Oppgaver fra boken:

$$11.1 : \mathbf{3}, \mathbf{7}, \mathbf{9}, \mathbf{19}, \mathbf{25}, \mathbf{67}$$

$\boxed{\text{11.1:3}}$ Skriv systemet av differensialligninger på matrise-form.

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_3 - 2x_1$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1$$
$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = x_1 + x_2 + x_3$$

Løsning:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{11.1:7}}$ Anta systemet av differensialligninger:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 + 3x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + 2x_2$$

Finn retningsvektorer som tilhører følgende punkter i $x_1 - x_2$ planet og tegn disse i $x_1 - x_2$: (1,0), (0,1), (-1,1), (0,-1), (-3,1), (0,0) og (-2,1).

Løsning:
Vi skriver først systemet i matrise form:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

På punktet (1,0), er retningsvektor gitt ved:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

På punktet (0,1), er retningsvektor gitt ved:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

På punktet (-1,1), er retningsvektor gitt ved:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

På punktet (0,-1), er retningsvektor gitt ved:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

På punktet (-3,1), er retningsvektor gitt ved:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

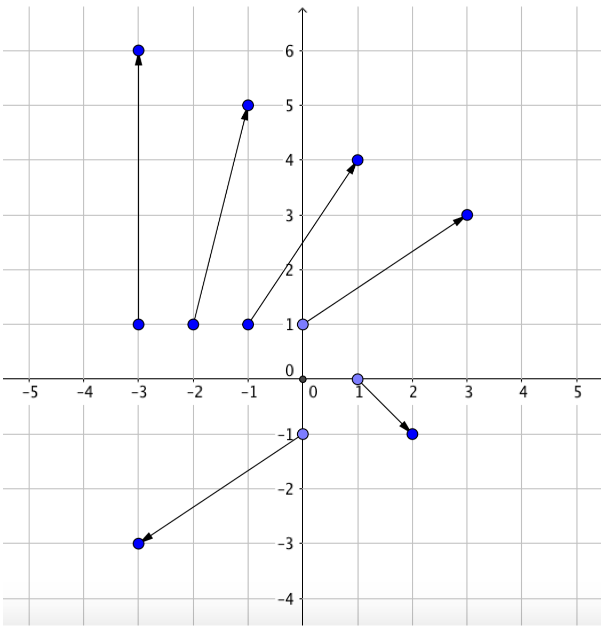
På punktet (0,0), er retningsvektor gitt ved:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

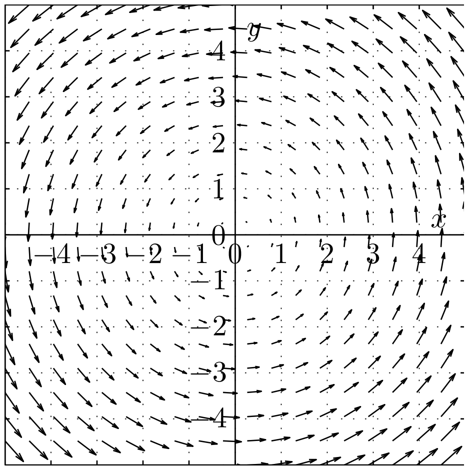
På punktet (-2,1), er retningsvektor gitt ved:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

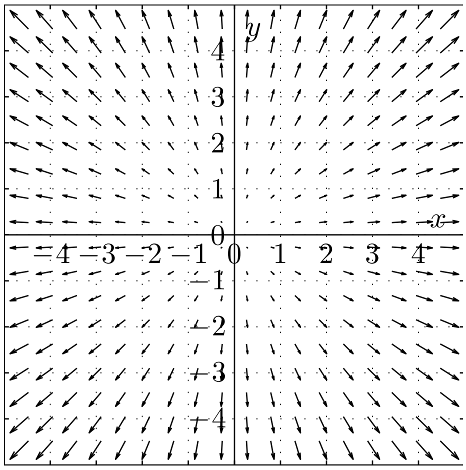
Alle retnigsvektorer er tegnet på figur nedenfor:



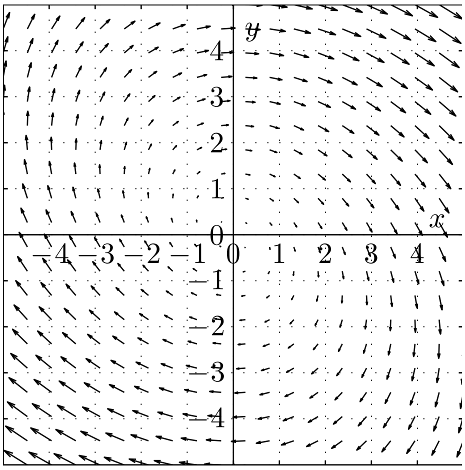
11.1:9 Hver figur er retningsfeltet til nøyaktig ett av de følgende systemene. Finn hvilket retningsfelt som tilhører hvilket system.



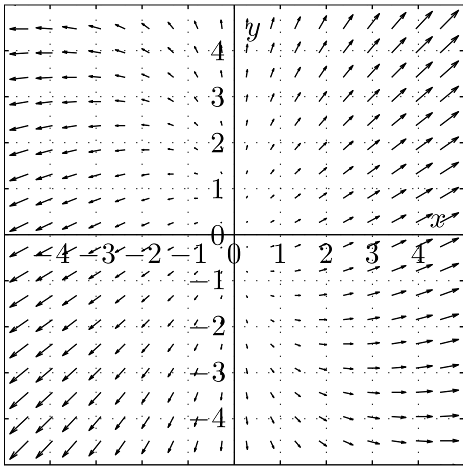
(a) fig. 18



(b) fig. 19



(c) fig. 20



(d) fig. 21

Figur 1: Retningsfelt til oppgave 11.1:9

a)

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 2x_1$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1 + x_2$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 + 2x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -2x_1$$

c)

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_2$$

d)

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$

Løsning: a)

På diagonalen $x_2 = -x_1$ må feltet være horisontalt fordi da er $\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dette er tilfellet bare i **fig. 21**.

Løsning: b)

På linjen $x_2 = -x_1/2$ må feltet være vertikalt fordi da er $\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$. Dette er tilfellet bare i **fig. 20**.

Løsning: c)

Vi ser at $\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t = \mathbf{x}$. Feltet til dette systemet peker altså i samme retning som $\mathbf{x}$. Dette er tilfellet bare i **fig. 19**.

Løsning: d)

Dette systemet tillhører **fig. 18**, noe vi ser bla. pga. at alle piler i fig. 18 er vinkelrette på $\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t$ og at

$$\mathbf{x}^T \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = -x_1x_2 + x_1x_2 = 0.$$

$\boxed{\text{11.1:19}}$ Løs initsialverdiproblemet (IVP):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = (-5, 5)^T.$$

Løsning:

Finner egenverdiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3-\lambda)(2-\lambda) - 0 \\ &= (-3-\lambda)(2-\lambda). \end{aligned}$$

Dvs. $\lambda_1 = -3$ og $\lambda_2 = 2$. Egenvektoren $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ må være en løsning av

$$A\mathbf{u} = -3\mathbf{u} \implies \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3u_1 \\ 4u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3u_1 \\ -3u_2 \end{bmatrix}$$

Vi lar nå at $u_1 = 1$ og får da $-3u_2 = 4 + 2u_2 \implies u_2 = \frac{-4}{5}$. Derfor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix}$.

Egenvektoren $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ må være en løsning av

$$A\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \implies \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3v_1 \\ 4v_1 + 2v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{bmatrix}$$

Vi lar nå at $v_2 = 1$ og får da $2 = 4v_1 + 2 \implies v_1 = 0$. Derfor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Generell løsning er da

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v} \\ &= c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

For å finne den spesielle løsningen som går gjennom punktet $\mathbf{x}(0) = (-5, 5)^T$, må vi løse ligningen

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-4}{5} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dvs.

$$\begin{aligned} -5 &= c_1 \\ 5 &= \frac{-4}{5} c_1 + c_2. \end{aligned}$$

så $c_1 = -5$ og $c_2 = 5 + \frac{4}{5}c_1 = 5 + (-5)\frac{4}{5} = 1$.

Løsingen på initsialverdiproblemet er altså funksjonen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-3t} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{11.1:25}}$ Løs initsialverdiproblemet (IVP):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = (-1, -2)^T.$$

Løsning:

Finner egenverdiene:

$$
\begin{aligned}
0 &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 7 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(-2-\lambda) - 7 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda - 15 \\
&= (\lambda - 5)(\lambda + 3).
\end{aligned}
$$

Dvs. $\lambda_1 = 5$ og $\lambda_2 = -3$. Egenvektoren $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ må være en løsning av

$$\mathbf{0} = (A - 5I)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{u},$$

som f.eks. $\mathbf{u}_1 = (7, 1)^T$.

Egenvektoren $\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}$ må være en løsning av

$$\mathbf{0} = (A + 3I)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u},$$

som f.eks. $\mathbf{u}_2 = (1, -1)^T$.

Generell løsning er da

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 \\
&= c_1 e^{5t}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

For å finne den spesielle løsningen som går gjennom punktet $\mathbf{x}(0) = (-1, -2)^T$, må vi løse ligningen

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dvs.

$$
\begin{aligned}
-1 &= 7c_1 + c_2 \\
-2 &= c_1 - c_2.
\end{aligned}
$$

Summen av radene gir

$$-3 = -1 - 2 = 7c_1 + c_2 + c_1 - c_2 = 8c_1,$$

så $c_1 = -\frac{3}{8}$ og $c_2 = c_1 + 2 = \frac{13}{8}$.

Løsingen på initsialverdiproblemet er altså funksjonen

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{3}{8}e^{5t}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{13}{8}e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{11.1:67}}$ Det følgende systemet har to forskjellige egenverdier, men en egenverdi er 0.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene

b) Finn den generelle løsningen $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$.

c) Tegn linjene tillhørende til egenvektorene i retningsfeltet til systemet. Finn $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$ og konkludér at alle retningsvektorer er parallelle til linjen som tilhører egenvektoren med den tillhørende egenverdien som ikke er 0. Beskriv hvordan løsninger som starter i forskjellige punkt vil oppføre seg.

Løsning: a)
Egenverdier:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 8 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda) - 8 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda \\ &= \lambda(\lambda - 6). \end{aligned}$$

Så $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 6$. Egenvektoren $\mathbf{u}_1$ tilfredsstiller

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

som har en løsning $\mathbf{u}_1 = (2, -1)^T$ og egenvektoren $\mathbf{u}_2$ tilfredsstiller

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

som har en løsning $\mathbf{u}_2 = (4, 1)^T$.

Løsning: b)
Den generelle løsningen blir da

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Løsning: c)
Linjen tillhørende egenvektoren $\mathbf{u}_2 = (4, 1)^T$ har ligning $y = \frac{1}{4}x$. Vi har at

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 4x + 8y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x + 2y, \end{aligned}$$

så

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \frac{x+2y}{4x+8y} = \frac{1}{4}$$

for alle $x \neq 2y$. Dermed er alle løsningskurver av systemet på formen

$$y = \int \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}x}{4} = \frac{1}{4}x + C$$

som alle er rette linjer parallelle med $\mathbf{u}_2$. Merk at dette kunne utledes uten å finne generell løsning.

Alle løsninger vil altså være rette linjer med stigningstall $1/4$ som beveger seg bort fra linjen til $\mathbf{u}_1$. (Bortsett fra de som starter på linjen til $\mathbf{u}_1$). Alle punkter på denne linjen er likevektspunkter til systemet.