MA0001 Brukerkurs i matematikk A
Høst 2017

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

Innleveringsoppgaver

1

a) Finn fjerde grads Taylorpolynom til $f(x) = e^{5x} + 5\cos x$ om $x = 0$

b) Finn tredje grads Taylorpolynom til $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ om $x = 8$.

c) Finn andre grads Taylorpolynom til $h(x) = \sin(e^x)$ om $x = \ln(\pi)$.

Løsning: a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{5x} + 5\cos x & f(0) &= 1 + 5 = 6,\\
f'(x) &= 5e^{5x} - 5\sin x & f'(0) &= 5 - 0 = 5,\\
f''(x) &= 25e^{5x} - 5\cos x & f''(0) &= 25 - 5 = 20,\\
f'''(x) &= 125e^{5x} + 5\sin x & f'''(0) &= 125 + 0 = 125,\\
f^{(4)}(x) &= 625e^{5x} + 5\cos x & f^{(4)}(0) &= 625 + 5 = 630.
\end{aligned}
$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
P_4(x) &= \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\\
&= \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\
&= f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!}\\
&= 6 + 5x + 20\frac{x^2}{2!} + 125\frac{x^3}{3!} + 630\frac{x^4}{4!}\\
&= 6 + 5x + 10x^2 + \frac{125}{6}x^3 + \frac{105}{4}x^4.
\end{aligned}
$$

Løsning: b)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^{\frac{1}{3}} & g(8) &= 2,\\
g'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3} & g'(8) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2} = \frac{1}{12},\\
g''(x) &= \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9}x^{-5/3} & g''(8) &= -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8^{5/3}} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{144},\\
g'''(x) &= -\frac{2}{9}(-\frac{5}{3})x^{-\frac{5}{3}-1} = \frac{10}{27}x^{-8/3} & g'''(8) &= \frac{10}{27}\cdot\frac{1}{8^{8/3}} = \frac{10}{27}\cdot\frac{1}{2^8} = \frac{5}{3456}.
\end{aligned}
$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \sum_{n=0}^{3} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{3} \frac{g^{(n)}(8)}{n!}(x-8)^n \\
&= 2 + \frac{1}{12}(x-8) + \frac{-1/144}{2!}(x-8)^2 + \frac{5/3456}{3!}(x-8)^3 \\
&= 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{20736}(x-8)^3.
\end{aligned}$$

Løsning: c)

$$\begin{aligned}
h(x) &= \sin(e^x) & h(\ln\pi) &= \sin(e^{\ln\pi}) = \sin\pi = 0, \\
h'(x) &= \cos(e^x)e^x & h'(\ln\pi) &= \cos(\pi)\pi = -\pi, \\
h''(x) &= -\sin(e^x)(e^x)^2 + \cos(e^x)e^x & h''(\ln\pi) &= -\sin(\pi)\pi^2 + \cos(\pi)\pi = -\pi.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \sum_{n=0}^{2} \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{2} \frac{h^{(n)}(\ln\pi)}{n!}(x-\ln\pi)^n \\
&= -\pi(x-\ln\pi) - \frac{\pi}{2}(x-\ln\pi)^2.
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Finn Taylorpolynomet av grad 2 om $x = 0$ til funksjonen $f(x) = 2\cos x$. Benytt Taylors teorem til å gi et estimat for $|E_2(3)|$ når

$$E_2(x) = f(x) - P_2(x).$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\cos x & f(0) &= 2, \\
f'(x) &= -2\sin x & f'(0) &= 0, \\
f''(x) &= -2\cos x & f''(0) &= -2.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 2 - x^2.$$

Ved Taylors Teorem finnes en c mellom 0 og 3 slik at

$$f(3) = P_2(3) + \frac{f'''(c)}{3!}3^3.$$

Nå er $f'''(x) = 2\sin x$, så

$$\begin{aligned}
|E_2(3)| &= |f(3) - P_2(3)| \\
&= \left|\frac{f'''(c)}{3!}3^3\right| \\
&= \left|\frac{2\sin c}{3!}3^3\right| \\
&= 9|\sin c| \\
&\leq 9. && (\text{ Fordi } |\sin x| \leq 1)
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Finn andre grads Taylorpolynom P_2 om $x = 0$ til funksjonen $f(x) = -\ln(1-x)$. Benytt Taylors teorem til å gi et estimat for $|E_2(1/2)|$ når

$$E_2(x) = f(x) - P_2(x).$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\ln(1-x) & f(0) &= -\ln 1 = 0, \\
f'(x) &= -\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1-x} & f'(0) &= 1, \\
f''(x) &= -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} & f''(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x + \frac{1}{2}x^2.$$

Nå er $f'''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Hvis c er mellom 0 og 1/2 så er $f'''(c)$ mellom 2 og $\frac{2}{(1/2)^3} = 16$. Dermed er feilen

$$\begin{aligned}
|E_2(1/2)| &= |f(1/2) - P_2(1/2)| \\
&= \left|\frac{f'''(c)}{3!}(1/2)^3\right| \\
&\leq \left|\frac{16}{3!}(1/2)^3\right| \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ La f være en funksjon og la P_n betegne $n$te grads Taylorpolynom til f om $a = 1$. Der er oppgitt at $0 \leq f^{(n)}(x) \leq n!$ for alle x og alle n. Finn et tall n slik at

$$|f(1/2) - P_n(1/2)| \leq \frac{1}{1000}.$$

Løsning:
Vi vet at

$$|f(1/2) - P_n(1/2)| = |E_n(1/2)| = |R_{n+1}(1/2)| \qquad \text{(se side 380 i boka.)}$$

hvor $|E_n(1/2)|$ er en feilestimat mellom $f(1/2)$ og $n$te grads Taylorpolynom til f, i.e., $P_n(1/2)$.
Vi vet at vi kan skrive

$$f(1/2) = P_n(1/2) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}((1/2)-1)^{n+1}$$

hvor c er ett tall mellom $x = 1/2$ og $a = 1$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(1/2)| = |E_n(1/2)| &= |f(1/2) - P_n(1/2)| \\ &= \left| P_n(1/2) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}((1/2)-1)^{n+1} - P_n(1/2) \right| \\ &= \left| \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}((1/2)-1)^{n+1} \right| \end{aligned}$$

Vi er gitt at $0 \leq f^{(n)}(x) \leq n!$ for alle x og alle n. Hvis c er mellom 1 og 1/2 så er $0 \leq f^{n+1}(c) \leq (n+1)! \implies |f^{n+1}(c)| \leq (n+1)!$. Dermed er feilen

$$\begin{aligned} |E_n(1/2)| &= \left| \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}((1/2)-1)^{n+1} \right| \\ &\leq \left| \frac{(n+1)!}{(n+1)!}(-1/2)^{n+1} \right| \\ &= \left|(-1/2)^{n+1}\right| = \left| \frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right|. \end{aligned}$$

og for at $|E_n(1/2)| = |f(1/2) - P_n(1/2)|$ skal være mindre enn $\frac{1}{1000}$ så bør

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left|\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right| &\leq \frac{1}{1000} \\ \implies \left|\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right| &\leq \frac{1}{500} \\ \implies \left|(-1)^n \frac{1}{2^n}\right| &\leq \frac{1}{500} \\ \implies \left(\frac{1}{2^n}\right) &\leq \frac{1}{500} \\ \implies 2^n &\geq 500 \\ \implies \ln 2^n &\geq \ln 500 \\ \implies n \ln 2 &\geq \ln 500 \\ \implies n &\geq \frac{\ln 500}{\ln 2} \\ \implies n &\geq 8.965784. \qquad \text{Altså } n = 9. \end{aligned}$$

OBS: For feilestimater, se forelesningsnotatene eller side 380–381 i *Calculus for Biology and Medicine*, 3. utgave av Claudia Neuhauser. I sistnevnte er $R_{n+1} = E_n$.

Anbefalte øvingsoppgaver

Fra Avsnitt 7.6 (side 381–382).

- 1, 3, 5, 7, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 29.

OBS: Disse oppgavene skal *ikke* leveres inn!