Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 1

Første øving er en liten repetisjon av eksponensregning og ligningsløsning.

1 Heltallseksponenter

1 **Positive heltallseksponenter**
For alle reelle tall a og alle positive heltall n, defineres tallet a^n som

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ faktorer}}.$$

Skriv de følgende tallene uten eksponenter.

a) 4^3

b) $(-2)^4$

c) -2^4

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Løsning

a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

b) $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$

c) $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

3 **Negative heltallseksponenter**
For alle reelle tall a forskjellig fra 0, defineres $a^0 = 1$. (Uttrykket 0^0 er ikke definert.) For alle reelle tall a forskjellig fra 0 og alle positive heltall n, defineres tallet a^{-n} som

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Skriv de følgende tallene uten negative eksponenter.

a) 2^{-5}

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

c) e^{-k}

d) t^{-1}

Løsning **a)** $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{(1/4)^2} = \frac{1}{1/16} = 16$

c) $e^{-k} = \frac{1}{e^k}$

d) $t^{-1} = \frac{1}{t^1} = \frac{1}{t}$

Teorem 1. *For alle reelle tall a forskjellig fra 0 og alle heltall n og m, er*

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

og

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Teorem 2. *For alle reelle tall a og b forskjellig fra 0 og alle heltall n og m, er*

$$(a^n)^m = a^{nm},$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

og

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

5 Forenkel uttrykkene.

a) $x^{-5}x^6$

b) $\frac{e^{-4}}{e^{-1}}$

c) $(2x^4y^{-5}z^3)^{-3}$

Løsning **a)** $x^{-5}x^6 = x^{-5+6} = x^1 = x$ for alle $x \neq 0$.

b) $\frac{e^{-4}}{e^{-1}} = e^{-4-(-1)} = e^{-3}$

c) $(2x^4y^{-5}z^3)^{-3} = 2^{-3}(x^4)^{-3}(y^{-5})^{-3}(z^3)^{-3} = \frac{y^{15}}{8x^{12}z^9}$ såfremt x, y og z ikke er 0.

2 Ligningsløsning

Når vi løser ligninger, benyttes ofte disse to teoremene:

Teorem 3 (Addisjon- og multiplikasjonsprinsippet)**.** *For alle reelle tall a, b og c, så medfører $a = b$ at*

$$a + c = b + c$$

og

$$ac = bc.$$

Teorem 4. *Hvis a og b er to reelle tall, så er*

$$ab = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 0 \quad \textit{eller} \quad b = 0.$$

Symbolet " $\Longleftrightarrow$ " leses som "hvis og bare hvis". Dvs. påstanden på den ene siden medfører påstanden på den andre siden.

Husk at kvadratroten av et positivt tall a er definert som det positive tallet b som ganget med seg selv er a. Dvs.

$$\sqrt{a} = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad b \geq 0 \quad \text{og} \quad b^2 = a.$$

$\boxed{7}$ Løs ligningene for x. (Dvs. Finn alle tall x slik at påstandene er sanne.)

a) $-\frac{5}{6}x + 10 = \frac{1}{2}x + 2$

b) $3x(x-2)(5x+4) = 0$

c) $\frac{1-x}{x+1} = -2$

d) $\frac{2/5-x}{12\sqrt{(1/8)^2+(2/5-x)^2}} = \frac{1}{13}$

Løsning: a)
Anta at x er et reelt tall slik at $-\frac{5}{6}x+10 = \frac{1}{2}x+2$ (dvs. at x er en løsning). Dette medfører at

$$10 - 2 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}x$$

Dvs at

$$\begin{aligned} 8 &= \frac{3}{6}x + \frac{5}{6}x \\ &= \frac{8}{6}x = \frac{4}{3}x. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{4}8 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Ved å sette $x = 6$ inn i ligningen, ser man at det virkelig er en løsning. Altså, $\underline{\text{løsningen er } x = 6}$.

Løsning: b)

$$3x(x-2)(5x+4) = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$3x = 0 \quad \text{eller} \quad x - 2 = 0 \quad \text{eller} \quad 5x + 4 = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$

$$\underline{x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 2 \quad \text{eller} \quad x = -\frac{4}{5}}.$$

Løsning: c)
Anta at $\frac{1-x}{x+1} = -2$. Dette medfører at

$$\begin{aligned} 1 - x &= -2(x+1) \\ &= -2x - 2 \\ &\Rightarrow \\ -x + 2x &= -2 - 1. \end{aligned}$$

Dvs. $x = -3$. Dette er en løsning fordi

$$\frac{1-(-3)}{-3+1} = \frac{4}{-2} = -2,$$

så løsningen til ligningen er $\underline{x = -3}$.

Løsning: d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{13} &= \frac{2/5 - x}{12\sqrt{(1/8)^2 + (2/5-x)^2}} \\ &\Rightarrow \\ \sqrt{(1/8)^2 + (2/5-x)^2} &= \frac{13}{12}(2/5 - x) \\ &\Rightarrow \\ (1/8)^2 + (2/5-x)^2 &= \left(\frac{13}{12}(2/5-x)\right)^2 \\ &= \frac{13^2}{12^2}(2/5-x)^2 \\ &\Rightarrow \\ (1/8)^2 &= \left(\frac{13^2}{12^2} - 1\right)(2/5-x)^2 \\ &\Rightarrow \\ (2/5-x)^2 &= \frac{(1/8)^2}{\frac{13^2}{12^2} - 1} \\ &= \frac{(12/8)^2}{13^2 - 12^2} \\ &= \frac{3^2}{2^2 25}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
2/5 - x &= \pm\sqrt{\frac{3^2}{2^2 25}} \\
&= \pm\frac{3}{2\cdot 5} \\
&= \pm\frac{3}{10} \\
&\Rightarrow \\
x &= 2/5 \pm \frac{3}{10} \\
&= \frac{4\pm 3}{10}.
\end{aligned}
$$

Det er altså to mulige løsninger: $x = 1/10$ og $x = 7/10$. Vi setter disse verdiene inn i den opprinnelige ligningen for å sjekke om noen av verdiene er løsninger:

$$
\begin{aligned}
\frac{2/5 - 1/10}{12\sqrt{(1/8)^2 + (2/5 - 1/10)^2}} &= \frac{3/10}{12\sqrt{(1/8)^2 + (3/10)^2}} \\
&= \frac{1}{13}
\end{aligned}
$$

der den siste likheten ble beregnet med kalkulator. Altså er $x = 1/10$ en løsning. Den andre kandidaten kan umulig være en løsning ettersom $2/5 - 7/10 = -3/10 < 0$ og høyre side av ligningen blir negativ, mens $1/13 > 0$. Løsningen til lignigen er $x = 1/10$. Denne oppgaven viser viktigheten av å sjekke om løsningskandidatene virkelig er løsninger.