + 2\cos x - \cos x + x\sin x \\
&= -1 + \cos x + x\sin x, \\
f''(x) &= -\sin x + \sin x + x\cos x \\
&= x\cos x.
\end{aligned}
$$

**Løsning: c)**
La $1 \leq x \leq 3$. Da er

$$
|f''(x)| = |x\cos x| \leq 3 =: K.
$$

**Løsning: d)**
Ved feilestimatet for midtpunktsregelen er

$$
\begin{aligned}
\left|\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - M_4\right| &\leq K\frac{(b-a)^3}{24n^2} \\
&= 3\frac{2^3}{24\cdot 4^2} \\
&= \frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ Regn ut integralene.

**a)** $\displaystyle\int_0^1 x^2 + \sqrt{x} + 2x\,dx.$

**b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx.$

**c)** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx \quad \text{når} \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \leq 0, \\ 4x, & x > 0. \end{cases}$

**Løsning: a)**

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 + \sqrt{x} + 2x \, \mathrm{d}x &= \Big|_0^1 \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1} + x^2 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 - (0+0+0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

**Løsning: b)**
La $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Da er

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x),$$

så $f$ er *odde*. Dermed er

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, \mathrm{d}x = 0$$

ettersom integrasjonsintervallet er symmetrisk om origo.

**Løsning: c)**

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx \quad \text{når} \quad f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \leq 0, \\ 4x, & x > 0. \end{cases}$$

Som vi ser at $f(x)$ er et stykkevis definert funksjon. Derfor bør vi splitte integralet i to deler som:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{0} \sin(x)dx + \int_0^{\pi/2} 4xdx$$

Dermed får vi:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx &= \int_{-\pi/2}^{0} \sin(x)dx + \int_0^{\pi/2} 4xdx \\ &= -\cos x\Big|_{-\pi/2}^{0} + 4\int_0^{\pi/2} xdx \\ &= -[\cos(0) - \cos(-\pi/2)] + 4 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} \\ &= -[1-0] + \frac{4}{2}[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2] \\ &= -1 + 2\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \\ &= -1 + \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Oppgave 4, Eksamen 2012 La $a \neq 0$ og $b \neq 0$ være konstanter. Regn ut integralet

$$\int_0^{\pi/2} e^{ax} + \sin(bx)\, dx.$$

**Løsning:**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{ax} + \sin(bx)\,\mathrm{d}x &= \Big|_0^{\pi/2} \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{b}\cos(bx) \\
&= \frac{1}{a}e^{a\pi/2} - \frac{1}{b}\cos(b\pi/2) \\
&\quad - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\
&= \frac{1}{a}\Big(e^{a\pi/2} - 1\Big) - \frac{1}{b}\Big(\cos(b\pi/2) - 1\Big).
\end{aligned}$$

# Anbefalte øvingsoppgaver

Fra Avsnitt 7.5 (side 370–371) i *Calculus for Biology and Medicine*, 3. utgave av Claudia Neuhauser.

- 1, 3, 5, 7, 17, 19[1].

Fra Avsnitt 6.2 (side 305–306).

- 97, 99, 101, 103, 109, 111, 115, 117, 119.

**OBS:** Disse oppgavene skal *ikke* leveres inn!

[1] Ikke bruk hintet i boka!