MA0001 Brukerkurs i matematikk A
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 9

Innleveringsoppgaver

$\boxed{1}$ En funksjon $f(x)$ har en invers $g(x)$. Anta at $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f'(0) = -1$ og $f'(1) = -2$. Finn $g'(0)$ og $g'(1)$.

Løsning:
Derivasjon av identiteten $x = g(f(x))$ gir $1 = g'(f(x))f'(x)$, så i $x = 0$ er

$$1 = g'(f(0))f'(0) = g'(1)(-1)$$

og $g'(1) = -1$.

I $x = 1$ er

$$1 = g'(f(1))f'(1) = g'(0)(-2)$$

og $g'(0) = -1/2$.

$\boxed{2}$ **a)** Finn den deriverte av y for $y = \dfrac{\sin(x) + 2}{x^2 + 1}$.

b) Finn den deriverte av y med implisitt derivasjon gitt at $y \ln(y) = x^3$ (den deriverte skal uttrykkes ved x og y).

Løsning: a)

$$y'(x) = \frac{\cos x(x^2 + 1) - (\sin x + 2)2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Løsning: b)

$$\begin{aligned} y(x) \ln y(x) &= x^3 \\ &\Rightarrow \\ y' \ln y + y \cdot \frac{y'}{y} &= 3x^2 \\ &\Rightarrow \\ (\ln y + 1)y' &= 3x^2 \\ &\Rightarrow \\ y' &= \frac{3x^2}{\ln y + 1} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ La y være funksjonen av x som er gitt implisitt ved ligningen

$$y^2 + y + x^4 + 3x - 4 = 0.$$

Finn $\frac{dy}{dx} = y'$. Finn tangenten til grafen av y i punktet $(1, -1)$.

Løsning:

$$\begin{aligned} 0 &= y^2 + y + x^4 + 3x - 4 \\ &\Rightarrow \\ 0 &= 2yy' + y' + 4x^3 + 3 \\ &= (2y+1)y' + 4x^3 + 3 \\ &\Rightarrow \\ y' &= -\frac{4x^3+3}{2y+1}. \end{aligned}$$

Ligningen til tangenten i punktet $(x_0, y_0) = (1, -1)$ er på formen

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

der m er stigningstallet i det gitte punktet:

$$m = y'\Big|_{(x,y)=(1,-1)} = -\frac{4x^3+3}{2y+1}\Big|_{(x,y)=(1,-1)} = -\frac{4+3}{-2+1} = 7.$$

Altså er ligningen

$$y = 7(x-1) - 1.$$

$\boxed{4}$ Bruk L'Hospitals regel til å regne ut grenseverdiene

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^x - 1)\ln(x)$.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} x^5 5^{-x}$.

Løsning: a)
Ettersom $\sin\pi = 0$ er uttrykket på $\frac{0}{0}$-form og vi kan bruke l'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\pi x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\pi\cos(\pi x)}{1} \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

Løsning: b)
Uttrykket er på $0 \cdot (-\infty)$-form og må omskrives før vi kan bruke l'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)\ln(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/(e^x-1)}, \qquad -\infty/\infty\text{-form}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-e^x/(e^x-1)^2}\\
&= -\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)^2}{xe^x}.
\end{aligned}$$

Uttrykket er fremdeles ubestemt, så vi prøver l'Hospital en gang til:

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)\ln(x) = -\lim_{x\to 0^+}\frac{2(e^x-1)e^x}{e^x+xe^x} = 0.$$

Løsning: c)
Vi omskriver uttrykket til ∞/∞-formen $\frac{x^5}{5^x}$. Nå er $5^x = e^{\ln 5^x} = e^{x\ln 5}$, så

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}5^x = \ln 5 e^{x\ln 5} = \ln 5\cdot 5^x.$$

Den andrederiverte er

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}5^x = (\ln 5)^2\cdot 5^x$$

og den n'te-deriverte er

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}5^x = (\ln 5)^n\cdot 5^x.$$

Vi bruker l'Hospital fem ganger:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{5^x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{(\ln 5)5^x}, \qquad [\infty/\infty],\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{20x^3}{(\ln 5)^2 5^x}, \qquad [\infty/\infty],\\
&\vdots\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{5!}{(\ln 5)^5 5^x}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Anbefalte øvingsoppgaver

Fra Avsnitt 4.4 (side 172–173) i *Calculus for Biology and Medicine*, 3. utgave av Claudia Neuhauser.

- 3, 5, 9, 29, 47, 51, 55, 57.
- 73, 75, 77, 83, 85.

Fra Avsnitt 4.7 (side 192–193).

- 1, 5, 7, 15, 21.
- 27, 29, 35, 39, 45, 49.
- 65, 67, 73, 75.

Fra Avsnitt 5.5 (side 252–253).

- 1, 5, 7, 15, 21, 29, 35, 45, 49, 55, 59.

OBS: Disse oppgaven skal *ikke* leveres inn!