Øving 5

Matematikk 4K

Uke 39

11.9.

2. For å finne Fourier transformasjonen regner vi ut

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{2ix}e^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{ix(2-w)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i\,(2-w)}\left(e^{i(2-w)} - e^{-i(2-w)}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,(2-w)}\sin(2-w)\,.
\end{aligned}$$

3. På samme måte som over regner vi ut Fourier transformasjonen

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b} e^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-iw}\left(e^{-ibw} - e^{-iaw}\right) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}w}\left(e^{-ibw} - e^{-iaw}\right).
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-iwx}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-iw)}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x(1+iw)}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-iw} - 0\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(0 + \frac{1}{1+iw}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-iw} + \frac{1}{1+iw}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,(1+w^2)}.
\end{aligned}$$

9.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} |x| e^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{1} xe^{-iwx}dx - \int_{-1}^{0} xe^{-iwx}dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-iw}\frac{1+iw}{w^2} - \frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^2} + \frac{e^{iw}(1-iw)}{w^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-iw}(1+iw) - 2 + e^{iw}(1-iw)}{w^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\cos(w) + 2w\sin(w) - 2}{w^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\cos(w) + 2w\sin(w) - 2}{w^2}\right) = \frac{\sqrt{2}\cos(w) + \sqrt{2}w\sin(w) - \sqrt{2}}{w^2\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

11.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int_{-1}^{0} e^{-iwx}dx + \int_{0}^{1} e^{-iwx}dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{-iw} + \frac{e^{iw}}{-iw} + \frac{e^{-iw}}{-iw} - \frac{1}{-iw}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{2i}{w} + \frac{ie^{iw}}{w} + \frac{ie^{-iw}}{w}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{2i}{w} + \frac{2i\cos(w)}{w}\right) = \frac{\sqrt{2}i\cos(w) - \sqrt{2}i}{\sqrt{\pi}w}
\end{aligned}
$$

11.R.

17. Bruker vi funksjonen gitt i eksempel 2, side 485 og setter $k = \frac{\pi}{4}$ får vi at

$$
f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{for } -2 < x < 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{for } 0 < x < 2 \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}x\right).
$$

Evaluerer vi denne serien i $x = 1$ får vi at serien i oppgaven på høyre side, som er lik $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

21. I første delen av oppgaven trenger vi å finne Fourier serien for

$$
r(t) = 3t^2 \text{ når } t \in (-\pi, \pi),
$$

og er 2π periodisk. Bemerk også at $r(t)$ er jevn, som vil si at $b_n = 0$. Regner vi ut Fourier serien, har vi at

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3t^2 dt = \pi^2,
$$

og

$$
a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3t^2\cos(nt)\,dt = \frac{12n\left(\pi(-1)^n\right)}{n^3\pi} = \frac{12(-1)^n}{n^2}
$$

Dermed er Fourier serien $r(t) = \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$.
For å finne de stabile løsningene må vi løse ODE'en

$$
y_n'' + \omega^2 y_n = \left(\omega^2 B_n - n^2 B_n\right)\sin(nt) + \left(\omega^2 A_n - n^2 A_n\right)\cos(nt) = \frac{12(-1)^n}{n^2}\cos(nt),
$$

for ikke null verdier, og

$$
y_0 = A_0\omega^2 = \pi^2.
$$

Dermed er $A_n = \frac{12(-1)^n}{n^2(\omega^2-n^2)}$ og $A_0 = \pi^2/\omega^2$. Hvis vi også tar med den homogene løsningen fra oppgave 11.3.7. har vi at løsningen er gitt med

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \pi^2/\omega^2 + \sum_{n}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^2(\omega^2 - n^2)} \cos(nt).$$