نص المنطق المفتوح

ملحق الإغلاق المُعاد تنضيده للشاشة

الوحدات الثمانون الواقعة خارج مسار القارئ
Screen-Optimized Closure Supplement

العربية الفصحى المعاصرة العالمية — ar

المصدر: مشروع المنطق المفتوح، الالتزام 9620cc73f9c8e0ad003c514a5d3748f29611c4c0
المعرّف الرقمي المفهومي الثابت: 10.5281/zenodo.21921850

ملحق الإغلاق المرافق للنسخة الكاملة

هذا ملحق تقني مستقل يرافق النسخة الكاملة، ويجمع الوحدات الثمانين المحتفظ بها خارج مسار القارئ القانوني: إحدى وسبعين وحدة مدرجة صراحة، وثماني وحدات متداخلة تستدعيها ملفاتها الأم مباشرة، ومقطعًا واحدًا يُدرج مباشرة. وبذلك يكتمل توثيق وحدات المصدر البالغ عددها 722 من دون تغيير رسم تبعيات القارئ.

هذه ترجمة معدّلة بموجب رخصة CC BY 4.0. يُنسب الأصل إلى مشروع المنطق المفتوح، ولا يُفهم من هذا الملحق أي تأييد من المشروع. ساهمت AI typesetting & translation في الترجمة والتصفيف بتوجيه فلوريس؛ ولم تُجرَ مراجعة بشرية عربية.

0.1 خواص قابلية الاشتقاق

قضية 0.1 (الرتابة). إذا كان $\Gamma \subseteq \Delta$ و $\Gamma \vdash \varphi$، كان أيضًا $\Delta \vdash \varphi$.

برهان. كل $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ منتهية هي أيضًا مجموعة جزئية منتهية من Δ، ولذلك فإن اشتقاق لـ$\Gamma_0 \vdash \varphi$ يبيّن أيضًا $\Delta \vdash \varphi$. □

قضية 0.2. $\Gamma \vdash \varphi$ إذا وفقط إذا كانت $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ غير متسقة.

برهان. افترض أولًا $\Gamma \vdash \varphi$. عندئذ توجد مجموعة منتهية $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ بحيث $\Gamma_0 \vdash \varphi$، ومن ثم $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$. ولذلك تكون $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ غير متسقة. وبالعكس، إذا كانت $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ غير متسقة، فثمة مجموعة منتهية $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ بحيث $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$. وتعطي مبرهنة الاستنباط $\Gamma_0 \vdash \neg\varphi \to \bot$، وتعطي **Ax0** الصيغة $\Gamma_0 \vdash (\neg\varphi \to \bot) \to \varphi$. وبـ**MP** نحصل على $\Gamma_0 \vdash \varphi$، ومن ثم $\Gamma \vdash \varphi$ بالرتابة. □

قضية 0.3.

1. إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$، كانت Γ غير متسقة.
2. إذا كان $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$، كان $\Gamma \vdash \neg\varphi$.
3. إذا كان $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$، كان $\Gamma \vdash \bot$.
4. إذا كان $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \bot$، كان $\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \bot$.
5. إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$ أو $\Gamma \vdash \psi$، كان $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

6. إذا كان $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$، كان $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \psi$.

7. إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$ و$\Gamma \vdash \psi$، كان $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$.

8. إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$ و$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$، كان $\Gamma \vdash \psi$.

9. إذا كان $\Gamma \vdash \neg\varphi$ أو $\Gamma \vdash \psi$، كان $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

برهان. 1. اختر مجموعتين منتهيتين $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ بحيث $\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma_1 \vdash \varphi$.

1. $\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ فرض
2. $\Gamma_1 \vdash \varphi$ فرض
3. $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \vdash \bot$ القطع

ولأن $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ و$\Gamma_1 \subseteq \Gamma$، يكون $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$، ومن ثم $\Gamma \vdash \bot$.

2. اختر مجموعة منتهية $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ بحيث $\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

فرض	$\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$	.1
مبرهنة الاستنباط	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \bot$	.2
Ax0	$\Gamma_0 \vdash (\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$	.3
MP 2'3	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi$	.4

3. اختر مجموعتين منتهيتين $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ بحيث $\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$.

فرض	$\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$	.1
مبرهنة الاستنباط	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \bot$	.2
فرض	$\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$	.3
Ax0	$\Gamma_0 \vdash (\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$	.4
MP 2'4	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi$	.5
القطع 3، 5	$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \vdash \bot$	.6

ولأن $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ و$\Gamma_1 \subseteq \Gamma$، يكون $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$. ومن ثم $\Gamma \vdash \bot$.

4. تمرين.

5. افترض $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

فرض	$\Gamma_0 \vdash \varphi$	.1
Ax0	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$	.2
MP 1'2	$\Gamma_0 \vdash \varphi \vee \psi$	.3

إذن $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$. والبرهان في حالة $\Gamma \vdash \psi$ مماثل.

6. افترض $\Gamma_0 \vdash \varphi \wedge \psi$.

فرض	$\Gamma_0 \vdash \varphi \wedge \psi$	.1
Ax0	$\Gamma_0 \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	.2
MP 1'2	$\Gamma_0 \vdash \varphi$	.3

ومن ثم $\Gamma \vdash \varphi$. ويبيّن اشتقاق مماثل أن $\Gamma \vdash \psi$.

7. تمرين.

8. نفترض $\Gamma_0 \vdash \varphi$ و$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$ معًا.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

فرض	$\Gamma_0 \vdash \varphi$	.1
فرض	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$	.2
MP 1’2	$\Gamma_0 \vdash \psi$	.3

ولأن $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$، يعني ذلك $\Gamma \vdash \psi$.

9. افترض أولًا $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

فرض	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi$	.1
Ax0	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$	.2
MP 1’2	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$	.3

والبرهان في حالة $\Gamma \vdash \psi$ مماثل:

فرض	$\Gamma_0 \vdash \psi$	.1
Ax0	$\Gamma_0 \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	.2
MP 1’2	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$	.3

□

مبرهنة 0.4 (التعميم). إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$ ولم يكن x حرًا في أي صيغة في Γ، كان $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$.

برهان. بالاستقراء على Thm_Γ: إذا كانت φ مسلّمة، كانت $\forall x\, \varphi$ مسلّمة أيضًا. وإذا كانت $\varphi \in \Gamma$، لم يكن x حرًا في φ، فتكون $\varphi \to \forall x\, \varphi$ مسلّمة (**Ax3**)، ونحصل على $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$ بـMP. وافترض الآن أن φ تلزم بـMP لأن $\Gamma \vdash \psi$ و $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$. بفرض الاستقراء، $\Gamma \vdash \forall x\, \psi$ و $\Gamma \vdash \forall x\, (\psi \to \varphi)$. لكن **Ax2** تعطي أيضًا

$$\Gamma \vdash \forall x\, (\psi \to \varphi) \to (\forall x\, \psi \to \forall x\, \varphi),$$

ويعطي تطبيقان لـMP النتيجة $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$ كما أردنا. □

مبرهنة 0.5. (التعميم الضعيف على الثوابت) إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$ وكان c رمز ثابت لا يظهر في Γ، وُجد متغير x لا يظهر في φ بحيث $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$، ولا يتضمن البرهان c.

برهان. لتكن $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ برهانًا لـφ من Γ، بحيث $\varphi = \varphi_n$. اختر متغيرًا x لا يظهر في $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$، وتأمل المتتالية الجديدة $\varphi_1[x/c], \ldots, \varphi_n[x/c]$. وهذه المتتالية برهان لـ$\varphi[x/c]$ من Γ. والواقع أنه لكل $i = 1, \ldots, n$:

- إذا كانت φ_i مسلّمة، كانت $\varphi_i[x/c]$ مسلّمة أيضًا؛
- إذا كانت $\varphi_i \in \Gamma$، فبما أن c لا يظهر في Γ، يكون $\varphi_i[x/c] = \varphi_i \in \Gamma$؛
- إذا حُصل على φ_i من φ_j و$\varphi_j \to \varphi_i$، لزمت $\varphi_i[x/c]$ بـMP من $\varphi_j[x/c]$ و $(\varphi_j \to \varphi_i)[x/c] = \varphi_j[x/c] \to \varphi_i[x/c]$.

ومن الواضح أن رمز ثابت c لم يعد يظهر في المتتالية الجديدة. ولتكن Γ' مؤلفة من صيغ Γ التي تظهر في اشتقاق لـ$\varphi[x/c]$؛ عندئذ لا يكون x حرًا في أي صيغة في Γ'، ويكون $\Gamma' \vdash \varphi[x/c]$. وبالتعميم (مبرهنة 0.4) نحصل على $\Gamma' \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$، ومنه بالرتابة $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$ كما أردنا. $\square$

هدفنا أن نستبدل باشتراط مبرهنة 0.5 ألا يظهر x في φ إطلاقًا اشتراطين أضعف: ألا يكون x حرًا في φ، وأن يكون حرًّا للإحلال محلّ c فيها. ويمكن تحقيق ذلك بوضوح بتغيير متغير مقيد، ولذلك نبدأ بإثبات هذا الأمر.

قضية مساعدة 0.6. *إذا كان x حرًا لـc في φ، ولم يكن y حرًا في φ، كان x حرًّا للإحلال محلّ y في $\varphi[y/c]$.*

برهان. إذا لم يكن x حرًّا للإحلال محلّ y في $\varphi[y/c]$، وقع ظهور حر ما لـy في $\varphi[y/c]$ داخل نطاق سور $\forall x$. لكن y ليس حرًا في φ بالفرض، ولذلك تأتي كل هذه الظهورات من التعويض $[y/c]$. ومن ثم يقع ظهور ما لـc داخل نطاق $\forall x$، ولا يكون x حرًّا للإحلال محلّ c في φ. $\square$

قضية مساعدة 0.7 (تغيير المتغير المقيد). *إذا لم يكن x ولا y حرًا في φ، وكان كلاهما حرًّا للإحلال محلّ c في φ، كان $\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \equiv \forall y\, \varphi[y/c]$، ولا يتضمن البرهان c.*

برهان. بموجب الفرضيات، يكون y حرًّا للإحلال محلّ c في φ، ولا يكون x حرًا في φ؛ ومن ثم، باللمّة السابقة قضية مساعدة 0.6، يكون y حرًّا للإحلال محلّ x في $\varphi[x/c]$. ولذلك تكون $\forall x\, \varphi[x/c] \to \varphi[x/c][y/x]$ مسلّمة (**Ax1**). وبما أن x ليس حرًا في φ، يكون $\varphi[x/c][y/x] = \varphi[y/c]$، ومن ثم

$$\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \to \varphi[y/c].$$

وتعطي مبرهنة الاستنباط $\forall x\, \varphi[x/c] \vdash \varphi[y/c]$. ولأن y ليس حرًا في φ، فهو أيضًا ليس حرًا في $\forall x\, \varphi[x/c]$؛ ومن ثم يعطينا التعميم $\forall x\, \varphi[x/c] \vdash \forall y\, \varphi[y/c]$، وتعطي مبرهنة الاستنباط مرة أخرى $\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \to \forall y\, \varphi[y/c]$. وبرهان الاتجاه $\vdash \forall y\, \varphi[y/c] \to \forall x\, \varphi[x/c]$ متناظر تمامًا، فتتبع النتيجة بـTaut. $\square$

مبرهنة 0.8 (التعميم القوي على الثوابت). إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$، ولم يظهر رمز ثابت c في Γ، ولم يكن x حرًا في φ لكنه كان حرًّا للإحلال محلّ c فيها، كان $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$.

برهان. بما أن $\Gamma \vdash \varphi$ وc لا يظهر في Γ، يوجد بالتعميم الضعيف متغير y لا يظهر في φ بحيث $\Gamma \vdash \forall y\, \varphi[y/c]$. ولأن y لا يظهر في φ إطلاقًا، فهو ليس حرًا فيها، وهو أيضًا حرًّا للإحلال محلّ c فيها. وإذا كان x، كما تفترض المبرهنة، غير حر في φ وحرًّا للإحلال محلّ c فيها، تحققت شروط تغيير متغير مقيد، فيكون $\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \equiv \forall y\, \varphi[y/c]$، ومنه $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$. □

مبرهنة 0.9. *1. إذا كان $\Gamma \vdash \varphi(t)$، كان $\Gamma \vdash \exists x\, \varphi(x)$.*

2. إذا كان $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$، كان $\Gamma \vdash \varphi(t)$.

برهان. 1. تمرين.

2. افترض $\Gamma_0 \vdash \forall x\, \varphi(x)$.

فرض	$\Gamma_0 \vdash \forall x\, \varphi(x)$	.1
Ax1	$\Gamma_0 \vdash \forall x\, \varphi(x) \to \varphi[t/x]$	.2
MP 1’2	$\Gamma_0 \vdash \varphi[t/x]$	.3

□

0.2 مجموعات جمل المتسقة القصوى

تعريف 0.10 (المجموعة المتسقة القصوى). تكون مجموعة Γ من جمل متسقة قصوى إذا وفقط إذا

1. كانت Γ متسقة، و
2. إذا كان $\Gamma \subsetneq \Gamma'$، كانت Γ' غير متسقة.

وفيما يأتي تعريف بديل مكافئ للتعريف السابق: تكون مجموعة Γ من الجمل متسقة قصوى إذا وفقط إذا

1. كانت Γ متسقة، و
2. إذا كانت $\Gamma \cup \{\varphi\}$ متسقة، كان $\varphi \in \Gamma$.

وبعبارة أخرى، لا يمكن إضافة جمل غير الموجودة أصلًا في Γ إلى مجموعة متسقة قصوى Γ من دون جعل المجموعة الأكبر الناتجة غير متسقة.

للمجموعات المتسقة القصوى أهمية في برهان الاكتمال، لأننا نستطيع ضمان أن كل مجموعة متسقة من جمل Γ محتواة في مجموعة متسقة قصوى Γ^*، وأن المجموعة المتسقة القصوى تحتوي، لكل جملة φ، إما φ وإما نفيها $\neg\varphi$. ويصدق ذلك بوجه خاص على جمل الذرية؛ ومن ثم نستطيع، انطلاقًا من مجموعة متسقة قصوى في لغة وُسعت توسيعًا مناسبًا برموز ثابتة، أن نبني بنية يُعرّف فيه تأويل محمولات بحسب أي جمل ذرية تنتمي إلى Γ^*. ويمكن عندئذ إثبات أن هذا بنية يجعل كل جمل في Γ^*، وبالتالي في Γ أيضًا، صادقة. ويتطلب برهان هذه الحقيقة الأخيرة أن يكون $\neg\varphi \in \Gamma^*$ إذا وفقط إذا كان $\varphi \notin \Gamma^*$، وأن يكون $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma^*$ إذا وفقط إذا كان $\varphi \in \Gamma^*$ أو $\psi \in \Gamma^*$، وهلم جرًا.

قضية 0.11. *افترض أن Γ متسقة قصوى. عندئذ:*

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

1. إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$، كان $\varphi \in \Gamma$.

2. لكل φ، إما $\varphi \in \Gamma$ أو $\neg\varphi \in \Gamma$.

3. يكون $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ إذا وفقط إذا كان كل من $\varphi \in \Gamma$ و $\psi \in \Gamma$.

4. يكون $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ إذا وفقط إذا كان إما $\varphi \in \Gamma$ وإما $\psi \in \Gamma$.

5. يكون $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ إذا وفقط إذا كان إما $\varphi \notin \Gamma$ وإما $\psi \in \Gamma$.

برهان. لنفترض في كل ما يأتي أن Γ متسقة قصوى.

1. إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$، كان $\varphi \in \Gamma$.

افترض $\Gamma \vdash \varphi$. وافترض، طلبًا للتناقض، أن $\varphi \notin \Gamma$. لما كانت Γ متسقة قصوى، تكون $\Gamma \cup \{\varphi\}$ غير متسقة، ومن ثم $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$. وبموجب قضايا 20.18 and 19.18، تكون Γ غير متسقة. وهذا يناقض افتراض اتساقها. لذلك لا يمكن أن يكون $\varphi \notin \Gamma$، فيكون $\varphi \in \Gamma$.

2. لكل φ، إما $\varphi \in \Gamma$ أو $\neg\varphi \in \Gamma$.

افترض، طلبًا للتناقض، أنه يوجد φ بحيث $\varphi \notin \Gamma$ و $\neg\varphi \notin \Gamma$. ولأن Γ متسقة قصوى، تكون $\Gamma \cup \{\varphi\}$ و$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ كلتاهما غير متسقة، فيكون $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$. وبموجب قضايا 20.21 and 19.21، تكون Γ غير متسقة، وهذا تناقض. ومن ثم لا يوجد جملة φ كهذا، ولكل φ إما $\varphi \in \Gamma$ أو $\neg\varphi \in \Gamma$.

3. يكون $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ إذا وفقط إذا كان كل من $\varphi \in \Gamma$ و $\psi \in \Gamma$:

في الاتجاه الأمامي، افترض $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$. عندئذ $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. وبموجب Items 1 and 1، يكون $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \psi$. وبموجب (1)، يكون $\varphi \in \Gamma$ و $\psi \in \Gamma$ كما أردنا.

وفي الاتجاه العكسي، ليكن $\varphi \in \Gamma$ و $\psi \in \Gamma$. عندئذ $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \psi$. وبموجب Items 2 and 2، يكون $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. وبموجب (1)، يكون $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$.

4. يكون $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ إذا وفقط إذا كان إما $\varphi \in \Gamma$ وإما $\psi \in \Gamma$.

لإثبات مقابل الاتجاه الأمامي، افترض $\varphi \notin \Gamma$ و $\psi \notin \Gamma$. نريد أن نبيّن $(\varphi \vee \psi) \notin \Gamma$. ولأن Γ متسقة قصوى، يكون $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \bot$. وبموجب قضايا 20.23 and 19.23، تكون $\Gamma \cup \{(\varphi \vee \psi)\}$ غير متسقة. ومن ثم $(\varphi \vee \psi) \notin \Gamma$ كما أردنا.

وفي الاتجاه العكسي، افترض $\varphi \in \Gamma$ أو $\psi \in \Gamma$. عندئذ $\Gamma \vdash \varphi$ أو $\Gamma \vdash \psi$. وبموجب قضايا 20.23 and 19.23، يكون $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$. وبموجب (1)، يكون $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ كما أردنا.

5. يكون $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ إذا وفقط إذا كان إما $\varphi \notin \Gamma$ وإما $\psi \in \Gamma$:

في الاتجاه الأمامي، ليكن $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$، وافترض طلبًا للتناقض أن $\varphi \in \Gamma$ و $\psi \notin \Gamma$. وبموجب هذين الافتراضين، يكون $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ و $\Gamma \vdash \varphi$. وبموجب Items 1 and 1، يكون $\Gamma \vdash \psi$. لكن (1) تعطي عندئذ $\psi \in \Gamma$، وهو ما يناقض $\psi \notin \Gamma$.

وفي الاتجاه العكسي، تأمل أولًا حالة $\varphi \notin \Gamma$. بموجب (2)، يكون $\neg\varphi \in \Gamma$، ومن ثم $\Gamma \vdash \neg\varphi$. وبموجب Items 2 and 2، يكون $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. وتطبيق (1) مرة أخرى يعطينا $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ كما أردنا.

والآن تأمل حالة $\psi \in \Gamma$. عندئذ $\Gamma \vdash \psi$، وبموجب Items 2 and 2، يكون $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. وبموجب (1)، يكون $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$. □

0.3 مقدمة

لكي نطور نظرية منطق الرتبة الأولى ونظريته الفوقية، يجب أولًا أن نعرّف تركيب تعبيراته ودلالتها. وتعبيرات منطق الرتبة الأولى حدود وصيغ. تُبنى الحدود من متغيرات ورموز ثابتة ودوال. أما صيغ فتُبنى من محمولات مع الحدود، وهذه تكوّن أبسط صيغ، أي الصيغ «الذرية»، ثم يمكننا أن نبني من صيغ الذرية صيغًا أعقد باستخدام الروابط المنطقية والأسوار. وتوجد طرائق كثيرة مختلفة لصياغة قواعد التكوين؛ ولا نقدم إلا طريقة واحدة ممكنة. فقد تختار أنظمة أخرى رموزًا مختلفة، وتختار مجموعات مختلفة من الروابط بوصفها أولية، وتستخدم الأقواس على نحو مختلف، أو لا تستخدمها إطلاقًا كما في الترميز البولندي المسمى. لكن القاسم المشترك بين جميع المقاربات هو أن قواعد التكوين تعرّف مجموعة الحدود وصيغ تعريفًا *استقرائيًا*. وإذا أُحكم هذا التعريف، أمكن توليد كل تعبير، في الجوهر، بطريقة واحدة فقط وفق قواعد التكوين. ولما كان التعريف الاستقرائي ينتج تعبيرات وحيدة *القراءة*، أمكننا إسناد المعاني إليها بالطريقة نفسها، أي بالتعريف الاستقرائي.

إسناد المعنى إلى التعبيرات هو ميدان الدلالة. والمفهوم المركزي في الدلالة هو الإشباع في بنية. ويُسند بنية معنى إلى لبنات اللغة: فـ مجال مجموعة غير خالية من الأشياء. وتُفسر الأسوار على أنها تتراوح على هذا المجال، وتُسند إلى رموز ثابتة عناصر من المجال، ويُسند إلى كل رمز من دوال ذي رتبة n دالة من D^n إلى D، حيث D هو مجال، وتُسند إلى محمولات علاقات على مجال. ويكوّن مجال، مع الإسنادات إلى المفردات الأساسية، بنية. وقد تظهر متغيرات في صيغ، ولكي نقدم دلالة لها يجب أيضًا أن نسند إليها عناصر من مجال، وهذا هو إسناد المتغيرات. وأخيرًا تجمع علاقة الإشباع هذه الأمور. قد تُشبَع صيغة في بنية $\mathfrak{M}$ نسبة إلى إسناد متغيرات s، ونكتب ذلك $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$. وتُعرّف هذه العلاقة أيضًا بالاستقراء على بنية φ، باستخدام جداول الصدق للروابط المنطقية كي نعرّف، مثلًا، إشباع $\varphi \wedge \psi$ بدلالة إشباع φ وψ أو عدم إشباعهما. ويتبين بعدئذ أن إسناد المتغيرات غير مهم إذا كانت صيغة φ جملة، أي لا متغيرات حرة فيها، ولذلك نستطيع الحديث عن إشباع جمل أو عدم إشباعها ببساطة في بنى.

وبناء على علاقة الإشباع $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ للجمل، يمكننا تعريف المفاهيم الدلالية الأساسية: الصحة واللزوم وقابلية الإشباع. تكون الجملة صحيحة، $\vDash \varphi$، إذا أشبعتها كل بنية. وتلزم من مجموعة جمل، $\Gamma \vDash \varphi$، إذا كان كل بنية يشبع جميع جمل في Γ يشبع φ أيضًا. وتكون مجموعة من الجمل قابلة للإشباع إذا كان ثمة بنية يشبع كل جمل فيها في آن واحد. ولأن صيغ معرّفة استقرائيًا، والإشباع معرّف بدوره بالاستقراء على بنية صيغ، يمكننا استخدام الاستقراء لإثبات خواص دلالتنا وربط المفاهيم الدلالية المعرّفة.

باب 1

التركيب والدلالة

1.1 الدوال في C قابلة للتمثيل في $\mathbf{Q}$

علينا أن نبيّن أن كل دالة في C قابلة للتمثيل في $\mathbf{Q}$. وفي النهاية، يجب أن نبيّن كيف نسند إلى كل دالة k-ية $f(x_0, \ldots, x_{k-1})$ في C صيغة $\varphi_f(x_0, \ldots, x_{k-1}, y)$ تمثلها.

قضية مساعدة 1.1. *إذا كان n وm عددين طبيعيين و$n \neq m$، كان $\mathbf{Q} \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$.*

برهان. استخدم الاستقراء على n لتبيّن أنه، لكل m، إذا كان $n \neq m$، كان $\mathbf{Q} \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$.

في حالة الأساس $n = 0$. إذا لم يكن m مساويًا لـ0، كان $m = k + 1$ لعدد طبيعي k. وتقول مسلّمة عدم مساواة الخلف للصفر إن $\forall x\, 0 \neq x'$. وبإحلال $\overline{k}$ محل x نستنتج $0 \neq \overline{k}'$. لكن $\overline{k}'$ هي $\overline{m}$.

وفي خطوة الاستقراء، افترض صحة الادعاء لـn وتأمل $n+1$. ليكن m أي عدد طبيعي. ثمة احتمالان: إما $m = 0$، وإما $m = k+1$ لبعض k. تعالج مسلّمة عدم مساواة الخلف للصفر الحالة الأولى. وفي الحالة الثانية، افترض $n + 1 \neq k + 1$. عندئذ $n \neq k$. وبفرض الاستقراء لـn يكون $\mathbf{Q} \vdash \overline{n} \neq \overline{k}$. ولدينا مسلّمة تقول $\forall x\, \forall y\, x' = y' \to x = y$. وبمسلّمة للأسوار نحصل على $\overline{n}' = \overline{k}' \to \overline{n} = \overline{k}$. وبالمنطق القضوي نستنتج في $\mathbf{Q}$ أن $\overline{n} \neq \overline{k} \to \overline{n}' \neq \overline{k}'$. ويعطينا القياس الشرطي $\overline{n}' \neq \overline{k}'$، وهو المطلوب لأن $\overline{k}'$ هي $\overline{m}$. $\square$

لاحظ أن اللمّة لا تقول الكثير؛ فهي تقول في جوهرها إن $\mathbf{Q}$ تستطيع إثبات أن الأرقام المختلفة تدل على أشياء مختلفة. فمثلًا، تثبت $\mathbf{Q}$ أن $0'' \neq 0'''$. لكن إثبات ذلك بوجه عام يتطلب قدرًا من العناية. ولاحظ أيضًا أننا، مع استخدامنا الاستقراء، نستخدمه خارج $\mathbf{Q}$.

سنستطيع تمثيل الصفر والخلف والجمع والضرب والدالة المميزة للمساواة والإسقاطات. وفي كل حالة تكون الصيغة الممثلة المناسبة مباشرة تمامًا؛ فالصفر مثلًا تمثله الصيغة

$$y = 0,$$

والخلف تمثله الصيغة

$$x_0' = y,$$

والجمع تمثله الصيغة

$$x_0 + x_1 = y.$$

ويتمثل العمل في بيان أن $\mathbf{Q}$ تستطيع إثبات العبارات المناسبة؛ فالقول مثلًا إن الجمع تمثله الصيغة أعلاه ينطوي على بيان أنه لكل زوج من العددين الطبيعيين m وn، تثبت $\mathbf{Q}$

$$\overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$$

و

$$\forall y\,((\overline{n} + \overline{m}) = y \to y = \overline{n+m}).$$

ماذا عن التركيب؟ افترض أن h معرّفة بـ

$$h(x_0, \ldots, x_{l-1}) = f(g_0(x_0, \ldots, x_{l-1}), \ldots, g_{k-1}(x_0, \ldots, x_{l-1})).$$

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

وأننا وجدنا بالفعل صيغًا $\varphi_f, \varphi_{g_0}, \ldots, \varphi_{g_{k-1}}$ تمثل الدوال $f, g_0, \ldots, g_{k-1}$ على الترتيب. عندئذ نستطيع تعريف صيغة φ_h تمثل h بأن نعرّف $\varphi_h(x_0, \ldots, x_{l-1}, y)$ لتكون

$$\exists z_0 \ldots \exists z_{k-1} \big[\varphi_{g_0}(x_0, \ldots, x_{l-1}, z_0) \wedge \cdots \wedge \\ !A_{g_{k-1}}(x_0, \ldots, x_{l-1}, z_{k-1}) \wedge \varphi_f(z_0, \ldots, z_{k-1}, y)\big].$$

وأخيرًا، لنتأمل البحث غير المحدود. افترض أن $g(x, \vec{z})$ منتظمة وقابلة للتمثيل في $\mathbf{Q}$، ولتكن الصيغة $\varphi_g(x, \vec{z}, y)$ تمثلها. ولتكن f معرّفة بـ $f(\vec{z}) = \mu x\ g(x, \vec{z})$. نريد إيجاد صيغة $\varphi_f(\vec{z}, y)$ تمثل f. وفيما يأتي اختيار طبيعي:

$$\varphi_f(\vec{z}, y) \equiv \varphi_g(y, \vec{z}, 0) \wedge \forall w\, (w < y \to \neg\varphi_g(w, \vec{z}, 0)).$$

يمكن إثبات نجاح ذلك باستخدام بعض اللمم الإضافية، ومنها مثلًا:

قضية مساعدة 1.2. *لكل متغير x وكل عدد طبيعي n، تثبت $\mathbf{Q}$ $(x' + \overline{n}) = (x + \overline{n})'$.*

ويجدر التذكير مرة أخرى بأن ذلك أضعف من القول إن $\mathbf{Q}$ تثبت $\forall x\, \forall y\, (x' + y) = (x + y)'$، وهو قول كاذب.

برهان. البرهان، كالمعتاد، بالاستقراء على n. في حالة الأساس $n = 0$، علينا أن نبيّن أن $\mathbf{Q}$ تثبت $(x' + 0) = (x + 0)'$. لكن لدينا:

$$(x' + 0) = x' \quad \text{من المسلّمة 4}$$
$$(x + 0) = x \quad \text{من المسلّمة 4}$$
$$(x + 0)' = x' \quad \text{من السطر 2}$$

$$(x' + 0) = (x + 0)' \quad \text{من السطرين 1 و3}$$

وفي خطوة الاستقراء، نفترض أننا اشتققنا $(x' + \overline{n}) = (x + \overline{n})'$ في $\mathbf{Q}$. ولأن $\overline{n+1}$ هي $\overline{n}'$، نحتاج إلى بيان أن $\mathbf{Q}$ تثبت $(x' + \overline{n}') = (x + \overline{n}')'$. ويمكن اشتقاق سلسلة المساواة الآتية في $\mathbf{Q}$:

$$\begin{aligned} (x' + \overline{n}') &= (x' + \overline{n})' && \text{المسلّمة 5} \\ &= (x + \overline{n}')' && \text{من فرض الاستقراء} \end{aligned}$$

□

قضية مساعدة 1.3. *1. تثبت* $\mathbf{Q}$ *الصيغة* $\neg(x < \overline{0})$.

2. لكل عدد طبيعي n*، تثبت* $\mathbf{Q}$

$$x < \overline{n+1} \to (x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{n}).$$

برهان. لنبرهن 1 وجزءًا من 2 برهانًا غير رسمي، أي لنكتف بإشارات إلى كيفية إنشاء اشتقاق الشكلي.

في الجزء 1، نحتاج بموجب تعريف $<$ إلى إثبات $\neg\exists y\,(y' + x) = 0$ في $\mathbf{Q}$، وهو مكافئ، باستخدام مسلّمات منطق الرتبة الأولى وقواعده، لـ $\forall y\,(y' + x) \neq 0$. وهذه هي الفكرة: افترض $(y' + x) = 0$. إذا كان x هو 0، كان لدينا $(y' + 0) = 0$. لكن بموجب المسلّمة 4 من $\mathbf{Q}$ يكون $(y' + 0) = y'$، وبموجب المسلّمة 2 يكون $y' \neq 0$، وهذا تناقض. ومن ثم $\forall y\,(y' + x) \neq 0$. وإذا لم يكن x هو 0، فبموجب المسلّمة 3 يوجد z بحيث $x = z'$. وعندئذ يكون لدينا $(y' + z') = 0$. وبموجب المسلّمة 5 يكون $(y' + z)' = 0$، وهذا يناقض المسلّمة 2 مرة أخرى.

وفي الجزء 2، استخدم الاستقراء على n. لنتأمل حالة الأساس $n = 0$. نحتاج فيها إلى بيان $x < \overline{1} \to x = \overline{0}$. افترض $x < \overline{1}$. عندئذ، بموجب المسلّمة المعرّفة لـ$<$، يكون لدينا $\exists y\,(y' + x) = 0'$. افترض أن y لها هذه الخاصية، فيكون $y' + x = 0'$.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

علينا أن نبيّن $x = 0$. وبموجب المسلّمة 3، إذا لم يكن x هو 0، كان مساويًا لـz' لبعض z. عندئذ $(y' + z') = 0'$. وبموجب المسلّمة 5 من $\mathbf{Q}$، يكون $(y' + z)' = 0'$. وبموجب المسلّمة 1، يكون $(y' + z) = 0$. لكن ذلك يعني بالتعريف $z < 0$، وهو ما يناقض الجزء 1. □

بيّنا أن مجموعة الدوال القابلة للحساب يمكن وصفها بأنها مجموعة الدوال القابلة للتمثيل في $\mathbf{Q}$. والبرهان في الواقع أعم. فمن تعريف التمثيل، لا يصعب أن نرى أن كل نظرية توسع $\mathbf{Q}$، أو يمكن تأويل $\mathbf{Q}$ فيها، تستطيع تمثيل الدوال القابلة للحساب؛ وبالعكس، في كل نظام اشتقاق يكون مفهوم البرهان فيه قابلًا للحساب، تكون كل دالة قابلة للتمثيل قابلة للحساب. وهكذا يمكن، مثلًا، وصف مجموعة الدوال القابلة للحساب بأنها مجموعة الدوال الممثلة في حساب بيانو أو حتى في نظرية مجموعات زيرميلو–فرينكل. وكما لاحظ غودل، فإن هذا مدهش إلى حد ما. وسنرى أنه فيما يتعلق بقابلية الإثبات، تتأثر الأسئلة بشدة بالنظرية التي تنظر فيها؛ فكلما قويت المسلّمات، على وجه التقريب، زادت قدرتك على الإثبات. لكن الدوال القابلة للتمثيل، عبر نطاق واسع من النظريات المسلّمية، هي الدوال القابلة للحساب بالضبط.

1.2 دوال C

لتكن C أصغر مجموعة من الدوال تحتوي

1. الصفر،
2. والخلف،
3. والجمع،
4. والضرب،

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

5. والإسقاطات،

6. والدالة المميزة للمساواة، $\chi_=$؛

ومغلقة تحت

1. التركيب،

2. والبحث غير المحدود المطبق على الدوال المنتظمة.

تذكّر أن هذا القيد الأخير لا يعني إلا أنه لا يجوز استخدام عملية μ إلا حين تكون النتيجة كلية. قارن ذلك بتعريف الدوال العودية العامة: فقد أضفنا هنا الجمع والضرب و$\chi_=$، لكننا أسقطنا العودية الأولية.

من الواضح أن كل ما في C عودي، لأن الجمع والضرب و$\chi_=$ عودية. وسنبيّن أن العكس صحيح أيضًا؛ وهذا يعني أنه يمكننا تنفيذ العودية الأولية باستخدام بقية الدوال وعمليات الإغلاق في C.

1.3 القضايا

من المفيد أحيانًا أن يكون لدينا اسم لمجموعة العوالم في $\mathfrak{M}$ a relational model التي تصدق فيها صيغة φ. ونسميها *القضية* التي تعرّفها φ، ونكتبها $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{M}}$.

تعريف 1.4. نوسّع الدالة V استقرائيًا إلى التطبيق $(\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{M}}) : \mathrm{Frm} \to \wp(W)$ كما يأتي:

1. $[\![\bot]\!]_{\mathfrak{M}} = \emptyset$

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

2. $[\![p]\!]_{\mathfrak{M}} = V(p)$

3. $[\![\neg\psi]\!]_{\mathfrak{M}} =$
$\{w \in W : [\![\psi]\!]_{\mathfrak{M}} \notin$ يكون w'، بحيث Rww' لكل $w'\}$.

4. $[\![\psi \wedge \chi]\!]_{\mathfrak{M}} = [\![\psi]\!]_{\mathfrak{M}} \cap [\![\chi]\!]_{\mathfrak{M}}$.

5. $[\![\psi \vee \chi]\!]_{\mathfrak{M}} = [\![\psi]\!]_{\mathfrak{M}} \cup [\![\chi]\!]_{\mathfrak{M}}$.

6. $[\![\psi \to \chi]\!]_{\mathfrak{M}} =$
$\{w \in W : [\![\chi]\!]_{\mathfrak{M}} \in w'$ كان $[\![\psi]\!]_{\mathfrak{M}} \in w'$ إذا كان، Rww' بحيث w' لكل$\}$.

قضية 1.5. $\mathfrak{M}\varphi[w]$ إذا وفقط إذا كان $w \in [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{M}}$.

برهان. تمرين. □

أثبت قضية 1.5.

1.4 القوائم

يمكن تعريف القائمة $[M_1, M_2, \ldots, M_n]$ كما يأتي:

$$[M_1, M_2, \ldots, M_n] \equiv \lambda sz.\, sM_1(sM_2(\ldots(sM_nz)))$$

وبعبارة غير رسمية، الحد الذي يمثل قائمة هو دالة «التجميع» للقائمة: فهي دالة تقبل حدين؛ أولهما دالة تستقبل القيمة المتراكمة مع عنصر جديد وتعيد القيمة المتراكمة الجديدة، وثانيهما القيمة المتراكمة الابتدائية؛ ثم تجمع العناصر واحدًا تلو الآخر وتعيد النتيجة في النهاية.

إذا كنت على دراية بالبرمجة الدالية، فستجد التعريف شبيهًا *بالطي من اليمين*: إذ تُعرّف القائمة بأنها دالة الطي من اليمين للعناصر التي تحتويها.

يمكننا بسهولة تعريف بعض الدوال المفيدة بناء على هذا الترميز:

$$\mathrm{Sum} \equiv \lambda l.\, l\,(\lambda x a.\, \mathrm{Add}\, x\, a)\, \overline{0}$$
$$\mathrm{Len} \equiv \lambda l.\, l\,(\lambda x a.\, \mathrm{Add}\, a\, \overline{1})\overline{0}$$

تحسب Sum مجموع قائمة من أرقام تشرش. وتعمل بإجراء تجميع على القائمة، حيث القيمة الابتدائية هي $\overline{0}$، ولكل عنصر تعيد $\mathrm{Add}\, x\, a$ بوصفها القيمة الجديدة، حيث x هو العنصر الحالي وa القيمة المتراكمة. والنتيجة مجموع العناصر كلها.

ماذا تفعل Len؟ اشرح.

عرّف دالة تعكس ترتيب قائمة.

1.5 التحويل والاختزال

ثمة ثلاثة أنواع من التحويل أو الاختزال في حساب لامبدا. والفرق بين التحويل والاختزال هو كون «التحويل الصوري» أحادي الاتجاه أو ثنائيه، كما سنرى.

يتعلق تحويل α بإعادة تسمية المتغيرات. ومن الطبيعي عد $\lambda x.x$ و$\lambda y.y$ ممثلين للدالة نفسها، وهي دالة الهوية. ونصوغ هذه الفكرة شكليًا كما يأتي: يطابق تحويل α بين الحدود التي لا تختلف إلا في إعادة تسمية متسقة للمتغيرات المقيدة؛ ولذلك يكون $\lambda x.x$ و$\lambda y.y$ متكافئين بتحويل α.

1.6 المفاهيم البرهانية النظرية

كما عرّفنا عددًا من المفاهيم الدلالية المهمة، وهي الصحة واللزوم وقابلية الإشباع، نعرّف الآن مفاهيم برهانية نظرية مقابلة. ولا تُعرّف هذه المفاهيم بالاحتكام إلى إشباع جمل في بنى، بل بالاحتكام إلى قابلية الاشتقاق أو عدم قابلية الاشتقاق تتابعات معينة. وكان اكتشاف تطابق هذه المفاهيم اكتشافًا مهمًا. وهذا التطابق هو مضمون مبرهنتي *السلامة* و*الاكتمال*.

تعريف 1.6 (المبرهنات). تكون جملة φ مبرهنة إذا وُجد اشتقاق في **LK** للتتابع $\Rightarrow \varphi$. ونكتب $\vdash \varphi$ إذا كانت φ مبرهنة، و$\nvdash \varphi$ إذا لم تكن كذلك.

تعريف 1.7 (قابلية الاشتقاق). تكون جملة φ *قابلة للاشتقاق من* مجموعة جمل Γ، ونكتب $\Gamma \vdash \varphi$، إذا وُجدت مجموعة جزئية منتهية $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ومتتالية Γ'_0 من جمل الموجودة في Γ_0 بحيث **LK** يشتق $\Gamma'_0 \Rightarrow \varphi$. وإذا لم تكن φ قابلة للاشتقاق من Γ، كتبنا $\Gamma \nvdash \varphi$.

بسبب قواعد التقليص والإضعاف والتبديل، لا يهم ترتيب جمل في Γ'_0 ولا عدد مرات ورودها: فإذا كان التتابع $\Gamma'_0 \Rightarrow \varphi$ قابلة للاشتقاق، كان $\Gamma''_0 \Rightarrow \varphi$ كذلك لكل Γ''_0 تحتوي جمل نفسها التي تحتويها Γ'_0. فمثلًا، إذا كان $\Gamma_0 = \{\psi, \chi\}$، كانت كل من $\Gamma'_0 = \langle \psi, \psi, \chi \rangle$ و $\Gamma''_0 = \langle \chi, \chi, \psi \rangle$ متتالية لا تحتوي إلا جمل الموجودة في Γ_0. وإذا كان التتابع الذي يحتوي إحداهما قابلة للاشتقاق، كان الآخر كذلك، مثلًا:

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ \mathrm{CL} & \dfrac{\varphi\psi, \psi, \chi \Rightarrow}{\varphi\psi, \chi \Rightarrow} \\ \mathrm{XL} & \dfrac{\varphi\chi, \psi \Rightarrow}{\varphi\chi, \chi, \psi \Rightarrow} \\ \mathrm{WL} & \end{array}$$

سنقول من الآن فصاعدًا إنه إذا كانت Γ_0 مجموعة منتهية من جمل، فإن $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ أي تتابع يكون سابقه متتالية من جمل الموجودة في Γ_0، وسنضمر تطبيق التقليصات والتبديلات والإضعافات عند الحاجة.

تعريف 1.8 (الاتساق). تكون مجموعة الجمل Γ غير متسقة إذا وفقط إذا وُجدت مجموعة جزئية منتهية $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ بحيث **LK** يشتق $\Gamma_0 \Rightarrow$. وإذا لم تكن Γ غير متسقة، أي إذا لم تكن **LK** اشتقاق $\Gamma_0 \Rightarrow$ لكل $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ منتهية، قلنا إنها متسقة.

قضية 1.9 (الانعكاسية). *إذا كان $\varphi \in \Gamma$، كان $\Gamma \vdash \varphi$.*

برهان. التتابع الابتدائي $\varphi \Rightarrow \varphi$ قابلة للاشتقاق، و $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$. □

قضية 1.10 (الرتابة). *إذا كان $\Gamma \subseteq \Delta$ و$\Gamma \vdash \varphi$، كان $\Delta \vdash \varphi$.*

برهان. افترض $\Gamma \vdash \varphi$؛ أي توجد $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ منتهية بحيث يكون $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ قابلة للاشتقاق. ولأن $\Gamma \subseteq \Delta$، تكون Γ_0 أيضًا مجموعة جزئية منتهية من Δ. ومن ثم يبيّن اشتقاق $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ أيضًا أن $\Delta \vdash \varphi$. □

قضية 1.11 (التعدي). *إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$ و$\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$، كان $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.*

برهان. إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$، وُجدت $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ منتهية و اشتقاق π_0 لـ$\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. وإذا كان $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$، وُجدت مجموعة جزئية منتهية $\Delta_0 \subseteq \Delta$ و اشتقاق π_1 لـ $\varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi$. تأمل اشتقاق الآتي:

$$\text{Cut}\,\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\vdots\\ \psi\varphi,\Delta_0\ \Rightarrow\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_0\vdots\\ \varphi\Gamma_0\ \Rightarrow\end{array}}{\psi\Gamma_0,\Delta_0\ \Rightarrow}$$

بما أن $\Gamma_0\cup\Delta_0\subseteq\Gamma\cup\Delta$، يبيّن ذلك $\Gamma\cup\Delta\vdash\psi$. □

لاحظ أن هذا يعني بوجه خاص أنه إذا كان $\Gamma\vdash\varphi$ و $\varphi\vdash\psi$، كان $\Gamma\vdash\psi$. ويلزم أيضًا أنه إذا كان $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\vdash\psi$ و $\Gamma\vdash\varphi_i$ لكل i، كان $\Gamma\vdash\psi$.

قضية 1.12. *تكون Γ غير متسقة إذا وفقط إذا كان $\Gamma\vdash\varphi$ لكل جملة φ.*

برهان. تمرين. □

أثبت قضية 1.12.

قضية 1.13 (التراص). *1. إذا كان $\Gamma\vdash\varphi$، وُجدت مجموعة جزئية منتهية $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ بحيث $\Gamma_0\vdash\varphi$.*

2. إذا كانت كل مجموعة جزئية منتهية من Γ متسقة، كانت Γ متسقة.

برهان. 1. إذا كان $\Gamma\vdash\varphi$، وُجدت مجموعة جزئية منتهية $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ بحيث يكون للتتابع $\Gamma_0\Rightarrow\varphi$ اشتقاق. وبالتالي $\Gamma_0\vdash\varphi$.

2. إذا كانت Γ غير متسقة، وُجدت مجموعة جزئية منتهية $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ بحيث **LK** يشتق $\Gamma_0\Rightarrow$. لكن Γ_0 عندئذ مجموعة جزئية منتهية غير متسقة من Γ. □

1.7 نماذج الحساب غير القياسية

تعريف 1.14. لتكن $\mathcal{L}_N$ لغة الحساب، وهي تتألف من رمز ثابت o، ومحمول ثنائي الموضع $<$، ودالة أحادي الموضع $\prime$، ودوال ثنائية الموضع $+$ و$\times$.

1. *النموذج القياسي* للحساب هو بنية $\mathfrak{N}$ للغة $\mathcal{L}_N$ الذي مجاله $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$، ويفسر o بالصفر 0، و$<$ بعلاقة الأصغر من على $\mathbb{N}$، ويفسر $\prime$ و$+$ و$\times$ بالخلف والجمع والضرب على $\mathbb{N}$ على الترتيب.

2. *الحساب الصادق* هو النظرية $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

حين نعمل في $\mathcal{L}_N$، نختصر كل حد من الصورة $\mathsf{o}^{\prime\dots\prime}$، وفيه n تطبيقات لدالة الخلف على o، إلى $\overline{n}$.

تعريف 1.15. يكون بنية $\mathfrak{M}$ للغة $\mathcal{L}_N$ قياسيًا إذا وفقط إذا كان $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{M}$.

مبرهنة 1.16. *توجد نماذج قابلة للتعداد غير قياسية للحساب الصادق.*

برهان. وسّع $\mathcal{L}_N$ بإدخال رمز ثابت جديد c، وتأمل النظرية

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\overline{n} < c : n \in \mathbb{N}\}.$$

هذه النظرية قابلة للإشباع منتهيًا، ولذلك لها بالتراص نموذج $\mathfrak{M}$ يمكن اختياره قابلة للتعداد بمبرهنة لوفنهايم–سكولم النزولية. إذا كان $|\mathfrak{M}|$ مجال $\mathfrak{M}$، فليفسر $\mathfrak{M}$ الرموز غير المنطقية للغة $\mathcal{L}_N$ على النحو الآتي: $\mathbf{z} = \mathsf{o}^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$، و $\prec = <^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|^2$، و $\prime^{\mathfrak{M}} : |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{M}|$ $= *$، و $+^{\mathfrak{M}} = \oplus$، و $\times^{\mathfrak{M}} : |\mathfrak{M}|^2 \to |\mathfrak{M}|$ $= \otimes$. ولكل $x \in |\mathfrak{M}|$، نكتب x^* للعنصر من $|\mathfrak{M}|$ الناتج من تطبيق $*$ على x.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

والآن، لو كان h تماثلًا بين $\mathfrak{N}$ و$\mathfrak{M}$، لوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $h(n) = c^{\mathfrak{M}}$. فليكن s أي إسناد في $\mathfrak{N}$ بحيث $s(x) = n$. عندئذ $\mathfrak{N}, s \vDash \overline{n} = x$؛ وببرهان مبرهنة 25.9 يكون أيضًا $\mathfrak{M}, h \circ s \vDash \overline{n} = x$، ومن ثم $c^{\mathfrak{M}} = \mathbf{z}^{*\cdots*}$، حيث تكرر $*$ عدد n من المرات. لكن ذلك مستحيل، لأن الفرض يعطي $\mathfrak{M} \vDash \overline{n} < c$، ولأن $\prec$ لا انعكاسية. ولذلك يكون $\mathfrak{M}$ غير قياسي. $\square$

تكون علاقة R على مجموعة X راسخة إذا وفقط إذا لم توجد فيها سلاسل نزولية غير منتهية؛ أي إذا لم توجد x_0، x_1، x_2، ...في X بحيث $x_2 R x_1 R x_0 \ldots$. وبافتراض اتساق نظرية مجموعات زيرميلو–فرينكل ZF، بيّن أن لـZF نماذج غير راسخة؛ أي نماذج $\mathfrak{M}$ بحيث $x_2 \in \ldots x_1 \in x_0$.

لما كان النموذج غير القياسي $\mathfrak{M}$ من مبرهنة 1.16 مكافئًا أوليًا للنموذج القياسي، أمكن اشتقاق عدد من خواص $\mathfrak{M}$. ويُكرس باقي هذا القسم لهذه المهمة، مما يتيح لنا وصف نماذج $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ غير القياسية قابلة للتعداد وصفًا دقيقًا.

1. لا يكون أي عنصر من $|\mathfrak{M}|$ أصغر بحسب $\prec$ من نفسه: فالجملة $\forall x \neg x < x$ صادقة في $\mathfrak{N}$، ومن ثم في $\mathfrak{M}$.

2. وباستدلال مماثل نحصل على أن $\prec$ ترتيب خطي لـ $|\mathfrak{M}|$، أي علاقة كلية لا انعكاسية ومتعدية على $|\mathfrak{M}|$.

3. العنصر $\mathbf{z}$ هو أصغر عناصر $|\mathfrak{M}|$ بحسب $\prec$.

4. كل عنصر من $|\mathfrak{M}|$ أصغر بحسب $\prec$ من خلفه بالنسبة إلى $*$، وx^* هو أصغر عناصر $|\mathfrak{M}|$ بحسب $\prec$ بين العناصر الأكبر من x.

5. يحتوي $\mathfrak{M}$ قطعة ابتدائية بالنسبة إلى $\prec$ متماثلة مع $\mathbb{N}$، هي $\mathbf{z}, \mathbf{z}^*, \mathbf{z}^{**}, \ldots$، ونسميها *الجزء القياسي* من $|\mathfrak{M}|$. وكل عنصر آخر من $|\mathfrak{M}|$ غير قياسي. ولا بد من وجود عناصر غير قياسية في $|\mathfrak{M}|$، وإلا لكانت الدالة h من برهان مبرهنة 1.16 تماثلًا. ونستخدم $n, m, \ldots$ بوصفها متغيرات تتراوح على هذا الجزء القياسي من $\mathfrak{M}$.

6. كل عنصر غير قياسي أكبر من كل عنصر قياسي؛ ذلك أنه لكل $n \in \mathbb{N}$،

$$\mathfrak{N} \vDash \forall z\,(\neg(z = \mathsf{o} \vee \cdots \vee z = \overline{n}) \to \overline{n} < z),$$

ولذلك إذا كان $z \in |\mathfrak{M}|$ مختلفًا عن جميع العناصر القياسية، وجب أن يكون أكبر منها جميعًا.

7. كل عنصر من $|\mathfrak{M}|$ غير $\mathbf{z}$ هو خلف بالنسبة إلى $*$ لعنصر وحيد من $|\mathfrak{M}|$، نرمز إليه بـx^*. وإذا كان $x = y^*$، كان x وy قياسيين إذا كان أحدهما قياسيًا، وكانا غير قياسيين إذا كان أحدهما غير قياسي.

8. عرّف علاقة تكافؤ $\approx$ على $|\mathfrak{M}|$ بالقول إن $x \approx y$ إذا وفقط إذا كان، لبعض n قياسي، إما $x \oplus n = y$ وإما $y \oplus n = x$. وبعبارة أخرى، يكون $x \approx y$ إذا وفقط إذا كانت المسافة بين x وy منتهية. وإذا كان n وm قياسيين، كان $n \approx m$. وعرّف كتلة x بأنها صنف التكافؤ $[x] = \{y : x \approx y\}$.

9. افترض $x \prec y$ و$x \not\approx y$. ولأن $\mathfrak{N} \vDash \forall x\,\forall y\,(x < y \to (x' < y \vee x' = y))$، يكون إما $x^* \prec y$ وإما $x^* = y$. والحالة الأخيرة مستحيلة لأنها تستلزم $x \approx y$، ومن ثم $x^* \prec y$. وبالمثل، إذا كان $x \prec y$ و$x \not\approx y$، كان $x \prec {}^*y$. لذلك، إذا كان $x \prec y$ و$x \not\approx y$، كان كل $w \approx x$ أصغر بحسب $\prec$ من كل $v \approx y$. وكل كتلة غير قياسية $[x]$ تكوّن سلسلة غير منتهية في الاتجاهين

$$\cdots \prec {}^{**}x \prec {}^*x \prec x \prec x^* \prec x^{**} \prec \cdots$$

تسمى سلسلة Z لأن نوع ترتيبها هو نوع ترتيب الأعداد الصحيحة.

10. يمكن رفع ترتيب $\prec$ إلى الكتل: إذا كان $x \prec y$ و $x \not\approx y$، كانت كتلة x أصغر من كتلة y. وتكون الكتلة غير قياسية إذا احتوت عنصرًا غير قياسي. أما الكتلة القياسية فهي أصغر الكتل.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

11. لا توجد أصغر كتلة غير قياسية: فإذا كان y غير قياسي، وُجد $x \prec y$ يكون x فيه غير قياسي أيضًا و$x \not\approx y$. البرهان: في النموذج القياسي $\mathfrak{N}$، يقبل كل عدد القسمة على اثنين، وربما كان الباقي واحدًا؛ أي $\mathfrak{N} \vDash \forall y\, \exists x\, (y = x + x \vee y = x + x + \mathsf{o}')$. وبالتكافؤ الأولي، لكل $y \in |\mathfrak{M}|$ يوجد $x \in |\mathfrak{M}|$ بحيث إما $x \oplus x = y$ وإما $x \oplus x \oplus \mathbf{z}^* = y$. ولو كان x قياسيًا، لكان y قياسيًا أيضًا؛ ولذلك x غير قياسي، كما أن $x \prec y$. وفوق ذلك، ينتمي x وy إلى كتلتين مختلفتين، أي $x \not\approx y$. ولرؤية ذلك، افترض أنهما ينتميان إلى الكتلة نفسها، أي $x \oplus n = y$ لبعض n قياسي. فإذا كان $y = x \oplus x$، كان $x \oplus n = x \oplus x$، ومنه $x = n$ بقانون الاختزال للجمع، وهو قانون يصدق في $\mathfrak{N}$ ومن ثم في $\mathfrak{M}$ أيضًا، فيكون x قياسيًا في نهاية المطاف. وتُعالج حالة $y = x \oplus x \oplus \mathbf{z}^*$ على نحو مماثل.

12. وبحجة مماثلة، لا توجد أكبر كتلة.

13. ترتيب الكتل كثيف: إذا كانت $[x]$ أصغر من $[y]$، حيث $x \not\approx y$، وُجدت كتلة $[z]$ متميزة منهما وتقع بينهما. افترض $x \prec y$. وكما سبق، يقبل $x \oplus y$ القسمة على اثنين، وربما كان ثمة باق، ولذلك يوجد $u \in |\mathfrak{M}|$ بحيث إما $x \oplus y = u \oplus u$ وإما $x \oplus y = u \oplus u \oplus \mathbf{z}^*$. والعنصر u هو متوسط x وy، ولذلك يقع بينهما. افترض $x \oplus y = u \oplus u$، والحالة الأخرى مماثلة: إذا كان $u \approx x$، فلبعض n قياسي

$$x \oplus y = x \oplus n \oplus x \oplus n,$$

ومن ثم $y = x \oplus n \oplus n$، فيكون $x \approx y$ خلافًا للفرض. فنستنتج $u \not\approx x$. وتعطي حجة مماثلة $u \not\approx y$.

وهكذا تُرتب الكتل غير القياسية مثل الأعداد النسبية: فهي تكوّن ترتيبًا خطيًا قابلة للتعداد بلا نقطتي نهاية. ويلزم من ذلك أنه لأي نموذجين غير قياسيين قابلة للتعداد $\mathfrak{M}_1$ و$\mathfrak{M}_2$ للحساب الصادق، يكون اختزالهما إلى اللغة التي لا تحتوي إلا $<$ و$=$ متماثلين. فالجزآن القياسيان من $\mathfrak{M}_1$ و$\mathfrak{M}_2$ متماثلان مع النموذج القياسي $\mathfrak{N}$، ومن ثم أحدهما مع الآخر. والكتل المكوّنة للجزء غير القياسي مرتبة هي نفسها مثل الأعداد النسبية، ولذلك تكون متماثلة بموجب مبرهنة 25.26؛ ويمكن توسيع تماثل الكتل إلى تماثل داخل الكتل بمقابلة عناصر اعتباطية في كل منها، ثم جعل صورة خلف x في $\mathfrak{M}_1$ خلف صورة x في $\mathfrak{M}_2$. لاحظ أنه لا

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

يلزم من ذلك أن $\mathfrak{M}_1$ و$\mathfrak{M}_2$ متماثلان في لغة الحساب الكاملة، فالتماثل دائمًا نسبي إلى توقيع؛ إذ توجد طرائق غير متماثلة لتعريف الجمع والضرب على $|\mathfrak{M}_1|$ و $|\mathfrak{M}_2|$. (ويلزم ذلك أيضًا من مبرهنة شهيرة لفوت، تقول إن عدد النماذج المعدودة لنظرية تامة لا يمكن أن يكون 2.)

بيّن أنه لا يمكن أن توجد أكبر كتلة في نموذج حسابي غير قياسي.

لتكن $\mathcal{L}$ لغة الرتبة الأولى التي لا تحتوي، عدا $=$، إلا $<$ بوصفه محمول وحيدًا، ولتكن $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, <)$. جميع المجموعات الجزئية المنتهية أو المتناهية المتممة من $\mathfrak{N}$ قابلة للتعريف من دون معاملات. بيّن أنها المجموعات الجزئية الوحيدة القابلة للتعريف من دون معاملات في $\mathfrak{N}$.

(تلميح: أولًا، لتكن $prc(x, y)$ صيغة $\mathcal{L}$ المختصرة لعبارة «x هو السلف المباشر لـy»:

$$x < y \wedge \neg\exists z\,(x < z \wedge z < y).$$

تقابل كل مجموعة جزئية من $\mathfrak{N}$ قابلة للتعريف من دون معاملات صيغة $\varphi(x)$ في $\mathcal{L}$. ولكل صيغة كهذه φ، تأمل الجملة θ:

$$\exists x\,\forall y\,\forall z\,((x < y \wedge x < z \wedge prc(y, z) \wedge \varphi(y)) \to \varphi(z)).$$

بيّن أن $\mathfrak{N} \vDash \theta$ إذا وفقط إذا كانت المجموعة الجزئية من $\mathfrak{N}$ التي تعرّفها φ إما منتهية وإما متناهية المتممة.

والآن ليكن $\mathfrak{M}$ نموذجًا غير قياسي مكافئًا أوليًا لـ $\mathfrak{N}$. وإذا كان $a \in |\mathfrak{M}|$ غير قياسي، فليكن $b, c \in |\mathfrak{M}|$ أكبر من a، وليكن b السلف المباشر لـc. عندئذ يوجد تشاكل ذاتي h لاختزال $\mathfrak{M}$ إلى لغة الترتيب بحيث $h(b) = c$، فلماذا؟ ولذلك إذا أشبع b الصيغة φ، أشبعها c أيضًا، فلماذا؟ ويلزم أن θ صادقة في $\mathfrak{M}$، ومن ثم في $\mathfrak{N}$ أيضًا. لكن ذلك يستلزم أن المجموعة الجزئية من $\mathfrak{N}$ التي تعرّفها φ إما منتهية وإما متناهية المتممة.)

1.8 المنطقات الموجهية العادية

يمكن النظر إلى المنطق الموجهي بوصفه أي مجموعة من صيغ تتمتع بقدر مناسب من حسن السلوك. وثمة منطقات موجهية تحظى باهتمام خاص، لا لأن لها تأويلات وتطبيقات مثيرة للاهتمام فحسب، بل أساسًا لأنها مفهومة جيدًا من الناحية النظرية. وهي ما يسمى المنطقات الموجهية العادية.

تعريف 1.17. يكون $\mathbf{L}$ منطقًا موجهيًا إذا كان مجموعة من صيغ اللغة الموجهية الأساسية بحيث

1. يحتوي جميع القضايا الصادقة منطقيًا،
2. ويكون مغلقًا تحت التعويض المنتظم،
3. ويكون مغلقًا تحت القياس الشرطي؛ أي كلما كان $\varphi \in \mathbf{L}$ و $(\varphi \to \psi) \in \mathbf{L}$، كان أيضًا $\psi \in \mathbf{L}$.

مثال 1.18. من أمثلة مجموعات صيغ التي تحقق هذا التعريف، ومن ثم تُعد منطقات موجهية، وإن لم تكن مثيرة جدًا للاهتمام:

1. مجموعة جميع القضايا الصادقة منطقيًا؛
2. ومجموعة جميع صيغ، أي المنطق الموجهي غير المتسق.

تعريف 1.19. يكون المنطق الموجهي $\mathbf{L}$ عاديًا إذا وفقط إذا

1. كان يحتوي كلًا من

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \qquad \text{(K)}$$

$$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p \qquad \text{)Dual(}$$

2. وكان مغلقًا تحت الإلزام؛ أي كلما كان $\varphi \in \mathbf{L}$، كان أيضًا $\Box\varphi \in \mathbf{L}$.

سنصادف طريقتين رئيستين لتعريف المنطقات الموجهية. أولاهما برهانية نظرية، بوصفها مجموعة صيغ التي يمكن اشتقاقها في أنظمة اشتقاق معينة. والثانية نموذجية نظرية، بوصفها مجموعات صيغ الصادقة في أصناف معينة من النماذج. وهذا يماثل الحال في المنطق القضوي العادي، أو في منطق الرتبة الأولى أيضًا. فهنا كذلك يمكننا تعيين مجموعة من صيغ بطريقتين مختلفتين، مثل تعيينها بوصفها مجموعة القضايا الصادقة في جميع إسنادات قيم الصدق، وبوصفها مجموعة كل قابلة للاشتقاق صيغ في نظام اشتقاق ما. وفي المنطقات الموجهية العادية يمكن اتباع هاتين الطريقتين في التحديد باستخدام النماذج العلائقية وأنظمة البرهان المسلّمية من نمط هيلبرت.

1.9 إزالة القطوع ذات الرتبة القصوى

يبيّن برهان قضية مساعدة 6.14 أنه إذا كان النسق **G3c** يبرهن نتيجة قاعدة منطقية (غير $\exists$R و$\forall$L)، فإنه يبرهن أيضًا كل مقدمة من مقدمات القاعدة من دون زيادة ارتفاع البرهان. ويمكننا إثبات نتيجة أقوى، وهي أن هذا يصدق أيضًا على $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$.

وكما سبق، نعرّف رتبة القطع لاستدلال $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ بأنها عمق صيغة القطع فيه.

قضية مساعدة 1.20. إذا كان $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ يبرهن نتيجة قاعدة منطقية R غير $\exists\mathrm{R}$ أو $\forall\mathrm{L}$ باستعمال برهان π، فإنه يبرهن أيضًا كل مقدمة ببرهان π' (أو ببراهين π'، π'' بحسب كون القاعدة ذات مقدمة واحدة أو مقدمتين). وفضلًا عن ذلك، (أ) $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$ (وكذلك $\mathrm{ht}(\pi'') \leq \mathrm{ht}(\pi)$)، و(ب) يكون عدد استدلالات $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ ورتبها في π' (وفي π'') هو نفسه في π.

برهان. يتضح ذلك بفحص براهين قضايا مساعدة 6.15 and 6.14. فقد كان ذلك البرهان استقراء على $\mathrm{ht}(\pi)$. وفي حالة الأساس، استبدلنا مسلّمة بمسلّمة أخرى، ومن ثم يتحقق الشرطان (أ) و(ب) بداهة. وإذا كانت القاعدة الأخيرة في π هي القاعدة المطلوبة R، فإن براهينها الفرعية المباشرة هي براهين π_i التي نريدها، ويتحقق الشرطان (أ) و(ب). وفي جميع الحالات الأخرى، طبّقنا فرض الاستقراء على براهين π الفرعية المباشرة، أي التي تنتهي بمقدمة أو مقدمات الاستدلال الأخير S، ثم أعدنا تطبيق القاعدة نفسها S على النتائج. ويتحقق الشرطان (أ) و(ب) في براهين البرهان الجديد الفرعية المباشرة، ولذلك يتحققان في البرهان كله. ويبقى التحقق من الحالة التي يكون فيها الاستدلال الأخير هو $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$. ونكتفي مرة أخرى بمثال واحد: افترض أن π هو برهان لنتيجة $\wedge\mathrm{L}$، وهي $\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$، وأنه ينتهي بـ $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$$

ينطبق فرض الاستقراء على π_1 و π_2 (وهما أيضًا براهين لأمثلة من نتيجة $\wedge\mathrm{L}$)، ويعطينا براهين π'_1 و π'_2 لكل من $\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ و $\varphi, \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ على الترتيب. ونجمعهما باستعمال $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ لنحصل على π':

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \varphi, \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$$

ومن الواضح أن الشرطين (أ) و(ب) متحققان. □

لاحظ أن هذا لا يصلح إذا استعملنا Cut بدلًا من $\mathrm{Cut_{CS}}$، لأن نتيجة برهان الأخير ستحتوي عندئذ نسختين من ψ, χ, Γ في المقدم ونسختين من Δ في التالي. وسنضطر إلى الاحتجاج بمقبولية الانكماش، لكن برهان قضية 6.16 يستعمل مبرهنة قابلية العكس، فنكون بذلك قد استدللنا استدلالًا دائريًا.

يمكننا استعمال قضية مساعدة 1.20 لإعطاء برهان بديل لحذف القطع. ففي هذا البرهان لا نزيل تباعًا المواضع العليا لاستدلالات $\mathrm{Cut_{CS}}$، بل نزيل مواضع استدلالات $\mathrm{Cut_{CS}}$ ذات الرتبة القصوى. أي إننا نبدأ بـ برهان π في $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut_{CS}}$، ونزيل قطعًا في أي موضع منه (وقد نستبدله بقطوع أصغر رتبة)، ثم نكرر ذلك إلى أن لا يبقى أي قطع. والشرط الوحيد هو ألا يقع فوق القطع الذي نعالجه قطع من الرتبة نفسها أو من رتبة أعلى.

قضية مساعدة 1.21. *إذا كان π هو برهان في $\mathbf{G3c}+\mathrm{Cut_{CS}}$ ينتهي باستدلال $\mathrm{Cut_{CS}}$ رتبته n، ولا يستعمل فيما عدا ذلك إلا قواعد* **G3c** *واستدلالات $\mathrm{Cut_{CS}}$ رتبتها $< n$، فهناك برهان π' للمتتالية النهائية نفسها في $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut_{CS}}$ تكون رتبة كل استدلال $\mathrm{Cut_{CS}}$ فيه $< n$.*

برهان. ينتهي برهان π بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

نميّز حالات بحسب صورة φ.

افترض أن φ ذرية. لاحظ أنه، بمقتضى الشرط القائل إن كل استدلال $\mathrm{Cut_{CS}}$ في π_1 وπ_2 لا بد أن تكون رتبته $\mathrm{dp}(\varphi) = 0 <$، لا يمكن أن يوجد أي استدلال $\mathrm{Cut_{CS}}$ في π_1 أو π_2. نبيّن بالاستقراء على $\mathrm{ht}(\pi_2)$ أن لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta$ برهانًا خاليًا من القطع. إذا كان $\mathrm{ht}(\pi_2) = 0$، فإن $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ مسلّمة. فإذا لم تكن φ رئيسة، كان بعض χ الذري عنصر في كل من Γ وΔ، وكانت $\Gamma \Rightarrow \Delta$ نفسها مسلّمة. وإذا كانت φ رئيسة، فإن $\Delta = \Delta', \varphi$. وفي هذه الحالة ينتهي π_1 بـ $\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi, \varphi$. ونحصل على برهان خال من القطع لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi$ بتطبيق قضية 6.16 (مقبولية الانكماش). وإذا كان

$\mathrm{ht}(\pi_2) > 0$، فإنه ينتهي بقاعدة S. خذ مقدمة من مقدمات تلك القاعدة؛ صورتها $\varphi, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta', \Lambda$، حيث Π وΛ هما صيغ الفعالة للقاعدة S. يعطي تطبيق قضية 6.11 على π_1 وπ_2 براهين لكل من $\Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Lambda, \varphi$ و $\varphi, \Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Lambda$، وينطبق عليهما فرض الاستقراء. وهكذا نحصل على برهان لـ$\Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Lambda$، لكل مقدمة من مقدمات S. وبتطبيق S نحصل على $\Gamma, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta$، ثم يزوّدنا قضية 6.16 بالبرهان الخالي من القطع لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta$.

إذا لم تكن φ ذرية، نميّز حالات بحسب المؤثر الرئيس لـφ. وفي كل حالة نطبّق قضية مساعدة 1.20 لنحصل على براهين لمقدمات قاعدتي اليسار واليمين اللتين تكون φ صيغتهما الرئيسة. ثم نتابع كما في الحالة E من برهان قضية مساعدة 1.24.

1. $\varphi \equiv \neg\psi$. ينتهي براهين π_1 وπ_2 بكل من $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi$ و$\neg\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. وبحسب قضية مساعدة 1.20 يوجد براهين π'_1 و π'_2 لـ$\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ و$\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$. ويكون برهان π' كما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

2. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$. ينتهي براهين π_1 وπ_2 بكل من $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi$ و$\psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. وبحسب قضية مساعدة 1.20 (قابلية عكس $\vee\mathrm{R}$ مطبقة على π_1)، يوجد برهان لـ π'_1 $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi$. وبحسب قضية مساعدة 1.20 (قابلية عكس $\vee\mathrm{L}$ مطبقة على π_2)، يوجد برهان π'_2 لـ$\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ و برهان π''_2 لـ$\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. وبتطبيق قضية 6.11 على π''_2 نحصل أيضًا على برهان π'''_2 لـ$\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$. ويكون برهان π':

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'''_2\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}\,\mathrm{Cut_{CS}} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

3. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$. تمرين.

4. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$. ينتهي براهين π_1 وπ_2 بكل من $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \to \chi$ و$\psi \to \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. وبحسب قضية مساعدة 1.20 (قابلية عكس $\to$R مطبقة على π_1)، يوجد برهان π'_1 لـ $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$. وبحسب قضية مساعدة 1.20 (قابلية عكس $\to$L مطبقة على π_2)، يوجد برهان π'_2 لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ و برهان π''_2 لـ$\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. وبتطبيق قضية 6.11 على π''_2 نحصل أيضًا على برهان π'''_2 لـ$\chi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. ويكون برهان π':

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'''_2\\ \chi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

5. $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$. ينتهي براهين π_1 و π_2 بكل من $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)$ و $\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$. وبحسب قضية مساعدة 1.20 يوجد برهان π'_1 لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)$.

تأمل الآن برهان π_2. إنه ينتهي بـ$\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$. وبينما نتحرك صعودًا ابتداء من المتتالية النهائية لـπ_2، نعلّم كل ورود لـ$\forall x\, \psi(x)$ على يسار متتالية «يقود إلى» ورود $\forall x\, \psi(x)$ في المتتالية النهائية لـπ_2، أي: (أ) علّم $\forall x\, \psi(x)$ في المتتالية النهائية لـπ_2. (ب) إذا وردت $\forall x\, \psi(x)$ في سياق نتيجة قاعدة وكانت معلّمة، فعلّم الورود المناظر في مقدمة القاعدة أو مقدماتها. (ج) إذا كانت $\forall x\, \psi(x)$ رئيسة في نتيجة قاعدة $\forall$L وكانت معلّمة، فعلّم الورودين الفعالين المناظرين لـ$\forall x\, \psi(x)$ و$\psi(t)$ في المقدمة.

تأمل الآن كل هذه الورودات المعلّمة لـ$\forall x\, \psi(x)$. لا يكون أي منها فعالًا في قاعدة غير $\forall$L (فلا تُعلّم إلا صيغ الفعالة لقاعدة $\forall$L). احذف من π_2 كل الورودات المعلّمة لـ$\forall x\, \psi(x)$. إذا كان الناتج برهان صحيحًا، فلم تكن الورودات المعلّمة لـ $\forall x\, \psi(x)$ فعالة قط، بل أتت كلها مباشرة من مسلّمات. وينتهي برهان بـ$\Gamma \Rightarrow \Delta$، ويمكننا أن نستبدل به π. وبذلك نكون قد أزلنا قطعًا ذا رتبة قصوى.

وإلا، فالناتج ليس برهانًا صحيحًا، لأننا حذفنا صيغ $\forall x\, \psi(x)$ كانت فعالة في بعض استدلالات $\forall\mathrm{L}$. وقد حوّلنا هذه إلى «استدلالات» من الصورة

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_t\\ \psi(t), \Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Pi \Rightarrow \Lambda}\,\forall\mathrm{L}$$

استبدل بكل «استدلال» علوي من هذا النوع ما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'[t/c][\Pi \Rightarrow \Lambda]\\ \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda, \psi(t)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_t[\Gamma \Rightarrow \Delta]\\ \psi(t), \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

وأضف Γ إلى يسار كل متتالية أسفله، وΔ إلى يمينها. كرر ذلك حتى تُستبدل جميع «استدلالات» $\forall\mathrm{L}$ التي تحتوي مقدمتها على $\psi(t)$ معلّمة باستدلال $\mathrm{Cut_{CS}}$ على $\psi(t)$ ما. وتكون المتتالية النهائية لـبرهان الناتج (وهو الآن برهان صحيح) من الصورة $\Gamma, \ldots, \Gamma \Rightarrow \Delta, \ldots, \Delta$. طبّق مقبولية الانكماش لتحوّله إلى برهان لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta$، واستبدل به π. وهكذا استبدلنا قطعًا واحدًا على $\forall x\, \psi(x)$ بقطوع (قد تكون كثيرة) على $\psi(t)$، لكنها كلها أدنى رتبة. وتبقى أي قطوع كانت موجودة أصلًا في π_1 أو π_2، لكنها أيضًا كلها أدنى رتبة. $\square$

تحقق من الحالة $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ في برهان قضية مساعدة 1.21. أي بيّن أنه إذا وجد برهان π ينتهي بـ

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

وكان كل من π_1 وπ_2 لا يحتوي إلا قطوعًا رتبتها $< \mathrm{dp}(\psi \wedge \chi)$، فهناك برهان π' لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta$ لا يحتوي إلا قطوعًا رتبتها $< \mathrm{dp}(\psi \wedge \chi)$.

تثبت قضية مساعدة 1.21 أنه يمكننا استبدال استدلال $\mathrm{Cut_{CS}}$ ذي الرتبة الأعلى في برهان باستدلالات $\mathrm{Cut_{CS}}$ أدنى رتبة. ويمكننا مرة أخرى استعمال هذه المبرهنة لإزالة أي عدد من استدلالات $\mathrm{Cut_{CS}}$ من برهان، وذلك بتطبيقها تباعًا على براهين الفرعية العليا المنتهية بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$ ذي الرتبة القصوى.

مبرهنة 1.22. *يمكن تحويل أي برهان π في $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut_{CS}}$ إلى برهان في* **G3c**.

برهان. نثبت أولًا أنه يمكن إزالة كل القطوع ذات الرتبة القصوى في π. لتكن d الرتبة القصوى للقطوع الواقعة في π، وليكن n عدد القطوع ذات الرتبة d. البرهان بالاستقراء على n. إذا كان $n = 0$ فلا شيء نثبته. وإذا كان $n > 0$، فاختر قطعًا علويًا رتبته d، وليكن π_1 هو برهان الفرعي المنتهي به. وبحسب قضية مساعدة 1.21 يوجد برهان π'_1 للمتتالية النهائية نفسها، وكل قطوعه رتبتها $< d$. استبدل π_1 بـπ'_1 في π. ينتج من ذلك برهان يحتوي $n - 1$ قطعًا من الرتبة d، فينطبق فرض الاستقراء.

والآن تتبع النتيجة بالاستقراء على d. فإذا كان $d = 0$، كانت جميع القطوع ذرية، ويمكن إزالة جميعها بحسب النتيجة السابقة. وإذا كان $d > 0$، تعطينا النتيجة السابقة برهانًا استُبدلت فيه كل القطوع ذات الرتبة d بقطوع رتبتها $< d$. ولما كانت d هي الرتبة القصوى للقطوع في π، أصبح لدينا برهان رتبة قطوعه القصوى $< d$، فينطبق فرض الاستقراء. □

1.10 إزالة القطوع العليا

تعريف 1.23. تأمل برهان π ينتهي بقاعدة $\mathrm{Cut_{CS}}$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

ولا يحتوي على استدلالات $\mathrm{Cut_{CS}}$ أخرى. يكون ارتفاع القطع في π هو $\mathrm{ch}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1)+\mathrm{ht}(\pi_2)$. وتكون رتبة القطع في π هي $\mathrm{cr}(\pi) = \mathrm{dp}(\varphi)$.

قضية مساعدة 1.24. قاعدة $\mathrm{Cut_{CS}}$ مقبولة في **G3c**. وبعبارة أخرى، إذا كان π هو برهان ينتهي بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$ واحدة، ولا يستعمل فيما عدا ذلك إلا قواعد النسق **G3c**، فهناك برهان π' للمتتالية النهائية نفسها في **G3c**.

برهان. البرهان باستقراء مزدوج على ارتفاع القطع ورتبته. ينتهي برهان π بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

أساس الاستقراء: $\mathrm{ch}(\pi) = 0$ و$\mathrm{cr}(\pi) = 0$. لما كان $\mathrm{ch}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1) + \mathrm{ht}(\pi_2) = 0$، فإن كلًا من $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ و$\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ مسلّمة. ولدينا حالتان: (أ) إما أن φ ليست رئيسة في إحداهما، أو (ب) أن φ رئيسة فيهما كلتيهما. وسنبيّن أدناه في الحالتين أن $\Gamma \Rightarrow \Delta$ لا بد أن تكون مسلّمة (ولا نحتاج إلى فرض الاستقراء لإثبات ذلك).

سنميّز الآن عددًا من الحالات الممكنة بحسب ما إذا كان π_1 وπ_2 مسلّمتين أو ينتهيان باستدلال، وبحسب ما إذا كانت φ رئيسة في ذلك الاستدلال أم لا. تغطي الحالتان A وB أساس الاستقراء. وفي خطوة الاستقراء نفترض أن $\mathrm{ch}(\pi) > 0$ أو $\mathrm{cr}(\pi) > 0$ (أو كليهما). ويمكننا استعمال فرض الاستقراء، أي إن $\mathrm{Cut_{CS}}$ الأخيرة يمكن حذفها من أي برهان ينتهي بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$ واحدة، وتكون إما رتبة قطعه $= \mathrm{cr}(\pi)$ وارتفاع قطعه $< \mathrm{ch}(\pi)$، وإما رتبة قطعه $< \mathrm{cr}(\pi)$. والحالة التي يكون فيها $\mathrm{ch}(\pi) = 0$ (أي المقدمتان مسلّمتان) تغطيها الحالتان A وB، والحالات التي يكون فيها $\mathrm{ch}(\pi) > 0$ تغطيها الحالات C–D.

الحالة A: ترد ψ ما في كل من Γ و Δ. عندئذ تكون $\Gamma \Rightarrow \Delta$ مسلّمة (إذا كانت ψ ذرية)، أو يكون لها برهان π' في **G3c** من دون $\mathrm{Cut_{CS}}$ بحسب قضية 6.19. وهذا يغطي الحالة (أ) من أساس الاستقراء، لأنه إذا لم تكن φ رئيسة في $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ أو لم تكن رئيسة في $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$، وكانت

هاتان مسلّمتين، فلا بد أن ترد ψ ذرية أخرى في كل من Γ و Δ. كما يغطي خطوة الاستقراء إذا كانت إحدى المقدمتين مسلّمة لا تكون فيها φ رئيسة (حتى إن كانت المقدمة الأخرى نتيجة قاعدة).

الحالة B: المقدمتان مسلّمتان، وφ رئيسة، ومن ثم ذرية. تأمل المقدمة اليسرى $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$. لما كانت φ رئيسة، فلا بد أن ترد في Γ (وإلا لما كانت $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ مسلّمة). وبالمثل، لا بد أن ترد φ في Δ، وإلا لما كانت $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ مسلّمة. وهكذا تكون φ ذرية وترد في كل من Γ وΔ، أي إن $\Gamma \Rightarrow \Delta$ مسلّمة. وهذا يغطي الحالة (ب) من أساس الاستقراء.

عرض بديل للحالتين A وB

الحالة A: إحدى مقدمتي القطع مسلّمة من الصورة $\chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \chi$، حيث χ ذرية. إذا لم تكن χ هي صيغة القطع φ، فلا بد أن ترد χ في كل من Γ و Δ. وعندئذ تكون $\Gamma \Rightarrow \Delta$ مسلّمة، ويمكننا اتخاذها π'. وإذا كانت $\chi \equiv \varphi$ هي صيغة القطع، فإما أن يكون (إذا كانت المقدمة اليسرى مسلّمة) $\varphi \in \Gamma$ و$\Gamma = \Gamma', \varphi$، أو يكون (إذا كانت المقدمة اليمنى مسلّمة) $\varphi \in \Delta$ و$\Delta = \Delta', \varphi$. في الحالة الأولى، يكون π_2 هو برهان لـ$\varphi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$، وبمقبولية CL (قضية 6.16) يوجد برهان لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta$. وفي الحالة الثانية، يكون π_1 هو برهان لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi, \varphi$، وبمقبولية CR نحصل على برهان لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta$.

الحالة B: إحدى المقدمتين مسلّمة من الصورة $\bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$. فإذا كانت المقدمة اليسرى مسلّمة من هذه الصورة، كان $\bot \in \Gamma$، وكانت $\Gamma \Rightarrow \Delta$ مسلّمة أيضًا. وإذا كانت المقدمة اليمنى مسلّمة من هذه الصورة، فإما أن يكون $\bot \in \Gamma$ (فتكون $\Gamma \Rightarrow \Delta$ مسلّمة مرة أخرى)، أو أن يكون $\varphi \equiv \bot$. وفي الحالة الأخيرة، يكون π_1 هو برهان لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot$. ويمكننا تحويله إلى برهان لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ بحذف نسخة واحدة من $\bot$ من تالي كل متتالية في π_1. (تمرين: تحقق من ذلك بالاستقراء على $\mathrm{ht}(\pi_1)$.)

افترض الآن أن الحالة A ولا الحالة B تنطبق. في الحالات الباقية يكون $\mathrm{ch}(\pi) > 0$، أي إن مقدمة واحدة على الأقل هي نتيجة استدلال.

الحالتان C وD: تبديل ترتيب القطوع. تشترك الإمكانات المدروسة في الحالتين C وD في نمط واحد. نبدأ بـ برهان ينتهي بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$، وفيه تُستنتج إحدى المقدمتين بقاعدة R لا تكون فيها صيغة القطع φ رئيسة (بل تكون صيغة أخرى θ رئيسة). في هذا برهان تأتي $\mathrm{Cut_{CS}}$ بعد القاعدة R، ويكون شكله التخطيطي كما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \theta, \varphi\end{array} \qquad \left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Lambda\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \theta}\,R\right\}\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \theta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

لا يغطي هذا إلا الحالة التي تكون فيها R قاعدة يمين ذات مقدمة واحدة، ولا تكون A هي صيغة القاعدة R الرئيسة، وترد صيغة θ التي هي رئيسة في تالي المقدمة اليمنى لـ$\mathrm{Cut_{CS}}$. أما إذا وردت θ في المقدم (أي كانت R قاعدة يسار)، أو وردت في المقدمة اليسرى لـ$\mathrm{Cut_{CS}}$، فسيختلف الشكل بالطبع. وتمثل صيغ في Π و Λ صيغ الفعالة للقاعدة R.

نعكس هذا الترتيب ونتأمل برهان تأتي فيه R بعد $\mathrm{Cut_{CS}}$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \theta, \Lambda, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_3\\ \varphi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \theta, \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \theta, \Lambda}\,\mathrm{Cut_{CS}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \theta, \theta}\,R$$

نستعمل الإضعاف الحافظ للـارتفاع لنحصل على π'_1 وπ'_3 من π_1 وπ_3 على الترتيب.

ولأننا نبدّل ترتيب $\mathrm{Cut_{CS}}$ و R، يسمى ذلك «نقل القطع صعودًا عبر R». ويؤدي هذا إلى خفض ارتفاع برهان المنتهي بالمقدمة اليمنى لـ$\mathrm{Cut_{CS}}$، ومن ثم يخفض ارتفاع القطع. أي يمكن افتراض أن براهين الفرعية المنتهية بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$ الجديدة لا يزيد ارتفاعها على ارتفاع π_1 وπ_3، فتنخفض ارتفاع القطع

(لأننا حذفنا استدلالًا واحدًا من اليمين). وينطبق الآن فرض الاستقراء، فيخبرنا بإمكان حذف استدلال $\mathrm{Cut_{CS}}$. وأخيرًا نحذف النسخة الزائدة من θ باستعمال مقبولية CR.

الحالة C: ينتهي واحد على الأقل من π_1 وπ_2 بقاعدة R ذات مقدمة واحدة لا تكون فيها φ رئيسة. وهناك 18 حالة في المجموع، بحسب ما إذا كانت φ غير رئيسة في المقدمة اليسرى أو اليمنى لـ$\mathrm{Cut_{CS}}$، وبحسب أي واحدة من القواعد التسع ذات المقدمة الواحدة تكون R ($\neg$L، $\neg$R، $\vee$R، $\wedge$L، $\to$R، وقواعد الكم الأربع). ونكتفي بمثالين: أن تكون φ غير رئيسة في الاستدلال الأخير لـπ_2، الذي ينتهي إما بـ$\to$R أو بـ$\exists$L. أما الحالات الأخرى فنظيرة لهما وتُترك تمارين.

افترض أن π ينتهي بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \varphi\end{array} \qquad \left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi}\,{\to}\mathrm{R}\right\}\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

حيث $\Delta = \Delta', \psi \to \chi$. نطبّق الإضعاف الحافظ للـارتفاع (قضية 6.11) على π_1 لنحصل على برهان π_1' لـ$\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi, \varphi$ (نضعف بـψ على اليسار وبـχ على اليمين). وبالمثل نطبّق قضية 6.11 على π_3 لنحصل على برهان π_3' لـ$\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi$ (بالإضعاف بـ$\psi \to \chi$ على اليمين). وينطبق فرض الاستقراء على

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3'\\ \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi\end{array}}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

الذي صيغة قطعه φ: فهذا برهان له رتبة القطع نفسها، وارتفاع قطع أقل من π. وهذا يعطينا برهان π_4 في **G3c** من دون $\mathrm{Cut_{CS}}$ لـ $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi$. طبّق $\to\mathrm{R}$ لتحصل على برهان لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \psi \to \chi$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_4\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \psi \to \chi}\to\mathrm{R}$$

وللحصول على برهان π' لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$، أي $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi$، طبّق قضية 6.16 (مقبولية الانكماش).

افترض الآن أن π ينتهي بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \exists x\,\psi(x), \Gamma' \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi, \psi(c), \Gamma' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi, \exists x\,\psi(x), \Gamma' \Rightarrow \Delta}\exists\mathrm{L}\right\}\pi_2}{\exists x\,\psi(x), \Gamma' \Rightarrow \Delta}\mathrm{Cut_{CS}}$$

نطبّق فرض الاستقراء مرة أخرى على

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1[\psi(c) \Rightarrow]\\ \exists x\,\psi(x), \psi(c), \Gamma' \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_3[\exists x\,\psi(x) \Rightarrow]\,\vdots\\ \varphi, \exists x\,\psi(x), \psi(c), \Gamma' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\exists x\,\psi(x), \psi(c), \Gamma' \Rightarrow \Delta}\mathrm{Cut_{CS}}}{\exists x\,\psi(x), \exists x\,\psi(x), \Gamma' \Rightarrow \Delta}\exists\mathrm{L}$$

لاحظ أن شرط المتغير المميز متحقق، لأن شرط المتغير المميز على $\exists\mathrm{L}$ في π_2 يضمن أن c لا يرد في $\exists x\,\psi(x)$ أو Γ' أو Δ. وأخيرًا، طبّق قضية 6.16.

الحالة D: ينتهي واحد على الأقل من π_1 وπ_2 بقاعدة R ذات مقدمتين لا تكون فيها φ رئيسة. وهناك 6 حالات. وندرس الحالة التي لا تكون فيها φ رئيسة في الاستدلال الأخير لـπ_2، الذي ينتهي بـ$\wedge$R؛ أما الحالات الأخرى فنظيرة لها.

افترض أن π ينتهي بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi\end{array} \quad \left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_4\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}\right\}\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

ينطبق فرض الاستقراء على براهين الآتية:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi, \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_3\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

و

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi''_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \chi, \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_4\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \chi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

وهنا تُستخرج براهين π'_1 وπ''_1 في **G3c** من π_1 بالإضعاف الحافظ للـارتفاع (قضية 6.11) (مرة بالإضعاف بـψ على اليمين، ومرة بـχ). وتُستخرج براهين π'_3 و π'_4 من π_3 و π_4 أيضًا بالإضعاف الحافظ للـ ارتفاع من π_3 و π_4 على الترتيب (بالإضعاف بـ$\psi \wedge \chi$ على اليمين).

يعطينا فرض الاستقراء براهين π_5 و π_6 في **G3c** لكل من $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \chi$. ونجمعهما في برهان لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi$ باستعمال القاعدة $\wedge$R:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_5\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_6\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

وللحصول على برهان لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$، أي $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi$، طبّق قضية 6.16 (مقبولية الانكماش).

الحالة E: اختزال القطوع. تتعلق الحالة الأخيرة بالوضع الذي ينتهي فيه كل من π_1 وπ_2 باستدلال تكون فيه φ رئيسة. وهناك ست حالات، واحدة لكل المؤثر الرئيس ممكن لـφ.

في كل حالة، نحوّل $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ ذات صيغة القطع φ إلى قطع واحد أو أكثر على صيغ فرعية لـφ، وهي تحديدًا صيغ الفعالة في الاستدلالات التي تكون φ هي صيغةها الرئيسة. ولذلك تسمى هذه الحالات في الغالب «اختزال» استدلال القطع أو «تحويله».

1. إذا كان $\varphi \equiv \neg\psi$، فإن π ينتهي بـ

$$\dfrac{\pi_1\left\{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}\,\neg\mathrm{R}\right. \qquad \pi_2\left\{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\neg\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\neg\mathrm{L}\right.}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$$

وبحسب فرض الاستقراء يمكن حذف $\mathrm{Cut_{CS}}$ من

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

2. إذا كان $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$، فإن π ينتهي بـ

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi}\,\vee\mathrm{R} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\vee\mathrm{L}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

تأمل برهان المنتهي بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

حيث يُستخرج π_2''' من π_2'' بالإضعاف الحافظ للـارتفاع. رتبة قطعه $< \mathrm{cr}(\pi)$، لأن $\mathrm{dp}(\chi) < \mathrm{dp}(\psi \vee \chi)$، ولذلك يعطينا فرض الاستقراء برهان في **G3c**، هو π_1''، لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$. أما برهان المنتهي بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

فرتبة قطعه $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\psi \vee \chi) =$، ومن ثم ينطبق فرض الاستقراء مرة أخرى، ويعطينا برهان π' لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

3. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$. تمرين.

4. إذا كان $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$، فإن π ينتهي بـ

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\to\chi}\to\mathrm{R} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi,\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi\to\chi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\to\mathrm{L}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

رتبة القطع في برهان المنتهي بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$ الآتي أدنى من رتبتها في π:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi,\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{Cut_{CS}}$$

ويعطينا فرض الاستقراء برهان π_1'' لـ $\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta$. تأمل الآن برهان المنتهي بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{Cut_{CS}}$$

رتبة قطعه أيضًا أصغر من رتبة القطع في π، ولذلك يعطينا فرض الاستقراء برهان π' في **G3c** لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

5. إذا كان $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$، فإن π ينتهي بـ

$$\pi_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1' \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c) \\ \hline \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)\end{array}\forall\mathrm{R} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2' \\ \psi(t), \forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta \\ \hline \forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}\forall\mathrm{L}\right\}\pi_2 \\ \hline \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \mathrm{Cut_{CS}}$$

وبحسب فرض الاستقراء يمكن حذف $\mathrm{Cut_{CS}}$ من

$$\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'' \\ \psi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2' \\ \psi(t), \forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \\ \hline \psi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \mathrm{Cut_{CS}}$$

حيث يُستخرج π_1'' من π_1 (لا من π_1'!) بالإضعاف الحافظ للـ ارتفاع. (لهذا برهان رتبة القطع نفسها، لكن ارتفاع قطعه أقل.) وهذا يعطينا برهان π_2'' لـ $\psi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta$.

المتتالية النهائية لـبرهان π_1' هي $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)$، حيث c المتغير المميز لاستدلال $\forall\mathrm{R}$. ولذلك لا يرد c في $\psi(x)$ أو Γ أو Δ. نفترض أن برهان π منتظم، ومن ثم لا يكون c المتغير المميز إلا لاستدلال $\forall\mathrm{R}$ الآتي، ولا يرد إلا فوقه، أي لا يرد إلا في π_1'، وليس متغيرًا مميزًا لاستدلال في π_1'. ولما كان c لا يرد في π_2، فلا يمكن أن يرد في t. وبحسب قضية مساعدة 6.21 يكون برهان $\pi_1'[t/c]$ هو برهان لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)$. ونطبّق الآن فرض الاستقراء على برهان

$$\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'[t/c] \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'' \\ \psi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \\ \hline \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \mathrm{Cut_{CS}}$$

(ينطبق فرض الاستقراء لأن صيغة القطع هي $\psi(t)$، ولذلك تكون رتبة القطع في برهان أدنى منها في π.)

6. نترك الحالة $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ تمرينًا. $\square$

تحقق من الحالة الفرعية للحالة D في برهان قضية مساعدة 1.24 التي لا تكون فيها φ رئيسة في الاستدلال الأخير لـπ_1، المنتهي بـ $\to$L. (ملاحظة: يقتضي هذا التمرين جزئيًا أن تصرّح بوضوح بما عليك إثباته، أي بالصورة التي يكون عليها π في هذه الحالة.)

تحقق من الحالة الفرعية للحالة D في برهان قضية مساعدة 1.24 التي لا تكون فيها φ رئيسة في الاستدلال الأخير لـπ_1، المنتهي بـ $\forall$L.

تحقق من الحالة الفرعية للحالة E في برهان قضية مساعدة 1.24 التي تكون فيها φ رئيسة في الاستدلالين الأخيرين لكل من π_1 وπ_2، ويكون $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$.

تحقق من الحالة الفرعية للحالة E في برهان قضية مساعدة 1.24 التي تكون فيها φ رئيسة في الاستدلالين الأخيرين لكل من π_1 وπ_2، ويكون $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$.

لاحظ أن ارتفاع القطع في برهان المنتهي بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$ الذي نطبّق عليه فرض الاستقراء في الحالة E قد يكون أكبر من ارتفاع القطع في البرهان الأصلي. فمثلًا، في الحالة التي يكون فيها $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$ حوّلنا π إلى برهان يتضمن استدلالي $\mathrm{Cut_{CS}}$،

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_1''$$

استدلال $\mathrm{Cut_{CS}}$ العلوي بين π_1' وπ_2'' أدنى من π في كل من رتبة القطع وارتفاع القطع. لكن برهان π_1''—وهو نتيجة تطبيق فرض الاستقراء—لم يعد أدنى من π في ارتفاع القطع. غير أن صيغة القطع في استدلال $\mathrm{Cut_{CS}}$ السفلي هي ψ، ولذلك تكون رتبته أدنى من رتبة القطع في π.

تثبت قضية مساعدة 1.24 أنه يمكننا حذف استدلال $\mathrm{Cut_{CS}}$ علوي واحد من برهان. ويمكننا إثبات إمكان حذف أي عدد من استدلالات $\mathrm{Cut_{CS}}$ من برهان بتطبيقها تباعًا على براهين الفرعية العليا المنتهية بـ$\mathrm{Cut_{CS}}$.

مبرهنة 1.25. *يمكن تحويل أي برهان π في $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ إلى برهان في* **G3c**.

برهان. بالاستقراء على عدد استدلالات $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ في π، ولنسمّه n. إذا كان $n = 0$، فلا شيء نفعله: يكون π أصلًا برهان في **G3c**. وإلا، فتأمل برهان الفرعي π' المنتهي باستدلال $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ علوي. فهو يحتوي على قاعدة $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ واحدة بوصفها استدلاله الأخير. طبّق قضية مساعدة 1.24 لتحوّله إلى برهان π'' خال من $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$، واستبدل برهان الفرعي π' بـπ''. ينتج برهان يحتوي $n - 1$ استدلالًا من نوع $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$، فينطبق فرض الاستقراء. □

باب 2

حذف القطع

2.1 لمّة ماهارا ومبرهنة كريغ للاستيفاء

تنص مبرهنة الاستيفاء، التي ترجع إلى وليم كريغ، على أنه إذا كان $\varphi \vDash \psi$، وُجدت جملة χ (تسمى صيغة الاستيفاء) بحيث $\varphi \vDash \chi$ و$\chi \vDash \psi$. ومن المهم أنه يمكن اختيار صيغة الاستيفاء χ بحيث تكون كل رموز ثابتة ومحمولات الواردة فيها واردة في كل من φ وψ. (ونفترض عدم وجود دوال.) ولولا هذا القيد لأمكن أن تقوم φ وψ نفسيهما بدور صيغتي استيفاء على نحو تافه.

تصدق مبرهنة الاستيفاء في منطق الرتبة الأولى الكلاسيكي، وقد وُصفت بأنها «آخر خاصية مهمة لمنطق الرتبة الأولى» جرى اكتشافها. ولها تطبيقات مهمة في نظرية النماذج والاستدلال الآلي. وكان دافعها وتطبيقها الأصليان في فلسفة العلم، إذ يمكن استخدامها لدراسة الأوليات التي يمكن بها تسليم نظرية أو يتعذر ذلك. كما تستلزم مبرهنة بيث في قابلية التعريف، التي تقول إن النظرية إذا استطاعت أن تعرّف مفهومًا ضمنيًا استطاعت أن تعرّفه صراحة.

مثل نتائج كثيرة في المنطق الرياضي، يمكن برهنة مبرهنة الاستيفاء بطرائق نظرية النماذج وبطرائق نظرية البرهان معًا. وميزة الطرائق البرهانية أنها لا تبيّن وجود صيغة استيفاء فحسب، بل تقدم خوارزمية تستخرجها من برهان صوري للمتتالية $\varphi \Rightarrow \psi$، مثل برهان لها في **G3c**.

لتكن $\mathcal{L}(\varphi)$ مجموعة رموز ثابتة ومحمولات في φ، ولتكن $\mathcal{L}(\Gamma) = \bigcup\{\mathcal{L}(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$. ونفترض في هذا القسم كله أننا نتعامل مع صيغ خالية من دوال.

مبرهنة 2.1 (مبرهنة كريغ للاستيفاء). *لتكن لغة φ هي $\mathcal{L}(\varphi)$، ولغة ψ هي $\mathcal{L}(\psi)$. إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash \varphi \Rightarrow \psi$، وُجدت صيغة χ في لغة $\mathcal{L}(\chi) \subseteq \mathcal{L}(\varphi) \cap \mathcal{L}(\psi)$ بحيث $\mathbf{G3c} \vdash \varphi \Rightarrow \chi$ و$\mathbf{G3c} \vdash \chi \Rightarrow \psi$.*

نبرهن تعميمًا لمبرهنة الاستيفاء كي نستفيد من بنية براهين في **G3c**. ولأجل ذلك، تصوّر أن مقدّم كل متتالية وتاليها مقسومان إلى جزأين. نكتب $\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \,;\, \Delta_2$ للدلالة على أن Γ_1 وΔ_1 ينتميان إلى الجزء الأول، وأن Γ_2 وΔ_2 ينتميان إلى الجزء الثاني. وعندئذ تتبع مبرهنة الاستيفاء فورًا من اللمّة الآتية.

قضية مساعدة 2.2 (لمّة ماهارا). *إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \,;\, \Delta_2$، وُجدت صيغة χ في لغة $\mathcal{L}(\chi) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$ بحيث $\mathbf{G3c} \vdash \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi$ و$\mathbf{G3c} \vdash \chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$.*

برهان. افترض أن $\pi \vdash \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \,;\, \Delta_2$. نبرهن المطلوب بالاستقراء على $n = \mathrm{ht}(\pi)$.

إذا كان $n = 0$، كانت $\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \,;\, \Delta_2$ مسلّمة، وظهرت صيغة ذرية ما φ في كل من Γ_1, Γ_2 وΔ_1, Δ_2. ولدينا أربع حالات بحسب انتماء φ إلى الجزء الأول أو الثاني في اليسار، وانتمائها إلى الجزء الأول أو الثاني في اليمين.

1. $\varphi \in \Gamma_1$ و$\varphi \in \Delta_1$. نريد χ بحيث تكون كل من $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi$ و$\chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ قابلة للبرهنة. الأولى مسلّمة بالفعل أيًا كان اختيار χ، لأن φ تظهر في اليسار واليمين. والطريقة الوحيدة لضمان كون $\chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ قابلة للبرهنة هي أن نضع $\chi \equiv \bot$.

2. $\varphi \in \Gamma_1$ و$\varphi \in \Delta_2$. عندئذ تكون $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi$ و$\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ مسلّمتين، فيمكن اختيار $\chi \equiv \varphi$.

3. $\varphi \in \Gamma_2$ و$\varphi \in \Delta_1$. عندئذ تكون $\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ و$\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \varphi$ مسلّمتين، لكن φ تقع فيهما في الجهتين الخطأ، فلا تكون هي صيغة الاستيفاء. غير أننا نستطيع باستخدام $\neg$R و $\neg$L أن نبرهن المتتاليتين $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \neg\varphi$ و$\neg\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$.

4. $\varphi \in \Gamma_2$ و$\varphi \in \Delta_2$. تمرين.

ونترك تمرينًا حالتي كون $\Gamma_1 \; ; \; \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \; ; \; \Delta_2$ مسلّمة بسبب $\bot \in \Gamma_1$ أو $\bot \in \Gamma_2$.

إذا كان $n > 0$، انتهى π باستدلال منطقي. وعلينا تمييز الحالات بحسب القاعدة المستخدمة والجزء الذي تنتمي إليه الصيغة الرئيسة. وفي كل حالة نستطيع استخدام فرض الاستقراء القائل إن اللمّة تصدق لكل براهين π_1 بحيث $\mathrm{ht}(\pi_1) < n$، وبأي تقسيم لمتتالية نهاية π_1 إلى جزأين. فلنتأمل بعض الحالات المحددة.

1. ينتهي π بـ$\neg$R، وصيغته الرئيسة $\neg\varphi$. ولدينا حالتان: بحسب انتماء $\neg\varphi$ إلى الجزء الأول أو الثاني، ينتهي π بأحد الشكلين

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Gamma_1 \; ; \; \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \; ; \; \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \; ; \; \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \neg\varphi \; ; \; \Delta_2}\,\neg\mathrm{R}$$

أو

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \; ; \; \varphi, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \; ; \; \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \; ; \; \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \; ; \; \Delta_2, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}$$

لاحظ أننا إذا وضعنا صيغة الرئيسة $\neg\varphi$ في الجزء الأول، وضعنا صيغة الفعالة φ في الجزء الأول من المقدمة أيضًا. وهذا اختيار متاح لنا. وكان فرض الاستقراء سيصدق كذلك لو وضعنا الصيغة الفعالة في الجزء الآخر، لكننا عندئذ لن نستطيع إيجاد صيغة استيفاء (جرّب ذلك تمرينًا).

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

تأمل أولًا الوضع الأول، حيث تنتمي $\neg\varphi$ إلى الجزء الأول. بفرض الاستقراء توجد صيغة استيفاء لمتتالية نهاية π_1، أي توجد صيغة χ_1 بحيث تكون كل من

$$!A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad \text{و} \qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

قابلة للبرهنة. وما نحتاج إليه صيغة χ بحيث تكون المتتاليتان الآتيتان قابلة للبرهنة:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \neg\varphi, \chi \qquad \text{و} \qquad !C, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

ومن الواضح أنه يكفينا وضع $\chi \equiv \chi_1$: فقد أخبرنا فرض الاستقراء أن المتتالية اليمنى قابلة للبرهنة، وتنتج المتتالية اليسرى من المتتالية التي أعطاها فرض الاستقراء بتطبيق $\neg\mathrm{R}$. ويعطينا فرض الاستقراء أيضًا $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\varphi, \Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$. وبما أن $\mathcal{L}(\neg\varphi) = \mathcal{L}(\varphi)$ و$\mathcal{L}(\chi) = \mathcal{L}(\chi_1)$، يكون $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \neg\varphi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$.

أما في الوضع الثاني فالحال مختلفة قليلًا، إذ تنتمي $\neg\varphi$ إلى الجزء الثاني. نضع صيغة الفعالة في المقدمة في الجزء الثاني أيضًا، ونطبق فرض الاستقراء فنحصل على

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad \text{و} \qquad !C_1, \varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

وهما قابلتان للبرهنة. وإذا طبقنا قاعدة $\neg\mathrm{R}$ مرة أخرى على الثانية، حصلنا على براهين لـ

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad \text{و} \qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \neg\varphi$$

وهاتان بالضبط المتتاليتان اللتان نريد أن تكونا قابلة للبرهنة إذا كانت χ_1 صيغة استيفاء؛ فنضع مرة أخرى $\chi \equiv \chi_1$. وكما سبق يكون $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2, \neg\varphi)$.

2. ينتهي π بـ$\to$R، وصيغته الرئيسة صيغة $\varphi \to \psi$. ولدينا حالتان أيضًا، بحسب انتماء $\varphi \to \psi$ إلى الجزء الأول أو الثاني. ينتهي برهان π بأحد الشكلين

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \psi \,;\, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \varphi \to \psi \,;\, \Delta_2}\to\mathrm{R}$$

أو

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \,;\, \varphi, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \,;\, \Delta_2, \psi\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \,;\, \Delta_2, \varphi \to \psi}\to\mathrm{R}$$

وقد وضعنا مرة أخرى صيغ الفعالة في الجزء نفسه من المقدمة الذي تنتمي إليه صيغة الرئيسة في النتيجة. وفي الوضع الأول نطبق فرض الاستقراء فنحصل على براهين لـ

$$!A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \psi, \chi_1 \qquad \text{و} \qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

والمتتالية اليسرى مقدمة مناسبة لـ$\to$R؛ ومن ثم تكون المتتاليتان الآتيتان قابلة للبرهنة:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi \to \psi, \chi_1 \qquad \text{و} \qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

وهذا يعني أن χ_1 صيغة استيفاء لمتتالية نهاية π أيضًا، فيمكن أن نضع $\chi \equiv \chi_1$ مرة أخرى.

وتعالج الحالة الأخرى بالطريقة نفسها.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

3. ينتهي π بـ$\to$L، وصيغته الرئيسة صيغة $\varphi \to \psi$. إذا انتمت $\varphi \to \psi$ إلى الجزء الأول، انتهى برهان π بالشكل

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\,;\,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \varphi\,;\,\Delta_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi, \Gamma_1\,;\,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1\,;\,\Delta_2\end{array}}{\varphi \to \psi, \Gamma_1\,;\,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1\,;\,\Delta_2}\to\mathrm{L}$$

ويعطينا فرض الاستقراء الآن أربع متتاليات قابلة للبرهنة: اثنتان لصيغة الاستيفاء χ_1 للمقدمة اليسرى، واثنتان لصيغة الاستيفاء χ_2 للمقدمة الثانية:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi, \chi_1 \qquad (1) \qquad\qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \qquad (2)$$

$$!B, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_2 \qquad (3) \qquad\qquad !C_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \qquad (4)$$

ويمكن أن تكون المتتاليتان (1) و(3) مقدمتي $\to$L إذا طبقنا الإضعاف، فأضفنا χ_2 إلى يمين (1) وχ_1 إلى يمين (3):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \varphi, \chi_1, \chi_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \chi_1, \chi_2\end{array}}{\varphi \to \psi, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \chi_1, \chi_2}\to\mathrm{L}$$

وبتطبيق $\vee$R نحصل على المتتالية

$$\varphi \to \psi, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \chi_1 \vee \chi_2.$$

وهذا يرجح أن تكون $\chi_1 \vee \chi_2$ صيغة الاستيفاء في هذه الحالة. وهي كذلك بالفعل، إذ نستطيع أن نبرهن المتتالية الأخرى المطلوبة انطلاقًا من المتتاليتين الباقيتين (2) و(4):

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \chi_2, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2\end{array}}{\chi_1 \vee \chi_2, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2}\vee\mathrm{L}$$

يبقى التحقق من أن $\chi_1 \vee \chi_2$ تنتمي إلى اللغة الصحيحة. يعطينا فرض الاستقراء

$$\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2) \quad \text{و}$$
$$\mathcal{L}(\chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\psi, \Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$$

ولما كان

$$\mathcal{L}(\varphi) \subseteq \mathcal{L}(\varphi \to \psi) \quad \text{و}$$
$$\mathcal{L}(\psi) \subseteq \mathcal{L}(\varphi \to \psi)$$

كان كل من

$$\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2) \quad \text{و}$$
$$\mathcal{L}(\chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2).$$

وبالتالي، لما كان $\mathcal{L}(\chi_1 \vee \chi_2) =$

$$\mathcal{L}(\chi_1) \cup \mathcal{L}(\chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2),$$

وهو المطلوب.

وإذا انتمت $\varphi \to \psi$ إلى الجزء الثاني اختلف الوضع، لكنه يعالج بطريقة مماثلة. ويعطينا فرض الاستقراء مرة أخرى أربع متتاليات قابلة للبرهنة:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad (1) \qquad\qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \varphi \qquad (2)$$

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_2 \qquad (3) \qquad\qquad !C_2, \psi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \qquad (4)$$

والآن تكون المتتاليتان (2) و(4)، بعد إضافة بعض صيغ بالإضعاف، مقدمتي $\rightarrow$L:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1, \chi_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi, \chi_1, \chi_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi, \chi_1, \chi_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2} \rightarrow\mathrm{L}$$

ونريد مرة أخرى تحويل هذه إلى متتالية فيها صيغة واحدة مبنية من χ_1 وχ_2، لكننا نحتاج إليها هذه المرة في المقدّم لأننا نتعامل الآن مع الجزء الثاني. ويؤدي تطبيق $\wedge$L الغرض؛ فينبغي أن نختار $\chi \equiv (\chi_1 \wedge \chi_2)$ صيغة للاستيفاء. ومن حسن الحظ أننا نستطيع استخدام المتتاليتين الباقيتين (1) و(3) كي نبرهن المتتالية المقابلة للجزء الآخر:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_2\end{array}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \wedge \chi_2} \wedge\mathrm{R}$$

وكما سبق، يكون $\mathcal{L}(\chi_1 \wedge \chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2, \varphi \rightarrow \psi)$.

4. ينتهي π بـ$\forall$R، وصيغته الرئيسة صيغة $\forall x\, \varphi(x)$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \varphi(c) \,;\, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \forall x\, \varphi(x) \,;\, \Delta_2} \forall\mathrm{R}$$

أو

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1\,;\,\Delta_2,\varphi(c)\end{array}}{\Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1\,;\,\Delta_2,\forall x\,\varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

في الوضع الأول يعطينا فرض الاستقراء براهين لـ $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi(c), \chi_1$ و$\chi_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$. ويمكن تطبيق $\forall\mathrm{R}$ على الأولى فنحصل على $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \forall x\,\varphi(x), \chi_1$. (شرط المتغير المميز متحقق لأنه كان متحققًا أصلًا في قاعدة $\forall\mathrm{R}$ في نهاية π.) وهكذا تكون χ_1 صيغة استيفاء إذا تحقق الشرط $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \forall x\,\varphi(x)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$. ويعطينا فرض الاستقراء $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi(c)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$. لذا لا يبقى إلا القلق بشأن c: هل يمكن أن تظهر في χ_1؟ لا يمكن. فلو ظهرت فيها لكان كل من $c \in \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi(c))$، وهو صحيح، و$c \in \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$. لكن c كانت عندئذ ستظهر في نتيجة استدلال $\forall\mathrm{R}$ في π، خلافًا لشرط المتغير المميز.

والحالة الأخرى مماثلة.

5. ينتهي π بـ$\exists\mathrm{R}$، وصيغته الرئيسة صيغة $\exists x\,\varphi(x)$. ولدينا وضعان مرة أخرى. نتأمل الوضع الذي تنتمي فيه $\exists x\,\varphi(x)$ إلى الجزء الأول، ونترك الآخر تمرينًا.

في الوضع الأول ينتهي π بالشكل

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1,\exists x\,\varphi(x),\varphi(t)\,;\,\Delta_2\end{array}}{\Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1,\exists x\,\varphi(x)\,;\,\Delta_2}\,\exists\mathrm{R}$$

ويعطينا فرض الاستقراء براهين لـ$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \varphi(t), \chi_1$ و$\chi_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$. ويمكن تطبيق $\exists$R على الأولى فنحصل على $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \chi_1$. وهكذا تكون χ_1 صيغة استيفاء مرة أخرى إذا تحقق الشرط $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\, \varphi(x)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$. أما فرض الاستقراء فيعطينا $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \varphi(t)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$.

ولأننا افترضنا عدم وجود دوال، فلا يمكن أن يكون الحد t إلا متغيرًا أو رمز ثابت. إذا كان متغيرًا فلا يضيف رمزًا إلى اللغة، فنأخذ χ_1 صيغة للاستيفاء. وإذا كان ثابتًا، ولنكتب $t \equiv b$، فلا مشكلة كذلك إذا كان $b \notin \mathcal{L}(\chi_1)$ أو كان $b \in \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\, \varphi(x)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$؛ فنأخذ χ_1 صيغة للاستيفاء. لا نحتاج إلى التجريد إلا إذا كان $b \in \mathcal{L}(\chi_1)$ ولم يكن b مشتركًا بين لغتي الجزأين. عندئذ نستبدل كل ظهور لـb في χ_1 بـ متغير y، فنكتب $\chi_1 \equiv \chi_1'[b/y]$، حيث لا تحتوي χ_1' على b. وإضافة إلى ذلك، إما أن يكون $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\, \varphi(x))$ أو $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$. وفي الحالتين نأخذ، على الترتيب، $\chi \equiv \forall y\, \chi_1'(y)$ أو $\chi \equiv \exists y\, \chi_1'(y)$. ففي الحالة الأولى لدينا:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \varphi(b), \chi_1'(b)\end{array}}{\Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \chi_1'(b)}\,\exists\mathrm{R}}{\Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \forall y\, \chi_1'(y)}\,\forall\mathrm{R}$$

و

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1'(b), \forall y\, \chi_1'(y), \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2\end{array}}{\forall y\, \chi_1'(y), \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2}\,\forall\mathrm{L}$$

وتأتي براهين المتتاليتين العلويتين من فرض الاستقراء (وفي الثانية نطبق مقبولية الإضعاف مع $\forall y\, \chi_1'(y)$ في المقدّم). ويتحقق شرط المتغير المميز في $\forall$R في برهان الأول لأن $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\, \varphi(x))$، ولأن χ_1' عُرّفت بحيث لا تحتوي b.

وفي الحالة الثانية لدينا، من فرض الاستقراء مع مقبولية الإضعاف بـ $\exists y\, \chi_1'(y)$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \varphi(b), \exists y\, \chi_1'(y), \chi_1'(b)\end{array}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \exists y\, \chi_1'(y), \chi_1'(b)}\,\exists\mathrm{R}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \exists y\, \chi_1'(y)}\,\exists\mathrm{R}$$

و

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1'(b), \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{array}}{\exists y\, \chi_1'(y), \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}\,\exists\mathrm{L}$$

ويتحقق شرط المتغير المميز في $\exists\mathrm{L}$ في برهان الثاني لأن $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$، ولأن χ_1' عُرّفت بحيث لا تحتوي b.

والحالات الأخرى مماثلة، ونتركها تمارين. □

افترض أن لدينا الرابط $\uparrow$ ذا القاعدتين

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\varphi \uparrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\uparrow\mathrm{L} \qquad \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \uparrow \psi}\,\uparrow\mathrm{R}$$

بيّن أن لمّة ماهارا تظل صادقة بمعالجة الحالات في برهان قضية مساعدة 2.2 التي ينتهي فيها π بإحدى هاتين القاعدتين.

بعد إثبات لمّة ماهارا، نستطيع استخدامها لبرهنة مبرهنة كريغ للاستيفاء.

برهان مبرهنة 2.1. افترض أن $\varphi \Rightarrow \psi$ قابلة للبرهنة. طبّق قضية مساعدة 2.2 على ψ ; $\Rightarrow$; φ لتحصل على صيغة الاستيفاء χ. وعندئذ $\vdash \varphi \Rightarrow \chi$ و$\vdash \chi \Rightarrow \psi$. $\square$

افترض أن Γ نظرية (مجموعة جمل) في لغة $\mathcal{L}$ تحتوي محمول R ذا n مواضع. نقول إن Γ تعرّف R ضمنيًا إذا وفقط إذا

$$\Gamma, \Gamma' \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R'(x_1, \ldots, x_n)),$$

حيث Γ' هي Γ بعد استبدال كل ظهور لـR بـ $R' \notin \mathcal{L}$. وتكون Γ قد عرّفت R صراحة إذا وجدت $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ لا تحتوي R بحيث

$$\Gamma \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

ومن الواضح أن تعريف Γ لـR صراحة يستلزم تعريفها له ضمنيًا. أما العكس فليس واضحًا، لكنه يصدق مع ذلك:

قضية مساعدة 2.3 (مبرهنة بيث في قابلية التعريف). *إذا عرّفت Γ العلاقة R ضمنيًا، عرّفتها صراحة أيضًا.*

برهان. افترض أن Γ تعرّف R ضمنيًا. لتكن R' وΓ' كما سبق، ولتكن $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\Gamma') = \mathcal{L} \setminus \{R\} \cup \{R'\}$. وبالفرض لدينا

$$\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R'(x_1, \ldots, x_n)).$$

لتكن $c_1, \ldots, c_n$ رموز ثابتة لا تظهر في Γ. وتعطينا لمّة القابلية للعكس

$$\Gamma, \Gamma', R(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow R'(c_1, \ldots, c_n).$$

عرّف

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(\Gamma, R(c_1, \ldots, c_n)), \qquad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(\Gamma', R'(c_1, \ldots, c_n)).$$

وطبّق لمّة ماهارا على

$$\Gamma, R(c_1, \ldots, c_n) \; ; \Gamma' \Rightarrow \; ; R'(c_1, \ldots, c_n).$$

فنحصل على صيغة استيفاء $\chi(c_1, \ldots, c_n)$ بحيث

$$\begin{aligned} \Gamma, R(c_1, \ldots, c_n) &\Rightarrow \chi(c_1, \ldots, c_n) \\ !C(c_1, \ldots, c_n), \Gamma' &\Rightarrow R'(c_1, \ldots, c_n). \end{aligned}$$

ولهاتين المتتاليتين براهين. وتعطينا لمّة ماهارا

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\chi) &\subseteq \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \\ &= (\mathcal{L}(\Gamma) \setminus \{R\}) \cup \{c_1, \ldots, c_n\}. \end{aligned}$$

لتكن $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ناتجة من $\chi(c_1, \ldots, c_n)$ باستبدال الثابت الجديد c_i بالمتغير x_i لكل i. عندئذ لا تحتوي φ الرمز R. واستبدل R' في كل موضع بـR في برهان المتتالية الثانية لتحصل على برهان لـ

$$!A(c_1, \ldots, c_n), \Gamma \Rightarrow R(c_1, \ldots, c_n).$$

والمتتالية الأولى هي $\Gamma, R(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow \varphi(c_1, \ldots, c_n)$. وبالجمع القضوي بين المتتاليتين نحصل على

$$\Gamma \Rightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \leftrightarrow \varphi(c_1, \ldots, c_n).$$

ثم نطبق $\forall$R باستخدام الثوابت الجديدة تباعًا فنحصل على برهان لـ

$$\Gamma \Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

وهذا يبيّن أن $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ تعرّف R صراحة في Γ. □

وثمة نتيجة ثالثة تكافئ الاستيفاء، ويمكن مثلها برهنتها باستخدام لمّة ماهارا، وهي: إذا كانت Γ_1 وΓ_2 نظريتين متسقتين تحتويان نظرية تامة Γ في اللغة $\mathcal{L}(\Gamma) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$، كانت $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ متسقة.

تذكّر أن النظرية التامة هي التي يكون فيها، لكل جملة φ في لغتها، إما $\Gamma \vdash \varphi$ أو $\Gamma \vdash \neg\varphi$. ولأن Γ_1 وΓ_2 امتدادان متسقان لـΓ، فلا بد أن تكون Γ متسقة. ومن ثم، إذا كانت φ جملة في اللغة $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$، امتنع أن يكون معًا $\Gamma_1 \vDash \varphi$ و$\Gamma_2 \vDash \neg\varphi$. ولرؤية ذلك، افترض وجود φ كهذه. إذا كان $\Gamma_1 \vDash \varphi$، لزم أن يكون $\Gamma \vDash \varphi$؛ وإلا استلزم تمام Γ أن $\Gamma \vDash \neg\varphi$، وبما أن $\Gamma \subseteq \Gamma_1$، كان $\Gamma_1 \vDash \neg\varphi$، فتغدو Γ_1 غير متسقة. إذن $\Gamma \vDash \varphi$، وبما أن $\Gamma \subseteq \Gamma_2$، يكون $\Gamma_2 \vDash \varphi$. ولذلك $\Gamma_2 \nvDash \neg\varphi$، وإلا كانت Γ_2 غير متسقة.

وعدم وجود جملة φ في لغة المشتركة $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ بحيث $\Gamma_1 \vDash \varphi$ و$\Gamma_2 \vDash \neg\varphi$ هو كل ما يلزم للبرهان، الذي نقدمه هنا برهانيًا باستخدام لمّة ماهارا.

مبرهنة 2.4 (مبرهنة روبنسون في الاتساق المشترك). *افترض أن Γ_1 وΓ_2 نظريتان متسقتان، وأنه لا توجد φ في لغة $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ بحيث يكون $\Gamma_1 \vDash \varphi$ و$\Gamma_2 \vDash \neg\varphi$. عندئذ تكون $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ متسقة.*

برهان. افترض، خلافًا للمطلوب، أن $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ غير متسقة. عندئذ للمتتالية $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow$ برهان. طبّق لمّة ماهارا على $\Gamma_1 \; ; \; \Gamma_2 \Rightarrow \; ;$ لتحصل على جملة φ في لغة $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ بحيث $\vdash \Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ و $\vdash \varphi, \Gamma_2 \Rightarrow$. ومن الأخيرة نحصل على $\vdash \Gamma_2 \Rightarrow \neg\varphi$. لكننا افترضنا عدم وجود جملة كهذه. $\square$

افترضنا ضمنًا فيما سبق أن النظريات Γ وΓ_1 وΓ_2 منتهية. وبفضل التراص تصدق النتائج كذلك على النظريات اللانهائية.

2.2 مقدمة

قاعدة Cut هي

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\,\mathrm{Cut}$$

(وتسمى صيغة φ *صيغة القطع*.)

أدرج غنتسن قاعدة Cut في حسابه الأصلي للمتتاليات **LK**. وتنص مبرهنة غنتسن *الرئيسة* (*Hauptsatz*) على أن كل متتالية قابلة للبرهنة في **LK** هي أيضًا قابلة للبرهنة من دون استخدام قاعدة Cut؛ أي يمكن «حذف» Cut من براهين **LK**. ولا يحتوي نظامانا **G1c** و**G3c** قاعدة Cut، لكن يمكن طرح السؤال نفسه عنهما: هل يمكن حذف Cut من براهين التي تستخدم Cut إلى جانب سائر قواعد **G1c** (أو قواعد **G3c**)؟ وبمصطلحاتنا المعتمدة، يكافئ ذلك السؤال: هل Cut قاعدة مقبولة في **G1c** (أو **G3c**)؟

لعل مبرهنة حذف القطع أهم نتائج نظرية البرهان وأشهرها. فهي تثبت أولًا أن **G1c** و**G3c** لا يحتاجان إلى قاعدة قد تبدو، للوهلة الأولى، ضرورية بوضوح. فعندما تحاول صورنة براهين فعلية، تلاحظ أنك تحتاج إلى طريقة لمعالجة استخدام اللمم. يحب الرياضيون أن يبرهنوا نتائج ثم يستندوا إليها في براهين نتائج أخرى. فقد تصوغ أولًا برهان النتيجة L (اللمّة) بوصفه برهان للمتتالية $\Rightarrow L$. ثم تصوغ برهان النتيجة الثانية R، الذي يستخدم L، بوصفه برهان للمتتالية $L \Rightarrow R$. فكيف تعرف أن لـR برهانًا، أي أن للمتتالية $\Rightarrow R$ برهان؟ تحتاج إلى طريقة لضم براهين الاثنين، وتتيح لك قاعدة Cut ذلك.

ذكرنا أن **G1c** و**G3c** تامان، ومن ثم يبرهنان كل متتالية تتوقع إمكان برهنتها، أي كل المتتاليات الصادقة. ويمكن إثبات ذلك مباشرة. لكن حين كان غنتسن يكتب، لم يكن التمام معروفًا إلا لأنظمة الاشتقاق المسلّمية. ولإثبات تمام **LK**، قدم غنتسن ترجمة لـاشتقاقات في النظام المسلّمي إلى براهين في **LK**. وكانت هذه الترجمة تستخدم Cut استخدامًا جوهريًا. وليس حذف القطع نتيجة مهمة للمنطق الكلاسيكي وحده؛ فلمنطقات كثيرة حسابات متتاليات. وفي بعض المنطقات يكون البرهان المباشر على تمام حساب متتالياتها صعبًا أو مستحيلًا، فتكون الترجمات من أنظمة أخرى، باستخدام Cut، السبيل الوحيد لإثبات التمام. وعندئذ يلزم إثبات حذف القطع برهانيًا لبيان أن Cut زائدة وأن النظام الخالي منها تام.

ويهم حذف القطع أيضًا لأنه يفضي إلى نتائج أخرى ذات أهمية مستقلة. وسنتناول مثالين هما لمّة كريغ للاستيفاء ومبرهنة هيربراند.

تقوم الأفكار المستخدمة عادة في برهان حذف القطع على بيان كيفية تحويل برهان يستخدم Cut إلى برهان لا يستخدمها. وغالبًا ما تكون هذه التحويلات «موضعية»: نأخذ جزءًا من برهان، يكون عادة برهان جزئيًا ينتهي باستدلال Cut، ونستبدل به برهان جزئيًا آخر للمتتالية نفسها حُذف منه استدلال Cut أو استُبدل باستدلالات أخرى. وتوفر هذه الحجج خوارزميات خطوة بخطوة لتحويل براهين التي تستخدم Cut إلى براهين لا تستخدمها، فتقدم معلومات أكثر حين تُستخدم إجراءات حذف القطع في التطبيقات. فمثلًا، ثمة براهين نموذجية نظرية للمّة الاستيفاء تأخذ الصورة: «إذا كانت $\varphi \to \psi$ صادقة، وُجدت صيغة استيفاء» (ولا يهم الآن معنى صيغة الاستيفاء). أما الحجة البرهانية التي تستخدم حذف القطع فتقدم خوارزمية تأخذ برهان لـ$\varphi \to \psi$ وتعيد صيغة استيفاء. وخلافًا للحجة النموذجية النظرية، تكون الحجة البرهانية بنائية.

ثمة طريقتان شائعتان لبرهنة مبرهنة حذف القطع. تبين إحداهما، التي ترجع إلى غنتسن، إمكان إزالة القطوع العليا في البرهان، ثم تزيل القطوع العليا تباعًا حتى لا يبقى شيء منها. أما الأخرى، التي ترجع أصلًا إلى شوتّه وتايت، فتركز على أعقد القطوع في برهان، وتزيل تباعًا القطوع القصوى بمعنى أنه لا يوجد قطع آخر له صيغة قطع أعمق. ولكل منهما مزايا وعيوب. وقد ينجح أحد النهجين في نظام ما بينما يصعب تنفيذ الآخر أو يستحيل. لذلك نصف النهجين كليهما. وسنبرهن حذف القطع لـ**G3c**. والواقع أننا لن نبين إمكان حذف Cut، بل إمكان حذف *القطع المشترك السياق* $\mathrm{Cut_{CS}}$:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

إذا كان حساب المتتاليات يجيز الإضعاف والتقليص، سواء بوصفهما قاعدتين فعليتين كما في **G1c** أو قاعدتين مقبولتين كما في **G3c**، أمكن لـCut

محاكاة $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$والعكس. ونختار $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ بدلًا من Cutلأن استراتيجية حذف القطع الأولى أسهل وصفًا لـ$\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$، ولأن الاستراتيجية الثانية لا تعمل إلا معها.

إذا كان $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$، انتهى π بالشكل

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\to\chi}\to\mathrm{R} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi\to\chi,\Pi \Rightarrow \Lambda,\psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi,\Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\psi\to\chi,\Pi \Rightarrow \Lambda}\to\mathrm{L}}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda}\mathrm{Cut}\right\}\pi_2$$

للبرهان الآتي، المنتهي بـCut،

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\to\chi}\to\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi\to\chi,\Pi \Rightarrow \Lambda,\psi\end{array}}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda,\psi}\mathrm{Cut}\right.$$

ارتفاع قطع أقل من ارتفاع قطع π. ومن ثم يعطينا فرض الاستقراء برهان π_1'' لـ$\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda,\psi$. وللبرهان الآتي، المنتهي بـCut،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi,\Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\psi,\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda}\mathrm{Cut}$$

رتبة قطع وارتفاع قطع أقل من رتبة قطع π وارتفاع قطعه، فيعطينا فرض الاستقراء برهان π_2''' في **G3c** لـ $\psi,\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda$. والآن طبّق فرض الاستقراء

على برهان الآتي المنتهي بـCut:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'' \\ \Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda,\psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''' \\ \psi,\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda\end{array}}{\Gamma,\Gamma,\Pi,\Pi \Rightarrow \Delta,\Delta,\Lambda,\Lambda}\,\mathrm{Cut}$$

(فرتبة قطعه $\mathrm{cr}(\pi) >$) لنحصل على برهان لـ $\Gamma,\Gamma,\Pi,\Pi \Rightarrow \Delta,\Delta,\Lambda,\Lambda$. ونحصل على برهان π' لـ $\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda$ بتطبيق قضية 6.16.

2.3 مبرهنة المتتالية الوسطى ومبرهنة هيربراند

من النتائج المهمة لمبرهنة حذف القطع مبرهنة المتتالية الوسطى. وتنص على أنه إذا وُجد برهان π لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta$ تكون فيه كل صيغة سوَرية المقدمة، وُجد برهان π' يحتوي متتالية $S \equiv \Pi \Rightarrow \Lambda$ (تسمى *المتتالية الوسطى*) بحيث تكون كل الاستدلالات فوق S في π' قضوية، وكل الاستدلالات تحت S استدلالات سوَرية. (تكون صيغة φ *سوَرية المقدمة*، أو في *الصيغة سوَرية المقدمة*، إذا كانت على الصورة

$$\mathsf{Q}_1 x_1 \ldots \mathsf{Q}_n x_n\, \psi(x_1,\ldots,x_n)$$

حيث كل Q_i إما $\forall$ وإما $\exists$.) ومن النتائج المهمة لمبرهنة المتتالية الوسطى مبرهنة هيربراند. ويصعب وصف حالتها العامة قليلًا، لكنها تأخذ في غاية العموم الصورة الآتية: لكل قابلة للبرهنة جملة φ في منطق الرتبة الأولى، توجد قضية تحصيل حاصل φ' يمكن أن نبرهن منها φ. وفيما يأتي نسختها لـجمل من الصورة $\exists x\, \psi(x)$، حيث ψ خالية من الأسوار:

مبرهنة 2.5 (مبرهنة هيربراند). *افترض أن $\psi(x)$ خالية من الأسوار وأن $\vdash \exists x\, \psi(x)$. عندئذ توجد حدود $t_1, \ldots, t_n$ بحيث $\vdash \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$.*

تسمى صيغة $\psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$ فصل هيربراند لـ$\exists x\, \psi(x)$. ولأن ψ خالية من الأسوار، يكون هذا الفصل خاليًا من الأسوار أيضًا. فإذا كان قابلة للبرهنة، كان قابلة للبرهنة ببرهان خال من القطع، ومن ثم كان له برهان لا يستخدم إلا الاستدلالات القضوية. ولذلك فهو تحصيل حاصل.

الجزء الصعب من مبرهنة هيربراند هو بيان وجود فصل هيربراند لكل قابلة للبرهنة صيغة $\exists x\, \psi(x)$. أما العكس، أي أن $\exists x\, \psi(x)$ قابلة للبرهنة إذا كان لها فصل هيربراند، فسهل. فالواقع أن فصل هيربراند يستلزم $\exists x\, \psi(x)$. وهذا مثلًا برهان في **G3c** للحالة $n = 2$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi(t_1) \;\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \psi(t_2) \qquad \psi(t_2) \;\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \psi(t_2)}{\psi(t_1) \vee \psi(t_2) \;\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \psi(t_2)}\,\vee\mathrm{L}}{\psi(t_1) \vee \psi(t_2) \;\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_2)}\,\exists\mathrm{R}}{\psi(t_1) \vee \psi(t_2) \;\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

لاستخراج فصل هيربراند من برهان π لـ $\Rightarrow \exists x\, \psi(x)$، تأمل الحالة التي تكون فيها كل استدلالات $\exists\mathrm{R}$ في برهان الخالي من القطع π عند النهاية:

$$\dfrac{\begin{array}{l} \vdots\, \pi_1 \\ \Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n) \end{array}}{\begin{array}{l} \Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_2), \ldots, \psi(t_n) \\ \vdots\, (n-1) \times \exists\mathrm{R} \\ \Rightarrow\; \exists x\, \psi(x) \end{array}}\,\exists\mathrm{R}$$

إذا كانت هذه هي كل استدلالات $\exists\mathrm{R}$ في π التي تكون فيها $\exists x\, \psi(x)$ فعالة، فلا توجد استدلالات سوَرية أخرى في π_1. والسبب أن $\psi(x)$ لا تحتوي أسوارًا أخرى، وأن متتالية النهاية لا تحتوي أي صيغ في اليسار. وبعبارة أخرى، تكون $\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)$ المتتالية الوسطى لـπ. وفوق ذلك، لما لم توجد استدلالات سوَرية فوق المتتالية الوسطى، احتوتها كل المتتاليات الواقعة فوقها، ولم تكن فيها $\exists x\, \psi(x)$ فعالة ولا رئيسة. ومن ثم يمكن حذفها من برهان π_1، فنحصل على برهان لـ $\Rightarrow\; \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)$ ، وباستخدام $n-1$ تطبيقًا لـ $\vee\mathrm{R}$ نحصل على برهان لفصل هيربراند $\Rightarrow \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$.

لكن المشكلة أننا لا نستطيع افتراض أن حتى برهان خاليًا من القطع لـ $\exists x\, \psi(x) \Rightarrow$ تكون فيه كل استدلالات $\exists\mathrm{R}$ كتلة واحدة عند النهاية. فقد تقع بين هذه الاستدلالات استدلالات تكون فيها إحدى $\psi(t_i)$ رئيسة. ومن هنا تأتي الحاجة إلى مبرهنة المتتالية الوسطى.

مبرهنة 2.6 (مبرهنة المتتالية الوسطى). *إذا وُجد في* **G3c** *برهان π لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ تكون فيه كل صيغ في Γ وΔ سوَرية المقدمة، وُجد برهان π' يحتوي متتالية $\Pi \Rightarrow \Lambda$ بحيث تكون كل الاستدلالات تحتها سوَرية، وكل الاستدلالات فوقها قضوية.*

برهان. عرّف رتبة الاستدلال السُّوَري في π بأنها عدد الاستدلالات القضوية الواقعة تحته، وعرّف رتبة π، أي $o(\pi)$، بأنها مجموع رتب كل استدلالاته السُّوَرية. إذا كان $o(\pi) = 0$، لم يكن تحت أي استدلال سُوَري استدلال قضوي، فنكون قد انتهينا: لما كانت لكل الاستدلالات السُّوَرية مقدمة واحدة، وُجد استدلال سُوَري أعلى وحيد، ومقدمته هي المتتالية الوسطى.

وإذا كان $o(\pi) > 0$، فاختر أدنى استدلال سُوَري رتبته > 0. ولأن رتبته موجبة، فلا بد من وجود استدلال قضوي تحته. ولأنه أدنى استدلال سُوَري من هذا القبيل، لا يمكن أن تكون نتيجته مقدمة لاستدلال سُوَري؛ وإلا كان ذلك الاستدلال السُّوَري الثاني الأدنى تحته استدلال قضوي أيضًا. ونميز الحالات الكثيرة بحسب نوع الاستدلال السُّوَري ونوع الاستدلال القضوي الواقع تحته. ولأن متتالية النهاية لا تتألف إلا من صيغ سوَرية المقدمة، لا يمكن أن تكون الصيغة الرئيسة للاستدلال السُّوَري فعالة في الاستدلال القضوي التالي. وإلا كان لصيغة ذلك الاستدلال الرئيسة سور في نطاق رابط قضوي. وبخاصية صيغة الجزئية، لزم أن تكون هذه صيغة جزئية من صيغة في متتالية النهاية. ومن ثم تكون صيغة الرئيسة للاستدلال السُّوَري عنصر من سياق الاستدلال القضوي الأدنى.

وفيما يأتي مثالان:

أولًا، افترض أن لدينا $\forall\mathrm{R}$ ينتهي في المقدمة اليمنى لـ $\to\mathrm{L}$. عندئذ ينتهي برهان الجزئي المعني من π بـ برهان الجزئي π_1:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \psi\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \varphi(c)\end{array}}{\chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}}{\psi \to \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x)}\,\to\mathrm{L}$$

يمكننا افتراض أن π منتظم، ومن ثم لا يظهر المتغير المميز c خارج π_3؛ وبوجه خاص لا يظهر في $\psi \to \chi$ ولا في π_2. والآن تأمل البرهان π_1':

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \varphi(c), \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \varphi(c)\end{array}}{\psi \to \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \varphi(c)}\,\to\mathrm{L}}{\psi \to \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \forall x\,\varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

حيث ينتج π_2' من π_2 بإضعافه بـ$\varphi(c)$ في اليمين. (ولا يضيف ذلك أي استدلال، وبوجه خاص لا يضيف استدلالات سوَرية قد تؤثر في الرتبة. كما أنه لا يخل بأي شرط لمتغير مميز في π_2، إذ لا يُستخدم أي ثابت في $\varphi(c)$ متغيرًا مميزًا في π_2.) ويظل شرط المتغير المميز في $\forall\mathrm{R}$ متحققًا، لأن c لا تظهر في $\psi \to \chi$.

نستدعي مقبولية التقليص فنحصل على برهان π_1'' لـ $\psi \to \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x)$. ولم يغير برهان مقبولية CR لـ$\forall x\,\varphi(x)$، ولا برهان قابلية $\forall\mathrm{R}$ للعكس المستخدم فيه، رتبة أي استدلال؛ فقد حذفا استدلالات في أقصى الأحوال. ولذلك لا توجد استدلالات سوَرية في π_1'' أكثر مما في π_1، ولكل استدلال سُوَري في π_1'' عدد الاستدلالات القضوية نفسه تحته كما للاستدلال المقابل في π_1، باستثناء $\forall\mathrm{R}$ الأخير: كان تحته $\to\mathrm{L}$ في π، وقد نقلناه إلى فوقه في π_1''. استبدل π_1'' بـπ_1 في π. ويكون للبرهان الناتج رتبة أدنى، لأن رتبة استدلال $\forall\mathrm{R}$ على الأقل نقصت بمقدار 1. ثم طبّق فرض الاستقراء.

والحالات التي يكون فيها الاستدلال السُّوَري هو $\exists$R أسهل، إذ لا نحتاج إلى التقليص ولا إلى القلق بشأن شرط متغير مميز. فافترض مثلًا أن $\exists$R يتبعه $\wedge$R، وهذه المرة بوصفه المقدمة اليسرى. يكون برهان الجزئي المعني هو π_1:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\,\varphi(x), \varphi(t), \psi\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\,\varphi(x), \psi}\,\exists\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\,\varphi(x), \chi\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\,\varphi(x), \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

استبدل π_1' بـπ_1 في π:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\,\varphi(x), \varphi(t), \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3'\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\,\varphi(x), \varphi(t), \chi\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\,\varphi(x), \varphi(t), \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\,\varphi(x), \psi \wedge \chi}\,\exists\mathrm{R}$$

حيث ينتج π_3' من π_3 بإضعافه بـ$\varphi(t)$ في اليمين. ولا يتضمن هذا الإضعاف إلا إضافة $\varphi(t)$ إلى يمين كل متتالية في π_3، فلا يغير رتبة أي استدلال سُوَري. وتكون رتب الاستدلالات السُّوَرية في π' كما هي في π، سوى أن رتبة استدلال $\exists$R الذي بُدّل موضعه مع $\wedge$R نقصت بمقدار 1. فينطبق فرض الاستقراء. $\square$

صف الحالتين في برهان مبرهنة 2.6 اللتين ينتهي في إحداهما $\exists$L في مقدمة $\rightarrow$R، وينتهي في الأخرى $\forall$L في المقدمة اليسرى لـ$\vee$L.

برهان مبرهنة هيربراند. افترض أن π ينتهي بـ$\Rightarrow \exists x\,\psi(x)$. وبفضل مبرهنة 2.6 نستطيع تحويل π إلى برهان π' ذي متتالية وسطى S، ولا بد أن تكون على الصورة

$$\Rightarrow \exists x\,\psi(x), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n).$$

ولأن كل الاستدلالات فوق S قضوية، لا يمكن أن تكون $\exists x\, \psi(x)$ رئيسة في استدلال فوق S. ولأنها ليست ذرية، لا يمكن أن تكون رئيسة في مسلّمة. ولأن $\exists x\, \psi(x)$ لا يمكن أن تكون صيغة جزئية حقيقية من $\psi(t_1)$، إذ إن $\psi(x)$ خالية من الأسوار، فلا يمكن كذلك أن تكون فعالة فوق S. ومن ثم يعطي حذف $\exists x\, \psi(x)$ من برهان الجزئي المنتهي بـS برهان صحيحًا لـ$\Rightarrow \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)$، ومنه يمكن الحصول على برهان لـ$\Rightarrow \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$ بتطبيق $\vee$R عدد $n-1$ من المرات. $\square$

2.4 تطعيم براهين

براهين في **N1c** و**N1i** هي براهين لصيغ φ من فروض ψ. افترض أن لـψ نفسها برهان. فكيف نضم برهان ψ إلى برهان φ من ψ لنحصل على برهان لـφ لا يستخدم الفرض ψ؟

أحد الخيارات أن نحذف الفرض ψ من برهان φ بتطبيق $\to$Intro. ثم يمكننا ضم برهان الناتج لـ$\psi \to \varphi$ إلى برهان ψ لنحصل على

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi \to \varphi}\,\to\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi}\,\to\text{Elim}$$

وهذا مباشر، لكنه غير أنيق بعض الشيء: فلماذا نُدخل $\to$ لمجرد حذفه فورًا؟ ينبغي أن يكون تجنب هذا النوع من «الالتفاف» عبر $\psi \to \varphi$ ممكنًا. (والواقع أن مضمون مبرهنة التطبيع هو أن هذه الالتفافات قابلة للتجنب دائمًا.)

وفي **N1c** و**N1i** نستطيع تجنب ذلك في هذه الحالة بسهولة: نستبدل بالفروض ψ^x برهان ψ كله. وهذا «التطعيم» لبراهين على فروض براهين أخرى مفيد، ولذلك نسجله في تعريف.

تعريف 2.7. إذا كان δ_1 برهان في **N1c** (أو برهان في **N1i**) لـφ من الفرض المفتوح ψ^x، وكان δ_2 برهان في **N1c** (أو برهان في **N1i**) لـψ، فإن $\delta_1[\delta_2/\psi^x]$ هو ناتج استبدال δ_2 بكل ظهور غير مبرأ للفرض ψ^x في δ_1.

إذا لم تكن لدى δ_1 وδ_2 صيغ فرض مختلفة تحمل العلامة نفسها، ولم يحتو أي فرض مفتوح في δ_2 متغيرًا مميزًا من δ_1، كان $\delta_1[\delta_2/\psi^x]$ الناتج برهان صحيحًا، وكانت فروضه المفتوحة هي فروض δ_1 مع فروض δ_2. وعند تطعيم براهين تتحقق هذه الشروط عادة. يتحقق الأول متى كان δ_1 وδ_2 برهانين جزئيين من برهان أكبر. وإذا لم يتحقق الثاني، استطعنا إعادة تسمية المتغيرات المميزة في δ_1 حتى يتحقق.

وينطبق تعريف مقابل على **N2c** و**N2i**.

تعريف 2.8. إذا كان δ_1 برهان في **N2c** (أو برهان في **N2i**) لـ$x : \psi, \Gamma_1 \Rightarrow \varphi$، وكان δ_2 برهان في **N2c** (أو برهان في **N2i**) لـ $\Gamma_2 \Rightarrow \psi$، فإن $\delta_1[\delta_2/x : \psi]$ هو ناتج استبدال δ_2 بكل مسلّمة $x : \psi \Rightarrow \psi$ في δ_1، وإضافة Γ_2 إلى سياق كل متتالية تقع تحت تلك المسلّمات.

قضية 2.9. *إذا كان* $\delta_1 \vdash x : \psi, \Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ و $\delta_2 \vdash \Gamma_2 \Rightarrow \psi$، *فإن* $\delta_1[\delta_2/x : \psi] \vdash \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi$، *بشرط ألا يظهر أي متغير مميز من* δ_1 *في* Γ_2.

برهان. بالاستقراء على $\mathrm{ht}(\delta_1)$. □

2.5 مقدمة

الاستنباط الطبيعي عائلة من أنظمة برهان، لكل رابط منطقي أو سور فيها استدلالان: أحدهما «يُدخل» العامل، وهو قاعدة إدخال، والآخر «يحذف» العامل، وهو قاعدة حذف. فمثلًا تكون نتيجة $\to$Intro صيغ من الصورة $\varphi \to \psi$، وتكون مقدمات $\to$Elim صيغ من الصورة $\varphi \to \psi$.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

قدم غيرهارد غنتسن وستانيسواف ياشكوفسكي أول نسختين من الاستنباط الطبيعي في ثلاثينيات القرن العشرين. ونظام غنتسن هو الذي يناقشه منظّرو البرهان غالبًا، أما نظام ياشكوفسكي فكان أصل الأنظمة الأوسع استخدامًا في التدريس. ويمكن في النظامين البدء بفروض، وهي صيغ لا يلزم أن نبرهن، لكن يمكن استخدامها في برهنة صيغ أخرى. وقد يعتمد برهان كامل على فروض كهذه؛ ولأنها غير مبرهنة، فلا يثبت برهان نتيجته، أي صيغة نهايته، بل يثبت فقط أن النتيجة تلزم من الفروض.

لبعض قواعد الاستدلال نتائج لا تعود معتمدة على بعض الفروض؛ فهي «تبرئ» الفروض. فقاعدة $\to$Intro مثلًا تأخذ برهان للنتيجة ψ من الفرض φ، وتكون نتيجتها $\varphi \to \psi$. ولا يعود برهان المنتهي بـ$\varphi \to \psi$ معتمدًا على φ؛ فقد بُرئ الفرض φ. وفي أنظمة غنتسن تكون براهين أشجارًا من صيغ، وتكون الفروض أعلى صيغ، وتحمل قواعد مثل $\to$Intro علامات تدل على الفروض المبرأة. أما في أنظمة ياشكوفسكي فتُفصل، بطريقة ما، أجزاء برهان المعتمدة على فرض؛ فقد تُزاح خلف خط رأسي أو توضع في صندوق، ويكون الفرض φ المراد تبرئته وتالي الشرط ψ أول سطر في الصندوق وآخره، بينما تقع نتيجة $\to$Intro، أي $\varphi \to \psi$، خارج الصندوق.

وتُسمى الأنظمة «طبيعية» لأن قواعد الاستدلال تحاكي الطريقة التي نستدل بها طبيعيًا، أو التي يستدل بها الرياضيون على الأقل. فلإثبات نتيجة افتراضية، أي شرط، نفترض المقدّم ونستخدمه لبرهنة التالي. وهذه هي $\to$Intro. وإذا عرفنا الشرط $\varphi \to \psi$ ومقدمه φ، استنتجنا ψ. وهذه هي $\to$Elim. ونستخدم البرهان بالحالات لنبين أن نتيجة ما تلزم بافتراض الفصل $\varphi \vee \psi$. وهذه هي $\vee$Elim. ولبرهنة دعوى عامة $\forall x\, \varphi(x)$ نبرهن $\varphi(c)$ لثابت اعتباطي c. وهذه هي $\forall$Intro. وهلم جرًا.

وهذا مثلًا برهان بسيط لـ$\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ في الاستنباط الطبيعي على طريقة غنتسن:

$$x\,\dfrac{\dfrac{[\varphi]^x}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}}{\varphi \to (\varphi \vee \psi)}\,\to\text{Intro}$$

يبدأ بالفرض φ، ويستخدم $\vee$Intro لاستنتاج $\varphi \vee \psi$، ثم $\to$Intro لاستنتاج $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$. ويبرئ استدلال $\to$Intro الفرض φ، وهو ما تدل عليه العلامة x.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

يفضل منظّرو البرهان أنظمة غنتسن الأصلية التي تعمل بأشجار من صيغ، مع أن لأحد تنويعاتها أهمية في نظرية البرهان أيضًا. يبين برهان لـφ من الفروض Γ أن φ تلزم من Γ، أي $\Gamma \vDash \varphi$. ويمكن قراءة قواعد الاستدلال الطبيعي قراءة طبيعية بوصفها تخبرنا بشيء عن علاقات اللزوم هذه؛ فمثلًا تقول $\rightarrow$Intro إنه إذا كان $\Gamma + \varphi \vDash \psi$، كان $\Gamma \vDash \varphi \rightarrow \psi$. ومن الطبيعي أن نصوغ القواعد مباشرة بحيث تعمل على الفروض والنتيجة اللازمة منها معًا في مقدمات قاعدة الاستدلال ونتيجتها، أي أن تعمل على المتتاليات $\Gamma \Rightarrow \varphi$. ويأخذ البرهان البسيط السابق في نظام كهذا الصورة الآتية:

$$\dfrac{\dfrac{x : \varphi \;\Rightarrow\; \varphi}{x : \varphi \;\Rightarrow\; \varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}}{\Rightarrow\; \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)}\,x\,\rightarrow\text{Intro}$$

وكما ترى، القواعد هي نفسها: فهي تعمل على صيغة الواقعة إلى يمين $\Rightarrow$، أما صيغ الواقعة إلى اليسار فلا تفعل إلا تعداد الفروض التي تعتمد عليها في كل خطوة.

ولا تكون المجموعة الكاملة من أزواج قواعد إدخال و حذف تامة للمنطق الكلاسيكي بمفردها. فعلينا إضافة قاعدتين تتعلقان بـ$\bot$. الأولى «قاعدة المحال الحدسية» $\bot_I$، أو «الانفجار»، وتقول إننا نستطيع استنتاج أي شيء من $\bot$. والثانية مبدأ البرهان غير المباشر الكلاسيكي $\bot_C$، أو «قاعدة المحال الكلاسيكية»، وتقول إننا إذا استطعنا أن نبرهن $\bot$ من $\neg\varphi$، فنستطيع عندئذ أن نبرهن φ. وإذا حذفنا $\bot_C$ حصلنا على نظام مناسب للمنطق الحدسي، وإذا حذفنا القاعدتين حصلنا على ما يسمى «المنطق الأدنى».

سنناقش الاستنباط الطبيعي على طريقة غنتسن للمنطقين الكلاسيكي والحدسي، أي النظامين **N1c** و**N1i**. أما **N2c** و**N2i** فهما النظامان المقابلان اللذان يعملان على المتتاليات $\Gamma \Rightarrow \varphi$ بدلًا من صيغ المفردة φ.

باب 3

الاستنباط الطبيعي

3.1 انتظام براهين والتعويض

تُحدث قواعد الأسوار بعض التعقيدات بسبب «شروط المتغير المميز» التي تنطبق على $\exists$Elim و$\forall$Intro. ويمكن معالجة معظم هذه التعقيدات بضمان عدم إعادة استخدام رمز ثابت c في هذه الاستدلالات. فلنقدم التعريف الآتي.

تعريف 3.1. يكون برهان الاستنباط الطبيعي δ منتظمًا إذا

1. لم يُستخدم أي متغير مميز a متغيرًا مميزًا في أكثر من استدلال واحد لـ$\exists$Elim أو $\forall$Intro، و
2. إذا كان a المتغير المميز في استدلال $\exists$Elim أو $\forall$Intro، لم يظهر إلا في برهان الجزئي المباشر المؤدي إلى المقدمة الصغرى أو إلى المقدمة، على الترتيب.

قضية مساعدة 3.2. *إذا كان δ منتظمًا، وينتهي بـχ، وكان c رمز ثابت لا يُستخدم متغيرًا مميزًا في δ، وكان t حدًا لا يحتوي أي متغير مميز من δ، فإن $\delta[t/c]$ الناتج من δ باستبدال كل ظهور لـc بـ t هو برهان منتظم. وتكون صيغة نهاية $\delta[t/c]$ هي $\chi[t/c]$. وإذا كان φ^x فرضًا مفتوحًا في δ، كان $\varphi[t/c]^x$ فرضًا مفتوحًا في $\delta[t/c]$.*

برهان. بالاستقراء على $\mathrm{ht}(\delta)$. إذا كان $\mathrm{ht}(\delta) = 0$، لم يتألف إلا من الفرض φ^x. وعندئذ يكون $\delta[t/c]$ هو $\varphi[t/c]^x$.

وإذا كان $\mathrm{ht}(\delta) > 0$، ميزنا الحالات بحسب آخر استدلال في δ. وحالات قواعد الروابط القضوية سهلة فنتركها تمارين. ونتأمل الحالات التي ينتهي فيها δ باستدلال سُوَري.

1. إذا كان الاستدلال الأخير $\forall$Intro، كان δ على الصورة

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'\\ \varphi(a,c)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,c)}\,\forall\mathrm{Intro}$$

وبفرض الاستقراء يكون $\delta'[t/c]$ برهان منتظمًا لـ $\varphi(a,t)$. ولأن a متغير مميز في δ، فلا تظهر a في t. ومن ثم يكون الاستدلال الأخير في $\delta[t/c]$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'[t/c]\\ \varphi(a,t)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,t)}\,\forall\mathrm{Intro}$$

صحيحًا: لما كان t لا يحتوي a، لم تحتوها النتيجة ولا أي فرض مفتوح.

2. إذا كان الاستدلال الأخير $\forall$Elim، كان δ على الصورة

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'\\ \forall x\,\varphi(x,c)\end{array}}{\varphi(s(c),c)}\,\forall\mathrm{Elim}$$

وبفرض الاستقراء يكون $\delta'[t/c]$ برهان منتظمًا لـ $\forall x\,\varphi(x,t)$. (وقد يحتوي الحد $s(c)$ في النتيجة c، وقد لا يحتويها.) ويكون الاستدلال الأخير في $\delta[t/c]$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'[t/c]\\ \forall x\,\varphi(x,t)\end{array}}{\varphi(s(t),t)}\,\forall\text{Elim}$$

صحيحًا، ويكون $\varphi(s(t),t) \equiv \varphi(s(c),c)[t/c]$. وحالة $\exists$Intro مماثلة.

3. إذا كان الاستدلال الأخير $\exists$Elim، كان δ على الصورة

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1'\\ \exists x\,\varphi(x,c)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi(a,c)]^x\\ \vdots\,\delta_2'\\ \chi\end{array}}{\chi}\,x\,\exists\text{Elim}$$

وبفرض الاستقراء يكون $\delta_1'[t/c]$ و $\delta_2'[t/c]$ براهين منتظمين: الأول لـ $\exists x\,\varphi(x,t)$، والثاني لـ$\chi[t/c]$ من الفرض المفتوح $\varphi(a,t)^x$. ولأن a متغير مميز في δ، فلا تظهر a في t. ومن ثم يكون الاستدلال الأخير في $\delta[t/c]$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1'[t/c]\\ \exists x\,\varphi(x,t)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi(a,t)]^x\\ \vdots\,\delta_2'[t/c]\\ \chi[t/c]\end{array}}{\chi[t/c]}\,x\,\exists\text{Elim}$$

صحيحًا: لا تظهر a في المقدمة الكبرى $\exists x\,\varphi(x,t)$، ولا في النتيجة $\chi[t/c]$، ولا في أي فرض مفتوح سوى الفرض المبرأ $\varphi(a,t)^x$. $\square$

قضية 3.3. *إذا كان δ برهان في* **N1c** *أو* **N1i**، *وُجد برهان منتظم δ' له البنية نفسها، وبوجه خاص ارتفاع نفسه، ولا يختلف عن δ إلا باستبدال المتغيرات المميزة.*

برهان. لأغراض البرهان وحده، سمِّ استدلال المتغير المميز في δ نظيفًا إذا لم يكن متغيره المميز متغيرًا مميزًا لاستدلال آخر ولم يظهر في أي موضع من δ خارج برهان الاستدلال الجزئي المباشر، وسمّه متسخًا في غير ذلك. وليكن n عدد استدلالات المتغير المميز المتسخة في δ. نبيّن، بالاستقراء على n، إمكان تحويل δ إلى برهان المنتظم المطلوب δ'. فإذا كان $n = 0$، كانت كل استدلالات المتغير المميز في δ نظيفة، ومن ثم كان δ منتظمًا ولم يبق ما نبرهنه. وإلا فاختر أعلى استدلال لمتغير مميز، وليكن مثلًا $\forall$Intro. يكون برهان الجزئي δ_1 من δ المنتهي به على الصورة

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \varphi(c)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x)}\,\forall\text{Intro}$$

لاحظ أن c لا تظهر في $\forall x\,\varphi(x)$ ولا في فرض مفتوح لأنها متغير مميز. ويكون البرهان δ_2 منتظمًا لأنه لا يحتوي أصلًا أي استدلال لمتغير مميز. ولتكن a رمز ثابت لا تظهر في δ. وبفضل قضية مساعدة 3.2 يكون $\delta_2[a/c]$ برهانًا منتظمًا لـ$\varphi(a)$. وبشرط المتغير المميز لا يحتوي أي فرض مفتوح في δ_2 الثابت c، ومن ثم لا يحتوي أي فرض مفتوح في $\delta_2[a/c]$ الثابت a. وهكذا يمكننا تطبيق $\forall$Intro. وإذا استبدلنا بـδ_1 في δ البرهان δ_1'،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2[a/c]\\ \varphi(a)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x)}\,\forall\text{Intro}$$

نكون قد استبدلنا باستدلال متسخ لمتغير مميز استدلالًا نظيفًا، ولا فرق إلا استبدال المتغير المميز c بـa. ويكون في البرهان الناتج $n-1$ من استدلالات المتغير المميز المتسخة، فتتبع النتيجة من فرض الاستقراء. □

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

صف الحالة في برهان قضية 3.3 التي يكون فيها أعلى استدلال لمتغير مميز هو $\exists$Elim.

لن نستند صراحة إلى القضية التي برهناها للتو، لكننا سنفترض أن كل براهين التي نتأملها منتظمة؛ فإن لم تكن كذلك استطعنا دائمًا استبدال متغيراتها المميزة لجعلها منتظمة.

تصدق قضية مساعدة 3.2 وقضية 3.3 أيضًا على **N2c** و**N2i**. ونترك البرهانين تمرينين.

3.2 القواعد وبراهين

نبدأ ببعض التعريفات وتثبيت بعض المصطلحات.

تأمل القاعدتين في **N1c** و**N1i** اللتين تذكران $\varphi \to \psi$:

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to\text{Intro} \qquad \dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\to\text{Elim}$$

قاعدة $\to$Elim بسيطة بما يكفي. تسمى صيغ الواقعة فوق الخط *المقدمات*. وتكون صيغة الواقعة في اليسار هي صيغة $\varphi \to \psi$ *الرئيسة*. ولكل قواعد حذف مقدمة من هذا النوع، تقع دائمًا في أقصى اليسار، وتسمى *المقدمة الكبرى* للاستدلال. وإذا وُجدت مقدمات أخرى، كما في هذه الحالة، سميت *مقدمات صغرى*. وتسمى مقدمات قواعد إدخال كذلك مقدمات كبرى. أما صيغة الواقعة تحت الخط فتسمى *النتيجة*.

لقاعدة $\to$Intro مقدمة واحدة فقط، والنتيجة هنا هي الصيغة الرئيسة $\varphi \to \psi$. وكل قواعد إدخال على هذا النحو: تكون النتيجة هي الصيغة الرئيسة، ويكون عاملها الرئيس هو العامل الذي يجري «إدخاله».

يعني الترميز $[\varphi]^x$ ما يأتي. في برهان، يُطبق استدلال $\to$Intro على صيغة ψ بوصفها مقدمة. وللبرهان الجزئي المنتهي بـψ عدد من صيغ الابتدائية، وتسمى فروضًا. ويكون برهان لـψ من فرض أو أكثر على الصورة φ برهان على أن φ تستلزم ψ. وعندما نطبق قاعدة $\to$Intro نستنتج $\varphi \to \psi$، ولا تعود النتيجة معتمدة على الفرض φ. وللدلالة على ذلك، تُبرأ أو تُغلق الفروض من الصورة φ في برهان الذي يتضمن استدلال $\to$Intro. وتحدد القاعدة أي الفروض يمكن تبرئتها. ففي حالة $\to$Intro ذات النتيجة $\varphi \to \psi$ تكون تلك الفروض على الصورة φ، أي توافق مقدّم الشرط. وقد يكون من المهم بيان أي الفروض تُبرأ عند أي قاعدة، ويؤدي علامة التبرئة x هذا الغرض. ومن المهم أن القواعد المبرئة للفروض لا يلزمها تبرئة كل الفروض ذات الصورة المطلوبة، بل لا يلزمها تبرئة أي فرض أصلًا. فالآتي صحيح مثلًا، مع أن $\to$Intro الأولى لا تبرئ أي فرض:

$$y\,\dfrac{x\,\dfrac{[\varphi]^y}{\psi \to \varphi}\,\to\text{Intro}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\,\to\text{Intro}$$

وعندما لا تبرئ قاعدة أي فرض نحذف علامة التبرئة ببساطة، كما فعلنا هنا.

في برهان

$$y\,\dfrac{x\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^x \qquad [\varphi]^y}{\varphi \wedge \varphi}\,\wedge\text{Intro}}{\varphi}\,\wedge\text{Elim}}{\varphi \to \varphi}\,\to\text{Intro}}{\varphi \to (\varphi \to \varphi)}\,\to\text{Intro}$$

يبرئ استدلال $\to$Intro الأول الفرض الأيسر φ^x، ويبرئ الثاني الفرض الأيمن φ^y. أي إن كل الفروض الموسومة x يبرئها $\to$Intro ذو العلامة x، وكل الفروض الموسومة y يبرئها الاستدلال الموسوم y. ولكي ينجح ذلك، من المهم أن تكون كل الفروض ذات العلامة الواحدة صيغة نفسها أيضًا.

قواعد الأسوار أعقد قليلًا. فقواعد $\exists$ في **N1i** مثلًا هي:

$$\frac{\varphi(t)}{\exists x\,\varphi(x)}\,\exists\text{Intro} \qquad {}_{x}\frac{\exists x\,\varphi(x) \qquad \begin{array}{c}[\varphi(c)]^{x}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\psi}\,\exists\text{Elim}$$

في قاعدة $\exists$Intro تكون المقدمة $\varphi(t)$، حيث t حد مغلق، أي حد بلا متغيرات. ويكون هذا الاستدلال صحيحًا، أي مطابقًا لمخطط قاعدة $\exists$Intro، إذا وجدت صيغة φ ومتغير x وحد مغلق t بحيث تكون النتيجة $\exists x\,\varphi$ والمقدمة $\varphi[t/x]$. وتتيح $\exists$Elim تبرئة فروض من الصورة $\varphi(c)$؛ أي يوجد لكل استدلال رمز ثابت c ويمكن تبرئة الفروض ذات الصورة $\varphi[c/x]$. ويجب أن تستخدم كل الفروض التي يبرئها استدلال واحد الثابت c نفسه. ويسمى هذا الثابت *المتغير المميز* لاستدلال $\exists$Elim. ولا يصح الاستدلال إلا إذا لم يظهر c في فرض مفتوح غير $\varphi(c)$ المبرأ، ولا في ψ، ولا في φ. ويسمى ذلك *شرط المتغير المميز*.

براهين في **N1c** و**N1i** أشجار منتهية من وقائع الصيغ، تُولّد استقرائيًا من الفروض بتطبيق قواعد الاستدلال. وكل ورقة فرض، قد تكون موسومة بعلامة تبرئة، وكل واقعة صيغة أخرى تلزم من صيغ الواقعة فوقها مباشرة بإحدى قواعد استدلال النظام. وإذا لم تكن واقعة صيغة بوصفها فرضًا في الشجرة فوق استدلال قد بُرئت باستدلال فوقها، سميت مفتوحة عند ذلك الاستدلال.

تعريف 3.4. تُعرّف *براهين* في **N1c** و**N1i** استقرائيًا بوصفها أشجارًا منتهية من صيغ كما يأتي:

1. كل صيغة موسومة، بمفردها، بعلامة تبرئة مثل x أو y هي برهان. وفي برهان يتألف من صيغة واحدة، تُعد صيغة فرضًا مفتوحًا.

2. إذا كانت R قاعدة ذات مقدمة أو مقدمتين أو ثلاث مقدمات φ_1 وφ_2 وφ_3، ونتيجتها φ، وكانت δ_1 وδ_2 وδ_3 براهين تنتهي بـφ_1 و φ_2 وφ_3 على الترتيب، فإن كلًا مما يأتي

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{matrix}}{\varphi}\,R \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \varphi_2\end{matrix}}{\varphi}\,R \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \varphi_2\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\,\delta_3\\ \varphi_3\end{matrix}}{\varphi}\,R$$

هو برهان، على الترتيب، بشرط توافق علامات الفروض في براهين، أي ألا تحمل صيغ مختلفة علامة التبرئة نفسها، وأن تكون الاستدلالات تطبيقات صحيحة لـR.

3. تُعد أعلى وقائع صيغة في برهان الجديد فروضًا مفتوحة لبرهان إذا كانت فروضًا مفتوحة في δ_1 أوδ_2 أوδ_3، باستثناء الوقائع التي تبرئها القاعدة. فإذا وُسمت القاعدة بـx، أو بـy x، كانت الوقائع المبرأة: في $\to$Intro و$\neg$Intro كل الفروض المفتوحة في δ_1 الموسومة x؛ وفي $\exists$Elim كل الفروض المفتوحة الموسومة x في δ_2؛ وفي $\vee$Elim كل الفروض المفتوحة الموسومة x في δ_2 وكل الفروض المفتوحة الموسومة y في δ_3.

تسمى براهين المستخدمة في البناء الاستقرائي لـ برهان براهين *الجزئية* له. وتسمى براهين الجزئية المنتهية بمقدمات استدلال براهين *الجزئية المباشرة* للاستدلال. وترد قواعد **N1c** و**N1i** في جدول 3.1.

تعريف 3.5. يُعرّف *ارتفاع* $\mathrm{ht}(\delta)$ لـ برهان δ استقرائيًا كما يأتي.

1. إذا تألف δ من فرض، كان $\mathrm{ht}(\delta) = 0$.

2. إذا انتهى δ باستدلال ذي مقدمة واحدة وبرهان جزئي مباشر δ_1، كان $\mathrm{ht}(\delta) = \mathrm{ht}(\delta_1) + 1$.

3. إذا انتهى δ باستدلال ذي مقدمتين وبراهين جزئية مباشرة δ_1 وδ_2، كان $\mathrm{ht}(\delta) = \max(\mathrm{ht}(\delta_1), \mathrm{ht}(\delta_2)) + 1$.

$$\rightarrow\text{Intro}\ \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\,x \qquad \rightarrow\text{Elim}\ \dfrac{\varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

$$\wedge\text{Elim}_1\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$$

$$\wedge\text{Intro}\ \dfrac{\psi \qquad \varphi}{\varphi \wedge \psi} \qquad \wedge\text{Elim}_2\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

$$\vee\text{Intro}_1\ \dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$$

$$\vee\text{Intro}_2\ \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi} \qquad \vee\text{Elim}\ \dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^y\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \varphi \vee \psi}{\chi}\,x\,y$$

$$\neg\text{Intro}\ \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,x \qquad \neg\text{Elim}\ \dfrac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot}$$

$$\forall\text{Intro}\ \dfrac{\varphi(a)}{\forall x\, \varphi(x)} \qquad \forall\text{Elim}\ \dfrac{\forall x\, \varphi(x)}{\varphi(t)}$$

$$\exists\text{Intro}\ \dfrac{\varphi(t)}{\exists x\, \varphi(x)} \qquad \exists\text{Elim}\ \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi(a)]^x\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \exists x\, \varphi(x)}{\chi}\,x$$

$$\bot_I\ \dfrac{\bot}{\varphi} \qquad \bot_C\ \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^x\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,x$$

جدول 3.1: قواعد **N1i** و**N1c**. في $\forall$Intro يجب ألا يظهر رمز ثابت a في النتيجة ولا في أي فرض مفتوح. وفي $\exists$Elim يجب ألا يظهر a في المقدمة الكبرى ولا في النتيجة، ولا في أي فرض مفتوح عدا الفرض $\varphi(a)^x$ الذي يبرئه الاستدلال. ولا يتضمن **N1i** القاعدة $\bot_C$.

4. إذا انتهى δ بـ$\vee$Elim وبراهين جزئية مباشرة δ_1 وδ_2 وδ_3، كان $\mathrm{ht}(\delta) = \max(\mathrm{ht}(\delta_1), \mathrm{ht}(\delta_2), \mathrm{ht}(\delta_3)) + 1$.

إذا كان للمتتالية S برهان ارتفاعه $\leq n$، كتبنا $\vdash_n S$.

مثال 3.6. في **N1i**، تُعد أي صيغة برهان من نفسها بوصفها فرضًا مفتوحًا. ومن ثم

$$\varphi \wedge \psi^x$$

هو برهان δ_1، وارتفاعه 0. ومن δ_1 نستطيع الحصول على براهين اثنين δ_2 و δ_3 بتطبيق إحدى نسختي $\wedge$Elim:

$$\dfrac{\varphi \wedge \psi^x}{\psi}\wedge\mathrm{Elim}_2 \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi^x}{\varphi}\wedge\mathrm{Elim}_1$$

والبرهان الجزئي المباشر للاستدلال الأخير في كل من δ_2 و δ_3 هو δ_1. وفي كل برهان منهما تكون واقعة $\varphi\wedge\psi$ فرضًا مفتوحًا. ولدينا $\mathrm{ht}(\delta_2) = \mathrm{ht}(\delta_3) = 1$.

تتطلب قاعدة $\wedge$Intro مقدمتين من الصورتين ψ وφ لتسويغ نتيجة من الصورة $\psi \wedge \varphi$. ولذلك يكون الآتي برهان δ_4:

$$\delta_2\left\{\dfrac{\dfrac{\varphi \wedge \psi^x}{\psi}\wedge\mathrm{Elim}_2 \quad \dfrac{\varphi \wedge \psi^x}{\varphi}\wedge\mathrm{Elim}_1}{\psi \wedge \varphi}\wedge\mathrm{Intro}\right\}\delta_3$$

وارتفاعه $\mathrm{ht}(\delta_4) = \max(\mathrm{ht}(\delta_2), \mathrm{ht}(\delta_3)) + 1 = \max(1, 1) + 1 = 2$. وله واقعتان من $\varphi \wedge \psi$ بوصفهما فرضين، وكلتاهما مفتوحة.

وأخيرًا نستطيع تطبيق $\rightarrow$Intro للحصول على δ_5:

$$\delta_2\left\{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\psi}\wedge\mathrm{Elim}_2 \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\varphi}\wedge\mathrm{Elim}_1}{\psi \wedge \varphi}\wedge\mathrm{Intro}\right\}\delta_3$$

$$x\,\dfrac{\psi \wedge \varphi}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)}\rightarrow\mathrm{Intro}$$

وارتفاعه $\mathrm{ht}(\delta_4) + 1 = 3$. ويبرئ استدلال $\to$Intro كل وقائع الفروض من الصورة $\varphi \wedge \psi$ الموسومة x، أي الفرضين اللذين كانا مفتوحين من قبل في البرهان الجزئي المباشر. ولأنهما الفرضان الوحيدان لـδ_5، فلا تكون له فروض مفتوحة، ومن ثم يكون برهان لـصيغة نهايته $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$.

3.3 الاستنباط الطبيعي بالمتتاليات: N2c وN2i

يبين برهان δ في **N1c** أو **N1i** أن صيغة نهايته φ تلزم من فروضه المفتوحة. وإذا كانت Γ مجموعة صيغ ψ التي تظهر ψ^x منها فرضًا مفتوحًا في δ، أمكننا كتابة ذلك $\delta \vdash \Gamma \Rightarrow \varphi$. وهذا يرجح إمكان صياغة نظام للاستنباط الطبيعي يعمل على المتتاليات أيضًا. ففي نظام كهذا تحمل كل متتالية معلومة الفروض المفتوحة التي تعتمد عليها صيغة الواقعة في اليمين، أي الفروض المفتوحة في برهان الجزئي المنتهي بمتتالية. وهذا هو الاستنباط الطبيعي بالمتتاليات، أو الاستنباط الطبيعي «على طريقة المتتاليات»، ونسمي النظامين الناتجين **N2c** و**N2i**.

ولتقريب المطابقة بين **N1** و**N2**، لنجعل المجموعات Γ في اليسار مؤلفة من صيغ موسومة $x : \psi$. ولأن قواعد **N1** لا تعمل إلا على صيغ في المقدمات، أي صيغ نهاية براهين الجزئية المباشرة، فلا تعمل قواعد **N2** إلا على تالي المتتالية. ومن ثم نستطيع تسمية الصيغ الموسومة الواقعة إلى يسار المتتاليات *السياق* فحسب.

وبدلًا من الفروض، تكون أعلى متتاليات براهين **N2** مسلّمات من الصورة

$$x : \varphi \Rightarrow \varphi.$$

وتطابق القواعد قواعد **N1** تمامًا، وترد في جدول 3.2.

ولأن علينا أن نجيز، كما نجيز في **N1c** و**N1i**، أن قواعد $\to$Intro و$\neg$Intro و$\vee$Elim و$\exists$Elim قد تبرئ فروضًا وقد لا تبرئها بالفعل، فإننا نجيز التطبيقات الصحيحة للقواعد المقابلة في **N2c** و**N2i** حتى عندما لا تكون صيغ السياق المقابلة φ وψ و$\varphi(a)$ موجودة في سياق المقدمة المعنية.

$$\rightarrow\text{Intro}\ \frac{\psi x : \varphi, \Gamma \ \Rightarrow}{\varphi \rightarrow \psi\Gamma \ \Rightarrow} \qquad \rightarrow\text{Elim}\ \frac{\varphi\Gamma_2 \ \Rightarrow \qquad \varphi \rightarrow \psi\Gamma_1 \ \Rightarrow}{\psi\Gamma_1, \Gamma_2 \ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Elim}_1\ \frac{\varphi \wedge \psi\Gamma \ \Rightarrow}{\varphi\Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Intro}\ \frac{\psi\Gamma_2 \ \Rightarrow \qquad \varphi\Gamma_1 \ \Rightarrow}{\varphi \wedge \psi\Gamma_1, \Gamma_2 \ \Rightarrow} \qquad \wedge\text{Elim}_2\ \frac{\varphi \wedge \psi\Gamma \ \Rightarrow}{\psi\Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\vee\text{Intro}_1\ \frac{\varphi\Gamma \ \Rightarrow}{\varphi \vee \psi\Gamma \ \Rightarrow} \qquad \vee\text{Intro}_2\ \frac{\psi\Gamma \ \Rightarrow}{\varphi \vee \psi\Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\vee\text{Elim}\ \frac{\chi y : \psi, \Gamma_3 \ \Rightarrow \qquad \chi x : \varphi, \Gamma_2 \ \Rightarrow \qquad \varphi \vee \psi\Gamma_1 \ \Rightarrow}{\chi\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \ \Rightarrow}$$

$$\neg\text{Intro}\ \frac{\bot x : \varphi, \Gamma \ \Rightarrow}{\neg\varphi\Gamma \ \Rightarrow} \qquad \neg\text{Elim}\ \frac{\varphi\Gamma_2 \ \Rightarrow \qquad \neg\varphi\Gamma_1 \ \Rightarrow}{\bot\Gamma_1, \Gamma_2 \ \Rightarrow}$$

$$\forall\text{Intro}\ \frac{\varphi(a)\Gamma \ \Rightarrow}{\forall x\, \varphi(x)\Gamma \ \Rightarrow} \qquad \forall\text{Elim}\ \frac{\forall x\, \varphi(x)\Gamma \ \Rightarrow}{\varphi(t)\Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\exists\text{Intro}\ \frac{\varphi(t)\Gamma \ \Rightarrow}{\exists x\, \varphi(x)\Gamma \ \Rightarrow} \qquad \exists\text{Elim}\ \frac{\chi x : \varphi(a), \Gamma_2 \ \Rightarrow \qquad \exists x\, \varphi(x)\Gamma_1 \ \Rightarrow}{\chi\Gamma_1, \Gamma_2 \ \Rightarrow}$$

$$\bot_I\ \frac{\bot\Gamma \ \Rightarrow}{\varphi\Gamma \ \Rightarrow} \qquad \bot_C\ \frac{\bot x : \neg\varphi, \Gamma \ \Rightarrow}{\varphi\Gamma \ \Rightarrow}$$

جدول 3.2: قواعد **N2c** و**N2i**. في $\forall$Intro و $\exists$Elim يجب ألا يظهر رمز ثابت a في متتالية النتيجة. وتمثل Γ_i مجموعات من صيغ الموسومة $x : \varphi$. ولا يتضمن **N2i** القاعدة $\bot_C$.

قضية 3.7. إذا كان δ برهان في **N1c** أو **N1i** لـφ، وُجد برهان δ' لـ$\Gamma \Rightarrow \varphi$ في **N2c**، أو في **N2i**، حيث Γ مجموعة كل $x : \psi$ التي يكون فيها ψ^x فرضًا مفتوحًا في δ.

برهان. بالاستقراء على $n = \mathrm{ht}(\delta)$. إذا كان $n = 0$، كان δ فرضًا مفتوحًا وحيدًا φ^x. وعندئذ $\Gamma = \{x : \varphi\}$، وتكون $\Gamma \Rightarrow \varphi$ مسلّمة في **N2c** أو **N2i**.

وإذا كان $n > 0$، ميزنا الحالات بحسب الاستدلال الأخير في δ. ونناقش حالة واحدة فقط، ونترك الباقي تمارين.

افترض أن الاستدلال الأخير $\to$Intro. عندئذ ينتهي δ بـ

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi\end{array}}{\psi \to \chi}\to\text{Intro}$$

وبفرض الاستقراء يوجد برهان δ_1' في **N2c**، أو في **N2i**، لـ$\Gamma' \Rightarrow \chi$، حيث Γ' هي الفروض الموسومة المفتوحة في δ_1. فإذا كان ψ^x فرضًا مفتوحًا في δ_1، بُرئ عند استدلال $\to$Intro، وكانت فروض δ المفتوحة هي $\Gamma = \Gamma' \setminus \{x : \psi\}$. وبعبارة أخرى، يكون δ_1' برهان لـ$x : \psi, \Gamma \Rightarrow \chi$، ويمكننا اتخاذ δ' هو

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1'\\ x : \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \chi\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \psi \to \chi}\to\text{Intro}$$

وإذا لم يكن ψ^x فرضًا مفتوحًا في δ_1، لم يبرئ $\to$Intro فرضًا، وكانت الفروض المفتوحة في δ وδ_1 واحدة. ولأن وجود صيغة السياق $x : \psi$ في

مقدمة $\to$Intro ليس لازمًا في **N2c** و**N2i**، أمكننا اتخاذ δ' هو

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1'\\ \Gamma \Rightarrow \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \psi \to \chi}\to\text{Intro}$$

والحالات التي ينتهي فيها δ بقاعدة أخرى مماثلة. □

قضية 3.8. *إذا كان δ برهان في **N2c** أو **N2i** لـ $\Gamma \Rightarrow \varphi$، وُجد برهان δ' في **N1c**، أو في **N1i**، تكون صيغة نهايته φ، وفروضه المفتوحة ψ^x لكل $x : \psi \in \Gamma$.*

برهان. نسير مرة أخرى بالاستقراء على ارتفاع n للـδ. فإذا كان $n = 0$، كان δ المسلّمة $x : \varphi \Rightarrow \varphi$. ويكون برهان δ' هو الفرض φ^x.

وإذا كان $n > 0$، ميزنا الحالات بحسب الاستدلال الأخير في δ. فمثلًا، إذا كان ذلك الاستدلال $\to$Intro، انتهى δ بـ

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ x : \psi, \Gamma \Rightarrow \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \psi \to \chi}\to\text{Intro} \qquad \text{أو} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma \Rightarrow \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \psi \to \chi}\to\text{Intro}$$

وبفرض الاستقراء يوجد برهان δ_1' في **N1c**، أو في **N1i**، لـχ. وفي الحالة الأولى يكون ψ^x فرضًا مفتوحًا في δ_1'، ولا يكون كذلك في الحالة الثانية. ويمكننا

اتخاذ برهان δ' هو، على الترتيب،

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta'_1\\ \chi\end{array}}{\psi\to\chi}\to\text{Intro}\qquad\text{أو}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'_1\\ \chi\end{array}}{\psi\to\chi}\to\text{Intro}$$

□

3.4 الترجمة من G2i إلى N2i

مقدّمات المتتاليات في **G2i** مجموعات متعددة Γ من صيغ، بينما مقدّمات المتتاليات في **N2i** مجموعات Γ' من الصيغ الموسومة، بحيث لا يظهر كل وسم إلا مرة واحدة. لنقل إن مجموعة Γ' من صيغ الموسومة *تقابل* المجموعة المتعددة Γ إذا كان، لكل صيغة φ، عدد عناصر المجموعة Γ' التي صورتها $x:\varphi$ أصغر من أو يساوي تعددية φ (أي عدد نسخ φ) في Γ.

قضية 3.9. *إذا كان* $\mathbf{G2i}+\mathrm{Cut}\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$، *فإن* $\mathbf{N2i}\vdash\Gamma'\Rightarrow\chi$، *حيث* $\chi\equiv\bot$ *إذا كانت* Δ *خالية، و*$\chi\equiv\varphi$ *إذا كانت* $\Delta=\{\varphi\}$، *وحيث تقابل* Γ' *المجموعة* Γ.

برهان. نبيّن أنه إذا كان π برهان للمتتالية $\Gamma\Rightarrow\Delta$ في $\mathbf{G2i}+\mathrm{Cut}$، فثمة Γ' تقابل Γ وثمة برهان δ للمتتالية $\Gamma'\Rightarrow\chi$ في **N2i**. نفعل ذلك بالاستقراء في $n=\mathrm{ht}(\pi)$.

إذا كان $n=0$، فإن π مسلّمة. فإذا كانت المسلّمة $\bot\Rightarrow\bot$، كانت δ هي المسلّمة $x:\bot\Rightarrow\bot$؛ أي إن $\Gamma'=\{x:\bot\}$ و$\chi\equiv\bot$. وإذا كانت π مسلّمة من الصورة $\varphi\Rightarrow\varphi$، كانت δ هي $x:\varphi\Rightarrow\varphi$.

وإذا كان $n > 0$، انتهى π بقاعدة R. يضمن فرض الاستقراء وجود براهين في **N2i** لمتتاليات تقابل مقدمات تلك القاعدة. وبإعادة الوسم عند الحاجة، نستطيع أن نفترض أن وسوم التفريغ والوسوم المقيّدة في هذه البراهين متميزة، وأنها متباينة بعضها عن بعض بين براهين المقدمات المختلفة أو المنسوخة، وأن الوسم x لا يظهر فوق استدلال يفرّغه إلا إذا كان ذلك الاستدلال يفرّغه بالفعل. ثم نبيّن كيف يمكن جمع هذه براهين للحصول على براهين لمتتالية مناسبة $\Gamma' \Rightarrow \chi$. ونميّز الحالات بحسب R.

1. إذا كانت R هي WR، انتهى π بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{WR}$$

يعطي تطبيق فرض الاستقراء على π_1 برهان للمتتالية $\Gamma' \Rightarrow \bot$. ونطبّق $\bot_I$ لنحصل على برهان للمتتالية $\Gamma' \Rightarrow \varphi$.

2. إذا كانت R هي WL، انتهى π بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL}$$

يعطي تطبيق فرض الاستقراء على π_1 برهان للمتتالية $\Gamma' \Rightarrow \chi$، ونتخذه δ. لاحظ أنه إذا كانت Γ' تقابل Γ فهي تقابل أيضًا φ, Γ، لأن عدد الصيغ $\varphi : x$ في Γ' لا يزيد على عدد نسخ φ في Γ، ومن ثم لا يزيد أيضًا على عدد نسخها في السياق φ, Γ.

3. إذا كانت R هي CL، انتهى π بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi,\varphi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\varphi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\mathrm{CL}$$

يعطي تطبيق فرض الاستقراء على π_1 برهان هو δ_1 للمتتالية $\Pi,\Gamma' \Rightarrow \chi$، حيث $\Pi \subseteq \{x:\varphi, y:\varphi\}$. إذا كانت $\Pi = \{x:\varphi, y:\varphi\}$، فاستبدل بكل صيغ الموسومة $y:\varphi$ في δ_1 الصيغة $x:\varphi$. وبما أن x يظهر في سياق المتتالية النهائية لـ δ_1، يمكننا افتراض أن لا استدلال في δ_1 يفرّغ صيغة من الصورة $x:\psi$؛ أي إن أي $x:\psi$ في يسار متتالية ضمن δ_1 ليس فعالًا. ولذلك تظل النتيجة برهان في **N2i**.

4. إذا كانت R هي $\to$R، انتهى π بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi,\Gamma \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi\to\psi}\,\to\mathrm{R}$$

يوجد، بفرض الاستقراء، برهان δ_1 للمتتالية $x:\varphi,\Gamma' \Rightarrow \psi$ أو للمتتالية $\Gamma' \Rightarrow \psi$، حيث تقابل Γ' المجموعة Γ. نحصل على δ بإتباع δ_1 بتطبيق $\to$Intro (ويجوز أن يكون الفرض الموسوم غير مستعمل).

5. إذا كانت R هي $\to$L، انتهى π بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\varphi\to\psi,\Gamma_1,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta}\,\to\mathrm{L}$$

يعطي فرض الاستقراء براهين: برهانًا δ_1 للمتتالية $\Gamma'_1 \Rightarrow \varphi$، وبرهانًا δ_2 للمتتالية $x : \psi, \Gamma'_2 \Rightarrow \chi$ أو للمتتالية $\Gamma'_2 \Rightarrow \chi$. في الحالة الثانية يصلح δ_2 أن يكون δ. وفي الحالة الأولى نعيد تسمية جميع الصيغ ووسوم التفريغ والوسوم المقيّدة، تجنبًا للأسر، بحيث لا يظهر أي وسم في كل من δ_1 وδ_2. عندئذ يقابل السياق Γ'_1, Γ'_2 السياق Γ_1, Γ_2. ولأن $x : \psi$ يظهر في المتتالية النهائية لـ δ_2، فلا يمكن أن يكون $x : \psi$ فعالًا في أي استدلال وسم تفريغه x داخل δ_2. استبدل بكل مسلّمة $x : \psi \Rightarrow \psi$ في δ_2 الـ برهان δ_3 الآتي:

$$\dfrac{x : \varphi \to \psi \;\Rightarrow\; \varphi \to \psi \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma'_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array}}{x : \varphi \to \psi, \Gamma'_1 \;\Rightarrow\; \psi}\;\to\text{Elim}$$

واستبدل بكل ظهور لـ $x : \psi$ في δ_2 الصيغة $x : \varphi \to \psi$. والنتيجة $\delta_2[\delta_3/x : \psi]$ هي برهان للمتتالية $x : \varphi \to \psi, \Gamma'_1, \Gamma'_2 \Rightarrow \chi$.

6. إذا كانت R هي $\wedge$R، انتهى π بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}\;\wedge\text{R}$$

يعطي فرض الاستقراء برهانًا δ_1 للمتتالية $\Gamma'_1 \Rightarrow \varphi$ وبرهانًا δ_2 للمتتالية $\Gamma'_2 \Rightarrow \psi$. وبإعادة تسمية جميع الصيغ ووسوم التفريغ والوسوم المقيّدة في δ_2 تجنبًا للأسر، يمكننا ضمان ألا يظهر أي وسم في كل من δ_1 وδ_2. وعندئذ يقابل السياق Γ'_1, Γ'_2 السياق Γ_1, Γ_2. ونحصل على برهان δ بتطبيق $\wedge$Intro على المتتاليتين النهائيتين لـ δ_1 وδ_2.

7. إذا كانت R هي $\wedge\mathrm{L}$، وانتهى π، مثلًا، بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\varphi\wedge\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\wedge\mathrm{L}$$

فبفرض الاستقراء يوجد برهان δ_1 للمتتالية $x:\varphi,\Gamma'\Rightarrow\chi$ أو للمتتالية $\Gamma'\Rightarrow\chi$، حيث تقابل Γ' المجموعة Γ. في الحالة الثانية نتخذ δ_1 ليكون δ. وفي الحالة الأولى، لاحظ أن ظهور $x:\varphi$ في المتتالية النهائية يعني أنه ليس فعالًا في أي استدلال وسم تفريغه x داخل δ_1. استبدل بكل مسلّمة $x:\varphi\Rightarrow\varphi$ الـ برهان δ_2 الآتي:

$$\dfrac{x:\varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \varphi\wedge\psi}{x:\varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \varphi}\wedge\mathrm{Elim}_1$$

واستبدل بكل ظهور لـ $x:\varphi$ الصيغة $x:\varphi\wedge\psi$؛ أي انظر في $\delta_1[\delta_2/x:\varphi]$. وهذا برهان للمتتالية $x:\varphi\wedge\psi,\Gamma'\Rightarrow\chi$.

8. إذا كانت R هي Cut، انتهى π بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\Gamma_1,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta}\mathrm{Cut}$$

يعطي فرض الاستقراء برهانًا δ_1 للمتتالية $\Gamma_1'\Rightarrow\varphi$ وبرهانًا δ_2 للمتتالية $x:\varphi,\Gamma_2'\Rightarrow\chi$ أو للمتتالية $\Gamma_2'\Rightarrow\chi$. نعيد وسم نسختي البرهان تجنبًا للأسر بحيث تكون وسومهما متباينة. وفي الحالة الثانية نتخذ $\delta=\delta_2$. وإلا استبدل بكل مسلّمة $x:\varphi\Rightarrow\varphi$ في δ_2 البرهان δ_1 لنحصل على δ بوصفه برهان $\delta_2[\delta_1/x:\varphi]$ للمتتالية $\Gamma_1',\Gamma_2'\Rightarrow\chi$.

9. تُعالج الحالات المنطقية المتبقية على نحو مماثل. □

3.5 الترجمة من N2 إلى G2

قضية 3.10. إذا كان $\mathbf{N2c}\ (\mathbf{N2i}) \vdash \Gamma \Rightarrow \varphi$، فإن $\mathbf{G2c}\ (\mathbf{G2i}) + \mathbf{Cut} \vdash \Gamma' \Rightarrow \Delta$، حيث Γ' هي المجموعة المتعددة من صيغ الناتجة من Γ بحذف الوسوم، وحيث $\Delta = \{\varphi\}$ إذا لم تكن φ هي $\bot$، و $\Delta = \emptyset$ إذا كانت إياها.

برهان. البرهان مرة أخرى بالاستقراء في ارتفاع برهان δ للمتتالية $\Gamma \Rightarrow \varphi$. فإذا كانت δ مسلّمة $x : \varphi \Rightarrow \varphi$، كان π هو المسلّمة المقابلة $\varphi \Rightarrow \varphi$، أو $\bot \Rightarrow$ إذا كان $\varphi \equiv \bot$.

إذا انتهى δ بقاعدة استدلال، نميّز الحالات الآتية:

1. إذا كانت R هي $\to$Intro وصيغتها الرئيسة $\psi \to \chi$، وكان $x : \psi$ موجودًا في سياق المقدمة دون النتيجة، انتهى δ بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ x : \psi, \Gamma \Rightarrow \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \psi \to \chi}\ \to\text{Intro}$$

يعطي فرض الاستقراء برهان π_1 للمتتالية $\psi, \Gamma' \Rightarrow \chi$، أو للمتتالية $\psi, \Gamma' \Rightarrow$ إذا كان $\chi \equiv \bot$. وفي الحالة الأخيرة نطبّق أولًا WR لإضافة $\bot$ إلى الطرف الأيمن. ثم نحصل على π في الحالتين بتطبيق $\to$R.

2. إذا كانت R هي $\to$Intro لكن $x : \psi$ لم يكن موجودًا في سياق المقدمة، انتهى δ بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma \Rightarrow \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \psi \to \chi}\ \to\text{Intro}$$

يعطي فرض الاستقراء برهان π_1 للمتتالية $\Gamma' \Rightarrow \chi$، أو للمتتالية ذات الطرف الأيمن الخالي إذا كان $\chi \equiv \bot$. في الحالة الأخيرة نطبّق أولًا WR لإضافة $\bot$، ثم نطبّق WL بالصيغة ψ، وأخيرًا $\to$R؛ وفي الحالة الأولى نحتاج إلى التطبيقين الأخيرين فقط.

3. إذا كانت R هي $\to$Elim، انتهى δ بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma_1 \Rightarrow \psi \to \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \Gamma_2 \Rightarrow \psi\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi}\ \to\text{Elim}$$

حيث السياق Γ هو تجميع السياقين Γ_1, Γ_2. يعطي فرض الاستقراء براهين: برهانًا π_1 للمتتالية $\Gamma'_1 \Rightarrow \psi \to \varphi$، وبرهانًا π_2 للمتتالية $\Gamma'_2 \Rightarrow \psi$ إذا كان $\psi \not\equiv \bot$، أو للمتتالية $\Gamma'_2 \Rightarrow$ إذا كان $\psi \equiv \bot$. وفي الحالة الثانية نضيف WR إلى π_2 كي تكون نتيجته $\Gamma'_2 \Rightarrow \bot$.

إذا كان $\varphi \not\equiv \bot$ نحصل على برهان π بالصورة:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma'_1 \Rightarrow \psi \to \varphi\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma'_2 \Rightarrow \psi\end{array} \quad \varphi \Rightarrow \varphi}{\psi \to \varphi, \Gamma'_2 \Rightarrow \varphi}\ \to\text{L}}{\Gamma'_1, \Gamma'_2 \Rightarrow \varphi}\ \text{Cut}$$

أما إذا كان $\varphi \equiv \bot$ فنستخدم $\bot \Rightarrow$ مقدمةً يمنى لتطبيق $\to$L، فنحصل على برهان للطرف الأيمن الخالي، ثم نطبّق Cut؛ وهكذا يكون برهان π للمتتالية $\Gamma'_1, \Gamma'_2 \Rightarrow$ ولا نطبّق إضعافًا يمينيًا عليها. قد لا يساوي تجميع المجموعتين المتعددتين Γ'_1, Γ'_2 المجموعة المتعددة Γ' الناتجة من تجميع Γ_1, Γ_2. فمثلًا، إذا كان كل من Γ_1 وΓ_2 يحتوي $x : \chi$، احتوى التجميع الأول نسختين من χ، بينما لا ينتج من تجميع السياقين الموسومين إلا نسخة واحدة. نصحح ذلك بإضافة استدلالات مناسبة من CL.

4. إذا كانت R هي $\bot_C$، انتهى δ بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ x:\neg\varphi,\Gamma \Rightarrow \bot\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,\bot_C$$

يوجد، بفرض الاستقراء، برهان π_1 للمتتالية $\neg\varphi,\Gamma' \Rightarrow$. ونتخذ برهان π ليكون:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi,\neg\varphi}\,\neg\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \neg\varphi,\Gamma' \Rightarrow\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{Cut}$$

5. تُعالج قواعد الاستدلال المتبقية على نحو مماثل، مع تجميع السياقات بالفواصل وحذف التكرارات الزائدة بانقباضات يسارية عند الحاجة.

لاحظ أن ترجمة $\bot_C$ وحدها تنتج برهان π فيه أكثر من صيغة واحدة على اليمين. أي إن ترجمة برهان في **N2i** هي برهان في **G2i**. □

3.6 مقدمة

إذا استطعنا أن نبرهن شرطيةً $\varphi \to \psi$، فقد نستطيع استخدامها في برهان لـ ψ بتطبيق $\to$Elim. وهذا يتطلب بالطبع أيضًا برهان δ_1 لـ φ. وعلى الأرجح ينتهي برهان الذي لديك لـ $\varphi \to \psi$ بـ $\to$Intro، وهي تحوّل برهان δ_2 لـ ψ من الفرض المفتوح φ إلى برهان لـ $\varphi \to \psi$. فإذا كان كذلك، كان برهان

النهائي بالصورة:

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\to\text{Intro}\qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \varphi\end{array}}{\psi}\to\text{Elim}$$

ومع أن استراتيجيتك فعّالة من حيث إعادة استعمال شيء كان لديك بالفعل (برهان لـ $\varphi \to \psi$)، فإن برهان نفسه ليس كذلك. إذ يبدو إدخال $\varphi \to \psi$ ثم حذفها فورًا التفافًا لا لزوم له. وينبغي أن توجد طريقة أكثر مباشرةً كي نبرهن ψ.

وفي الواقع توجد دائمًا طريقة كهذه. فالالتفافات من النوع السابق—أي تطبيق إدخال تتبعه مباشرةً قاعدة حذف—يمكن دائمًا حذفها من براهين الاستنباط الطبيعي. وتسمى هذه العملية *التطبيع*، وتكون النتيجة برهان سويًا (أو برهان في صورة سوية).

وبرهان هذه النتيجة، مثل مبرهنة حذف القطع في حساب المتتاليات، معقد بعض الشيء ويتطلب بحث حالات كثيرة. وإثباته للنسق الكلاسيكي **N1c** أصعب منه للنسق الحدسي **N1i**. وكما يبيّن حذف القطع أننا لا نستطيع أن نبرهن نتائج أكثر باستعمال قاعدة Cut في حساب المتتاليات، يبيّن التطبيع أنك لا تستطيع إثبات نتائج بالالتفافات أكثر مما تستطيع إثباته باجتنابها. وهناك أوجه شبه أخرى: فقد يكون برهان السوي أطول بكثير من أقصر برهان ذي التفافات للنتيجة نفسها، كما قد تكون براهين حساب المتتاليات التي فيها قطوع أقصر بكثير من أقصر برهان خالٍ من القطع. وتقول خاصية صيغة الفرعية إننا نستطيع دائمًا أن نبرهن نتيجة باستعمال صيغ فرعية لصيغ النتيجة أو لفروض برهان المفتوحة وحدها؛ وهي تنتج من تطبيع الاستنباط الطبيعي مثلما تنتج من حذف القطع في حساب المتتاليات.

3.7 مبرهنة التطبيع

يكون برهان في صورة سوية إذا لم يحتوِ على مقاطع قطع. ومن الواضح أن هذا يكافئ تعذر تطبيق أي تحويل تبديل أو تحويل اختزال عليه. ويعني *تطبيع* برهان تحويله إلى برهان سوي بتطبيق تحويلات التبديل والاختزال إلى أن تزول جميع القطوع. أما إمكان ذلك دائمًا فهو مضمون مبرهنة *التطبيع*.

مبرهنة 3.11. *يمكن تطبيع كل برهان δ في* **N1i**؛ *أي يمكن تحويله إلى برهان δ' بلا قطوع.*

برهان. نستعمل الاستقراء في رتبة القطع وطوله في δ. وفرض الاستقراء هو أن كل برهان رتبته القطعية أدنى، أو رتبته القطعية مساوية وطوله القطعي أقصر، يمكن تطبيعه.

إذا كان طول القطع 0، فلا قطوع، ويكون δ سويًا بالفعل. فافترض أن رتبة القطع وطوله في δ كلاهما أكبر من 0. اختر مقطع قطع أقصى علويًا في أقصى اليمين. فإذا كان طول المقطع أكبر من 1، فطبّق تحويل تبديل؛ وإذا كان طوله 1، فطبّق تحويل الاختزال الموافق. ينتج عن ذلك برهان جديد إما له الرتبة القطعية نفسها وطول قطعي أقصر، وإما له رتبة قطعية أدنى، فينطبق فرض الاستقراء. □

تحدد الاستراتيجية المستعملة في البرهان السابق ترتيبًا بعينه للتحويلات التي تطبّق على برهان لكي تنتج برهان سويًا: نعالج دائمًا مقطع قطع أقصى علويًا في أقصى اليمين. والحجة السابقة تثبت انتهاء التطبيع لهذه الاستراتيجية المختارة وحدها. أما القول إن تطبيق تحويلات التبديل والاختزال بترتيب اعتباطي ينتهي دائمًا إلى برهان سوي، فهو نتيجة أقوى هي التطبيع القوي، ويحتاج إلى مبرهنة مستقلة لا يثبتها هذا البرهان.

يمكن صياغة تعريفي المقطع والقطع بسهولة في **N2i**، كما تترجم تحويلات التبديل والاختزال من **N1i** مباشرةً إلى **N2i**. ولذلك تصح مبرهنة التطبيع أيضًا في **N2i**.

مبرهنة 3.12. *يمكن تطبيع كل برهان δ في* **N2i**؛ *أي يمكن تحويله إلى برهان δ' بلا قطوع.*

باب 4

التطبيع

4.1 تحويلات التبديل

القطوع في **N1i** هي المقاطع التي تنتهي بالمقدمة الكبرى لقاعدة حذف. وإحدى حالات برهان التطبيع هي تقصير القطوع القصوى، ومن ثم تقليل طول القطع في برهان. ويمكن لقطع طوله أكبر من 1 أن ينتهي بطرائق متعددة، بحسب ما إذا كان آخر ظهور لـ صيغة φ في القطع نتيجةً لـ ($\vee$Elim أو $\exists$Elim)، وبحسب استدلال حذف الذي تكون تلك الصيغة مقدمته الكبرى.

فمثلًا، إذا كان الاستدلالان المعنيان هما $\vee$Elim و$\wedge$Elim، وكانت $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$، وكان هناك برهان جزئي δ_1 ينتهي هكذا:

$$
{}_{x\,y}\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta \vee \alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \psi \wedge \chi\end{array}}{\psi}\,\wedge\mathrm{Elim}_1 \quad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \psi \wedge \chi\end{array}}{\psi \wedge \chi}\,\vee\mathrm{Elim}
$$

فإن آخر ظهور لـ صيغة φ_n في القطع هو نتيجة $\vee$Elim، أي الظهور السفلي لـ $\psi \wedge \chi$. أما الظهور قبل الأخير لـ صيغة φ_{n-1} فهو إحدى المقدمتين الصغريين لـ $\vee$Elim.

ولتقصير هذا القطع، يمكننا عكس ترتيب استدلالي $\vee$Elim و$\wedge$Elim (أي "تبديلهما"). وبعبارة أخرى، نستبدل بالبرهان الجزئي δ_1 داخل δ ما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta\vee\alpha\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi}\wedge\mathrm{Elim}_1\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi}\wedge\mathrm{Elim}_1}{\psi}\vee\mathrm{Elim}\;x\,y$$

فالقطوع التي كانت تنتهي في مقدمة $\wedge$Elim تحت $\vee$Elim تنتهي الآن في مقدمة أحد استدلالي $\wedge$Elim الواقعين فوق المقدمتين الصغريين لـ $\vee$Elim؛ أي إن طول كل منها قد نقص بمقدار 1.

وفوق ذلك، لا يتغير أي قطع يقع كله داخل δ_2 أو δ_3 أو δ_4، أو يقع كله خارج δ_1 داخل δ: فهو ما يزال يشتمل على صيغ نفسها ويمر بالاستدلالات نفسها، ولذلك له خصوصًا رتبة القطع وطوله نفسيهما كما في القطع المقابل في δ. ومن ثم لم تزد رتبة القطع في برهان الجديد، وطول القطع في برهان الجديد أقل منه في برهان القديم.

ينقص طول قطع واحد على الأقل بمقدار 1 بعد تحويل تبديل. وإذا بدّلنا $\wedge$Elim عبر $\vee$Elim، فهناك في الواقع مقطعا قطع ينقص طولهما، ومن ثم ينقص طول القطع في برهان بمقدار 2 على الأقل. فهل يمكن أن ينقص طول القطع في برهان بأكثر من 2 بتحويل واحد من هذا النوع؟ وهل يمكن أن تنقص رتبة القطع؟

تسمى عملية نقل حذف إلى فوق قاعدة $\vee$Elim أو $\exists$Elim *تحويل تبديل*. وترد أنماط بعض أزواج القواعد في جدول 4.1. (وتُترك الأنماط الباقية تمارين.)

$$\longrightarrow \quad \vee\mathrm{Elim}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array} \quad \theta\vee\alpha}{\wedge\mathrm{Elim}_1\,\dfrac{\psi\wedge\chi}{\psi}}\,x\,y$$

$$\vee\mathrm{Elim}\,\dfrac{\wedge\mathrm{Elim}_1\,\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi} \quad \wedge\mathrm{Elim}_1\,\dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi} \quad \theta\vee\alpha}{\psi}\,x\,y$$

$$\longrightarrow \quad \rightarrow\mathrm{Elim}\,\dfrac{\psi \quad \vee\mathrm{Elim}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi\rightarrow\chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi\rightarrow\chi\end{array} \quad \theta\vee\alpha}{\psi\rightarrow\chi}\,x\,y}{\chi}$$

$$\vee\mathrm{Elim}\,\dfrac{\rightarrow\mathrm{Elim}\,\dfrac{\psi \quad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi\rightarrow\chi\end{array}}{\chi} \quad \rightarrow\mathrm{Elim}\,\dfrac{\psi \quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi\rightarrow\chi\end{array}}{\chi} \quad \theta\vee\alpha}{\chi}\,x\,y$$

$$\longrightarrow \quad \vee\mathrm{Elim}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array} \quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array} \quad \theta\vee\alpha}{\forall\mathrm{Elim}\,\dfrac{\forall x\,\psi(x)}{\psi(t)}}\,x\,y$$

$$\dfrac{\forall\text{Elim}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array}}{\psi(t)} \quad \forall\text{Elim}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array}}{\psi(t)} \quad \theta\vee\alpha}{\psi(t)}\;{\scriptstyle x\,y}\;\vee\text{Elim}$$

جدول 4.1: بعض تحويلات التبديل في **N1i**.

اكتب تحويلات التبديل لـ $\vee$Elim متبوعةً بـ $\vee$Elim أو $\neg$Elim.

اكتب تحويلات التبديل لـ $\exists$Elim متبوعةً بـ $\exists$Elim. واشرح لماذا لا يُنتهك شرط المتغير الذاتي في الحالة الثانية.

ينبغي أن نتحقق من أن تطبيق تحويل تبديل لا ينتهك شرط متغير ذاتي. انظر في:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta\vee\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \exists x\,\psi(x)\end{array} \quad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \exists x\,\psi(x)\end{array}}{\exists x\,\psi(x)}\;{\scriptstyle x\,y}\;\vee\text{Elim} \quad \begin{array}{c}[\psi(c)]^z\\ \vdots\,\delta_5\\ \chi\end{array}}{\chi}\;{\scriptstyle z}\;\exists\text{Elim}$$

وقبل استبدال هذا البرهان نأخذ نسختين من δ_5 مع إعادة تسمية المتغيرات الذاتية ووسوم التفريغ، تجنبًا للأسر، بحيث تكون الأزواج (c_D, z_D) و(c_E, z_E)

حديثةً ومتميزةً زوجيًا. ثم نستبدله بما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta\vee\alpha\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \exists x\,\psi(x)\end{array}\quad \begin{array}{c}[\psi(c_D)]^{z_D}\\ \vdots\,\delta_5^{(D)}\\ \chi\end{array}}{\chi}\,z_D\,\exists\mathrm{Elim}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \exists x\,\psi(x)\end{array}\quad \begin{array}{c}[\psi(c_E)]^{z_E}\\ \vdots\,\delta_5^{(E)}\\ \chi\end{array}}{\chi}\,z_E\,\exists\mathrm{Elim}}{\chi}\,x\,y\,\vee\mathrm{Elim}$$

قد نقلق من أن المتغير الذاتي c يمكن أن يظهر، مثلًا، في θ. فالفرض θ يفرَّغ فوق $\exists$Elim الأصلي، ولذلك لا يظهر في برهان الأصلي ضمن فرض مفتوح فوق المقدمة الكبرى لاستدلال $\exists$Elim، ويتحقق هناك شرط المتغير الذاتي. أما في برهان الجديد فلا يفرَّغ θ إلا بعد استدلالي $\exists$Elim، فيبدو أن الشرط سيُنتهك. لكننا نفترض أن براهيننا منتظمة: فكل متغير ذاتي هو المتغير الذاتي لاستدلال واحد، ولا يظهر في برهان إلا فوق المقدمة الصغرى لـ $\exists$Elim. وعلى وجه الخصوص لا يمكن أن يظهر c في δ_3 أو δ_4؛ وإعادة التسمية الحديثة التي أجريناها تمنع الأسر بين النسختين أيضًا.

ويبيّن هذا المثال أمرًا آخر: ففي برهان الجديد نسختان من δ_5. ولهذا، إذا احتوى δ_5 على قطع أقصى، فلا يلزم أن ينقص طول القطع؛ بل قد يزداد بسبب نسخه. فعلينا أن نطبّق تحويل التبديل فقط حين نعلم أنه لا يوجد قطع أقصى في δ_5. ونضمن ذلك باختيار قطع أقصى علوي دائمًا؛ أي قطع أقصى لا يحتوي برهانه الجزئي (وهو δ_1 هنا) قطعًا أقصى ينتهي فوق آخر استدلال في ذلك برهان الجزئي. ويستبعد هذا وجود قطوع قصوى أخرى في δ_5 (بل وفي δ_2 أو δ_3 أو δ_4 كذلك).

4.2 تحويلات الاختزال

إذا كان طول قطع في برهان ضمن **N1i** يساوي 1، فهو مقطع يتألف من ظهور واحد لـ صيغة، وتكون تلك صيغة نتيجةً إما لاستدلال إدخال أو لـ $\bot_I$، ومقدمةً كبرى لاستدلال حذف في الوقت نفسه. وفي برهان التطبيع "تُختزل" هذه القطوع باستبدال برهان الجزئي الذي ينتهي بمثل هذا الزوج من إدخال/حذف بـ برهان

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

جديد حُذف منه زوج الاستدلالين. وقد ينتج عن هذا الاستبدال قطوع جديدة، غير أنه يمكن التحقق من أن رتبتها أدنى من رتبة القطع المختزل. ولذلك، عند تطبيق التحويل على قطع أقصى مختار علويًا وفي أقصى اليمين، يكون برهان الجديد إما أقصر في طول القطع (لأن قطعًا أقصى طوله 1 قد حُذف) وإما تكون رتبة القطع في برهان قد انخفضت (إذا كان ذلك هو القطع الأقصى الوحيد).

فمثلًا، إذا كان الاستدلالان المعنيان هما $\to$Intro و$\to$Elim، وكانت $\varphi \equiv \psi \to \chi$، وكان هناك برهان جزئي δ_1 ينتهي هكذا:

$$\dfrac{{}_x\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi\end{array}}{\psi \to \chi}\to\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\end{array}}{\chi}\to\text{Elim}$$

فإننا نحذف هذا القطع باستبدال البرهان الجزئي δ_1 داخل δ بما يأتي:

$$\begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\\ \vdots\,\delta_2[\delta_3/\psi^x]\\ \chi\end{array}$$

ونعني بـ $\delta_2[\delta_3/\psi^x]$ الـ برهان الناتج من δ_2 باستبدال نسخة كاملة من برهان δ_3 بكل فرض ψ موسوم بـ x. ونعيد تسمية المتغيرات الذاتية والمقيّدة في كل نسخة من برهان δ_3 بصورة حديثة ومتباينة زوجيًا تجنبًا للأسر، مع إبقاء وسوم الفروض المفتوحة وصيغها نفسها، وإن جاز أن يزداد عدد وقائعها. ولا يبقى في البرهان الجديد فرض مفتوح من الصورة ψ موسوم بـ x. كما لا توجد فروض أخرى موسومة بـ x، لأننا نفترض كالمعتاد أن صيغ مختلفة لا تقع فروضًا بالوسم نفسه. ومن ثم يكون لـ برهان الجديد الفروض المفتوحة نفسها التي لـ δ_1؛ وكل استدلال في δ_2 يفرّغ فروضًا يفرّغ الفروض نفسها في $\delta_2[\delta_3/\psi^x]$، وكل استدلال في δ_3 يفرّغ فروضًا قد تظهر منه نسخ متعددة تفرّغ الوقائع المقابلة.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

كل قطع يقع كله داخل δ_2 أو كله خارج δ_1 في δ لا يتغير: فهو يشتمل على صيغ نفسها ويمر بالاستدلالات نفسها، فتظل رتبته وطوله كما كانا. أما القطع الواقع داخل δ_3 فقد يُنسخ؛ ولكل نسخة الرتبة والطول نفسيهما، وتتحكم استراتيجية اختيار القطع الأقصى العلوي وفي أقصى اليمين في تعدديته. وقد حذفنا قطعًا أقصى طوله 1، لكن يلزم بحث أمرين قبل استنتاج انخفاض مقياس δ.

غير أن أمرين قد يحدثان:

1. باستبدال δ_3 بكل فرض ψ^x، نكون قد ضاعفنا جميع القطوع في δ_3. فإذا كان بعضها أقصى، فقد يزيد طول القطع في برهان الجديد على طول القطع في برهان القديم. ولمنع ذلك نطبّق تحويلات الاختزال فقط على قطوع قصوى *علوية* وفي *أقصى اليمين* معًا؛ أي لا يوجد قطع أقصى فوق القطع المختزل في برهانه الجزئي، ولا على فرع في δ إلى يمينه. فلو وُجد قطع أقصى في δ_3 لكان إلى يمين القطع المختزل هنا، ولو وُجد في الجزء العلوي الآخر لانتُهكت العلوية. ويضمن هذا الاختيار أننا إما نقلل طول القطع في برهان أو نقلل رتبته.

2. إذا كان فرض ψ^x في δ_2 المقدمة الكبرى لاستدلال حذف، وكان آخر استدلال في δ_3 هو $\vee$Elim أو $\exists$Elim أو استدلال إدخال أو $\bot_I$، فقد أنشأنا قطعًا جديدًا بوصل δ_3 بـ δ_2 عند ذلك الفرض. فما كان مجرد فرض في δ_2 صار قطعًا طوله 1 (نتيجة إدخال أو $\bot_I$ومقدمةً كبرى لاستدلال حذف)، أو صار آخر ظهور لـ صيغة في مقطع قطع (أي مقدمةً كبرى لاستدلال حذف ونتيجةً لـ $\vee$Elim أو $\exists$Elim). وإذا كانت B^x مقدمةً صغرى لـ $\vee$Elim أو $\exists$Elim، فقد كانت أصلًا أول ظهور لـ صيغة في مقطع، وربما في مقطع قطع. وقد يطول ذلك المقطع في برهان الجديد. لكن لاحظ أن صيغة التي تكوّن هذا القطع الجديد أو مقطع القطع القائم هي ψ، وأن $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\psi \to \chi)$. لذلك، مع أننا ربما أضفنا قطوعًا أو زدنا أطوالها، فلا شيء منها قطع أقصى. ومن ثم إما أننا خفضنا رتبة القطع، أو خفضنا طول القطع إن بقيت قطوع بالرتبة نفسها.

تسمى عملية اختزال قطع طوله 1 *تحويل اختزال* (أو *تحويل التفاف*). وترد أنماط بعض أزواج القواعد في جدول 4.2. (وتُترك الأنماط الباقية تمارين.)

اكتب تحويل الاختزال لـ $\neg$Intro متبوعةً بـ $\neg$Elim.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi\end{matrix}}{\psi\to\chi}\,x\,{\to}\mathrm{Intro} \qquad \begin{matrix}\vdots\,\delta_3\\ \psi\end{matrix}}{\chi}\,{\to}\mathrm{Elim} \quad\longrightarrow\quad \begin{matrix}\vdots\,\delta_3\\ \psi\\ \vdots\,\delta_2[\delta_3/\psi^x]\\ \chi\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\,\delta_3\\ \chi\end{matrix}}{\psi\wedge\chi}\,{\wedge}\mathrm{Intro}}{\psi}\,{\wedge}\mathrm{Elim}_1 \quad\longrightarrow\quad \begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\,\delta_3\\ \chi\end{matrix}}{\psi\wedge\chi}\,{\wedge}\mathrm{Intro}}{\chi}\,{\wedge}\mathrm{Elim}_2 \quad\longrightarrow\quad \begin{matrix}\vdots\,\delta_3\\ \chi\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{matrix}}{\psi\vee\chi}\,{\vee}\mathrm{Intro}_1 \qquad \begin{matrix}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\chi]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \theta\end{matrix}}{\theta}\,x\,y\,{\vee}\mathrm{Elim} \quad\longrightarrow\quad \begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \psi\\ \vdots\,\delta_3[\delta_2/\psi^x]\\ \theta\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \psi(c)\end{matrix}}{\forall x\,\psi(x)}\,{\forall}\mathrm{Intro}}{\psi(t)}\,{\forall}\mathrm{Elim} \quad\longrightarrow\quad \begin{matrix}\vdots\,\delta_2[t/c]\\ \psi(t)\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \psi(t)\end{matrix}}{\exists x\,\psi(x)}\,{\exists}\mathrm{Intro} \qquad \begin{matrix}[\psi(c)]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{matrix}}{\theta}\,x\,{\exists}\mathrm{Elim} \quad\longrightarrow\quad \begin{matrix}\vdots\,\delta_2\\ \psi(t)\\ \vdots\,\delta_3[t/c][\delta_2/\psi(t)^x]\\ \theta\end{matrix}$$

جدول 4.2: بعض تحويلات الاختزال في **N1i**.

تبقى حالة واحدة للنظر. يشمل تعريف القطع الحالة التي يكون فيها طول القطع 1 وتكون φ نتيجة $\bot_I$ ومقدمةً كبرى لاستدلال حذف في الوقت نفسه. وتُعالج هذه الحالة بطريقة شبيهة بالحالة التي تكون فيها φ نتيجة قاعدة إدخال. فمثلًا، استبدل

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\psi\to\chi}\,\bot_I \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\end{array}}{\chi}\,{\to}\mathrm{Elim} \qquad \text{بـ} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\chi}\,\bot_I$$

وينبغي بعض الحذر في حالتي $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ و $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$. فمثلًا، لو استبدلنا

$$x\,y\,\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\psi\vee\chi}\,\bot_I \quad \begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{array} \quad \begin{array}{c}[\chi]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \theta\end{array}}{\theta}\,{\vee}\mathrm{Elim} \qquad \text{بـ} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\theta}\,\bot_I$$

لربما أنشأنا قطعًا جديدًا صيغة قطعه θ، ولا ضمان أن $\mathrm{dp}(\theta) < \mathrm{dp}(\psi \vee \chi)$! لذلك ينبغي أن نسلك هنا المسلك نفسه الذي سلكناه في اختزال $\vee$Elim/$\vee$Intro، فنستبدل به ما يأتي:

$$\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \dfrac{\bot}{\psi}\,\bot_I\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{array} \qquad \text{أو} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \dfrac{\bot}{\chi}\,\bot_I\\ \vdots\,\delta_4\\ \theta\end{array}$$

4.3 المقاطع والقطوع

قاعدة إدخال تتبعها قاعدة حذف هي التفاف في برهان، وتطبيع برهان هو حذف مثل هذه الالتفافات. غير أن قاعدتي $\vee$Elim و$\exists$Elim تجعلان حتى تعريف "الالتفاف الذي نريد حذفه" معقدًا بعض الشيء. والمشكلة هي أن هاتين القاعدتين لا تضمنان أن قاعدة حذف تتبع قاعدة إدخال مباشرةً داخل التفاف؛ فقد تقع $\vee$Elim أو $\exists$Elim بينهما، مثلًا:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x\,\chi(x)\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,{\scriptstyle x}\,\to\text{Intro}}{\varphi\to\psi}\,{\scriptstyle y}\,\exists\text{Elim} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

وفي الواقع قد يفصل أي عدد من تطبيقات $\vee$Elim أو $\exists$Elim بين $\to$Intro و$\to$Elim، مثلًا:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x\,\chi(x)\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \theta\vee\alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,{\scriptstyle x}\,\to\text{Intro} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,{\scriptstyle x}\,\to\text{Intro}}{\varphi\to\psi}\,\vee\text{Elim}}{\varphi\to\psi}\,{\scriptstyle y}\,\exists\text{Elim} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

يبين هذا المثال أن تطبيق $\rightarrow$Elim نفسه قد يدخل في التفافات متعددة، إذ يتبع أكثر من تطبيق واحد لـ $\rightarrow$Intro. ولشمول جميع هذه الاحتمالات، نعرّف الالتفافات باستعمال أنواع معينة من متتاليات وقائع صيغة في برهان **N1i**، ونسميها مقاطع. وفي مثالنا هي متتالية من وقائع $\varphi \rightarrow \psi$ تتبع فيها نتيجة $\vee$Elim أو $\exists$Elim مقدمتها الصغرى. وفي المثال مقطعان من هذا النوع، يحتوي كل منهما ثلاثة وقائع من $\varphi \rightarrow \psi$. وهذا هو التعريف الرسمي.

تعريف 4.1. *المقطع* في برهان δ من **N1i** هو متتالية الوقائع φ_1، ...، φ_n لـ صيغة φ نفسها في δ، بحيث:

1. لا تكون φ_1 نتيجة $\vee$Elim أو $\exists$Elim؛
2. لا تكون φ_n مقدمةً صغرى لـ $\vee$Elim أو $\exists$Elim؛
3. لكل $i = 1$، ...، $n - 1$، تكون φ_i مقدمةً صغرى لـ $\vee$Elim أو $\exists$Elim، وتكون φ_{i+1} نتيجة ذلك الاستدلال.

وطول هذا المقطع هو n.

ليس كل مقطع هدفًا للحذف (أي التفافًا). وتسمى المقاطع التي تكون أهدافًا *قطوعًا*.

تعريف 4.2. *القطع* مقطع تكون فيه φ_n المقدمة الكبرى لاستدلال حذف، ويكون إما $n = 1$ و$\varphi_1 = \varphi_n$ نتيجة استدلال إدخال أو $\perp_I$، وإما $n > 1$.

لاحظ أن مقطع القطع لا يلزم أن يبدأ بنتيجة قاعدة إدخال. وكل ما يلزم هو أن ينتهي بالمقدمة الكبرى لقاعدة حذف. لكن المقطع الذي طوله 1 يجب أن يكون نتيجة قاعدة إدخال أو $\perp_I$ كي يُعد قطعًا.

تعريف 4.3. رتبة القطع هي $\mathrm{dp}(\varphi)$. ورتبة *القطع* $\mathrm{cr}(\delta)$ لـ برهان δ هي أكبر رتب القطوع في δ، وتُعرَّف بأنها 0 إذا لم توجد قطوع. ويكون القطع *أقصى* في δ إذا كانت رتبته $\mathrm{cr}(\delta)$؛ أي إذا كانت رتبته أكبر ما يمكن. وطول *القطع* لـ δ هو مجموع أطوال جميع قطوعه القصوى، ويُعرَّف بأنه 0 إذا لم توجد قطوع.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

4.4 الترجمة بين براهين السوية في N2i وG2i

يمكن ترجمة براهين في **N2i** إلى براهين في **G2i** والعكس. وأول ما نلاحظه أن ترجمة براهين الخالية من القطع في **G2i** تنتج براهين سوية في **N2i**.

ولصياغة النتيجة نحتاج إلى مصطلح يسهّل الربط بين مقدمات المتتاليات في **N2i** و**G2i**: نقول إن مجموعة Γ' من صيغ الموسومة تقابل المجموعة المتعددة Γ من صيغ غير الموسومة إذا كان، لكل صيغة φ، عدد عناصر المجموعة Γ' التي صورتها $x : \varphi$ أصغر من أو يساوي تعددية φ في Γ.

نتيجة لازمة 4.4. *إذا كان $\mathbf{G2i} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$، فثمة برهان سوي δ في **N2i** للمتتالية $\Gamma' \Rightarrow \chi$، حيث $\chi \equiv \bot$ إذا كانت Δ خالية، و$\chi \equiv \varphi$ إذا كانت $\Delta = \{\varphi\}$، وحيث تقابل مجموعة Γ' من صيغ الموسومة المجموعة المتعددة Γ؛ أي إنه، لكل صيغة φ، يكون عدد عناصر المجموعة Γ' التي صورتها $x : \varphi$ أصغر من أو يساوي تعددية φ (أي عدد نسخ φ) في Γ.*

برهان. يتضح ذلك بفحص برهان قضية 3.9: فنحن نضيف قواعد إدخال إلى نهايات براهين، ونضيف قواعد حذف إلى أعالي براهين وحدها، ولذلك لا ندخل أبدًا قاعدة إدخال فوق حذف. □

لكن ترجمة قاعدة Cut المعطاة في قضية 3.9 قد تدخل قطوعًا في برهان δ من **N2i**. فإذا انتهى برهان في **G2i** بـ Cut وكان براهينه الجزئيان المباشران π_1 وπ_2 للمتتاليتين $\Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ و $\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ على الترتيب، فإننا نوصل ترجمة π_1، وهي δ_1، بمسلّمات $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ الواقعة في ترجمة π_2، وهي δ_2. فإذا انتهى δ_1 بقاعدة إدخال صيغتها الرئيسة صيغة φ، وكانت المسلّمة $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ في δ_2 المقدمة الكبرى لقاعدة حذف، نتج عن ذلك قطع في δ.

ويمكن أيضًا ترجمة براهين في **N2i** إلى براهين في **G2i**. ففي برهان قضية 3.10 تنتج عن ترجمة $\wedge$Elim و $\rightarrow$Elim و$\neg$Elim و$\forall$Elim استدلالات Cut في برهان **G2i** الناتج. غير أن هذا يمكن اجتنابه إذا كان برهان **N2i** الذي نبدأ منه سويًا.

لنسمِّ قائمة S_1، ...، S_n من وقائع المتتاليات في برهان δ من **N2i** فرعًا إذا كانت S_1 مسلّمة، وكانت S_{i+1} نتيجة الاستدلال كلما كانت S_i مقدمته الكبرى، ولم تكن العقدة الأخيرة S_n مقدمةً كبرى لأي استدلال. أي إن الفرع يتتبع المتتاليات نزولًا في δ بدءًا من المسلّمات، لكنه يتوقف عند المقدمات الصغرى لقواعد حذف. *والفرع الرئيس* لـ δ فرع تكون S_n فيه المتتالية النهائية. ولا بد أن يكون لكل برهان δ فرع رئيس واحد على الأقل، لأن لكل قاعدة مقدمة كبرى واحدة على الأقل (ولا يملك مقدمتين كبرَيَيْن سوى $\wedge$Intro).

قضية 4.5. *إذا كان δ برهان سويًا في* **N2i** *للمتتالية $\Gamma \Rightarrow \varphi$، فثمة برهان π خالٍ من القطع، وهو برهان في* **G2i** *للمتتالية $\Gamma' \Rightarrow \Delta$، حيث Γ' هي المجموعة المتعددة من صيغ الناتجة من Γ بحذف الوسوم، و $\Delta = \{\varphi\}$ إذا لم تكن φ هي $\perp$، و $\Delta = \emptyset$ إذا كانت إياها.*

برهان. هذه المرة نستعمل الاستقراء في عدد الاستدلالات في برهان δ للمتتالية $\Gamma \Rightarrow \varphi$. فإذا لم يوجد استدلال في δ، كانت مسلّمة $x : \varphi \Rightarrow \varphi$، وكان π المسلّمة المقابلة $\varphi \Rightarrow \varphi$، أو $\perp \Rightarrow \perp$ إذا كان $\varphi \equiv \perp$.

إذا انتهى δ بقاعدة استدلال، نميّز الحالات الآتية:

1. إذا كانت R قاعدة إدخال أو $\perp_I$، جرت الترجمة كما في برهان قضية 3.10 تمامًا، ولم تحتج إلى Cut.

2. إذا كانت آخر قاعدة R في δ قاعدة حذف، فلاحظ ما يأتي:

   a) لا يمر فرع رئيس في δ بأي قواعد إدخال، وإلا لكانت قاعدة إدخال أو $\perp_I$ متبوعةً بقاعدة حذف على الفرع الرئيس، ولما كان δ سويًا.

   b) بما أن الفروع الرئيسة في δ لا تمر بقواعد إدخال، فلا يوجد إلا فرع رئيس واحد. (لقاعدة $\wedge$Intro وحدها مقدمتان كبريان، ولذلك يجب أن تمر الفروع الرئيسة المتعددة بمقدمتي قاعدة من هذا النوع.)

c) إذا اشتمل الفرع الرئيس على المقدمة الكبرى لـ $\vee$Elim أو $\exists$Elim، فلا توجد إلا قاعدة واحدة من هذا النوع وتكون الأخيرة، أي R. (وإلا لاحتوى الفرع الرئيس قاعدة $\vee$Elim أو $\exists$Elim تكون نتيجتها مقدمةً كبرى لقاعدة حذف، ولما كان البرهان سويًا، إذ يمكن عندئذ تطبيق تحويل تبديل.)

d) لا تفرّغ أي حذف غير $\vee$Elim و$\exists$Elim فروضًا، أي لا تغيّر السياق الأيسر للمتتاليات. ولا تفرّغ هاتان القاعدتان إلا فروضًا فوق مقدمة صغرى، أي لا تغيّران السياق الأيسر إلا لمقدمتيهما الصغريين. وبعبارة أخرى، إذا كان سياق متتالية S_i على الفرع الرئيس لـ δ هو Γ_1، فإن سياق النتيجة S_{i+1} للاستدلال الذي تكون S_i مقدمته الكبرى هو سياق حديث $\Gamma_2 \supseteq \Gamma_1$.

e) ونتيجةً لذلك، إذا كانت $x : \chi \Rightarrow \chi$ المتتالية العليا S_1 في الفرع الرئيس، فإن $x : \chi \in \Gamma$.

والآن نميّز الحالات بحسب صورة χ. وبما أن كل S_i في الفرع الرئيس مقدمة كبرى لقاعدة حذف، ينطبق ذلك أيضًا على $x : \chi \Rightarrow \chi$.

3. إذا كان $\chi \equiv \theta \wedge \alpha$، كان δ بالصورة:

$$\begin{array}{c} \dfrac{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta \wedge \alpha}{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta}\,\wedge\text{Elim}_1 \\ \vdots \\ x : \theta \wedge \alpha, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi \end{array}$$

لا يمر الفرع الرئيس، الذي يشتمل على $x : \theta \wedge \alpha \Rightarrow \theta$، بنتيجة قاعدة $\rightarrow$Intro أو $\neg$Intro، ولا بمقدمة صغرى لـ $\vee$Elim أو $\exists$Elim؛ ومن ثم تبقى صيغ السياق في $x : \theta \wedge \alpha$ بلا تغيير على طول الفرع الرئيس. وهذا يفسر وجوب احتواء سياق المتتالية النهائية على $x : \theta \wedge \alpha$. وفوق ذلك يمكننا تحويل برهان δ إلى برهان δ_1 باستبدال الـ برهان الجزئي المنتهي بـ $\wedge$Elim بالمسلمة $x : \theta \Rightarrow \theta$، واستبدال $x : \theta \wedge \alpha$ بـ $x : \theta$

في سياق كل متتالية على الفرع الرئيس؛ أي نحوّل

$$\begin{array}{c} \dfrac{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta \wedge \alpha}{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta}\,\wedge\mathrm{Elim}_1 \\ \vdots \\ x : \theta \wedge \alpha, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi \end{array} \qquad \text{إلى} \qquad \begin{array}{c} x : \theta \;\Rightarrow\; \theta \\ \vdots \\ x : \theta, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi \end{array}$$

ينطبق فرض الاستقراء على δ_1، لأن عدد الاستدلالات في δ يساوي عدد الاستدلالات في δ_1 زائد 1.

وبفرض الاستقراء يوجد برهان π_1 في **G2i** للمتتالية $\theta, \Gamma_1' \Rightarrow \Delta$. ونحصل على برهان π بتطبيق $\wedge\mathrm{L}$، مع إبقاء الطرف الأيمن Δ نفسه:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1 \\ \theta, \Gamma_1' \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\theta \wedge \alpha, \Gamma_1' \;\Rightarrow\; \Delta}\,\wedge\mathrm{L}$$

وإذا كانت Δ خالية فلا نطبّق إضعافًا يمينيًا؛ إذ يجب أن تبقى خالية.

4. إذا كان $\chi \equiv \theta \vee \alpha$، فلا بد أن يكون المقدمة الكبرى لـ $\vee\mathrm{Elim}$، ولا بد أن يكون هذا الاستدلال آخر استدلال R على الفرع الرئيس. أي إن δ بالصورة:

$$\dfrac{x : \theta \vee \alpha \;\Rightarrow\; \theta \vee \alpha \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_1 \\ y : \theta, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2 \\ z : \alpha, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array}}{x : \theta \vee \alpha, \Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \varphi}\,\vee\mathrm{Elim}$$

ينطبق فرض الاستقراء على براهين δ_1 وδ_2؛ فنحصل على براهين π_1 وπ_2 في **G2i** للمتتاليتين $\theta, \Gamma_1' \Rightarrow \Delta$ و$\alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \Delta$. ونطبّق $\vee$L للحصول على π:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \theta, \Gamma_1' \Rightarrow \Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\theta \vee \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \Delta}\,\vee\mathrm{L}$$

وإذا لم تفرّغ $\vee$Elim الفرض $y : \theta$ أو $z : \alpha$ (أي إذا لم يكن موجودًا في سياق المقدمة الصغرى)، أضفنا ما يلزم فقط من تطبيقات WL. ولا نضيف إضعافًا يمينيًا عندما تكون Δ خالية؛ فمثلًا، إذا غاب الفرضان:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\theta, \Gamma_1' \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma_2' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL}}{\theta \vee \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \Delta}\,\vee\mathrm{L}$$

5. إذا كان $\chi \equiv \theta \to \alpha$، كان δ بالصورة:

$$\begin{array}{c}\dfrac{x : \theta \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma_1 \Rightarrow \theta\end{array}}{x : \theta \to \alpha, \Gamma_1 \Rightarrow \alpha}\,\to\mathrm{Elim}\\ \vdots\,\delta_2\\ x : \theta \to \alpha, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi\end{array}$$

لاحظ هنا أن الفرع الرئيس، الذي يشتمل على $x : \theta \to \alpha, \Gamma_1 \Rightarrow \alpha$، لا يمر بنتيجة $\to$Intro أو $\neg$Intro ولا بمقدمة صغرى لـ $\vee$Elim أو $\exists$Elim؛ ولذلك تبقى صيغ السياق في $x : \theta \to \alpha, \Gamma_1$ بلا تغيير على طول الفرع الرئيس. وهذا يفسر وجوب احتواء سياق المتتالية النهائية على $x : \theta \to \alpha, \Gamma_1$. وفوق ذلك يمكننا تحويل قطعة برهان δ_2 إلى برهان صحيح δ_2' باستبدال الـ برهان الجزئي المنتهي بـ $\to$Elim بالمسلمة $x : \alpha \Rightarrow \alpha$، وباستبدال $x : \theta \to \alpha, \Gamma_1$ في سياق كل متتالية على الفرع الرئيس بـ $x : \alpha$؛ أي نحوّل

$$\begin{array}{rcl} x : \theta \to \alpha, \Gamma_1 & \Rightarrow & \alpha \\ & & \vdots\,\delta_2 \\ x : \theta \to \alpha, \Gamma_1, \Gamma_2 & \Rightarrow & \varphi \end{array} \quad \text{إلى} \quad \begin{array}{rcl} x : \alpha & \Rightarrow & \alpha \\ & & \vdots\,\delta_2' \\ x : \alpha, \Gamma_2 & \Rightarrow & \varphi \end{array}$$

ينطبق فرض الاستقراء على δ_1 وδ_2'، لأن عدد الاستدلالات في δ هو مجموع عددي الاستدلالات في δ_1 وδ_2 زائد 1 لاستدلال $\to$Elim في بداية الفرع الرئيس. وإذا كان هذا الاستدلال نفسه آخر استدلال R في δ، احتوى δ_2 صفرًا من الاستدلالات.

وبفرض الاستقراء توجد براهين π_1 وπ_2 في **G2i**، الأولى للمتتالية $\Gamma_1' \Rightarrow \theta$ إذا كان $\theta \not\equiv \bot$، أو للطرف الأيمن الخالي إذا كان $\theta \equiv \bot$، والثانية للمتتالية $\alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \Delta$. ونحصل على برهان π بتطبيق $\to$L:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1 \\ \Gamma_1' \Rightarrow \theta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2 \\ \alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\theta \to \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \Delta}\ \to\mathrm{L}$$

وإذا كان $\theta \equiv \bot$ وحده، نطبّق WR على π_1 لتوفير المقدمة الأولى لـ $\to$L. ولا نطبّق إضعافًا يمينيًا على π_2 أو على النتيجة إذا كانت $\varphi \equiv \bot$؛

فتبقى Δ خالية:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1' \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_1' \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WR} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\theta \to \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \Delta}\,{\to}\mathrm{L}$$

وتُعالج الحالات المتبقية على نحو مماثل، وتُترك تمارين. ولا تشمل الحجة الحالة الكلاسيكية $\bot_C$، ولذلك تقتصر المبرهنة على **N2i** و**G2i**. □

نتيجة لازمة 4.6. *كل صيغة يقع في برهان سوي من* **N2i** *هو صيغة فرعية لإحدى صيغ في المتتالية النهائية. وكل صيغة تقع في برهان سوي من* **N1i** *هي صيغة فرعية للصيغة النهائية أو لأحد الفروض المفتوحة.*

برهان. بموجب قضية 4.5 يمكن ترجمة كل برهان سوي في **N2i** إلى برهان خالٍ من القطع في **G2i**. ويبين فحص البرهان أن كل صيغة واقعة في برهان **N2i** تقع أيضًا في برهان **G2i**. وبما أن **G2i** لا يملك قاعدة Cut، فله خاصية صيغة الفرعية. أما ترجمة **N1i** إلى **N2i** فتحفظ السوية وتسجل الفروض المفتوحة في مقدمة المتتالية النهائية، فتنتج الحالة الثانية من الحالة الأولى. □

4.5 الاكتمال

نبيّن الآن أن خوارزمية البحث عن البرهان مضمونة؛ أي إنه إذا أُجهضت أو لم تتوقف قط، فلا يوجد برهان للمتتالية الابتدائية $\Gamma \Rightarrow \Delta$. ولهذا نعرّف بنية $\mathfrak{M}$ بحيث يكون $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ لكل $\varphi \in \Gamma$، و$\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ لكل $\varphi \in \Delta$. وبعبارة أخرى، تكون كل صيغ في Γ صادقة وكل صيغ في Δ كاذبة في $\mathfrak{M}$؛ أي إن $\Gamma \Rightarrow \Delta$ غير صالحة. وبما أن **G3c** سليم، فلا يوجد برهان للمتتالية $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

نعرّف $\mathfrak{M}$ من زوج Θ, Ξ من صيغ ومن مجموعة C من رموز ثابتة. ونحصل على Θ, Ξ وC من فرع فشل لتشغيل البحث عن البرهان الذي أخفق (إما بالإجهاض وإما بعدم التوقف). وفرع الفشل متتالية منتهية أو لامتناهية من المتتاليات $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ ومجموعات رموز ثابتة C_n، بحيث تكون $\Pi_0 \Rightarrow \Lambda_0$ هي المتتالية النهائية $\Gamma \Rightarrow \Delta$، وتكون $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ مقدمةً لـ $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ وُلّدت في المرحلة $n+1$ ولم تجد الخوارزمية لها برهان. ولا بد بوضوح من وجود مقدمة كهذه لكل n غير أخير في الفرع، وإلا لكانت الخوارزمية قد وجدت برهان. وفي الفرع المنتهي تكون المتتالية الأخيرة $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ موضع الإجهاض. ونجعل C_n مجموعة رموز ثابتة المرتبطة بالمتتالية $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$.

إذا أُجهضت الخوارزمية عند متتالية عليا لا تحتوي إلا صيغ ذرية، كان الفرع المنتهي بتلك المتتالية فرع فشل. وإذا لم تتوقف الخوارزمية قط، ظلت تولّد أشجارًا أكبر فأكبر. ويمكن تصورها شجرةً لامتناهية نامية (أي الشجرة التي سنحصل عليها لو نفذت الخوارزمية عددًا لامتناهيًا من الخطوات). وتكون هذه الشجرة لامتناهية لكنها متناهية التشعب، إذ لا تملك كل عقدة إلا ابنًا واحدًا أو ابنين، هما المتتاليات الواقعة فوقها مباشرةً. وبحسب مبرهنة كونيغ، لكل شجرة لامتناهية متناهية التشعب فرع لامتناهٍ. ويكون مثل هذا الفرع فرع فشل عندما تستمر خوارزمية البحث إلى الأبد.

إذا كانت متتالية $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ وC_n فرع فشل، فلتكن $\Theta = \bigcup_n \Pi_n$ و$\Xi = \bigcup_n \Lambda_n$ (بعد حذف المؤشرات والوقائع المتكررة لـ صيغ)، ولتكن $C = \bigcup_n C_n$.

نحن الآن مستعدون لتعريف $\mathfrak{M}$.

1. المجال $|\mathfrak{M}|$ هو مجموعة الحدود التي يمكن تكوينها من C ومن دوال الواقعة في $\Gamma \Rightarrow \Delta$ إن وُجدت، من دون أي متغيرات.

2. إذا كان $c \in C$، فإن $c^{\mathfrak{M}} = c$.

3. إذا كان f دالة ذا m مواضع في $\Gamma \Rightarrow \Delta$، وكان $t_1, \ldots, t_m \in |\mathfrak{M}|$، فإن $f^{\mathfrak{M}}(t_1, \ldots, t_m) = f(t_1, \ldots, t_m)$.

4. إذا كان R محمول ذا m مواضع في $\Gamma \Rightarrow \Delta$، فإن $R^{\mathfrak{M}} = \{\langle t_1, \ldots, t_m \rangle \in |\mathfrak{M}|^m : R(t_1, \ldots, t_m) \in \Theta\}$.

إن $\mathfrak{M}$ نموذج حدود، بمعنى أن مجاله مجموعة من الحدود، وأن رموز ثابتة ودوال تُفسَّر بحيث تضمن $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = t$. وتُستعمل صيغ الذرية في Θ لتعريف $R^{\mathfrak{M}}$ بطريقة تضمن أن $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \ldots, t_m)$ إذا وفقط إذا كان $R(t_1, \ldots, t_m) \in \Theta$.

قضية مساعدة 4.7. لكل $\varphi \in \Theta \cup \Xi$:

1. إذا كان $\varphi \in \Theta$، فإن $\mathfrak{M} \vDash \varphi$.

2. إذا كان $\varphi \in \Xi$، فإن $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$.

برهان. نستعمل الاستقراء في $\mathrm{dp}(\varphi)$.

افترض أولًا أن φ ذرية؛ أي إما $\varphi \equiv \bot$ وإما $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_m)$.

لأن $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ فرع فشل، لا يمكن أن تحتوي أي Π_n على $\bot$ (وإلا كانت $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ مسلّمة). وبحسب تعريف $\mathfrak{M}$، يكون $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \ldots, t_m)$ إذا وفقط إذا كان $R(t_1, \ldots, t_m) \in \Theta$. وتنتج عن الأمرين معًا العبارة: إذا كان $\varphi \in \Theta$، فإن $\mathfrak{M} \vDash \varphi$.

إذا كانت φ ذرية و$\varphi \in \Pi_n$، فإن $\varphi \in \Pi_{n+1}$؛ وإذا كان $\varphi \in \Lambda_n$، فإن $\varphi \in \Lambda_{n+1}$. (وهذا ناتج من الطريقة التي تولّد بها خوارزمية البحث المتتاليات اللاحقة.) لذلك، إذا كان $\varphi \in \Theta \cap \Xi$، كان $\varphi \in \Pi_n \cap \Lambda_n$ لبعض n. وهذا يعني أن $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ مسلّمة، مع أن فرع الفشل لا يمكن أن يحتوي مسلّمات. إذن، بحسب الإنشاء، $\varphi \notin \Theta \cap \Xi$ لكل φ ذرية؛ ومن ثم إذا كان $\varphi \in \Xi$ كان $\varphi \notin \Theta$. ويستلزم تعريف $\mathfrak{M}$ عندئذ أن $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$.

في خطوة الاستقراء، افترض أن (1) و(2) تصحان لكل صيغ ذات عمق أدنى من φ. ونثبت (1) و(2) لـ φ بتمييز الحالات.

لاحظ أولًا أنه إذا وقع φ^i غير ذري في $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$، فإنه يقع أيضًا في $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ ما لم يكن i أصغر مؤشر بين وقائع الصيغ غير الذرية في $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$. وكل مؤشر جديد تضيفه الخوارزمية أكبر من جميع المؤشرات الموجودة، ولذلك نصل في النهاية إلى $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ يقع فيها φ^i ويكون i أصغر

مؤشر بين وقائع الصيغ غير الذرية. وفي المرحلة $n+1$ تختزل الخوارزمية φ^i. وبعبارة أخرى، إذا كان $\varphi \in \Theta$، فلبعض n يكون $\Pi_n = \Pi'_n, \varphi^i$ ويكون i أصغر مؤشر غير ذري. وإذا كان $\varphi \in \Xi$، فلبعض n يكون $\Lambda_n = \Lambda'_n, \varphi^i$ ويكون i أصغر مؤشر غير ذري.

1. إذا كان $\varphi \in \Theta$ و$\varphi \equiv \psi \wedge \chi$، فلبعض n يكون $\Pi_n = \Pi'_n, (\psi \wedge \chi)^i$. وتكون $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ المقدمة المقابلة لـ $\wedge$L؛ أي $\Pi_{n+1} = \Pi'_n, \psi^k, \chi^{k+1}$. ومن ثم $\psi, \chi \in \Theta$. وبفرض الاستقراء $\mathfrak{M} \vDash \psi$ و$\mathfrak{M} \vDash \chi$. وينتج من تعريف $\mathfrak{M} \vDash$ أن $\mathfrak{M} \vDash \psi \wedge \chi$.

2. إذا كان $\varphi \in \Xi$ و$\varphi \equiv \psi \wedge \chi$، فلبعض n يكون $\Lambda_n = \Lambda'_n, \psi \wedge \chi$. وتكون $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ إحدى مقدمتي $\wedge$R اللتين نتيجتهما $\Pi_n \Rightarrow \Lambda'_n, \psi \wedge \chi$؛ أي إما $\Lambda_{n+1} = \Lambda'_n, \psi^k$ وإما $\Lambda_{n+1} = \Lambda'_n, \chi^k$. ومن ثم إما $\psi \in \Xi$ وإما $\chi \in \Xi$. وبفرض الاستقراء، إما $\mathfrak{M} \nvDash \psi$ وإما $\mathfrak{M} \nvDash \chi$. وينتج من تعريف $\mathfrak{M} \vDash$ أن $\mathfrak{M} \nvDash \psi \wedge \chi$.

3. حالات $\varphi \equiv \neg\psi$ و$\varphi \equiv \psi \vee \chi$ و $\varphi \equiv \psi \to \chi$ مماثلة، وتُترك تمارين.

4. إذا كان $\varphi \in \Theta$ و$\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$، فلبعض n يكون $\Pi_n = \Pi'_n, \exists x\, \psi(x)^i$. وتكون $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ المقدمة المقابلة لـ $\exists$L؛ أي $\Pi_{n+1} = \Pi'_n, \psi(c)^k$ لثابت c. ومن ثم $\psi(c) \in \Theta$ و$c \in C$. وبفرض الاستقراء $\mathfrak{M} \vDash \psi(c)$، ومن تعريف $\mathfrak{M} \vDash$ نحصل على $\mathfrak{M} \vDash \exists x\, \psi(x)$.

5. إذا كان $\varphi \in \Xi$ و$\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$، فلبعض n يكون $\Lambda_n = \Lambda'_n, \exists x\, \psi(x)^i$. ولأن $\exists x\, \psi(x)$ يبقى في يمين المتتالية المقدمة بمؤشر جديد كلما اختُزل، فإنه يُختزل عددًا لامتناهيًا من المرات في يمين فرع الفشل متى وقع هناك. وكل حد $t \in |\mathfrak{M}|$ يصير في النهاية "أول حد لا يحتوي إلا ثوابت في C_n ولم يُستعمل من قبل في اختزال $\exists x\, \psi(x)$ على اليمين" على فرع الفشل. ولذلك، لكل $t \in |\mathfrak{M}|$، يكون $\psi(t) \in \Lambda_n$ لبعض n، ومن ثم $\psi(t) \in \Xi$. وبفرض الاستقراء $\mathfrak{M} \nvDash \psi(t)$ لكل $t \in |\mathfrak{M}|$. وينتج من تعريف $\mathfrak{M} \vDash$ أن $\mathfrak{M} \nvDash \exists x\, \psi(x)$.

6. حالات $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ مماثلة، وتُترك تمارين. □

نتيجة لازمة 4.8. *خوارزمية البحث عن البرهان في* **G3c** *كاملة: إذا أُجهضت أو لم تتوقف قط، فإن المتتالية الابتدائية* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *غير صالحة، ومن ثم لا يوجد لها برهان.*

برهان. إذا أُجهضت الخوارزمية أو لم تتوقف قط، وُجد فرع فشل يمكن أن نعرّف منه $\mathfrak{M}$. وبموجب قضية مساعدة 4.7، يكون $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ لكل $\varphi \in \Gamma$ و$\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ لكل $\varphi \in \Delta$. (تذكّر أن $\Pi_0 = \Gamma$ و$\Lambda_0 = \Delta$، ومن ثم $\Gamma \subseteq \Theta$ و $\Delta \subseteq \Xi$.) وهكذا تكون $\Gamma \Rightarrow \Delta$ غير صالحة. وبسلامة **G3c**، لا يوجد لها برهان. □

نتيجة لازمة 4.9. *النسق* **G3c** *كامل: إذا كانت* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *صالحة، فإن* $\mathbf{G3c} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

برهان. نثبت المقابل النقيض. افترض أن $\mathbf{G3c} \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. لا بد أن تُجهض خوارزمية البحث عن البرهان أو ألا تتوقف، إذ لا يوجد برهان يمكن العثور عليه. وبموجب نتيجة لازمة 4.8، تكون $\Gamma \Rightarrow \Delta$ غير صالحة. □

4.6 مقدمة

تحدد مسلّمات وقواعد استدلال أنظمة برهان مثل **G3c** أو **N1i** أي أشجار المتتاليات أو صيغ تُعد براهين صحيحة. فإذا أُعطيت شجرة كهذه من المتتاليات أو صيغ (وربما معها معلومات إضافية، مثل القواعد المطبقة في كل خطوة، أو وسوم الفروض وقواعد الاستدلال التي تفرّغها)، أتاحت لنا تعريفات المسلّمات والقواعد

التحقق مما إذا كانت الشجرة المعطاة برهان صحيحًا. أما *العثور على* برهان لمتتالية معطاة، أو لـ صيغة معطاة من فروض معينة، فمسألة مختلفة وأصعب عادةً. وهذه هي مسألة *البحث عن البرهان*.

توجد طريقة ساذجة جدًا للبحث عن البرهان. يمكن عد صيغ متتاليات من الرموز المأخوذة من أبجدية منتهية. ويمكن كذلك عد المتتاليات وأشجار المتتاليات أو صيغ متتاليات من صيغ (مع أقواس خاصة، ربما، للدلالة على تشعب الشجرة). وتتيح لنا المسلّمات والقواعد فحص ما إذا كانت متتالية رموز تمثل برهان صحيحًا فحصًا آليًا. ولذلك نستطيع توليد جميع براهين الصحيحة الممكنة آليًا (بتوليد جميع متتاليات الرموز من الأبجدية المستعملة لتمثيل براهين، ثم فحص كل متتالية مرشحة لمعرفة ما إذا كانت تمثل برهان صحيحًا). وإجراء البحث الساذج هو أن نولّد جميع براهين الصحيحة إلى أن نجد واحدًا يكون برهان للمتتالية المعطاة (أو لـ صيغة المعطاة، مع فروض مفتوحة ضمن الفروض المعطاة).

والطريقة الأفضل هي استعمال الأسلوب الساذج الذي تتبعه يدويًا للعثور على برهان: تبدأ بالمتتالية النهائية، وتختار صيغة، وتطبق قاعدة استدلال "إلى الخلف" لتولّد مقدمة أو مقدمات لو كان لها براهين لأمكن جمعها مع الاستدلال الأخير في برهان للمتتالية المعطاة. وستتبع طريقة مشابهة، وإن كانت أعقد، للعثور على برهان في نظام استنباط طبيعي.

لكن هذه الطريقة ليست مضمونة: فقد تصل إلى طريق مسدود إذا اخترت القاعدة الخاطئة أو رتبت صيغ ترتيبًا خاطئًا. كما أنها غير محددة تمامًا، إذ قد يوجد في كل نقطة أكثر من صيغة واحدة يمكن اختيارها، أو أكثر من قاعدة يمكن تطبيقها إلى الخلف. *وخوارزمية البحث عن البرهان* إجراء محدد تمامًا يجد برهان متى وُجد (أي إنه مضمون).

تلائم بعض أنظمة برهان خوارزميات بحث أبسط من غيرها. ففي أنظمة المتتاليات، يحدد المؤثر الرئيس لـ صيغة والجانب الذي تقع فيه القاعدة التي ينبغي تطبيقها إلى الخلف. فمثلًا، إذا أردت العثور على برهان للمتتالية $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$ التي تقع فيها $\varphi \wedge \psi$ على اليمين، فعليك تطبيق $\wedge\mathrm{R}$ إلى الخلف وتوليد المقدمتين المقابلتين $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$. أما إذا كان نظامك **G1c**، فإن وجود الانقباض يعقّد الأمر لأنه يمنحك خيارات أكثر: يمكنك أيضًا تطبيق CR إلى الخلف وتوليد المقدمة $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi$، ثم المقدمة ذات النسخ الثلاث، وهكذا. ويزداد الأمر سوءًا في **G2c**. فتطبيق $\wedge\mathrm{R}$ إلى الخلف يقتضي أيضًا تخمين Γ_1, Γ_2 بحيث $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$، وتخمين Δ_1, Δ_2 بحيث $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$، ثم تجربة المقدمتين $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi$

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

و$\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \psi$. وقد يقودك تخمين خاطئ إلى طريق مسدود لاحقًا، فتضطر إلى الرجوع للبداية واختيار سياقات مختلفة. وإذا كانت صيغة هي $\varphi \vee \psi$، فعليك اختيار إحدى صورتي $\vee$R، فتنتج إحدى المقدمتين $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ أو $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$. ويضطرك الاختيار الخاطئ مرة أخرى إلى الرجوع.

لا يعاني **G3c** هذه المشكلات. فليس فيه قواعد بنيوية، ويتحدد اختيار قاعدة الاستدلال بـ المؤثر الرئيس وبالجانب الذي تقع فيه صيغة. ولذلك يلائم **G3c** البحث عن البرهان أكثر من **G1c** أو **G2c**. وينتج عن بحث ناجح برهان في **G3c** يمكن بعد ذلك ترجمة برهان إلى **G1c** أو **G2c** (أو حتى **N1c**). ومن ثم فإن وجود خوارزمية بحث لـ **G3c** وخوارزميات لترجمة براهين **G3c** إلى براهين في الأنظمة الأخرى يحل مسألة البحث في تلك الأنظمة أيضًا.

كيف نعرف أن خوارزمية البحث مضمونة؟ يقتضي ذلك إظهار أنه إذا أخفقت الخوارزمية في العثور على برهان، استحال وجود برهان. فقد تخفق خوارزمية سيئة في العثور على برهان مع أنه موجود. ولا تواجه الخوارزمية الساذجة هذه المشكلة لأنها تبحث في جميع براهين الممكنة، لكن المفروض في خوارزمية البحث أن تكون فعّالة وأن تبذل أقل قدر من الجهد.

الفكرة الأساسية لإثبات ضمان خوارزمية البحث هي أن نستخرج من طريقة إخفاقها دليلًا على استحالة وجود برهان للمتتالية. ونفعل ذلك بإظهار أنها غير صالحة. ففي منطق الرتبة الأولى الكلاسيكي، المتتاليات الصالحة $\Gamma \Rightarrow \Delta$ هي التي يجعل فيها كل بنية صيغة واحدةً على الأقل في Γ كاذبة، أو صيغة واحدةً على الأقل في Δ صادقة. والنسق **G3c** سليم، أي إنه لا يبرهن إلا متتاليات صالحة. ويُثبت ذلك بالاستقراء في براهين: فالمسلّمات صالحة بوضوح، وإذا كانت مقدمات قاعدة صالحة كانت نتيجتها صالحة. ولإثبات ضمان خوارزمية البحث، نبيّن أنه إذا أخفق البحث عن برهان للمتتالية $\Gamma \Rightarrow \Delta$، أمكن تعريف بنية تكون فيه جميع صيغ في Γ صادقة وجميع صيغ في Δ كاذبة. وهذا يثبت أيضًا أن **G3c** *كامل*؛ أي إنه إذا كانت $\Gamma \Rightarrow \Delta$ صالحة، وُجد لها برهان في **G3c**. ولأن كل بحث فاشل يبيّن أن المتتالية غير صالحة، فلا بد أن ينجح كل بحث عن برهان لمتتالية صالحة.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

باب 5

البحث عن البرهان

5.1 خوارزمية البحث في G3c

نصف خوارزمية بحث للنسق **G3c**. وليست هذه الخوارزمية الوحيدة الممكنة، ولا حتى أكفأها، لكنها صحيحة: فإذا كان للمتتالية $\Gamma \Rightarrow \Delta$ برهان، توقفت في النهاية ووجدت برهان. وهي مضمونة أيضًا: فإذا توقفت من دون أن تجد برهان، أو لم تتوقف قط، كانت $\Gamma \Rightarrow \Delta$ غير صالحة أصلًا.

من الخصائص الأساسية اللازمة أن تضمن الخوارزمية "اختزال" كل صيغة في $\Gamma \Rightarrow \Delta$ أو في أي متتالية تنتج أثناء البحث؛ أي معاملتها بوصفها الصيغة الرئيسة لقاعدة استدلال مطبقة إلى الخلف، وأن يتكرر ذلك كلما لزم. ونسمي هذه الخاصية *الإنصاف*.

تعمل الخوارزمية على مراحل. وناتج كل مرحلة شجرة متتاليات، ويُنتج ناتج المرحلة التالية باختزال صيغة في كل متتالية عليا ليست مسلّمة بالفعل.

في المرحلة 0 نبدأ بـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$. ولضمان الإنصاف نضع أعدادًا مؤشراتٍ لـ صيغ في Γ وΔ بحيث تتلقى صيغ المختلفة أعدادًا مختلفة. ويمكن، مثلًا، عد صيغ من اليسار إلى اليمين. ونكتب الأعداد مؤشرات علوية. فإذا كنا نبحث، مثلًا، عن برهان لـ $\varphi, \psi \Rightarrow \chi$، كان ناتج المرحلة 0 هو $\varphi^1, \psi^2 \Rightarrow \chi^3$. وأكبر n يظهر مؤشرًا علويًا في متتالية مفهرسة كهذه هو مؤشرها *الأقصى* (وهو 3 في المثال).

إذا احتوت المتتالية أسوارًا، احتجنا أيضًا إلى معرفة الحدود التي نستعملها عند اختزال $\exists x\, \varphi(x)$ على اليمين أو $\forall x\, \varphi(x)$ على اليسار. ولن نحتاج إلا إلى حدود مبنية من رموز ثابتة c_0 و c_1 وc_2، ...، باستعمال رموز الدوال الواقعة في Γ وΔ. ونفترض أن مجموعة هذه الحدود كلها معطاة بتعداد ثابت، بحيث يمكننا الحديث، مثلًا، عن "أول رمز ثابت لا يقع في $\Gamma \Rightarrow \Delta$." ولكل متتالية مفهرسة في الشجرة التي تولدها الخوارزمية مجموعة مرتبطة من رموز ثابتة. ومجموعة رموز ثابتة المسندة إلى المتتالية في المرحلة 0 هي مجموعة جميع رموز ثابتة الواقعة فيها إن وُجدت، وهي $\{c_0\}$ إذا لم تحتوِ أي رموز ثابتة.

افترض أن الخوارزمية ولّدت في المرحلة n شجرة متتاليات مفهرسة، مع مجموعات رموز ثابتة المرتبطة بها. وفي المرحلة $n+1$ نفعل ما يأتي لكل متتالية عليا.

إذا وُجدت صيغة φ تقع على جانبي المتتالية معًا، أو كان جانبها الأيسر يحتوي $\bot$، فلا نفعل شيئًا: فلهذه المتتاليات براهين في **G3c**، ولا يبقى شيء لنفعله لهذه المتتالية العليا بعينها.

إذا لم توجد صيغة غير ذرية في المتتالية، فأجهض الخوارزمية. فلا يوجد برهان لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

وإلا فاختر صيغة غير الذرية φ ذات أصغر مؤشر i. وعندئذ تكون المتتالية العليا إما $\varphi^i, \Pi \Rightarrow \Lambda$ وإما $\Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi^i$. ولتكن k المؤشر الأقصى للمتتالية، ولتكن C مجموعة رموز ثابتة المسندة إليها.

"نختزل" φ^i؛ أي نولّد متتاليات عليا جديدة وفق قاعدة الاستدلال التي يحددها المؤثر الرئيس لـ φ، ووفق وقوع φ^i على اليسار أو اليمين.

1. إذا كان $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$ ووقع على اليسار، فأضف متتالية عليا جديدة فوق $(\psi \wedge \chi)^i, \Pi \Rightarrow \Lambda$:

$$\frac{\psi^{k+1}, \chi^{k+2}, \Pi \;\Rightarrow\; \Lambda}{(\psi \wedge \chi)^i, \Pi \;\Rightarrow\; \Lambda}\,\wedge\mathrm{L}$$

ومجموعة رموز ثابتة المسندة إلى المتتالية الجديدة هي C.

2. إذا كان $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$ ووقع على اليمين، فأضف متتاليتين عليين جديدتين فوق $\Pi \Rightarrow \Lambda, (\psi \wedge \chi)^i$:

$$\frac{\Pi \;\Rightarrow\; \Lambda, \psi^{k+1} \qquad \Pi \;\Rightarrow\; \Lambda, \chi^{k+1}}{\Pi \;\Rightarrow\; \Lambda, (\psi \wedge \chi)^i}\,\wedge\mathrm{R}$$

ومجموعة رموز ثابتة المسندة إلى كل متتالية جديدة هي C.

3. حالات $\varphi \equiv \neg\psi$ و $\varphi \equiv \psi \vee \chi$ و $\varphi \equiv \psi \to \chi$ مماثلة، وتُترك تمارين.

4. إذا كان $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ ووقع على اليسار، فأضف متتالية عليا جديدة فوق $\exists x\, \psi(x)^i, \Pi \Rightarrow \Lambda$:

$$\frac{\psi(c)^{k+1}, \Pi \;\Rightarrow\; \Lambda}{\exists x\, \psi(x)^i, \Pi \;\Rightarrow\; \Lambda}\,\exists\mathrm{L}$$

حيث c أول رمز ثابت لا ينتمي إلى C. ومجموعة رموز ثابتة المسندة إلى المتتالية الجديدة هي $C \cup \{c\}$.

5. إذا كان $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ ووقع على اليمين، فأضف متتالية عليا جديدة فوق $\Pi \Rightarrow \Lambda, \exists x\, \psi(x)$:

$$\frac{\Pi \;\Rightarrow\; \Lambda, \exists x\, \psi(x)^{k+1}, \psi(t)^{k+2}}{\Pi \;\Rightarrow\; \Lambda, \exists x\, \psi(x)^i}\,\exists\mathrm{R}$$

حيث t أول حد لا يحتوي إلا رموز ثابتة في C ولم يُستعمل من قبل في اختزال $\exists x\, \psi(x)$ على اليمين تحت هذه المتتالية. وإذا استُعملت كل هذه الحدود، نعيد استعمال أول حد في التعداد الثابت مبني فقط من ثوابت C، بدل إدخال ثابت قد يقع خارج C. ومجموعة رموز ثابتة المسندة إلى المتتالية الجديدة هي C.

6. حالات $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ مماثلة، وتُترك تمارين.

إذا لم نضف في المرحلة $n+1$ متتالية جديدة إلى أي متتالية عليا، توقفت الخوارزمية بنجاح. وفي هذه الحالة وجدنا برهان لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$، نحصل عليه من شجرة المرحلة $n+1$ بحذف المؤشرات كلها. فالمتتاليات العليا كلها إما من الصورة $\varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi$ وإما من الصورة $\bot, \Pi \Rightarrow \Lambda$. وجميع الاستدلالات صحيحة في **G3c**. وهذا واضح للاستدلالات القضايا‌وية. ولاحظ أن مجموعة C من رموز ثابتة المسندة إلى متتالية تحتوي، في كل خطوة، جميع رموز ثابتة الواقعة في المتتالية. ولذلك يتحقق شرط المتغير الذاتي في الاختزال باستعمال $\exists\mathrm{L}$ و $\forall\mathrm{R}$، لأن المتغير الذاتي c كان رمز ثابت لا ينتمي إلى المجموعة C المسندة إلى النتيجة، فلم يقع c في النتيجة أيضًا. فنحصل على:

قضية 5.1. *خوارزمية البحث عن البرهان في* **G3c** *صحيحة: إذا توقفت بنجاح، كان للمتتالية الابتدائية* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *برهان.*

5.2 جداول الصدق

أنظمة جداول الصدق أنظمة برهان وثيقة الصلة بحسابات المتتاليات، وتلائم خصوصًا البحث عن البرهان، سواء يدويًا أم بتنفيذ برمجي. وبدل بناء أشجار من المتتاليات، يكون برهان في جدول الصدق شجرةً من صيغ. لكن قواعدها، بخلاف الاستنباط الطبيعي، تعكس قواعد حساب المتتاليات. وبرهان جدول الصدق في جوهره بحث صريح عن نموذج؛ ولذلك تسمى هذه الجداول أحيانًا *جداول دلالية* أو *أشجار صدق*.

جدول الصدق الموقّع شجرة من صيغ موقعة، يمكن أن تكون من الصورة $\mathbb{T}\ \varphi$ أو $\mathbb{F}\ \varphi$. وتنمو الأشجار إلى الأسفل، وتبدأ بـ صيغ تحدد ما نريد أن نبرهن. فمثلًا، لكي نبرهن المتتالية $\varphi, \psi \Rightarrow \chi, \theta$، نبدأ بـ $\mathbb{T}\ \varphi, \mathbb{T}\ \psi, \mathbb{F}\ \chi, \mathbb{F}\ \theta$. و بنية يجعل φ وψ صادقتين وχ وθ كاذبتين هو بنية يبيّن أن $\varphi, \psi \Rightarrow \chi, \theta$ غير صالحة.

يمكن توسيع عقدة ورقية (سفلية) في جدول الصدق بقواعد تمديد الفروع، فتضيف عقدًا أخرى إلى الفرع نفسه أو عقدتين شقيقتين تحته، وتقسم الفرع إلى فرعين جديدين. ويمكن تطبيق القواعد على أي صيغة موقعة فوق العقدة في الفرع نفسه. وترد قواعد تمديد الفروع لنظام جداول الصدق الكلاسيكي **Tc** في جدول 5.1.

كما ترى، ليست القواعد إلا قواعد **G3c** مقلوبة، وتشير العلامتان $\mathbb{T}$ و$\mathbb{F}$ إلى كون صيغة رئيسةً على يسار المتتالية أو يمينها على الترتيب.

يكون فرع جدول الصدق *مغلقًا* إذا احتوى كلًا من $\mathbb{T}\ \varphi$ و$\mathbb{F}\ \varphi$، أو احتوى $\mathbb{T}\ \bot$. وإذا أُغلقت جميع الفروع قلنا إن جدول الصدق كله مغلق. وهذا، مثلًا، جدول مغلق للمتتالية $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$؛ أي إنه يبدأ بـ $\mathbb{T}\ \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ و $\mathbb{F}\ (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$:

$$\neg\mathbb{T}\ \frac{\mathbb{T}\ \neg\varphi}{\mathbb{F}\ \varphi} \qquad \neg\mathbb{F}\ \frac{\mathbb{F}\ \neg\varphi}{\mathbb{T}\ \varphi}$$

$$\wedge\mathbb{T}\ \frac{\mathbb{T}\ \varphi\wedge\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\ \varphi\\ \mathbb{T}\ \psi\end{array}} \qquad \wedge\mathbb{F}\ \frac{\mathbb{F}\ \varphi\wedge\psi}{\mathbb{F}\ \varphi \quad | \quad \mathbb{F}\ \psi}$$

$$\vee\mathbb{T}\ \frac{\mathbb{T}\ \varphi\vee\psi}{\mathbb{T}\ \varphi \quad | \quad \mathbb{T}\ \psi} \qquad \vee\mathbb{F}\ \frac{\mathbb{F}\ \varphi\vee\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{F}\ \varphi\\ \mathbb{F}\ \psi\end{array}}$$

$$\rightarrow\mathbb{T}\ \frac{\mathbb{T}\ \varphi\rightarrow\psi}{\mathbb{F}\ \varphi \quad | \quad \mathbb{T}\ \psi} \qquad \rightarrow\mathbb{F}\ \frac{\mathbb{F}\ \varphi\rightarrow\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\ \varphi\\ \mathbb{F}\ \psi\end{array}}$$

$$\forall\mathbb{T}\ \frac{\mathbb{T}\ \forall x\,\varphi(x)}{\mathbb{T}\ \varphi(t)} \qquad \forall\mathbb{F}\ \frac{\mathbb{F}\ \forall x\,\varphi(x)}{\mathbb{F}\ \varphi(a)}$$

$$\exists\mathbb{T}\ \frac{\mathbb{T}\ \exists x\,\varphi(x)}{\mathbb{T}\ \varphi(a)} \qquad \exists\mathbb{F}\ \frac{\mathbb{F}\ \exists x\,\varphi(x)}{\mathbb{F}\ \varphi(t)}$$

جدول 5.1: قواعد **Tc**. في $\forall\mathbb{F}$ و $\exists\mathbb{T}$، يجب ألا يقع رمز ثابت a في الفرع الواقع فوقهما؛ أي يجب أن يكون جديدًا على الفرع.

Assumption	$\mathbb{T}\ \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				.1
Assumption	$\mathbb{F}\ (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				.2
$\vee\mathbb{T}\,1$	$\mathbb{T}\ \psi \wedge \chi$ ✓		$\mathbb{T}\ \varphi$		.3
$\wedge\mathbb{F}\,2$	$\mathbb{F}\ \varphi \vee \chi$ ✓	$\mathbb{F}\ \varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\ \varphi \vee \chi$ ✓	$\mathbb{F}\ \varphi \vee \psi$ ✓	.4
$\vee\mathbb{F}\,4$			$\mathbb{F}\ \varphi$	$\mathbb{F}\ \varphi$	.5
$\vee\mathbb{F}\,4$			$\mathbb{F}\ \chi$	$\mathbb{F}\ \psi$	.6
$\wedge\mathbb{T}\,3$	$\mathbb{T}\ \psi$	$\mathbb{T}\ \psi$	$\otimes$	$\otimes$	.7
$\wedge\mathbb{T}\,3$	$\mathbb{T}\ \chi$	$\mathbb{T}\ \chi$			.8
$\vee\mathbb{F}\,4$	$\mathbb{F}\ \varphi$	$\mathbb{F}\ \varphi$			.9
$\vee\mathbb{F}\,4$	$\mathbb{F}\ \chi$	$\mathbb{F}\ \psi$			.10
	$\otimes$	$\otimes$			

تشير علامات الصح إلى أن القاعدة المقابلة قد طُبقت على صيغة في جميع الفروع الواقعة تحتها. وتشير $\otimes$ إلى أن الفرع مغلق. أما أرقام الأسطر بعد القواعد فتحدد صيغ الموقعة التي طُبقت عليها القاعدة (أي صيغة الواقعة في الفرع نفسه على السطر المشار إليه).

البحث عن البرهان سهل في جداول الصدق. فنولّد جدولًا على مراحل. في المرحلة 0 نكتب صيغ الابتدائية في الأعلى. وفي المرحلة $n+1$ نفعل ما يأتي لكل عقدة ورقية على فرع مفتوح: نجد أول صيغة موقعة غير ذرية من الأعلى لم تؤشَّر بعد، ونطبق عليها قاعدة تمديد الفرع. وبعد تطبيق القاعدة في كل فرع مفتوح

يحتوي الصيغة الموقعة المعنية، نؤشرها. ولا ينطبق شرط عدم التكرار هذا إلا على الصيغ غير الذرية في الفروع المفتوحة. (وقد وُلد المثال السابق بهذه الخوارزمية.)

لا تُؤشَّر صيغ الموقعة من الصورتين $\forall\ \mathbb{T}$ و$\exists\ \mathbb{F}$ قط، ولذلك يلزم معالجتها معاملة خاصة. فإذا وُجدت وجب ضمان تطبيق $\forall\mathbb{T}$ و$\exists\mathbb{F}$ في النهاية على جميع الحدود المنطبقة. ويمكن ضمان ذلك، مثلًا، بتطبيقهما في كل مرحلة على جميع هذه الصيغ في كل فرع مفتوح، بعد معالجة أعلى صيغة موقعة لا تكون من هاتين الصورتين. والحد t المستعمل هو أول حد يمكن بناؤه من رموز ثابتة الواقعة بالفعل في الفرع (أو c_0 إذا لم يقع أي رمز ثابت) ومن دوال الواقعة في صيغ الابتدائية، ولا تقع الصيغة الموقعة المقابلة صيغة $\mathbb{T}\ \psi(t)$ أو $\mathbb{F}\ \psi(t)$ في الفرع من قبل. وإذا لم يوجد حد منطبق غير مستعمل، كانت الصيغة المسوّرة مستنفدة في تلك المرحلة، فلا نضيف لها عقدة؛ ونعود إليها في مرحلة لاحقة إذا أدخل الفرع ثوابت جديدة فظهرت حدود منطبقة جديدة.

إذا لم ينتج هذا البحث جدولًا مغلقًا، فإما أن يحتوي فرعًا مفتوحًا منتهيًا أُشّرت فيه جميع صيغ غير الذرية، وإما أن ينتج شجرة لامتناهية متناهية التشعب، ولا بد أن تحتوي فرعًا لامتناهيًا. وكما في قسم 4.5، يمكننا تعريف بنية $\mathfrak{M}$ بحيث إذا وقعت $\mathbb{T}\ \varphi$ في الفرع كان $\mathfrak{M} \vDash \varphi$، وإذا وقعت $\mathbb{F}\ \varphi$ كان $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$. (خذ $\Theta = \{\varphi : \mathbb{T}\ \varphi$ في الفرع$\}$ و $\Xi = \{\varphi : \mathbb{F}\ \varphi$ في الفرع$\}$.)

يمكن بسهولة ترجمة جداول الصدق الناتجة بهذه الطريقة إلى براهين في **G3c** بإسناد متتالية إلى كل عقدة. فإذا كانت الصيغ الابتدائية تقابل المتتالية $\Gamma \Rightarrow \Delta$، فوسم كل صيغة ابتدائية بـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$. وإذا مُدِّد فرع بتطبيق قاعدة تمديد على صيغة موقعة $\mathbb{T}\ \varphi$، فوسم الورقة بـ $\varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda$؛ وإذا طُبقت على صيغة موقعة $\mathbb{F}\ \varphi$، فوسم الورقة بـ $\Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi$. وحيث يطبق الجدول قاعدة $\star\mathbb{T}$، طبّق قاعدة $\star\mathrm{L}$ على المتتالية (مع φ صيغةً رئيسة)؛ وحيث يطبق $\star\mathbb{F}$، طبّق قاعدة $\star\mathrm{R}$. وتكون مقدمات القاعدة هي المتتاليات التي تسم العقد المقابلة المضافة إلى الجدول. ومتى أُغلق جدول بـ $\mathbb{T}\ \varphi$ و$\mathbb{F}\ \varphi$، كان وسم العقدة الورقية الأخيرة متتاليةً من الصورة $\varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi$. وإذا أُغلق بـ $\mathbb{T}\ \bot$، كان وسم الورقة من الصورة $\bot, \Pi \Rightarrow \Lambda$، وهي مسلّمة **G3c** أيضًا. وقد تُسند المتتالية نفسها إلى عقد متعاقبة في الجدول؛ فاحذف المكررات. فمثلًا يترجم الجدول السابق إلى برهان الآتي:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\vee\mathrm{R} \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi, \chi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \chi}\vee\mathrm{R}}{\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)}\wedge\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi, \chi \Rightarrow \varphi, \psi}{\psi, \chi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\vee\mathrm{R}}{\psi \wedge \chi \Rightarrow \varphi \vee \psi}\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi, \chi \Rightarrow \varphi, \chi}{\psi, \chi \Rightarrow \varphi \vee \chi}\vee\mathrm{R}}{\psi \wedge \chi \Rightarrow \varphi \vee \chi}\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)}\wedge\mathrm{R}}{\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)}\vee\mathrm{L}
$$

القسم I

نظرية البرهان

مادة نظرية البرهان غير مكتملة وتجريبية، ولم تُدرج بعد في بناء ملف PDF الرئيس.

5.3 مقدمة

حساب لامبدا نموذج بسيط للحوسبة. وهو يعمل على حدود مبنية من المتغيرات. فإذا كان N وM حدين، كان (NM) حدًا أيضًا ("تطبيق N على M"). وإذا كان N حدًا، كان $\lambda x.\, N$ حدًا. وإذا احتوى N المتغير x، فإن وقائع x المقابلة في $\lambda x.\, N$ تكون مقيّدة بالمعامل λx، فلا تعود حرة. ويقال إن حدًا من الصورة $(\lambda x.\, NM)$ ينقبض بيتا إلى $N[M/x]$، أي إلى نتيجة استبدال M بكل وقوع حر لـ x في N. ويتحول N بتحويل بيتا إلى N' إذا نتج N' من N بانقباض بيتا لحد جزئي، ونكتب $N \to N'$. والحوسبة في حساب λ متتالية $N \to N_1 \to N_2 \to \ldots$. فإذا انتهت المتتالية بحد N_k لا يمكن انقباض بيتا لأي حد جزئي منه، سُمّي سويًا أو صورة سوية لـ N. وفكر في الحوسبة في حساب λ بوصفها متتاليات كهذه. تتوقف الحوسبة إذا نتجت صورة سوية، وتكون تلك الصورة ناتج الحوسبة. ويتبين أن هذا النموذج البسيط تام تورنغ: فكل دالة جزئية عودية يمكن حسابها بحد في حساب λ.

اكتشف هاسكل كاري ووليام هوارد، كل على حدة، تشابهًا وثيقًا بين الاستنباط الطبيعي وحساب λ. فالحد $\lambda x.\, N$ دالة بحسب الحدس: المتغير x هو المعطى، وN يبين كيف نحسب القيمة انطلاقًا منه. ويكون $(\lambda x.\, NM)$ تطبيق الدالة $\lambda x.\, N$ على المعطى M، ويبين انقباض بيتا كيفية تقييمه:

نستبدل M بـ x في N، ثم نواصل تقييم الحد الناتج. فكر الآن في هذه الدوال بوصفها ذات مجال ومدى ثابتين. فإذا كان مجال $\lambda x.\, N$ هو A ومداه B، وجب أن نعد x متغيرًا لا يأخذ إلا معطيات من A، وأن نعد N منتجًا قيمًا من B. ولذلك لا يكون $(\lambda x.\, NM)$ ذا معنى إلا إذا كان $\lambda x.\, N$ دالة $A \to B$ وكان $M \in A$. وإذا أضفنا هذه المعلومات إلى حساب λ حصلنا على حساب λ المنمّط. وليست كل عبارة $(\lambda x.\, NM)$ مشروعة في الحساب المنمّط، بل تقتصر المشروعة على العبارات التي تتلاءم فيها "أنماط" $\lambda x.\, N$ وM؛ أي يكون نمط $\lambda x.\, N$ هو $A \to B$ ونمط M هو A. ولا يكون نمط $\lambda x.\, N$ هو $A \to B$ إلا إذا كان نمط x هو A ونمط N هو B. وبوجه عام ليست كل عبارة $(M_1 M_2)$ مشروعة، بل تقتصر الحدود المشروعة منها على ما كان فيه نمط M_1 هو $A \to B$ ونمط M_2 هو A؛ وعندئذ يكون نمط $(M_1 M_2)$ هو B.

تقابل قواعد التنميط هذه بوضوح اشتقاقات في الاستنباط الطبيعي، حيث تمثّل الأنماط صيغ، وتقابل اشتقاقات نفسها حدود λ. فمثلًا، يقابل اشتقاق لـ $\varphi \to \psi$ حدًا $\lambda x^{\varphi}.\, N$ نمطه الدالي $\varphi \to \psi$. وتقابل قواعد الاستدلال في الاستنباط الطبيعي قواعد التنميط في حساب لامبدا المنمّط، مثلًا:

$$\to\text{Intro}\ \frac{\begin{array}{c}[\varphi]^x \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\, x \qquad \text{تقابل} \qquad \frac{N : \psi x : \varphi \ \Rightarrow}{\lambda x^{\varphi}.\, N : \varphi \to \psi \ \Rightarrow}$$

وتعني القاعدة على اليمين أنه إذا كان نمط x هو φ ونمط N هو ψ، كان نمط $\lambda x^{\varphi}.\, N$ هو $\varphi \to \psi$.

تقابل قاعدة $\to$Elim قاعدة التنميط لحدود التطبيق، أي:

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\, \to\text{Elim} \qquad \text{تقابل} \qquad \frac{\Rightarrow\ M_1 : \varphi \to \psi \qquad \Rightarrow\ M_2 : \varphi}{\Rightarrow\ (M_1 M_2) : \psi}$$

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

إذا تبعت قاعدة $\to$Intro فورًا قاعدة $\to$Elim، أمكن تبسيط اشتقاق:

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\to\text{Intro}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi}\to\text{Elim}\qquad\to\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}$$

وهذا يقابل انقباض بيتا لحدود لامبدا:

$$(\lambda x^{\varphi}.\,NM)\quad\to\quad N[M/x].$$

وتوجد مقابلات مماثلة بين قواعد $\wedge$ والأنماط "الضربية"، وبين قواعد $\vee$ والأنماط "الجمعية".

تسمى هذه المقابلة بين حدود حساب لامبدا البسيط المنمّط واشتقاقات الاستنباط الطبيعي مقابلة "كاري–هوارد" أو "البراهين بوصفها برامج" أو "القضايا بوصفها أنماطًا". وإلى جانب مقابلة صيغ (القضايا) للأنماط والبراهين للحدود، يمكن تلخيص المقابلات هكذا:

البرنامج	المنطق
النمط	القضية/صيغة
الحد	البرهان
المتغير	الفرض
المتغير المقيّد	الفرض المفرّغ
المتغير الحر	الفرض غير المفرّغ
النمط الدالي	$\varphi \to \psi$
النمط الضربي	$\varphi \wedge \psi$
النمط الجمعي	$\varphi \vee \psi$
النمط الخالي	$\bot$

مقابلة كاري–هوارد إحدى ركائز مساعدات البرهان الآلية وفاحصات أنماط البرامج، لأن فحص برهان يشهد لقضية، كما فعلنا أعلاه، لا يعدو فحص ما إذا كان برنامج (حد) يحمل النمط المعلن.

5.4 التطبيع

نثبت في هذا القسم أنه يمكن، وفق ترتيب اختزال مناسب، اختزال أي استنتاج إلى استنتاج عادي، وتسمى هذه خاصية *التطبيع*. وسنستعمل التناظر بين القضايا والأنماط: فنبيّن أن كل حد برهان يمكن اختزاله إلى صيغة عادية؛ ومن ذلك ينتج تطبيع اشتقاقات الاستنباط الطبيعي.

نعرّف أولًا بعض الدوال التي تقيس تعقيد الحدود. ويُعرَّف طول $\mathsf{len}(\varphi)$ لكل صيغة على النحو الآتي:

$$\begin{aligned}
\mathsf{len}(p) &= 0 \\
\mathsf{len}(\bot) &= 0 \\
\mathsf{len}(\varphi \wedge \psi) &= \mathsf{len}(\varphi) + \mathsf{len}(\psi) + 1 \\
\mathsf{len}(\varphi \vee \psi) &= \mathsf{len}(\varphi) + \mathsf{len}(\psi) + 1 \\
\mathsf{len}(\varphi \to \psi) &= \mathsf{len}(\varphi) + \mathsf{len}(\psi) + 1.
\end{aligned}$$

ويقاس تعقيد الردكس M برتبة القطع $\mathsf{cr}(M)$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{cr}((\lambda x^{\varphi}.\, N^{\psi})Q) &= \mathsf{len}(\varphi) + \mathsf{len}(\psi) + 1 \\
\mathsf{cr}(\mathsf{p}_i(\langle M^{\varphi}, N^{\psi}\rangle)) &= \mathsf{len}(\varphi) + \mathsf{len}(\psi) + 1 \\
\mathsf{cr}(\mathsf{case}(\mathsf{in}_i^{\varphi_i}(M^{\varphi_i}), x_1^{\varphi_1}.N_1^{\chi}, x_2^{\varphi_2}.N_2^{\chi})) &= \mathsf{len}(\varphi_1) + \mathsf{len}(\varphi_2) + 1.
\end{aligned}$$

ويقاس تعقيد حد البرهان بأعلى رتبة لردكس فيه، وبالصفر إذا كان عاديًا:

$$\mathsf{mr}(M) = \max\big(\{\mathsf{cr}(N) \mid N \text{ حد جزئي من } M \text{ وهو ردكس}\} \cup \{0\}\big).$$

قضية مساعدة 5.2. *إذا كان $M[N^{\varphi}/x^{\varphi}]$ ردكسًا وكان $M \not\equiv x$، تحققت إحدى الحالات الآتية:*

1. *يكون M نفسه ردكسًا؛ أو*

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

2. يكون M من الصورة $\mathrm{p}_i(x)$، ويكون N من الصورة $\langle P_1, P_2\rangle$؛

3. يكون M من الصورة $\mathrm{case}(x, x_1.P_1, x_2.P_2)$، ويكون N من الصورة $\mathrm{in}_i(Q)$؛

4. يكون M من الصورة xQ، ويكون N من الصورة $\lambda x.\, P$.

في الحالة الأولى $\mathrm{cr}(M[N/x]) = \mathrm{cr}(M)$؛ وفي الحالات الأخرى $\mathrm{cr}(M[N/x]) = \mathrm{len}(\varphi)$.

برهان. البرهان بالاستقراء في M.

1. إذا كان M متغيرًا مفردًا y وكان $y \not\equiv x$، فإن $y[N/x]$ هو y، فلا يكون ردكسًا.

2. إذا كان M من إحدى الصور $\langle N_1, N_2\rangle$ أو $\lambda x.\, N$ أو $\mathrm{in}_i^{\varphi}(N)$، فإن $M[N^{\varphi}/x^{\varphi}]$ يكون من الصورة نفسها، ومن ثم لا يكون ردكسًا.

3. إذا كان M من الصورة $\mathrm{p}_i(P)$، فهناك حالتان.

   a) إذا كان P من الصورة $\langle P_1, P_2\rangle$، كان $M \equiv \mathrm{p}_i(\langle P_1, P_2\rangle)$ ردكسًا، ومن الواضح أن

$$M[N/x] \equiv \mathrm{p}_i(\langle P_1[N/x], P_2[N/x]\rangle)$$

   ردكس أيضًا. ورتبتا القطع متساويتان.

b) إذا كان P متغيرًا مفردًا، فلا بد أن يكون x لكي يجعل التعويض ردكسًا، ولا بد أن يكون N من الصورة $\langle P_1, P_2\rangle$. انظر الآن في

$$M[N/x] \equiv \mathrm{p}_i(x)[\langle P_1, P_2\rangle/x],$$

وهو $\mathrm{p}_i(\langle P_1, P_2\rangle)$. ورتبة قطعه تساوي $\mathrm{len}(\varphi)$.

وحالتا $\mathrm{case}(N, x_1.N_1, x_2.N_2)$ وPQ مماثلتان. □

قضية مساعدة 5.3. *إذا اختُزل الردكس الجذري M إلى M'، وكان $\mathrm{cr}(M) > \mathrm{cr}(N)$ لكل حد جزئي أصلي N من M يكون ردكسًا، فإن $\mathrm{cr}(M) > \mathrm{mr}(M')$.*

برهان. نبرهن بتمييز الحالات.

1. إذا كان M من الصورة $\mathrm{p}_i(\langle M_1, M_2\rangle)$، فإن $M' = M_i$. وكل حد جزئي من M_i حد جزئي أصلي من M، فتنتج الدعوى.

2. إذا كان M من الصورة $(\lambda x^\varphi. N)Q^\varphi$، فإن $M' = N[Q^\varphi/x^\varphi]$. وقد يأتي أي ردكس في M' من ردكس في N أو في Q مع بقاء رتبة القطع نفسها، أو قد ينشأ من التعويض وتكون رتبته $\mathrm{len}(\varphi)$. والرتب الموروثة أصغر من $\mathrm{cr}(M)$ بالفرض، كما أن $\mathrm{len}(\varphi) < \mathrm{cr}(M)$ بالتعريف.

3. إذا كان M من الصورة

$$\mathrm{case}(\mathrm{in}_i(N^{\varphi_i}), x_1^{\varphi_1}.N_1^{\chi}, x_2^{\varphi_2}.N_2^{\chi}),$$

فإن $M' \equiv N_i[N/x_i^{\varphi_i}]$. وقد يأتي أي ردكس في M' من N_i أو من الحد المحقون N مع بقاء رتبته، أو قد ينشأ من التعويض وتكون رتبته $\mathrm{len}(\varphi_i)$. والرتب الموروثة أصغر من $\mathrm{cr}(M)$ بالفرض، كما أن $\mathrm{len}(\varphi_i) < \mathrm{cr}(M)$ بالتعريف. □

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

مبرهنة 5.4. *لكل حد برهان صحيح النوع متتالية اختزال منتهية إلى صيغة عادية؛ ولكل اشتقاقات صحيحة النوع متتالية اختزال منتهية إلى اشتقاقات عادية.*

برهان. تنتج الدعوى الثانية من الأولى. لكن استقراء الرتبة القصوى في النص المصدر ليس برهانًا صحيحًا لهذه المبرهنة:

1. يقترح ذلك الاستقراء اختيار ردكس ذي رتبة قصوى لا يحتوي ردكسًا جزئيًا من الرتبة نفسها، ثم عدّ الردكسات ذات تلك الرتبة.

2. غير أن نقصان هذا العدد غير مضمون لسببين:

   a) قد يولّد الانقباض ردكسًا جديدًا يمتد عبر السياق المحيط والحد الناتج، وهو ما لا تضبطه القضية المساعدة السابقة؛

   b) وقد يولّد اختزال حذف الفصل، بواسطة التعويض، ردكسًا أعلى رتبة.

لذلك لا نعيد عرض استقراء المصدر بوصفه برهانًا. ويتطلب البرهان الصحيح حجة مستقلة باستعمال مرشحات القابلية للاختزال أو حجة مكافئة، وهي غير معروضة هنا؛ فتبقى المبرهنة في هذا القسم بلا برهان. □

يضمن التطبيع أن لكل حد صحيح النوع متتالية اختزال منتهية واحدة على الأقل إلى صيغة عادية؛ ومن ثم تتوقف بعض استراتيجيات الاختزال المطبِّعة. ويضمن حفظ النوع أن القيمة الناتجة من النوع الصحيح. فمثلًا، إذا كان N من النوع $\varphi \to \psi$ وكان M من النوع φ، فإن اختزالًا مطبِّعًا لـ NM ينتج صيغة عادية N' من النوع ψ.

وهناك نتيجة أقوى لا تثبتها الحجة السابقة، هي *التطبيع القوي*: كل متتالية من خطوات الاختزال الأحادية تبدأ بحد صحيح النوع منتهية. وينتج من ذلك، على وجه الخصوص، أن كل استراتيجية اختزال تتوقف. ويتطلب البرهان حجة إضافية، مثل حجة مرشحات القابلية للاختزال.

ولمعرفة متى تؤدي طرائق تنفيذ الحساب المختلفة إلى القيمة نفسها، ننظر في خاصية *التلاقي*، أو خاصية تشيرش–روسر. إذا كان $N \twoheadrightarrow N_1$ و $N \twoheadrightarrow N_2$، فالتلاقي يعني وجود حد N' بحيث $N_1 \twoheadrightarrow N'$ و $N_2 \twoheadrightarrow N'$. وتذكّر أن $N \twoheadrightarrow N'$ يعني أن N' ينتج من صفر أو أكثر من خطوات

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

الاختزال $\to$. فإذا كان N_1 عاديًا، فالحد الوحيد N' الذي يحقق $N_1 \twoheadrightarrow N'$ هو N_1 نفسه، باستعمال صفر من الخطوات. ومن ثم، إذا كان N_1 وN_2 عاديين، كان $N_1 = N' = N_2$. وإذا افترضنا أن علاقة الخطوة الواحدة $\to$ مطبِّعة بقوة، انتهت كل طريقة للاختزال إلى صيغة عادية؛ وإذا افترضنا التلاقي أيضًا، كانت أي صيغتين عاديتين ناتجتين متساويتين. وعندئذ ينتهي الحساب دائمًا وتكون قيمته مستقلة عن طريقة إجرائه.

غالبًا ما يصعب إثبات تلاقي علاقة، لكن يسهل إثبات الشرط الأضعف الآتي:

قضية 5.5 (خاصية تشيرش–روسر الضعيفة). *إذا كان $N \to N_1$ و$N \to N_2$، وُجد حد N' بحيث $N_1 \twoheadrightarrow N'$ و$N_2 \twoheadrightarrow N'$.*

برهان. إذا تطابق موضعا الردكس المقلَّصان، كان $N_1 = N_2$. وإذا كانا منفصلين، تبادل التقليصان موضعيهما. وإذا كان أحدهما داخل الآخر، نفحص قاعدة الاختزال الخارجية: فيُقلَّص المتبقي المحتفظ به بعد الخطوة الخارجية، ولا يحتاج المتبقي الممحُو إلى خطوة، وتُقلَّص جميع المتبقيات التي يكررها تعويض بيتا أو تعويض الحالة. ثم يضمن توافق الاختزال مع التعويض المتفادي لالتقاط المتغيرات وجود مختزَل مشترك. □

قضية مساعدة 5.6 (مبرهنة نيومان). *إذا كانت $\to$ مطبِّعة بقوة وتحقق خاصية تشيرش–روسر الضعيفة، فإنها متلاقية.*

برهان. افترض أن لـ N صيغتين عاديتين مختلفتين U, V، واكتب الخطوتين الأوليين كما يأتي:

$$N \to N_1 \twoheadrightarrow U,$$
$$N \to N_2 \twoheadrightarrow V.$$

يعطي التلاقي المحلي حدًا P بحيث $N_1 \twoheadrightarrow P$ و$N_2 \twoheadrightarrow P$ (وهذا تافه إذا كان $N_1 = N_2$)، ويعطي الانتهاء $P \twoheadrightarrow W$ لصيغة عادية W. ولأن $U \neq V$، يختلف W عن واحدة منهما على الأقل؛ ولذلك يكون المختزَل الأحادي المقابل N_1 أو N_2 ذا صيغتين عاديتين مختلفتين من جديد. ويؤدي تكرار ذلك إلى سلسلة لامتناهية من خطوات $\to$، مناقضًا التطبيع القوي. ومن ثم تكون الصيغ العادية وحيدة؛ ومع الانتهاء تستلزم وحدانية الصيغ العادية التلاقي. □

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

5.5 حدود البرهان

نوسم الفروض في **N1i** بمتغيرات (مثل φ^x) بوصفها وسوم تفريغ. وفي **N2i** تحتوي كل متتالية $\Gamma \Rightarrow \varphi$ قائمة أزواج من متغير–صيغة في السياق Γ على اليسار. ولذلك تحمل كل متتالية في برهان من **N2i** معلومات لا عن نتيجة برهان حتى تلك النقطة، أي عما نبرهن وهو φ، فحسب، بل عن الفروض المفتوحة عند كل نقطة، أي Γ، أيضًا. فما الذي يحدث لو ضمّنا كل متتالية كذلك معلومات عن كيف نبرهن φ؟ يمكن لهذا الغرض تعريف نظام موسوم *بالحدود* **tN2i** تكون متتالياته من الصورة $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$. ويظل Γ وφ كما كانا: مجموعة أزواج من الصورة $x : \psi$، والـ صيغة التي أثبتها الـ برهان الجزئي المنتهي بالمتتالية من الفروض في Γ. أما N فهو حد معين يرمّز برهان المنتهي بتلك المتتالية.

تُبنى الحدود التي نسندها إلى كل متتالية من المتغيرات $x, y, \ldots$، باستعمال رموز دوال ترمّز الاستدلالات المنفذة حتى تلك النقطة. ونحتاج إلى رمز دالة مستقل لكل قاعدة استدلال. وتسمى رموز الدوال المقابلة لقواعد إدخال "بانيات"، والمقابلة لقواعد حذف "هادمات". ويأخذ كل رمز دالة من المعطيات عدد مقدمات القاعدة. فمثلًا، يمكن أن يكون رمزا الدالة لـ $\wedge$Intro و$\wedge$Elim$_1$ هما $c^\wedge$ (ثنائي الموضع) و $d_1^\wedge$ (أحادي الموضع). وعندئذ تصير هاتان القاعدتان في **tN2i**:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow N : \varphi \quad \Gamma_2 \Rightarrow M : \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow c^\wedge(N, M) : \varphi \wedge \psi} \wedge\text{Intro} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow N : \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow d_1^\wedge(N) : \varphi} \wedge\text{Elim}_1$$

إذا فرّغت قاعدة استدلال فرضًا، أي إذا كانت لها مقدمة تشير إلى صيغة موسومة $x : \varphi$ لا تقع في سياق النتيجة، وجب أن نمثل ذلك في حد البرهان أيضًا. وتقوم رموز الدوال المرتبطة بهذه القواعد بتقييد المتغيرات المقابلة. فقاعدة $\rightarrow$Intro، مثلًا، تنتقل من المقدمة $x : \varphi, \Gamma \Rightarrow \psi$ إلى $\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$. ويأخذ الباني $c^\rightarrow$ معطى واحدًا، لكنه يجب أن يشير أيضًا إلى أن المتغير x صار مقيّدًا. وهذه طريقة حد البرهان للتعبير عن تفريغ الفرض الموسوم بـ x. فإذا كان حد برهان المقدمة هو N، أمكن كتابة حد برهان النتيجة $c^\rightarrow([x]N)$ وكتابة القاعدة هكذا:

$$\frac{x : \varphi, \Gamma \Rightarrow N : \psi}{\Gamma \Rightarrow c^\rightarrow([x]N) : \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}$$

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

ولكي نستطيع إعادة بناء برهان كاملًا، نحتاج إلى معلومات إضافية. فإذا لم تحدد صيغ مقدمات القاعدة صيغة النتيجة تحديدًا كاملًا، وجب إضافة تلك المعلومات إلى الحد. وهذا هو الحال في $\rightarrow$Intro، ولذلك نكتب $c^{\rightarrow}([x:\varphi]N)$. وهو الحال أيضًا في $\vee$Intro و$\bot_I$، فنستعمل رموز دوال تحمل هذه المعلومات، مثلًا:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow N:\varphi}{\Gamma \Rightarrow c_1^{\vee\psi}(N):\varphi\vee\psi}\vee\text{Intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow N:\bot}{\Gamma \Rightarrow d_\varphi^{\bot}(N):\varphi}\bot_I$$

تتيح هذه الأفكار بناء نظام استنباط طبيعي بصيغة المتتاليات تكون فيه كل متتالية من الصورة $\Gamma \Rightarrow N:\varphi$، ويكون N حد برهان.

ويتضح وجود صلة وثيقة بين حدود البرهان هذه وحدود ما يسمى حساب *لامبدا المنمّط*. واحترامًا لهذه الصلة سنستعمل الرموز الشائعة في أدبيات حساب لامبدا بدل رموز الباني والهادم العامة السابقة. فمثلًا، نكتب $\lambda x^{\varphi}.N$ بدل $c^{\rightarrow}([x:\varphi]N)$، ونكتب (NM) بدل $d^{\rightarrow}(N,M)$، و$\langle N,M\rangle$ بدل $c^{\wedge}(N,M)$، و$\pi_i(N)$ بدل $d_i^{\wedge}(N)$.

تعريف 5.7. تتولد حدود البرهان استقرائيًا بالقواعد الآتية:

1. كل متغير x حد برهان (المسلّمات).
2. إذا كان x متغيرًا، وφ صيغة، وN حد برهان، فإن $\lambda x^{\varphi}.N$ حد برهان أيضًا ($\rightarrow$Intro).
3. إذا كان N وM حدي برهان، كان (NM) حد برهان أيضًا ($\rightarrow$Elim).
4. إذا كان N وM حدي برهان، كان $\langle N,M\rangle$ حد برهان أيضًا ($\wedge$Intro).
5. إذا كان N حد برهان، كان $\pi_i(N)$ حد برهان أيضًا، حيث i إما 1 وإما 2 ($\wedge\text{Elim}_i$).

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

6. إذا كان N حد برهان وφ صيغة، كان $\iota_i^{\varphi}(N)$ حد برهان، حيث i إما 1 وإما 2 ($\vee\text{Intro}_i$).

7. إذا كانت M, N_1, N_2 حدود برهان، وكان x_1, x_2 متغيرين، فإن $\delta\ M\ x_1.N_1\ x_2.N_2$ حد برهان ($\vee\text{Elim}$).

8. إذا كان N حد برهان وφ صيغة، فإن $\varepsilon^{\varphi}(N)$ حد برهان ($\bot_I$).

ليس كل حد برهان حدًا لـ برهان. فالحد $\langle N, M\rangle$، مثلًا، يرمّز برهانًا ينتهي باستدلال $\wedge\text{Intro}$، ولذلك تكون صيغة نهايته اقترانًا $\varphi \wedge \psi$. ولا يمكن لهذا الاقتران أن يكون المقدمة الكبرى لقاعدة $\rightarrow\text{Elim}$، ولذلك لا يمكن أن يكون $(\langle N, M\rangle P)$ حد برهان لبرهان صحيح. ولا تكون حدود البرهان صحيحة إلا إذا اتبعت قواعد **tN2i**. وترد هذه القواعد في جدول 5.2.

5.6 تحويل اشتقاقات إلى حدود برهان

عملية تحويل براهين الاستنباط الطبيعي إلى حدود برهان، أي ترجمة براهين في **N2i** إلى براهين في **tN2i**، مباشرة للغاية. فهي لا تعدو كتابة حد برهان إلى يسار كل صيغة في يمين متتالية ضمن اشتقاق، فتنتج متتاليات من الصورة $\Gamma \Rightarrow M : \varphi$. ونقول عندئذ إن M يشهد لـ φ في السياق Γ. وتحدد قواعد **tN2i** تمامًا أي حد برهان نكتب.

قضية 5.8. *كل برهان δ للمتتالية $\Gamma \Rightarrow \varphi$ في **N2i** يقابل برهان δ' للمتتالية $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ في **tN2i**. ويتحدد حد البرهان N تحديدًا وحيدًا بـ δ.*

برهان. نستعمل الاستقراء في ارتفاع δ. فإذا كان δ المسلّمة $x : \varphi \Rightarrow \varphi$، كان δ' المسلّمة $x : \varphi \Rightarrow x : \varphi$. وإذا انتهى δ بقاعدة استدلال، وفر فرض الاستقراء حدود برهان لكل مقدمة، وبراهين في **tN2i** لمتتاليات تحتوي حدود البرهان هذه وتقابل كل مقدمة. ونطبق القاعدة المقابلة في **tN2i**؛ فتحدد قاعدة استدلال **tN2i** حد البرهان المقابل. □

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

البديهيات:

$$x : \varphi \Rightarrow x : \varphi$$

قواعد الاستدلال:

$$\rightarrow\text{Intro}\ \frac{N : \psi x : \varphi, \Gamma \ \Rightarrow}{\lambda x^{\varphi}.\, N : \varphi \rightarrow \psi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\rightarrow\text{Elim}\ \frac{M : \varphi \Gamma_2 \ \Rightarrow \qquad N : \varphi \rightarrow \psi \Gamma_1 \ \Rightarrow}{(N M) : \psi \Gamma_1, \Gamma_2 \ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Intro}\ \frac{N_2 : \psi \Gamma_2 \ \Rightarrow \qquad N_1 : \varphi \Gamma_1 \ \Rightarrow}{\langle N_1, N_2 \rangle : \varphi \wedge \psi \Gamma_1, \Gamma_2 \ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Elim}_1\ \frac{N : \varphi \wedge \psi \Gamma \ \Rightarrow}{\pi_1(N) : \varphi \Gamma \ \Rightarrow} \qquad \wedge\text{Elim}_2\ \frac{N : \varphi \wedge \psi \Gamma \ \Rightarrow}{\pi_2(N) : \psi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\vee\text{Intro}_1\ \frac{N : \varphi \Gamma \ \Rightarrow}{\iota_1^{\psi}(N) : \varphi \vee \psi \Gamma \ \Rightarrow} \qquad \vee\text{Intro}_2\ \frac{N : \psi \Gamma \ \Rightarrow}{\iota_2^{\varphi}(N) : \varphi \vee \psi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\vee\text{Elim}\ \frac{N_2 : \chi y : \psi, \Gamma_3 \ \Rightarrow \qquad N_1 : \chi x : \varphi, \Gamma_2 \ \Rightarrow \qquad M : \varphi \vee \psi \Gamma_1 \ \Rightarrow}{\delta\, M\, x.N_1\, y.N_2 : \chi \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \ \Rightarrow}$$

$$\bot_I\ \frac{N : \bot \Gamma \ \Rightarrow}{\varepsilon^{\varphi}(N) : \varphi \Gamma \ \Rightarrow}$$

جدول 5.2: قواعد نظام الاستنباط الطبيعي الحدسي القضاياوي الموسوم بالحدود **tN2ip**.

مثال 5.9. انظر في هذا برهان البسيط جدًا في **N1i** لـ $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\psi}\,\wedge\mathrm{Elim}_2 \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\varphi}\,\wedge\mathrm{Elim}_1}{\psi \wedge \varphi}\,\wedge\mathrm{Intro}}{(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,{\scriptstyle x}\,\to\mathrm{Intro}$$

ويبدو في **N2i** هكذا:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \psi}\,\wedge\mathrm{Elim}_2 \quad \dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi}\,\wedge\mathrm{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \psi \wedge \varphi}\,\wedge\mathrm{Intro}}{\Rightarrow\; (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,\to\mathrm{Intro}$$

نسند حدود البرهان من الأعلى إلى الأسفل. فحدا برهان المسلّمتين هما نفس المتغير في السياق، أي x. ثم يتحدد حدا البرهان المرتبطان بـ $\wedge\mathrm{Elim}_i$ على أنهما $\pi_2(x)$ و$\pi_1(x)$. وعند تطبيق $\wedge\mathrm{Intro}$ نجمع هذين الحدين: $\langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle$. وأخيرًا تطبق قاعدة $\to\mathrm{Intro}$ تجريد λ، فتقيّد x وتسجل أن x وسم الفرض $\varphi \wedge \psi$: $\lambda x^{\varphi \wedge \psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle$. وعندئذ يكون برهان في **tN2i** هو:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \psi}\,\wedge\mathrm{Elim}_2 \quad \dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \varphi}\,\wedge\mathrm{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : \psi \wedge \varphi}\,\wedge\mathrm{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi \wedge \psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,\to\mathrm{Intro}$$

باب 6

القضايا بوصفها أنماطًا

هذه مسودة تجريبية جدًا لفصل عن مقابلة كاري–هوارد. وتحتاج إلى مزيد من الشرح والتحفيز، ولعل فيها أخطاءً ونواقص. وينبغي مراجعة برهان التطبيع وتوسيعه. ولا توجد أمثلة للنمط الضربي، ولا تغطي المسودة تحويلات التبديل والتبسيط. وستكون أوضح كثيرًا عندما تتوافر أيضًا مادة عن حساب لامبدا (المنمّط)، وهو مفترض هنا في الأساس. استعملها بحذر شديد.

6.1 الاختزال

في اشتقاقات الاستنباط الطبيعي تكون قاعدة إدخال تتبعها قاعدة حذف التفافًا يمكن "اختزاله". فمثلًا، يلغي استدلال $\wedge$Intro يتبعه $\wedge$Elim أحدهما الآخر، لأن نتيجة $\wedge$Elim تكون دائمًا أحد حدي الاقتران الذي ينتجه $\wedge$Intro، ومقدمتا $\wedge$Intro هما حدا الاقتران نفسيهما. ولذلك، إذا احتجنا إلى اشتقاق لأي من الحدين، أمكننا استعمال ذلك اشتقاق مباشرةً من دون إدخال الاقتران ثم حذفه. ولدينا:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,\wedge\text{Intro}}{\varphi_i}\,\wedge\text{Elim}_i \quad\rightarrow\quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_i\\ \varphi_i\end{array}$$

يمكننا أن ننظر في علاقة اختزال مماثلة على حدود البرهان المقابلة يقترحها هذا التبسيط. فإذا كان N_1 حد برهان δ_1 وN_2 حد برهان δ_2، قلنا إن حد برهان البرهان الواقع على اليسار يختزل في خطوة واحدة إلى حد برهان البرهان الواقع على اليمين:

$$\pi_i(\langle N_1, N_2\rangle) \to N_i$$

وهذه في حساب لامبدا المنمّط قاعدة *اختزال بيتا* للنمط الضربي.

يسمى في الاستنباط الطبيعي زوج من الاستدلالات، مثل $\wedge$Intro يتبعه $\wedge$Elim، أي زوج يخضع للاختزال، *قطعًا*. وفي حساب لامبدا المنمّط يسمى الحد الواقع على يسار $\to$ ردكسًا، والحد الواقع على يمينه مختزَلًا. وعلى خلاف حساب لامبدا غير المنمّط، حيث لا يعد ردكسًا إلا $(\lambda x.\, N)Q$، يوسَّع نحو حساب لامبدا المنمّط ليشمل الحدود التي تحتوي $\langle N, M\rangle$ و$\pi_i(N)$ و$\iota_i^{\varphi}(N)$ و $\delta\, N\, x_1.M_1\, x_2.M_2$ و$\varepsilon^{\varphi}(N)$، مع الردكسات المقابلة.

ولدينا على نحو مماثل اختزال للفصل:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,\vee\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_1]^{x_1}\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_2]^{x_2}\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi\end{array}}{\chi}\,\vee\text{Elim}\;{}_{x_1,x_2} \quad \to \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\\ \vdots\,\delta_i\\ \chi\end{array}$$

ويقابل ذلك الاختزال الآتي على حدود البرهان:

$$\delta\, \iota_i^{\varphi_{3-i}}(M)\, x_1.N_1\, x_2.N_2 \to N_i[M/x_i].$$

حيث M حد برهان δ، وN_i حد برهان δ_i. وهذه قاعدة اختزال بيتا للأنماط الجمعية. والترميز φ_{3-i} في الحقن هو حد الفصل المحذوف من المقدمة. ويعني $N_i[M/x_i]$ إحلال M محل كل وقوع حر للمتغير x_i في N_i.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

ويقابل اختزال النمط الدالي حذف التفاف من $\to$Intro يتبعه $\to$Elim.

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\,\delta\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\to\text{Intro}\qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta'\\ \varphi\end{array}}{\psi}\to\text{Elim}\quad\to\quad\begin{array}{c}\vdots\,\delta'\\ \varphi\\ \vdots\,\delta\\ \psi\end{array}$$

أما في حدود البرهان فليس ذلك سوى اختزال بيتا المعتاد:

$$(\lambda x^{\varphi}.\,NM)\to N[M/x].$$

وإلى جانب تحويلات الاختزال على براهين، يمكننا النظر في تحويلات التبديل. وهي تنطبق على براهين أو براهينها الجزئية التي تنتهي بقاعدة $\vee$Elim تتبعها قاعدة حذف أخرى، مثلًا:

$$x_1,x_2\,\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\end{array}}{\varphi_1\vee\varphi_2}\vee\text{Intro}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_1]^{x_1}\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi_1\wedge\chi_2\end{array}}{\chi_i}\wedge\text{Elim}_i\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_2]^{x_2}\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi_1\wedge\chi_2\end{array}}{\chi_i}\wedge\text{Elim}_i}{\chi_i}\vee\text{Elim}\quad\to\quad x_1,x_2\,\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\end{array}}{\varphi_1\vee\varphi_2}\vee\text{Intro}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_1]^{x_1}\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi_1\wedge\chi_2\end{array}}{\chi_i}\wedge\text{Elim}_i\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_2]^{x_2}\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi_1\wedge\chi_2\end{array}}{\chi_i}\wedge\text{Elim}_i}{\chi_i}\vee\text{Elim}$$

إذا كانت حدود برهان δ وδ_1 وδ_2 هي، على الترتيب، M وN_1 وN_2، كانت قاعدة الاختزال المقابلة لحدود البرهان، أي حدود لامبدا، هي:

$$\pi_i(\delta\, M\, x_1.N_1\, x_2.N_2) \to \delta\, M\, x_1.\pi_i(N_1)\, x_2.\pi_i(N_2).$$

وبالطبع لا نحذف الالتفافات عند نهايات براهين وحدها، بل نحذفها أيضًا داخل براهين بتطبيق تحويل الاختزال على برهان جزئي ينتهي بالتفاف. وكذلك ينطبق اختزال بيتا على الحدود الجزئية من حدود لامبدا. فإذا كان N حدًا جزئيًا من M، وكان $N \to N'$، أمكننا استبدال N' بالحد الجزئي N في M لنحصل على M'. ونكتب في هذه الحالة أيضًا $M \to M'$. وإذا وجدت متتالية $M = M_1 \to M_2 \to M_3 \to \ldots \to M_k = M'$، بما في ذلك حالة $k = 1$، أي $M = M'$، كتبنا $M \twoheadrightarrow M'$.

يسمى برهان الذي لا يمكن تطبيق أي تحويل على أي برهان جزئي منه عاديًا. وعلى نحو مماثل، يسمى حد لامبدا الذي لا يمكن تطبيق أي تحويل عليه أو على أي حد جزئي منه عاديًا. ويسمى حد لامبدا العادي أيضًا صيغة عادية.

6.2 الاستنباط الطبيعي بالمتتاليات

نكتب $\Gamma \Rightarrow \varphi$ إذا وُجد اشتقاق استنباط طبيعي تكون Γ فروضه عدم إسقاط وφ نتيجته؛ ونكتب $\varphi \Rightarrow$ إذا كانت Γ خالية.

ونكتب $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ بدل $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$، و$\Gamma, \Delta$ بدل $\Gamma \cup \Delta$.

لاحظ أننا حين نحصل على $\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi$، أي حين يكون لدينا اشتقاق فروضه Γ عدم إسقاط وصيغته النهائية صيغة $\varphi \wedge \psi$، نستطيع بتطبيق $\wedge\mathrm{Elim}$ في الأسفل الحصول على اشتقاق له الفروض عدم إسقاط نفسها ونتيجته φ. وبعبارة أخرى، إذا كان $\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi$، كان $\Gamma \Rightarrow \varphi$.

$$\wedge\mathrm{Elim}\,\frac{\varphi \wedge \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\psi\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{Elim}\,\frac{\varphi \wedge \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

ويشير الوسم $\wedge\mathrm{Elim}$ إلى الصلة بالقاعدة التي تحمل الاسم نفسه في الاستنباط الطبيعي.

وبالمثل، افترض أن لدينا $\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi$، أي لدينا اشتقاق فروضه Γ, φ عدم إسقاط وصيغته النهائية صيغة ψ. فإذا طبقنا قاعدة $\rightarrow$Intro حصلنا على اشتقاق تكون Γ فروضه عدم إسقاط و$\varphi \rightarrow \psi$ صيغته النهائية صيغة، أي $\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$. ولاحظ كيف جعل ذلك إسقاط الفروض أكثر صراحة.

$$\rightarrow\text{Intro}\,\frac{\psi\Gamma, \varphi \Rightarrow}{\varphi \rightarrow \psi\Gamma \Rightarrow}$$

ويمكننا استخلاص نتائج من القواعد الأخرى بالطريقة نفسها، وترد مفصلةً هنا:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \quad \Delta \Rightarrow \psi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\wedge\text{Intro}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\wedge\text{Elim}_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow \psi}\wedge\text{Elim}_2$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi}\vee\text{Intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi}\vee\text{Intro}_2$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi \quad \Delta, \varphi \Rightarrow \chi \quad \Delta', \psi \Rightarrow \chi}{\Gamma, \Delta, \Delta' \Rightarrow \chi}\vee\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi}\rightarrow\text{Intro} \qquad \frac{\Delta \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \psi}\rightarrow\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\bot_I$$

وكل فرض بمفرده اشتقاق لـ φ من φ؛ أي إن لدينا دائمًا $\varphi \Rightarrow \varphi$.

$$\overline{\varphi \Rightarrow \varphi}$$

يمكن اتخاذ هذه القواعد مجتمعةً حسابًا لما يوجد من اشتقاقات الاستنباط الطبيعي. ويمكن أيضًا اتخاذها تنويعًا ترميزيًا للاستنباط الطبيعي تسجل فيه كل خطوة لا صيغة الناتجة من اشتقاق فحسب، بل كذلك الفروض عدم إسقاط التي انطلق منها ذلك اشتقاق.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{

وقد تحدد الآن حد البرهان المرتبط بالمقدمة، وهو $\langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle$. ولا بد أن ينتهي برهان الذي يرمّزه هو بـ $\wedge$Intro. وما زلنا لا نعرف ما χ، لكننا نعرف، لكونه نتيجة $\wedge$Intro، أنه لا بد أن يكون اقترانًا؛ أي $\chi \equiv (\chi_1 \wedge \chi_2)$. فنواصل إعادة البناء:

$$\dfrac{\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \chi_1 \qquad x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \chi_2}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : \chi_1 \wedge \chi_2}\,\wedge\text{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi \wedge \psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : (\varphi \wedge \psi) \to (\chi_1 \wedge \chi_2)}\,\to\text{Intro}$$

يدل حد البرهان $\pi_2(x)$ على أن المتتالية العليا اليسرى حُصل عليها بـ $\wedge\text{Elim}_2$، أي إن المقدمة من الصورة $\theta \wedge \chi_1$. وعلى اليمين نستطيع تعيين أن الاستدلال المؤدي إلى χ_2 لا بد أن يكون $\wedge\text{Elim}_1$، وأن المقدمة من الصورة $\chi_2 \wedge \alpha$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \theta \wedge \chi_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \chi_1}\,\wedge\text{Elim}_2 \qquad \dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \chi_2 \wedge \alpha}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \chi_2}\,\wedge\text{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : \chi_1 \wedge \chi_2}\,\wedge\text{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi \wedge \psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : (\varphi \wedge \psi) \to (\chi_1 \wedge \chi_2)}\,\to\text{Intro}$$

ولأن حدود البرهان في المتتاليتين العليين صارت متغيرات، نعرف أنهما لا بد أن تكونا بديهيتين. وهذا يعيّن χ_1 وχ_2 وθ وα: فلا بد أن يكون $\theta \equiv \varphi$ و$\chi_1 \equiv \psi$، وإلا لم تكن المتتالية اليسرى بديهية؛ ولا بد أن يكون $\chi_2 \equiv \varphi$ و$\alpha \equiv \psi$، وإلا لم تكن المتتالية اليمنى بديهية. وهكذا استعدنا البرهان كاملًا:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \psi}\,\wedge\text{Elim}_2 \qquad \dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \varphi}\,\wedge\text{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : \psi \wedge \varphi}\,\wedge\text{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi \wedge \psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,\to\text{Intro}$$

6.4 حفظ النوع

يمكن أيضًا تعريف تحويلات الاختزال والتبديل المدروسة مباشرةً للنسقين **tN2i** و**tN3i**. ويعرّف النسق **tN3i** نوع حد لامبدا N بالنسبة إلى السياق Γ بأنه صيغة φ التي يكون للمتتالية $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ برهان في **tN3i**. ولأن قواعد اختزال بيتا لحدود لامبدا تطابق تمامًا تحويلات الاختزال والتبديل على براهين، تنتج نتيجة مهمة: يبقى نوع حد لامبدا بالنسبة إلى السياق Γ على حاله بعد كل خطوة واحدة من اختزال بيتا. وتسمى هذه الخاصية *حفظ النوع*.

قضية 6.1. *إذا كان نوع N هو φ بالنسبة إلى Γ، وكان $N \to N'$ في خطوة اختزال واحدة، فإن نوع N' هو φ بالنسبة إلى Γ.*

برهان. نستطيع بسهولة أن نثبت، بالاستقراء في N وفي ارتفاع براهين δ للمتتالية $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$، ما يأتي: إذا كان M حدًا جزئيًا من N، احتوى δ براهين جزئيًا δ_1 ينتهي بـ $\Gamma' \Rightarrow M : \psi$. وإذا كان M ردكسًا، انطبق تحويل على δ_1. وبتطبيق الاختزال على δ_1 نحصل على برهان δ_1' لـ $\Gamma' \Rightarrow M' : \psi$. وبفحص تحويلات **tN3i** نجد أن M' هو مختزَل M. وإذا استبدلنا δ_1' بـ δ_1 في δ نتج برهان δ' لـ $\Gamma \Rightarrow N' : \varphi$، حيث ينتج N' من N باستبدال M' بالحد الجزئي M.

انظر، مثلًا، في تحويل الاختزال لـ $\wedge$Intro يتبعه $\wedge$Elim:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow N_1 : \psi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow N_2 : \psi_2\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \langle N_1, N_2\rangle : \psi_1 \wedge \psi_2}\,\wedge\text{Intro}}{\Gamma \Rightarrow \pi_i(\langle N_1, N_2\rangle) : \psi_i}\,\wedge\text{Elim}_i \quad \to \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow N_i : \psi_i\end{array}$$

نرى أن حد برهان برهان الواقع على اليمين، أي δ_1'، هو N_i. وهو بالضبط نتيجة تطبيق خطوة اختزال بيتا على حد البرهان $\pi_i(\langle N_1, N_2\rangle)$ لـ برهان الواقع على اليسار، أي δ_1.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

أو انظر في استدلال $\to$Intro يتبعه استدلال $\to$Elim، وفي تحويل الاختزال المطبق عليه:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\delta_2\\ \vdots\\ x:\psi_1,\Gamma \Rightarrow N:\psi_2\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \lambda x^{\psi_1}.\,N:\psi_1\to\psi_2}\to\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \Gamma \Rightarrow M:\psi_1\end{array}}{\Gamma \Rightarrow (\lambda x^{\psi_1}.\,NM):\psi_2}\to\text{Elim} \quad \to \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \Gamma \Rightarrow M:\psi_1\\ \vdots\,\delta_2[\delta_3/x:\psi_1]\\ \Gamma \Rightarrow N[M/x]:\psi_2\end{array}$$

ومرة أخرى يكون حد برهان برهان الواقع على اليمين هو بالضبط نتيجة اختزال حد برهان برهان الواقع على اليسار ببيتا خطوةً واحدة. ويبقى أن نتحقق بعناية، بالاستقراء في ارتفاع δ_2، من أن استبدال برهان δ_3 لـ $\Gamma \Rightarrow M:\psi_1$ بكل بديهية من الصورة $\Gamma' \Rightarrow x:\psi_1$ في δ_2 ينتج فعلًا برهان $\delta_2[\delta_3/x:\psi_1]$ للمتتالية $\Gamma \Rightarrow N[M/x]:\psi_2$. $\square$

وللتطابق الوثيق بين براهين وحدود لامبدا نتيجة أخرى. فإذا كان N حد لامبدا مغلقًا من النوع φ وكان له ردكس M، احتوى البرهان δ المقابل في **tN3i** للمتتالية $\Rightarrow N:\varphi$ برهان جزئيًا ينتهي بـ $\Gamma' \Rightarrow M:\psi$ وينطبق عليه تحويل. وإذا كان $N \to N'$ باستبدال مختزَل M به، كانت نتيجة تطبيق الاختزال المقابل على δ برهان لـ $\Rightarrow N':\varphi$.

أما خاصية التقدم الصحيحة فتخص الحدود المغلقة الصحيحة النوع: يبيّن الاستقراء في اشتقاق التنميط، باستعمال لمّة الصيغ القانونية للقيم، أن كل حد مغلق صحيح النوع إما قيمة ذات الصيغة القانونية لنوعه، وإما يختزل في خطوة واحدة إلى حد آخر. ويضمن حفظ النوع أن الحد الناتج له النوع نفسه. ولذلك لا "تعلق" عملية اختزال بيتا لحدود مغلقة صحيحة النوع؛ أما الحدود المفتوحة فقد تكون في صيغة عادية محايدة، فلا يشملها ادعاء التقدم هذا.

6.5 الأنماط

لا يعيّن حد برهان مثل (MN) بمفرده البرهان الذي يرمّزه تعيينًا وحيدًا؛ ذلك أن المتغيرات الحرة، وهي حدود برهان البديهيات، لا تحدد صيغ في البديهيات المقابلة. أما إذا حددناها في سياق Γ، كان البرهان، متى وُجد، معيّنًا تعيينًا وحيدًا بالنسبة إلى ذلك السياق.

تعريف 6.2. سياق حد برهان N هو مجموعة Γ تحتوي، لكل متغير حر x في N، زوجًا واحدًا بالضبط $x : \varphi$.

لاحظ أن التعريف لا يشترط أن تحتوي Γ أزواجًا $x : \varphi$ للمتغيرات الحرة في N وحدها. ولذلك، مثلًا، تكون $\Gamma = \{x : \varphi, y : \psi, z : \chi\}$ سياقًا لـ $\langle x, y\rangle$.

تعريف 6.3. افترض أن Γ سياق لـ N. يُعرّف نوع N بالنسبة إلى Γ استقرائيًا كما يأتي:

1. نوع x هو φ إذا وفقط إذا كان $x : \varphi \in \Gamma$.
2. إذا كان نوع N بالنسبة إلى $\Gamma, x : \varphi$ هو ψ، فنوع $\lambda x^{\varphi}. N$ هو $\varphi \to \psi$.
3. إذا كان نوع N هو $\varphi \to \psi$ ونوع M هو φ، فنوع (NM) هو ψ.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

4. إذا كان نوع N هو φ ونوع M هو ψ، فنوع $\langle N, M\rangle$ هو $\varphi \wedge \psi$.

5. إذا كان نوع N هو $\varphi_1 \wedge \varphi_2$، فنوع $\pi_i(N)$ هو φ_i.

6. إذا كان نوع N هو φ، فنوع $\iota_i^{\psi}(N)$ هو $\varphi \vee \psi$ إذا كان $i = 1$، وهو $\psi \vee \varphi$ إذا كان $i = 2$.

7. إذا كان نوع M هو $\varphi \vee \psi$، وكان نوع N_1 بالنسبة إلى $x_1 : \varphi, \Gamma$ هو χ، ونوع N_2 بالنسبة إلى $x_2 : \psi, \Gamma$ هو χ، فنوع $\delta\, M\, x_1.N_1\, x_2.N_2$ هو χ.

8. إذا كان نوع N هو $\bot$، فنوع $\varepsilon^{\varphi}(N)$ هو φ.

قضية 6.4. *لكل حد برهان N نوع واحد على الأكثر بالنسبة إلى سياق Γ له؛ أي إن نوعه، إذا وُجد، وحيد بالنسبة إلى Γ.*

برهان. بالاستقراء في N. □

نكتب $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ إذا كان نوع N بالنسبة إلى Γ هو φ. وينبغي أن تبدو بنود تعريف 6.3 مألوفة: فهي بالضبط قواعد **tN2i** مع فرق طفيف واحد، هو أن السياق Γ يبقى نفسه طوال البرهان. ويمكننا ترميز التعريف في حساب **tN3i** ذي القواعد الواردة في جدول 6.1.

حدود البرهان حدود في نسخة من حساب لامبدا تسمى حساب لامبدا المنمّط ذو الأنماط الضربية والجمعية والخالية. ولا يحتوي حساب لامبدا التقليدي إلا حدودًا مبنية من المتغيرات، وتجريدات لامبدا $\lambda x.\, N$، والتطبيق (MN)؛ ولا يحتوي وسم φ في تجريد لامبدا المنمّط $\lambda x^{\varphi}.\, N$. وحساب لامبدا نموذج للحوسبة تام تورنغ، أي يمكن تمثيل كل دالة جزئية قابلة للحساب فيه بحد. أما نسخته التي تعطيها حدود البرهان وقواعد التنميط فهي نموذج حوسبة مقيّد، لكن أفكاره الأساسية هي نفسها. ويفرض إسناد الأنماط هذا القيد: فلا تعد حدودًا مشروعة إلا الحدود الصحيحة النوع، أي حدود البرهان ذات الأنماط بالنسبة إلى

البديهيات:

$$x : \varphi \in \Gamma \text{ إذا كان } \Gamma \Rightarrow x : \varphi$$

قواعد الاستدلال:

$$\rightarrow\text{Intro}\ \frac{N : \psi x : \varphi, \Gamma \ \Rightarrow}{\lambda x^{\varphi}. N : \varphi \rightarrow \psi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\rightarrow\text{Elim}\ \frac{M : \varphi \Gamma \ \Rightarrow \qquad N : \varphi \rightarrow \psi \Gamma \ \Rightarrow}{(NM) : \psi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Intro}\ \frac{N_2 : \psi \Gamma \ \Rightarrow \qquad N_1 : \varphi \Gamma \ \Rightarrow}{\langle N_1, N_2 \rangle : \varphi \wedge \psi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Elim}_1\ \frac{N : \varphi \wedge \psi \Gamma \ \Rightarrow}{\pi_1(N) : \varphi \Gamma \ \Rightarrow} \qquad \wedge\text{Elim}_2\ \frac{N : \varphi \wedge \psi \Gamma \ \Rightarrow}{\pi_2(N) : \psi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\vee\text{Intro}_1\ \frac{N : \varphi \Gamma \ \Rightarrow}{\iota_1^{\psi}(N) : \varphi \vee \psi \Gamma \ \Rightarrow} \qquad \vee\text{Intro}_2\ \frac{N : \varphi \Gamma \ \Rightarrow}{\iota_2^{\psi}(N) : \psi \vee \varphi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\vee\text{Elim}\ \frac{N_2 : \chi y : \psi, \Gamma \ \Rightarrow \qquad N_1 : \chi x : \varphi, \Gamma \ \Rightarrow \qquad M : \varphi \vee \psi \Gamma \ \Rightarrow}{\delta\, M\, x.N_1\, y.N_2 : \chi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\bot_I\ \frac{N : \bot \Gamma \ \Rightarrow}{\varepsilon^{\varphi}(N) : \varphi \Gamma \ \Rightarrow}$$

جدول 6.1: قواعد نظام الاستنباط الطبيعي الحدسي القضاياوي الموسوم بالحدود **tN3ip** المستعمل نظامًا لإسناد الأنماط.

سياق Γ. فمثلًا، $\lambda x.\,(xx)$ حد مشروع في حساب لامبدا التقليدي غير المنمّط، لكن $\lambda x^{\varphi}.\,(xx)$ ليس صحيح النوع لأي φ. ذلك أن قواعد التنميط تقتضي، كي يكون لـ (xx) نوع، أن يكون نوع x الأول $\varphi \to \psi$ ونوع x الثاني φ؛ وهذا محال لأن φ صيغة جزئية أصلية من $\varphi \to \psi$.

ويمكن فهم الأنماط حدسيًا بوصفها أصناف الأشياء التي تسميها حدود من تلك الأنماط. فالحد من النوع $\varphi \wedge \psi$ يعيّن زوجًا مركبته الأولى من النوع φ والثانية من النوع ψ؛ أي عنصر من الضرب $\varphi \times \psi$. والحد من النوع $\varphi \to \psi$ دالة من أشياء النوع φ إلى أشياء النوع ψ. والحد من النوع $\varphi \vee \psi$ إما شيء من النوع φ وإما شيء من النوع ψ، ومعه معلومة تحدد أيهما هو. وهذا يشبه الاتحاد المنفصل للمجموعتين φ و ψ المعرّف بأنه $\{\langle i, x\rangle : i = 1$ إذا كان $x \in \psi$، $i = 2$ إذا كان $x \in \varphi$، أو $i = 1\}$. والنوع $\bot$ هو المجموعة الخالية؛ أي إن حدًا من هذا النوع لا يمكن أن يسمي شيئًا. ولأن الاستنباط الطبيعي، ومنه **tN3i**، متسق، فلا يوجد برهان لـ $\bot$ من دون فروض مفتوحة؛ ومن ثم لا يوجد حد برهان مغلق، أي حد بلا متغيرات حرة، نوعه $\bot$.

تنتج مؤثرات حساب لامبدا المنمّط حدودًا تسمي حدسيًا الأشياء من الصنف الصحيح، بشرط أن تسمي الحدود التي تطبق عليها أشياء معينة. فمثلًا، تقول العبارة "إذا كان $N_1 : \varphi$ و $N_2 : \psi$، كان $\langle N_1, N_2\rangle : \varphi \wedge \psi$" إن N_1 إذا سمّى شيئًا من النوع φ وسمّى N_2 شيئًا من النوع ψ، سمّى $\langle N_1, N_2\rangle$ شيئًا من النوع $\varphi \wedge \psi$.

6.6 القواعد المقبولة والقابلة للاشتقاق

تتعلق نتائج كثيرة في نظرية البرهان، أو تستعمل نتائج تتعلق، بما إذا كان كل ما نبرهن باستعمال قاعدة معينة يمكن أن نبرهن من دونها. ومبرهنة حذف القطع أشهر مثال: فهي تبيّن أن كل متتالية يمكننا أن نبرهن باستعمال قواعد حساب متتاليات مع Cut يمكننا أيضًا أن نبرهن من دون Cut. ولهذه الخاصية اسم لما لها من أهمية.

تعريف 6.5. تكون القاعدة R مقبولة في حساب متتاليات إذا أمكن برهنة كل متتالية يمكن برهنتها في الحساب مع القاعدة R من دون استعمال R أيضًا.

مثال 6.6. تأخذ القاعدة $\wedge\mathrm{L}$ صورتين مختلفتين في **G1c** و**G3c**. ففي **G1c** نسختان منها: تضم مقدمة إحداهما الحد الأيسر φ من صيغة الرئيسة $\varphi\wedge\psi$، وتضم مقدمة الأخرى الحد الأيمن ψ:

$$\frac{\varphi,\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\wedge\mathrm{L}_1 \qquad \frac{\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\wedge\mathrm{L}_2$$

أما **G3c** فله قاعدة واحدة فقط:

$$\frac{\varphi,\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\wedge\mathrm{L}_3$$

ويعني الوسم $\mathrm{L}\star$ أن الصيغة الرئيسة تقع على اليسار، أي في المقدّم، ويعني $\mathrm{R}\star$ أنها تقع على اليمين، أي في التالي.

يمكننا الآن أن نسأل: "هل قاعدة $\wedge\mathrm{L}_3$ في **G3c** مقبولة في **G1c**؟" نعم؛ إذ يمكن محاكاة كل استدلال يستعمل $\wedge\mathrm{L}_3$ مباشرةً بقواعد **G1c** وحدها. وإلى جانب $\wedge\mathrm{L}_1$ و $\wedge\mathrm{L}_2$ سنحتاج أيضًا إلى القاعدة البنيوية CL:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi,\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi,\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\wedge\mathrm{L}_1}{\varphi\wedge\psi,\varphi\wedge\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\wedge\mathrm{L}_2}{\varphi\wedge\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{CL}$$

محاكاة استدلال يستعمل قاعدةً باستدلالات تستعمل قواعد أخرى إحدى طرق إثبات قبول القاعدة. لكنها ليست الطريقة الوحيدة؛ فبعض القواعد مقبولة ولا يمكن محاكاتها هكذا. وتسمى القواعد التي يمكن محاكاتها *قابلة للاشتقاق*.

تعريف 6.7. تسمى القاعدة R،

$$\frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S}R$$

قابلة للاشتقاق في حساب إذا وُجد برهان تخطيطي للمتتالية S يستعمل قواعد الحساب وبديهياته، إلى جانب متتاليات ابتدائية إضافية من صور S_1، ...، S_n.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

يبيّن برهان الوارد في مثال 6.6 أن $\wedge L_3$ قاعدة قابلة للاشتقاق في **G1c**؛ فهو برهان تخطيطي لنتيجة $\wedge L_3$ من مقدمات $\wedge L_3$ بوصفها متتاليات ابتدائية، وهو برهان لا يستعمل إلا قواعد **G1c**. (ولم يستعمل أي بديهية من بديهيات **G1c**.)

قضية 6.8. *قاعدتا $\wedge L$ و$\vee R$ في **G3c** قابلتان للاشتقاق في **G1c**.*

برهان. يرد البرهان الخاص بـ $\wedge L$ في مثال 6.6، ويُترك البرهان الخاص بـ $\vee R$ تمرينًا. □

بيّن أن قاعدة $\vee R$ في **G3c** قابلة للاشتقاق في **G1c**.

افترض أن $\leftrightarrow$ مؤثر منطقي معرّف، وأن $\varphi \leftrightarrow \psi$ اختصار لـ $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. بيّن أن القاعدتين

1. $$\leftrightarrow L\ \frac{\Delta, \varphi, \psi\Gamma \Rightarrow \qquad \Delta\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow}{\Delta\varphi \leftrightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

2. $$\leftrightarrow R\ \frac{\Delta, \varphi\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \psi\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \leftrightarrow \psi\Gamma \Rightarrow}$$

قابلتان للاشتقاق في: (أ) **G1c**، و(ب) **G3c**.

مثال 6.9. قاعدة WR في **G1c**،

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ WR$$

مقبولة في **G3c**. وفكرة البرهان بسيطة: افترض وجود برهان π للمقدمة $\Gamma \Rightarrow \Delta$ في **G3c**. أضف صيغة φ إلى تالي كل متتالية في π. تبقى البديهيات بديهيات، وتبقى الاستدلالات الصحيحة صحيحة. وبعد إضافة صيغة φ تكون المتتالية النهائية لـ برهان الجديد هي $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$.

غير أن قاعدة WR ليست قابلة للاشتقاق في **G3c**. فلو كانت كذلك، لوجد برهان لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ لا يستعمل إلا بديهيات **G3c** وقواعده، وربما المتتالية الابتدائية الإضافية $\Gamma \Rightarrow \Delta$. وإذا كان هذا برهان تخطيطيًا محضًا، كما يقتضي اشتقاق WR، أمكن تحويله إلى برهان لـ $\Rightarrow \varphi$ بحذف Γ وΔ. وهذا يحول المتتاليات الابتدائية الإضافية $\Gamma \Rightarrow \Delta$ إلى المتتالية الخالية $\Rightarrow$. ولأن المتتالية الخالية لا تحتوي أي صيغ، فيما تتطلب كل قواعد **G3c** صيغة فاعلة واحدة على الأقل في مقدماتها، فلا يمكن أن تكون المتتالية الخالية مقدمة لأي استدلال في هذا برهان التخطيطي. ومن ثم لا يمكن أن يكون برهان تخطيطيًا إلا إذا لم يستعمل بالفعل المتتالية الإضافية $\Gamma \Rightarrow \Delta$ متتاليةً ابتدائية. أي إنه سيكون اشتقاقًا تخطيطيًا لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ باستعمال بديهيات **G3c** وقواعده وحدها، وسنكون قد بينا أن لكل متتالية من هذه الصورة برهان في **G3c**. لكن هذا محال، لأن **G3c** سليم، فلا يستطيع أن نبرهن إلا متتاليات صادقة في كل بنية. وإذا أخذنا $\Gamma = \Delta = \emptyset$ و $\varphi \equiv \bot$، للزم أن نبرهن **G3c**، مثلًا، المتتالية $\bot \Rightarrow$ ، وهو لا يفعل.

لنقدم برهانًا استقرائيًا أنيقًا لكون الإضعاف قاعدة مقبولة في **G3c**. بل تصح نتيجة أقوى قليلًا، كما توضح الحجة الحدسية: فإضافة φ إلى يمين كل متتالية في π لا تغيّر بنية برهان، ولا تزيد ارتفاعه على وجه الخصوص. ولأهمية ذلك نضع له تعريفًا مستقلًا.

تعريف 6.10. تكون القاعدة R،

$$\frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S}\, R$$

مقبولة مع حفظ ارتفاع، أو *مقبولة مع ح.ا.*، في حساب إذا كان لكل براهين π_i لمقدماتها S_i، حيث $h_i = \mathrm{ht}(\pi_i)$، برهان π للنتيجة S يحقق $\mathrm{ht}(\pi) \leq \max(h_1, \dots, h_n)$.

ويكفي لكي تكون قاعدة مقبولة مع حفظ ارتفاع أنه كلما كان للمقدمات S_i براهين π_i ذات ارتفاع $h_i = \mathrm{ht}(\pi_i)$، وُجد برهان π للنتيجة لا يزيد ارتفاعه $\mathrm{ht}(\pi)$ على أكبر h_i. وعلى وجه الخصوص، إذا كانت لها مقدمة واحدة S_1، كفى أن يكون $\mathrm{ht}(\pi) \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$. وفي حالتي WR و WL يكون بالفعل $\mathrm{ht}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1)$، لكن المساواة ليست لازمة.

قضية 6.11. قاعدتا WR وWL في **G1c** مقبولتان مع حفظ ارتفاع في **G3c**.

برهان. علينا أن نبيّن أنه إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ بـ برهان π ذي ارتفاع $\mathrm{ht}(\pi) = n$، وُجد برهان π' في **G3c** لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ وارتفاعه $\mathrm{ht}(\pi') = n$. نبرهن ذلك بالاستقراء في n. إذا كان $n = 0$، كانت π بديهية: فإما أن تقع صيغة ذرية χ في Γ وΔ معًا، وإما أن تقع $\bot$ في Γ. وفي الحالتين تبقى $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ بديهية.

وإذا كان $n = \mathrm{ht}(\pi) > 0$، كان لـ برهان π استدلال أخير. نميّز الحالات بحسب القاعدة المستعملة. ولنورد مثالًا واحدًا: افترض أن الاستدلال الأخير هو $\wedge$R. عندئذ $\Delta = \Delta', \psi \wedge \chi$، وتكون براهين الجزئية المباشرة π_1 وπ_2 للاستدلال الأخير ذات المتتاليتين النهائيتين $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi$ و$\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi$ على الترتيب. أي إن π من الصورة:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

ولدينا أيضًا $n = \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1$. ولذلك يكون $\mathrm{ht}(\pi_1) < n$ و$\mathrm{ht}(\pi_2) < n$، فينطبق فرض الاستقراء: توجد براهين π'_1 وπ'_2 لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$. وبقاعدة $\wedge$R نحصل على برهان π' لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi}\ \wedge\mathrm{R}$$

ويكون $\mathrm{ht}(\pi') = \max(\mathrm{ht}(\pi'_1), \mathrm{ht}(\pi'_2)) + 1 \leq \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1 = \mathrm{ht}(\pi)$. وتعالج قواعد **G3c** الأخرى بالطريقة نفسها: نطبق فرض الاستقراء على كل برهان جزئي مباشر ثم نعيد تطبيق القاعدة الأخيرة. وينطبق البرهان المتماثل على الإضعاف الأيسر بإضافة الصيغة إلى مقدم كل متتالية. □

النتيجة قضية 6.11 مفيدة جدًا. وسنضع ترميزًا لتطبيقها المتكرر: إذا كان π برهان لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta$، فإن $\pi[\Pi \Rightarrow \Lambda]$ نتيجة تطبيق مقبولية الإضعاف الأيسر بكل صيغ في Π، ومقبولية الإضعاف الأيمن بكل صيغ في Λ. وهو برهان لـ $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$.

6.7 تفسير القواعد

تذكّر تفسير المتتالية: تكون المتتالية $\Gamma \Rightarrow \Delta$ صادقة في بنية $\mathfrak{M}$ إذا كان عنصر واحد على الأقل $\varphi \in \Gamma$ كاذبًا، أو عنصر واحد على الأقل $\varphi \in \Delta$ صادقًا. ويمكن قراءة القواعد المنطقية لـ **G3c** بوصفها ترميزًا لشروط صدق صيغ الرئيسة فيها. انظر في $\mathrm{R}\!\rightarrow$. إن صيغة الرئيسة هي $\varphi \rightarrow \psi$، وهي صادقة إذا كان φ كاذبًا أو ψ صادقًا. ولذلك تكون المتتالية $\Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$ صادقة إذا وفقط إذا كانت $\varphi \Rightarrow \psi$ صادقة. وإذا أضفنا صيغ السياق Γ, Δ إلى مقدمي المتتاليتين وتالييهما، حصلنا بالضبط على نتيجة قاعدة $\mathrm{R}\!\rightarrow$ ومقدمتها.

والوضع مماثل في $\mathrm{L}\!\rightarrow$. تكون $\varphi \rightarrow \psi$ كاذبة إذا كان φ صادقًا وψ كاذبًا. ومن ثم تكون $\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow$ صادقة إذا وفقط إذا كانت كلتا المتتاليتين $\Rightarrow \varphi$ و $\psi \Rightarrow$ صادقة. فنتيجة $\mathrm{L}\!\rightarrow$ مكافئة لاقتران مقدمتيها. ويضمن هذا النمط سلامة قواعد **G3c**: إذا صدقت جميع المقدمات صدقت النتيجة. كما يضمن تمامها.

وفي الواقع يمكن وصف شروط صدق أي رابط صدقي بهذه الطريقة بواسطة مجموعة من المتتاليات. وينتج ذلك من إمكان وصف كل دالة صدق في المنطق الكلاسيكي بـ صيغة في الصيغة العادية الاقترانية: اقتران لفصول من صيغ الذرية ومن نفيها. فمثلًا، لتكن $\varphi \oplus \psi$ صادقة إذا وفقط إذا صدقت واحدة بالضبط من φ وψ؛ أي إنها "أو مانعة للجمع". عندئذ تكون $\varphi \oplus \psi$ صادقة إذا وفقط إذا صدقت $(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)$، وتكون كاذبة إذا صدقت $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$. ولذلك يمكن إدخال قاعدتي حساب المتتاليات الآتيتين لـ $\oplus$:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi \qquad \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \oplus \psi} \oplus\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\varphi \oplus \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \oplus\mathrm{L}$$

وتكون القاعدتان أيضًا سليمتين وتامتين. فنتيجة كل منهما صادقة إذا وفقط إذا صدقت جميع مقدماتها.

افترض أن $\varphi \downarrow \psi$ صادقة إذا وفقط إذا لم تصدق φ ولا ψ ("NOR"). فما قاعدتاها في **G3c**؟ (جد متتاليتين تصدقان معًا إذا وفقط إذا صدقت $\varphi \downarrow \psi$، فتحصل على قاعدة $\downarrow$R. ثم جد متتالية واحدة تصدق إذا وفقط إذا كذبت $\varphi \downarrow \psi$، فتحصل على قاعدة $\downarrow$L.)

لكل رابط وسور في **G3c** قاعدتان بالضبط: قاعدة يسرى وقاعدة يمنى. أما **G1c** ففيه قاعدتان لـ $\wedge$L وقاعدتان لـ $\vee$R. والسبب أن نظام غنتسن الأصلي **LK**، الذي صيغ **G1c** على مثاله، كان له تنويع **LJ** لمنطق غير كلاسيكي مهم، هو المنطق الحدسي. ولكي يكون النظام سليمًا وتامًا للمنطق الحدسي، قُيِّد تالي كل متتالية في **LJ** بألا يحتوي أكثر من صيغة واحدة. وهذا يمنع استعمال قاعدة $\vee$R في **G3c**، لأن مقدمتها تحتوي φ وψ معًا في التالي. ولذلك استعمل غنتسن زوجًا من قواعد $\vee$R في **LJ**، واستعمل الزوج نفسه في **LK**. وعلى نحو مماثل، النسخة الحدسية **G1i** ليست إلا **G1c** مع قصر كل تالي على صيغة واحدة على الأكثر. (ولـ **G3c** أيضًا نسخة حدسية، لكن بعض قواعدها تختلف من نظيراتها في **G3c**؛ فهي، مثلًا، تستعمل كذلك زوجًا من قواعد $\vee$R.)

ويسهل رؤية سلامة القواعد البنيوية لـ **G1c**. فمثلًا، إذا احتوت $\Gamma \Rightarrow \Delta$ صيغة كاذبة على اليسار أو صيغة صادقة على اليمين، احتوت $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ الصيغة نفسها؛ ولا يهم عندئذ أكانت φ صادقة أم كاذبة. ولذلك، إذا صدقت مقدمة WR صدقت نتيجتها. ولا يصح العكس هنا: فقد تصدق النتيجة لأن φ صادقة، وحينئذ لا نضمن صدق المقدمة.

ولماذا نحتاج إلى القواعد البنيوية أصلًا؟ نحتاج، مثلًا، إلى الانكماش (CR وCL) كي نبرهن $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. فإذا بدأت بـ $\varphi \Rightarrow \varphi$ حصلت أولًا على $\varphi, \neg\varphi \Rightarrow$ باستعمال $\neg$R. ثم تستطيع استعمال نسختي $\vee$R تباعًا: مرة للحصول على $\varphi \vee \neg\varphi$ من $\neg\varphi$، ومرة للحصول على $\varphi \vee \neg\varphi$ من φ.

والناتج هو $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi$. ولكي تحصل في **G1c** على $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$، يلزم أن "تنكمش" واقعتا صيغة نفسها في برهان:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{CR}$$

وهناك فعلًا متتاليات صالحة لا يمكن نبرهن في **G1c** من دون إضعاف أو انكماش. فمثلًا، لا بد أن ينتهي برهان للمتتالية $\varphi \Rightarrow \psi \to \varphi$ في **G1c** بـ $\to$R، لأن $\psi \to \varphi$ وحدها يمكن أن تكون رئيسة، وهذا يتطلب المقدمة $\psi, \varphi \Rightarrow \varphi$. وهي بدورها تتطلب WL للحصول عليها من البديهية $\varphi \Rightarrow \varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\psi, \varphi \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{WL}}{\varphi \Rightarrow \psi \to \varphi}\,\to\mathrm{R}$$

لا حاجة مطلقًا إلى قاعدتي الانكماش والإضعاف في **G3c**. فالإضعاف مدمج في البديهيات، ويمكن غالبًا اجتناب الانكماش بدمج نسختي السياق Γ, Δ في القواعد ذات المقدمتين في نسخة واحدة. وفي **G1c** و**G3c** معًا قواعد من هذا النوع "تتقاسم السياق". ولا يلزم الانكماش في القواعد ذات المقدمة الواحدة إلا لـ $\vee$R و$\wedge$L و $\exists$R و$\forall$L. وتجعل نسخ هذه القواعد في **G3c** الانكماش زائدًا تمامًا. وهناك نظام **G2c** (انظر جدول 6.2) تكون فيه سياقات القواعد ذات المقدمتين مستقلة. ويكون الانكماش في **G2c** أهم منه في **G1c**.

6.8 مقدمة

حسابات المتتاليات أنظمة برهان استحدثها غيرهارد غنتسن في ثلاثينيات القرن العشرين. ولم يكن المقصود منها في المقام الأول أن تكون طريقة عملية لبرهنة الأشياء، بل استخدمها غنتسن كي يتمكن من إثبات نتائج معينة عن البنية الممكنة لبراهين وخصائصها. وهذه الأنواع من المسائل هي بالضبط المسائل التي تعنى

المسلّمات

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

القواعد البنيوية

$$\mathrm{WL}\ \frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \mathrm{WR}\ \frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\mathrm{CL}\ \frac{\Delta\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \mathrm{CR}\ \frac{\Delta, \varphi, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}$$

القواعد المنطقية

$$\neg\mathrm{L}\ \frac{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \neg\mathrm{R}\ \frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \neg\varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{R}\ \frac{\Delta_2, \psi\Gamma_2 \Rightarrow \qquad \Delta_1, \varphi\Gamma_1 \Rightarrow}{\Delta_1, \Delta_2, \varphi \wedge \psi\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\ \frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{L}\ \frac{\Delta_2\psi, \Gamma_2 \Rightarrow \qquad \Delta_1\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow}{\Delta_1, \Delta_2\varphi \vee \psi, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \psi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\rightarrow\mathrm{L}\ \frac{\Delta_2\psi, \Gamma_2 \Rightarrow \qquad \Delta_1, \varphi\Gamma_1 \Rightarrow}{\Delta_1, \Delta_2\varphi \rightarrow \psi, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow} \qquad \rightarrow\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \psi\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \rightarrow \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi(t), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \varphi(a)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \forall x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \varphi(t)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \exists x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow}$$

جدول 6.2: قواعد **G2c**. في قاعدتي $\forall$R و $\exists$L، يجب ألا يظهر رمز ثابت a في المتتالية الناتجة. وتكون Γ وΔ مجموعتين متعددتين من صيغ.

بها نظرية البرهان.

تعمل حسابات المتتاليات على *المتتاليات*، كما يوحي الاسم، لا على صيغ. والمتتالية زوج من تسلسلين أو متعددتي مجموعات من صيغ. استعمل نظاما غنتسن الأصليان (**LK** و**LJ**) التسلسلات؛ أما منظّرو البرهان فيفضّلون اليوم متعددات المجموعات. ومتعددة المجموعات تشبه المجموعة، إلا أنها قد تحتوي عنصر أكثر من مرة. ومع ذلك لا يهم ترتيب عناصر فيها، كما في المجموعات. ولذلك يصف التعبيران $\{\varphi, \varphi, \psi\}$ و$\{\varphi, \psi, \varphi\}$ متعددة المجموعات نفسها، غير أن هذه المتعددة تختلف عن $\{\varphi, \psi\}$ وعن $\{\varphi, \varphi, \psi, \psi\}$، لأن هاتين الأخيرتين تحتويان أعدادًا مختلفة من نسخ φ وψ عن الأولى.

تُكتب متعددات مجموعات صيغ في نظرية البرهان عادةً بحروف يونانية كبيرة. فعندما نكتب Γ أو Δ أو Π أو Λ أو Θ، نعني أنها متعددات مجموعات من صيغ في المنطق الذي نعمل فيه. ومن المتعارف عليه أيضًا أن منظّري البرهان لا يكتبون $\langle \Gamma, \Delta \rangle$، بل يفصلون المركبتين برمز متتالية؛ ونستعمل نحن $\Rightarrow$.

تعريف 6.12 (متتالية). *المتتالية* تعبير من الصورة

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

حيث Γ وΔ متعددتا مجموعات منتهيتان (وقد تكونان فارغتين) من صيغ. وتسمى Γ *المقدِّمة*، بينما تسمى Δ *المؤخِّرة*.

لتكن γ اقتران صيغ الموجودة في Γ (مع اعتبار الاقتران الفارغ $\top$)، ولتكن θ فصل صيغ الموجودة في Δ (مع اعتبار الفصل الفارغ $\bot$). عندئذ تكون المتتالية $\Gamma \Rightarrow \Delta$ صادقة (في بنية ما $\mathfrak{M}$) إذا وفقط إذا كانت $\gamma \to \theta$ صادقة. وفي المنطق الكلاسيكي يكافئ هذا القول إن إحدى صيغ في Γ كاذبة أو إن إحدى صيغ في Δ صادقة.

إذا كانت Γ متعددة مجموعات من صيغ، فإننا نكتب Γ, φ (أو φ, Γ) لنتيجة إضافة φ إلى Γ. وإذا كانت Δ أيضًا متعددة مجموعات من صيغ، فإن Γ, Δ هو اتحاد متعددتي المجموعات: فإذا كانت Γ تحتوي φ بتعددية n (أي تحتوي n نسخة من φ)، وكانت Δ تحتوي φ بتعددية m، فإن Γ, Δ تحتوي φ بتعددية $n + m$. وإذا كانت متعددة المجموعات في أحد جانبي المتتالية فارغة، فإننا نترك موضعها خاليًا عادةً. فمثلًا، $\Rightarrow \varphi$ هي المتتالية ذات المقدِّمة الفارغة والمؤخِّرة التي تحتوي φ بتعددية 1.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

يتكون برهان في حساب المتتاليات من شجرة متتاليات، تكون فيها المتتاليات العليا (أو الابتدائية) بديهيات النظام المدروس، وإذا وقعت متتالية تحت متتالية أو اثنتين غيرها وجب أن تنتج منهما إنتاجًا صحيحًا بقاعدة استدلال في النظام. سننظر أولًا في نظامين مختلفين من حساب المتتاليات للمنطق الكلاسيكي، هما **G1c** و**G3c**. وترد بديهياتهما وقواعدهما في جداول 6.4 and 6.3. (ويرد نظام غنتسن الأصلي **LK** في فصل 19.)

تختلف الأنظمة فيما بينها اختلافًا دقيقًا، وتترتب على هذه الفروق خصائص برهانية نظرية مختلفة. فبديهيات **G1c** هي $\varphi \Rightarrow \varphi$ ولا تسمح بصيغ أخرى. أما بديهيات **G3c** فمن الصورة $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$، حيث يجوز وجود صيغ «جانبية» اعتباطية في Γ وΔ، لكن صيغة χ التي تظهر في الجانبين يجب أن تكون ذرية. ولـ**G1c** نسختان من كل من قاعدتي $\wedge$L و$\vee$R، في حين أن لـ**G3c** نسخة واحدة فقط من كل منهما. ويضم **G1c** كذلك «قواعد بنيوية» إضافية تسمى «التقلص» (CL، CR) و«الإضعاف» (WL، WR).

نظاما **G1c** و**G3c** سليمان وكاملان للمنطق الكلاسيكي. أي إن كل متتالية قابلة للبرهنة في هذين النظامين صادقة في كل بنية، وكل متتالية صادقة في كل بنية لها برهان. ولذلك يمكن أيضًا الإجابة عن سؤال *ما إذا كانت* لمتتالية ما برهان بطرائق منطقية أخرى (كطرائق نظرية النماذج). ولأن كلا النظامين نبرهن المتتاليات الصادقة في كل بنية بالضبط، فإنهما يبرهنان المتتاليات نفسها بوجه خاص.

لكن نظرية البرهان لا تعنى فقط بما *إذا كان* شيء ما قابلًا للبرهنة، بل أيضًا بـكيفية برهنته. وينظر منظّرو البرهان في مسائل من قبيل: «هل يمكن دومًا تجنب قاعدة معينة؟»، و«هل يمكن إضافة هذه القاعدة إلى النظام من دون أن يؤدي ذلك إلى قابلية متتاليات جديدة للبرهنة؟»، و«هل يمكن تحويل براهين في نظام إلى براهين في نظام آخر؟». وإذا كان الجواب عن مسألة من هذا النوع «نعم»، فكثيرًا ما تُثبت هذه الحقيقة بالاستقراء على تعقيد براهين، أو على بنية براهين على نحو مكافئ. ولا ينتج من ذلك برهان الحقيقة فحسب (مثلًا: إذا برهن **G1c** متتاليةً فإن **G3c** يبرهن المتتالية نفسها)، بل ينتج أيضًا إجراء (مثل تحويل براهين في **G1c** إلى براهين في **G3c**).

ومن النتائج المركزية في نظرية البرهان مبرهنة *حذف القطع*. فهي تبين أننا نستطيع إضافة قاعدة القطع

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\,\text{Cut}$$

المسلّمات

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

القواعد البنيوية

$$\mathrm{WL}\ \frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \mathrm{WR}\ \frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\mathrm{CL}\ \frac{\Delta\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \mathrm{CR}\ \frac{\Delta, \varphi, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}$$

القواعد المنطقية

$$\neg\mathrm{L}\ \frac{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \neg\mathrm{R}\ \frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \neg\varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \psi\Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \wedge \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\ \frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{L}\ \frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \psi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\rightarrow\mathrm{L}\ \frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \rightarrow\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \psi\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \rightarrow \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi(t), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \varphi(a)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \forall x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \varphi(t)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \exists x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow}$$

جدول 6.3: قواعد **G1c**. في قاعدتي $\forall$R و $\exists$L، يجب ألا يظهر رمز ثابت a في المتتالية الناتجة. وتكون Γ وΔ مجموعتين متعددتين من صيغ.

المسلّمات

$$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad\qquad \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$$

القواعد المنطقية

$$\neg\mathrm{R}\,\frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \neg\varphi\Gamma \Rightarrow} \qquad \neg\mathrm{L}\,\frac{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \wedge \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi, \psi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\rightarrow\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \rightarrow \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \rightarrow\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi(a)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \forall x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(t), \forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \exists x\, \varphi(x), \varphi(t)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \exists x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow}$$

جدول 6.4: قواعد **G3c**. في قاعدتي $\forall\mathrm{R}$ و $\exists\mathrm{L}$، يجب ألا يظهر رمز ثابت a في المتتالية الناتجة. وتكون Γ وΔ مجموعتين متعددتين من صيغ. وفي المسلّمات يجب أن تكون صيغة χ ذرية.

إلى نظامي المتتاليات من دون تغيير المتتاليات قابلة للبرهنة. وفوق ذلك، يقدم البرهان طريقة تحوّل أي برهان يستعمل قواعد **G1c** (أو **G3c**) مع Cut إلى برهان لا يستعمل إلا قواعد **G1c** (أو **G3c**). وبعبارة أخرى، «يحذف» هذا الإجراء قاعدة Cut من براهين التي تستعملها؛ ومن هنا جاء الاسم.

6.9 قابلية القواعد للعكس

تعريف 6.13. تكون القاعدة R،

$$\frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S}\, R$$

قابلة للعكس في نظام إذا لزم من $\vdash S$ أن $\vdash S_i$ لكل $i = 1$، ...، n. وتكون *قابلة للعكس مع حفظ ارتفاع* (أو *قابلة للعكس مع حفظ ح.ا.*) في نظام إذا لزم من $\vdash_n S$ أن $\vdash_n S_i$ لكل $i = 1$، ...، n.

قضية مساعدة 6.14. *قواعد* **G3c** *الخاصة بـ* $\neg$ *و* $\wedge$ *و* $\vee$ *و* $\rightarrow$ *قابلة للعكس مع حفظ ارتفاع، أي:*

1. $\neg$R: إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
2. $\neg$L: إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$.
3. $\wedge$R: إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ و $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$.
4. $\wedge$L: إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
5. $\vee$R: إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

6. $\vee$L: إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ و $\mathbf{G3c} \vdash_n \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

7. $\rightarrow$R: إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$.

8. $\rightarrow$L: إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ و $\mathbf{G3c} \vdash_n \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

برهان. علينا أن نبين أنه لأي قاعدة R من **G3c**، إذا وُجد برهان π لنتيجة S للقاعدة R، وُجدت كذلك براهين π_i لمقدماتها S_i، مع $\mathrm{ht}(\pi_i) \leq \mathrm{ht}(\pi)$. ولننظر في القاعدة $\wedge$L: افترض أن ثمة برهان π متتاليته النهائية من الصورة $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. علينا أن نبين وجود برهان π' لـ $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ بحيث $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$. ونفعل ذلك بالاستقراء على $n = \mathrm{ht}(\pi)$.

إذا كان $n = 0$، فإن π يتكون من بديهية واحدة أو من تطبيق بلا مقدمات لقاعدة $\perp$L. وبديهيات **G3c** من الصورة $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ حيث χ ذرية؛ أي لا يمكن أن تكون χ هي $\varphi \wedge \psi$. فإذا كانت $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ بديهية، وجب أن يكون بعض χ الذرية عنصر في كل من Γ وΔ. ومن ثم تكون $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ بديهية أيضًا، فنكون قد وجدنا برهان π' (وهو أيضًا ذو ارتفاع 0). وإذا كانت π تطبيقًا لـ$\perp$L، فإن $\perp$ في السياق الأيسر وتظل فيه بعد الاستبدال، فتكون المتتالية المطلوبة نتيجة تطبيق للقاعدة نفسها.

إذا كان $n > 0$، انتهى البرهان باستدلال. وعلينا إثبات الدعوى لـn، مع افتراض صحتها لأي برهان ارتفاعه أصغر من n، حتى لو اختلف السياق. وبعبارة أخرى، لكل $k < n$ ولكل Π وΛ، إذا كان لـ$\varphi \wedge \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ برهان ذو ارتفاع k، فهناك برهان ذو ارتفاع لا يتجاوز k لـ$\varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda$.

لدينا حالتان: إما أن تكون $\varphi \wedge \psi$ في اليسار رئيسة، وإما ألا تكون. فإذا كانت رئيسة، كان الاستدلال الأخير هو $\wedge$L، وانتهى البرهان الجزئي المباشر π_1 بـ$\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. فتصح النتيجة في هذه الحالة لأن $\mathrm{ht}(\pi_1) < \mathrm{ht}(\pi)$.

أما إذا لم تكن $\varphi \wedge \psi$ رئيسة، فبعض صيغة أخرى هي الرئيسة، وتنتمي $\varphi \wedge \psi$ إلى سياق الاستدلال الأخير. ينطبق عندئذ فرض الاستقراء على البراهين الجزئية المباشرة للقاعدة الأخيرة R، فيعطي برهان واحدًا π'_1 أو براهين اثنين π'_1 وπ'_2، لا يزيد ارتفاع كل منهما على ارتفاع البراهين الجزئية المباشرة لـπ. وتحتوي

المتتاليات النهائية لـπ'_1 وπ'_2 على φ, ψ في السياق الأيسر بدلًا من $\varphi \wedge \psi$. نطبق القاعدة R لنحصل على البرهان π'. فمثلًا، افترض أن π ينتهي بـ$\to$L:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi \wedge \psi, \Gamma', \theta \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma', \chi \to \theta \Rightarrow \Delta} \to\mathrm{L}$$

هنا تكون $\chi \to \theta$ في اليسار رئيسة، والسياق الأيسر هو $\varphi \wedge \psi, \Gamma'$ (أي $\Gamma = \Gamma', \chi \to \theta$). ويعطي فرض الاستقراء براهين π'_1 وπ'_2 لـ$\varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \chi$ و$\varphi, \psi, \Gamma', \theta \Rightarrow \Delta$، على الترتيب. ويمكن استعمال هاتين المتتاليتين مرة أخرى مقدمتين لقاعدة $\to$L للحصول على π':

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \varphi, \psi, \Gamma', \theta \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi, \psi, \Gamma', \chi \to \theta \Rightarrow \Delta} \to\mathrm{L}$$

ولدينا

$$\mathsf{ht}(\pi) = \max(\mathsf{ht}(\pi_1), \mathsf{ht}(\pi_2)) + 1$$
$$\mathsf{ht}(\pi') = \max(\mathsf{ht}(\pi'_1), \mathsf{ht}(\pi'_2)) + 1$$

بحسب التعريف، كما أن

$$\mathsf{ht}(\pi'_1) \leq \mathsf{ht}(\pi_1)$$
$$\mathsf{ht}(\pi'_2) \leq \mathsf{ht}(\pi_2)$$

بفرض الاستقراء. ومن ثم

$$\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi).$$

□

أعط برهان قضية مساعدة 6.14 للقاعدة $\to$R.

قضية مساعدة 6.15. *القاعدتان $\forall$R و$\exists$L قابلتان للعكس مع حفظ ارتفاع بالمعنى الآتي:*

1. *إذا كان* $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)$؛ و
2. *إذا كان* $\mathbf{G3c} \vdash_n \exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi(c), \Gamma \Rightarrow \Delta$،

لكل c لا يظهر في Γ ولا Δ ولا في $\forall x\, \varphi(x)$ أو $\exists x\, \varphi(x)$، على الترتيب.

برهان. نبرهن (1) ونترك (2) تمرينًا. والحجة شبيهة ببرهان قضية مساعدة 6.14. في خطوة الاستقراء حالتان مرة أخرى. أما الحالة التي تكون فيها $\forall x\, \varphi(x)$ رئيسة فهي سريعة: مقدمة استدلال $\forall$R الأخير من الصورة المطلوبة $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)$، وينتهي عندها البرهان الجزئي المباشر π_1، ولدينا $\mathrm{ht}(\pi_1) < \mathrm{ht}(\pi)$. ويضمن شرط المتغير المميز، فوق ذلك، ألا يظهر a في Γ أو Δ أو $\forall x\, \varphi(x)$. ولنا أن نفترض أن π_1 منتظم، ولذلك يكون $\pi_1[c/a]$ برهان من ارتفاع نفسه لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)$ بموجب قضية مساعدة 6.21.

وفي الحالة الثانية لا تكون $\forall x\,\varphi(x)$ رئيسة في الاستدلال الأخير، بل تكون صيغة أخرى رئيسة. ولننظر مرة أخرى في حالة على سبيل المثال. افترض أن الاستدلال الأخير هو $\wedge\mathrm{R}$. تكون صيغة ما في Δ من الصورة $\psi \wedge \chi$ وهي الرئيسة، وينتهي برهان π هكذا:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

حيث $\Delta = \Delta', \psi \wedge \chi$. ولتكن c رمز ثابت لا تظهر في Γ ولا Δ ولا $\forall x\,\varphi(x)$؛ فمن الواضح عندئذ أنها لا تظهر أيضًا في Δ', ψ ولا في Δ', χ. ولذلك ينطبق فرض الاستقراء على π_1 وπ_2؛ فنحصل على براهين π'_1 وπ'_2 مع $\mathrm{ht}(\pi'_1) \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ و$\mathrm{ht}(\pi'_2) \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$. والبرهان المطلوب π' لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)$ هو:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi(c), \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi(c), \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi(c), \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

ومعه $\mathrm{ht}(\pi') = \max(\mathrm{ht}(\pi'_1), \mathrm{ht}(\pi'_2)) + 1 \leq \mathrm{ht}(\pi)$. □

تؤدي قضية مساعدة 6.14 دورًا مهمًا في برهان مبرهنة حذف القطع. ويمكن كذلك استعمالها لبيان ما يأتي:

قضية 6.16. *قاعدتا التقلص* CL و*CR في* **G1c** *مقبولتان في* **G3c** *مع حفظ ارتفاع.*

برهان. نقدم الحجة لـCR وCL معًا. افترض أن π برهان لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$ أو لـ$\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ في **G3c**. علينا أن نبين وجود **G3c**-برهان أيضًا، وليكن π'، لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ أو لـ$\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$، على الترتيب، مع $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$. ونفعل ذلك بالاستقراء على $n = \mathrm{ht}(\pi)$.

إذا كان $n = 0$، فإن π بديهية أو تطبيق بلا مقدمات لـ$\bot$L. فإذا كانت $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$ بديهية لـ**G3c**، كانت $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ بديهية أيضًا: فإما أن تكون χ ذرية ما عنصر في كل من Γ وΔ، أو أن تكون φ ذرية و عنصر في Γ. وينطبق التعليل نفسه إذا كانت المتتالية النهائية $\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. وإذا كانت π تطبيقًا لـ$\bot$L، بقيت $\bot$ في الطرف الأيسر بعد التقلص، فتكون النتيجة المطلوبة تطبيقًا للقاعدة نفسها.

إذا كان $n > 0$، انتهى π بقاعدة ما R. وإذا لم تكن φ رئيسة في هذا الاستدلال الأخير، أمكننا الحصول على برهان π' كما في برهان قضية مساعدة 6.14، بتطبيق فرض الاستقراء على البراهين الجزئية المباشرة لـπ ثم تطبيق القاعدة R نفسها على البراهين الناتجة. وفرض الاستقراء هو أنه إذا وُجد برهان من ارتفاع $k < n$ لإحدى المتتاليتين $\Pi \Rightarrow \Lambda, \theta, \theta$ أو $\theta, \theta, \Pi \Rightarrow \Lambda$، فيوجد برهان من ارتفاع لا يتجاوز k لـ$\Pi \Rightarrow \Lambda, \theta$ أو $\theta, \Pi \Rightarrow \Lambda$، على الترتيب. (لاحظ أن فرض الاستقراء ينطبق حتى إذا اختلفت السياقات أو صيغة المتقلصة عن Γ وΔ وφ.)

فمثلًا، افترض أن R هي $\wedge$R وأن π ينتهي بـ

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi, \varphi}\ \wedge\mathrm{R}$$

حيث $\Delta = \Delta', \psi \wedge \chi$. يعطي فرض الاستقراء براهين π'_1 وπ'_2 لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ و$\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$، على الترتيب، مع $\mathrm{ht}(\pi'_1) \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ و$\mathrm{ht}(\pi'_2) \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$. والبرهان π' هو:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi}\ \wedge\mathrm{R}$$

وإذا كانت φ رئيسة في الاستدلال الأخير، طبقنا لمّة العكس (قضية مساعدة 6.14) على البراهين الجزئية المباشرة لـπ، ثم فرض الاستقراء، ثم القاعدة R

مرة أخرى. فمثلًا، افترض أن π يبرهن $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$، وأن $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ ورئيسة في الاستدلال الأخير. عندئذ يبدو π كما يأتي:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

طبّق قضية مساعدة 6.14 على π_1 لتحصل على برهان π'_1 لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \psi$. (وتعطي أيضًا برهان لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \chi, \psi$، لكننا لا نحتاج إليه.) وبالمثل، نحصل بتطبيق قضية مساعدة 6.14 على π_2 على برهان π'_2 لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \chi, \chi$. ولأن عكس $\wedge\mathrm{R}$ يحفظ ارتفاع، فإن $\mathrm{ht}(\pi'_1) \leq \mathrm{ht}(\pi_1) < \mathrm{ht}(\pi)$ و $\mathrm{ht}(\pi'_2) \leq \mathrm{ht}(\pi_2) < \mathrm{ht}(\pi)$. ومن ثم ينطبق فرض الاستقراء على π'_1 وπ'_2: فثمة براهين π''_1 وπ''_2 لـ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$، على الترتيب، مع $\mathrm{ht}(\pi''_1) \leq \mathrm{ht}(\pi'_1) \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ و $\mathrm{ht}(\pi''_2) \leq \mathrm{ht}(\pi'_2) \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$. وعندئذ يكون برهان π':

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi''_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi''_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

مع $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$.

يجب أن نولي قواعد الكم عناية خاصة في الحالات التي تكون فيها صيغة رئيسة.

افترض أن $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ رئيسة في اليمين. عندئذ ينتهي π بـ

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x), \psi(a)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x), \forall x\, \psi(x)}\ \forall\mathrm{R}$$

وبموجب قضية مساعدة 6.15 يوجد برهان π_1' من ارتفاع لا يتجاوز $\mathrm{ht}(\pi_1)$ لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c), \psi(a)$ لكل c لا تظهر في $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x), \psi(a)$.
ولنا أن نفترض أن π_1' منتظم؛ ولذلك يكون البرهان $\pi_1'[a/c]$ بموجب قضية مساعدة 6.21 برهان لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(a), \psi(a)$، ومن ارتفاع لا يتجاوز $\mathrm{ht}(\pi_1)$ أيضًا. وينطبق الآن فرض الاستقراء فيعطينا برهان π_1'' لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(a)$. نطبق قاعدة $\forall\mathrm{R}$ لنحصل على π':

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(a)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

مع $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$.

والآن افترض أن $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ ورئيسة في اليمين. عندئذ يبدو π هكذا:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x), \exists x\, \psi(x), \psi(t)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x), \exists x\, \psi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

ينطبق فرض الاستقراء على π_1، فنحصل على برهان π_1' لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x), \psi(t)$. (ولاحظ أننا لا نحتاج هنا إلى لمّة عكس.) وعندئذ يكون برهان π':

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x), \psi(t)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

مع $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$. $\square$

ارسم برهان قضية 6.16 لـCL، وبيّن الحالتين اللّتين فيهما $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ و$\varphi \equiv (\psi \to \chi)$.

ارسم برهان قضية 6.16 لـCL في حالات الكم المتبقية، أي حين $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ وحين $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$.

6.10 أمثلة على البراهين

لإعطاء براهين لمتتاليات، يكون من الملائم عادةً أن نبدأ بالمتتالية النهائية ونتقدم صعودًا: نختار فيها صيغة بوصفها صيغة الفاعلة، ونكتب مقدمات القاعدة المقابلة فوق المتتالية، ثم نكرر العملية حتى نصل إلى بديهيات. افترض، مثلًا، أننا نريد برهنة المتتالية

$$(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)$$

لننظر في $\chi \to (\theta \to \alpha)$: إنها من الصورة $\varphi \to \psi$ وتقع في يمين المتتالية. وتوحي مطابقة المتتالية كلها مع قاعدة $\to$R في **G1c**،

$$\frac{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \to \psi} \to\mathrm{R}$$

بأن نأخذ $\Gamma = \{(\chi \wedge \theta) \to \alpha\}$، و$\Delta = \emptyset$، و$\varphi \equiv \chi$، و$\psi \equiv \theta \to \alpha$. ومن ثم يمكن أن يكون الاستدلال الأخير في البرهان هو

$$\frac{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \theta \to \alpha}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

وإذا كررنا الفكرة نفسها، مع اتخاذ $\theta \to \alpha$ صيغةً فاعلةً، حصلنا على

$$\frac{\dfrac{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \alpha}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \theta \to \alpha} \to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

وعلينا الآن أن نركز على $(\chi \wedge \theta) \to \alpha$ ونستعمل قاعدة $\to$L في **G1c**،

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \to\mathrm{L}$$

فيقودنا ذلك إلى

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \wedge \theta \qquad \theta, \chi, \alpha \Rightarrow \alpha}{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \alpha} \to\mathrm{L}}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha} \to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

وإذا جعلنا صيغة $\chi \wedge \theta$ في المتتالية العليا اليسرى رئيسة، وأعملنا قاعدة $\wedge$R، حصلنا على

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \qquad \theta, \chi \Rightarrow \alpha, \theta}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \wedge \theta} \wedge\mathrm{R} \qquad \theta, \chi, \alpha \Rightarrow \alpha}{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \alpha} \to\mathrm{L}}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha} \to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

سار كل شيء جيدًا حتى الآن. ولاحظ أن ما فعلناه يصلح أيضًا في **G3c**، لأن القواعد التي استعملناها إلى الآن واحدة في **G1c** و**G3c**. وقد وصلنا إلى جزء من برهان تحتوي كل متتالية عليا فيه صيغة نفسها في اليسار واليمين، لكنها لم تصبح بديهيات تمامًا بعد.

في **G1c** علينا أن نعطي براهين للمتتاليات العليا انطلاقًا من بديهيات من الصورة $\varphi \Rightarrow \varphi$. ويسهل فعل ذلك بقواعد الإضعاف؛ فمثلًا يمكن نبرهن المتتالية العليا الواقعة أقصى اليسار $\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi$ كما يأتي:

وهكذا يكون لدينا إجمالًا برهان في **G1c** من الصورة الآتية:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi}\,\mathrm{WR} \qquad \dfrac{\dfrac{\theta \Rightarrow \theta}{\theta, \chi \Rightarrow \theta}\,\mathrm{WL}}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \theta}\,\mathrm{WR}}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \wedge \theta}\,\wedge\mathrm{R} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\chi, \alpha \Rightarrow \alpha}\,\mathrm{WL}}{\theta, \chi, \alpha \Rightarrow \alpha}\,\mathrm{WL}}{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \alpha}\,\to\mathrm{L}}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha}\,\to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)}\,\to\mathrm{R}
$$

لا تعتمد بنية هذا البرهان، ولا ارتفاعه بوجه خاص، على ماهية صيغ χ وθ وα. ويمكننا استبدال هذه الرموز في برهان أعلاه بأي صيغ، ويظل الناتج برهان في **G1c**. فالبرهان في **G1c** تخطيطي.

أما بديهيات **G3c** فهي متتاليات من الصورة $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$، حيث يجب أن تكون φ ذرية. ولذلك، مع أن $\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi$ تبدو بديهية في **G3c**، إذ $\Gamma = \{\theta\}$ و$\Delta = \{\alpha\}$، فإنها لا تكون بديهية حقًا إلا إذا كانت χ ذرية بالفعل. ولا يكون جزء البرهان الذي بنيناه برهانًا كاملًا في **G3c** إلا إذا كانت χ وθ وα صيغ ذرية.

ومع أننا، بالمعنى الدقيق، لم نبيّن أن

$$\mathbf{G3c} \vdash (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha),$$

فهذا في الممارسة كل ما نحتاج إلى فعله، وكل ما نستطيع فعله. والسبب أن كل متتالية من الصورة $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ قابلة للبرهنة في **G3c**، حتى إن لم تكن φ نفسها ذرية. ويمكن بيان ذلك بالاستقراء على عمق $\mathrm{dp}(\varphi)$ للصيغة φ.

تعريف 6.17. يُعرّف عمق $\mathrm{dp}(\varphi)$ لـ صيغة كما يأتي:

1. إذا كانت φ ذرية، فإن $\mathrm{dp}(\varphi) = 0$.

2. إذا كانت $\varphi \equiv \neg\psi$، أو $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$، أو $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$، فإن $\mathrm{dp}(\varphi) = \mathrm{dp}(\psi) + 1$.

3. إذا كانت $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$، أو $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$، أو $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$، فإن $\mathrm{dp}(\varphi) = \max(\mathrm{dp}(\psi), \mathrm{dp}(\chi)) + 1$.

ليس من العسير إثبات أن $\mathrm{dp}(\varphi(x)) = \mathrm{dp}(\varphi(t))$ لأي حد t. والحقيقة المهمة لنا أن عمق صيغة الرئيسة في أي قاعدة أكبر دائمًا من عمق صيغ الفاعلة. فمثلًا، لدينا:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dp}(P(x)) = \mathrm{dp}(P(a)) &= 0,\\
\mathrm{dp}(\forall x\, P(x)) &= 1,\\
\mathrm{dp}((\forall x\, P(x) \to P(a))) &= \max(1, 0) + 1 = 2.
\end{aligned}$$

ويمكننا استعمال ذلك لإثبات بعض النتائج بالاستقراء على $\mathrm{dp}(\varphi)$، ومنها النتيجة الآتية.

قضية 6.18. *لكل φ برهان في* **G1c** *لـ $\varphi \Rightarrow \varphi$ تكون جميع بديهياته ذرية.*

برهان. بالاستقراء على $\mathrm{dp}(\varphi)$. إذا كان $\mathrm{dp}(\varphi) = 0$، كانت φ ذرية، وكانت $\varphi \Rightarrow \varphi$ نفسها برهان في **G1c** من الصورة المطلوبة. وإذا كان $\mathrm{dp}(\varphi) > 0$، كانت φ مبنية من صيغ أقل عمقًا، كأن تكون $\varphi \equiv \neg\psi$، أو $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$، أو $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$. وفرض الاستقراء هو أنه لكل θ يحقق $\mathrm{dp}(\theta) < \mathrm{dp}(\varphi)$، لدينا $\mathbf{G1c} \vdash \theta \Rightarrow \theta$ انطلاقًا من بديهيات ذرية.

إذا كانت $\varphi \equiv \neg\psi$، كان $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\varphi)$، وبفرض الاستقراء يوجد برهان π_1 في **G1c** من بديهيات ذرية لـ $\psi \Rightarrow \psi$. ويمكن تمديده إلى برهان لـ $\neg\psi \Rightarrow \neg\psi$ كما يأتي:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\neg\psi, \psi \;\Rightarrow}\,\neg\mathrm{L}}{\neg\psi \;\Rightarrow\; \neg\psi}\,\neg\mathrm{R}$$

وإذا كانت $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$، كان $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\varphi)$ و $\mathrm{dp}(\chi) < \mathrm{dp}(\varphi)$. وبفرض الاستقراء يوجد في **G1c** براهين π_1 وπ_2 من بديهيات ذرية لـ $\psi \Rightarrow \psi$ و$\chi \Rightarrow \chi$. ويمكن تمديدهما إلى برهان لـ $\psi \wedge \chi \Rightarrow \psi \wedge \chi$ كما يأتي:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\psi, \chi \;\Rightarrow\; \psi}\,\mathrm{WL}}{\psi \wedge \chi, \chi \;\Rightarrow\; \psi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi \;\Rightarrow\; \psi}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \chi \;\Rightarrow\; \chi\end{array}}{\psi, \chi \;\Rightarrow\; \chi}\,\mathrm{WL}}{\psi \wedge \chi, \chi \;\Rightarrow\; \chi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi \;\Rightarrow\; \chi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi \;\Rightarrow\; \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}}{\psi \wedge \chi \;\Rightarrow\; \psi \wedge \chi}\,\mathrm{CL}$$

والآن افترض أن $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$. خذ رمز ثابت c لا يظهر في $\forall x\, \psi(x)$. عندئذ $\mathrm{dp}(\psi(c)) = \mathrm{dp}(\psi(x)) < \mathrm{dp}(\varphi)$، وبفرض الاستقراء

يوجد برهان π_1 في **G1c** من بديهيات ذرية لـ $\psi(c) \Rightarrow \psi(c)$. ويمكن تمديده إلى برهان لـ $\forall x\, \psi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x)$ كما يأتي:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi(c) \;\Rightarrow\; \psi(c)\end{array}}{\forall x\, \psi(x) \;\Rightarrow\; \psi(c)}\,\forall\mathrm{L}}{\forall x\, \psi(x) \;\Rightarrow\; \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

وتُترك الحالات الباقية تمارين. □

أكمل برهان قضية 6.18 بمعالجة الحالات التي فيها $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$، و$\varphi \equiv (\psi \to \chi)$، و $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$.
وكان يمكننا، لأغراضنا، أن نستعمل أيضًا برهان الآتي

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\Rightarrow\; \psi, \neg\psi}\,\neg\mathrm{R}}{\neg\psi \;\Rightarrow\; \neg\psi}\,\neg\mathrm{L}$$

في حالة $\varphi \equiv \neg\psi$. غير أن هذا لا يصلح في بعض حسابات المتتاليات. فحساب المتتاليات الحدسي **G1i** شبيه بـ **G1c**، إلا أنه يقصر يمين كل متتالية على صيغة واحدة على الأكثر. فإذا كانت $\Delta = \emptyset$، كان برهان الأول برهان في **G1i** أيضًا، أما الثاني فلا، لأن إحدى متتالياته تحتوي ψ و$\neg\psi$ معًا في اليمين.

لاحظ أنه لم يكن يمكننا، حتى في **G1c**، استعمال ترتيب بديل للقواعد في حالة $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$. فالشجرة الآتية ليست برهان:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi(c) \;\Rightarrow\; \psi(c)\end{array}}{\psi(c) \;\Rightarrow\; \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R}}{\forall x\, \psi(x) \;\Rightarrow\; \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{L}$$

لأنها تخرق شرط المتغير المميز في $\forall\mathrm{R}$.

قضية 6.19. *كل متتالية من الصورة $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$، حيث إن φ ليست بالضرورة ذرية، قابلة للبرهنة في* **G3c**.

برهان. الحجة شديدة الشبه ببرهان قضية 6.18، لكن يجب توخي الدقة في فرض الاستقراء. والحالة التي فيها $n = \mathrm{dp}(\varphi) = 0$ سهلة مرة أخرى: إذا كان $n = 0$، كانت φ ذرية، وكانت $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ بديهية في **G3c**.

افترض الآن أن $n > 0$. ونميز الحالات من جديد. فرض الاستقراء هو: لكل θ يحقق $\mathrm{dp}(\theta) < n$، ولكل Π وΛ، لدينا $\mathbf{G3c} \vdash \theta, \Pi \Rightarrow \Lambda, \theta$. وهذه حالة $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$. نستعمل فرض الاستقراء مرتين: أولًا مع $\theta = \psi$، و$\Pi = \chi, \Gamma$، و$\Lambda = \Delta$، فنحصل على برهان π_1 لـ $\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$؛ وثانيًا مع $\theta = \chi$، و$\Pi = \psi, \Gamma$، و$\Lambda = \Delta$، فنحصل على برهان π_2 لـ $\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$. وهذا برهان لـ $\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi, \chi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi\end{array}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi, \chi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \chi\end{array}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \chi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

وفي حالة $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$، اختر رمز ثابت c لا يظهر في $\forall x\, \psi(x)$ ولا Γ ولا Δ. طبّق فرض الاستقراء مع $\theta = \psi(c)$، و$\Pi = \forall x\, \psi(x), \Gamma$، و$\Lambda = \Delta$. فنحصل على برهان π_1 لـ $\psi(c), \forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)$، ومنه نحصل على:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi(c), \forall x\, \psi(x), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi(c)\end{array}}{\forall x\, \psi(x), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi(c)}\,\forall\mathrm{L}}{\forall x\, \psi(x), \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

ويتحقق شرط المتغير المميز في $\forall\mathrm{R}$ بفضل طريقة اختيارنا لـ c. □

واصل برهان قضية 6.19 بمعالجة الحالتين اللتين فيهما $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$ و$\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$.

6.11 البراهين المنتظمة والاستبدال

تُدخل قواعد الكميات بعض التعقيدات بسبب «شروط المتغير المميَّز» التي تنطبق على قاعدتي $\exists\mathrm{L}$ و$\forall\mathrm{R}$. ويمكن معالجة معظم هذه التعقيدات بضمان ألا يعاد استعمال رمز ثابت a في هذه الاستدلالات. فلنضع التعريف الآتي.

تعريف 6.20. يكون برهان π في **G1c** أو **G3c** منتظمًا إذا تحقق ما يأتي:

1. لا يُستعمل أي متغير مميَّز a متغيرًا مميَّزًا لأكثر من استدلال واحد بقاعدة $\exists\mathrm{L}$ أو $\forall\mathrm{R}$؛ و

2. إذا كان a المتغير المميَّز لاستدلال بقاعدة $\exists\mathrm{L}$ أو $\forall\mathrm{R}$، فإنه لا يقع في π إلا فوق ذلك الاستدلال.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

قضية مساعدة 6.21. *إذا كان π منتظمًا وينتهي بـ$\Gamma \Rightarrow \Delta$، وكان c رمز ثابت لا يُستعمل متغيرًا مميَّزًا في π، وكان t حدًّا لا يحتوي أي متغير مميَّز في π، فإن $\pi[t/c]$ الناتج من π باستبدال كل وقوع لـc بـt هو برهان منتظم. ومتتاليته النهائية هي $\Gamma[t/c] \Rightarrow \Delta[t/c]$، حيث تدل $\Gamma[t/c]$ على متعددة المجموعات الناتجة من استبدال c بـt في كل وقوع لصيغة في Γ، مع إبقاء جميع الوقوعات وتعدديا تها.*

برهان. بالاستقراء على $\mathrm{ht}(\pi)$. إذا كان $\mathrm{ht}(\pi) = 0$، اقتصر π على بديهية. وعندئذ يكون $\pi[t/c]$ بديهية أيضًا، لأن كل صيغة $\varphi(c)$ فيها تتحول إلى $\varphi(t)$.

إذا كان $\mathrm{ht}(\pi) > 0$، فنميّز الحالات بحسب الاستدلال الأخير في π. وحالات القواعد البنيوية (في **G1c**) والقواعد المنطقية لروابط القضايا سهلة ونتركها تمارين. وننظر في الحالات التي ينتهي فيها π باستدلال كمي.

1. إذا كان الاستدلال الأخير هو $\forall\mathrm{R}$، كان π من الصورة

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi' \\ \Gamma(c) \;\Rightarrow\; \Delta'(c), \varphi(a,c)\end{array}}{\Gamma(c) \;\Rightarrow\; \Delta'(c), \forall x\, \varphi(x,c)}\,\forall\mathrm{R}$$

وبفرض الاستقراء، يكون $\pi'[t/c]$ برهان منتظمًا لـ$\Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t), \varphi(a,t)$. ولما كان a متغيرًا مميَّزًا في π، فإنه لا يقع في t. ومن ثم يكون الاستدلال الأخير في $\pi[t/c]$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'[t/c] \\ \Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t), \varphi(a,t)\end{array}}{\Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t), \forall x\, \varphi(x,t)}\,\forall\mathrm{R}$$

صحيحًا: فالنتيجة لا تحتوي a.

2. إذا كان الاستدلال الأخير هو $\forall$L في **G3c**، كان π من الصورة

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'\\ \varphi(s(c),c),\forall x\,\varphi(x,c),\Gamma(c)\ \Rightarrow\ \Delta'(c)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,c),\Gamma(c)\ \Rightarrow\ \Delta'(c)}\ \forall\mathrm{L}$$

وبفرض الاستقراء، يكون $\pi'[t/c]$ برهان منتظمًا لـ$\varphi(s(t),t),\forall x\,\varphi(x,t),\Gamma(t)\ \Rightarrow\ \Delta'(t)$. ويكون الاستدلال الأخير في $\pi[t/c]$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'[t/c]\\ \varphi(s(t),t),\forall x\,\varphi(x,t),\Gamma(t)\ \Rightarrow\ \Delta'(t)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,t),\Gamma(t)\ \Rightarrow\ \Delta'(t)}\ \forall\mathrm{L}$$

صحيحًا. وحالة $\forall$L في **G1c** مشابهة، لكنها أبسط قليلًا.

3. إذا كان الاستدلال الأخير $\exists$R أو $\exists$L فهذه الحالة تمرين.

وفي كل حالة أضفنا متتالية إلى نهاية برهان منتظم (أو إلى براهين منتظمة في حالة القواعد ثنائية المقدمة). في كل حالة لا تتغير استدلالات المتغير المميَّز. وبما أن c لم يكن متغيرًا مميَّزًا، وأن t لا يحتوي أي متغير مميَّز في π، فلا يُدخل الاستبدال متغيرًا مميَّزًا تحت الاستدلال الذي يخصه؛ كما تحافظ فروض الاستقراء على الانتظام. ومن ثم يكون $\pi[t/c]$ منتظمًا. □

قضية 6.22. *إذا كان π برهان في* **G1c** *أو* **G3c**، *فهناك برهان منتظم π' له البنية نفسها (وبخاصة ارتفاع نفسه)، ولا يختلف عن π إلا باستبدال المتغيرات المميَّزة.*

برهان. لأغراض هذا البرهان فقط، نسمي استدلال متغير مميَّز في π نظيفًا إذا لم يكن متغيره المميَّز متغيرًا مميَّزًا لاستدلال آخر، ولم يقع في π خارج برهان المباشر للاستدلال؛ ونسميه متسخًا فيما عدا ذلك. وليكن n عدد استدلالات المتغير المميَّز المتسخة في π. نبين بالاستقراء على n أنه يمكن تحويل π إلى برهان منتظم π' من النوع المطلوب. إذا كان $n = 0$، كانت جميع استدلالات المتغير المميَّز في π نظيفة، ومن ثم كان π منتظمًا، فلا شيء يلزم إثباته. وفيما عدا ذلك، نختار أعلى استدلال متسخ لمتغير مميَّز، وليكن مثلًا استدلالًا بقاعدة $\forall\mathrm{R}$. ويكون البرهان الجزئي π_1 المنتهي به من الصورة

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

ولأن c متغير مميَّز، فإنه لا يقع في Γ أو Δ أو $\forall x\, \varphi(x)$. ويكون البرهان π_2 منتظمًا لأن كل استدلال لمتغير مميَّز يقع فوق الاستدلال المختار نظيف. ولتكن a رمز ثابت لا تقع في π. وبحسب قضية مساعدة 6.21، يكون $\pi_2[a/c]$ برهانًا منتظمًا لـ$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)$، ويمكن تطبيق $\forall\mathrm{R}$ عليه. وإذا استبدلنا π_1 في π بالبرهان π_1'،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2[a/c]\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

نكون قد استبدلنا متغيرًا مميَّزًا جديدًا a بالمتغير c. وينتج عن ذلك عدد أقل قطعًا من n من استدلالات المتغير المميَّز المتسخة، لأن إعادة التسمية قد تنظف أكثر من استدلال واحد. فتتبع النتيجة من فرض الاستقراء. وحالات قواعد المتغير المميَّز الأخرى مماثلة. □

لن نستعمل القضية المثبتة للتو استعمالًا صريحًا، لكننا سنفترض أن جميع براهين التي ننظر فيها منتظمة؛ فإن لم تكن كذلك أمكننا دومًا استبدال المتغيرات المميَّزة لجعلها منتظمة.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

المسلّمات

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

القواعد البنيوية

$$\mathrm{WL}\ \frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \mathrm{WR}\ \frac{\Gamma \Rightarrow}{\varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\mathrm{CL}\ \frac{\Delta\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}$$

القواعد المنطقية

$$\neg\mathrm{L}\ \frac{\varphi\Gamma \Rightarrow}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \neg\mathrm{R}\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\neg\varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \wedge\mathrm{R}\ \frac{\psi\Gamma \Rightarrow \qquad \varphi\Gamma \Rightarrow}{\varphi \wedge \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\ \frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{L}\ \frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \vee\mathrm{R}\ \frac{\varphi\Gamma \Rightarrow}{\varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\ \frac{\psi\Gamma \Rightarrow}{\varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\rightarrow\mathrm{L}\ \frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \rightarrow\mathrm{R}\ \frac{\psi\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\varphi \rightarrow \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi(t), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \forall\mathrm{R}\ \frac{\varphi(a)\Gamma \Rightarrow}{\forall x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \exists\mathrm{R}\ \frac{\varphi(t)\Gamma \Rightarrow}{\exists x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow}$$

جدول 6.5: قواعد **G1i** للمنطق الحدسي. في قاعدتي $\forall$R و$\exists$L، يجب ألا يظهر رمز ثابت a في المتتالية الناتجة. وتكون Γ مجموعة متعددة من صيغ، أما Δ فيجوز أن تكون خالية أو أن تحتوي صيغة واحدة. ولا توجد قاعدة CR. والنظام **G1m** هو **G1i** من دون WR ومن دون المسلّمات $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

المسلّمات

$$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad\qquad \chi, \Gamma \Rightarrow \chi$$

القواعد المنطقية

$$\neg\mathrm{R}\,\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\neg\varphi\Gamma \Rightarrow} \qquad \neg\mathrm{L}\,\frac{\varphi\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{R}\,\frac{\psi\Gamma \Rightarrow \qquad \varphi\Gamma \Rightarrow}{\varphi \wedge \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\varphi\Gamma \Rightarrow}{\varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{R}\,\frac{\psi\Gamma \Rightarrow}{\varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\to\mathrm{R}\,\frac{\psi\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\varphi \to \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \to\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \varphi\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{R}\,\frac{\varphi(a)\Gamma \Rightarrow}{\forall x\,\varphi(x)\Gamma \Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(t), \forall x\,\varphi(x), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\forall x\,\varphi(x), \Gamma \Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{R}\,\frac{\varphi(t)\Gamma \Rightarrow}{\exists x\,\varphi(x)\Gamma \Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\exists x\,\varphi(x), \Gamma \Rightarrow}$$

جدول 6.6: قواعد **G3i** للمنطق الحدسي. في قاعدتي $\forall\mathrm{R}$ و$\exists\mathrm{L}$، يجب ألا يظهر رمز ثابت a في المتتالية الناتجة. وتكون Γ مجموعة متعددة من صيغ، أما Δ فيجوز أن تكون خالية أو أن تحتوي صيغة واحدة. وفي المسلّمات يجب أن تكون صيغة χ ذرية. والنظام **G3m** هو **G3i** من دون المسلّمات $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

المسلّمات

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

القواعد البنيوية

$$\mathrm{WL}\ \frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \mathrm{WR}\ \frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\mathrm{CL}\ \frac{\Delta\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \mathrm{CR}\ \frac{\Delta, \varphi, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\mathrm{XL}\ \frac{\Delta\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow}{\Delta\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow} \qquad \mathrm{XR}\ \frac{\Delta, \varphi, \psi, \Lambda\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \psi, \varphi, \Lambda\Gamma \Rightarrow}$$

القواعد المنطقية

$$\neg\mathrm{L}\ \frac{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \neg\mathrm{R}\ \frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \neg\varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \psi\Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \wedge \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\ \frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{L}\ \frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \psi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\rightarrow\mathrm{L}\ \frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad \rightarrow\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \psi\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \rightarrow \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi(t), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \varphi(a)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \forall x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{L}\ \frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{R}\ \frac{\Delta, \varphi(t)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \exists x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow}$$

جدول 6.7: قواعد **LK**. في قاعدتي $\forall$R و $\exists$L، يجب ألا يظهر رمز ثابت a في المتتالية الناتجة. وتكون Γ وΔ وΠ وΛ متتاليات من صيغ.

المسلّمات

$$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad\qquad \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$$

القواعد المنطقية

$$\neg\mathrm{R}\,\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \neg\varphi\Gamma \Rightarrow} \qquad \neg\mathrm{L}\,\frac{\Delta, \varphi\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \wedge \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi, \psi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\to\mathrm{R}\,\frac{\psi\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \to \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \to\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{R}\,\frac{\varphi(a)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \forall x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(t), \forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \exists x\, \varphi(x), \varphi(t)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \exists x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow}$$

جدول 6.8: قواعد النظام متعدد النتائج **mG3i** للمنطق الحدسي. في قاعدتي $\forall$R و$\exists$L، يجب ألا يظهر رمز ثابت a في المتتالية الناتجة. وتكون Γ وΔ مجموعتين متعددتين من صيغ. وفي المسلّمات يجب أن تكون صيغة χ ذرية. والنظام **mG3m** هو **mG3i** من دون المسلّمات $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

6.12 القواعد وبراهين

نبدأ بوضع بعض التعريفات وتثبيت بعض المصطلحات.

لننظر، مثلًا، في قاعدتي **G3c** اللتين تتيحان برهنة متتاليات تحتوي $\varphi \wedge \psi$ انطلاقًا من متتاليات تحتوي φ وψ:

$$\frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge\mathrm{R}$$

تسمى المتتاليات الواقعة فوق الخط *مقدمات*، وتسمى المتتالية الواقعة تحته *نتيجة*. وتسمى صيغ الموجودة في Γ وΔ في كل قاعدة *السياق* أو *صيغ الجانبية*. أما صيغة في النتيجة التي ليست جزءًا من السياق فتسمى صيغة *الرئيسة*، وتسمى صيغ الموجودة في المقدمات لا في السياق صيغ *الفعالة* (أو *المساعدة*).

قواعد الكميات أعقد قليلًا. فقواعد $\forall$ في **G1c** مثلًا هي:

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)} \forall\mathrm{R}$$

في قاعدة $\forall\mathrm{L}$ تكون صيغة الفعالة هي $\varphi(t)$، حيث t حد مغلق، أي حد بلا متغيرات. ويكون مثل هذا الاستدلال صحيحًا—أي مطابقًا لمخطط قاعدة $\forall\mathrm{L}$—إذا وجدت صيغة φ ومتغير x وحد مغلق t بحيث تكون صيغة الرئيسة في النتيجة $\forall x\, \varphi$ وتكون صيغة الفعالة في المقدمة $\varphi[t/x]$. وتعمل قاعدة $\forall\mathrm{R}$ على النحو نفسه، إلا أن صيغة الفعالة في المقدمة يجب أن تكون $\varphi[a/x]$، حيث a رمز ثابت. ويسمى هذا الثابت *المتغير المميَّز* لاستدلال $\forall\mathrm{R}$. ولا يصح الاستدلال إلا إذا لم تحتوي المتتالية السفلى a؛ أي إذا لم يقع a في Γ أو Δ أو φ. وهذا هو *شرط المتغير المميَّز*.

تتكون أنظمة المتتاليات مثل **G1c** و**G3c** من مجموعة قواعد محددة مخططيًا كهذه، ومعها بعض المتتاليات المحددة مخططيًا أيضًا التي تعد بديهيات. أما براهين في مثل هذا النظام فهي أشجار منتهية من المتتاليات، تُعرَّف استقرائيًا من البديهيات باستعمال قواعد الاستدلال. فكل ورقة بديهية، وكل متتالية أخرى تتبع من المتتاليات الواقعة فوقها مباشرة بإحدى قواعد الاستدلال في النظام.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

تعريف 6.23. تُعرَّف براهين في نظام متتاليات استقرائيًا بوصفها أشجارًا منتهية من المتتاليات كما يأتي:

1. كل بديهية برهان.

2. إذا كان π_1 برهان ينتهي بمتتالية S_1، وكانت S متتالية تتبع من S_1 بقاعدة أحادية المقدمة R، فإن

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ S_1\end{array}}{S}\,R$$

هو برهان.

3. إذا كان π_1 وπ_2 براهين ينتهيان بالمتتاليتين S_1 وS_2، وكانت S متتالية تتبع من S_1 و S_2 بقاعدة ثنائية المقدمة R، فإن

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ S_1\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ S_2\end{array}}{S}\,R$$

هو برهان.

يعرّف تعريف 6.23 براهين بوصفها أشجارًا من المتتاليات. ونتصور هذه الأشجار نامية «إلى أعلى». والعقد العليا (الأوراق) بديهيات وتسمى *متتاليات ابتدائية*. أما المتتالية السفلى فتسمى *المتتالية النهائية*. وإذا كان π برهان متتاليته النهائية S، نكتب أيضًا $\pi \vdash S$. وإذا وجد برهان لمتتالية S، كتبنا $\vdash S$، وقد نشير إلى النظام الذي يوجد فيه البرهان إلى يسار رمز $\vdash$؛ مثلًا $\mathbf{G1c} \vdash \varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$. وكل متتالية في برهان، عدا المتتاليات الابتدائية، هي نتيجة استدلال بقاعدة ما R. وتسمى المتتالية أو المتتاليتان الواقعتان مباشرة فوق متتالية في برهان (أي أبوا العقدة) مقدمات الاستدلال.

تسمى براهين المستعملة في البناء الاستقرائي لـ برهان براهين جزئية له. وتسمى براهين الجزئية المنتهية بمقدمات استدلال براهين جزئية مباشرة لذلك الاستدلال.

كثيرًا ما يلزم قياس تعقيد براهين بعدد طبيعي. ويمكن ببساطة عدّ المتتاليات في برهان، لكن المقياس الأنفع غالبًا هو ارتفاع برهان: وهو أكبر عدد من خطوات الاستدلال، أو الحواف، في فرع من المتتالية النهائية إلى متتالية ابتدائية. ويمكن أيضًا إعطاؤه تعريفًا استقرائيًا.

تعريف 6.24. يُعرَّف ارتفاع $\mathrm{ht}(\pi)$ لـ برهان π استقرائيًا كما يأتي:

1. إذا اقتصر π على بديهية واحدة، كان $\mathrm{ht}(\pi) = 0$.
2. إذا انتهى π باستدلال ذي مقدمة واحدة وكان π_1 هو البرهان الجزئي المباشر، كان $\mathrm{ht}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1) + 1$.
3. إذا انتهى π باستدلال ذي مقدمتين وكان π_1 وπ_2 البراهين الجزئية المباشرة، كان $\mathrm{ht}(\pi) = \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1$.

إذا كان للمتتالية S برهان ارتفاعه $\leq n$، كتبنا $\vdash_n S$.

مثال 6.25. في **G3c** تكون كل متتالية من الصورة $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ بديهية، على أن تكون χ ذرية. ولتكن θ وα جملتين ذريتين. عندئذ تكون $\theta, \alpha \Rightarrow \theta$ و$\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$ حالتين من البديهية $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$. فمثلًا، إذا أخذنا $\chi \equiv \alpha$ و $\Gamma = \{\theta\}$ و$\Delta = \emptyset$، حصلنا بالضبط على $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$. (تذكر أننا نتعامل مع متعددات مجموعات؛ ولذلك فإن $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$ و$\alpha, \theta \Rightarrow \alpha$ هما المتتالية نفسها.)

ولأن $\theta, \alpha \Rightarrow \theta$ حالة من بديهيات **G3c**، فإنه يعد وحده برهان في **G3c**، وكذلك $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$ بحسب تعريف 6.23(1). ولنسميهما π_1 وπ_2. وبحسب (3)، يمكننا أخذ هذين براهين وتوليد واحد جديد (π_3) بقاعدة $\wedge\mathrm{R}$ ثنائية المقدمة:

$$\frac{\theta, \alpha \Rightarrow \theta \qquad \theta, \alpha \Rightarrow \alpha}{\theta, \alpha \Rightarrow \theta \wedge \alpha}\ \wedge\mathrm{R}$$

ومن π_3 نحصل بدوره على برهان π_4:

$$\pi_3\left\{\dfrac{\dfrac{\theta,\alpha \Rightarrow \theta \qquad \theta,\alpha \Rightarrow \alpha}{\theta,\alpha \Rightarrow \theta\wedge\alpha}\wedge\mathrm{R}}{\theta\wedge\alpha \Rightarrow \theta\wedge\alpha}\wedge\mathrm{L}\right\}\pi_4$$

با استعمال قاعدة $\wedge\mathrm{L}$ أحادية المقدمة (وبحسب تعريف 6.23(2)). والبرهان الجزئي المباشر للاستدلال الأخير في π_4 هو π_3. والبراهين الجزئية المباشرة لاستدلال $\wedge\mathrm{R}$ هي π_1 وπ_2. وتشمل البراهين الجزئية لـπ_4 كلًا من π_1 وπ_2 وπ_3 وπ_4 نفسه. ولدينا $\mathrm{ht}(\pi_1) = \mathrm{ht}(\pi_2) = 0$ و $\mathrm{ht}(\pi_3) = 1$ و $\mathrm{ht}(\pi_4) = 2$. وقد أثبتنا أن $\mathbf{G3c} \vdash_2 \theta\wedge\alpha \Rightarrow \theta\wedge\alpha$ لأي θ وα ذريتين.

باب 7

حساب المتتاليات

7.1 الترجمة بين G1c وG3c

ذكرنا أن **G1c** و**G3c** كليهما سليم وكامل للمنطق الكلاسيكي؛ أي إن كلًا منهما يبرهن جميع المتتاليات الصادقة في كل بنية، ولا يبرهن سواها. ولذلك فهما يبرهنان المتتاليات نفسها. ويمكننا الآن إثبات هذه الحقيقة بوسائل برهانية نظرية خالصة، من دون الالتفاف عبر مبرهنتي السلامة والاكتمال. ويقدم مثل هذا البرهان تحويلات لبراهين في **G1c** إلى براهين في **G3c** وبالعكس.

قضية 7.1. إذا كان $\mathbf{G1c} \vdash S$، فإن $\mathbf{G3c} \vdash S$.

برهان. نبين أنه إذا كان π برهان في **G1c**، فهناك برهان π' للمتتالية S في **G3c**. ونفعل ذلك بالاستقراء على $n = \mathrm{ht}(\pi)$.

إذا كان $n = 0$، كان π بديهية. والبديهية $\bot \Rightarrow$ بديهية أيضًا في **G3c** (خذ السياقين Γ وΔ فارغين). أما **G1c** فيسمح ببديهيات $\varphi \Rightarrow \varphi$ لأي φ، في حين أن بديهيات الهوية في **G3c** ذرية فقط؛ لكننا أثبتنا في قضية 6.19 أن جميع المتتاليات $\varphi \Rightarrow \varphi$ قابلة للبرهنة في **G3c**.

إذا كان $n > 0$، انتهى π بقاعدة R. ويضمن فرض الاستقراء وجود براهين لمقدمات تلك القاعدة في **G3c**؛ أي إن للبراهين الجزئية المباشرة ترجمات في **G3c**. فإذا كانت R قاعدة في **G3c** أيضًا، طبقناها على براهين المترجمة للمقدمات. وتُحاكى القواعد الأربع التي تختلف بين النظامين على النحو الآتي: قبل تطبيق قاعدة **G3c**، نستخدم الإضعاف المقبول قضية 6.11 لإضافة الصيغة الفعالة الناقصة في حالتي $\wedge$L و$\vee$R، أو لإضافة الوقوع المحتفظ به للصيغة الرئيسة في حالتي $\forall$L و$\exists$R. أما إذا كانت R قاعدة إضعاف في **G1c**، فنطبق النتيجة نفسها عن قبول الإضعاف؛ وإذا كانت قاعدة تقلص، فنطبق قضية 6.16. □

قضية 7.2. إذا كان $\mathbf{G3c} \vdash S$، فإن $\mathbf{G1c} \vdash S$.

برهان. نمضي مرة أخرى بالاستقراء على ارتفاع برهان π للمتتالية S. ويمكن نبرهن كل بديهية من بديهيات **G3c** في **G1c** انطلاقًا من بديهية ثم بعدة تطبيقات لقاعدتي WL وWR:

$$\begin{array}{rcl} \chi \Rightarrow \chi & & \bot \Rightarrow \\ \vdots\,\mathrm{WL} & & \vdots\,\mathrm{WL} \\ \chi, \Gamma \Rightarrow \chi & & \bot, \Gamma \Rightarrow \\ \vdots\,\mathrm{WR} & & \vdots\,\mathrm{WR} \\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi & & \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}$$

إذا انتهى π بقاعدة R، أعطى فرض الاستقراء براهين للمقدمات في **G1c**، ويمكننا تطبيق القاعدة R نفسها على تلك براهين. والاستثناءات هي قواعد $\wedge$L

و$\vee$R و$\forall$L و$\exists$R، لأن صيغها تختلف بين النظامين. وتُشتق نسختا **G3c** الأوليان في **G1c** هكذا:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\wedge\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\wedge\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{CL} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi, \psi}\vee\mathrm{R}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi, \varphi \vee \psi}\vee\mathrm{R}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\mathrm{CR}$$

وتُشتق نسختا القاعدتين الكميتين على النحو الآتي:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(t), \forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\forall\mathrm{L}}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{CL} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x), \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x), \exists x\, \varphi(x)}\exists\mathrm{R}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x)}\mathrm{CR}$$

□

7.2 اكتمال منطق القضايا

تعريف 7.3. تكون المجموعة Γ من صيغ متسقة على نحو أعظمي إذا كانت متسقة، وإذا كانت Δ مجموعة متسقة تحقق $\Gamma \subseteq \Delta$، فإن $\Gamma = \Delta$.

قضية مساعدة 7.4 (لمّة الصدق). *لتكن Γ متسقة على نحو أعظمي؛ عندئذ:*

1. $\varphi \in \Gamma$ *إذا وفقط إذا كان* $\neg\varphi \notin \Gamma$؛
2. $\Gamma \vdash \varphi$ *إذا وفقط إذا كان* $\varphi \in \Gamma$؛

3. $\varphi \to \psi \in \Gamma$ إذا وفقط إذا كان إما $\varphi \notin \Gamma$ أو $\psi \in \Gamma$.

برهان. 1. افترض أن $\varphi \in \Gamma$. يقتضي الاتساق أن $\neg\varphi \notin \Gamma$. وبالعكس، افترض أن $\neg\varphi \notin \Gamma$ وأن $\varphi \notin \Gamma$. عندئذ لا تنتمي أي منهما إلى Γ، وبحسب قضية 12.25 تكون إحدى المجموعتين $\Gamma \cup \{\varphi\}$ و $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ متسقة وتمثل امتدادًا حقيقيًا لـΓ، وهذا يناقض أعظميتها. ومن ثم $\varphi \in \Gamma$.

2. إذا كان $\varphi \in \Gamma$، فمن الواضح أن $\Gamma \vdash \varphi$. ومن ناحية أخرى، افترض أن $\Gamma \vdash \varphi$. فإذا كان $\varphi \notin \Gamma$، كان $\neg\varphi \in \Gamma$ بحسب (1). وعندئذ $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \neg\varphi$، وهذا تناقض.

3. تمرين. □

يبين الاتجاه من اليسار إلى اليمين في قضية مساعدة 7.4(2) أن Γ مغلقة استنباطيًا؛ أي إنه إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$، فإن $\varphi \in \Gamma$ لكل φ.
أكمل برهان قضية مساعدة 7.4.

مبرهنة 7.5 (الاكتمال). إذا كانت Γ متسقة، فهي قابلة للإرضاء.

برهان. لتكن $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ قائمة شاملة لجميع صيغ اللغة. نعرّف تعاوديًا متتالية متزايدة من مجموعات صيغ $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ بوضع:

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{إذا كانت } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ متسقة؛} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{فيما عدا ذلك.} \end{cases}$$

ثم نعرّف:

$$\Gamma^* = \bigcup_{0 \leq n} \Gamma_n.$$

ويمضي البرهان الآن بإثبات الحقائق الآتية بالترتيب:

1. المجموعة Γ_n متسقة لكل n (بالاستقراء على n، مع استعمال قضية 12.25)؛
2. Γ^* متسقة؛
3. Γ^* أعظمية.

ثم نعرّف تقييمًا v بوضع $v(p_i) = \mathbb{T}$ إذا وفقط إذا كان $p_i \in \Gamma^*$. ويُبيَّن بالاستقراء على φ أن الانتماء إلى Γ^* يطابق الصدق بحسب v أيضًا في جمل الأعقد: $\overline{v}(\varphi) = \mathbb{T}$ إذا وفقط إذا كان $\varphi \in \Gamma^*$. وعلى وجه الخصوص، يحقق v المجموعة Γ^*؛ ولأن $\Gamma \subseteq \Gamma^*$، تكون Γ قابلة للإرضاء أيضًا، كما هو مطلوب. □

نتيجة لازمة 7.6. *إذا كان $\Gamma \vDash \varphi$، فإن $\Gamma \vdash \varphi$.*

برهان. إذا كان $\Gamma \nvdash \varphi$، كانت $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ متسقة بحسب قضية 12.23. ومن ثم تكون $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ قابلة للإرضاء بحسب مبرهنة الاكتمال، ويكون $\Gamma \nvDash \varphi$. □

قضية 7.7 (مبرهنة التراص). *تكون Γ قابلة للإرضاء إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية منتهية Γ_0 منها قابلة للإرضاء.*

برهان. تكون Γ غير قابلة للإرضاء إذا وفقط إذا كانت غير متسقة، وهذا يكافئ وجود مجموعة جزئية منتهية Γ_0 من Γ غير متسقة، وهو يكافئ وجود مجموعة جزئية منتهية Γ_0 من Γ غير قابلة للإرضاء. □

نتيجة لازمة 7.8. *$\Gamma \vDash \varphi$ إذا وفقط إذا وجدت مجموعة جزئية منتهية Γ_0 من Γ تحقق $\Gamma_0 \vDash \varphi$.*

7.3 سلامة منطق القضايا

مبرهنة 7.9 (السلامة). *إذا كان $\Gamma \vdash \varphi$، فإن $\Gamma \vDash \varphi$.*

برهان. بالاستقراء في اشتقاق φ. إذا كانت φ مسلّمة منطقية، فإن $\vDash \varphi$، ومن ثم، بالأولى، $\Gamma \vDash \varphi$. وبالمثل، إذا كانت $\varphi \in \Gamma$، فإن $\Gamma \vDash \varphi$. ولخطوة الاستقراء، افترض أن φ استُنتجت بقاعدة *الفصل* من χ و$\chi \to \varphi$؛ وافترض أيضًا، بموجب فرضيتي الاستقراء، أن $\Gamma \vDash \chi$ و$\Gamma \vDash (\chi \to \varphi)$. ويعطي البند الثالث في قضية 7.19 النتيجة المطلوبة. □

نتيجة لازمة 7.10. *إذا كانت Γ قابلة للإرضاء، فهي متسقة. ومن ثم فإن منطق القضايا متسق.*

7.4 لغة منطق الرتبة الثانية

كما في منطق الرتبة الأولى، تُبنى تعبيرات منطق الرتبة الثانية من مفردات أساسية تضم متغيرات ورموز ثابتة ومحمولات، وتضم أحيانًا دوال. ومن هذه المفردات، مع الروابط المنطقية والمكمّمات وعلامات الترقيم كالأقواس والفواصل، تُنشأ الحدود وصيغ. والفرق هو أن منطق الرتبة الثانية، إضافة إلى متغيرات الأفراد، يشتمل أيضًا على متغيرات للعلاقات والدوال، ويتيح التكميم عليها. ولذلك تكون رموزه المنطقية هي رموز منطق الرتبة الأولى، مضافًا إليها ما يأتي:

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

1. مجموعة لا نهائية قابلة للتعداد من متغيرات العلاقات من الرتبة الثانية، من كل رتبة n: V_0^n، V_1^n، V_2^n، ...

2. مجموعة لا نهائية قابلة للتعداد من متغيرات الدوال من الرتبة الثانية، من كل رتبة n: u_0^n، u_1^n، u_2^n، ...

في منطق الرتبة الأولى، تُدرج عادةً علاقة هوية $=$. وفي منطق الرتبة الأولى أيضًا، تعد الرموز غير المنطقية في لغة $\mathcal{L}$ ضرورية لكي نستطيع التعبير عن أمور ذات شأن. وثمة بالطبع جمل لا تستخدم أي رمز غير منطقي، غير أنه يصعب، باستعمال $=$ وحدها، قول شيء ذي شأن. أما في منطق الرتبة الثانية، فلأن لدينا عددًا غير محدود من متغيرات العلاقات والدوال، يمكننا قول كل ما يمكن قوله في لغة من الرتبة الأولى حتى من دون مخزون خاص من الرموز غير المنطقية.

7.5 التشاكل

التشاكل هو تقابل يحفظ بنية المجموعتين اللتين يربط بينهما، حيث تتمثل البنية في العلاقات القائمة بين عناصر المجموعتين. انظر إلى المجموعتين $X = \{1, 2, 3\}$ و$Y = \{4, 5, 6\}$. تنظم كلًّا منهما علاقات التالي، وأصغر من، وأكبر من. ويكون التشاكل بينهما دالة تقابلية يحفظ هذه البنى. ومن ثم، إذا كانت الدالة $f : X \to Y$ تقابلية، فإنها تكون تشاكلًا متى تحقق، لكل $i, j \in X$، أن $i < j$ إذا وفقط إذا كان $f(i) < f(j)$، وأن $i > j$ إذا وفقط إذا كان $f(i) > f(j)$، وأن j هو تالي i إذا وفقط إذا كان $f(j)$ تالي $f(i)$.

تعريف 7.11 (التشاكل). لتكن U الزوج $\langle X, R\rangle$، ولتكن V الزوج $\langle Y, S\rangle$، بحيث تكون X وY مجموعتين وتكون R وS علاقتين على X وY، على الترتيب. وليكن f دالة تقابلية من X إلى Y. يكون f تشاكلًا من U إلى V إذا وفقط إذا كان يحفظ البنية العلائقية؛ أي إنه، لكل x_1 وx_2 في X، $\langle x_1, x_2\rangle \in R$ إذا وفقط إذا كان $\langle f(x_1), f(x_2)\rangle \in S$.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

مثال 7.12. انظر إلى المجموعتين $X = \{1, 2, 3\}$ و$Y = \{4, 5, 6\}$، وإلى علاقتي أصغر من وأكبر من. إن الدالة $f : X \to Y$ المعرّفة بـ $f(x) = 7 - x$ تشاكل بين $\langle X, < \rangle$ و$\langle Y, > \rangle$.

7.6 مقدمة

الاستقراء تقنية برهانية شائعة في الرياضيات والمنطق. ولعلك تعرفه من الرياضيات، حيث يُستعمل الاستقراء على الأعداد الطبيعية. ويتبين أن أنواعًا كثيرة مختلفة من مجموعات الأشياء الرياضية والمنطقية تصلح للاستقراء.

وعمومًا، يتيح الاستقراء إثبات دعوى كلية، أي بيان أن كل شيء من نوع معين يتصف بخاصية ما. ويكون الاستقراء مفيدًا، بوجه خاص، عندما تكون طريقة «الإدخال الكلي» في البرهان شديدة التعقيد. ولا يعمل الاستقراء إلا على الأشياء الرياضية المنشأة بطرائق مخصوصة: فإذا كان كل عنصر في المجموعة إما أساسيًا وإما مبنيًا من عناصر أساسية في عدد متناه من الخطوات، أمكننا استعمال الاستقراء عليها. وبتعبير أدق:

تعريف 7.13. لتكن f دالة n-موضعية. تكون المجموعة S مغلقة تحت f إذا وفقط إذا كان $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ كلما كانت $x_1, \ldots, x_n \in S$ وكانت قيمة f معرفة لهذه المدخلات.

فمثلًا، مجموعة الأعداد الطبيعية ($\mathbb{N}$) مغلقة تحت دالة التالي $f(x) = x + 1$. فإذا كان x عددًا طبيعيًا، كان $x + 1$ طبيعيًا أيضًا. لكن الأعداد الطبيعية ليست مغلقة تحت دالة السابق $f(x) = x - 1$، لأن 0 عدد طبيعي، في حين أن -1 ليس كذلك.

تعريف 7.14. يقال إن الخاصية P محفوظة تحت دالة n-موضعية f إذا كانت، لكل مدخلات $a_1, \ldots, a_n$ في مجال f، الخصائص $P(a_1), \ldots, P(a_n)$ تستلزم $P(f(a_1, \ldots, a_n))$.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

خاصية «كون العدد زوجيًا» محفوظة تحت الدالة $f(x) = x + 2$، لأنه إذا كان x زوجيًا كان $x + 2$ زوجيًا أيضًا. أما تحت دالة التالي فلا تُحفظ هذه الخاصية، لأن $x + 1$ فردي متى كان x زوجيًا.

ينجح الاستقراء على الأعداد الطبيعية لأن كل عدد طبيعي يمكن بلوغه من 0 بتطبيق دالة التالي عددًا متناهيًا من المرات. وهذه سمة كل مجموعة يمكننا إجراء الاستقراء عليها.

تعريف 7.15 (الاستقراء على $\mathbb{N}$). إذا كان 0 يتصف بخاصية ما P، وكانت P محفوظة تحت دالة التالي، فإن كل عدد طبيعي يتصف بالخاصية P.

مثال 7.16. مجموع الأعداد الطبيعية من 0 إلى n هو $\frac{n(n+1)}{2}$.

حالة الأساس. مجموع الأعداد الطبيعية من 0 إلى 0 هو $\frac{0 \cdot 1}{2} = 0$.

خطوة الاستقراء. افترض أن الخاصية تصدق على k. سنبين أنها تصدق على $k + 1$. وبعبارة أخرى، افترض أن $P(k)$ تصدق، أي إن

$$0 + 1 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

وسنبين أن $P(k+1)$ تصدق، أي إن

$$0 + 1 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

وذلك باستعمال فرض أن $P(k)$ تصدق.

مراجعة المصدر: 2026-07-12(9620cc7)

$$0+1+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{(فرض الاستقراء)}$$

$$\begin{aligned} 0+1+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \qquad \text{(إضافة } k+1 \text{ إلى الطرفين)} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2+k+2k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

وهكذا تتم خطوة الاستقراء، ونكون قد برهنا الدعوى.

بالنسبة إلى صيغ، تكون العناصر الأساسية هي صيغ الذرية. وتُنشأ صيغ الأكثر تركيبًا بضم صيغ أقل تعقيدًا بعضها إلى بعض باستعمال الروابط. ويمكن النظر إلى كل رابط على أنه يقابل دالة على صيغ تُرجع صيغة جديدة بتطبيق الرابط على مدخلاتها. فمثلًا، يمكن كتابة الدالة التي تصل بين اثنتين من صيغ، هما φ وψ، بالاقتران على الصورة $\mathcal{E}_\wedge(\varphi,\psi) = \varphi \wedge \psi$. ويمكن أن نسمي أمثال هذه *دوال بناء الصيغ*. ومجموعة صيغ مغلقة تحت هذه الدوال: فكلما كان كل من φ وψ من صيغ، كان كل من $\neg\varphi$ و$\varphi \wedge \psi$، وغيرهما، صيغةً كذلك.

تعريف 7.17 (الاستقراء على صيغ). إذا كانت كل صيغة ذرية تتصف بالخاصية P، وكانت P محفوظة تحت الدوال التي تبني صيغة، فإن كل صيغة تتصف بالخاصية P.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

يقترح هذا التعريف «وصفة» للبراهين الاستقرائية على صيغ. فإذا طُلب منا بيان أن كل صيغة تتصف بالخاصية P، اتبعنا الخطوات الآتية:

حالة الأساس. لتكن φ صيغة ذرية. [...] إذن تتصف φ بالخاصية P.

خطوة الاستقراء. لتكن φ وψ من صيغ، ولتتصف كلتاهما بالخاصية P.

حالة $\neg$: [...] إذن تتصف $\neg\varphi$ بالخاصية P.

حالة $\wedge$: [...] إذن تتصف $\varphi \wedge \psi$ بالخاصية P.

حالة $\vee$: [...] إذن تتصف $\varphi \vee \psi$ بالخاصية P.

حالة $\rightarrow$: [...] إذن تتصف $\varphi \rightarrow \psi$ بالخاصية P.

حالة $\leftrightarrow$: [...] إذن تتصف $\varphi \leftrightarrow \psi$ بالخاصية P.

حالة $\forall$: [...] إذن تتصف $\forall x\varphi$ بالخاصية P.

حالة $\exists$: [...] إذن تتصف $\exists x\varphi$ بالخاصية P.

إذن تتصف كل صيغة بالخاصية P.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

باب 8

العلاقات

القسم II

المجموعات والعلاقات والدوال

يضم هذا الملف الفصول الأربعة الأولى من الجزء الخاص بنظرية المجموعات الساذجة، في نسخته الأصلية المتدرجة العرض. أما الجزء الكامل فيضمه الملف `sets-functions-relations-complete.tex`. وتقدم مادة هذا الجزء مدخلًا مكتملًا إلى حد معقول إلى نظرية المجموعات الساذجة الأساسية. وما لم يكن من الجائز افتراض إلمام الطلاب بهذه الخلفية، فمن المستحسن غالبًا بدء المقرر بمراجعة هذه المادة، أو على الأقل الجزء المتعلق بالمجموعات والدوال والعلاقات. ويضمن ذلك أن يمتلك جميع الطلاب الكفاية الأساسية في استعمال الترميز الرياضي، وهي مطلوبة في سائر الأقسام المنطقية.

8.1 براهين حول المجموعات

حل محل هذا القسم `content/method/proofs`، ولذلك حُذف افتراضيًا من هذا الفصل.

توفر لنا المجموعات والترميزات التي أدخلناها حتى الآن اختصارات ملائمة لتحديد المجموعات والتعبير عن العلاقات بينها. وكثيرًا ما يلزمنا أيضًا إثبات دعاوى عن هذه العلاقات. وقد يكون ذلك جديدًا عليك إن لم تكن ملمًا بالبراهين الرياضية. لذا سنعرض مثالًا بسيطًا خطوةً خطوة. سنبرهن أنه، لأي مجموعتين X وY، يتحقق دائمًا $X \cap (X \cup Y) = X$. فكيف تبرهن هوية بين مجموعتين كهذه؟ تذكّر أن المجموعات تتعين فقط بحسب عناصر التي تنتمي إليها؛ أي إن مجموعتين تكونان متطابقتين إذا وفقط إذا كانت لهما عناصر نفسها. ولذلك علينا في هذه الحالة أن نبرهن (أ) أن كل عنصر من $X \cap (X \cup Y)$ هو أيضًا عنصر من X، وبالعكس، (ب) أن كل عنصر من X هو أيضًا عنصر من $X \cap (X \cup Y)$. وبعبارة أخرى، نبين كلًّا من (أ) $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$ و(ب) $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$.

يُبرهن على دعوى عامة من قبيل «كل عنصر z من $X \cap (X \cup Y)$ هو أيضًا عنصر من X» بأن نفترض أولًا أنه أُعطي عنصر اعتباطي $z \in X \cap (X \cup Y)$، ثم نبرهن من هذا الفرض أن $z \in X$. وقد تعرف هذا النمط باسم «البرهان الشرطي العام». وسيلزمنا في هذا البرهان أيضًا استعمال التعريفات الواردة في الفرض والنتيجة، أي تعريفَي «$\cap$» و«$\cup$» في حالتنا. ومن ثم يمكن إقامة الحجة في الحالة (أ) كما يأتي:

(أ) نريد أولًا أن نبين أن $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$؛ أي، بحسب تعريف $\subseteq$، أنه إذا كان $z \in X \cap (X \cup Y)$، فإن $z \in X$، لأي z. فافترض أن $z \in X \cap (X \cup Y)$. ولأن z يكون عنصر من تقاطع مجموعتين إذا وفقط إذا كان عنصر من كلتيهما، نستنتج أن $z \in X$ وأن $z \in X \cup Y$ أيضًا. وعلى وجه الخصوص، $z \in X$، وهو المطلوب.

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

وهذا يتم النصف الأول من البرهان. لاحظ أننا استعملنا في الخطوة الأخيرة حقيقة أنه إذا لزم اقتران ($z \in X$ و $z \in X \cup Y$) عن فرض، لزم كل طرف من طرفي الاقتران من ذلك الفرض نفسه. وقد تعرف هذه القاعدة باسم «حذف الاقتران»، أي قاعدة حذف الرابط $\wedge$. والآن لنبرهن (ب):

(ب) نبرهن الآن أن $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$؛ أي، بحسب تعريف $\subseteq$، أنه إذا كان $z \in X$، كان أيضًا $z \in X \cap (X \cup Y)$، لأي z. افترض أن $z \in X$. ولكي نبين أن $z \in X \cap (X \cup Y)$، علينا أن نبين، بحسب تعريف «$\cap$»، أن (1) $z \in X$، وأن (2) $z \in X \cup Y$. أما (1) فهو فرضنا نفسه، فلا شيء آخر يلزم إثباته. وأما (2)، فتذكّر أن z يكون عنصر من اتحاد مجموعات إذا وفقط إذا كان عنصر من واحدة منها على الأقل. ولما كان $z \in X$، وكان $X \cup Y$ اتحاد X و Y، فهذا متحقق هنا. ومن ثم $z \in X \cup Y$. لقد بينا كلًّا من (1) $z \in X$ و(2) $z \in X \cup Y$، ومن ثم، بحسب تعريف «$\cap$»، $z \in X \cap (X \cup Y)$.

كان هذا مسهبًا بعض الشيء، لكنه يوضح كيف نستدل في المجموعات والعلاقات بينها. ونحن لا نبلغ عادةً هذا القدر من التصريح، ولا سيما أننا قد لا نكرر جميع التعريفات. ويكون برهان هذه النتيجة في نص أكثر تقدمًا أشد اختصارًا، وقد يأتي على الصورة الآتية.

قضية 8.1 (الامتصاص). *لكل مجموعتين X و Y،*

$$X \cap (X \cup Y) = X$$

برهان. (أ) افترض أن $z \in X \cap (X \cup Y)$. عندئذ $z \in X$، ومن ثم $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$.
(ب) افترض الآن أن $z \in X$. عندئذ يكون أيضًا $z \in X \cup Y$، ومن ثم يكون $z \in X \cap (X \cup Y)$. وهكذا $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$. $\square$

برهن بالتفصيل أن $X \cup (X \cap Y) = X$، ثم أعط برهانًا مختصرًا مكثفًا. (تلميح: في اتجاه $X \cup (X \cap Y) \subseteq X$ ستحتاج إلى البرهان بالحالات، أي قاعدة حذف الرابط $\vee$.)

مراجعة المصدر: 2026-07-12 (9620cc7)

باب 9

حجم المجموعات

يناقش هذا الفصل التعدادات والقابلية للعد وعدم القابلية للعد. ويتضمن النص نسختين من بعض الأقسام: نسخة أبسط، وأخرى أكثر تقدمًا تصلح إذا نوقشت نظرية المجموعات بمزيد من التفصيل. ولا يضم هذا الملف إلا النسخ الأبسط، أما النسخ الأكثر تقدمًا فيضمها `size-of-sets-complete`.