MA1102 - LF Øving 1

1) Vi skal finne likninga til kjeglesnittet som går gjennom punkta

$$(0,1),(0,-1),(2,0),(-2,0),(1,1).$$

Vi bruker den mest generelle likninga

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad (1)$$

som gitt øvst på side 9 i det eine notatet om kjeglesnitt, og oppgåva er då å finne konstantane A, B, C, D, E og F.

Anta at (1) er likninga til kjeglesnittet som går gjennom dei oppgitte punkta. Dette medfører at

$$\begin{aligned} C + E + F &= 0 \\ C - E + F &= 0 \\ 4A + 2D + F &= 0 \\ 4A - 2D + F &= 0 \\ A + B + C + D + E + F &= 0. \end{aligned}$$

Dei to første likningane vil ved henholdsvis addering og subtraksjon medføre at $C + F = 0$ og $E = 0$. Likning tre og fire vil på same måte medføre at $4A + F = 0$ og $D = 0$. Dette insett i den siste likninga vil gi $B = -A$ og dermed er kjeglesnittet gitt ved $Ax^2 - Axy + 4Ay^2 = 4A$. Ettersom $0 \neq A^2 + B^2 + C^2 = 18A^2$ kan vi no dele på $4A$ og få

$$\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{4} + y^2 = 1. \quad (2)$$

Altså viss eit kjeglesnitt går gjennom dei oppgitte punkta så vil eitkvart punkt (x, y) på kjeglesnittet oppfylle (2).

2) Vi bruker definisjonen

$$|PB_1| = \epsilon |Pl_1| \quad (3)$$

for ellipse. La $P = (x, y)$. Då er $|PB_1| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ i vårt tilfelle. Utfordringa her er å finne $|Pl_1|$, der l_1 er gitt ved likninga $y = x + 1$. Det er to måtar å løyse dette på. Den eine er teoretisk rett fram, men gir litt stygg rekning:

La $Q = (x_0, y_0)$ vere eit punkt i planet. Då er avstanden frå Q til eit vilkårleg punkt $(x, x+1)$ på l_1 gitt ved

$$\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - x - 1)^2}.$$

Avstanden frå punktet til linja vil då vere avstanden frå Q til punktet på l_1 som minimerer avstanden over. Vi deriverer og set lik 0 og finn

$$x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0) - \frac{1}{2}.$$

Vi får då at

$$\begin{aligned}
|Pl_1| &= \frac{1}{2}\sqrt{(x-y+1)^2 + (y-x-1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2(x-y+1)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}|x-y+1|
\end{aligned}$$

Dermed får vi at

$$(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{8}(x-y+1)^2.$$

Dette ser ikkje artig ut å jobbe vidare med, så vi stoppar her.

Den andre metoden er å skifte koordinatar slik at linja $y = x+1$ blir parallell med ein av aksane i det nye koordinatsystemet. Vi roterer derfor med $-\pi/4$ radianar og får

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(x-y), \\
\tilde{y} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(x+y).
\end{aligned}$$

I koordinatsystemet $(\tilde{x}, \tilde{y})$ blir linja l_1 gitt ved likninga $\tilde{x} = -\sqrt{2}/2$ og punktet $B_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Neste steg er å forskyve aksane slik at B_1 ligg på $\tilde{x}$-aksen. Det gjerast ved å redefinere $\tilde{y} = \tilde{y} - \sqrt{2}$. I det nye koordinatsystemet blir då (3) til

$$\sqrt{(\tilde{x} - \sqrt{2})^2 + \tilde{y}^2} = \frac{1}{2}|\tilde{x} + \frac{1}{2}\sqrt{2}|,$$

som er lett å løyse og som har litt finare løysing enn vi fekk med metode 1. (Byter vi tilbake til det gamle koordinatsystemet får vi sjølvsagt same svar som før om vi ikkje har gjort noko galt!)

3a) Merk at $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ (fullføring av kvadratet), så likninga kan skrivast som

$$1 = (x-1)^2 + 4y^2 = \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{(1/2)^2}.$$

Dette er ei ellipse med sentrum i $(1,0)$ og halvakser $a = 1 > b = 1/2$. Der er ingen kryssledd og styrelinja vil vere parallell med y-aksen og brennpunktet vil ligge på x-aksen. Ved formlane i notatet er

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
L &= \bar{x} - \frac{a}{\epsilon} = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}, \\
B &= \bar{x} - \epsilon a = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Det vil seie at styrelinja er $l = \{(x,y) \mid x = (\sqrt{3}-2)/\sqrt{3}\}$ og brennpunktet er $\mathcal{B} = ((2-\sqrt{3})/2, 0)$.

b) Likninga kan skrivast som

$$x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}^2} = 1$$

og på same måte som i a) ser vi at dette er ein hyperbel med sentrum i $(0,0)$ og med $a = 1 < b = \sqrt{2}$. Formlane på side 7 i notatet gir

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{3}, \\
L &= \bar{x} + \frac{a}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
B &= \bar{x} + \epsilon a = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

c) Dette er ein parabel og kan skrivast på forma

$$\begin{aligned}
y^2 &= x - 1 \\
&= 2(B-L)x + L^2 - B^2.
\end{aligned}$$

Sjå side 5 i notatet. Eksentrisiteten er $\epsilon = 1$ og vi finn B og L frå likninga over:

$$\begin{aligned}
B - L &= \frac{1}{2} \\
L^2 - B^2 &= -1.
\end{aligned}$$

Dette likningsystemet har løysinga $L = 3/4$ og $B = 5/4$.

Merk at vi i heile denne oppgåva har kunne brukt formlane i notatet kun fordi kjeglesnitta ikkje har vore roterte. Det vil seie ingen kryssledd i likningane.

4) Avstanden frå eit vilkårleg punkt på ellipsa til brennpunktet $(B_1, 0) = (1, 0)$ er ϵ gongar avstanden til den venstre styrelinja l_1. Spesifikt gjeld dette for origo, så vi får

$$\begin{aligned} 1 - 0 &= \epsilon(0 - L_1) \\ \implies L_1 &= -\frac{1}{\epsilon}, \end{aligned}$$

der $(L_1, 0)$ er skjeringspunktet mellom l_1 og x-aksen, sidan l_1 står vinkelrett på x-aksen. Ved ein formel på side 3 i notatet er midtpunktet $(\bar{x}, 0)$ gitt ved

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{B_1 - \epsilon^2 L_1}{1 - \epsilon^2} \\ &= \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon^2} \\ &= \frac{1}{1 - \epsilon}. \end{aligned}$$

Ved symmetri om midtpunktet får vi at høgre styrelinje skjer x-aksen i punktet $(L_2, 0)$, der

$$\begin{aligned} L_2 &= 2\bar{x} - L_1 \\ &= \frac{2}{1 - \epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \\ &= \frac{2\epsilon + 1 - \epsilon}{(1 - \epsilon)\epsilon} \\ &= \frac{1 + \epsilon}{(1 - \epsilon)\epsilon}. \end{aligned}$$

Høgre brennpunkt $(B_2, 0)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} B_2 &= 2\bar{x} - B_1 \\ &= \frac{2}{1 - \epsilon} - 1 \\ &= \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}. \end{aligned}$$

Når $\epsilon \to 1$ får vi ei kurve som inneheld punkta P slik at

$$|PB_1| = 1 \cdot |Pl|,$$

der l er linja l_1 går mot når $\epsilon \to 1$, det vil seie den loddrette linja som skjer x-aksen i $(-1, 0)$. Dette er eit kjeglesnitt med eksentrisitet lik 1, altså ein parabel.

For hyperblar får vi dei same formlane for L_1, $\bar{x}$, L_2 og B_2 som vi fekk for ellipser. Ved å la $\epsilon \to 1$ (men med $\epsilon > 1$) finn vi at L_2 og B_2 går mot $-\infty$, medan L_1 igjen går igjen mot -1. Kurva vil dermed vere gitt av den same likninga som over når $\epsilon \to 1$, så vi får det same svaret, nemleg ein parabel.