متن منطق باز

ضمیمهٔ بازچینی‌شده برای صفحه‌نمایش

هشتاد واحدِ بیرون از مسیر خوانشگر
Screen-Optimized Closure Supplement

فارسی معیار دانشگاهی ایران — fa-IR

منبع: پروژهٔ منطق باز، تعهد 9620cc73f9c8e0ad003c514a5d3748f29611c4c0

DOI مفهومی پایدار: 10.5281/zenodo.21921852

ضمیمهٔ بسته‌شدن همراه نسخهٔ کامل

این ضمیمهٔ فنیِ مستقل همراه نسخهٔ کامل منتشر می‌شود و هشتاد واحدِ نگه‌داشته‌شده بیرون از مسیر خوانشگر معیار را گرد می‌آورد: هفتاد و یک واحد به‌صراحت درج می‌شوند، هشت واحدِ تودرتو را فایل‌های مادر مستقیماً فراخوانی می‌کنند، و یک قطعه نیز مستقیماً وارد می‌شود. بدین‌ترتیب پوشش هر 722 واحد منبع کامل می‌شود، بی‌آنکه نمودار وابستگی خوانشگر تغییر کند.

این ترجمهٔ تغییریافته با مجوز CC BY 4.0 عرضه می‌شود. اثر اصلی به پروژهٔ منطق باز منسوب است و این ضمیمه به معنای تأیید آن پروژه نیست.

AI typesetting & translation با راهبری فلوریس در ترجمه و حروف‌چینی مشارکت داشته است؛ بازبینی انسانیِ فارسی انجام نشده است.

0.1 ویژگی‌های اشتقاق‌پذیری

گزاره 0.1 (یکنوایی). *اگر $\Gamma \subseteq \Delta$ و $\Gamma \vdash \varphi$، آنگاه $\Delta \vdash \varphi$ نیز برقرار است.*

اثبات. هر زیرمجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ زیرمجموعه‌ای متناهی از Δ نیز هست؛ پس هر اشتقاق برای $\Gamma_0 \vdash \varphi$ نشان می‌دهد که $\Delta \vdash \varphi$. □

گزاره 0.2. *$\Gamma \vdash \varphi$ اگر و تنها اگر $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ناسازگار باشد.*

اثبات. اگر $\Gamma \vdash \varphi$، زیرمجموعه‌ای متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ وجود دارد که $\Gamma_0 \vdash \varphi$. در نتیجه، با افزودن $\neg\varphi$ و به‌کارگیری یک نمونهٔ اصل گزاره‌ای و قاعدهٔ MP، داریم $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$؛ بنابراین $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ناسازگار است.

برعکس، فرض کنید $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ناسازگار باشد. در این صورت مجموعه‌ای متناهی $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ وجود دارد که $\Delta \vdash \bot$. بگذارید $\Gamma_0 = \Delta \setminus \{\neg\varphi\}$؛ آنگاه $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ متناهی است و، با یکنوایی، $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$. قضیهٔ استنتاج می‌دهد $\Gamma_0 \vdash \neg\varphi \to \bot$، و از یک نمونهٔ **Ax0** و MP نتیجه می‌شود $\Gamma_0 \vdash \varphi$. پس $\Gamma \vdash \varphi$. □

گزاره 0.3.

1. *اگر $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$، آنگاه Γ ناسازگار است.*
2. *اگر $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$، آنگاه $\Gamma \vdash \neg\varphi$.*
3. *اگر $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$، آنگاه $\Gamma \vdash \bot$.*
4. *اگر $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \bot$، آنگاه $\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \bot$.*

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

5. اگر $\Gamma \vdash \varphi$ یا $\Gamma \vdash \psi$، آنگاه $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$.

6. اگر $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$، آنگاه $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \psi$.

7. اگر $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \psi$، آنگاه $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$.

8. اگر $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$، آنگاه $\Gamma \vdash \psi$.

9. اگر $\Gamma \vdash \neg\varphi$ یا $\Gamma \vdash \psi$، آنگاه $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

اثبات. 1. مجموعه‌های متناهی $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ را چنان برگزینید که $\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma_1 \vdash \varphi$.

1. $\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ فرض
2. $\Gamma_1 \vdash \varphi$ فرض
3. $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \vdash \bot$ برش

چون $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ و $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$، داریم $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$؛ پس $\Gamma \vdash \bot$.

2. یک مجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ را چنان برگزینید که $\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

1.	$\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$	فرض
2.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \bot$	قضیهٔ استنتاج
3.	$\Gamma_0 \vdash (\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$	Ax0
4.	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi$	MP 2'3

از $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ نتیجه می‌شود $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

3. مجموعه‌های متناهی $\Gamma_0, \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ را چنان برگزینید که $\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$.

1.	$\Gamma_0 \cup \{\varphi\} \vdash \bot$	فرض
2.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \bot$	قضیهٔ استنتاج
3.	$\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$	فرض
4.	$\Gamma_0 \vdash (\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$	Ax0
5.	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi$	MP 2'4
6.	$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \vdash \bot$	برش 3, 5

چون $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ و $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$، داریم $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$؛ بنابراین $\Gamma \vdash \bot$.

4. تمرین.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

5. فرض کنید $\Gamma \vdash \varphi$ و یک مجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ چنان باشد که $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

1.	$\Gamma_0 \vdash \varphi$	فرض
2.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$	Ax0
3.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \vee \psi$	MP 1'2

پس $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$. برهان حالت $\Gamma \vdash \psi$ مشابه است.

6. فرض کنید $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ و یک مجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ چنان باشد که $\Gamma_0 \vdash \varphi \wedge \psi$.

1.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \wedge \psi$	فرض
2.	$\Gamma_0 \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	Ax0
3.	$\Gamma_0 \vdash \varphi$	MP 1'2

ازاین‌رو $\Gamma \vdash \varphi$. یک اشتقاق مشابه نشان می‌دهد که $\Gamma \vdash \psi$.

7. تمرین.

8. یک مجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ را چنان برگزینید که هم $\Gamma_0 \vdash \varphi$ و هم $\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$.

1.	$\Gamma_0 \vdash \varphi$	فرض
2.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$	فرض
3.	$\Gamma_0 \vdash \psi$	MP 1'2

چون $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$، این نتیجه می‌دهد که $\Gamma \vdash \psi$.

9. نخست فرض کنید $\Gamma \vdash \neg\varphi$ و یک مجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ چنان باشد که $\Gamma_0 \vdash \neg\varphi$.

1.	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi$	فرض
2.	$\Gamma_0 \vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$	Ax0
3.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$	MP 1'2

برهان حالت $\Gamma \vdash \psi$ مشابه است:

1.	$\Gamma_0 \vdash \psi$	فرض
2.	$\Gamma_0 \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	Ax0
3.	$\Gamma_0 \vdash \varphi \to \psi$	MP 1'2

□

قضیه 0.4 (تعمیم). *اگر $\Gamma \vdash \varphi$ و x در هیچ فرمول متعلق به Γ آزاد نباشد، آنگاه $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$.*

اثبات. با استقرا روی Thm_Γ پیش می‌رویم: اگر φ یک اصل باشد، $\forall x\, \varphi$ نیز یک اصل است. اگر $\varphi \in \Gamma$، آنگاه x در φ آزاد نیست؛ پس $\varphi \to \forall x\, \varphi$ یک اصل (**Ax3**) است و با MP داریم $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$. اکنون فرض کنید φ با MP از $\Gamma \vdash \psi$ و $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$ به دست آید. بنا بر فرض استقرا، $\Gamma \vdash \forall x\, \psi$ و $\Gamma \vdash \forall x\, (\psi \to \varphi)$. اما بنا بر **Ax2** نیز

$$\Gamma \vdash \forall x\, (\psi \to \varphi) \to (\forall x\, \psi \to \forall x\, \varphi),$$

و دو بار به‌کارگیری MP نتیجهٔ مطلوب $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$ را می‌دهد. □

قضیه 0.5. *(تعمیم ضعیف برای ثابت‌ها) اگر $\Gamma \vdash \varphi$ و c یک ثابت باشد که در Γ ظاهر نمی‌شود، آنگاه متغیری x که در φ ظاهر نمی‌شود وجود دارد به‌طوری که $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$، و برهان شامل c نیست.*

اثبات. بگذارید $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ برهانی برای φ از Γ باشد، به‌طوری که $\varphi = \varphi_n$. متغیری x را برگزینید که در $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ظاهر نشود، و دنبالهٔ جدید

$$\varphi_1[x/c], \ldots, \varphi_n[x/c]$$

را در نظر بگیرید. این دنباله برهانی برای $\varphi[x/c]$ از Γ است. در واقع، برای هر $i = 1, \ldots, n$:

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

- اگر φ_i یک اصل باشد، $\varphi_i[x/c]$ نیز یک اصل است؛
- اگر $\varphi_i \in \Gamma$، چون c در Γ ظاهر نمی‌شود، داریم $\varphi_i[x/c] = \varphi_i \in \Gamma$؛
- اگر φ_i از φ_j و $\varphi_j \to \varphi_i$ به دست آمده باشد، آنگاه $\varphi_i[x/c]$ با MP از $\varphi_j[x/c]$ و

$$(\varphi_j \to \varphi_i)[x/c] = \varphi_j[x/c] \to \varphi_i[x/c]$$

به دست می‌آید.

روشن است که ثابت c دیگر در دنبالهٔ جدید ظاهر نمی‌شود. اکنون Γ' را مجموعهٔ آن فرمولها از Γ بگیرید که در اشتقاق مربوط به $\varphi[x/c]$ ظاهر می‌شوند؛ در این صورت x در هیچ فرمول متعلق به Γ' آزاد نیست و $\Gamma' \vdash \varphi[x/c]$. بنا بر تعمیم (قضیه 0.4)، $\Gamma' \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$؛ سپس یکنوایی نتیجه می‌دهد $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$، چنان‌که می‌خواستیم. □

هدف ما این است که در قضیه 0.5 شرط «x اصلاً در φ ظاهر نمی‌شود» را با دو شرط ضعیف‌تر جایگزین کنیم: x در φ آزاد نباشد و برای c در φ، آزاد برای جانشانی باشد. روشن است که این کار را می‌توان با تغییر یک متغیر مقید انجام داد؛ پس ابتدا همین مطلب را اثبات می‌کنیم.

لم 0.6. *اگر x برای c در φ آزاد باشد و y در φ آزاد نباشد، آنگاه x برای y در $\varphi[y/c]$، آزاد برای جانشانی است.*

اثبات. اگر x برای y در $\varphi[y/c]$، آزاد برای جانشانی نباشد، آنگاه یک رخداد آزاد y در $\varphi[y/c]$ در دامنهٔ یک سور $\forall x$ قرار می‌گیرد. اما بنا بر فرض، y در φ آزاد نیست؛ پس همهٔ چنین رخدادهایی از جانشینی $[y/c]$ پدید آمده‌اند. بنابراین یک رخداد c در دامنهٔ $\forall x$ قرار می‌گیرد و x برای c در φ، آزاد برای جانشانی نیست. □

لم 0.7 (تغییر متغیر مقید). *اگر x و y در φ آزاد نباشند و هر دو برای c در φ، آزاد برای جانشانی باشند، آنگاه*

$$\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \equiv \forall y\, \varphi[y/c]$$

و برهان شامل c نیست.

اثبات. بنا بر فرض‌ها، y برای c در φ، آزاد برای جانشانی است و x در φ آزاد نیست؛ پس بنا بر لم 0.6، y برای x در $\varphi[x/c]$، آزاد برای جانشانی است. بنابراین

$$\forall x\, \varphi[x/c] \to \varphi[x/c][y/x]$$

یک اصل (**Ax1**) است. چون x در φ آزاد نیست، داریم $\varphi[x/c][y/x] = \varphi[y/c]$؛ پس

$$\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \to \varphi[y/c].$$

قضیهٔ استنتاج نتیجه می‌دهد $\forall x\, \varphi[x/c] \vdash \varphi[y/c]$. چون y در φ آزاد نیست، در $\forall x\, \varphi[x/c]$ نیز آزاد نیست؛ بنابراین با تعمیم داریم

$$\forall x\, \varphi[x/c] \vdash \forall y\, \varphi[y/c],$$

و قضیهٔ استنتاج بار دیگر می‌دهد

$$\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \to \forall y\, \varphi[y/c].$$

برهان

$$\vdash \forall y\, \varphi[y/c] \to \forall x\, \varphi[x/c]$$

کاملاً متقارن است؛ پس نتیجه با Taut به دست می‌آید. □

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

قضیه 0.8 (تعمیم قوی برای ثابت‌ها). *اگر $\Gamma \vdash \varphi$، ثابت c در Γ ظاهر نشود، و x در φ آزاد نباشد ولی برای c در φ، آزاد برای جانشانی باشد، آنگاه $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$.*

اثبات. چون $\Gamma \vdash \varphi$ و c در Γ ظاهر نمی‌شود، بنا بر تعمیم ضعیف یک متغیر به نام y که در φ ظاهر نمی‌شود وجود دارد به‌طوری که $\Gamma \vdash \forall y\, \varphi[y/c]$. چون y اصلاً در φ ظاهر نمی‌شود، در φ آزاد نیست و برای c در φ نیز آزاد برای جانشانی است. همچنین، بنا بر فرض، x در φ آزاد نیست و برای c در φ، آزاد برای جانشانی است. پس شرایط تغییر متغیر مقید برقرارند و

$$\vdash \forall x\, \varphi[x/c] \equiv \forall y\, \varphi[y/c].$$

ازاین‌رو $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi[x/c]$. □

قضیه 0.9. *1. اگر $\Gamma \vdash \varphi(t)$، آنگاه $\Gamma \vdash \exists x\, \varphi(x)$.*

2. اگر $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)$، آنگاه $\Gamma \vdash \varphi(t)$.

اثبات. 1. تمرین.

2. فرض کنید $\Gamma_0 \vdash \forall x\, \varphi(x)$.

1.	$\Gamma_0 \vdash \forall x\, \varphi(x)$	فرض
2.	$\Gamma_0 \vdash \forall x\, \varphi(x) \to \varphi[t/x]$	Ax1
3.	$\Gamma_0 \vdash \varphi[t/x]$	MP 1'2

□

0.2 مجموعه‌های بیشینه‌سازگار از جمله‌ها

تعریف 0.10 (مجموعهٔ بیشینه‌سازگار). مجموعهٔ Γ از جملهها بیشینه‌سازگار است اگر و تنها اگر:

1. Γ سازگار باشد؛ و
2. اگر $\Gamma \subsetneq \Gamma'$، آنگاه Γ' ناسازگار باشد.

یک تعریف جایگزینِ هم‌ارز چنین است: مجموعهٔ Γ از جمله‌ها بیشینه‌سازگار است اگر و تنها اگر:

1. Γ سازگار باشد؛ و
2. اگر $\Gamma \cup \{\varphi\}$ سازگار باشد، آنگاه $\varphi \in \Gamma$.

به بیان دیگر، نمی‌توان جملههایی را که از پیش در Γ نیستند به مجموعهٔ بیشینه‌سازگار Γ افزود، بی‌آنکه مجموعهٔ بزرگ‌تر حاصل ناسازگار شود.

مجموعه‌های بیشینه‌سازگار در اثبات تمامیت مهم‌اند، زیرا می‌توانیم تضمین کنیم هر مجموعهٔ سازگار از جملهها، یعنی Γ، در یک مجموعهٔ بیشینه‌سازگار Γ^* قرار دارد؛ و یک مجموعهٔ بیشینه‌سازگار برای هر جمله φ یا φ را در بر دارد یا نقیضش $\neg\varphi$ را. این امر به‌ویژه دربارهٔ جملههای اتمی صادق است. پس از یک

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

مجموعهٔ بیشینه‌سازگار در زبانی که با ثابتها به‌طور مناسب گسترش یافته است، می‌توانیم ساختار بسازیم که در آن تفسیر محمولها بر پایهٔ اینکه کدام جملههای اتمی در Γ^* هستند تعریف شود. سپس می‌توان نشان داد این ساختار همهٔ جملههای Γ^*، و در نتیجه جمله‌های Γ، را صادق می‌کند. اثبات این واقعیت اخیر نیازمند آن است که $\neg\varphi \in \Gamma^*$ اگر و تنها اگر $\varphi \notin \Gamma^*$، و $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma^*$ اگر و تنها اگر $\varphi \in \Gamma^*$ یا $\psi \in \Gamma^*$، و مانند آن.

گزاره 0.11. *فرض کنید Γ بیشینه‌سازگار است. آنگاه:*

1. *اگر $\Gamma \vdash \varphi$، آنگاه $\varphi \in \Gamma$.*
2. *برای هر φ، یا $\varphi \in \Gamma$ یا $\neg\varphi \in \Gamma$.*
3. *$(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ اگر و تنها اگر هم $\varphi \in \Gamma$ و هم $\psi \in \Gamma$.*
4. *$(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ اگر و تنها اگر یا $\varphi \in \Gamma$ یا $\psi \in \Gamma$.*
5. *$(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ اگر و تنها اگر یا $\varphi \notin \Gamma$ یا $\psi \in \Gamma$.*

اثبات. در سراسر موارد زیر فرض می‌کنیم Γ بیشینه‌سازگار است.

1. اگر $\Gamma \vdash \varphi$، آنگاه $\varphi \in \Gamma$.

فرض کنید $\Gamma \vdash \varphi$. خلاف نتیجه را فرض کنید، یعنی $\varphi \notin \Gamma$. چون Γ بیشینه‌سازگار است، $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ناسازگار است؛ پس $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$. بنا بر گزاره‌ها 20.18 and 19.18، Γ ناسازگار است. این با فرض سازگاری Γ تناقض دارد. پس نمی‌تواند $\varphi \notin \Gamma$ باشد و بنابراین $\varphi \in \Gamma$.

2. برای هر φ، یا $\varphi \in \Gamma$ یا $\neg\varphi \in \Gamma$.

خلاف نتیجه را فرض کنید: برای φای، هم $\varphi \notin \Gamma$ و هم $\neg\varphi \notin \Gamma$. چون Γ بیشینه‌سازگار است، هر دو $\Gamma \cup \{\varphi\}$ و $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ناسازگارند؛ پس $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$. بنا بر گزاره‌ها 20.21 and 19.21، Γ ناسازگار است، که تناقض است. پس چنین جمله φای وجود ندارد و برای هر φ، یا $\varphi \in \Gamma$ یا $\neg\varphi \in \Gamma$.

3. $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ اگر و تنها اگر هم $\varphi \in \Gamma$ و هم $\psi \in \Gamma$:

برای جهت رفت، فرض کنید $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$. آنگاه $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. بنا بر Items 1 and 1، $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \psi$. بنا بر (1)، $\varphi \in \Gamma$ و $\psi \in \Gamma$، چنان‌که لازم بود.

برای جهت برگشت، فرض کنید $\varphi \in \Gamma$ و $\psi \in \Gamma$. آنگاه $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \psi$. بنا بر Items 2 and 2، $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. بنا بر (1)، $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$.

4. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ اگر و تنها اگر یا $\varphi \in \Gamma$ یا $\psi \in \Gamma$.

برای عکس نقیض جهت رفت، فرض کنید $\varphi \notin \Gamma$ و $\psi \notin \Gamma$. می‌خواهیم نشان دهیم $(\varphi \vee \psi) \notin \Gamma$. چون Γ بیشینه‌سازگار است، $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ و $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \bot$. بنا بر گزاره‌ها 20.23 and 19.23، $\Gamma \cup \{(\varphi \vee \psi)\}$ ناسازگار است. پس $(\varphi \vee \psi) \notin \Gamma$، چنان‌که لازم بود.

برای جهت برگشت، فرض کنید $\varphi \in \Gamma$ یا $\psi \in \Gamma$. آنگاه $\Gamma \vdash \varphi$ یا $\Gamma \vdash \psi$. بنا بر گزاره‌ها 20.23 and 19.23، $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$. بنا بر (1)، $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$، چنان‌که لازم بود.

5. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ اگر و تنها اگر یا $\varphi \notin \Gamma$ یا $\psi \in \Gamma$:

برای جهت رفت، فرض کنید $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ و خلاف نتیجه را بپذیرید: $\varphi \in \Gamma$ و $\psi \notin \Gamma$. بنا بر این فرض‌ها، $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ و $\Gamma \vdash \varphi$. بنا بر Items 1 and 1، $\Gamma \vdash \psi$. اما بنا بر (1)، آنگاه $\psi \in \Gamma$، که با فرض $\psi \notin \Gamma$ تناقض دارد.

برای جهت برگشت، نخست حالت $\varphi \notin \Gamma$ را در نظر بگیرید. بنا بر (2)، $\neg\varphi \in \Gamma$ و بنابراین $\Gamma \vdash \neg\varphi$. بنا بر Items 2 and 2، $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. باز هم بنا بر (1) نتیجه می‌گیریم $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$، چنان‌که لازم بود.

اکنون حالت $\psi \in \Gamma$ را در نظر بگیرید. آنگاه $\Gamma \vdash \psi$ و بنا بر Items 2 and 2، $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. بنا بر (1)، $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$. □

0.3 مقدمه

برای بسط نظریه و فرانظریهٔ منطق مرتبهٔ اول، نخست باید نحو و معناشناسی عبارت‌های آن را تعریف کنیم. عبارت‌های منطق مرتبهٔ اول ترم‌ها و فرمولها هستند. ترم‌ها از متغیرها، ثابتها و تابعها ساخته می‌شوند. فرمولها نیز از محمولها همراه با ترم‌ها ساخته می‌شوند؛ این‌ها کوچک‌ترین فرمولها، یعنی فرمول‌های «اتمی»، را تشکیل می‌دهند. سپس می‌توانیم با رابط‌های منطقی و سورها، از فرمولهای اتمی فرمول‌های پیچیده‌تری بسازیم. راه‌های گوناگونی برای بیان قواعد ساخت وجود دارد و ما فقط یکی از امکان‌ها را ارائه می‌کنیم. دستگاه‌های دیگر نمادهای متفاوتی برمی‌گزینند، مجموعه‌های متفاوتی از رابط‌ها را اولیه می‌گیرند، و پرانتزها را به شیوه‌ای دیگر به کار می‌برند یا، مانند نمادگذاری موسوم به لهستانی، اصلاً به کار نمی‌برند. بااین‌حال وجه مشترک همهٔ رویکردها این است که قواعد ساخت، مجموعهٔ ترم‌ها و فرمولها را به‌طور *استقرایی* تعریف می‌کنند. اگر این کار درست انجام شود، هر عبارت بر پایهٔ قواعد ساخت اساساً فقط به یک شیوه ساخته می‌شود. چنین تعریف استقرایی‌ای عبارت‌هایی با *خوانش یکتا* تولید می‌کند؛ ازاین‌رو می‌توانیم معنای آن‌ها را نیز با همان روش، یعنی تعریف استقرایی، تعیین کنیم.

تعیین معنای عبارت‌ها موضوع معناشناسی است. مفهوم محوری معناشناسی ارضا در ساختار است. ساختار به اجزای سازندهٔ زبان معنا می‌دهد: دامنه مجموعه‌ای ناتهی از اشیاست. سورها چنان تفسیر می‌شوند که بر این دامنه تغییر کنند؛ به ثابتها عناصری از دامنه نسبت داده می‌شود؛ به نمادهای تابعی nموضعی تابع‌هایی از D^n به D، که D همان دامنه است، نسبت داده می‌شود؛ و به محمولها رابطه‌هایی بر دامنه نسبت داده می‌شود. این دامنه همراه با انتساب‌ها به

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

واژگان پایه، ساختار را تشکیل می‌دهد. متغیرها ممکن است در فرمولها ظاهر شوند و برای ارائهٔ معناشناسی باید عضوهایی از دامنه را نیز به آن‌ها نسبت دهیم؛ این همان انتساب متغیر است. در پایان، رابطهٔ ارضا این اجزا را به هم پیوند می‌دهد. ممکن است فرمول در ساختار $\mathfrak{M}$ نسبت به انتساب متغیر s ارضا شود، که آن را $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ می‌نویسیم. این رابطه نیز با استقرا بر ساختار φ تعریف می‌شود؛ برای نمونه، جدول‌های ارزش رابطه‌های منطقی، ارضای $\varphi \wedge \psi$ را بر حسب ارضا یا عدم ارضای φ و ψ تعریف می‌کنند. سپس معلوم می‌شود اگر فرمول φ یک جمله باشد، یعنی هیچ متغیر آزادی نداشته باشد، انتساب متغیر بی‌اهمیت است؛ بنابراین می‌توانیم صرفاً از ارضاشدن یا ارضانشدن جملهها در ساختارها سخن بگوییم.

بر پایهٔ رابطهٔ ارضای $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ برای جمله‌ها می‌توانیم مفاهیم معناشناختی بنیادی اعتبار، پیامد و ارضاپذیری را تعریف کنیم. یک جمله معتبر است، $\vDash \varphi$، اگر هر ساختاری آن را ارضا کند. جمله از مجموعه‌ای از جملهها نتیجه می‌شود، $\Gamma \vDash \varphi$، اگر هر ساختار که همهٔ جملههای Γ را ارضا می‌کند، φ را نیز ارضا کند. مجموعه‌ای از جمله‌ها ارضاپذیر است اگر ساختاری وجود داشته باشد که همهٔ جملههای آن را هم‌زمان ارضا کند. چون فرمولها به‌طور استقرایی تعریف شده‌اند و ارضا نیز به نوبهٔ خود با استقرا بر ساختار فرمولها تعریف می‌شود، می‌توانیم برای اثبات ویژگی‌های معناشناسی و ربط‌دادن مفاهیم معناشناختی تعریف‌شده از استقرا استفاده کنیم.

فصل 1

نحو و معناشناسی

1.1 تابع‌های C در $\mathbf{Q}$ بازنمایی‌پذیرند

باید نشان دهیم هر تابع در C در $\mathbf{Q}$ بازنمایی‌پذیر است. در پایان باید نشان دهیم چگونه به هر تابع kموضعی $f(x_0, \ldots, x_{k-1})$ در C، فرمول $\varphi_f(x_0, \ldots, x_{k-1}, y)$ را نسبت دهیم که آن را بازنمایی کند.

لم 1.1. *برای اعداد طبیعی n و m، اگر $n \neq m$، آنگاه $\mathbf{Q} \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$.*

اثبات. با استقرا بر n نشان دهید برای هر m، اگر $n \neq m$، آنگاه $\mathbf{Q} \vdash \overline{n} \neq \overline{m}$.

در حالت پایه $n = 0$. اگر m برابر 0 نباشد، برای عدد طبیعی kای $m = k + 1$. اصل موضوعی داریم که می‌گوید $\forall x\, 0 \neq x'$. با یک اصل موضوع سور و با جایگزینی x با $\overline{k}$ نتیجه می‌گیریم $0 \neq \overline{k}'$. اما $\overline{k}'$ همان $\overline{m}$ است.

در گام استقرا می‌توانیم صدق ادعا را برای n فرض و $n+1$ را بررسی کنیم. بگذارید m هر عدد طبیعی باشد. دو حالت ممکن است: یا $m = 0$، یا برای kای $m = k + 1$. در حالت نخست، اصل موضوع جانشین‌نبودن صفر مستقیماً می‌دهد $\mathbf{Q} \vdash \overline{n}' \neq 0$. در حالت دوم، فرض کنید $n + 1 \neq k + 1$. آنگاه $n \neq k$. بنا بر فرض استقرا برای n، $\mathbf{Q} \vdash \overline{n} \neq \overline{k}$. اصلی موضوع داریم که می‌گوید $\forall x\, \forall y\, x' = y' \to x = y$. با یک اصل موضوع سور داریم $\overline{n}' = \overline{k}' \to \overline{n} = \overline{k}$. با منطق گزاره‌ای در $\mathbf{Q}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $\overline{n} \neq \overline{k} \to \overline{n}' \neq \overline{k}'$. با وضع مقدم $\overline{n}' \neq \overline{k}'$ به دست می‌آید، که همان نتیجهٔ مطلوب است، زیرا $\overline{k}'$ برابر $\overline{m}$ است. $\square$

توجه کنید این لم چندان پرمحتوا نیست: در اصل می‌گوید $\mathbf{Q}$ می‌تواند اثبات کند اعدادنمای متفاوت بر اشیای متفاوت دلالت می‌کنند. برای نمونه، $\mathbf{Q}$ اثبات می‌کند $0'' \neq 0'''$. اما نشان‌دادن این امر در حالت کلی قدری دقت می‌طلبد. همچنین توجه کنید با آنکه از استقرا استفاده می‌کنیم، این استقرا بیرون از $\mathbf{Q}$ است.

می‌توانیم صفر، جانشین، جمع، ضرب، تابع مشخصهٔ برابری و تصویرها را بازنمایی کنیم. در هر مورد فرمول بازنمای مناسب کاملاً سرراست است؛ برای نمونه، صفر با فرمول

$$y = 0$$

بازنمایی می‌شود، جانشین با فرمول

$$x_0' = y$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

و جمع با فرمول

$$x_0 + x_1 = y.$$

کار اصلی نشان‌دادن این است که $\mathbf{Q}$ می‌تواند گزاره‌های مربوط را اثبات کند. برای مثال، اینکه جمع با فرمول بالا بازنمایی می‌شود مستلزم آن است که نشان دهیم برای هر جفت عدد طبیعی m و n، $\mathbf{Q}$ اثبات می‌کند

$$\overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$$

و

$$\forall y\,((\overline{n} + \overline{m}) = y \to y = \overline{n+m}).$$

ترکیب چطور؟ فرض کنید h چنین تعریف شده باشد:

$$h(x_0, \ldots, x_{l-1}) = f(g_0(x_0, \ldots, x_{l-1}), \ldots, g_{k-1}(x_0, \ldots, x_{l-1})).$$

فرض کنید پیش‌تر فرمول‌های $\varphi_f, \varphi_{g_0}, \ldots, \varphi_{g_{k-1}}$ را یافته‌ایم که به‌ترتیب تابع‌های $f, g_0, \ldots, g_{k-1}$ را بازنمایی می‌کنند. آنگاه می‌توانیم فرمول φ_h را که h را بازنمایی می‌کند تعریف کنیم؛ به این صورت که $\varphi_h(x_0, \ldots, x_{l-1}, y)$ را برابر عبارت زیر بگیریم:

$$\exists z_0 \ldots \exists z_{k-1}\, \varphi_{g_0}(x_0, \ldots, x_{l-1}, z_0) \wedge \cdots \wedge$$
$$!A_{g_{k-1}}(x_0, \ldots, x_{l-1}, z_{k-1}) \wedge \varphi_f(z_0, \ldots, z_{k-1}, y).$$

سرانجام جست‌وجوی نامحدود را بررسی کنیم. فرض کنید $g(x, \vec{z})$ منظم و در $\mathbf{Q}$ با فرمول $\varphi_g(x, \vec{z}, y)$ بازنمایی‌پذیر باشد. بگذارید f با $f(\vec{z}) = \mu x\; g(x, \vec{z})$ تعریف شود. می‌خواهیم فرمول $\varphi_f(\vec{z}, y)$ را بیابیم که f را بازنمایی کند. انتخاب طبیعی چنین است:

$$\varphi_f(\vec{z}, y) \equiv \varphi_g(y, \vec{z}, 0) \wedge \forall w\,(w < y \to \neg\varphi_g(w, \vec{z}, 0)).$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

با استفاده از چند لم اضافی می‌توان نشان داد این فرمول کار می‌کند؛ برای نمونه:

لم 1.2. *برای هر متغیر x و هر عدد طبیعی n، $\mathbf{Q}$ اثبات می‌کند $(x' + \overline{n}) = (x + \overline{n})'$.*

باز هم شایان ذکر است که این گزاره ضعیف‌تر از آن است که $\mathbf{Q}$ فرمول $\forall x\, \forall y\, (x' + y) = (x + y)'$ را اثبات کند، زیرا گزارهٔ اخیر کاذب است.

اثبات. اثبات، طبق معمول، با استقرا بر n است. در حالت پایه $n = 0$ باید نشان دهیم $\mathbf{Q}$ فرمول $(x' + 0) = (x + 0)'$ را اثبات می‌کند. اما داریم:

$$
\begin{aligned}
&(x' + 0) = x' && \text{از اصل موضوع ۴}\\
&(x + 0) = x && \text{از اصل موضوع ۴}\\
&(x + 0)' = x' && \text{از سطر ۲}\\
&(x' + 0) = (x + 0)' && \text{از سطرهای ۱ و ۳}
\end{aligned}
$$

در گام استقرا می‌توانیم فرض کنیم $(x' + \overline{n}) = (x + \overline{n})'$ را در $\mathbf{Q}$ استنتاج کرده‌ایم. چون $\overline{n+1}$ همان $\overline{n}'$ است، باید نشان دهیم $\mathbf{Q}$ فرمول $(x' + \overline{n}') = (x + \overline{n}')'$ را اثبات می‌کند. زنجیرهٔ برابری‌های زیر را می‌توان در $\mathbf{Q}$ استنتاج کرد:

$$
\begin{aligned}
(x' + \overline{n}') &= (x' + \overline{n})' && \text{اصل موضوع ۵}\\
&= (x + \overline{n}')' && \text{از فرض استقرا}
\end{aligned}
$$

□

لم 1.3. *1. $\mathbf{Q}$ اثبات می‌کند $\neg(x < \overline{0})$.*

2. برای هر عدد طبیعی n، $\mathbf{Q}$ اثبات می‌کند

$$x < \overline{n+1} \to (x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{n}).$$

اثبات. بخش ۱ و قسمتی از بخش ۲ را به‌طور غیرصوری انجام می‌دهیم؛ یعنی فقط راهنمایی‌هایی برای ساخت اشتقاق صوری می‌آوریم.

برای بخش ۱، بنا بر تعریف $<$ باید در $\mathbf{Q}$ فرمول $\neg\exists y\,(y' + x) = 0$ را اثبات کنیم؛ این فرمول، با استفاده از اصول موضوعه و قواعد منطق مرتبهٔ اول، با $\forall y\,(y' + x) \neq 0$ هم‌ارز است. ایده چنین است: فرض کنید $(y' + x) = 0$. اگر x برابر 0 باشد، داریم $(y' + 0) = 0$. اما بنا بر اصل موضوع ۴ از $\mathbf{Q}$، $(y' + 0) = y'$، و بنا بر اصل موضوع ۲، $y' \neq 0$؛ که تناقض است. پس $\forall y\,(y' + x) \neq 0$. اگر x برابر 0 نباشد، بنا بر اصل موضوع ۳، zای هست که $x = z'$. اما آنگاه $(y' + z') = 0$. بنا بر اصل موضوع ۵، $(y' + z)' = 0$، که باز با اصل موضوع ۲ تناقض دارد.

برای بخش ۲ بر n استقرا کنید. حالت پایه، یعنی $n = 0$، را در نظر بگیریم. در این حالت باید نشان دهیم $x < \overline{1} \to x = \overline{0}$. فرض کنید $x < \overline{1}$. آنگاه بنا بر اصل موضوع معرف $<$، داریم $\exists y\,(y' + x) = 0'$. فرض کنید y این خاصیت را دارد؛ پس $y' + x = 0'$.

باید نشان دهیم $x = 0$. بنا بر اصل موضوع ۳، اگر x برابر 0 نباشد، برای zای برابر z' است. آنگاه $(y' + z') = 0'$. بنا بر اصل موضوع ۵ از $\mathbf{Q}$، $(y' + z)' = 0'$. بنا بر اصل موضوع ۱، داریم $(y' + z) = 0$. اما بنا بر تعریف این یعنی $z < 0$، که با بخش ۱ تناقض دارد. $\square$

نشان داده‌ایم مجموعهٔ تابع‌های محاسبه‌پذیر را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ تابع‌های بازنمایی‌پذیر در $\mathbf{Q}$ مشخص کرد. در واقع اثبات کلی‌تر است. از تعریف بازنمایی‌پذیری به‌آسانی می‌توان دید هر نظریه‌ای که $\mathbf{Q}$ را گسترش می‌دهد، یا بتوان $\mathbf{Q}$ را در آن تفسیر کرد، قادر به بازنمایی تابع‌های محاسبه‌پذیر است. برعکس، در هر دستگاه اشتقاقی که مفهوم اثبات در آن محاسبه‌پذیر باشد، هر تابع بازنمایی‌پذیر محاسبه‌پذیر است. بنابراین، برای نمونه، مجموعهٔ تابع‌های محاسبه‌پذیر را می‌توان مجموعهٔ تابع‌های بازنمایی‌شده در حساب پئانو یا حتی نظریهٔ مجموعه‌های زرملو–فرانکل دانست. چنان‌که گودل اشاره کرد، این نتیجه تا اندازه‌ای شگفت‌انگیز است. خواهیم دید در بحث اثبات‌پذیری، پرسش‌ها به نظریه‌ای که در نظر می‌گیریم بسیار حساس‌اند؛ به‌طور تقریبی، هرچه اصول موضوعه قوی‌تر باشند، چیزهای بیشتری می‌توان اثبات کرد. اما در گسترهٔ وسیعی از نظریه‌های اصل‌موضوعی، تابع‌های بازنمایی‌پذیر دقیقاً همان تابع‌های محاسبه‌پذیرند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

1.2 تابع‌های C

بگذارید C کوچک‌ترین مجموعهٔ تابع‌هایی باشد که موارد زیر را در بر دارد:

1. صفر؛
2. جانشین؛
3. جمع؛
4. ضرب؛
5. تصویرها؛ و
6. تابع مشخصهٔ برابری، $\chi_=$؛

و تحت عملیات زیر بسته است:

1. ترکیب؛ و
2. جست‌وجوی نامحدود، وقتی بر تابع‌های منظم اعمال شود.

به یاد آورید که محدودیت آخر فقط به این معناست که عمل μ را تنها وقتی می‌توان به کار برد که نتیجه تابعی تام باشد. این را با تعریف تابع‌های بازگشتی عمومی مقایسه کنید: اینجا جمع، ضرب و $\chi_=$ را افزوده‌ایم، اما بازگشت اولیه را کنار گذاشته‌ایم.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

آشکار است که هر تابع در C بازگشتی است، زیرا جمع، ضرب و $\chi_=$ بازگشتی‌اند. نشان خواهیم داد عکس این گزاره نیز صادق است؛ یعنی با دیگر عملیات موجود در C می‌توانیم بازگشت اولیه را انجام دهیم.

1.3 گزاره‌ها

گاهی سودمند است برای مجموعهٔ جهان‌هایی در a relational model $\mathfrak{M}$ که فرمول φ در آن‌ها صادق است نامی داشته باشیم. آن را *گزارهٔ* تعریف‌شده به وسیلهٔ φ می‌نامیم و $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{M}}$ می‌نویسیم.

تعریف 1.4. تابع V را به‌طور استقرایی به نگاشت $\varphi \mapsto [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{M}} : \mathrm{Frm} \to \wp(W)$ چنین گسترش می‌دهیم:

1. $[\![\bot]\!]_{\mathfrak{M}} = \emptyset$.
2. $[\![p]\!]_{\mathfrak{M}} = V(p)$.
3. $[\![\neg\psi]\!]_{\mathfrak{M}} =$
$\{w \in W :]\!]_{\mathfrak{M}}\psi[\![\notin w'$ داریم، Rww' که w' برای هر$\}$.
4. $[\![\psi \wedge \chi]\!]_{\mathfrak{M}} = [\![\psi]\!]_{\mathfrak{M}} \cap [\![\chi]\!]_{\mathfrak{M}}$.
5. $[\![\psi \vee \chi]\!]_{\mathfrak{M}} = [\![\psi]\!]_{\mathfrak{M}} \cup [\![\chi]\!]_{\mathfrak{M}}$.
6. $[\![\psi \to \chi]\!]_{\mathfrak{M}} =$
$\{w \in W :]\!]_{\mathfrak{M}}\chi[\![\in w'$ آنگاه $]\!]_{\mathfrak{M}}\psi[\![\in w'$ اگر، Rww' که w' برای هر$\}$.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

گزاره 1.5. $\mathfrak{M}\varphi[w]$ اگر و تنها اگر $w \in [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{M}}$.

اثبات. تمرین. □

گزاره 1.5 را اثبات کنید.

1.4 فهرست‌ها

کدگذاری فهرست $[M_1, M_2, \ldots, M_n]$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$[M_1, M_2, \ldots, M_n] \equiv \lambda sz.\, sM_1(sM_2(\ldots(sM_nz)))$$

به‌طور غیررسمی، ترمی که فهرست را نمایش می‌دهد تابع «انباشتگر» آن فهرست است: تابعی که دو ترم می‌پذیرد. ترم نخست تابعی است که مقدار انباشته‌شده را همراه با یک عنصر تازه می‌گیرد و مقدار انباشته‌شدهٔ تازه را بازمی‌گرداند؛ ترم دوم مقدار انباشته‌شدهٔ آغازین است. این تابع عناصر را یکی‌یکی می‌انبازد و سرانجام نتیجه را بازمی‌گرداند.

اگر با برنامه‌نویسی تابعی آشنا باشید، این تعریف را شبیه *تاخوردگی راست* خواهید یافت: فهرست به‌صورت تابع تاخوردگی راست عناصر درون آن تعریف می‌شود.

بر پایهٔ این کدگذاری می‌توانیم چند تابع سودمند را به‌آسانی تعریف کنیم:

$$\mathrm{Sum} \equiv \lambda l.\, l\,(\lambda xa.\, \mathrm{Add}\, x\, a)\,\overline{0}$$
$$\mathrm{Len} \equiv \lambda l.\, l\,(\lambda xa.\, \mathrm{Add}\, a\, \overline{1})\overline{0}$$

Sum مجموع فهرستی از اعداد چرچ را محاسبه می‌کند. این تابع با انجام انباشت روی فهرست کار می‌کند: مقدار آغازین $\overline{0}$ است و برای هر عنصر، $\mathrm{Add}\, x\, a$ را به‌عنوان مقدار تازه بازمی‌گرداند، که در آن x عنصر کنونی و a مقدار انباشته‌شده است. نتیجه، مجموع همهٔ عناصر است.

Len چه می‌کند؟ توضیح دهید.

تابعی تعریف کنید که فهرست را معکوس کند.

1.5 تبدیل و کاهش

در حساب لامبدا سه نوع تبدیل یا کاهش وجود دارد. تفاوت تبدیل و کاهش در این است که «دگرگونی» دوسویه است یا یک‌سویه، چنان‌که خواهیم دید.

تبدیل α به تغییر نام متغیرها مربوط است. طبیعی است $\lambda x.x$ و $\lambda y.y$ را نمایش‌های یک تابع، یعنی تابع همانی، بدانیم. این ایده را چنین صورت‌بندی می‌کنیم: تبدیل α ترم‌هایی را یکسان می‌شمارد که فقط در تغییر نام سازگار متغیرهای مقید تفاوت دارند؛ ازاین‌رو $\lambda x.x$ و $\lambda y.y$ با تبدیل α یکسان‌اند.

1.6 مفاهیم نظریه‌اثباتی

همان‌گونه که چند مفهوم معناشناختی مهم، یعنی اعتبار، پیامد و ارضاپذیری، را تعریف کرده‌ایم، اکنون مفاهیم *نظریه‌اثباتی* متناظر را تعریف می‌کنیم. این مفاهیم با توسل به ارضای جمله‌ها در ساختارها تعریف نمی‌شوند، بلکه با توسل به اشتقاق‌پذیری یا اشتقاق‌ناپذیری دنباله‌های معین تعریف می‌شوند. کشف مهمی بود که این مفاهیم بر هم منطبق‌اند. انطباق آن‌ها محتوای *قضیه‌های صحت و تمامیت* است.

تعریف 1.6 (قضیه‌ها). جمله φ یک قضیه است اگر اشتقاق در **LK** از دنبالهٔ $\Rightarrow \varphi$ وجود داشته باشد. اگر φ قضیه باشد $\vdash \varphi$، و اگر نباشد $\nvdash \varphi$ می‌نویسیم.

تعریف 1.7 (اشتقاق‌پذیری). جمله φ، *اشتقاق‌پذیر از مجموعهٔ* Γ از جمله‌هاست، یعنی $\Gamma \vdash \varphi$، اگر و تنها اگر زیرمجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ و دنباله‌ای Γ'_0 از جمله‌های Γ_0 وجود داشته باشند به‌طوری‌که **LK**، $\Gamma'_0 \Rightarrow \varphi$ را اشتقاق کند. اگر φ از Γ اشتقاق‌پذیر نباشد، $\Gamma \nvdash \varphi$ می‌نویسیم.

به سبب قواعد انقباض، تضعیف و جابه‌جایی، ترتیب و تعداد جمله‌ها در Γ'_0 اهمیتی ندارد: اگر دنبالهٔ $\Gamma'_0 \Rightarrow \varphi$ اشتقاق‌پذیر باشد، آنگاه برای هر Γ''_0 که همان جمله‌های Γ'_0 را در بر دارد، $\Gamma''_0 \Rightarrow \varphi$ نیز چنین است. برای نمونه، اگر $\Gamma_0 = \{\psi, \chi\}$، آنگاه هر دو $\Gamma'_0 = \langle \psi, \psi, \chi \rangle$ و $\Gamma''_0 = \langle \chi, \chi, \psi \rangle$ دنباله‌هایی‌اند که فقط جمله‌های Γ_0 را در بر دارند. اگر دنباله‌ای که یکی را در بردارد اشتقاق‌پذیر باشد، دیگری نیز چنین است؛ برای نمونه:

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ \mathrm{CL} & \dfrac{\varphi\psi, \psi, \chi \ \Rightarrow}{\varphi\psi, \chi \ \Rightarrow} \\ \mathrm{XL} & \dfrac{\varphi\chi, \psi \ \Rightarrow}{\varphi\psi, \chi \ \Rightarrow} \\ \mathrm{WL} & \dfrac{\varphi\chi, \chi, \psi \ \Rightarrow}{\varphi\chi, \psi \ \Rightarrow} \end{array}$$

از این پس می‌گوییم اگر Γ_0 مجموعه‌ای متناهی از جمله‌ها باشد، $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ هر دنباله‌ای است که مقدم آن دنباله‌ای از جمله‌های Γ_0 باشد؛ و در صورت نیاز، انقباض‌ها، جابه‌جایی‌ها و تضعیف‌ها را به‌طور ضمنی منظور می‌کنیم.

تعریف 1.8 (سازگاری). مجموعهٔ Γ از جمله‌ها *ناسازگار* است اگر و تنها اگر زیرمجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که **LK**، $\Gamma_0 \Rightarrow$ را اشتقاق کند. اگر Γ ناسازگار نباشد، یعنی اگر برای هر $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ متناهی، **LK**، $\Gamma_0 \Rightarrow$ را اشتقاق نکند، می‌گوییم *سازگار* است.

گزاره 1.9 (بازتابی‌بودن). اگر $\varphi \in \Gamma$، آنگاه $\Gamma \vdash \varphi$.

اثبات. دنبالهٔ آغازی $\varphi \Rightarrow \varphi$، اشتقاق‌پذیر است و $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$. □

گزاره 1.10 (یکنوایی). اگر $\Gamma \subseteq \Delta$ و $\Gamma \vdash \varphi$، آنگاه $\Delta \vdash \varphi$.

اثبات. فرض کنید $\Gamma \vdash \varphi$؛ یعنی زیرمجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ای وجود دارد که $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$، اشتقاق‌پذیر است. چون $\Gamma \subseteq \Delta$، Γ_0 زیرمجموعهٔ متناهی Δ نیز هست. پس اشتقاق از $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ همچنین نشان می‌دهد $\Delta \vdash \varphi$. □

گزاره 1.11 (تعدی). اگر $\Gamma \vdash \varphi$ و $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$، آنگاه $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.

اثبات. اگر $\Gamma \vdash \varphi$، آنگاه زیرمجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ و اشتقاق π_0 از $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ وجود دارند. اگر $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$، آنگاه برای زیرمجموعهٔ متناهی $\Delta_0 \subseteq \Delta$، اشتقاق π_1 از $\varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi$ وجود دارد. اشتقاق زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathrm{Cut}\,\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\vdots\\ \psi\varphi, \Delta_0 \Rightarrow\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_0\vdots\\ \varphi\Gamma_0 \Rightarrow\end{array}}{\psi\Gamma_0, \Delta_0 \Rightarrow}$$

چون $\Gamma_0 \cup \Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta$، این نشان می‌دهد $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. □

توجه کنید این امر به‌ویژه یعنی اگر $\Gamma \vdash \varphi$ و $\varphi \vdash \psi$، آنگاه $\Gamma \vdash \psi$. همچنین نتیجه می‌شود اگر $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ و برای هر i، $\Gamma \vdash \varphi_i$، آنگاه $\Gamma \vdash \psi$.

گزاره 1.12. *Γ ناسازگار است اگر و تنها اگر برای هر جملهٔ φ، $\Gamma \vdash \varphi$.*

اثبات. تمرین. □

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

گزاره 1.12 را اثبات کنید.

گزاره 1.13 (فشردگی). *1. اگر $\Gamma \vdash \varphi$، آنگاه زیرمجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ای وجود دارد که $\Gamma_0 \vdash \varphi$.*

2. اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی Γ سازگار باشد، آنگاه Γ سازگار است.

اثبات. 1. اگر $\Gamma \vdash \varphi$، آنگاه زیرمجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ای وجود دارد که دنبالهٔ $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ دارای اشتقاق است. در نتیجه $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

2. اگر Γ ناسازگار باشد، زیرمجموعهٔ متناهی $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ای وجود دارد که **LK**، $\Gamma_0 \Rightarrow$ را اشتقاق می‌کند. اما آنگاه Γ_0 زیرمجموعه‌ای متناهی و ناسازگار از Γ است. □

1.7 مدل‌های نااستاندارد حساب

تعریف 1.14. بگذارید $\mathcal{L}_N$، زبان حساب باشد که از یک ثابت o، یک محمول دوموضعی $<$، یک تابع یک‌موضعی $'$ و تابعهای دوموضعی $+$ و $\times$ تشکیل شده است.

1. مدل *استاندارد* حساب، ساختار $\mathfrak{N}$ برای $\mathcal{L}_N$ است که $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ دارد و o را به‌صورت 0، $<$ را به‌صورت رابطهٔ کوچک‌تربودن بر $\mathbb{N}$، و $'$، $+$ و $\times$ را به‌ترتیب به‌صورت جانشین، جمع و ضرب بر $\mathbb{N}$ تفسیر می‌کند.

2. حساب صادق نظریهٔ $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ است.

هنگام کار در $\mathcal{L}_N$، هر ترم به شکل $\mathsf{o}^{\prime\dots\prime}$ را که در آن تابع جانشین n بار بر o اعمال شده است، با $\overline{n}$ کوتاه می‌کنیم.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

تعریف 1.15. یک ساختار $\mathfrak{M}$ برای $\mathcal{L}_N$ استاندارد است اگر و تنها اگر $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{M}$.

قضیه 1.16. *مدل‌های شمارا نااستاندارد از حساب صادق وجود دارند.*

اثبات. $\mathcal{L}_N$ را با افزودن ثابت تازهٔ c گسترش دهید و نظریهٔ

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\overline{n} < c : n \in \mathbb{N}\}$$

را در نظر بگیرید. این نظریه به‌طور متناهی ارضاپذیر است؛ پس بنا بر فشردگی مدلی مانند $\mathfrak{M}$ دارد که بنا بر قضیهٔ لونهایم–اسکولم نزولی می‌توان آن را شمارا گرفت. اگر $|\mathfrak{M}|$ دامنهٔ $\mathfrak{M}$ باشد، بگذارید $\mathfrak{M}$ نمادهای غیرمنطقی $\mathcal{L}_N$ را چنین تفسیر کند: $\mathbf{z} = \mathrm{o}^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$، $<^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|^2 = \prec$، $\prime^{\mathfrak{M}} : |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{M}| = *$، و $+^{\mathfrak{M}} : |\mathfrak{M}|^2 \to |\mathfrak{M}| = \oplus$ و $\times^{\mathfrak{M}} : |\mathfrak{M}|^2 \to |\mathfrak{M}| = \otimes$. برای هر $x \in |\mathfrak{M}|$، عنصر $|\mathfrak{M}|$ که با اعمال $*$ بر x به دست می‌آید را x^* می‌نویسیم.

اکنون اگر h یک یکریختی میان $\mathfrak{N}$ و $\mathfrak{M}$ بود، عدد $n \in \mathbb{N}$ای وجود داشت که $h(n) = c^{\mathfrak{M}}$. پس بگذارید s هر انتسابی در $\mathfrak{N}$ باشد که $s(x) = n$. آنگاه $\mathfrak{N}, s \vDash \overline{n} = x$؛ و بنا بر اثبات قضیه 25.9، $\mathfrak{M}, h \circ s \vDash \overline{n} = x$ نیز. بنابراین $c^{\mathfrak{M}} = \mathbf{z}^{*\cdots*}$، که در آن $*$ به تعداد n بار تکرار شده است. اما این ناممکن است، زیرا بنا بر فرض $\mathfrak{M} \vDash \overline{n} < c$ و $\prec$ ناتبازتابی است. پس $\mathfrak{M}$ نااستاندارد است. $\square$

رابطهٔ R بر مجموعهٔ X خوش‌بنیاد است اگر و تنها اگر هیچ زنجیرهٔ نزولی نامتناهی در R نباشد؛ یعنی هیچ x_0، x_1، x_2، ...در X وجود نداشته باشند که $x_2 R x_1 R x_0 \ldots$. با فرض سازگاربودن نظریهٔ مجموعه‌های زرملو–فرانکل ZF نشان دهید مدل‌های ناخوش‌بنیاد از ZF وجود دارند؛ یعنی مدل‌هایی مانند $\mathfrak{M}$ که $x_2 \in x_1 \in x_0 \ldots$.

چون مدل نااستاندارد $\mathfrak{M}$ از قضیه 1.16 به‌طور مقدماتی با مدل استاندارد هم‌ارز است، می‌توان شماری از ویژگی‌های $\mathfrak{M}$ را به دست آورد. باقی این بخش به این کار اختصاص دارد و به ما امکان می‌دهد مدل‌های نااستاندارد شمارا از $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ را دقیقاً توصیف کنیم.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

1. هیچ عضوی از $|\mathfrak{M}|$ از خودش $\prec$-کوچک‌تر نیست: جملهٔ $\forall x \neg x < x$ در $\mathfrak{N}$ و بنابراین در $\mathfrak{M}$ صادق است.

2. با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم $\prec$ یک ترتیب خطی بر $|\mathfrak{M}|$ است؛ یعنی رابطه‌ای تام، ناتبازتابی و متعدی بر $|\mathfrak{M}|$.

3. عنصر $\mathbf{z}$، $\prec$-کمینهٔ $|\mathfrak{M}|$ است.

4. هر عضو $|\mathfrak{M}|$ از جانشین $*$ خود $\prec$-کوچک‌تر است و x^*، $\prec$-کمینهٔ اعضای $|\mathfrak{M}|$ است که از x بزرگ‌ترند.

5. $\mathfrak{M}$ یک پارهٔ آغازی، نسبت به $\prec$، دارد که با $\mathbb{N}$ یکریخت است: $\mathbf{z}, \mathbf{z}^*, \mathbf{z}^{**}, \ldots$. آن را بخش *استاندارد* $|\mathfrak{M}|$ می‌نامیم. هر عضو دیگر $|\mathfrak{M}|$ *نااستاندارد* است. باید اعضای نااستانداردی در $|\mathfrak{M}|$ وجود داشته باشند، وگرنه تابع h از اثبات قضیه 1.16 یک یکریختی بود. از $n, m, \ldots$ به‌عنوان متغیرهایی استفاده می‌کنیم که بر این بخش استاندارد $\mathfrak{M}$ تغییر می‌کنند.

6. هر عنصر نااستاندارد از هر عنصر استاندارد بزرگ‌تر است؛ زیرا برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\mathfrak{N} \vDash \forall z\, (\neg(z = \mathsf{o} \vee \cdots \vee z = \overline{n}) \to \overline{n} < z),$$

و بنابراین اگر $z \in |\mathfrak{M}|$ با همهٔ عناصر استاندارد متفاوت باشد، باید از همهٔ آن‌ها بزرگ‌تر باشد.

7. هر عضو $|\mathfrak{M}|$ جز $\mathbf{z}$ جانشین $*$ عنصری یکتا از $|\mathfrak{M}|$ است که با x^* نشان داده می‌شود. اگر $x = y^*$، آنگاه اگر یکی از x و y استاندارد باشد هر دو استانداردند، و اگر یکی نااستاندارد باشد هر دو نااستانداردند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

8. رابطهٔ هم‌ارزی $\approx$ بر $|\mathfrak{M}|$ را چنین تعریف کنید: $x \approx y$ اگر و تنها اگر برای یک n استاندارد، یا $x \oplus n = y$ یا $y \oplus n = x$. به بیان دیگر، $x \approx y$ اگر و تنها اگر x و y فاصله‌ای متناهی داشته باشند. اگر n و m استاندارد باشند، آنگاه $n \approx m$. بلوک x را کلاس هم‌ارزی $[x] = \{y : x \approx y\}$ تعریف کنید.

9. فرض کنید $x \prec y$ و $x \not\approx y$. چون $\mathfrak{N} \vDash \forall x \forall y \left(x < y \to (x' < y \vee x' = y)\right)$، یا $x^* \prec y$ یا $x^* = y$. حالت دوم ناممکن است، زیرا $x \approx y$ را نتیجه می‌دهد؛ پس $x^* \prec y$. به همین ترتیب، اگر $x \prec y$ و $x \not\approx y$، آنگاه $x \prec {}^*y$. بنابراین اگر $x \prec y$ و $x \not\approx y$، هر $w \approx x$ از هر $v \approx y$ به نسبت $\prec$ کوچک‌تر است. در نتیجه هر بلوک نااستاندارد $[x]$ زنجیره‌ای دوسویه و نامتناهی تشکیل می‌دهد:

$$\cdots \prec {}^{**}x \prec {}^*x \prec x \prec x^* \prec x^{**} \prec \cdots$$

این زنجیره را Z-زنجیره می‌نامند، زیرا نوع ترتیبی اعداد صحیح را دارد.

10. ترتیب $\prec$ را می‌توان به بلوک‌ها بالا برد: اگر $x \prec y$ و $x \not\approx y$، آنگاه بلوک x از بلوک y کوچک‌تر است. بلوکی *نااستاندارد* است اگر عنصری نااستاندارد در بر داشته باشد. بلوک استاندارد کوچک‌ترین بلوک است.

11. کوچک‌ترین بلوک نااستاندارد وجود ندارد: اگر y نااستاندارد باشد، آنگاه یک $x \prec y$ وجود دارد که x نیز نااستاندارد و $x \not\approx y$ است. اثبات: در مدل استاندارد $\mathfrak{N}$، هر عدد بر دو بخش‌پذیر است، شاید با باقیماندهٔ یک؛ یعنی $\mathfrak{N} \vDash \forall y \exists x \left(y = x + x \vee y = x + x + \mathsf{0}'\right)$. بنا بر هم‌ارزی مقدماتی، برای هر $y \in |\mathfrak{M}|$، یک $x \in |\mathfrak{M}|$ هست به‌طوری‌که یا $x \oplus x = y$ یا $x \oplus x \oplus \mathbf{z}^* = y$. اگر x استاندارد بود، y نیز استاندارد می‌بود؛ پس x نااستاندارد است. افزون بر این، x و y به بلوک‌های متفاوت تعلق دارند؛ یعنی $x \not\approx y$. برای دیدن این امر، فرض کنید در یک بلوک باشند؛ یعنی برای n استانداردی $x \oplus n = y$. اگر $y = x \oplus x$، آنگاه $x \oplus n = x \oplus x$؛ پس بنا بر قانون حذف برای جمع، که در $\mathfrak{N}$ و بنابراین در $\mathfrak{M}$ برقرار است، $x = n$ و در نتیجه x استاندارد می‌بود. حالت $y = x \oplus x \oplus \mathbf{z}^*$ نیز مشابه است.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

12. با استدلالی مشابه، بزرگ‌ترین بلوک وجود ندارد.

13. ترتیب بلوک‌ها چگال است: اگر $[x]$ از $[y]$ کوچک‌تر باشد، که در آن $x \not\approx y$، آنگاه بلوکی مانند $[z]$ میان آن دو وجود دارد که از هر دو متمایز است. فرض کنید $x \prec y$. مانند پیش، $x \oplus y$ بر دو بخش‌پذیر است، شاید با باقیمانده؛ پس یک $u \in |\mathfrak{M}|$ وجود دارد به‌طوری‌که یا $x \oplus y = u \oplus u$ یا $x \oplus y = u \oplus u \oplus \mathbf{z}^*$. عنصر u میانگین x و y و بنابراین میان آن‌هاست. فرض کنید $x \oplus y = u \oplus u$؛ حالت دیگر مشابه است. اگر $u \approx x$، آنگاه برای n استانداردی:

$$x \oplus y = x \oplus n \oplus x \oplus n,$$

پس $y = x \oplus n \oplus n$ و $x \approx y$، برخلاف فرض. نتیجه می‌گیریم $u \not\approx x$. استدلالی مشابه $u \not\approx y$ را می‌دهد.

پس بلوک‌های نااستاندارد مانند اعداد گویا مرتب‌اند: یک ترتیب خطی شمارا بدون دو سر تشکیل می‌دهند. از این رو، برای هر دو مدل نااستاندارد شمارا از حساب درست، یعنی $\mathfrak{M}_1$ و $\mathfrak{M}_2$، تحویل‌های آن‌ها به زبانی که تنها شامل $<$ و $=$ است یکریخت‌اند. در واقع، یک یکریختی h را می‌توان چنین تعریف کرد: بخش‌های استاندارد $\mathfrak{M}_1$ و $\mathfrak{M}_2$ با مدل استاندارد $\mathfrak{N}$ و بنابراین با یکدیگر یکریخت‌اند. بلوک‌های بخش نااستاندارد خود مانند اعداد گویا مرتب‌اند و ازاین‌رو بنا بر قضیه 25.26 یکریخت‌اند؛ یک یکریختی میان بلوک‌ها را می‌توان درون هر بلوک گسترش داد: در هر جفت بلوک، عناصری دلخواه را متناظر کنیم و سپس تصویر جانشین x در $\mathfrak{M}_1$ را جانشین تصویر x در $\mathfrak{M}_2$ بگیریم. توجه کنید که از این نتیجه نمی‌شود که $\mathfrak{M}_1$ و $\mathfrak{M}_2$ در زبان کامل حساب یکریخت‌اند (زیرا یکریختی همواره نسبت به یک امضاست): می‌توان جمع و ضرب را بر $|\mathfrak{M}_1|$ و $|\mathfrak{M}_2|$ به شیوه‌های ناهم‌ریخت تعریف کرد. (این نکته همچنین از قضیه‌ای مشهور از وُت نتیجه می‌شود که شمار مدل‌های شمارای یک نظریهٔ کامل نمی‌تواند دقیقاً 2 باشد.)

نشان دهید که در یک مدل نااستاندارد حساب نمی‌تواند بزرگ‌ترین بلوک وجود داشته باشد.

بگذارید $\mathcal{L}$ زبان مرتبهٔ اولی باشد که $<$ تنها محمول آن (جز $=$) است، و بگذارید $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, <)$. همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی یا هم‌متناهی $\mathfrak{N}$ بدون پارامتر تعریف‌پذیرند. نشان دهید این‌ها تنها زیرمجموعه‌های بدون پارامتر تعریف‌پذیر $\mathfrak{N}$ هستند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

(راهنمایی: نخست بگذارید $prc(x,y)$ اختصاری برای فرمول $\mathcal{L}$ زیر باشد: «x پیشینِ بی‌واسطهٔ y است»:

$$x < y \wedge \neg\exists z\,(x < z \wedge z < y).$$

اکنون، با هر زیرمجموعهٔ بدون پارامتر تعریف‌پذیر $\mathfrak{N}$ فرمولی $\varphi(x)$ در $\mathcal{L}$ متناظر است. برای هر چنین φ، جملهٔ θ را در نظر بگیرید:

$$\exists x\,\forall y\,\forall z\,((x < y \wedge x < z \wedge prc(y,z) \wedge \varphi(y)) \to \varphi(z)).$$

نشان دهید $\mathfrak{N} \vDash \theta$ اگر و تنها اگر زیرمجموعهٔ تعریف‌شده به‌وسیلهٔ φ متناهی یا هم‌متناهی باشد.

حال بگذارید $\mathfrak{M}$ مدلی نااستاندارد و مقدماتاً هم‌ارز با $\mathfrak{N}$ باشد. اگر $a \in |\mathfrak{M}|$ نااستاندارد است، عناصری $b, c \in |\mathfrak{M}|$ بزرگ‌تر از a بگیرید، به‌طوری‌که b پیشینِ بی‌واسطهٔ c باشد. آنگاه خودریختی h از تحویل ترتیبی $(|\mathfrak{M}|, \prec)$ وجود دارد که $h(b) = c$ (چرا؟). بنابراین اگر b φ را ارضا کند، c نیز آن را ارضا می‌کند (چرا؟). پس θ در $\mathfrak{M}$ درست است و در نتیجه در $\mathfrak{N}$ نیز درست است. اما این نتیجه می‌دهد که زیرمجموعهٔ $\mathfrak{N}$ تعریف‌شده به‌وسیلهٔ φ متناهی یا هم‌متناهی است.)

1.8 منطق‌های موجهاتی نرمال

می‌توان منطق موجهات را هر مجموعهٔ به‌نحو مناسبی خوش‌رفتار از فرمولها دانست. برخی منطق‌های موجهات هم به دلیل تفسیرها و کاربردهای جالبشان و هم، مهم‌تر از آن، به دلیل فهم نظری خوبی که از آن‌ها داریم، اهمیت ویژه دارند. این‌ها همان منطق‌های موجهاتی موسوم به نرمال‌اند.

تعریف 1.17. یک منطق موجهات $\mathbf{L}$ مجموعه‌ای از فرمولهای زبان پایهٔ موجهات است که:

1. همهٔ همان‌گویی‌های گزاره‌ای را در بر دارد؛

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

2. تحت جانشینی یکنواخت بسته است؛ و

3. تحت وضع مقدم بسته است؛ یعنی هرگاه $\varphi \in \mathbf{L}$ و $(\varphi \to \psi) \in \mathbf{L}$، آنگاه $\psi \in \mathbf{L}$ نیز.

مثال 1.18. برخی مجموعه‌های نه‌چندان جالب از فرمولها که این تعریف را برآورده می‌کنند و بنابراین منطق موجهات به شمار می‌آیند عبارت‌اند از:

1. مجموعهٔ همهٔ همان‌گویی‌ها؛

2. مجموعهٔ همهٔ فرمولها، یعنی منطق موجهات ناسازگار.

تعریف 1.19. یک منطق موجهات $\mathbf{L}$ *نرمال* است اگر و تنها اگر:

1. هر دو فرمول زیر را در بر داشته باشد:

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \qquad \text{(K)}$$

$$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p \qquad \text{)Dual(}$$

2. و تحت ضرورت‌بخشی بسته باشد؛ یعنی هرگاه $\varphi \in \mathbf{L}$، آنگاه $\Box\varphi \in \mathbf{L}$ نیز.

با دو راه اصلی برای تعریف منطق‌های موجهات روبه‌رو خواهیم شد. یکی راه نظریه‌اثباتی است: مجموعهٔ فرمولهایی که می‌توان در دستگاه‌های اشتقاق معینی استنتاج کرد. دیگری راه نظریه‌مدلی است: مجموعه‌های فرمولهایی که در رده‌های معینی از مدل‌ها معتبرند. این وضع همانند منطق گزاره‌ای معمولی و نیز منطق مرتبهٔ اول است. آنجا نیز می‌توان مجموعه‌ای از فرمولها را به دو شیوه مشخص کرد؛ برای نمونه، به‌صورت مجموعهٔ همان‌گویی‌هایی که در همهٔ انتساب‌های ارزش

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

صادق‌اند و به‌صورت مجموعهٔ همهٔ موارد اشتقاق‌پذیر در میان فرمولهای یک دستگاه اشتقاق. برای منطق‌های موجهاتی نرمال، این شیوهٔ دوگانهٔ تعیین منطق با استفاده از مدل‌های رابطه‌ای و دستگاه‌های اثبات اصل‌موضوعی از نوع هیلبرتی ممکن است.

1.9 حذف بزرگ‌ترین برش‌ها

اثبات لم 6.14 نشان داد که اگر **G3c** نتیجهٔ یک قاعدهٔ منطقی، جز $\exists$R و $\forall$L، را اثبات کند، هر یک از مقدمات آن قاعده را نیز اثبات می‌کند، بی‌آنکه ارتفاع برهان افزایش یابد. می‌توانیم نتیجه‌ای قوی‌تر نشان دهیم: این امر برای $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ نیز برقرار است.

مانند پیش، رتبهٔ برش یک استنتاج $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ را عمق فرمول برش آن می‌گیریم.

لم 1.20. *اگر $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ نتیجهٔ یک قاعدهٔ منطقی R، جز $\exists$R یا $\forall$L، را اثبات کند و این کار را با برهان π انجام دهد، هر مقدمه را نیز اثبات می‌کند، با برهان π' (یا با برهانهای π' و π''، برحسب اینکه قاعده یک یا دو مقدمه دارد). افزون بر این: (الف) $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$ (و $\mathrm{ht}(\pi'') \leq \mathrm{ht}(\pi)$)؛ و (ب) شمار استنتاج‌های $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ و نیز رتبه‌هایشان در π' (و π'') همان است که در π بود.*

اثبات. اثبات‌های لم‌ها 6.15 and 6.14 را بررسی کنید. آن اثبات با استقرا بر $\mathrm{ht}(\pi)$ بود. در حالت پایه، یک اصل را با اصلی دیگر جایگزین کردیم؛ پس شرط‌های (الف) و (ب) بدیهی‌اند. اگر آخرین قاعدهٔ π همان R باشد، زیر-برهانهای بی‌واسطهٔ آن همان برهانهای π_i مطلوب‌اند و هر دو شرط برقرارند. در همهٔ حالت‌های دیگر، اگر آخرین استنتاج S باشد، فرض استقرا را بر زیر-برهانهای بی‌واسطهٔ π، یعنی برهان‌های منتهی به مقدمه یا مقدمات S، اعمال می‌کنیم و سپس همان قاعدهٔ S را دوباره بر نتایج اعمال می‌کنیم. شرط‌های (الف) و (ب) برای زیر-برهانهای بی‌واسطهٔ برهان تازه برقرارند و بنابراین برای کل برهان نیز برقرارند. فقط باید حالتی را بررسی کنیم که آخرین استنتاج $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$است. باز تنها یک نمونه را می‌آوریم: فرض کنید π برهانی برای نتیجهٔ $\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$

از $\wedge\mathrm{L}$ باشد و به $\mathrm{Cut_{CS}}$پایان یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi\wedge\chi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi,\psi\wedge\chi,\Gamma\Rightarrow\Delta\end{array}}{\psi\wedge\chi,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

فرض استقرا بر π_1 و π_2 اعمال می‌شود، زیرا آن‌ها نیز برهانهایی از نمونه‌های نتیجهٔ $\wedge\mathrm{L}$ هستند، و برهانهای π'_1 و π'_2 را به‌ترتیب برای $\psi,\chi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi$ و $\varphi,\psi,\chi,\Gamma\Rightarrow\Delta$ به دست می‌دهد. آن‌ها را با $\mathrm{Cut_{CS}}$ ترکیب می‌کنیم تا π' حاصل شود:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \psi,\chi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \varphi,\psi,\chi,\Gamma\Rightarrow\Delta\end{array}}{\psi,\chi,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

آشکار است که (الف) و (ب) برقرارند. □

توجه کنید اگر به جای $\mathrm{Cut_{CS}}$از Cut استفاده می‌کردیم این استدلال کار نمی‌کرد، زیرا نتیجهٔ آخرین برهان در مقدم دو نسخه از ψ,χ,Γ و در تالی دو نسخه از Δ داشت. ناچار بودیم به پذیرفتنی‌بودن انقباض استناد کنیم، اما اثبات گزاره 6.16 از لم وارون‌پذیری استفاده می‌کند؛ پس استدلال دوری می‌شد.

می‌توانیم با لم 1.20 اثبات دیگری برای حذف برش ارائه کنیم. در این اثبات رخدادهای بالاترین استنتاج‌های $\mathrm{Cut_{CS}}$ را پی‌درپی حذف نمی‌کنیم، بلکه رخدادهای استنتاج‌های $\mathrm{Cut_{CS}}$ با رتبهٔ بیشینه را حذف می‌کنیم. یعنی با برهان π در $\mathbf{G3c}+\mathrm{Cut_{CS}}$ آغاز می‌کنیم، برشی را در هر جای آن حذف می‌کنیم (و شاید آن را با برش‌هایی با رتبهٔ کمتر جایگزین کنیم)، و این کار را تا وقتی هیچ برشی نماند ادامه می‌دهیم. تنها شرط این است که بالای برشی که با آن کار می‌کنیم، هیچ برشی با همان رتبه یا رتبه‌ای بالاتر نباشد.

لم 1.21. *اگر π برهانی در $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ باشد که به استنتاج $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ با رتبهٔ n پایان می‌یابد و در جای دیگر فقط از قواعد* **G3c** *و استنتاج‌های $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ با رتبهٔ $< n$ استفاده کند، آنگاه برهانی π' برای همان دنبالهٔ پایانی در $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ وجود دارد که هر استنتاج $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ در آن رتبهٔ $< n$ دارد.*

اثبات. برهان π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$$

حالت‌ها را برحسب شکل φ جدا می‌کنیم.

فرض کنید φ اتمی است. چون همهٔ استنتاج‌های $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ در π_1 و π_2 باید رتبه‌ای کمتر از $\mathrm{dp}(\varphi) = 0$ داشته باشند، هیچ استنتاج $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ای در آن‌ها وجود ندارد. با استقرا بر $\mathrm{ht}(\pi_2)$ نشان می‌دهیم $\Gamma \Rightarrow \Delta$ برهانی بدون برش دارد. اگر $\mathrm{ht}(\pi_2) = 0$، آنگاه $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ یک اصل است. اگر φ اصلی نباشد، یک χ اتمی عضو هم Γ و هم Δ است و خود $\Gamma \Rightarrow \Delta$ یک اصل است. اگر φ اصلی باشد، آنگاه $\Delta = \Delta', \varphi$. در این حالت π_1 به $\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi, \varphi$ پایان می‌یابد. با اعمال گزاره 6.16، یعنی پذیرفتنی‌بودن انقباض، برهانی بدون برش برای $\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi$ به دست می‌آوریم.

اگر $\mathrm{ht}(\pi_2) > 0$، برهان به قاعده‌ای R پایان می‌یابد. یک مقدمهٔ آن قاعده را در نظر بگیرید؛ شکل آن $\varphi, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta', \Lambda$ است، که Π و Λ فرمولهای فعال R هستند. اعمال گزاره 6.11 بر π_1 و π_2، برهانهایی برای $\Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Lambda, \varphi$ و $\varphi, \Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Lambda$ به دست می‌دهد که فرض استقرا بر آن‌ها اعمال می‌شود. برای هر مقدمهٔ R، برهانی برای $\Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Lambda$ حاصل می‌شود. با اعمال R به $\Gamma, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta$ می‌رسیم و گزاره 6.16 برهان بدون برش $\Gamma \Rightarrow \Delta$ را فراهم می‌کند.

اگر φ اتمی نباشد، حالت‌ها را برحسب عملگر اصلی آن جدا می‌کنیم. در هر حالت لم 1.20 را به کار می‌بریم تا برهانهای مقدمات قواعد چپ و راست را که φ در آن‌ها فرمول اصلی است به دست آوریم. سپس مانند حالت E در اثبات لم 1.24 پیش می‌رویم.

1. $\varphi \equiv \neg\psi$. برهانهای π_1 و π_2 به $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi$ و $\neg\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ پایان می‌یابند. بنا بر لم 1.20، برهانهای π'_1 و π'_2 برای $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ وجود دارند. برهان π' چنین است:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

2. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$. برهانهای π_1 و π_2 به $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi$ و $\psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ پایان می‌یابند. بنا بر لم 1.20، با وارون‌سازی $\vee\mathrm{R}$ در π_1، برهان π'_1 برای $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi$ وجود دارد. بنا بر لم 1.20، با وارون‌سازی $\vee\mathrm{L}$ در π_2، برهان π'_2 برای $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ و برهان π''_2 برای $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ وجود دارند. با اعمال گزاره 6.11 بر π''_2 نیز برهان π'''_2 برای $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ به دست می‌آوریم. برهان π' چنین است:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'''_2\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}\,\mathrm{Cut_{CS}} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

3. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$. تمرین.

4. $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$. برهانهای π_1 و π_2 به $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \to \chi$ و $\psi \to \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ پایان می‌یابند. بنا بر لم 1.20، با وارون‌سازی $\to\mathrm{R}$ در π_1، برهان π'_1 برای $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ وجود دارد. بنا بر لم 1.20، با وارون‌سازی $\to\mathrm{L}$ در π_2، برهان π'_2 برای $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ و برهان π''_2

برای $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ وجود دارند. با اعمال گزاره 6.11 بر π_2'' نیز برهان π_2''' برای $\chi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ به دست می‌آوریم. برهان π' چنین است:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'''\\ \chi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

5. $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$. برهانهای π_1 و π_2 به $\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)$ و $\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ پایان می‌یابند. بنا بر لم 1.20، برهان π_1' برای $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)$ وجود دارد.

اکنون برهان π_2 را در نظر بگیرید. این برهان به $\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ پایان می‌یابد. از دنبالهٔ پایانی π_2 رو به بالا حرکت کنید و هر رخداد $\forall x\, \psi(x)$ در سمت چپ دنباله‌ای را علامت بزنید که به رخداد $\forall x\, \psi(x)$ در دنبالهٔ پایانی π_2 «می‌انجامد»: (الف) $\forall x\, \psi(x)$ را در دنبالهٔ پایانی π_2 علامت بزنید. (ب) اگر $\forall x\, \psi(x)$ در بافت نتیجهٔ قاعده‌ای ظاهر شده و علامت خورده است، رخداد متناظر آن را در مقدمه یا مقدمات قاعده علامت بزنید. (ج) اگر $\forall x\, \psi(x)$ در نتیجهٔ یک قاعدهٔ $\forall\mathrm{L}$ اصلی و علامت‌خورده است، رخدادهای فعال متناظر $\forall x\, \psi(x)$ و $\psi(t)$ را در مقدمه علامت بزنید.

همهٔ رخدادهای علامت‌خوردهٔ $\forall x\, \psi(x)$ را در نظر بگیرید. هیچ‌یک در قاعده‌ای جز $\forall\mathrm{L}$ فعال نیستند، زیرا فقط فرمولهای فعال $\forall\mathrm{L}$ علامت می‌خورند. همهٔ رخدادهای علامت‌خوردهٔ $\forall x\, \psi(x)$ را از π_2 حذف کنید. اگر حاصل یک برهان درست باشد، رخدادهای علامت‌خورده هرگز فعال نبوده‌اند و همگی مستقیماً از اصول آمده‌اند. برهان حاصل به $\Gamma \Rightarrow \Delta$ پایان می‌یابد و می‌توانیم π را با آن جایگزین کنیم. بدین‌سان یک برش با رتبهٔ بیشینه حذف کرده‌ایم.

در غیر این صورت، حاصل برهان درستی نیست، زیرا فرمولهای $\forall x\, \psi(x)$ را حذف کرده‌ایم که در برخی استنتاج‌های $\forall\mathrm{L}$ فعال بوده‌اند. آن‌ها را به

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

«استنتاج»هایی به شکل زیر تبدیل کرده‌ایم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_t\\ \psi(t),\Pi \;\Rightarrow\; \Lambda\end{array}}{\Pi \;\Rightarrow\; \Lambda}\,\forall\mathrm{L}$$

هر بالاترین «استنتاج» از این نوع را با برهان زیر جایگزین کنید:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'[t/c][\Pi \Rightarrow \Lambda]\\ \Gamma,\Pi \;\Rightarrow\; \Delta,\Lambda,\psi(t)\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_t[\Gamma \Rightarrow \Delta]\\ \psi(t),\Gamma,\Pi \;\Rightarrow\; \Delta,\Lambda\end{array}}{\Gamma,\Pi \;\Rightarrow\; \Delta,\Lambda}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

و به سمت چپ هر دنبالهٔ پایین آن Γ و به سمت راستش Δ را بیفزایید. این کار را تکرار کنید تا همهٔ «استنتاج»های $\forall\mathrm{L}$ که یک $\psi(t)$ علامت‌خورده در مقدمه دارند با استنتاج $\mathrm{Cut_{CS}}$ بر یک $\psi(t)$ جایگزین شوند. دنبالهٔ پایانی برهان حاصل، که اکنون واقعاً یک برهان درست است، به شکل $\Gamma,\ldots,\Gamma \Rightarrow \Delta,\ldots,\Delta$ است. پذیرفتنی‌بودن انقباض را اعمال کنید تا برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ به دست آید و π را با آن جایگزین کنید. یک برش بر $\forall x\,\psi(x)$ را با شاید چندین برش بر $\psi(t)$ جایگزین کرده‌ایم، اما همهٔ آن‌ها رتبهٔ کمتری دارند. برش‌های موجود در π_1 یا π_2 باقی می‌مانند و آن‌ها نیز همگی رتبهٔ کمتری دارند. $\square$

حالت $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ را در اثبات لم 1.21 بررسی کنید. یعنی نشان دهید اگر برهان πای وجود داشته باشد که چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta,\psi\wedge\chi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi\wedge\chi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

و π_1 و π_2 فقط برش‌هایی با رتبهٔ $< \mathrm{dp}(\psi \wedge \chi)$ داشته باشند، آنگاه برهان π'ای برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ وجود دارد که فقط برش‌هایی با رتبهٔ $< \mathrm{dp}(\psi \wedge \chi)$ دارد.

لم 1.21 ثابت می‌کند که می‌توان یک استنتاج $\mathrm{Cut_{CS}}$ با بالاترین رتبه در برهان را با استنتاج‌های $\mathrm{Cut_{CS}}$ با رتبهٔ کمتر جایگزین کرد. باز می‌توانیم از این لم استفاده کنیم تا هر تعداد استنتاج $\mathrm{Cut_{CS}}$ را از برهان حذف کنیم: آن را پی‌درپی بر بالاترین زیر-برهانهایی اعمال می‌کنیم که به $\mathrm{Cut_{CS}}$ بیشینه پایان می‌یابند.

قضیه 1.22. *هر برهان π در $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut_{CS}}$ را می‌توان به برهانی در $\mathbf{G3c}$ تبدیل کرد.*

اثبات. نخست ثابت می‌کنیم همهٔ برش‌های با رتبهٔ بیشینه در π را می‌توان حذف کرد. بگذارید d رتبهٔ بیشینهٔ برش‌های موجود در π و n شمار برش‌های رتبهٔ d باشد. با استقرا بر n پیش می‌رویم. اگر $n = 0$ چیزی برای اثبات نیست. اگر $n > 0$، یک بالاترین برش با رتبهٔ d را برگزینید و بگذارید π_1 زیر-برهان منتهی به آن باشد. بنا بر لم 1.21، برهان π'_1ای برای همان دنبالهٔ پایانی وجود دارد که همهٔ برش‌هایش رتبهٔ $< d$ دارند. π_1 را در π با π'_1 جایگزین کنید. برهان حاصل $n - 1$ برش با رتبهٔ d دارد و فرض استقرا اعمال می‌شود.

اکنون نتیجه با استقرا بر d به دست می‌آید. اگر $d = 0$، همهٔ برش‌ها اتمی‌اند و بنا بر نتیجهٔ پیشین می‌توان همه را حذف کرد. اگر $d > 0$، نتیجهٔ پیشین برهانی می‌دهد که در آن همهٔ برش‌های رتبهٔ d با برش‌هایی با رتبهٔ $< d$ جایگزین شده‌اند. چون d رتبهٔ بیشینهٔ برش‌های π بود، اکنون برهانی داریم که رتبهٔ بیشینهٔ برش‌های آن $< d$ است و فرض استقرا اعمال می‌شود. $\square$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

1.10 حذف بالاترین برش‌ها

تعریف 1.23. برهان π را در نظر بگیرید که به قاعدهٔ $\mathrm{Cut_{CS}}$ پایان می‌یابد،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

و هیچ استنتاج $\mathrm{Cut_{CS}}$ دیگری ندارد. ارتفاع برش π برابر $\mathrm{ch}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1) + \mathrm{ht}(\pi_2)$ است. رتبهٔ برش π برابر $\mathrm{cr}(\pi) = \mathrm{dp}(\varphi)$ است.

لم 1.24. *قاعدهٔ $\mathrm{Cut_{CS}}$ در* **G3c** *پذیرفتنی است. به بیان دیگر، اگر π برهانی باشد که به تنها یک $\mathrm{Cut_{CS}}$ پایان می‌یابد و در جای دیگر فقط از قواعد* **G3c** *استفاده می‌کند، آنگاه برهان π'ای برای همان دنبالهٔ پایانی در* **G3c** *وجود دارد.*

اثبات. اثبات با استقرای دوگانه بر ارتفاع و رتبهٔ برش است. برهان π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

پایهٔ استقرا: $\mathrm{ch}(\pi) = 0$ و $\mathrm{cr}(\pi) = 0$. چون $\mathrm{ch}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1) + \mathrm{ht}(\pi_2) = 0$، هر دو دنبالهٔ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ و $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ اصل‌اند.
دو حالت داریم: (الف) φ در یکی از آن‌ها اصلی نیست؛ یا (ب) φ در هر دو اصلی است. در پایین نشان می‌دهیم در هر دو حالت $\Gamma \Rightarrow \Delta$ باید یک اصل باشد و نیازی به فرض استقرا نیست.

اکنون حالت‌های ممکن را برحسب اینکه π_1 و π_2 اصل‌اند یا به استنتاجی پایان می‌یابند، و اینکه φ در آن استنتاج اصلی است یا نه، جدا می‌کنیم. حالت‌های A و B پایهٔ استقرا را پوشش می‌دهند. در گام استقرا فرض می‌کنیم $\mathrm{ch}(\pi) > 0$ یا $\mathrm{cr}(\pi) > 0$، یا هر دو. می‌توانیم از فرض استقرا استفاده کنیم: آخرین $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ را می‌توان از هر برهانی حذف کرد که به تنها یک $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ پایان می‌یابد و یا رتبهٔ برش آن $\mathrm{cr}(\pi) =$ و ارتفاع برش آن $\mathrm{ch}(\pi) <$ است، یا رتبهٔ برش آن $\mathrm{cr}(\pi) <$ است. حالت $\mathrm{ch}(\pi) = 0$، که هر دو مقدمه اصل‌اند، در A و B؛ و حالت‌های $\mathrm{ch}(\pi) > 0$ در C–D پوشش داده می‌شوند.

حالت A: فرمولی ψ هم در Γ و هم در Δ ظاهر می‌شود. آنگاه $\Gamma \Rightarrow \Delta$، اگر ψ اتمی باشد، یک اصل است؛ و در غیر این صورت بنا بر گزاره 6.19 در **G3c** بدون $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ یک برهان π' دارد. این حالت (الف) پایهٔ استقرا را پوشش می‌دهد: اگر φ در $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ یا در $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ اصلی نباشد و این دنباله‌ها اصل باشند، یک ψ اتمی دیگر باید هم در Γ و هم در Δ ظاهر شود. همچنین گام استقرا را در حالتی پوشش می‌دهد که یکی از مقدمات اصلی است که در آن φ اصلی نیست، حتی اگر مقدمهٔ دیگر نتیجهٔ قاعده‌ای باشد.

حالت B: هر دو مقدمه اصل‌اند و φ اصلی و بنابراین اتمی است. مقدمهٔ چپ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ را در نظر بگیرید. چون φ اصلی است، باید در Γ ظاهر شود؛ وگرنه این دنباله اصل نبود. به همین ترتیب، φ باید در Δ ظاهر شود؛ وگرنه $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ اصل نبود. پس φ اتمی و عضو هر دو Γ و Δ است؛ یعنی $\Gamma \Rightarrow \Delta$ یک اصل است. این حالت (ب) پایهٔ استقرا را پوشش می‌دهد.

حالت‌های جایگزین A و B

حالت A: یکی از مقدمات برش اصلی به شکل $\chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \chi$ است که χ اتمی است. اگر χ فرمول برش φ نباشد، باید هم در Γ و هم در Δ ظاهر شود. آنگاه $\Gamma \Rightarrow \Delta$ یک اصل است و می‌توان آن را π' گرفت. اگر $\chi \equiv \varphi$ فرمول برش باشد، یا، وقتی مقدمهٔ چپ اصل است، $\varphi \in \Gamma$ و $\Gamma = \Gamma', \varphi$؛ یا، وقتی مقدمهٔ راست اصل است، $\varphi \in \Delta$ و $\Delta = \Delta', \varphi$. در حالت نخست π_2 برهانی برای $\varphi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ است و بنا بر پذیرفتنی‌بودن CL

(گزاره 6.16)، برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ وجود دارد. در حالت دوم π_1 برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi, \varphi$ است و با پذیرفتنی‌بودن CR، برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ به دست می‌آوریم.

حالت B: یکی از مقدمات اصلی به شکل $\bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ است. اگر مقدمهٔ چپ چنین اصلی باشد، $\bot \in \Gamma$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta$ نیز اصل است. اگر مقدمهٔ راست چنین باشد، یا $\bot \in \Gamma$ است، که باز نتیجه اصل است، یا $\varphi \equiv \bot$. در حالت دوم، π_1 برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot$ است. با حذف یک نسخهٔ $\bot$ از تالی هر دنباله در π_1، آن را به برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ تبدیل می‌کنیم. (تمرین: این را با استقرا بر $\mathrm{ht}(\pi_1)$ بررسی کنید.)

اکنون فرض کنید هیچ‌یک از حالت‌های A و B برقرار نیست. در حالت‌های باقی‌مانده $\mathrm{ch}(\pi) > 0$؛ یعنی دست‌کم یکی از مقدمات نتیجهٔ یک استنتاج است.

حالت‌های C و D: جابه‌جایی برش‌ها. امکان‌های C و D همگی الگویی مشترک دارند. با برهانی آغاز می‌کنیم که به $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ پایان می‌یابد و یکی از مقدماتش با قاعده‌ای R حاصل شده است که فرمول برش φ در آن اصلی نیست و فرمول دیگری θ اصلی است. در این برهان، $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ پس از R می‌آید و شکل شماتیک زیر را دارد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \theta, \varphi\end{array} \qquad \left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Lambda\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \theta}\,R\right\}\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \theta}\,\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$$

این نمودار فقط حالتی را نشان می‌دهد که R قاعده‌ای راست با یک مقدمه است، φ فرمول اصلی R نیست، و فرمول اصلی θ در تالی مقدمهٔ راست $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ قرار دارد. اگر θ در مقدم باشد، یعنی R قاعدهٔ چپ باشد، یا در مقدمهٔ چپ $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ باشد، نمودار متفاوت خواهد بود. فرمولهای Π و Λ نمایندهٔ فرمولهای فعال R هستند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

ترتیب را وارونه می‌کنیم و برهانی را در نظر می‌گیریم که در آن R پس از $\mathrm{Cut_{CS}}$ می‌آید:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta',\theta,\Lambda,\varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3'\\ \varphi,\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta',\theta,\Lambda\end{array}}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta',\theta,\Lambda}\,\mathrm{Cut_{CS}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta',\theta,\theta}\,R$$

با تضعیف حافظ ارتفاع، π_1' و π_3' را به‌ترتیب از π_1 و π_3 به دست می‌آوریم.

چون ترتیب $\mathrm{Cut_{CS}}$ و R را عوض می‌کنیم، این کار را «جابه‌جاکردن برش به بالا از میان R» می‌نامند. این کار ارتفاع برهان منتهی به مقدمهٔ راست $\mathrm{Cut_{CS}}$ و بنابراین ارتفاع برش را کاهش می‌دهد. یعنی می‌توان فرض کرد زیر-برهانهای منتهی به $\mathrm{Cut_{CS}}$ تازه ارتفاعی بیش از π_1 و π_3 ندارند؛ پس ارتفاع برش کاهش یافته است، زیرا یک استنتاج از سمت راست حذف کرده‌ایم. اکنون فرض استقرا اعمال می‌شود و می‌گوید استنتاج $\mathrm{Cut_{CS}}$ را می‌توان حذف کرد. در پایان نسخهٔ اضافی θ را با پذیرفتنی‌بودن CR حذف می‌کنیم.

حالت C: دست‌کم یکی از π_1 و π_2 به قاعدهٔ یک‌مقدمه‌ای R پایان می‌یابد که φ در آن اصلی نیست. در مجموع ۱۸ حالت داریم، برحسب اینکه φ در مقدمهٔ چپ یا راست $\mathrm{Cut_{CS}}$ اصلی نیست و اینکه R کدام‌یک از نه قاعدهٔ یک‌مقدمه‌ای است: $\neg$L، $\neg$R، $\vee$R، $\wedge$L، $\rightarrow$R و چهار قاعدهٔ سور. فقط دو نمونه را بررسی می‌کنیم: φ در آخرین استنتاج π_2 اصلی نیست و آن استنتاج یا $\rightarrow$R است یا $\exists$L. دیگر حالت‌ها مشابه‌اند و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

فرض کنید π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \varphi\end{array} \qquad \left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi}\,{\to}\mathrm{R}\right\}\pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

که در آن $\Delta = \Delta', \psi \to \chi$. تضعیف حافظ ارتفاع (گزاره 6.11) را بر π_1 اعمال می‌کنیم تا برهان π_1' برای $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi, \varphi$ به دست آید؛ یعنی با ψ در چپ و χ در راست تضعیف می‌کنیم. به همین ترتیب، گزاره 6.11 را بر π_3 اعمال می‌کنیم تا با افزودن $\psi \to \chi$ در راست، برهان π_3' برای $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi$ حاصل شود. فرض استقرا بر برهان زیر اعمال می‌شود:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3'\\ \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi\end{array}}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

فرمول برش φ است. این برهان همان رتبهٔ برش π و ارتفاع برش کمتری دارد. پس برهان π_4 بدون $\mathrm{Cut_{CS}}$ در **G3c** برای $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi$ به دست می‌آید. ${\to}\mathrm{R}$ را اعمال کنید تا برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \psi \to \chi$ حاصل شود:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_4\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi, \psi \to \chi}\,{\to}\mathrm{R}$$

برای به‌دست‌آوردن برهان π' برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$، یعنی $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \to \chi$، گزاره 6.16، یعنی پذیرفتنی‌بودن انقباض، را اعمال کنید.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اکنون فرض کنید π چنین پایان می‌یابد:

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \exists x\,\psi(x),\Gamma' \Rightarrow \Delta,\varphi\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi,\psi(c),\Gamma' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi,\exists x\,\psi(x),\Gamma' \Rightarrow \Delta}\,\exists\mathrm{L}}{\exists x\,\psi(x),\Gamma' \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

باز فرض استقرا را بر برهان زیر اعمال می‌کنیم:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1[\psi(c) \Rightarrow\,]\\ \exists x\,\psi(x),\psi(c),\Gamma' \Rightarrow \Delta,\varphi\end{array}\qquad \begin{array}{c}\pi_3[\exists x\,\psi(x) \Rightarrow\,]\,\vdots\\ \varphi,\exists x\,\psi(x),\psi(c),\Gamma' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\exists x\,\psi(x),\psi(c),\Gamma' \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}}{\exists x\,\psi(x),\exists x\,\psi(x),\Gamma' \Rightarrow \Delta}\,\exists\mathrm{L}$$

شرط متغیر ویژه برقرار است، زیرا شرط آن برای $\exists\mathrm{L}$ در π_2 تضمین می‌کند c در $\exists x\,\psi(x)$، Γ' یا Δ ظاهر نشود. در پایان گزاره 6.16 را اعمال کنید.

حالت D: دست‌کم یکی از π_1 و π_2 به قاعدهٔ دومقدمه‌ای R پایان می‌یابد که φ در آن اصلی نیست. ۶ حالت وجود دارد. حالتی را بررسی می‌کنیم که φ در آخرین استنتاج π_2 اصلی نیست و آن استنتاج $\wedge\mathrm{R}$ است؛ دیگر حالت‌ها مشابه‌اند.

فرض کنید π چنین پایان می‌یابد:

$$\left.\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\wedge\chi,\varphi\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \varphi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\end{array}\quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_4\\ \varphi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\chi\end{array}}{\varphi,\Gamma \Rightarrow \Delta',\psi\wedge\chi}\,\wedge\mathrm{R}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

فرض استقرا بر دو برهان زیر اعمال می‌شود:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \psi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3'\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \psi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

و

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \chi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_4'\\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \chi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

در اینجا **G3c**-برهانهای π_1' و π_1'' با تضعیف حافظ ارتفاع (گزاره 6.11) از π_1 به دست می‌آیند؛ یک بار با ψ و یک بار با χ در راست. برهانهای π_3' و π_4' نیز به‌ترتیب از π_3 و π_4 با تضعیف حافظ ارتفاع، یعنی افزودن $\psi\wedge\chi$ در راست، حاصل می‌شوند.

فرض استقرا **G3c**-برهانهای π_5 و π_6 را برای $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \psi$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \chi$ به دست می‌دهد. آن‌ها را با قاعدهٔ $\wedge$R ترکیب می‌کنیم تا برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \psi\wedge\chi$ حاصل شود:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_5\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_6\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi, \psi\wedge\chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

برای به‌دست‌آوردن برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$، یعنی $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\wedge\chi$، گزاره 6.16 را اعمال کنید.

حالت E: کاهش برش‌ها. حالت پایانی مربوط به وضعی است که هر دو π_1 و π_2 به استنتاج‌هایی پایان می‌یابند که φ در آن‌ها اصلی است. شش حالت، یکی برای هر عملگر اصلی ممکن φ، وجود دارد.

در هر حالت یک $\mathrm{Cut_{CS}}$ با فرمول برش φ را به یک یا چند برش بر زیر-فرمولهای φ تبدیل می‌کنیم؛ یعنی بر فرمولهای فعال استنتاج‌هایی که φ فرمول اصلی آن‌هاست. از این رو این حالت‌ها را اغلب «کاهش» یا «تبدیل» استنتاج برش می‌نامند.

1. اگر $\varphi \equiv \neg\psi$، آنگاه π چنین پایان می‌یابد:

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\neg\psi}\neg\mathrm{R} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\end{array}}{\neg\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\neg\mathrm{L}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

بنا بر فرض استقرا، $\mathrm{Cut_{CS}}$ را می‌توان از برهان زیر حذف کرد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{Cut_{CS}}$$

2. اگر $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$، آنگاه π چنین پایان می‌یابد:

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\psi,\chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\vee\chi}\vee\mathrm{R} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi,\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi\vee\chi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\vee\mathrm{L}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

برهان زیر را که به $\mathrm{Cut_{CS}}$پایان می‌یابد در نظر بگیرید:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

در اینجا π_2''' با تضعیف حافظ ارتفاع از π_2'' به دست می‌آید. رتبهٔ برش آن $\mathrm{cr}(\pi) >$ است، زیرا $\mathrm{dp}(\chi) < \mathrm{dp}(\psi \vee \chi)$؛ پس فرض استقرا برهان π_1''ای در **G3c** برای $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ به دست می‌دهد. برهان زیر که به $\mathrm{Cut_{CS}}$پایان می‌یابد،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

رتبهٔ برش $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\psi \vee \chi) =$ دارد؛ پس فرض استقرا دوباره اعمال می‌شود و برهان π' برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ به دست می‌دهد.

3. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$. تمرین.

4. اگر $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$، آنگاه π چنین پایان می‌یابد:

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \to \chi}\to\mathrm{R} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi \to \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\to\mathrm{L}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

برهان زیر که به $\mathrm{Cut_{CS}}$پایان می‌یابد،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi,\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

رتبهٔ برش کمتری از π دارد. فرض استقرا برهان π_1'' را برای $\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta$ به دست می‌دهد. اکنون برهان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

رتبهٔ برش این برهان نیز از رتبهٔ برش π کمتر است؛ پس فرض استقرا یک **G3c**-برهان π' برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ می‌دهد.

5. اگر $\varphi \equiv \forall x\,\psi(x)$، آنگاه π چنین پایان می‌یابد:

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\psi(c)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\forall x\,\psi(x)}\,\forall\mathrm{R} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi(t),\forall x\,\psi(x),\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\forall x\,\psi(x),\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\forall\mathrm{L}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}\right\}\pi_2$$

بنا بر فرض استقرا، $\mathrm{Cut_{CS}}$ را می‌توان از برهان زیر حذف کرد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \psi(t),\Gamma \Rightarrow \Delta,\forall x\,\psi(x)\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi(t),\forall x\,\psi(x),\Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi(t),\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

در اینجا π_1'' با تضعیف حافظ ارتفاع از π_1، و نه π_1'، به دست می‌آید. این برهان همان رتبهٔ برش اما ارتفاع برش کمتری دارد. بدین‌سان برهان π_2'' برای $\psi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta$ حاصل می‌شود.

دنبالهٔ پایانی برهان π_1' برابر $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)$ است، که در آن c متغیر ویژهٔ یک استنتاج $\forall$R است. پس c در $\psi(x)$، Γ یا Δ ظاهر نمی‌شود. فرض می‌کنیم برهان π منظم است؛ بنابراین c فقط متغیر ویژهٔ همین استنتاج $\forall$R است و فقط بالای آن، یعنی فقط در π_1'، ظاهر می‌شود و متغیر ویژهٔ استنتاجی در π_1' نیست. چون c در π_2 ظاهر نمی‌شود، نمی‌تواند در t باشد. بنا بر لم 6.21، برهان $\pi_1'[t/c]$ یک برهان برای $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)$ است. اکنون فرض استقرا را بر برهان زیر اعمال می‌کنیم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'[t/c]\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \psi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

(فرض استقرا اعمال می‌شود، زیرا فرمول برش $\psi(t)$ است و این برهان رتبهٔ برش کمتری از π دارد.)

6. حالت $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم. □

زیرحالت D در اثبات لم 1.24 را بررسی کنید که φ در آخرین استنتاج π_1 اصلی نیست و آن استنتاج به $\rightarrow$L پایان می‌یابد. (بخشی از تمرین این است که آنچه باید اثبات شود، یعنی شکل π در این حالت، را روشن بیان کنید.)

زیرحالت D در اثبات لم 1.24 را بررسی کنید که φ در آخرین استنتاج π_1 اصلی نیست و آن استنتاج به $\forall$L پایان می‌یابد.

زیرحالت E در اثبات لم 1.24 را بررسی کنید که φ در آخرین استنتاج‌های هر دو π_1 و π_2 اصلی است و $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$.

زیرحالت E در اثبات لم 1.24 را بررسی کنید که φ در آخرین استنتاج‌های هر دو π_1 و π_2 اصلی است و $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$.

توجه کنید در حالت E، ارتفاع برش برهان منتهی به $\mathrm{Cut_{CS}}$ که فرض استقرا را بر آن اعمال می‌کنیم ممکن است از ارتفاع برش برهان اصلی بیشتر باشد. برای نمونه، در حالت $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$، π را به برهانی با دو استنتاج $\mathrm{Cut_{CS}}$ تبدیل کردیم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}\,\pi_1''}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

$\mathrm{Cut_{CS}}$ بالایی میان π_1' و π_2'' هم رتبهٔ برش و هم ارتفاع برش کمتری از π دارد. اما برهان π_1''، که حاصل اعمال فرض استقراست، دیگر ارتفاع برش کمتری از π ندارد. با این همه، چون فرمول برش $\mathrm{Cut_{CS}}$ پایینی ψ است، رتبهٔ برش آن از رتبهٔ برش π کمتر است.

لم 1.24 ثابت می‌کند که می‌توان یک بالاترین استنتاج $\mathrm{Cut_{CS}}$ را از برهان حذف کرد. می‌توان نشان داد که هر تعداد استنتاج $\mathrm{Cut_{CS}}$ را از برهان حذف کرد، با اعمال پی‌درپی آن بر بالاترین زیر-برهانهای منتهی به $\mathrm{Cut_{CS}}$.

قضیه 1.25. *هر برهان π در $\mathbf{G3c} + \mathrm{Cut_{CS}}$ را می‌توان به برهانی در* **G3c** *تبدیل کرد.*

اثبات. با استقرا بر شمار n استنتاج‌های $\mathrm{Cut_{CS}}$ در π. اگر $n = 0$، کاری لازم نیست: π از پیش برهانی در **G3c** است. در غیر این صورت، زیر-برهان π' را در نظر بگیرید که به یک بالاترین استنتاج $\mathrm{Cut_{CS}}$ پایان می‌یابد. تنها قاعدهٔ $\mathrm{Cut_{CS}}$ آن، آخرین استنتاج است. لم 1.24 را اعمال کنید تا آن را به برهان بدون-$\mathrm{Cut_{CS}}$ π'' تبدیل کند و زیر-برهان π' را با π'' جایگزین کنید. حاصل برهانی با $n - 1$ استنتاج $\mathrm{Cut_{CS}}$ است و فرض استقرا اعمال می‌شود. □

فصل 2

حذف برش

2.1 لم مائهارا و قضیهٔ درونیابی کریگ

قضیهٔ درونیابی، از ویلیام کریگ، می‌گوید اگر $\varphi \vDash \psi$، آنگاه جمله χای، موسوم به درونیاب، وجود دارد که $\varphi \vDash \chi$ و $\chi \vDash \psi$. نکتهٔ مهم این است که می‌توان χ را چنان برگزید که همهٔ ثابتها و محمولهای ظاهرشده در آن هم در φ و هم در ψ ظاهر شوند. (فرض می‌کنیم هیچ تابعی در کار نیست.) بدون این محدودیت، خود φ و ψ به‌سادگی می‌توانستند درونیاب باشند.

قضیهٔ درونیابی برای منطق کلاسیک مرتبهٔ اول برقرار است و آن را «آخرین ویژگی مهم منطق مرتبهٔ اول» که کشف شد نامیده‌اند. این قضیه در نظریهٔ مدل و استدلال خودکار کاربردهای مهمی دارد. انگیزه و کاربرد اصلی آن در فلسفهٔ علم بود، زیرا می‌توان با آن مفاهیم اولیه‌ای را بررسی کرد که یک نظریه بر پایهٔ آن‌ها اصل‌موضوعی می‌شود یا نمی‌شود. این قضیه همچنین قضیهٔ تعریف‌پذیری بث را نتیجه می‌دهد: اگر نظریه‌ای بتواند مفهومی را به‌طور ضمنی تعریف کند، می‌تواند آن را به‌طور صریح نیز تعریف کند.

مانند بسیاری از نتایج منطق ریاضی، قضیهٔ درونیابی را هم با روش‌های نظریهٔ مدل و هم با روش‌های نظریهٔ اثبات می‌توان اثبات کرد. مزیت روش‌های نظریه‌اثباتی این است که نه‌فقط وجود درونیاب را نشان می‌دهند، بلکه الگوریتمی برای محاسبهٔ آن از برهانی برای $\varphi \vDash \psi$، مثلاً برهانی در **G3c** برای $\varphi \Rightarrow \psi$، فراهم می‌کنند.

بگذارید $\mathcal{L}(\varphi)$ مجموعهٔ ثابتها و محمولهای درون φ باشد و $\mathcal{L}(\Gamma) = \bigcup\{\mathcal{L}(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$. در سراسر این بخش فرض می‌کنیم با فرمولهای بدون تابع سروکار داریم.

قضیه 2.1 (قضیهٔ درونیابی کریگ). *بگذارید زبان φ برابر $\mathcal{L}(\varphi)$ و زبان ψ برابر $\mathcal{L}(\psi)$ باشد. اگر $\mathbf{G3c} \vdash \varphi \Rightarrow \psi$، آنگاه فرمول χای در زبان $\mathcal{L}(\chi) \subseteq \mathcal{L}(\varphi) \cap \mathcal{L}(\psi)$ وجود دارد که $\mathbf{G3c} \vdash \varphi \Rightarrow \chi$ و $\mathbf{G3c} \vdash \chi \Rightarrow \psi$.*

برای بهره‌گرفتن از ساختار برهانها در **G3c**، تعمیمی از قضیهٔ درونیابی را اثبات می‌کنیم. مقدم و تالی دنباله‌ها را هرکدام به دو بخش تقسیم‌شده تصور کنید. می‌نویسیم $\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \,;\, \Delta_2$ تا نشان دهیم Γ_1 و Δ_1 به بخش نخست و Γ_2 و Δ_2 به بخش دوم تعلق دارند. قضیهٔ درونیابی بی‌درنگ از لم زیر نتیجه می‌شود.

لم 2.2 (لم مائهارا). *اگر $\mathbf{G3c} \vdash \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \,;\, \Delta_2$، آنگاه فرمول χای در زبان*

$$\mathcal{L}(\chi) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$$

وجود دارد که $\mathbf{G3c} \vdash \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi$ و $\mathbf{G3c} \vdash \chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$.

اثبات. فرض کنید $\pi \vdash \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \,;\, \Delta_2$. ادعا را با استقرا بر $n = \mathrm{ht}(\pi)$ اثبات می‌کنیم.

اگر $n = 0$، آنگاه $\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1 \,;\, \Delta_2$ یک اصل است و فرمول اتمی φای هم در Γ_1, Γ_2 و هم در Δ_1, Δ_2 ظاهر می‌شود. برحسب اینکه φ در سمت چپ و راست به بخش نخست یا دوم تعلق دارد چهار حالت هست:

1. $\varphi \in \Gamma_1$ و $\varphi \in \Delta_1$. می‌خواهیم χای بیابیم که هر دو $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi$ و $\chi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ اثبات‌پذیر باشند. دنبالهٔ نخست، صرف‌نظر از انتخاب χ، از پیش اصل است. تنها انتخابی که تضمین می‌کند دنبالهٔ دوم اثبات‌پذیر باشد، $\chi \equiv \bot$ است.

2. $\varphi \in \Gamma_1$ و $\varphi \in \Delta_2$. هر دو دنبالهٔ $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi$ و $\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ اصل‌اند؛ پس $\chi \equiv \varphi$ را برمی‌گزینیم.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

3. $\varphi \in \Gamma_2$ و $\varphi \in \Delta_1$. دنباله‌های $\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ و $\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \varphi$ اصل‌اند، اما φ در سمت نادرست قرار دارد و درونیاب نیست. با استفاده از $\neg\mathrm{R}$ و $\neg\mathrm{L}$ می‌توانیم $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \neg\varphi$ و $\neg\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ را اثبات کنیم.

4. $\varphi \in \Gamma_2$ و $\varphi \in \Delta_2$. تمرین.

حالت‌هایی که دنباله به سبب $\bot \in \Gamma_1$ یا $\bot \in \Gamma_2$ اصل است به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

اگر $n > 0$، π به یک استنتاج منطقی پایان می‌یابد. باید حالت‌ها را برحسب قاعدهٔ به‌کاررفته و بخشی که فرمول اصلی به آن تعلق دارد جدا کنیم. در هر حالت از فرض استقرا استفاده می‌کنیم: لم برای هر برهان π_1 با $\mathrm{ht}(\pi_1) < n$ و برای هر تقسیم دنبالهٔ پایانی آن به دو بخش برقرار است. چند حالت را بررسی کنیم.

1. π به $\neg\mathrm{R}$ با فرمول اصلی $\neg\varphi$ پایان می‌یابد. برحسب اینکه $\neg\varphi$ به بخش نخست یا دوم تعلق دارد، π به یکی از دو شکل زیر پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \,;\, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \neg\varphi \,;\, \Delta_2}\,\neg\mathrm{R}$$

یا

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \,;\, \varphi, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \,;\, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \,;\, \Delta_2, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}$$

اگر فرمول اصلی $\neg\varphi$ به بخش نخست تعلق دارد، فرمول فعال φ را در مقدمه نیز به بخش نخست داده‌ایم. این انتخاب در اختیار ماست. فرض استقرا با قراردادن فرمول فعال در بخش دیگر نیز اعمال می‌شد، اما آنگاه درونیابی نمی‌یافتیم.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

نخست وضعیتی را در نظر بگیرید که $\neg\varphi$ به بخش نخست تعلق دارد. بنا بر فرض استقرا، دنبالهٔ پایانی π_1 درونیابی، یعنی فرمول χ_1، دارد که:

$$!A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad \text{و} \qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

اثبات‌پذیرند. به فرمول χای نیاز داریم که هر دو دنبالهٔ زیر اثبات‌پذیر باشند:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \neg\varphi, \chi \qquad \text{و} \qquad !C, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

کافی است $\chi \equiv \chi_1$ بگیریم: فرض استقرا گفته است دنبالهٔ راست اثبات‌پذیر است و دنبالهٔ چپ با $\neg\mathrm{R}$ از دنبالهٔ فرض استقرا به دست می‌آید. همچنین $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\varphi, \Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$. چون $\mathcal{L}(\neg\varphi) = \mathcal{L}(\varphi)$ و $\mathcal{L}(\chi) = \mathcal{L}(\chi_1)$، داریم

$$\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \neg\varphi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2).$$

در وضعیت دوم $\neg\varphi$ به بخش دوم تعلق دارد. فرمول فعال در مقدمه را نیز به بخش دوم می‌دهیم و فرض استقرا را اعمال می‌کنیم:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad \text{و} \qquad !C_1, \varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

اثبات‌پذیرند. با اعمال $\neg\mathrm{R}$ بر دومی، برهانهایی برای این دو دنباله به دست می‌آوریم:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad \text{و} \qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \neg\varphi$$

این‌ها دقیقاً همان دنباله‌هایی هستند که باید اثبات‌پذیر باشند؛ پس باز $\chi \equiv \chi_1$. مانند پیش، $\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2, \neg\varphi)$.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

2. π به $\to$R با فرمول اصلی $\varphi \to \psi$ پایان می‌یابد. باز دو حالت داریم و برهان π به یکی از دو شکل زیر پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi, \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \psi \,;\, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \varphi \to \psi \,;\, \Delta_2}\to\mathrm{R}$$

یا

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \,;\, \varphi, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \,;\, \Delta_2, \psi\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1 \,;\, \Delta_2, \varphi \to \psi}\to\mathrm{R}$$

باز فرمولهای فعال را در مقدمه به همان بخشی داده‌ایم که فرمول اصلی در نتیجه دارد. در وضعیت نخست، فرض استقرا برهانهایی برای دنباله‌های زیر می‌دهد:

$$!A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \psi, \chi_1 \qquad \text{و} \qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

دنبالهٔ چپ مقدمهٔ مناسبی برای $\to$R است؛ پس دنباله‌های اثبات‌پذیر زیر را داریم:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi \to \psi, \chi_1 \qquad \text{و} \qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

پس χ_1 برای دنبالهٔ پایانی π نیز درونیاب است و دوباره $\chi \equiv \chi_1$. وضعیت دیگر نیز به همین روش حل می‌شود.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

3. π به $\to$L با فرمول اصلی $\varphi \to \psi$ پایان می‌یابد. اگر $\varphi \to \psi$ به بخش نخست تعلق داشته باشد، برهان π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\,;\,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \varphi\,;\,\Delta_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi, \Gamma_1\,;\,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1\,;\,\Delta_2\end{array}}{\varphi \to \psi, \Gamma_1\,;\,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_1\,;\,\Delta_2}\to\mathrm{L}$$

فرض استقرا چهار دنبالهٔ اثبات‌پذیر می‌دهد؛ دو دنباله برای درونیاب χ_1 مقدمهٔ چپ و دو دنباله برای درونیاب χ_2 مقدمهٔ دوم:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi, \chi_1 \qquad (۱) \qquad\qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \qquad (۲)$$

$$!B, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_2 \qquad (۳) \qquad\qquad !C_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \qquad (۴)$$

دنباله‌های (۱) و (۳)، پس از تضعیف و افزودن χ_2 به راست (۱) و χ_1 به راست (۳)، مقدمات $\to$L می‌شوند:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \varphi, \chi_1, \chi_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \chi_1, \chi_2\end{array}}{\varphi \to \psi, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \chi_1, \chi_2}\to\mathrm{L}$$

با اعمال $\vee$R دنبالهٔ

$$\varphi \to \psi, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \Delta_1, \chi_1 \vee \chi_2$$

را به دست می‌آوریم. پس $\chi_1 \vee \chi_2$ نامزد درونیاب است. دنبالهٔ دیگر لازم را نیز از (۲) و (۴) اثبات می‌کنیم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \chi_2, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2\end{array}}{\chi_1 \vee \chi_2, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta_2}\vee\mathrm{L}$$

فقط باید زبان مناسب را بررسی کنیم. فرض استقرا می‌دهد:

$$\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$$

و

$$\mathcal{L}(\chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\psi, \Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$$

از آنجا که

$$\mathcal{L}(\varphi) \subseteq \mathcal{L}(\varphi \to \psi)$$

و

$$\mathcal{L}(\psi) \subseteq \mathcal{L}(\varphi \to \psi)$$

هر دو رابطهٔ زیر برقرارند:

$$\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$$

و

$$\mathcal{L}(\chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$$

و در نتیجه، چون $\mathcal{L}(\chi_1 \vee \chi_2) =$

$$\mathcal{L}(\chi_1) \cup \mathcal{L}(\chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi \to \psi) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2).$$

این همان رابطهٔ مطلوب است.

اگر $\varphi \to \psi$ به بخش دوم تعلق داشته باشد، وضعیت متفاوت اما روش مشابه است. فرض استقرا باز چهار دنبالهٔ اثبات‌پذیر می‌دهد:

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \qquad (۱) \qquad\qquad !C_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \varphi \qquad (۲)$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_2 \qquad (۳) \qquad\qquad !C_2, \psi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \qquad (۴)$$

اکنون دنباله‌های (۲) و (۴)، همراه با چند فرمول افزوده‌شده با تضعیف، مقدمات $\to$L می‌شوند:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1, \chi_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi, \chi_1, \chi_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{array}}{\varphi \to \psi, \chi_1, \chi_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2} \to\mathrm{L}$$

این بار یک فرمول ساخته‌شده از χ_1 و χ_2 را در مقدم لازم داریم. با $\wedge$L این کار انجام می‌شود و باید $\chi \equiv (\chi_1 \wedge \chi_2)$ بگیریم. خوشبختانه از دنباله‌های باقی‌ماندهٔ (۱) و (۳) نیز دنبالهٔ متناظر بخش دیگر را اثبات می‌کنیم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_2\end{array}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \chi_1 \wedge \chi_2} \wedge\mathrm{R}$$

مانند پیش، $\mathcal{L}(\chi_1 \wedge \chi_2) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2, \varphi \to \psi)$.

4. π به $\forall$R با فرمول اصلی $\forall x\, \varphi(x)$ پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \varphi(c) \,;\, \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \,;\, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \forall x\, \varphi(x) \,;\, \Delta_2} \forall\mathrm{R}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

یا

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1\,;\,\Delta_2,\varphi(c)\end{array}}{\Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1\,;\,\Delta_2,\forall x\,\varphi(x)}\;\forall\mathrm{R}$$

در وضعیت نخست، فرض استقرا برهانهایی برای $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi(c), \chi_1$ و $\chi_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ می‌دهد. با اعمال $\forall\mathrm{R}$ بر نخستین، به $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \forall x\,\varphi(x), \chi_1$ می‌رسیم. شرط متغیر ویژه برقرار است، زیرا در قاعدهٔ $\forall\mathrm{R}$ پایانی π برقرار بود. پس χ_1 درونیاب است، مشروط بر اینکه

$$\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \forall x\,\varphi(x)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2).$$

فرض استقرا رابطهٔ مشابه با $\varphi(c)$ را می‌دهد. تنها نگرانی c است، اما c نمی‌تواند در χ_1 ظاهر شود. اگر ظاهر می‌شد، هم در $\mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \varphi(c))$ و هم در $\mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$ بود؛ در نتیجه در نتیجهٔ استنتاج $\forall\mathrm{R}$ در π ظاهر می‌شد و شرط متغیر ویژه را نقض می‌کرد. وضعیت دیگر مشابه است.

5. π به $\exists\mathrm{R}$ با فرمول اصلی $\exists x\,\varphi(x)$ پایان می‌یابد. باز دو وضعیت داریم. حالتی را بررسی می‌کنیم که فرمول وجودی به بخش نخست تعلق دارد و دیگری را تمرین می‌گذاریم. در وضعیت نخست، π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1,\exists x\,\varphi(x),\varphi(t)\,;\,\Delta_2\end{array}}{\Gamma_1\,;\,\Gamma_2\;\Rightarrow\;\Delta_1,\exists x\,\varphi(x)\,;\,\Delta_2}\;\exists\mathrm{R}$$

فرض استقرا برهانهایی برای $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\,\varphi(x), \varphi(t), \chi_1$ و $\chi_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ می‌دهد. با اعمال $\exists\mathrm{R}$ بر نخستین، به $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\,\varphi(x), \chi_1$ می‌رسیم. پس χ_1 درونیاب است اگر:

$$\mathcal{L}(\chi_1) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\,\varphi(x)) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2).$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

فرض استقرا همین رابطه را با $\varphi(t)$ افزوده به زبان نخست می‌دهد. چون تابع نداریم، ترم t یا متغیر است یا ثابت. متغیر عضو زبان نیست و مشکلی ایجاد نمی‌کند. اگر $t \equiv b$ ثابت باشد نیز، مگر در حالتی که $b \in \mathcal{L}(\chi_1)$ اما b در اشتراک زبان‌های دو بخش نباشد، χ_1 را بی‌تغییر می‌گیریم. فقط در همین حالتِ ثابت نامشترک باید آن را انتزاع کنیم.

با جایگزینی همهٔ رخدادهای b در χ_1 با متغیر y، می‌نویسیم $\chi_1 \equiv \chi_1'[b/y]$، که χ_1' شامل b نیست. افزون بر این، یا $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\, \varphi(x))$ یا $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$. به‌ترتیب می‌گیریم $\chi \equiv \forall y\, \chi_1'(y)$ یا $\chi \equiv \exists y\, \chi_1'(y)$. در حالت نخست:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \varphi(b), \chi_1'(b)\end{array}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \chi_1'(b)}\,\exists\mathrm{R}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \forall y\, \chi_1'(y)}\,\forall\mathrm{R}$$

و

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1'(b), \forall y\, \chi_1'(y), \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{array}}{\forall y\, \chi_1'(y), \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}\,\forall\mathrm{L}$$

برهانهای دنباله‌های بالایی از فرض استقرا می‌آیند؛ در دومی از پذیرفتنی‌بودن تضعیف با $\forall y\, \chi_1'(y)$ در مقدم نیز استفاده می‌کنیم. شرط متغیر ویژهٔ $\forall\mathrm{R}$ در برهان نخست برقرار است، زیرا $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_1, \Delta_1, \exists x\, \varphi(x))$ و χ_1' چنان تعریف شد که شامل b نباشد.

در حالت دوم، از فرض استقرا و پذیرفتنی‌بودن تضعیف با $\exists y\, \chi_1'(y)$ داریم:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \varphi(b), \exists y\, \chi_1'(y), \chi_1'(b)\end{array}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \exists y\, \chi_1'(y), \chi_1'(b)}\,\exists\mathrm{R}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \exists x\, \varphi(x), \exists y\, \chi_1'(y)}\,\exists\mathrm{R}$$

و

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \chi_1'(b), \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2\end{array}}{\exists y\, \chi_1'(y), \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}\,\exists\mathrm{L}$$

شرط متغیر ویژهٔ $\exists\mathrm{L}$ در برهان دوم برقرار است، زیرا $b \notin \mathcal{L}(\Gamma_2, \Delta_2)$ و χ_1' شامل b نیست.

حالت‌های دیگر مشابه‌اند و آن‌ها را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم. □

فرض کنید رابط $\uparrow$ با قواعد زیر داشته باشیم:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\varphi \uparrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\uparrow\mathrm{L} \qquad \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \uparrow \psi}\,\uparrow\mathrm{R}$$

با انجام حالت‌های اثبات لم 2.2 که در آن‌ها π به یکی از این قواعد پایان می‌یابد، نشان دهید لم مائهارا همچنان برقرار است.

اکنون که لم مائهارا ثابت شده است، از آن برای اثبات قضیهٔ درونیابی کریگ استفاده می‌کنیم.

اثبات قضیه 2.1. فرض کنید $\varphi \Rightarrow \psi$ اثبات‌پذیر باشد. لم 2.2 را بر $\varphi \; ; \; \Rightarrow \; ; \; \psi$ اعمال کنید تا درونیاب χ به دست آید. آنگاه $\vdash \varphi \Rightarrow \chi$ و $\vdash \chi \Rightarrow \psi$. □

فرض کنید Γ نظریه‌ای، یعنی مجموعه‌ای از جمله‌ها، در زبان $\mathcal{L}$ باشد که یک محمول nموضعی R دارد. می‌گوییم Γ، R را به‌طور ضمنی تعریف می‌کند اگر و تنها اگر:

$$\Gamma, \Gamma' \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R'(x_1, \ldots, x_n)),$$

که در آن Γ' از جایگزینی همهٔ رخدادهای R در Γ با $R' \notin \mathcal{L}$ حاصل می‌شود. Γ، R را به‌طور صریح تعریف می‌کند اگر و تنها اگر $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ای بدون R وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\Gamma \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

آشکار است اگر Γ، R را صریحاً تعریف کند، آن را ضمنی نیز تعریف می‌کند. عکس آن بدیهی نیست، اما برقرار است:

لم 2.3 (قضیهٔ تعریف‌پذیری بث). *اگر Γ، R را به‌طور ضمنی تعریف کند، آن را به‌طور صریح نیز تعریف می‌کند.*

اثبات. فرض کنید Γ، R را ضمنی تعریف می‌کند. R' و Γ' را مانند بالا بگیرید و $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\Gamma') = (\mathcal{L} \setminus \{R\}) \cup \{R'\}$. بنا بر فرض:

$$\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R'(x_1, \ldots, x_n))$$

بگذارید c_1، ...، c_n ثابتهایی باشند که در Γ ظاهر نمی‌شوند. بنا بر لم وارون‌پذیری:

$$\Gamma, \Gamma', R(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow R'(c_1, \ldots, c_n)$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

لم مائهارا را بر دنبالهٔ زیر اعمال کنید:

$$\Gamma, R(c_1, \ldots, c_n) \; ; \Gamma' \Rightarrow \; ; R'(c_1, \ldots, c_n)$$

تا $\varphi \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ای بیابید که دنباله‌های زیر

$$\begin{aligned} \Gamma, R(c_1, \ldots, c_n) &\Rightarrow \varphi(c_1, \ldots, c_n) \\ !A(c_1, \ldots, c_n), \Gamma' &\Rightarrow R'(c_1, \ldots, c_n) \end{aligned}$$

برهان داشته باشند. لم مائهارا به‌درستی می‌دهد $\mathcal{L}(\varphi(c_1, \ldots, c_n)) \subseteq$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\Gamma, R(c_1, \ldots, c_n)) \cap \mathcal{L}(\Gamma', R'(c_1, \ldots, c_n)) \\ &\qquad = (\mathcal{L}(\Gamma) \setminus \{R\}) \cup \{c_1, \ldots, c_n\}. \end{aligned}$$

پس پس از انتزاع ثابت‌های تازه به متغیرها، $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ شامل نه R و نه R' است. در برهان دنبالهٔ دوم، همه‌جا R' را با R جایگزین کنید تا برهانی برای دنبالهٔ زیر به دست آید:

$$!A(c_1, \ldots, c_n), \Gamma \Rightarrow R(c_1, \ldots, c_n).$$

از دنبالهٔ نخست با $\rightarrow$R، $\Gamma \Rightarrow R(\vec{c}) \rightarrow \varphi(\vec{c})$، و از دنبالهٔ دوم، $\Gamma \Rightarrow \varphi(\vec{c}) \rightarrow R(\vec{c})$ را به دست می‌آوریم. دو جهت را با قواعد گزاره‌ای در یک دوشرطی ترکیب می‌کنیم:

$$\Gamma \Rightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \leftrightarrow \varphi(c_1, \ldots, c_n).$$

سپس $\forall$R را برای $c_1, \ldots, c_n$ اعمال می‌کنیم و برهانی برای

$$\Gamma \Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n))$$

به دست می‌آوریم. این نشان می‌دهد $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$، R را در Γ به‌طور صریح تعریف می‌کند. $\square$

نتیجهٔ سومی که با درونیابی هم‌ارز است و مانند آن با لم مائهارا اثبات می‌شود چنین است: اگر دو نظریهٔ سازگار Γ_1 و Γ_2 یک نظریهٔ کامل Γ را در زبان $\mathcal{L}(\Gamma) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ در بر داشته باشند، آنگاه $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ سازگار است.

به یاد آورید نظریه‌ای کامل است اگر برای هر جمله φ در زبانش، یا $\Gamma \vdash \varphi$ یا $\Gamma \vdash \neg\varphi$. چون Γ_1 و Γ_2 بسط‌های سازگار Γ هستند، خود Γ سازگار است. در نتیجه، اگر φ جمله‌ای در زبان مشترک $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ باشد، نمی‌توان هم $\Gamma_1 \vDash \varphi$ و هم $\Gamma_2 \vDash \neg\varphi$ داشت. برای دیدن این امر، خلافش را فرض کنید. از کامل‌بودن Γ، یا $\Gamma \vDash \varphi$ یا $\Gamma \vDash \neg\varphi$. حالت دوم با $\Gamma \subseteq \Gamma_1$ ناسازگاری Γ_1 را نتیجه می‌دهد؛ پس $\Gamma \vDash \varphi$. آنگاه $\Gamma \subseteq \Gamma_2$ می‌دهد $\Gamma_2 \vDash \varphi$، که همراه با $\Gamma_2 \vDash \neg\varphi$ ناسازگاری Γ_2 را نتیجه می‌دهد.

برای اثبات فقط کافی است هیچ جمله φای در زبان مشترک $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ وجود نداشته باشد که $\Gamma_1 \vDash \varphi$ و $\Gamma_2 \vDash \neg\varphi$. اکنون اثبات نظریه‌اثباتی آن را با لم مائهارا می‌آوریم.

قضیه 2.4 (قضیهٔ سازگاری مشترک رابینسون). *فرض کنید Γ_1 و Γ_2 نظریه‌هایی سازگارند و هیچ φای در زبان $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ نیست که هم $\Gamma_1 \vDash \varphi$ و هم $\Gamma_2 \vDash \neg\varphi$. آنگاه $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ سازگار است.*

اثبات. خلاف ادعا فرض کنید $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ناسازگار است. آنگاه $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow$ یک برهان دارد. لم مائهارا را بر $\Gamma_1 \; ; \; \Gamma_2 \Rightarrow \;\; ;$ اعمال کنید تا جمله φای در زبان $\mathcal{L}(\Gamma_1) \cap \mathcal{L}(\Gamma_2)$ به دست آید، به‌طوری‌که $\vdash \Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ و $\vdash \varphi, \Gamma_2 \Rightarrow$. از دومی $\vdash \Gamma_2 \Rightarrow \neg\varphi$ به دست می‌آید، اما فرض کرده بودیم چنین جمله‌ای وجود ندارد. $\square$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

در بالا به‌طور ضمنی فرض کردیم نظریه‌های Γ، Γ_1 و Γ_2 متناهی‌اند. با فشردگی، نتایج برای نظریه‌های نامتناهی نیز برقرارند.

2.2 مقدمه

قاعدهٔ Cut قاعدهٔ زیر است:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\,\mathrm{Cut}$$

(فرمول φ را *فرمول برش* می‌نامند.)

Cut در حساب دنباله‌ای اصلی گنتسن، **LK**، وجود داشت. *قضیهٔ اصلی گنتسن* (*Hauptsatz*) می‌گوید هر دنبالهٔ اثبات‌پذیر در **LK** بدون استفاده از قاعدهٔ Cut نیز اثبات‌پذیر است؛ یعنی می‌توان Cut را از **LK**-برهان‌ها «حذف» کرد. دستگاه‌های **G1c** و **G3c** ما Cutرا در بر ندارند، اما همین پرسش را می‌توان دربارهٔ آن‌ها نیز مطرح کرد: آیا می‌توان Cut را از برهانهایی حذف کرد که Cut را همراه با دیگر قواعد **G1c** (یا **G3c**) به کار می‌برند؟ در اصطلاحی که پیش‌تر تثبیت کردیم، پرسش هم‌ارز این است: آیا Cut قاعده‌ای پذیرفتنی در **G1c** (یا **G3c**) است؟

قضیهٔ حذف برش شاید مهم‌ترین و مشهورترین نتیجهٔ نظریهٔ اثبات باشد. نخست ثابت می‌کند **G1c** و **G3c** به قاعده‌ای نیاز ندارند که ممکن است در نگاه اول آشکارا ضروری به نظر برسد. وقتی برهان‌های واقعی را صوری می‌کنید، درمی‌یابید باید راهی برای استفاده از لم‌ها داشته باشید. ریاضی‌دانان دوست دارند نتیجه‌هایی را اثبات کنند و سپس در برهان نتایج دیگر به آن‌ها استناد کنند. ممکن است نخست برهان نتیجهٔ L، یعنی لم، را به صورت برهان دنبالهٔ $\Rightarrow L$ صوری کنید. سپس برهان نتیجهٔ دوم R را که از L استفاده می‌کند، به صورت برهان دنبالهٔ $L \Rightarrow R$ صوری می‌کنید. از کجا می‌دانید برهانی برای R، یعنی برهان برای صرفاً $\Rightarrow R$، وجود دارد؟ باید بتوانید دو برهان را ترکیب کنید، و قاعدهٔ Cut چنین امکانی می‌دهد.

گفتیم **G1c** و **G3c** تمام‌اند و بنابراین هر دنباله‌ای را که انتظار می‌رود اثبات‌پذیر باشد، یعنی هر دنبالهٔ معتبری را، اثبات می‌کنند. این امر را می‌توان مستقیم اثبات کرد. اما زمانی که گنتسن می‌نوشت، تنها تمامیت دستگاه‌های استنتاج اصل‌موضوعی شناخته شده بود. گنتسن برای نشان‌دادن تمامیت **LK** ترجمه‌ای از اشتقاقهای دستگاه اصل‌موضوعی به **LK**-برهانها ارائه کرد. این ترجمه به‌طور اساسی از Cut استفاده می‌کرد. حذف برش فقط نتیجه‌ای مهم برای

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

منطق کلاسیک نیست: بسیاری منطق‌های دیگر نیز حساب دنباله‌ای دارند. برای برخی از آن‌ها، اثبات مستقیم تمامیت حساب دنباله‌ای دشوار یا ناممکن است؛ پس ترجمه از دستگاه‌های دیگر، با استفاده از Cut، تنها راه نشان‌دادن تمامیت است. آنگاه اثبات نظریه‌اثباتی حذف برش لازم است تا ثابت شود Cut زائد است و دستگاه بدون Cut تمام است.

حذف برش از آن رو نیز مهم است که می‌توان آن را برای به‌دست‌آوردن نتایج مستقل و جالب دیگر به کار برد. دو موردی که بررسی خواهیم کرد لم درونیابی کریگ و قضیهٔ هربراند هستند.

ایده‌های متداول در اثبات حذف برش نشان می‌دهند چگونه برهانی که از Cut استفاده می‌کند به برهانی بدون آن تبدیل می‌شود. این تبدیل‌ها معمولاً «موضعی»اند؛ یعنی بخشی از برهان، معمولاً یک زیر-برهان که به استنتاج Cut پایان می‌یابد، را برمی‌داریم و با زیر-برهان دیگری از همان دنباله جایگزین می‌کنیم که در آن استنتاج Cut حذف شده یا با استنتاج‌های دیگری جایگزین شده است. چنین استدلال‌هایی الگوریتم‌های گام‌به‌گامی برای تبدیل برهانهای دارای Cut به برهان‌های بدون آن فراهم می‌کنند. این ویژگی هنگام کاربرد روش‌های حذف برش اطلاعات بیشتری می‌دهد. برای نمونه، برهان‌های نظریه‌مدلی‌ای برای لم درونیابی هست که می‌گویند «اگر $\varphi \to \psi$ معتبر باشد، آنگاه یک درونیاب وجود دارد» (فعلاً مهم نیست درونیاب چیست). یک استدلال نظریه‌اثباتی با استفاده از حذف برش الگوریتمی فراهم می‌کند که برهانی برای $\varphi \to \psi$ می‌گیرد و یک درونیاب بازمی‌گرداند. برخلاف استدلال نظریه‌مدلی، استدلال نظریه‌اثباتی *سازنده* است.

دو راه رایج برای اثبات قضیهٔ حذف برش وجود دارد. راه نخست، که به گنتسن بازمی‌گردد، نشان می‌دهد می‌توان بالاترین برش‌ها را از یک برهان حذف کرد و سپس آن‌ها را یکی‌یکی حذف می‌کند تا هیچ‌یک باقی نماند. راه دوم، که نخست شوتّه و تیت ارائه کردند، بر پیچیده‌ترین برش‌های یک برهان تمرکز می‌کند و پی‌درپی برش‌هایی را حذف می‌کند که بیشینه‌اند؛ یعنی هیچ برش دیگری فرمول برشی با عمق بیشتر ندارد. هر روش مزایا و معایبی دارد. برای برخی دستگاه‌ها یک روش کار می‌کند، حال آنکه اجرای روش دیگر دشوار یا حتی ناممکن است. بنابراین هر دو را شرح می‌دهیم. حذف برش را برای **G3c** اثبات خواهیم کرد. در واقع نه حذف Cut، بلکه حذف برش *با بافت مشترک* $\mathrm{Cut_{CS}}$را نشان خواهیم داد:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Cut_{CS}}$$

اگر یک حساب دنباله‌ای تضعیف و انقباض را مجاز بداند، خواه به صورت قواعد واقعی مانند **G1c** و خواه به صورت قواعد پذیرفتنی مانند **G3c**، Cut می‌تواند $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$را شبیه‌سازی کند و برعکس. $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$ را به جای Cutبرمی‌گزینیم، زیرا راهبرد نخست حذف برش برای $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$آسان‌تر بیان می‌شود و راهبرد دوم فقط برای $\mathrm{Cut}_{\mathrm{CS}}$کار می‌کند.

اگر $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$، آنگاه π چنین پایان می‌یابد:

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\to\chi}\to\mathrm{R} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi\to\chi,\Pi \Rightarrow \Lambda,\psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi,\Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\psi\to\chi,\Pi \Rightarrow \Lambda}\to\mathrm{L}}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda}\mathrm{Cut}\right\}\pi_2$$

برهان زیر که به Cutپایان می‌یابد،

$$\pi_1\left\{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\psi\to\chi}\to\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \psi\to\chi,\Pi \Rightarrow \Lambda,\psi\end{array}}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda,\psi}\mathrm{Cut}\right.$$

ارتفاع برش کمتری از π دارد. فرض استقرا برهان π_1'' برای $\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda,\psi$ به دست می‌دهد. برهان زیر نیز به Cutپایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \chi,\Pi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\psi,\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Lambda}\mathrm{Cut}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12(9620cc7)

هم رتبهٔ برش و هم ارتفاع برش آن از رتبه و ارتفاع برش π کمتر است؛ پس فرض استقرا یک **G3c**-برهان π_2''' برای $\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$ به دست می‌دهد. اکنون فرض استقرا را بر برهان زیر که به Cut پایان می‌یابد اعمال کنید:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'' \\ \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''' \\ \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Gamma, \Pi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Lambda, \Lambda}\,\mathrm{Cut}$$

(رتبهٔ برش آن $\mathrm{cr}(\pi) <$ است) تا برهانی برای $\Gamma, \Gamma, \Pi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Lambda, \Lambda$ به دست آید. با اعمال گزاره 6.16 و انقباض، برهان π' برای $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$ را به دست می‌آوریم.

2.3 قضیهٔ دنبالهٔ میانی و قضیهٔ هربراند

یکی از پیامدهای مهم قضیهٔ حذف برش، قضیهٔ دنبالهٔ میانی است. این قضیه می‌گوید اگر برهان π برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ وجود داشته باشد که در آن هر فرمول در صورت پیشوندی است، آنگاه برهان π'ای وجود دارد که شامل دنبالهٔ $S \equiv \Pi \Rightarrow \Lambda$، موسوم به *دنبالهٔ میانی*، است؛ به‌طوری‌که همهٔ استنتاج‌های بالای S در π' گزاره‌ای و همهٔ استنتاج‌های پایین S سوردارند. (فرمول φ پیشوندی، یا در صورت پیشوندی، است اگر به شکل

$$\mathsf{Q}_1 x_1 \ldots \mathsf{Q}_n x_n\, \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

باشد، که هر Q_i یا $\forall$ است یا $\exists$.) یکی از پیامدهای مهم قضیهٔ دنبالهٔ میانی، قضیهٔ هربراند است. بیان حالت کلی آن کمی دشوار است، اما در کلی‌ترین صورت می‌گوید: هر مورد اثبات‌پذیری که جمله φ از منطق مرتبهٔ اول باشد، همان‌گویی گزاره‌ای φ'ای وجود دارد که φ را می‌توان از آن اثبات کرد. صورت زیر مربوط به جمله‌هایی به شکل $\exists x\, \psi(x)$ است که ψ بدون سور است:

قضیه 2.5 (قضیهٔ هربراند). فرض کنید $\psi(x)$ بدون سور باشد و $\vdash \exists x\, \psi(x)$. آنگاه ترم‌های t_1، ...، t_nای وجود دارند به‌طوری‌که $\vdash \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$.

فرمول $\psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$ را فصل هربراند برای $\exists x\, \psi(x)$ می‌نامند. چون ψ بدون سور است، این فصل نیز بدون سور است. پس اگر اثبات‌پذیر باشد، با یک برهان بدون برش اثبات‌پذیر است و در نتیجه برهانی دارد که فقط از استنتاج‌های گزاره‌ای استفاده می‌کند. بنابراین یک همان‌گویی است.

بخش دشوار قضیهٔ هربراند نشان‌دادن این است که برای هر مورد اثبات‌پذیر از فرمول $\exists x\, \psi(x)$، فصلی از هربراند وجود دارد. عکس این ادعا، یعنی اینکه اگر $\exists x\, \psi(x)$ فصل هربراندی داشته باشد آنگاه اثبات‌پذیر است، آسان است. در واقع، فصل هربراند $\exists x\, \psi(x)$ را نتیجه می‌دهد. برای نمونه، در حالت $n = 2$ این برهان را در **G3c** داریم:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi(t_1) \;\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \psi(t_2) \qquad \psi(t_2) \;\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \psi(t_2)}{\psi(t_1) \vee \psi(t_2) \;\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \psi(t_2)}\,\vee\mathrm{L}}{\psi(t_1) \vee \psi(t_2) \;\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_2)}\,\exists\mathrm{R}}{\psi(t_1) \vee \psi(t_2) \;\Rightarrow\; \exists x\, \psi(x)}\,\exists\mathrm{R}$$

برای استخراج فصل هربراند از برهان π برای $\Rightarrow \exists x\, \psi(x)$، نخست حالتی را در نظر بگیرید که همهٔ استنتاج‌های $\exists\mathrm{R}$ در برهان بدون برش π در پایان قرار دارند:

$$\dfrac{\begin{array}{l} \vdots\,\pi_1 \\ \Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n) \end{array}}{\begin{array}{l} \Rightarrow\; \exists x\, \psi(x), \psi(t_2), \ldots, \psi(t_n) \\ \vdots\,(n-1) \times \exists\mathrm{R} \\ \Rightarrow\; \exists x\, \psi(x) \end{array}}\,\exists\mathrm{R}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اگر این‌ها همهٔ استنتاج‌های $\exists\mathrm{R}$ در π باشند که $\exists x\,\psi(x)$ در آن‌ها فعال است، هیچ استنتاج سوردار دیگری در π_1 وجود ندارد. علت این است که $\psi(x)$ هیچ سور دیگری ندارد و دنبالهٔ پایانی در سمت چپ هیچ فرمولی ندارد. به بیان دیگر،

$$\Rightarrow\ \exists x\,\psi(x), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)$$

دنبالهٔ میانی π است. افزون بر این، چون بالای دنبالهٔ میانی هیچ استنتاج سورداری نیست، همهٔ دنباله‌های بالای آن $\exists x\,\psi(x)$ را در بر دارند و این فرمول نه فعال است و نه اصلی. پس می‌توان آن را از برهان π_1 حذف کرد و برهانی برای $\Rightarrow\ \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)$ به دست آورد؛ سپس با $n-1$ بار اعمال $\vee\mathrm{R}$، برهانی برای فصل هربراند $\Rightarrow \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$ به دست می‌آید.

مشکل این است که نمی‌توانیم فرض کنیم حتی یک برهان بدون برش برای $\Rightarrow \exists x\,\psi(x)$ همهٔ استنتاج‌های $\exists\mathrm{R}$ خود را در یک بلوک پایانی دارد. ممکن است میان این استنتاج‌ها، استنتاج‌هایی باشد که در آن‌ها یک $\psi(t_i)$ اصلی است. از همین رو به قضیهٔ دنبالهٔ میانی نیاز داریم.

قضیه 2.6 (قضیهٔ دنبالهٔ میانی). *اگر یک* **G3c**-*برهان π برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ وجود داشته باشد که همهٔ فرمولهای Γ و Δ پیشوندی‌اند، آنگاه برهان π'ای وجود دارد که شامل دنبالهٔ $\Pi \Rightarrow \Lambda$ است، به‌طوری‌که همهٔ استنتاج‌های پایین آن سوردار و همهٔ استنتاج‌های بالای آن گزاره‌ای‌اند.*

اثبات. مرتبهٔ یک استنتاج سوردار در π را شمار استنتاج‌های گزاره‌ای زیر آن تعریف کنید، و مرتبهٔ $o(\pi)$ را مجموع مرتبه‌های همهٔ استنتاج‌های سوردار آن بگیرید. اگر $o(\pi) = 0$، هیچ استنتاج سورداری یک استنتاج گزاره‌ای زیر خود ندارد و کار تمام است: چون همهٔ استنتاج‌های سوردار یک مقدمه دارند، یک بالاترین استنتاج سوردار یکتا وجود دارد. مقدمهٔ آن دنبالهٔ میانی است.

اگر $o(\pi) > 0$، پایین‌ترین استنتاج سوردار با مرتبهٔ $0 <$ را برگزینید. چون مرتبهٔ آن مثبت است، باید استنتاجی گزاره‌ای زیر آن باشد. چون این استنتاج پایین‌ترینِ نوع خود است، نتیجه‌اش نمی‌تواند مقدمهٔ یک استنتاج سوردار باشد؛ وگرنه استنتاج سوردار دوم و پایین‌تر نیز یک استنتاج گزاره‌ای زیر خود داشت. برحسب اینکه استنتاج سوردار کدام است و استنتاج گزاره‌ای زیر آن چیست، حالت‌های بسیار را جدا می‌کنیم. چون دنبالهٔ پایانی فقط از فرمول‌های پیشوندی

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

تشکیل شده است، فرمول اصلی استنتاج سوردار نمی‌تواند در استنتاج گزاره‌ای بعدی فعال باشد. وگرنه فرمول اصلی آن استنتاج، سوری در دامنهٔ یک رابط گزاره‌ای داشت. بنا بر ویژگی زیر-فرمول، چنین فرمولی باید زیر-فرمول یک فرمول در دنبالهٔ پایانی می‌بود. پس فرمول اصلی استنتاج سوردار عضوی از بافت استنتاج گزاره‌ای پایین‌تر است.

دو نمونه را بررسی کنیم.

نخست فرض کنید یک $\forall$R در مقدمهٔ راست $\to$L پایان می‌یابد. آنگاه زیر-برهان مربوط از π به زیر-برهان π_1 زیر پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \psi\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \varphi(c)\end{array}}{\chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}}{\psi \to \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x)}\,\to\mathrm{L}$$

می‌توانیم فرض کنیم π منظم است؛ پس متغیر ویژهٔ c بیرون π_3 ظاهر نمی‌شود و به‌ویژه در $\psi \to \chi$ یا π_2 نیست. اکنون برهان π_1' را در نظر بگیرید:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2'\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \varphi(c), \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \varphi(c)\end{array}}{\psi \to \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \varphi(c)}\,\to\mathrm{L}}{\psi \to \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\,\varphi(x), \forall x\,\varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

در اینجا π_2' از تضعیف π_2 با $\varphi(c)$ در سمت راست به دست می‌آید. (این کار هیچ استنتاجی نمی‌افزاید، به‌ویژه هیچ استنتاج سورداری که ممکن است بر مرتبه اثر بگذارد. همچنین هیچ شرط متغیر ویژه‌ای را در π_2 نقض نمی‌کند، زیرا هیچ ثابتی در $\varphi(c)$ به‌عنوان متغیر ویژه در π_2 به کار نرفته است.) شرط متغیر ویژهٔ $\forall$R همچنان برقرار است، زیرا c در $\psi \to \chi$ ظاهر نمی‌شود.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

با استفاده از پذیرفتنی‌بودن انقباض، برهان π_1'' برای $\psi \to \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x)$ به دست می‌آوریم. اثبات پذیرفتنی‌بودن CR برای $\forall x\, \varphi(x)$ و اثبات وارون‌پذیری $\forall$R که در آن اثبات به کار رفت، مرتبهٔ هیچ استنتاجی را تغییر ندادند؛ در بیشترین حالت فقط استنتاج‌هایی را حذف کردند. بنابراین شمار استنتاج‌های سوردار در π_1'' از π_1 بیشتر نیست و هر استنتاج سوردار در π_1'' همان شمار استنتاج گزاره‌ای را زیر خود دارد که استنتاج متناظر در π_1 داشت، جز آخرین $\forall$R: در π یک $\to$L زیر آن بود که اکنون در π_1'' به بالای آن منتقل شده است. π_1 را در π با π_1'' جایگزین کنید. برهان حاصل مرتبهٔ کمتری دارد، زیرا دست‌کم مرتبهٔ استنتاج $\forall$R حداقل 1 واحد کاهش یافته است. اکنون فرض استقرا را اعمال کنید.

حالت‌هایی که استنتاج سوردار $\exists$R است حتی آسان‌ترند، زیرا نه به انقباض نیاز است و نه نگرانی دربارهٔ شرط متغیر ویژه وجود دارد. برای نمونه، فرض کنید پس از $\exists$R یک $\wedge$R بیاید و استنتاج نخست این بار در مقدمهٔ چپ باشد. زیر-برهان مربوط π_1 است:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \varphi(t), \psi\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \psi}\,\exists\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \chi\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

π_1 را در π با π_1' زیر جایگزین کنید:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \varphi(t), \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_3'\\ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \varphi(t), \chi\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \varphi(t), \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \exists x\, \varphi(x), \psi \wedge \chi}\,\exists\mathrm{R}$$

در اینجا π_3' از تضعیف π_3 با $\varphi(t)$ در سمت راست به دست می‌آید. این تضعیف فقط $\varphi(t)$ را به سمت راست هر دنباله در π_3 می‌افزاید و در نتیجه مرتبهٔ هیچ استنتاج سورداری را تغییر نمی‌دهد. مرتبهٔ استنتاج‌های سوردار در π' همان مرتبه در π است، جز مرتبهٔ استنتاج $\exists$R که با $\wedge$R جابه‌جا شد و یک واحد

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

کاهش یافت. فرض استقرا اعمال می‌شود. □

حالت‌هایی از اثبات قضیه 2.6 را شرح دهید که $\exists$L در مقدمهٔ $\to$R پایان می‌یابد، و $\forall$L در مقدمهٔ چپ $\vee$L پایان می‌یابد.

اثبات قضیهٔ هربراند. فرض کنید π به $\Rightarrow \exists x\, \psi(x)$ پایان می‌یابد. بنا بر قضیه 2.6، می‌توانیم π را به برهان π' با دنبالهٔ میانی S تبدیل کنیم که باید به صورت زیر باشد:

$$\Rightarrow \exists x\, \psi(x), \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n).$$

چون همهٔ استنتاج‌های بالای S گزاره‌ای‌اند، $\exists x\, \psi(x)$ نمی‌تواند در استنتاجی بالای S اصلی باشد. چون اتمی نیست، نمی‌تواند در یک اصل اصلی باشد. چون $\exists x\, \psi(x)$ نمی‌تواند زیرفرمول سرهٔ $\psi(t_1)$ باشد (به یاد آورید $\psi(x)$ بدون سور است)، بالای S نیز نمی‌تواند فعال باشد. بنابراین حذف $\exists x\, \psi(x)$ از زیر-برهان منتهی به S، برهان درستی برای $\Rightarrow \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)$ به دست می‌دهد، و از آن با $n-1$ استنتاج $\vee$R می‌توان برهانی برای $\Rightarrow \psi(t_1) \vee \cdots \vee \psi(t_n)$ به دست آورد. □

2.4 پیوندزدن برهان‌ها

برهانها در **N1c** و **N1i**، برهانهایی برای فرمولهای φ از فرض‌های ψ هستند. فرض کنید خود ψ برهان داشته باشد. چگونه برهان ψ را با برهان φ از ψ ترکیب کنیم تا برهان برای φ به دست آید که از فرض ψ استفاده نکند؟

یک راه این است که با اعمال $\to$Intro فرض ψ را از برهان φ حذف کنیم. سپس می‌توانیم برهان حاصل برای $\psi \to \varphi$ را با برهان ψ ترکیب کنیم و به این برسیم:

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi \to \varphi}\to\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi}\to\text{Elim}$$

این کار سرراست، اما کمی نازیباست: چرا $\to$ را معرفی کنیم تا بی‌درنگ آن را حذف کنیم؟ باید بتوان از این نوع «میان‌بُرِ اضافی» از راه $\psi \to \varphi$ پرهیز کرد. (اینکه همیشه می‌توان از چنین میان‌بُرهایی پرهیز کرد، در واقع محتوای قضیهٔ نرمال‌سازی است.)

در **N1c** و **N1i** در این مورد می‌توانیم به‌آسانی از آن پرهیز کنیم: کافی است فرض‌های ψ^x را با کل برهان ψ جایگزین کنیم. این «پیوندزدن» برهانها به فرض‌های برهان‌های دیگر بسیار سودمند است؛ پس آن را در قالب یک تعریف ثبت می‌کنیم.

تعریف 2.7. اگر δ_1 یک **N1c**-برهان (یا **N1i**-برهان) برای φ از فرض باز ψ^x باشد، و δ_2 یک **N1c**-برهان (یا **N1i**-برهان) برای ψ باشد، آنگاه $\delta_1[\delta_2/\psi^x]$ حاصل جایگزینی هر رخدادِ مرخص‌نشدهٔ ψ^x در δ_1 با δ_2 است.

به شرط آنکه δ_1 و δ_2 فرمولهای فرضی متفاوتی با برچسب یکسان نداشته باشند و هیچ فرض باز δ_2 شامل متغیر ویژه‌ای از δ_1 نباشد، حاصل $\delta_1[\delta_2/\psi^x]$ یک برهان درست است و فرض‌های باز آن، فرض‌های باز δ_1 همراه با فرض‌های باز δ_2 هستند. هنگام پیوندزدن برهانها، این شرط‌ها معمولاً برقرارند. شرط نخست هرگاه δ_1 و δ_2 زیربرهان‌های برهان بزرگ‌تری باشند برقرار است. اگر شرط دوم برقرار نباشد، می‌توان متغیرهای ویژهٔ δ_1 را تغییر نام داد تا برقرار شود.

تعریف متناظری برای **N2c** و **N2i** برقرار است.

تعریف 2.8. اگر δ_1 یک **N2c**-برهان (یا **N2i**-برهان) برای $x : \psi, \Gamma_1 \Rightarrow \varphi$، و δ_2 یک **N2c**-برهان (یا **N2i**-برهان) برای $\Gamma_2 \Rightarrow \psi$ باشد، آنگاه $\delta_1[\delta_2/x : \psi]$ حاصل جایگزینی هر اصل $x : \psi \Rightarrow \psi$ در δ_1 با δ_2 و افزودن Γ_2 به بافت هر دنبالهٔ زیر آن اصل‌هاست.

گزاره 2.9. *اگر $\delta_1 \vdash x : \psi, \Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ و $\delta_2 \vdash \Gamma_2 \Rightarrow \psi$، آنگاه $\delta_1[\delta_2/x : \psi] \vdash \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi$، مشروط بر اینکه هیچ متغیر ویژهٔ δ_1 در Γ_2 ظاهر نشود.*

اثبات. با استقرا بر $\mathrm{ht}(\delta_1)$. □

2.5 مقدمه

استنتاج طبیعی خانواده‌ای از دستگاه‌های برهان است که در آن هر رابط منطقی یا سور، یک جفت استنتاج دارد: یکی عملگر را «معرفی» می‌کند (قاعدهٔ معرفی) و دیگری عملگر را «حذف» می‌کند (قاعدهٔ حذف). برای نمونه، نتیجهٔ $\to$Intro یک فرمول به صورت $\varphi \to \psi$ است، و مقدمهٔ $\to$Elim یک فرمول به صورت $\varphi \to \psi$.

نخستین دو صورت استنتاج طبیعی را در دههٔ ۱۹۳۰ گرهارت گنتسن و استانیسواف یاشکوفسکی معرفی کردند. نظریه‌پردازان اثبات بیشتر دستگاه گنتسن را بررسی می‌کنند، و دستگاه‌های رایج‌تر در آموزش از کار یاشکوفسکی پدید آمده‌اند. در هر دو دستگاه می‌توان از فرض‌ها آغاز کرد؛ یعنی فرمولهایی که لازم نیست اثبات شوند، اما می‌توان آن‌ها را در اثبات دیگر فرمولها به کار برد. ممکن است کل یک برهان به چنین فرض‌هایی وابسته باشد، و چون آن فرض‌ها اثبات نشده‌اند، برهان نتیجهٔ خود، یعنی *فرمول پایانی*، را به‌تنهایی ثابت نمی‌کند؛ فقط نشان می‌دهد نتیجه از فرض‌ها به دست می‌آید.

برخی قواعد استنتاج چنان‌اند که نتیجهٔ آن‌ها دیگر به بعضی فرض‌ها وابسته نیست: آن فرض‌ها را «مرخص» می‌کنند. برای نمونه، قاعدهٔ $\to$Intro یک برهان برای نتیجهٔ ψ از فرض φ می‌گیرد و نتیجهٔ $\varphi \to \psi$ را می‌دهد. برهانی که به $\varphi \to \psi$ پایان می‌یابد دیگر به φ وابسته نیست؛ فرض φ مرخص شده است. در دستگاه‌های گنتسن، برهانها درخت‌هایی از فرمولها هستند، فرض‌ها بالاترین فرمولها هستند، و قواعدی مانند $\to$Intro برچسب‌هایی دارند که نشان

می‌دهند کدام فرض‌ها مرخص می‌شوند. در دستگاه‌های یاشکوفسکی، بخش‌هایی از برهان که به یک فرض وابسته‌اند به نحوی جدا می‌شوند؛ مثلاً پشت یک خط عمودی تورفته‌اند یا در کادری قرار می‌گیرند. فرض φ که مرخص می‌شود و تالی ψ شرطی، نخستین و آخرین سطر در کادرند، و نتیجهٔ $\varphi \to \psi$ از $\to$Intro بیرون کادر قرار می‌گیرد.

این دستگاه‌ها «طبیعی»اند، زیرا قواعد استنتاج بازتاب شیوه‌ای هستند که ما، یا دست‌کم ریاضی‌دانان، به‌طور طبیعی استدلال می‌کنیم. برای اثبات یک نتیجهٔ فرضی، یعنی یک شرطی، مقدم را فرض می‌کنیم و از آن برای اثبات تالی بهره می‌بریم؛ این همان $\to$Intro است. وقتی یک شرطی $\varphi \to \psi$ و مقدم آن φ را می‌دانیم، ψ را نتیجه می‌گیریم؛ این همان $\to$Elim است. برای نشان‌دادن اینکه با فرض یک فصل $\varphi \vee \psi$ نتیجه‌ای برقرار است، از برهان برحسب حالات استفاده می‌کنیم؛ این $\vee$Elim است. برای اثبات ادعای کلی $\forall x\, \varphi(x)$ نشان می‌دهیم $\varphi(c)$ برای یک c دلخواه برقرار است؛ این $\forall$Intro است، و به همین ترتیب.

برای نمونه، این برهان ساده‌ای از $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ در استنتاج طبیعی به سبک گنتسن است:

$$x\,\dfrac{\dfrac{[\varphi]^x}{\varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}}{\varphi \to (\varphi \vee \psi)}\,\to\text{Intro}$$

این برهان با فرض φ آغاز می‌شود، با $\vee$Intro نتیجهٔ $\varphi \vee \psi$ را می‌گیرد و سپس با $\to$Intro به $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$ می‌رسد. استنتاج $\to$Intro فرض φ را مرخص می‌کند؛ برچسب x این امر را نشان می‌دهد.

نظریه‌پردازان اثبات دستگاه‌های اصلی گنتسن را که با درخت‌هایی از فرمولها کار می‌کنند ترجیح می‌دهند، هرچند یک صورت دیگر نیز در نظریهٔ اثبات مهم است. برهان برای φ از فرض‌های Γ نشان می‌دهد φ از Γ به دست می‌آید، یعنی $\Gamma \vDash \varphi$. قواعد استنتاج طبیعی را نیز می‌توان به‌طور طبیعی حاوی اطلاعاتی دربارهٔ چنین پیامدهایی خواند؛ مثلاً $\to$Intro می‌گوید اگر $\Gamma + \varphi \vDash \psi$، آنگاه $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. پس طبیعی است قواعد را مستقیماً چنان صورت‌بندی کنیم که هم بر فرض‌ها و هم بر نتیجه‌ای عمل کنند که در مقدمات و نتیجهٔ قاعدهٔ استنتاج از آن فرض‌ها به دست می‌آید؛ یعنی بر دنباله‌های $\Gamma \Rightarrow \varphi$ عمل کنند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

برهان سادهٔ بالا در چنین دستگاهی این شکل را دارد:

$$\dfrac{\dfrac{x : \varphi \;\Rightarrow\; \varphi}{x : \varphi \;\Rightarrow\; \varphi \vee \psi}\,\vee\text{Intro}}{\Rightarrow\; \varphi \to (\varphi \vee \psi)}\,{}_{x}\,{\to}\text{Intro}$$

همان‌طور که می‌بینید، قواعد همان‌اند: بر فرمول سمت راست $\Rightarrow$ عمل می‌کنند، و فرمولهای سمت چپ فقط فرض‌هایی را فهرست می‌کنند که هر گام به آن‌ها وابسته است.

مجموعهٔ کامل جفت‌قواعد معرفی/حذف به‌تنهایی برای منطق کلاسیک تمام نیست. باید دو قاعدهٔ دیگر دربارهٔ $\perp$ بیفزاییم. نخست «قاعدهٔ شهودگرایانهٔ محال» $\perp_I$، یا «انفجار»، است که می‌گوید از $\perp$ می‌توان هر چیزی را نتیجه گرفت. دومی اصل کلاسیک برهان خلف $\perp_C$، یا «قاعدهٔ کلاسیک محال»، است که می‌گوید اگر بتوانیم از $\neg\varphi$، $\perp$ را اثبات کنیم، φ را اثبات کرده‌ایم. اگر $\perp_C$را کنار بگذاریم، دستگاهی مناسب منطق شهودگرایانه داریم؛ و اگر هر دو را کنار بگذاریم، آنچه «منطق مینیمال» نامیده می‌شود به دست می‌آید.

استنتاج طبیعی به سبک گنتسن برای منطق کلاسیک و شهودگرایانه را بررسی خواهیم کرد. این‌ها دستگاه‌های **N1c** و **N1i** هستند. دستگاه‌های **N2c** و **N2i** دستگاه‌های متناظرند که به جای فرمولهای تکین φ با دنباله‌های $\Gamma \Rightarrow \varphi$ کار می‌کنند.

فصل 3

استنتاج طبیعی

3.1 برهان‌ها منظم و جانشینی

قواعد سورها به سبب «شرط‌های متغیر ویژه» که بر قواعد $\exists$Elim و $\forall$Intro اعمال می‌شوند پیچیدگی‌هایی پدید می‌آورند. بیشتر این پیچیدگی‌ها را می‌توان با تضمین این امر برطرف کرد که ثابت c در این استنتاج‌ها هرگز دوباره به کار نرود. تعریف زیر را معرفی کنیم.

تعریف 3.1. یک برهان استنتاج طبیعی δ منظم است اگر:

1. هیچ متغیر ویژهٔ a به‌عنوان متغیر ویژهٔ بیش از یک استنتاج $\exists$Elim یا $\forall$Intro به کار نرود؛ و
2. اگر a متغیر ویژهٔ یک استنتاج $\exists$Elim یا $\forall$Intro باشد، به‌ترتیب فقط در زیر-برهان بی‌واسطه‌ای که به مقدمهٔ فرعی می‌رسد، یا در زیر-برهان بی‌واسطه‌ای که به مقدمه می‌رسد، ظاهر شود.

لم 3.2. *اگر δ منظم باشد و به χ پایان یابد، c یک ثابت باشد که در δ به‌عنوان متغیر ویژه به کار نرفته است، و t ترمی باشد که هیچ متغیر ویژهٔ δ را در بر ندارد، آنگاه $\delta[t/c]$ که با جایگزینی هر رخداد c در δ با t به دست می‌آید، یک برهان منظم است. فرمول پایانی $\delta[t/c]$ برابر $\chi[t/c]$ است. اگر φ^x فرض باز δ باشد، آنگاه $\varphi[t/c]^x$ فرض باز $\delta[t/c]$ است.*

اثبات. با استقرا بر $\mathrm{ht}(\delta)$. اگر $\mathrm{ht}(\delta) = 0$، برهان فقط از فرض φ^x تشکیل شده است. آنگاه $\delta[t/c]$ همان $\varphi[t/c]^x$ است.

اگر $\mathrm{ht}(\delta) > 0$، برحسب آخرین استنتاج δ حالت‌ها را جدا می‌کنیم. حالت‌های مربوط به قواعد رابطهای گزاره‌ای آسان‌اند و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند. حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که δ به یک استنتاج سوردار پایان می‌یابد.

1. اگر آخرین استنتاج $\forall$Intro باشد، δ شکل زیر را دارد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'\\ \varphi(a,c)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,c)}\,\forall\mathrm{Intro}$$

بنا بر فرض استقرا، $\delta'[t/c]$ یک برهان منظم برای $\varphi(a,t)$ است. چون a متغیر ویژهٔ δ است، در t ظاهر نمی‌شود. بنابراین آخرین استنتاج در $\delta[t/c]$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'[t/c]\\ \varphi(a,t)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x,t)}\,\forall\mathrm{Intro}$$

درست است: چون t شامل a نیست، نه نتیجه و نه هیچ فرض بازی شامل a نیست.

2. اگر آخرین استنتاج $\forall$Elim باشد، δ شکل زیر را دارد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'\\ \forall x\,\varphi(x,c)\end{array}}{\varphi(s(c),c)}\,\forall\mathrm{Elim}$$

بنا بر فرض استقرا، $\delta'[t/c]$ یک برهان منظم برای $\forall x\,\varphi(x,t)$ است. (ترم $s(c)$ در نتیجه ممکن است شامل c باشد یا نباشد.) آخرین استنتاج در $\delta[t/c]$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'[t/c]\\ \forall x\,\varphi(x,t)\end{array}}{\varphi(s(t),t)}\,\forall\text{Elim}$$

درست است و $\varphi(s(t),t) \equiv \varphi(s(c),c)[t/c]$. حالت $\exists$Intro مشابه است.

3. اگر آخرین استنتاج $\exists$Elim باشد، δ شکل زیر را دارد:

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1'\\ \exists x\,\varphi(x,c)\end{array}\qquad\begin{array}{c}[\varphi(a,c)]^x\\ \vdots\,\delta_2'\\ \chi\end{array}}{\chi}\,\exists\text{Elim}$$

بنا بر فرض استقرا، $\delta_1'[t/c]$ و $\delta_2'[t/c]$ برهانهای منظمی هستند، به‌ترتیب برای $\exists x\,\varphi(x,t)$ و برای $\chi[t/c]$ از فرض باز $\varphi(a,t)^x$. چون a متغیر ویژهٔ δ است، در t ظاهر نمی‌شود. بنابراین آخرین استنتاج در $\delta[t/c]$ چنین است:

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1'[t/c]\\ \exists x\,\varphi(x,t)\end{array}\qquad\begin{array}{c}[\varphi(a,t)]^x\\ \vdots\,\delta_2'[t/c]\\ \chi[t/c]\end{array}}{\chi[t/c]}\,\exists\text{Elim}$$

و درست است: داریم $\varphi(x,t)[a/x] \equiv \varphi(a,c)[t/c]$، و a نه در نتیجهٔ $\chi[t/c]$ و نه در هیچ فرض باز، جز فرض مرخص‌شوندهٔ $\varphi(a,t)^x$، ظاهر می‌شود. $\square$

گزاره 3.3. اگر δ برهانی در **N1c** یا **N1i** باشد، آنگاه یک برهان منظم δ' با همان ساختار، و به‌ویژه همان ارتفاع، وجود دارد که فقط با جایگزینی متغیرهای ویژه با δ تفاوت دارد.

اثبات. فقط برای مقاصد این اثبات، یک استنتاج متغیر ویژهٔ δ را پاک بنامید اگر متغیر ویژهٔ آن، متغیر ویژهٔ استنتاج دیگری نباشد و جز در زیر-برهان بی‌واسطهٔ همان استنتاج در هیچ جای δ ظاهر نشود؛ در غیر این صورت آن را ناپاک بنامید. بگذارید n شمار استنتاج‌های متغیر ویژهٔ ناپاک در δ باشد. با استقرا بر n نشان می‌دهیم δ را می‌توان به برهان منظم مطلوب δ' تبدیل کرد. اگر $n = 0$، همهٔ استنتاج‌های متغیر ویژه در δ پاک‌اند؛ پس δ منظم است و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. در غیر این صورت، یکی از بالاترین استنتاج‌های متغیر ویژه، مثلاً $\forall$Intro، را برگزینید. زیر-برهان δ_1 از δ که به آن پایان می‌یابد شکل زیر را دارد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \varphi(c)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x)}\,\forall\text{Intro}$$

چون c متغیر ویژه است، در $\forall x\,\varphi(x)$ یا در هیچ فرض بازی ظاهر نمی‌شود. برهان δ_2 منظم است، زیرا اصلاً هیچ استنتاج متغیر ویژه‌ای ندارد. بگذارید a یک ثابت باشد که در δ ظاهر نمی‌شود. بنا بر لم 3.2، $\delta_2[a/c]$ یک برهان منظم برای $\varphi(a)$ است. بنا بر شرط متغیر ویژه، هیچ فرض باز δ_2 شامل c نیست؛ پس هیچ فرض باز $\delta_2[a/c]$ شامل a نیست. بنابراین می‌توانیم $\forall$Intro را اعمال کنیم. اگر δ_1 را در δ با برهان δ_1' زیر جایگزین کنیم،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2[a/c]\\ \varphi(a)\end{array}}{\forall x\,\varphi(x)}\,\forall\text{Intro}$$

یک استنتاج متغیر ویژهٔ ناپاک را با استنتاجی پاک جایگزین کرده‌ایم، و تنها تفاوت، جایگزینی متغیر ویژهٔ c با a است. برهان حاصل $n-1$ استنتاج متغیر ویژهٔ ناپاک دارد و نتیجه از فرض استقرا به دست می‌آید. $\square$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

حالتی از اثبات گزاره 3.3 را شرح دهید که بالاترین استنتاج متغیر ویژه $\exists$Elim است.

به گزاره‌ای که همین الآن اثبات شد صریحاً استناد نخواهیم کرد، اما فرض می‌کنیم همهٔ برهانهای مورد نظر منظم‌اند؛ اگر نباشند، همیشه می‌توان با جایگزینی متغیرهای ویژه آن‌ها را منظم کرد.

لم 3.2 و گزاره 3.3 برای **N2c** و **N2i** نیز برقرارند. اثبات‌ها را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

3.2 قواعد و برهان‌ها

با چند تعریف و تثبیت پاره‌ای اصطلاحات آغاز می‌کنیم.

دو قاعدهٔ **N1c** و **N1i** را در نظر بگیرید که در آن‌ها $\varphi \to \psi$ ظاهر می‌شود.

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to\text{Intro} \qquad \dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi}\to\text{Elim}$$

قاعدهٔ $\to$Elim به‌اندازهٔ کافی ساده است. فرمولهای بالای خط مقدمه‌ها هستند. فرمول سمت چپ فرمول اصلی $\varphi \to \psi$ است. همهٔ قواعد حذف یک چنین مقدمه‌ای دارند که همیشه در دورترین سمت چپ قرار می‌گیرد و مقدمهٔ عمدهٔ استنتاج نامیده می‌شود. اگر مقدمه‌های دیگری، مانند همین‌جا، وجود داشته باشند مقدمه‌های فرعی نام دارند. مقدمه یا مقدمه‌های قواعد معرفی نیز مقدمهٔ عمده نامیده می‌شوند. فرمول زیر خط نتیجه است.

قاعدهٔ $\to$Intro فقط یک مقدمه دارد و اینجا نتیجه، فرمول اصلی $\varphi \to \psi$ است. همهٔ قواعد معرفی همین‌گونه‌اند: نتیجه فرمول اصلی است و عملگر اصلی آن همان عملگری است که «معرفی» می‌شود.

نماد $[\varphi]^x$ معنای زیر را دارد. در برهان، استنتاج $\to$Intro بر فرمول ψ به‌عنوان مقدمه اعمال می‌شود. زیر-برهان منتهی به ψ تعدادی فرمول آغازین دارد که فرض نامیده می‌شوند. برهان برای ψ از یک یا چند فرض به شکل φ، برهانی است که نشان می‌دهد φ مستلزم ψ است. وقتی قاعدهٔ $\to$Intro را اعمال

می‌کنیم، $\varphi \to \psi$ را نتیجه می‌گیریم و نتیجه دیگر به فرض φ وابسته نیست. برای نشان‌دادن این امر، فرض‌های به شکل φ در برهان شامل استنتاج $\to$Intro را مرخص یا بسته می‌کنیم. قاعده مشخص می‌کند کدام فرض‌ها را می‌توان مرخص کرد. در $\to$Intro با نتیجهٔ $\varphi \to \psi$، این‌ها فرض‌های به شکل φ هستند، یعنی فرض‌هایی که با مقدم شرطی یکسان‌اند. گاهی مهم است مشخص کنیم کدام فرض‌ها در کدام قاعده مرخص می‌شوند؛ برچسب ترخیص x این کار را انجام می‌دهد. نکتهٔ مهم این است که قواعد مرخص‌کننده مجبور نیستند همهٔ فرض‌های دارای شکل لازم، یا اصلاً هیچ فرضی، را مرخص کنند. برای نمونه، برهان زیر درست است، هرچند نخستین $\to$Intro هیچ فرضی را مرخص نمی‌کند:

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]^{y}}{\psi \to \varphi}\,{\scriptstyle x}\;\to\text{Intro}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\,{\scriptstyle y}\;\to\text{Intro}$$

هرگاه قاعده‌ای هیچ فرضی را مرخص نکند، برچسب ترخیص را حذف می‌کنیم؛ همان کاری که اینجا انجام دادیم.

در برهان

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]^{x} \qquad [\varphi]^{y}}{\varphi \wedge \varphi}\;\wedge\text{Intro}}{\varphi}\;\wedge\text{Elim}}{\varphi \to \varphi}\,{\scriptstyle x}\;\to\text{Intro}}{\varphi \to (\varphi \to \varphi)}\,{\scriptstyle y}\;\to\text{Intro}$$

نخستین استنتاج $\to$Intro فرض چپ φ^x و دومی فرض راست φ^y را مرخص می‌کند. یعنی همهٔ فرض‌های دارای برچسب x با $\to$Intro دارای برچسب x، و همهٔ فرض‌های دارای برچسب y با قاعدهٔ دارای برچسب y مرخص می‌شوند. برای کارکرد درست این شیوه، همهٔ فرض‌های دارای یک برچسب باید همان فرمول نیز باشند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

قواعد سورها اندکی پیچیده‌ترند. برای نمونه، قواعد $\exists$ در **N1i** چنین‌اند:

$$\frac{\varphi(t)}{\exists x\,\varphi(x)}\,\exists\text{Intro} \qquad {}_{x}\frac{\exists x\,\varphi(x) \qquad \begin{array}{c}[\varphi(c)]^{x}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\psi}\,\exists\text{Elim}$$

در قاعدهٔ $\exists$Intro، مقدمه $\varphi(t)$ است که در آن t ترمی بسته، یعنی ترمی بدون متغیر، است. چنین استنتاجی درست است—یعنی با شِمای قاعدهٔ $\exists$Intro تطابق دارد—اگر فرمول φ، متغیر x و ترم بستهٔ tای وجود داشته باشند که نتیجه $\exists x\,\varphi$ و مقدمه $\varphi[t/x]$ باشد. $\exists$Elim اجازه می‌دهد فرض‌های به شکل $\varphi(c)$ را مرخص کنیم؛ یعنی برای هر استنتاج ثابت cای هست و فرض‌های به شکل $\varphi[c/x]$ را می‌توان مرخص کرد. همهٔ فرض‌های مرخص‌شده در یک استنتاج باید از همان c استفاده کنند. این ثابت متغیر ویژهٔ استنتاج $\exists$Elim نام دارد. استنتاج فقط وقتی درست است که c در هیچ فرض باز دیگری جز $\varphi(c)$ مرخص‌شونده، در ψ، یا در φ ظاهر نشود. این شرط را *شرط متغیر ویژه* می‌نامند.

برهانها در **N1c** و **N1i** درخت‌های متناهیِ رخدادهای فرمول هستند که به‌طور استقرایی از فرض‌ها با استفاده از قواعد استنتاج ساخته می‌شوند. هر برگ یک فرض است که ممکن است برچسب ترخیص داشته باشد، و هر فرمول دیگر از فرمولهای بی‌واسطهٔ بالای خود به‌وسیلهٔ یکی از قواعد استنتاج دستگاه به دست می‌آید. اگر رخدادی از یک فرمول به‌عنوان فرض در درخت بالای یک استنتاج، با استنتاجی بالای آن مرخص نشده باشد، در آن استنتاج *باز* نامیده می‌شود.

تعریف 3.4. *برهانها* در **N1c** و **N1i** درخت‌هایی متناهی از فرمولها هستند که به روش زیر به‌طور استقرایی ساخته می‌شوند:

1. هر فرمول دارای برچسب ترخیص، مانند x یا y، به‌تنهایی برهان است. در برهانی که از یک فرمول تشکیل شده است، آن فرمول یک فرض باز به شمار می‌آید.

2. اگر R قاعده‌ای با یک، دو، یا سه مقدمهٔ φ_1، φ_2، φ_3 و نتیجهٔ φ باشد، و δ_1، δ_2 و δ_3 به‌ترتیب برهانهایی منتهی به φ_1، φ_2 و φ_3 باشند، آنگاه به‌ترتیب

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{array}}{\varphi}\,R \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi}\,R \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \varphi_2\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \varphi_3\end{array}}{\varphi}\,R$$

برهان است، مشروط بر اینکه برچسب‌های فرض در برهانها سازگار باشند—هیچ دو فرمول متفاوتی برچسب ترخیص یکسان نداشته باشند— و استنتاج‌ها کاربردهای درست R باشند.

3. بالاترین رخدادهای فرمول در برهان تازه، هنگامی فرض‌های *باز* آن برهان به شمار می‌آیند که فرض‌های باز δ_1، δ_2، یا δ_3 باشند، جز رخدادهایی که قاعده مرخص می‌کند. اگر قاعده برچسب x یا y داشته باشد، در $\to$Intro و $\neg$Intro همهٔ فرض‌های باز دارای برچسب x در δ_1؛ در $\exists$Elim همهٔ فرض‌های باز دارای برچسب x در δ_2؛ و در $\vee$Elim همهٔ فرض‌های باز دارای برچسب x در δ_2 و همهٔ فرض‌های باز دارای برچسب y در δ_3 مرخص می‌شوند.

برهانهایی که در ساخت استقرایی برهان به کار می‌روند *زیر-برهان‌های* آن نامیده می‌شوند. زیر-برهانهای منتهی به مقدمات یک استنتاج، *زیر-برهانهای بی‌واسطهٔ* آن استنتاج‌اند. قواعد **N1c** و **N1i** در جدول 3.2 آمده‌اند.

$$\rightarrow\text{Elim}\ \frac{\varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \qquad\qquad \rightarrow\text{Intro}\ \frac{\begin{array}{c}[\varphi]^x \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ x$$

$$\wedge\text{Elim}_1\ \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$$

$$\wedge\text{Elim}_2\ \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \qquad\qquad \wedge\text{Intro}\ \frac{\psi \qquad \varphi}{\varphi \wedge \psi}$$

$$\vee\text{Elim}\ \frac{\begin{array}{c}[\psi]^y \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^x \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \varphi \vee \psi}{\chi}\ x\,y \qquad\qquad \vee\text{Intro}_1\ \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$$

$$\vee\text{Intro}_2\ \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

$$\neg\text{Elim}\ \frac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot} \qquad\qquad \neg\text{Intro}\ \frac{\begin{array}{c}[\varphi]^x \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ x$$

$$\forall\text{Elim}\ \frac{\forall x\, \varphi(x)}{\varphi(t)} \qquad\qquad \forall\text{Intro}\ \frac{\varphi(a)}{\forall x\, \varphi(x)}$$

$$\exists\text{Elim}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi(a)]^x\\ \vdots\\ \chi\end{array}\qquad \exists x\,\varphi(x)}{\chi}\,x \qquad\qquad \exists\text{Intro}\,\dfrac{\varphi(t)}{\exists x\,\varphi(x)}$$

$$\bot_C\,\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^x\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,x \qquad\qquad \bot_I\,\dfrac{\bot}{\varphi}$$

جدول 3.2: قواعد **N1i** و **N1c**. در $\forall$Intro، ثابت a نباید در نتیجه یا در هیچ فرضِ باز ظاهر شود. در $\exists$Elim، a نباید در مقدمهٔ اصلی، نتیجه، یا هیچ فرضِ بازی جز فرضِ مرخص‌شوندهٔ $\varphi(a)^x$ ظاهر شود. **N1i** شامل $\bot_C$ نیست.

تعریف 3.5. *ارتفاع* $\mathrm{ht}(\delta)$ برای برهان δ به روش زیر به‌طور استقرایی تعریف می‌شود.

1. اگر δ فقط از یک فرض تشکیل شده باشد، $\mathrm{ht}(\delta) = 0$.
2. اگر δ به استنتاجی تک‌مقدمه‌ای با زیر-برهان بی‌واسطهٔ δ_1 پایان یابد، آنگاه $\mathrm{ht}(\delta) = \mathrm{ht}(\delta_1) + 1$.
3. اگر δ به استنتاجی دومقدمه‌ای با زیر-برهانهای بی‌واسطهٔ δ_1 و δ_2 پایان یابد، آنگاه $\mathrm{ht}(\delta) = \max(\mathrm{ht}(\delta_1), \mathrm{ht}(\delta_2)) + 1$.

4. اگر δ به $\vee\mathrm{Elim}$ با زیر-برهانهای بی‌واسطهٔ δ_1، δ_2 و δ_3 پایان یابد، آنگاه $\mathrm{ht}(\delta) = \max(\mathrm{ht}(\delta_1), \mathrm{ht}(\delta_2), \mathrm{ht}(\delta_3)) + 1$.

اگر دنبالهٔ S برهانی با ارتفاع $\leq n$ داشته باشد، می‌نویسیم $\vdash_n S$.

مثال 3.6. در **N1i**، هر فرمول به‌عنوان برهانی از خودش در مقام یک فرض باز به شمار می‌آید. پس

$$\varphi \wedge \psi^x$$

یک برهان δ_1 با ارتفاع 0 است. از δ_1 می‌توانیم با اعمال یکی از دو صورت $\wedge\mathrm{Elim}$، دو برهان δ_2 و δ_3 به دست آوریم:

$$\dfrac{\varphi \wedge \psi^x}{\psi}\wedge\mathrm{Elim}_2 \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi^x}{\varphi}\wedge\mathrm{Elim}_1$$

زیر-برهان بی‌واسطهٔ آخرین استنتاج در هر دو δ_2 و δ_3 همان δ_1 است. هر دو برهان رخداد $\varphi \wedge \psi$ را به‌عنوان فرض باز دارند و $\mathrm{ht}(\delta_2) = \mathrm{ht}(\delta_3) = 1$.

قاعدهٔ $\wedge\mathrm{Intro}$ برای توجیه نتیجه‌ای به شکل $\psi \wedge \varphi$ به دو مقدمهٔ ψ و φ نیاز دارد. بنابراین عبارت زیر برهان δ_4 است:

$$\dfrac{\delta_2\left\{\dfrac{\varphi \wedge \psi^x}{\psi}\wedge\mathrm{Elim}_2 \quad \dfrac{\varphi \wedge \psi^x}{\varphi}\wedge\mathrm{Elim}_1\right\}\delta_3}{\psi \wedge \varphi}\wedge\mathrm{Intro}$$

ارتفاع آن $\mathrm{ht}(\delta_4) = \max(\mathrm{ht}(\delta_2), \mathrm{ht}(\delta_3)) + 1 = \max(1, 1) + 1 = 2$ است. این برهان دو رخداد $\varphi \wedge \psi$ به‌عنوان فرض دارد و هر دو بازند.

سرانجام می‌توانیم $\rightarrow\mathrm{Intro}$ را اعمال کنیم و δ_5 را به دست آوریم:

$$x\,\dfrac{\dfrac{\delta_2\left\{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\psi}\wedge\mathrm{Elim}_2 \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\varphi}\wedge\mathrm{Elim}_1\right\}\delta_3}{\psi \wedge \varphi}\wedge\mathrm{Intro}}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)}\rightarrow\mathrm{Intro}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

ارتفاع آن $\mathrm{ht}(\delta_4) + 1 = 3$ است. استنتاج $\to$Intro همهٔ رخدادهای فرض‌های به شکل $\varphi \wedge \psi$ با برچسب x، یعنی هر دو فرض باز پیشینِ زیربرهان بی‌واسطه، را مرخص می‌کند. چون این‌ها تنها فرض‌های δ_5 هستند، هیچ فرض بازی ندارد و از این رو برهانی برای فرمول پایانی آن، یعنی $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$، است.

3.3 استنتاج طبیعی با دنباله‌ها: N2c و N2i

برهان δ در **N1c** یا **N1i** نشان می‌دهد که فرمول پایانی آن، یعنی φ، از فرض‌های بازش به دست می‌آید. اگر Γ مجموعهٔ فرمولهای ψ باشد که ψ^x به‌عنوان فرض باز در δ ظاهر می‌شود، می‌توانیم این را به صورت $\delta \vdash \Gamma \Rightarrow \varphi$ بنویسیم. این امر پیشنهاد می‌کند که دستگاه استنتاج طبیعی را برای دنباله‌ها نیز صورت‌بندی کنیم. در چنین دستگاهی، هر دنباله اطلاعات مربوط به فرض‌های بازی را حمل می‌کند که فرمول سمت راست به آن‌ها وابسته است؛ یعنی فرض‌هایی که در زیر-برهان منتهی به آن دنباله بازند. این دستگاه، استنتاج طبیعی با دنباله‌ها یا استنتاج طبیعی «به سبک دنباله‌ای» است و دستگاه‌های حاصل را **N2c** و **N2i** می‌نامیم.

برای نزدیک‌ترکردن تناظر میان **N1** و **N2**، مجموعه‌های Γ در سمت چپ را متشکل از فرمولهای برچسب‌دار $x : \psi$ می‌گیریم. چون قواعد **N1** فقط بر فرمولهای مقدمات، یعنی فرمولهای پایانی زیر-برهانهای بی‌واسطه، عمل می‌کنند، قواعد **N2** نیز فقط بر تالی دنباله عمل می‌کنند. بنابراین می‌توانیم فرمول‌های برچسب‌دار سمت چپ دنباله‌ها را صرفاً بافت بنامیم.

به جای فرض‌ها، بالاترین دنباله‌های برهان‌های **N2** اصولی به شکل

$$x : \varphi \Rightarrow \varphi.$$

هستند. قواعد دقیقاً متناظر با قواعد **N1**اند و در جدول 3.4 آمده‌اند.

$$\rightarrow\text{Elim}\ \frac{\varphi\Gamma_2\ \Rightarrow \qquad \varphi\rightarrow\psi\Gamma_1\ \Rightarrow}{\psi\Gamma_1,\Gamma_2\ \Rightarrow} \qquad \rightarrow\text{Intro}\ \frac{\psi x:\varphi,\Gamma\ \Rightarrow}{\varphi\rightarrow\psi\Gamma\ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Elim}_1\ \frac{\varphi\wedge\psi\Gamma\ \Rightarrow}{\varphi\Gamma\ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Elim}_2\ \frac{\varphi\wedge\psi\Gamma\ \Rightarrow}{\psi\Gamma\ \Rightarrow} \qquad \wedge\text{Intro}\ \frac{\psi\Gamma_2\ \Rightarrow \qquad \varphi\Gamma_1\ \Rightarrow}{\varphi\wedge\psi\Gamma_1,\Gamma_2\ \Rightarrow}$$

$$\vee\text{Intro}_2\ \frac{\psi\Gamma\ \Rightarrow}{\varphi\vee\psi\Gamma\ \Rightarrow} \qquad \vee\text{Intro}_1\ \frac{\varphi\Gamma\ \Rightarrow}{\varphi\vee\psi\Gamma\ \Rightarrow}$$

$$\vee\text{Elim}\ \frac{\chi y:\psi,\Gamma_3\ \Rightarrow \qquad \chi x:\varphi,\Gamma_2\ \Rightarrow \qquad \varphi\vee\psi\Gamma_1\ \Rightarrow}{\chi\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3\ \Rightarrow}$$

$$\neg\text{Elim}\ \frac{\varphi\Gamma_2\ \Rightarrow \qquad \neg\varphi\Gamma_1\ \Rightarrow}{\bot\Gamma_1,\Gamma_2\ \Rightarrow} \qquad \neg\text{Intro}\ \frac{\bot x:\varphi,\Gamma\ \Rightarrow}{\neg\varphi\Gamma\ \Rightarrow}$$

$$\forall\text{Elim}\ \frac{\forall x\,\varphi(x)\Gamma\ \Rightarrow}{\varphi(t)\Gamma\ \Rightarrow} \qquad \forall\text{Intro}\ \frac{\varphi(a)\Gamma\ \Rightarrow}{\forall x\,\varphi(x)\Gamma\ \Rightarrow}$$

$$\exists\text{Elim}\ \frac{\chi x:\varphi(a),\Gamma_2\ \Rightarrow \qquad \exists x\,\varphi(x)\Gamma_1\ \Rightarrow}{\chi\Gamma_1,\Gamma_2\ \Rightarrow} \qquad \exists\text{Intro}\ \frac{\varphi(t)\Gamma\ \Rightarrow}{\exists x\,\varphi(x)\Gamma\ \Rightarrow}$$

$$\bot_C\ \frac{\bot x:\neg\varphi,\Gamma\ \Rightarrow}{\varphi\Gamma\ \Rightarrow} \qquad \bot_I\ \frac{\bot\Gamma\ \Rightarrow}{\varphi\Gamma\ \Rightarrow}$$

جدول 3.4: قواعد **N2c** و **N2i**. در $\forall$Intro و $\exists$Elim، ثابت a نباید در دنبالهٔ نتیجه ظاهر شود. Γ_iها مجموعه‌هایی از فرمولهای برچسب‌دار $x : \varphi$ هستند. **N2i** شامل $\bot_C$ نیست.

چون باید، همانند **N1c** و **N1i**، اجازه دهیم قواعد $\to$Intro، $\neg$Intro، $\vee$Elim و $\exists$Elim بتوانند فرضی را مرخص کنند اما ملزم به آن نباشند، کاربردهای قواعد متناظر در **N2c** و **N2i** را حتی هنگامی درست می‌دانیم که فرمولهای بافتی متناظر φ، ψ و $\varphi(a)$ در بافت مقدمهٔ مربوط حضور نداشته باشند.

گزاره 3.7. *اگر δ برهانی در **N1c** یا **N1i** برای φ باشد، آنگاه در **N2c** یا به‌ترتیب **N2i**، برهان δ'ای برای $\Gamma \Rightarrow \varphi$ وجود دارد که در آن Γ مجموعهٔ همهٔ $x : \psi$هایی است که ψ^x فرض باز δ است.*

اثبات. با استقرا بر $n = \mathrm{ht}(\delta)$. اگر $n = 0$، δ تنها فرض باز φ^x است. در این صورت $\Gamma = \{x : \varphi\}$ و $\Gamma \Rightarrow \varphi$ اصلی از **N2c** یا **N2i** است.

اگر $n > 0$، حالت‌ها را برحسب آخرین استنتاج δ جدا می‌کنیم. فقط یک حالت را بررسی می‌کنیم و بقیه را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

فرض کنید آخرین استنتاج $\to$Intro باشد. آنگاه δ چنین پایان می‌یابد:

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi\end{array}}{\psi \to \chi}\to\text{Intro}$$

بنا بر فرض استقرا، در **N2c** یا **N2i** برهان δ_1' برای $\Gamma' \Rightarrow \chi$ وجود دارد که Γ' فرض‌های برچسب‌دار باز در δ_1 هستند. اگر ψ^x فرض باز δ_1 باشد، در استنتاج $\to$Intro مرخص می‌شود و فرض‌های باز δ برابرند با $\Gamma = \Gamma' \setminus \{x : \psi\}$. به بیان دیگر، δ_1' برهانی برای $x : \psi, \Gamma \Rightarrow \chi$ است و می‌توانیم

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

δ' را چنین بگیریم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1'\\ x:\psi,\Gamma\ \Rightarrow\ \chi\end{array}}{\Gamma\ \Rightarrow\ \psi\to\chi}\to\text{Intro}$$

اگر ψ^x فرض باز δ_1 نباشد، $\to$Intro هیچ فرضی را مرخص نمی‌کند و فرض‌های باز δ و δ_1 یکسان‌اند. چون لازم نیست فرمول بافتی $x:\psi$ در مقدمهٔ $\to$Intro در **N2c** و **N2i** حاضر باشد، می‌توانیم δ' را چنین بگیریم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1'\\ \Gamma\ \Rightarrow\ \chi\end{array}}{\Gamma\ \Rightarrow\ \psi\to\chi}\to\text{Intro}$$

حالت‌هایی که δ به قاعده‌ای دیگر پایان می‌یابد مشابه‌اند. □

گزاره 3.8. *اگر δ برهانی در **N2c** یا **N2i** برای $\Gamma\Rightarrow\varphi$ باشد، آنگاه در **N1c** یا به‌ترتیب **N1i**، برهان δ'ای با فرمول پایانی φ و فرض باز ψ^x برای هر $x:\psi\in\Gamma$ وجود دارد.*

اثبات. باز با استقرا بر ارتفاع n برهان δ پیش می‌رویم. اگر $n=0$، δ اصل $x:\varphi\Rightarrow\varphi$ است و برهان δ' همان فرض φ^x است.
اگر $n>0$، حالت‌ها را برحسب آخرین استنتاج δ جدا می‌کنیم. برای نمونه، اگر آن استنتاج $\to$Intro باشد، δ به یکی از دو شکل زیر پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ x:\psi,\Gamma\ \Rightarrow\ \chi\end{array}}{\Gamma\ \Rightarrow\ \psi\to\chi}\to\text{Intro}\qquad\text{یا}\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma\ \Rightarrow\ \chi\end{array}}{\Gamma\ \Rightarrow\ \psi\to\chi}\to\text{Intro}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

بنا بر فرض استقرا، در **N1c** یا **N1i** برهان δ'_1ای برای χ وجود دارد. در حالت نخست ψ^x فرض باز δ'_1 است و در حالت دوم نیست. می‌توانیم برهان δ' را به‌ترتیب چنین بگیریم:

$$x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta'_1\\ \chi\end{array}}{\psi\to\chi}\to\text{Intro}\qquad\text{یا}\qquad\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta'_1\\ \chi\end{array}}{\psi\to\chi}\to\text{Intro}$$

□

3.4 ترجمه از G2i به N2i

مقدم‌های دنباله‌ها در **G2i** چندمجموعه‌های Γ از فرمولها هستند، حال آنکه مقدم‌های دنباله‌ها در **N2i** مجموعه‌های Γ' از فرمول‌های برچسب‌دارند که هر برچسب در آن‌ها فقط یک بار ظاهر می‌شود. می‌گوییم مجموعهٔ Γ' از فرمولهای برچسب‌دار با چندمجموعهٔ Γ متناظر است اگر برای هر فرمول φ، شمار عضوهای Γ' به شکل $x:\varphi$ کمتر یا مساوی چندگانگی φ، یعنی شمار نسخه‌های φ، در Γ باشد.

گزاره 3.9. *اگر $\mathbf{G2i}+\mathrm{Cut}\vdash\Gamma\Rightarrow\Delta$، آنگاه $\mathbf{N2i}\vdash\Gamma'\Rightarrow\chi$، که در آن اگر Δ تهی باشد $\chi\equiv\bot$، و اگر $\Delta=\{\varphi\}$ باشد $\chi\equiv\varphi$ است؛ و Γ' با Γ متناظر است.*

اثبات. نشان می‌دهیم اگر π برهانی برای $\Gamma\Rightarrow\Delta$ در $\mathbf{G2i}+\mathrm{Cut}$ باشد، Γ'ای متناظر با Γ و برهان δای برای $\Gamma'\Rightarrow\chi$ در **N2i** وجود دارد. بر $n=\mathrm{ht}(\pi)$ استقرا می‌کنیم.

اگر $n=0$، π یک اصل است. اگر اصل $\Rightarrow\bot$ باشد، δ اصل $x:\bot\Rightarrow\bot$ است؛ یعنی $\Gamma'=\{x:\bot\}$ و $\chi\equiv\bot$. اگر π اصلی به شکل $\varphi\Rightarrow\varphi$ باشد، δ برابر $x:\varphi\Rightarrow\varphi$ است.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اگر $n > 0$، π به قاعده‌ای R پایان می‌یابد. فرض استقرا وجود برهانهایی در **N2i** را برای دنباله‌های متناظر با مقدمات آن قاعده تضمین می‌کند. با تغییر برچسب‌ها و، در صورت لزوم، تغییر نام متغیرهای ویژه، فرض می‌کنیم برچسب‌های ترخیص در این برهان‌ها دوبه‌دو متمایزند، متغیرهای ویژهٔ نسخه‌های مقدمات نسبت به یکدیگر و نسبت به نتیجه تازه‌اند، و برچسب x فقط بالای استنتاجی که آن را مرخص می‌کند ظاهر می‌شود، اگر اصلاً مرخص شود. سپس نشان می‌دهیم چگونه می‌توان این برهانها را برای ساختن برهانی از یک $\Gamma' \Rightarrow \chi$ مناسب ترکیب کرد. حالت‌ها را برحسب R جدا می‌کنیم.

1. اگر R برابر WR باشد، π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{WR}$$

اعمال فرض استقرا بر π_1، برهانی برای $\Gamma' \Rightarrow \bot$ می‌دهد. با اعمال $\bot_I$، برهانی برای $\Gamma' \Rightarrow \varphi$ به دست می‌آوریم.

2. اگر R برابر WL باشد، π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{WL}$$

فرض استقرا بر π_1، برهانی برای $\Gamma' \Rightarrow \chi$ می‌دهد که همان را δ می‌گیریم. توجه کنید اگر Γ' با Γ متناظر باشد، با φ, Γ نیز متناظر است: شمار $x : \varphi$ها در Γ' از شمار نسخه‌های φ در Γ بیشتر نیست و بنابراین از شمار نسخه‌های آن در چندمجموعهٔ φ, Γ نیز بیشتر نیست.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

3. اگر R برابر CL باشد، π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi,\varphi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\varphi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\,\mathrm{CL}$$

فرض استقرا بر π_1، برهان δ_1ای برای $\Pi,\Gamma' \Rightarrow \chi$ می‌دهد که در آن $\Pi \subseteq \{x:\varphi, y:\varphi\}$. اگر $\Pi = \{x:\varphi, y:\varphi\}$، پس از تازه‌کردن دیگر برچسب‌ها، همهٔ فرمولهای برچسب‌دار $y:\varphi$ در δ_1 را با $x:\varphi$ جایگزین می‌کنیم. چون x در بافت دنبالهٔ پایانی δ_1 ظاهر می‌شود، می‌توان فرض کرد هیچ استنتاجی در δ_1 فرمولی به شکل $x:\psi$ را مرخص نمی‌کند؛ یعنی هیچ $x:\psi$ در سمت چپ دنباله‌ای از δ_1 فعال نیست. در نتیجه، حاصل همچنان برهانی در **N2i** است.

4. اگر R برابر $\to$R باشد، π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi,\Gamma \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi\to\psi}\,\to\mathrm{R}$$

بنا بر فرض استقرا، برهان δ_1ای برای $x:\varphi,\Gamma' \Rightarrow \psi$ یا $\Gamma' \Rightarrow \psi$ وجود دارد که Γ' با Γ متناظر است. برچسب x را در δ_1 تازه می‌کنیم و δ را حاصل اعمال $\to$Intro بر δ_1 می‌گیریم؛ در حالت نخست x مرخص می‌شود و در حالت دوم قاعده هیچ فرضی را مرخص نمی‌کند.

5. اگر R برابر $\to$L باشد، π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\varphi\to\psi,\Gamma_1,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta}\,\to\mathrm{L}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

فرض استقرا برهان δ_1ای برای $\Gamma_1' \Rightarrow \varphi$ و δ_2ای برای $x : \psi, \Gamma_2' \Rightarrow \chi$ یا $\Gamma_2' \Rightarrow \chi$ می‌دهد. اگر δ_2 شکل دوم را داشته باشد، خود آن می‌تواند δ باشد. در غیر این صورت، برچسب‌ها و متغیرهای ویژهٔ δ_1 و δ_2 را به‌طور سازگار تازه می‌کنیم تا در گرفتن نسخه‌های برهان هیچ برچسب یا متغیر ویژه‌ای گرفتار نشود و هیچ برچسبی میان دو برهان مشترک نباشد. آنگاه بافتِ پیوستهٔ Γ_1', Γ_2' با چندمجموعهٔ Γ_1, Γ_2 متناظر است. چون $x : \psi$ در دنبالهٔ پایانی δ_2 ظاهر می‌شود، در هیچ استنتاج دارای برچسب ترخیص x در δ_2 فعال نیست. هر اصل $x : \psi \Rightarrow \psi$ در δ_2 را، با نسخه‌ای تازه و بی‌گرفتاری، با برهان δ_3 زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\dfrac{x : \varphi \to \psi \;\Rightarrow\; \varphi \to \psi \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma_1' \;\Rightarrow\; \varphi\end{array}}{x : \varphi \to \psi, \Gamma_1' \;\Rightarrow\; \psi}\;{\to}\mathrm{Elim}$$

و هر رخداد $x : \psi$ در δ_2 را با $x : \varphi \to \psi$ جایگزین می‌کنیم. حاصل $\delta_2[\delta_3/x : \psi]$، برهانی برای $x : \varphi \to \psi, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \chi$ است.

6. اگر R برابر $\wedge\mathrm{R}$ باشد، π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}\;\wedge\mathrm{R}$$

فرض استقرا برهان δ_1 برای $\Gamma_1' \Rightarrow \varphi$ و δ_2 برای $\Gamma_2' \Rightarrow \psi$ می‌دهد. با تازه‌کردن برچسب‌ها و متغیرهای ویژه در δ_2 تضمین می‌کنیم هیچ‌یک با δ_1 مشترک نباشد. آنگاه بافت پیوستهٔ Γ_1', Γ_2' با Γ_1, Γ_2 متناظر است. با اعمال $\wedge\mathrm{Intro}$ بر دنباله‌های پایانی δ_1 و δ_2، برهان δ را به دست می‌آوریم.

7. اگر R برابر $\wedge\mathrm{L}$ باشد، برای نمونه π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\varphi\wedge\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\wedge\mathrm{L}$$

بنا بر فرض استقرا، برهان δ_1ای برای $x:\varphi,\Gamma'\Rightarrow\chi$ یا $\Gamma'\Rightarrow\chi$ وجود دارد و Γ' با Γ متناظر است. در حالت دوم می‌توانیم $\delta=\delta_1$ بگیریم. در حالت نخست، چون $x:\varphi$ در دنبالهٔ پایانی ظاهر می‌شود، در هیچ استنتاج دارای برچسب ترخیص x در δ_1 فعال نیست. هر اصل $x:\varphi\Rightarrow\varphi$ را با نسخه‌ای تازه و بی‌گرفتاری از برهان δ_2 زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\dfrac{x:\varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \varphi\wedge\psi}{x:\varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \varphi}\wedge\mathrm{Elim}_1$$

و هر رخداد $x:\varphi$ را با $x:\varphi\wedge\psi$ جایگزین می‌کنیم؛ یعنی $\delta_1[\delta_2/x:\varphi]$ را می‌گیریم. این حاصل برهانی برای $x:\varphi\wedge\psi,\Gamma'\Rightarrow\chi$ است.

8. اگر R برابر Cutباشد، π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\Gamma_1,\Gamma_2 \;\Rightarrow\; \Delta}\mathrm{Cut}$$

فرض استقرا برهان δ_1 برای $\Gamma_1'\Rightarrow\varphi$ و δ_2 برای $x:\varphi,\Gamma_2'\Rightarrow\chi$ یا $\Gamma_2'\Rightarrow\chi$ می‌دهد. در حالت دوم، $\delta=\delta_2$ می‌گیریم. در غیر این صورت، برچسب‌ها و متغیرهای ویژه را در نسخه‌های δ_1 و δ_2 تازه می‌کنیم و هر اصل $x:\varphi\Rightarrow\varphi$ در δ_2 را به‌گونه‌ای بی‌گرفتاری با نسخه‌ای تازه از δ_1 جایگزین می‌کنیم. در نتیجه $\delta=\delta_2[\delta_1/x:\varphi]$، برهانی برای $\Gamma_1',\Gamma_2'\Rightarrow\chi$ است.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

حالت‌های باقی‌مانده مشابه‌اند. □

3.5 ترجمه از N2 به G2

گزاره 3.10. اگر $\mathbf{N2c}\ (\mathbf{N2i}) \vdash \Gamma \Rightarrow \varphi$، آنگاه $\mathbf{G2c}\ (\mathbf{G2i}) + \mathrm{Cut} \vdash \Gamma' \Rightarrow \Delta$، که در آن Γ' چندمجموعهٔ فرمولهایی است که با حذف برچسب‌ها از Γ حاصل می‌شود؛ و اگر $\varphi \not\equiv \bot$، $\Delta = \{\varphi\}$، و اگر $\varphi \equiv \bot$، $\Delta = \emptyset$ است.

اثبات. باز بر ارتفاع برهان δ برای $\Gamma \Rightarrow \varphi$ استقرا می‌کنیم. اگر δ اصل $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ باشد، π اصل متناظر $\varphi \Rightarrow \varphi$، یا در صورت $\varphi \equiv \bot$، اصل $\bot \Rightarrow$ است.

اگر δ به قاعده‌ای استنتاجی پایان یابد، حالت‌ها را جدا می‌کنیم:

1. اگر R برابر $\to$Intro با فرمول اصلی $\psi \to \chi$ باشد و $x : \psi$ در بافت مقدمه، اما نه در بافت نتیجه، حضور داشته باشد، آنگاه δ چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ x : \psi, \Gamma \Rightarrow \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \psi \to \chi}\ \to\text{Intro}$$

اگر $\chi \not\equiv \bot$، فرض استقرا برهان π_1ای برای $\psi, \Gamma' \Rightarrow \chi$ می‌دهد و با اعمال $\to$R، π را به دست می‌آوریم. اگر $\chi \equiv \bot$، فرض استقرا برهانی برای $\psi, \Gamma' \Rightarrow$ می‌دهد؛ نخست با WR $\bot$ را به تالی می‌افزاییم و سپس $\to$R را اعمال می‌کنیم.

2. اگر R برابر $\to$Intro باشد، اما $x : \psi$ در بافت مقدمه حضور نداشته باشد، δ چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma \;\Rightarrow\; \chi\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \psi \to \chi}\to\text{Intro}$$

فرض استقرا برهان π_1ای برای $\Gamma' \Rightarrow \chi$ می‌دهد؛ یا اگر $\chi \equiv \bot$ باشد، برای $\Gamma' \Rightarrow$. با WL فرمول ψ را به مقدم می‌افزاییم؛ در حالت دوم سپس با WR، $\bot$ را نیز به تالی می‌افزاییم؛ و سرانجام $\to$R را اعمال می‌کنیم.

3. اگر R برابر $\to$Elim باشد، δ چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \psi \to \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \varphi}\to\text{Elim}$$

که در آن بافت Γ از پیوستن Γ_1 و Γ_2 حاصل می‌شود. فرض استقرا برهان π_1 برای $\Gamma'_1 \Rightarrow \psi \to \varphi$ و π_2 برای $\Gamma'_2 \Rightarrow \psi$ می‌دهد. اگر φ و ψ هیچ‌کدام $\bot$ نباشند، برهان π را چنین به دست می‌آوریم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma'_1 \;\Rightarrow\; \psi \to \varphi\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma'_2 \;\Rightarrow\; \psi\end{array} \quad \varphi \;\Rightarrow\; \varphi}{\psi \to \varphi, \Gamma'_2 \;\Rightarrow\; \varphi}\to\text{L}}{\Gamma'_1, \Gamma'_2 \;\Rightarrow\; \varphi}\text{Cut}$$

اگر $\psi \equiv \bot$، فرض استقرا بر δ_2 برهانی برای $\Gamma'_2 \Rightarrow$ می‌دهد؛ پیش از $\to$L با WR، $\bot$ را به تالی می‌افزاییم. اگر $\varphi \equiv \bot$، مقدمهٔ راست $\to$L را اصل $\bot \Rightarrow$ می‌گیریم؛ در نتیجه $\to$L و سپس Cutتالی را تهی نگه می‌دارند. اگر هر دو هم‌ارز $\bot$ باشند، هر دو اصلاح را هم‌زمان انجام می‌دهیم.

چندمجموعهٔ حاصل از پیوستن Γ'_1 و Γ'_2 ممکن است با Γ' یکسان نباشد. برای نمونه، اگر هر دو Γ_1 و Γ_2 شامل $x : \chi$ باشند، چندمجموعهٔ پیوسته دو نسخه از χ دارد، اما بافت پیوستهٔ برچسب‌دار فقط یک نسخه دارد. این تفاوت را با افزودن استنتاج‌های مناسب CL برطرف می‌کنیم.

4. اگر R برابر $\bot_C$باشد، δ چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ x : \neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \bot\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,\bot_C$$

بنا بر فرض استقرا، برهان π_1ای برای $\neg\varphi, \Gamma' \Rightarrow$ وجود دارد. برهان π را چنین می‌گیریم:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \neg\varphi, \Gamma' \Rightarrow\end{array}}{\Gamma' \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{Cut}$$

حالت‌های باقی‌مانده مشابه‌اند و در همه‌جا بافت‌ها را با پیوستن، نه با اجتماع مجموعه‌ای، ترکیب می‌کنیم. فقط ترجمهٔ $\bot_C$ به برهان πای با بیش از یک فرمول در تالی می‌انجامد. بنابراین ترجمهٔ یک برهان در **N2i**، برهانی در **G2i** + Cut است. □

3.6 مقدمه

اگر شرطی $\varphi \to \psi$ را اثبات کرده باشید، شاید بتوانید با $\to$Elim از آن در برهان برای ψ استفاده کنید. البته برای این کار به برهان δ_1 برای φ نیز نیاز دارید. برهان شما برای $\varphi \to \psi$ به احتمال زیاد به $\to$Intro پایان می‌یابد؛ قاعده‌ای که برهان δ_2 برای ψ از فرض باز φ را به برهانی برای $\varphi \to \psi$ تبدیل می‌کند. اگر چنین باشد، برهان نهایی شما این شکل را دارد:

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \varphi\end{array}}{\psi}\to\text{Elim}$$

راهبرد شما از این جهت کارآمد است که چیزی را که از پیش داشتید، یعنی برهانی برای $\varphi \to \psi$، دوباره به کار بردید؛ اما خود برهان کارآمد نیست. معرفی $\varphi \to \psi$ فقط برای حذف بی‌درنگ آن، راهی انحرافی به نظر می‌رسد. باید راه مستقیم‌تری برای اثبات کردن ψ وجود داشته باشد.

در واقع همیشه چنین راهی هست. «انحراف»هایی مانند بالا— معرفی که بی‌درنگ حذف در پی آن می‌آید—همیشه از برهانهای استنتاج طبیعی حذف‌شدنی‌اند. این فرایند *نرمال‌سازی* نام دارد و حاصل آن یک برهان *نرمال*، یا برهان در صورت *نرمال*، است.

اثبات این نتیجه، مانند قضیهٔ حذف برش در حساب دنباله‌ای، تا اندازه‌ای درگیر است و بررسی حالت‌های فراوانی می‌طلبد. اثبات آن برای **N1c** کلاسیک دشوارتر از **N1i** شهودگرایانه است. همان‌گونه که حذف برش نشان می‌دهد با قاعدهٔ Cut در حساب دنباله‌ای چیز بیشتری را نمی‌توان اثبات کرد، نرمال‌سازی نشان می‌دهد استفاده از انحراف‌ها چیزی بیش از پرهیز از آن‌ها اثبات نمی‌کند. شباهت‌های دیگری نیز هست: برهان نرمال ممکن است بسیار بلندتر از کوتاه‌ترین برهان دارای انحراف برای همان نتیجه باشد، درست همان‌گونه که برهانهای حساب دنباله‌ای با برش می‌توانند بسیار کوتاه‌تر از کوتاه‌ترین برهان بدون برش باشند. خاصیت زیر-فرمول، یعنی اینکه همواره می‌توان نتیجه‌ای را اثبات کرد و در این کار تنها زیر-فرمولهای آن نتیجه و فرض‌های بازِ برهان را به کار برد، برای استنتاج طبیعی از نرمال‌سازی نتیجه می‌شود، همان‌گونه که برای حساب دنباله‌ای از حذف برش نتیجه می‌شود.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

3.7 قضیهٔ نرمال‌سازی

برهان هنگامی در صورت *نرمال* است که هیچ قطعهٔ برشی نداشته باشد. آشکارا این امر درست است اگر و تنها اگر نتوان هیچ تبدیل جایگشتی یا تبدیل کاهشی بر آن اعمال کرد. *نرمال‌کردن* برهان یعنی تبدیل آن به برهانی نرمال با اعمال تبدیل‌های جایگشتی و کاهشی تا زمانی که هیچ برشی باقی نماند. اینکه این کار همواره ممکن است محتوای *قضیهٔ نرمال‌سازی* است.

قضیه 3.11. هر **N1i**-برهان δ *نرمال می‌شود؛ یعنی می‌توان آن را به برهان* δ' *بدون برش تبدیل کرد.*

اثبات. با استقرا بر رتبه و طول برش δ. فرض استقرا این است که هر برهان با رتبهٔ برش کمتر، یا با همان رتبهٔ برش و طول برش کمتر، نرمال می‌شود.

اگر طول برش 0 باشد، هیچ برشی وجود ندارد و δ از پیش نرمال است. پس فرض کنید رتبه و طول برش δ هر دو $0 <$ باشند. یک قطعهٔ برشی بیشینه، بالاترین و راست‌ترین را برگزینید. اگر طول قطعهٔ برشی $1 <$ باشد، یک تبدیل جایگشتی اعمال کنید. اگر طول آن 1 باشد، تبدیل کاهشی متناظر را اعمال کنید. حاصل برهان تازه‌ای است که یا همان رتبهٔ برش و طول برش کمتری دارد، یا رتبهٔ برش آن کمتر است؛ بنابراین فرض استقرا اعمال می‌شود. □

راهبرد به‌کاررفته در این اثبات—همیشه پرداختن به برش بیشینهٔ بالاترین و راست‌ترین—ترتیب مشخصی از تبدیل‌ها را برای رساندن برهان به برهان نرمال تعیین می‌کند. اثبات بالا فقط پایان‌یافتن همین راهبرد گزینشی را نشان می‌دهد؛ نشان نمی‌دهد هر ترتیب دلخواه از تبدیل‌های جایگشتی و کاهشی پایان می‌یابد. ادعای دوم *نرمال‌سازی قوی* است و به قضیه‌ای جداگانه و اثباتی مستقل نیاز دارد.

تعریف قطعه و برش را به‌آسانی می‌توان برای **N2i** صورت‌بندی کرد و تبدیل‌های جایگشتی و کاهشی **N1i** مستقیماً به **N2i** ترجمه می‌شوند. در نتیجه، قضیهٔ نرمال‌سازی برای **N2i** نیز برقرار است.

قضیه 3.12. هر **N2i**-برهان δ *نرمال می‌شود؛ یعنی می‌توان آن را به برهان* δ' *بدون برش تبدیل کرد.*

فصل 4

نرمال‌سازی

4.1 تبدیل‌های جایگشتی

برش‌ها در **N1i** قطعه‌هایی هستند که به مقدمهٔ عمدهٔ حذف پایان می‌یابند. یکی از حالت‌های اثبات نرمال‌سازی، کاهش طول برش‌های بیشینه و همراه با آن کاهش طول برشِ برهان است. برشی با طول $1 <$ ممکن است به صورت‌های گوناگونی پایان یابد، بسته به اینکه آخرین رخداد فرمول φ در برش نتیجهٔ $\vee$Elim یا $\exists$Elim باشد و بسته به اینکه مقدمهٔ عمدهٔ کدام استنتاج حذف باشد.

برای نمونه، اگر استنتاج‌های درگیر $\vee$Elim و $\wedge$Elim باشند، فرمول برش $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$ است و زیر-برهان δ_1ای داریم که چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta \vee \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \psi \wedge \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \psi \wedge \chi\end{array}}{\psi \wedge \chi}\,{\scriptstyle x\,y}\ \vee\text{Elim}}{\psi}\ \wedge\text{Elim}_1$$

آخرین رخداد فرمول φ_n در برش، نتیجهٔ $\vee$Elim، یعنی $\psi \wedge \chi$ پایینی، است. رخداد یکی‌مانده‌به‌آخر فرمول φ_{n-1} یکی از مقدمات فرعی $\vee$Elim است.

برای کاهش طول این برش می‌توانیم ترتیب استنتاج‌های $\vee$Elim و $\wedge$Elim را عوض، یا «جایگشت»، کنیم؛ یعنی زیربرهان δ_1 در δ را با برهان زیر

جایگزین کنیم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta\vee\alpha\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi}\wedge\mathrm{Elim}_1\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi}\wedge\mathrm{Elim}_1}{\psi}\vee\mathrm{Elim}\;{\scriptstyle x\,y}$$

برش‌هایی که پیش‌تر در مقدمهٔ $\wedge$Elim زیر $\vee$Elim پایان می‌یافتند، اکنون در مقدمهٔ یکی از استنتاج‌های $\wedge$Elim بالای مقدمات فرعی $\vee$Elim پایان می‌یابند؛ پس طول هر یک یک واحد کاهش یافته است.

افزون بر این، هر برشی که سراسر در δ_2، δ_3 یا δ_4، یا سراسر بیرون از δ_1 در δ قرار دارد بی‌تغییر می‌ماند: همان فرمولها را در بر می‌گیرد و از همان استنتاج‌ها می‌گذرد، پس به‌ویژه رتبه و طول آن با برش متناظر در δ یکسان است. بنابراین رتبهٔ برشِ برهان تازه افزایش نیافته و طول برشِ برهان تازه از برهان پیشین کمتر است.

پس از یک تبدیل جایگشتی، طول دست‌کم یک برش یک واحد کم می‌شود. اگر $\wedge$Elim را از میان $\vee$Elim جایگشت کنیم، در واقع طول دو قطعهٔ برشی کاهش می‌یابد؛ پس در این حالت طول برشِ برهان دست‌کم دو واحد کم می‌شود. این نتیجه برای هر برهان برقرار است. آیا طول برشِ برهان ممکن است با یک چنین جایگشتی بیش از دو واحد کاهش یابد؟ آیا رتبهٔ برش می‌تواند کاهش یابد؟

فرایند انتقال حذف به بالای قاعدهٔ $\vee$Elim یا $\exists$Elim را *تبدیل جایگشتی* می‌نامند. الگوهای برخی جفت‌قاعده‌ها در جدول 4.1 آمده‌اند و بقیه به عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

$$\longrightarrow \quad \vee\mathrm{Elim}\,\dfrac{\wedge\mathrm{Elim}_1\,\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi} \quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array} \quad \theta\vee\alpha}{\psi}\,x\,y$$

$$\vee\mathrm{Elim}\,\dfrac{\wedge\mathrm{Elim}_1\,\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi} \quad \wedge\mathrm{Elim}_1\,\dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi\wedge\chi\end{array}}{\psi} \quad \theta\vee\alpha}{\psi}\,x\,y$$

$$\longrightarrow \quad \to\mathrm{Elim}\,\dfrac{\psi \quad \vee\mathrm{Elim}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi\to\chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi\to\chi\end{array} \quad \theta\vee\alpha}{\psi\to\chi}\,x\,y}{\chi}$$

$$\vee\mathrm{Elim}\,\dfrac{\to\mathrm{Elim}\,\dfrac{\psi \quad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \psi\to\chi\end{array}}{\chi} \quad \to\mathrm{Elim}\,\dfrac{\psi \quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \psi\to\chi\end{array}}{\chi} \quad \theta\vee\alpha}{\chi}\,x\,y$$

$$\longrightarrow \quad \vee\mathrm{Elim}\,\dfrac{\forall\mathrm{Elim}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array}}{\psi(t)} \quad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array} \quad \theta\vee\alpha}{\psi(t)}\,x\,y$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

$$\dfrac{\forall\mathrm{Elim}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array}}{\psi(t)} \qquad \forall\mathrm{Elim}\,\dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\\ \forall x\,\psi(x)\end{array}}{\psi(t)} \qquad \theta\vee\alpha}{\psi(t)}\;\vee\mathrm{Elim}\;{}_{x\,y}$$

جدول 4.1: چند تبدیل جایگشتی برای **N1i**.

تبدیل‌های جایگشتی را برای $\vee$Elim که $\vee$Elim یا $\neg$Elim در پی آن می‌آید بنویسید.

تبدیل‌های جایگشتی را برای $\exists$Elim که $\exists$Elim در پی آن می‌آید بنویسید. توضیح دهید چرا در حالت دوم هیچ شرط متغیر ویژه‌ای نقض نمی‌شود.

باید مطمئن شویم که اعمال تبدیل جایگشتی ممکن نیست شرط متغیر ویژه‌ای را نقض کند. برهان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta\vee\alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \exists x\,\psi(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \exists x\,\psi(x)\end{array}}{\exists x\,\psi(x)}\;\vee\mathrm{Elim}\;{}_{x\,y} \qquad \begin{array}{c}[\psi(c)]^z\\ \vdots\,\delta_5\\ \chi\end{array}}{\chi}\;\exists\mathrm{Elim}\;{}_{z}$$

اگر آن را با برهان زیر جایگزین کنیم، دو نسخهٔ δ_5 را نخست با متغیرهای ویژه و برچسب‌های ترخیص دوبه‌دو تازه تغییر نام می‌دهیم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \theta\vee\alpha\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\theta]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \exists x\,\psi(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi(c_1)]^{z_1}\\ \vdots\,\delta_5^{(1)}\\ \chi\end{array}}{\chi}\;\exists\mathrm{Elim}\;{}_{z_1} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \exists x\,\psi(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi(c_2)]^{z_2}\\ \vdots\,\delta_5^{(2)}\\ \chi\end{array}}{\chi}\;\exists\mathrm{Elim}\;{}_{z_2}}{\chi}\;\vee\mathrm{Elim}\;{}_{x\,y}$$

ممکن است نگران باشیم که متغیر ویژهٔ c_i، برای نمونه، در θ ظاهر شود. در برهان اصلی، فرض θ بالای $\exists$Elim مرخص می‌شود و در فرضی که بالای مقدمهٔ عمدهٔ استنتاج $\exists$Elim باز است ظاهر نمی‌شود؛ پس شرط متغیر ویژه آنجا برقرار است. در برهان تازه، θ تا پس از استنتاج‌های $\exists$Elim مرخص نمی‌شود و بدون تغییر نام شرط متغیر ویژه ممکن بود نقض شود. اما به یاد آورید که برهانهای ما منظم و نسخه‌های δ_5 با متغیرهای ویژهٔ دوبه‌دو تازه‌اند: هر متغیر ویژه فقط متعلق به یک استنتاج است و تنها بالای مقدمهٔ فرعی $\exists$Elim در برهان متناظر ظاهر می‌شود. به‌ویژه، در همین برهان هیچ‌یک از c_1, c_2 در δ_3 یا δ_4 ظاهر نمی‌شود.

این مثال نکتهٔ دیگری را نیز نشان می‌دهد: برهان تازه دو نسخه از δ_5 دارد. اگر δ_5 دارای برشی بیشینه باشد، این تکثیر ممکن است طول برش را ثابت نگه دارد یا حتی افزایش دهد. پس باید تبدیل جایگشتی را فقط هنگامی اعمال کنیم که بدانیم هیچ برش بیشینه‌ای در δ_5 نیست. این امر را با انتخاب همیشگی یک برش بیشینهٔ *بالاترین* تضمین می‌کنیم؛ یعنی برشی بیشینه که زیر-برهان آن— اینجا δ_1—هیچ برش بیشینه‌ای ندارد که بالای آخرین استنتاج در زیر-برهان پایان یابد. بدین‌ترتیب امکان وجود برش‌های بیشینهٔ دیگر در δ_5، و در واقع در δ_2، δ_3 یا δ_4، منتفی می‌شود.

4.2 تبدیل‌های کاهشی

اگر برشی در برهان در **N1i** طول 1 داشته باشد، قطعه‌ای شامل تنها یک رخداد فرمول است. آن فرمول نتیجهٔ معرفی یا نتیجهٔ $\bot_I$، و هم‌زمان مقدمهٔ عمدهٔ حذف است. در اثبات نرمال‌سازی، چنین برش‌هایی با جایگزینی زیر-برهان منتهی به این جفت معرفی/حذف یا جفت $\bot_I$/حذف با برهان تازه‌ای که این دو استنتاج در آن حذف شده‌اند «کاهش» می‌یابند. این جایگزینی ممکن است برش‌های تازه‌ای بسازد، اما برش‌های تازه رتبه‌ای کمتر از برش کاهش‌یافته دارند. هنگامی که یک برش بیشینهٔ بالاترین و راست‌ترین را برمی‌گزینیم، برهان تازه یا طول برش کمتری دارد، چون یک برش بیشینهٔ طول 1 حذف شده، یا رتبهٔ برشِ برهان کاهش می‌یابد، اگر آن برش تنها برش بیشینه بوده باشد.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

برای نمونه، اگر استنتاج‌های درگیر $\to$Intro و $\to$Elim باشند، $\varphi \equiv \psi \to \chi$ و زیر-برهان δ_1ای داریم که چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi\end{array}}{\psi \to \chi}\to\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\end{array}}{\chi}\to\text{Elim}$$

برای حذف این برش، زیربرهان δ_1 در δ را با برهان زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\\ \vdots\,\delta_2[\delta_3/\psi^x]\\ \chi\end{array}$$

منظور از $\delta_2[\delta_3/\psi^x]$، برهانی است که با جایگزینی هر فرض ψ دارای برچسب x در δ_2 با کل برهان δ_3 حاصل می‌شود. این برهان دیگر فرض بازی به شکل ψ با برچسب x ندارد و هیچ فرمول دیگری نیز با همان برچسب ندارد. هر نسخهٔ δ_3 را به‌گونه‌ای بی‌گرفتاری پیوند می‌زنیم: متغیرهای ویژه و برچسب‌های ترخیص داخلی آن را نسبت به δ_2 و نسبت به دیگر نسخه‌ها تازه می‌کنیم. از این رو برهان تازه همان فرمول‌ها و برچسب‌های فرض باز δ_1 را دارد، هرچند بعضی رخدادها ممکن است چند بار تکرار شوند؛ استنتاج‌های δ_2 همان فرض‌های پیشین را مرخص می‌کنند و هر نسخهٔ استنتاج‌های مرخص‌کنندهٔ δ_3 فرض‌های متناظر همان نسخه را مرخص می‌کند.

برش‌های سراسر در δ_2 و برش‌های سراسر بیرون از δ_1 در δ بی‌تغییر می‌مانند. برش‌های هر نسخهٔ تازه‌شدهٔ δ_3 نیز همان فرمولها، رتبه و طول برش‌های متناظر در δ_3 را دارند. انتخاب یک برش بیشینه که هم بالاترین و هم راست‌ترین است تضمین می‌کند هیچ برش بیشینه‌ای در بخش‌های کپی‌شده وجود ندارد. پس با حذف برش بیشینهٔ طول 1، یا طول برش کاهش می‌یابد، یا اگر این تنها برش بیشینه بود، رتبهٔ برش کاهش می‌یابد.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

با این همه دو رخداد ممکن است:

1. با جایگزینی همهٔ فرض‌های ψ^x با δ_3، همهٔ برش‌های δ_3 را چند برابر کرده‌ایم. اگر برخی از آن‌ها بیشینه باشند، طول برشِ برهان تازه ممکن است از طول برشِ برهان پیشین بیشتر شود. باید جلوی این امر را بگیریم. از این رو تبدیل‌های کاهشی را فقط بر برش‌های بیشینه‌ای اعمال می‌کنیم که هم *بالاترین* و هم *راست‌ترین* هستند. اگر برشی بیشینه در δ_3 بود، در شاخه‌ای در سمت راست برش مورد کاهش قرار می‌گرفت؛ و اگر برشی بیشینه در بخش کپی‌شوندهٔ بالای آن بود، برش برگزیده بالاترین نبود. با این انتخاب یا طول برشِ برهان کاهش می‌یابد یا حتی رتبهٔ برش کم می‌شود.

2. اگر فرض ψ^x در δ_2 مقدمهٔ عمدهٔ حذف باشد و آخرین استنتاج δ_3، $\vee\mathrm{Elim}$، $\exists\mathrm{Elim}$، معرفی یا $\bot_I$باشد، با پیوندزدن δ_3 به آن فرض در δ_2 برشی تازه ساخته‌ایم. چیزی که در δ_2 فقط یک فرض بود، اکنون برشی با طول 1 است—نتیجهٔ معرفی یا $\bot_I$و مقدمهٔ عمدهٔ حذف—یا آخرین رخداد فرمول یک قطعهٔ برشی، یعنی مقدمهٔ عمدهٔ حذف و نتیجهٔ $\vee\mathrm{Elim}$ یا $\exists\mathrm{Elim}$. اگر ψ^x مقدمهٔ فرعی $\vee\mathrm{Elim}$ یا $\exists\mathrm{Elim}$ بود، از پیش نخستین رخداد فرمول یک قطعه، و شاید قطعه‌ای برشی، بود. در برهان تازه آن قطعه ممکن است بلندتر شود. اما فرمول سازندهٔ این برش تازه یا قطعهٔ برشی موجود ψ است و $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\psi \to \chi)$. پس گرچه ممکن است برش افزوده یا طول برشی زیاد شده باشد، هیچ‌یک بیشینه نیست. بنابراین یا رتبهٔ برش را کم کرده‌ایم، یا اگر برش‌های هم‌رتبه باقی مانده‌اند، طول برش را کاهش داده‌ایم.

فرایند کاهش برش با طول 1 را *تبدیل کاهشی* یا *تبدیل انحراف* می‌نامند. الگوهای برخی جفت‌قاعده‌ها در جدول 4.2 آمده‌اند و بقیه به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

$$\dfrac{{}_{x}\dfrac{\begin{array}{c}[\psi]^{x}\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi\end{array}}{\psi\to\chi}\,{\to}\mathrm{Intro} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\end{array}}{\chi}\,{\to}\mathrm{Elim} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\\ \vdots\,\delta_2[\delta_3/\psi^{x}]\\ \chi\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \chi\end{array}}{\psi\wedge\chi}\,{\wedge}\mathrm{Intro}}{\psi}\,{\wedge}\mathrm{Elim}_1 \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \chi\end{array}}{\psi\wedge\chi}\,{\wedge}\mathrm{Intro}}{\chi}\,{\wedge}\mathrm{Elim}_2 \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \chi\end{array}$$

$$\dfrac{{}_{x\,y}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi\end{array}}{\psi\vee\chi}\,{\vee}\mathrm{Intro}_1 \qquad \begin{array}{c}[\psi]^{x}\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\chi]^{y}\\ \vdots\,\delta_4\\ \theta\end{array}}{\theta}\,{\vee}\mathrm{Elim}}{\theta} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi\\ \vdots\,\delta_3[\delta_2/\psi^{x}]\\ \theta\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi(c)\end{array}}{\forall x\,\psi(x)}\,{\forall}\mathrm{Intro}}{\psi(t)}\,{\forall}\mathrm{Elim} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2[t/c]\\ \psi(t)\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi(t)\end{array}}{\exists x\,\psi(x)}\,\exists\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}[\psi(c)]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{array}}{\theta}\,\exists\text{Elim}\,x \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \psi(t)\\ \vdots\,\delta_3[t/c][\delta_2/\psi(t)^x]\\ \theta\end{array}$$

جدول 4.2: چند تبدیل کاهشی برای **N1i**.

تبدیل کاهشی را برای $\neg$Intro که $\neg$Elim در پی آن می‌آید بنویسید.

یک حالت دیگر باقی می‌ماند. تعریف برش حالتی را نیز در بر می‌گیرد که طول برش 1 است و φ هم نتیجهٔ $\bot_I$ و هم مقدمهٔ عمدهٔ حذف است. این حالت مانند حالتی بررسی می‌شود که φ نتیجهٔ معرفی است. برای نمونه، برهان زیر را

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\psi\to\chi}\,\bot_I \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_3\\ \psi\end{array}}{\chi}\,\to\text{Elim} \qquad \text{با} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\chi}\,\bot_I$$

جایگزین کنید. در حالت‌های $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ یا $\varphi \equiv \exists x\,\psi(x)$ باید کمی محتاط باشیم. برای نمونه، اگر برهان

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\psi\vee\chi}\,\bot_I \qquad \begin{array}{c}[\psi]^x\\ \vdots\,\delta_3\\ \theta\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\chi]^y\\ \vdots\,\delta_4\\ \theta\end{array}}{\theta}\,\vee\text{Elim}\,x\,y \qquad \text{را با} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \bot\end{array}}{\theta}\,\bot_I$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

جایگزین می‌کردیم، ممکن بود برش تازه‌ای با فرمول برش θ معرفی کنیم و هیچ تضمینی نیست که $\mathrm{dp}(\theta) < \mathrm{dp}(\psi \vee \chi)$! پس باید همانند کاهش $\vee$Elim/$\vee$Intro عمل کنیم و آن را با یکی از دو برهان زیر جایگزین سازیم:

$$\begin{array}{c} \vdots\,\delta_2 \\ \dfrac{\bot}{\psi}\,\bot_I \\ \vdots\,\delta_3 \\ \theta \end{array} \qquad \text{یا} \qquad \begin{array}{c} \vdots\,\delta_2 \\ \dfrac{\bot}{\chi}\,\bot_I \\ \vdots\,\delta_4 \\ \theta \end{array}$$

4.3 قطعه‌ها و برش‌ها

اگر قاعده‌ای معرفی و سپس قاعده‌ای حذف به کار رود، در برهان یک مسیر انحرافی پدید می‌آید؛ بهنجار کردن برهان یعنی حذف چنین مسیرهایی. بااین‌حال، قواعد $\vee$Elim و $\exists$Elim حتی تعریف «مسیر انحرافی‌ای که می‌خواهیم حذف کنیم» را کمی پیچیده می‌کنند. مسئله این است که، به‌سبب این قواعد، تضمینی نیست که در یک مسیر انحرافی قاعدهٔ حذف بی‌درنگ پس از قاعدهٔ معرفی بیاید. ممکن است میان آن‌ها یک $\vee$Elim یا $\exists$Elim قرار گیرد؛ برای نمونه:

$$\dfrac{\dfrac{{}_y\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x\,\chi(x)\end{array} \qquad {}_x\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,\to\text{Intro}}{\varphi\to\psi}\,\exists\text{Elim} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

در واقع، هر تعداد قاعدهٔ $\vee$Elim یا $\exists$Elim می‌تواند $\to$Intro را از $\to$Elim جدا کند؛ برای نمونه:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x\,\chi(x)\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \theta\vee\alpha\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,x\,\to\text{Intro}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,x\,\to\text{Intro}}{\varphi\to\psi}\,\vee\text{Elim}}{\varphi\to\psi}\,y\,\exists\text{Elim}\quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi}\,\to\text{Elim}$$

این مثال نشان می‌دهد که ممکن است یک $\to$Elim واحد در چند مسیر انحرافی دخیل باشد، زیرا پس از بیش از یک $\to$Intro می‌آید. برای درنظرگرفتن همهٔ این امکان‌ها، مسیرهای انحرافی را با استفاده از گونه‌ای دنبالهٔ وقوع‌های فرمول در یک برهان **N1i** تعریف می‌کنیم که به آن‌ها قطعه می‌گوییم. در مثال ما، این دنباله‌ای از وقوع‌های $\varphi\to\psi$ است که در آن نتیجهٔ هر $\vee$Elim یا $\exists$Elim در ادامهٔ مقدمهٔ فرعی آن می‌آید. در این مثال دو چنین قطعه‌ای وجود دارد و هریک سه وقوع از $\varphi\to\psi$ را در بر دارد. تعریف رسمی چنین است.

تعریف 4.1. یک قطعه در برهان **N1i**ای δ دنباله‌ای از وقوع‌های φ_1، ...، φ_n از فرمول یکسان φ در δ است که در آن

1. φ_1 نتیجهٔ $\vee$Elim یا $\exists$Elim نیست؛
2. φ_n مقدمهٔ فرعی $\vee$Elim یا $\exists$Elim نیست؛
3. برای $i=1$، ...، $n-1$، φ_i مقدمهٔ فرعی یک کاربرد از $\vee$Elim یا $\exists$Elim است و φ_{i+1} نتیجهٔ همان استنتاج است که پس از آن مقدمه می‌آید.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

طول آن قطعه n است.

هر قطعه‌ای هدف حذف (یعنی مسیر انحرافی) نیست. قطعه‌هایی که چنین‌اند برش نام دارند.

تعریف 4.2. یک برش قطعه‌ای است که در آن φ_n مقدمهٔ اصلی یک استنتاج حذف است و یا $n = 1$ و $\varphi_1 = \varphi_n$ نتیجهٔ یک استنتاج معرفی یا نتیجهٔ $\bot_I$است، یا $n > 1$.

توجه کنید که لازم نیست قطعهٔ برش با نتیجهٔ یک قاعدهٔ معرفی آغاز شود. تنها شرط این است که به مقدمهٔ اصلی یک قاعدهٔ حذف ختم شود. اما برای آن‌که قطعه‌ای با طول 1 برش به شمار آید، باید با نتیجهٔ یک قاعدهٔ معرفی یا نتیجهٔ $\bot_I$آغاز شود.

تعریف 4.3. رتبهٔ یک برش $\mathrm{dp}(\varphi)$ است. رتبهٔ برش $\mathrm{cr}(\delta)$ در برهان δ بیشینهٔ رتبهٔ برش‌های موجود در δ است و اگر برشی وجود نداشته باشد، برابر صفر است. یک برش در δ بیشینه است هرگاه رتبه‌اش $\mathrm{cr}(\delta)$ باشد، یعنی رتبهٔ بیشینه داشته باشد. *طول برش* δ مجموع طول همهٔ برش‌های بیشینهٔ آن است و اگر برشی وجود نداشته باشد، برابر صفر است.

4.4 ترجمه میان برهان‌ها بهنجار N2i و G2i

می‌توان برهانهای **N2i** را به برهانهای **G2i** ترجمه کرد و برعکس. نخست، ترجمهٔ برهانهای بدون برش **G2i**، برهانهای بهنجار **N2i** به دست می‌دهد.

برای بیان نتیجه به اندکی اصطلاح نیاز داریم تا بتوانیم مقدمه‌های دنباله‌ها در **N2i** و **G2i** را آسان‌تر به هم مربوط کنیم: مجموعهٔ Γ' از فرمولهای برچسب‌دار با چندمجموعهٔ Γ از فرمولهای بی‌برچسب *متناظر* است هرگاه برای هر فرمول φ، تعداد عضوهای Γ' به شکل $x : \varphi$ کمتر یا مساوی فراوانی φ در Γ باشد.

نتیجه 4.4. *اگر برهانی بدون برش در* **G2i** *برای* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *وجود داشته باشد، آنگاه برهان بهنجار* **N2i***ای چون* δ *برای* $\Gamma' \Rightarrow \chi$ *وجود دارد؛ در اینجا اگر* $\Delta = \emptyset$ *باشد* $\chi = \bot$*، و اگر* $\Delta = \{\varphi\}$ *باشد* $\chi = \varphi$ *است. مجموعهٔ* Γ' *از فرمولهای برچسب‌دار با چندمجموعهٔ* Γ *متناظر است؛ یعنی برای هر فرمول* φ*، تعداد عضوهای* Γ' *به شکل* $x : \varphi$ *کمتر یا مساوی فراوانی* φ *(یعنی تعداد نسخه‌های* φ*) در* Γ *است.*

اثبات. با وارسی برهان گزاره 3.9: قواعد معرفی را به انتهای برهانها و قواعد حذف را تنها به بالای برهانها می‌افزاییم؛ پس هرگز قاعده‌ای معرفی را بالای قاعده‌ای حذف پدید نمی‌آوریم. □

بااین‌حال، ترجمهٔ قاعدهٔ Cut که در گزاره 3.9 آمده است می‌تواند در برهان **N2i**ای δ برش پدید آورد. اگر یک برهان **G2i** با Cut پایان یابد و زیر-برهانهای بی‌واسطهٔ آن π_1 و π_2 به‌ترتیب برهان‌هایی برای $\Gamma_1 \Rightarrow \varphi$ و $\varphi, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ باشند، ترجمهٔ π_1، یعنی δ_1، را بر اصول $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ که در ترجمهٔ π_2، یعنی δ_2، رخ می‌دهند پیوند می‌زنیم. اگر δ_1 با قاعده‌ای معرفی پایان یابد که فرمول اصلی‌اش φ باشد و اصل $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ در δ_2 مقدمهٔ اصلی قاعده‌ای حذف باشد، نتیجه در δ یک برش خواهد بود.

همچنین می‌توان برهانهای **N2i** را به برهانهای **G2i** ترجمه کرد. در برهان گزاره 3.10، ترجمهٔ $\wedge$Elim، $\rightarrow$Elim، $\neg$Elim و $\forall$Elim در برهان حاصل **G2i** استنتاج‌های Cut پدید می‌آورد. اما اگر برهان آغازین **N2i** بهنجار باشد، می‌توان از این برش‌ها پرهیز کرد.

فهرست بیشینه‌ای چون S_1، ...، S_n از وقوع‌های دنباله‌ها در یک برهان **N2i**ای δ را شاخه می‌نامیم اگر S_1 یک اصل باشد و هرگاه S_i مقدمهٔ اصلی استنتاجی باشد، S_{i+1} نتیجهٔ آن استنتاج باشد. بنابراین یک شاخه دنباله‌ها را در δ از اصول به سمت پایین دنبال می‌کند، اما وقتی به مقدمهٔ فرعی یک قاعدهٔ حذف برسد متوقف می‌شود. شاخهٔ *اصلی* δ شاخه‌ای است که S_n در آن دنبالهٔ پایانی باشد. هر برهان δ دست‌کم یک شاخهٔ اصلی دارد، زیرا هر قاعده دست‌کم یک مقدمهٔ اصلی دارد (تنها $\wedge$Intro دو مقدمهٔ اصلی دارد).

گزاره 4.5. اگر δ برهان بهنجار **N2i**ای برای $\Gamma \Rightarrow \varphi$ باشد، آنگاه برهان بدون برش **G2i**ای چون π برای $\Gamma' \Rightarrow \Delta$ وجود دارد؛ این برهان هیچ کاربردی از Cut ندارد. Γ' چندمجموعه‌ای از فرمولهاست که با حذف برچسب‌های Γ حاصل می‌شود، و اگر φ برابر $\bot$ نباشد $\Delta = \{\varphi\}$ و اگر برابر باشد $\Delta = \emptyset$ است.

اثبات. این بار بر تعداد استنتاج‌های برهان δ برای $\Gamma \Rightarrow \varphi$ استقرا می‌کنیم. اگر در δ هیچ استنتاجی نباشد، این برهان همان اصل $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ است و π اصل متناظر $\varphi \Rightarrow \varphi$ است، یا اگر $\varphi \equiv \bot$ باشد اصل $\bot \Rightarrow$.

اگر δ با یک قاعدهٔ استنتاج پایان یابد، حالت‌ها را جدا می‌کنیم:

1. اگر R قاعده‌ای معرفی یا $\bot_I$باشد، ترجمه دقیقاً همانند برهان گزاره 3.10 پیش می‌رود و به Cutنیازی ندارد.

2. اگر آخرین قاعدهٔ δ، یعنی R، قاعده‌ای حذف باشد، نکات زیر را در نظر می‌گیریم:

a) یک شاخهٔ اصلی δ از هیچ قاعدهٔ معرفی‌ای نمی‌گذرد؛ وگرنه در آن شاخهٔ اصلی قاعده‌ای معرفی یا $\bot_I$ پیش از قاعده‌ای حذف قرار می‌گرفت و δ بهنجار نبود.

b) چون در شاخه‌های اصلی δ هیچ قاعدهٔ معرفی‌ای نیست، تنها یک شاخهٔ اصلی وجود دارد. (فقط $\wedge$Intro دو مقدمهٔ اصلی دارد؛ بنابراین چند شاخهٔ اصلی باید از مقدمات یک قاعدهٔ $\wedge$Intro عبور کنند.)

c) اگر شاخهٔ اصلی شامل مقدمهٔ اصلی $\vee$Elim یا $\exists$Elim باشد، تنها یک چنین قاعده‌ای وجود دارد و آن نیز آخرین قاعده، یعنی R، است. (در غیر این صورت شاخهٔ اصلی شامل یک قاعدهٔ $\vee$Elim یا $\exists$Elim می‌شد که نتیجه‌اش مقدمهٔ اصلی قاعده‌ای حذف است؛ در آن صورت برهان بهنجار نبود، زیرا می‌توانستیم یک تبدیل جایگشتی اعمال کنیم.)

d) هیچ قاعدهٔ حذف دیگری جز $\vee$Elim و $\exists$Elim فرض‌ها را مرخص نمی‌کند، یعنی بافت سمت چپ دنباله‌ها را تغییر نمی‌دهد. $\vee$Elim و $\exists$Elim نیز فرض‌ها را تنها بالای یک مقدمهٔ فرعی مرخص می‌کنند و بنابراین بافت سمت چپ را فقط در مقدمات فرعی خود تغییر می‌دهند. به بیان دیگر، اگر دنبالهٔ S_i روی شاخهٔ اصلی δ بافت Γ_1 داشته باشد، نتیجهٔ S_{i+1} از استنتاجی که S_i مقدمهٔ اصلی آن است بافت $\Gamma_1' \supseteq \Gamma_1$ دارد.

e) در نتیجه، اگر $x : \chi \Rightarrow \chi$ بالاترین دنبالهٔ S_1 در شاخهٔ اصلی باشد، آنگاه $x : \chi \in \Gamma$.

اکنون حالت‌ها را برحسب صورت χ جدا می‌کنیم. چون هر S_i در شاخهٔ اصلی مقدمهٔ اصلی قاعده‌ای حذف است، این مطلب برای $x : \chi \Rightarrow \chi$ نیز صادق است.

3. فرض کنید $\chi \equiv \theta \wedge \alpha$. آنگاه δ چنین شکلی دارد:

$$\begin{array}{c} \dfrac{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta \wedge \alpha}{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta}\,\wedge\text{Elim}_1 \\ \vdots \\ x : \theta \wedge \alpha, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi \end{array}$$

شاخهٔ اصلی که شامل $x : \theta \wedge \alpha \Rightarrow \theta$ است هیچ مقدمهٔ اصلی $\rightarrow$Intro یا $\neg$Intro و هیچ مقدمهٔ فرعی $\vee$Elim یا $\exists$Elim را در بر ندارد؛ بنابراین فرمول بافتی $x : \theta \wedge \alpha$ در امتداد شاخهٔ اصلی بدون تغییر می‌ماند. ازاین‌رو بافت دنبالهٔ پایانی باید شامل $x : \theta \wedge \alpha$ باشد. افزون‌براین، می‌توانیم برهان δ را با جایگزین‌کردن زیر-برهان منتهی به $\wedge$Elim با $x : \theta \Rightarrow \theta$ و جایگزین‌کردن $x : \theta \wedge \alpha$ با $x : \theta$ در بافت هر دنباله در

امتداد شاخهٔ اصلی، به برهان δ_1 تبدیل کنیم؛ یعنی

$$\begin{array}{c} x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta \\ \vdots \\ x : \theta, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi \end{array} \quad \text{را به} \quad \begin{array}{c} \dfrac{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta \wedge \alpha}{x : \theta \wedge \alpha \;\Rightarrow\; \theta}\,\wedge\mathrm{Elim}_1 \\ \vdots \\ x : \theta \wedge \alpha, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi \end{array}$$

تبدیل کنیم. فرض استقرا بر δ_1 اعمال می‌شود، زیرا تعداد استنتاج‌های δ یک واحد بیش از تعداد استنتاج‌های δ_1 است.

بنا بر فرض استقرا، برهان **G2i**ای چون π_1 برای $\theta, \Gamma_1' \Rightarrow \Delta$ وجود دارد. با اعمال $\wedge\mathrm{L}$، برهان π را به دست می‌آوریم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1 \\ \theta, \Gamma_1' \;\Rightarrow\; \Delta\end{array}}{\theta \wedge \alpha, \Gamma_1' \;\Rightarrow\; \Delta}\,\wedge\mathrm{L}$$

4. اگر $\chi \equiv \theta \vee \alpha$، باید مقدمهٔ اصلی $\vee\mathrm{Elim}$ باشد و این استنتاج باید آخرین استنتاج R در شاخهٔ اصلی باشد. به بیان دیگر، δ چنین شکلی دارد:

$$\dfrac{x : \theta \vee \alpha \;\Rightarrow\; \theta \vee \alpha \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_1 \\ y : \theta, \Gamma_1 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_2 \\ z : \alpha, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \varphi\end{array}}{x : \theta \vee \alpha, \Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow\; \varphi}\,\vee\mathrm{Elim}$$

فرض استقرا بر برهانهای δ_1 و δ_2 اعمال می‌شود؛ برهانهای **G2i**ای π_1 و π_2 را به‌ترتیب برای $\theta, \Gamma_1' \Rightarrow \Delta$ و $\alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \Delta$ به دست می‌آوریم.

با اعمال $\vee$L، π حاصل می‌شود:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \theta,\Gamma_1' \Rightarrow \Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \alpha,\Gamma_2' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\theta\vee\alpha,\Gamma_1',\Gamma_2' \Rightarrow \Delta}\vee\mathrm{L}$$

اگر $\vee$Elim فرض‌های $y:\theta$ یا $z:\alpha$ را مرخص نکند (یعنی این فرض‌ها در بافت مقدمات فرعی حاضر نباشند)، باید چند WL بیفزاییم. برای نمونه:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma_1' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\theta,\Gamma_1' \Rightarrow \Delta}\mathrm{WL} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma_2' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\alpha,\Gamma_2' \Rightarrow \Delta}\mathrm{WL}}{\theta\vee\alpha,\Gamma_1',\Gamma_2' \Rightarrow \Delta}\vee\mathrm{L}$$

5. فرض کنید $\chi\equiv\theta\to\alpha$. آنگاه δ چنین شکلی دارد:

$$\begin{array}{c}\dfrac{x:\theta\to\alpha \Rightarrow \theta\to\alpha \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \Gamma_1 \Rightarrow \theta\end{array}}{x:\theta\to\alpha,\Gamma_1 \Rightarrow \alpha}\to\mathrm{Elim}\\ \vdots\,\delta_2\\ x:\theta\to\alpha,\Gamma_1,\Gamma_2 \Rightarrow \varphi\end{array}$$

چون شاخهٔ اصلی، که شامل $x:\theta\to\alpha,\Gamma_1\Rightarrow\alpha$ است، هیچ مقدمهٔ اصلی $\to$Intro یا $\neg$Intro و هیچ مقدمهٔ فرعی $\vee$Elim یا $\exists$Elim را در بر ندارد، فرمولهای بافتی در $x:\theta\to\alpha,\Gamma_1$ در امتداد شاخهٔ اصلی بدون تغییر می‌مانند. این نکته توضیح می‌دهد که چرا بافت دنبالهٔ پایانی

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

باید $x : \theta \to \alpha, \Gamma_1$ را در بر داشته باشد. افزون‌براین، می‌توان پارهٔ برهان δ_2 را با جایگزین‌کردن زیر-برهان منتهی به $\to$Elim با $x : \alpha \Rightarrow \alpha$ و جایگزین‌کردن $x : \theta \to \alpha, \Gamma_1$ با $x : \alpha$ در بافت هر دنباله در امتداد شاخهٔ اصلی، به برهان درستی چون δ_2' تبدیل کرد؛ یعنی

$$\begin{array}{c} x : \theta \to \alpha, \Gamma_1 \Rightarrow \alpha \\ \vdots\,\delta_2 \\ x : \theta \to \alpha, \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi \end{array} \quad \text{را به} \quad \begin{array}{c} x : \alpha \Rightarrow \alpha \\ \vdots\,\delta_2' \\ x : \alpha, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi \end{array}$$

تبدیل کرد. فرض استقرا بر δ_1 و δ_2' اعمال می‌شود، زیرا تعداد استنتاج‌های δ برابر است با مجموع تعداد استنتاج‌های δ_1 و δ_2، به‌اضافهٔ 1 برای استنتاج $\to$Elim در آغاز شاخهٔ اصلی. (اگر آن استنتاج آخرین استنتاج R در δ نیز باشد، δ_2 شامل صفر استنتاج است.)

بنا بر فرض استقرا، اگر $\theta \not\equiv \bot$ باشد برهانهای **G2i**ای چون π_1 برای $\Gamma_1' \Rightarrow \theta$ و π_2 برای $\alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \Delta$ داریم. با اعمال $\to$L، برهان π را به دست می‌آوریم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1 \\ \Gamma_1' \Rightarrow \theta\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2 \\ \alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\theta \to \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \Delta}\to\mathrm{L}$$

اگر $\theta \equiv \bot$ باشد، فرض استقرا برای δ_1 برهانی با تالی تهی می‌دهد و تنها برای ساخت مقدمهٔ نخست $\to$L یک WR می‌افزاییم:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1 \\ \Gamma_1' \Rightarrow\end{array}}{\Gamma_1' \Rightarrow \theta}\mathrm{WR} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2 \\ \alpha, \Gamma_2' \Rightarrow \Delta\end{array}}{\theta \to \alpha, \Gamma_1', \Gamma_2' \Rightarrow \Delta}\to\mathrm{L}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

حالت‌های باقی‌مانده به همین شیوه بررسی می‌شوند و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند. □

نتیجه 4.6. *هر وقوع فرمول در یک برهان بهنجار* **N2i** *زیر-فرمول یکی از فرمول‌های دنبالهٔ پایانی آن است؛ و در حالت* **N1i**، *زیر-فرمول فرمول پایانی یا یکی از فرض‌های باز آن است.*

اثبات. بنا بر گزاره 4.5، هر برهان بهنجار **N2i** را می‌توان به برهان بدون برش **G2i** ترجمه کرد. وارسی برهان نشان می‌دهد هر فرمولی که در برهان **N2i** رخ می‌دهد، در برهان **G2i** نیز رخ می‌دهد. **G2i** چون قاعدهٔ Cut ندارد، دارای خاصیت زیر-فرمول است. سرانجام، ترجمهٔ یک برهان بهنجار **N1i** به **N2i** تنها فرض‌های باز را در بافت دنباله‌ها ثبت می‌کند و بهنجاری را حفظ می‌کند؛ ازاین‌رو نتیجهٔ مربوط به **N1i** نیز با احتساب فرمول پایانی و فرض‌های باز به دست می‌آید. □

4.5 تمامیت

اکنون نشان می‌دهیم الگوریتم جست‌وجوی برهان خطاناپذیر است؛ یعنی اگر متوقف شود یا هرگز پایان نیابد، برای دنبالهٔ آغازین $\Gamma \Rightarrow \Delta$ هیچ برهانی وجود ندارد. برای این کار ساختار $\mathfrak{M}$ را چنان تعریف می‌کنیم که برای هر $\varphi \in \Gamma$، $\mathfrak{M} \vDash \varphi$، و برای هر $\varphi \in \Delta$، $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$. به بیان دیگر، همهٔ فرمول‌ها موجود در Γ در $\mathfrak{M}$ صادق و همهٔ فرمول‌ها موجود در Δ کاذب‌اند؛ پس $\Gamma \Rightarrow \Delta$ معتبر نیست. چون **G3c** درست است، $\Gamma \Rightarrow \Delta$ هیچ برهانی ندارد.

$\mathfrak{M}$ را از یک جفت مجموعهٔ Θ, Ξ از فرمول‌ها و یک مجموعهٔ C از ثابت‌ها تعریف می‌کنیم. Θ، Ξ و C را از یک شاخهٔ شکست در اجرای ناموفق (متوقف‌شده یا پایان‌ناپذیر) جست‌وجوی برهان به دست می‌آوریم. شاخهٔ شکست دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از دنباله‌های $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ و مجموعه‌های ثابت‌ها C_n است، به‌گونه‌ای که $\Pi_0 \Rightarrow \Lambda_0$ همان دنبالهٔ پایانی $\Gamma \Rightarrow \Delta$ باشد و، برای هر n که جملهٔ نهایی شاخهٔ متناهی نیست، $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ مقدمه‌ای از $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ باشد که در مرحلهٔ $n+1$ تولید شده و الگوریتم برای آن برهانی نمی‌یابد. برای هر چنین n باید آشکارا این مقدمه وجود داشته باشد، وگرنه الگوریتم برهانی یافته بود. C_n را مجموعهٔ ثابت‌ها متناظر با $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ می‌گیریم.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اگر الگوریتم در دنباله‌ای بالایی که تنها از فرمول‌ها اتمی تشکیل شده متوقف شود، شاخهٔ منتهی به آن دنباله یک شاخهٔ شکست است. اگر الگوریتم هرگز پایان نیابد، پیوسته درخت‌های بزرگ‌تر تولید می‌کند. می‌توان این درخت‌ها را مراحل رشد یک درخت نامتناهی دانست (درختی که پس از اجرای بی‌نهایت مرحلهٔ الگوریتم به دست می‌آمد). این درخت نامتناهی، متناهی‌شاخه است: هر گره تنها یک یا دو فرزند، یعنی دنباله‌های بی‌درنگ بالای خود، دارد. بنا بر لم کونیگ، هر درخت نامتناهی متناهی‌شاخه یک شاخهٔ نامتناهی دارد. اگر الگوریتم جست‌وجو تا ابد اجرا شود، چنین شاخه‌ای یک شاخهٔ شکست خواهد بود.

اگر دنبالهٔ $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ و C_n یک شاخهٔ شکست باشد، می‌گذاریم $\Theta = \bigcup_n \Pi_n$ و $\Xi = \bigcup_n \Lambda_n$ (با حذف اندیس‌ها و وقوع‌های تکراری فرمول‌ها)، و $C = \bigcup_n C_n$.

اکنون آماده‌ایم $\mathfrak{M}$ را تعریف کنیم.

1. دامنهٔ $|\mathfrak{M}|$ مجموعهٔ ترم‌هایی است که می‌توان آن‌ها را از C و تابع‌ها موجود در $\Gamma \Rightarrow \Delta$، اگر چنین نمادهایی وجود داشته باشند، و بدون هیچ متغیرها ساخت.

2. اگر $c \in C$، آنگاه $c^{\mathfrak{M}} = c$.

3. اگر f یک تابع m-موضعی در $\Gamma \Rightarrow \Delta$ باشد و $t_1, \ldots, t_m \in |\mathfrak{M}|$، آنگاه $f^{\mathfrak{M}}(t_1, \ldots, t_m) = f(t_1, \ldots, t_m)$.

4. اگر R یک محمول m-موضعی در $\Gamma \Rightarrow \Delta$ باشد، آنگاه $R^{\mathfrak{M}} = \{\langle t_1, \ldots, t_m \rangle \in |\mathfrak{M}|^m : R(t_1, \ldots, t_m) \in \Theta\}$.

$\mathfrak{M}$ یک مدل ترمی است، زیرا دامنه‌اش مجموعه‌ای از ترم‌هاست و ثابت‌ها و تابع‌ها چنان تفسیر می‌شوند که $\mathrm{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = t$ تضمین شود. فرمول‌ها اتمی در Θ برای تعریف $R^{\mathfrak{M}}$ چنان به کار می‌روند که $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \ldots, t_m)$ اگر و تنها اگر $R(t_1, \ldots, t_m) \in \Theta$ تضمین شود.

لم 4.7. *برای همهٔ* $\varphi \in \Theta \cup \Xi$:

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

1. اگر $\varphi \in \Theta$، آنگاه $\mathfrak{M} \vDash \varphi$.

2. اگر $\varphi \in \Xi$، آنگاه $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$.

اثبات. بر $\mathrm{dp}(\varphi)$ استقرا می‌کنیم.

نخست فرض کنید φ اتمی است؛ یعنی یا $\varphi \equiv \bot$ یا $\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_m)$.

چون $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ شاخهٔ شکست است، هیچ Π_nای نمی‌تواند شامل $\bot$ باشد (وگرنه $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ یک اصل بود). بنا بر تعریف $\mathfrak{M} \vDash R(t_1, \ldots, t_m)$ اگر و تنها اگر $R(t_1, \ldots, t_m) \in \Theta$. این دو نکته با هم نشان می‌دهند اگر $\varphi \in \Theta$، آنگاه $\mathfrak{M} \vDash \varphi$.

اگر φ اتمی و $\varphi \in \Pi_n$ باشد، آنگاه $\varphi \in \Pi_{n+1}$؛ و اگر $\varphi \in \Lambda_n$ باشد، آنگاه $\varphi \in \Lambda_{n+1}$. (این امر از شیوهٔ تولید دنباله‌های جانشین در الگوریتم جست‌وجوی برهان نتیجه می‌شود.) پس اگر $\varphi \in \Theta \cap \Xi$، برای یک n داریم $\varphi \in \Pi_n \cap \Lambda_n$. در این صورت $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ اصل است، حال آنکه شاخهٔ شکست نمی‌تواند اصلی داشته باشد. بنابراین بنا به ساخت، برای φ اتمی $\varphi \notin \Theta \cap \Xi$؛ پس اگر $\varphi \in \Xi$، آنگاه $\varphi \notin \Theta$. بنا بر تعریف $\mathfrak{M}$، از این امر نتیجه می‌شود که اگر $\varphi \in \Xi$، آنگاه $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$.

برای گام استقرا، فرض کنید (1) و (2) برای همهٔ فرمول‌ها با عمق کمتر از φ برقرارند. (1) و (2) را برای φ با جداسازی حالت‌ها اثبات می‌کنیم.

نخست توجه کنید که وقتی φ^i در $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ رخ دهد، در $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ نیز رخ می‌دهد، مگر آنکه i کوچک‌ترین اندیس در میان وقوع‌های غیراتمی $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ باشد. چون اندیس‌های تازه همواره از اندیس بیشینهٔ کنونی بزرگ‌ترند، سرانجام به $\Pi_n \Rightarrow \Lambda_n$ای می‌رسیم که φ^i در آن رخ می‌دهد و i کوچک‌ترین اندیس غیراتمی است. در مرحلهٔ $n+1$ الگوریتم φ^i را کاهش می‌دهد. به بیان دیگر، اگر $\varphi \in \Theta$، برای یک n داریم $\Pi_n = \Pi'_n, \varphi^i$ و i کوچک‌ترین اندیس غیراتمی است؛ و اگر $\varphi \in \Xi$، برای یک n داریم $\Lambda_n = \Lambda'_n, \varphi^i$ و i کوچک‌ترین اندیس غیراتمی است.

1. فرض کنید $\varphi \in \Theta$ و $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$. برای یک n داریم $\Pi_n = \Pi'_n, (\psi \wedge \chi)^i$. $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ مقدمهٔ متناظر $\wedge\mathrm{L}$ است؛ یعنی $\Pi_{n+1} = \Pi'_n, \psi^{k+1}, \chi^{k+2}$. در نتیجه $\psi, \chi \in \Theta$. بنا بر فرض استقرا، $\mathfrak{M} \vDash \psi$ و $\mathfrak{M} \vDash \chi$. بنا بر تعریف $\vDash \mathfrak{M}$، داریم $\mathfrak{M} \vDash \psi \wedge \chi$.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

2. فرض کنید $\varphi \in \Xi$ و $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$. برای یک n داریم $\Lambda_n = \Lambda'_n, \psi \wedge \chi$. $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ یکی از دو مقدمهٔ $\wedge\mathrm{R}$ با نتیجهٔ $\Pi_n \Rightarrow \Lambda'_n, \psi \wedge \chi$ است؛ یعنی $\Lambda_{n+1} = \Lambda'_n, \psi^{k+1}$ یا $\Lambda_{n+1} = \Lambda'_n, \chi^{k+1}$. در نتیجه یا $\psi \in \Xi$ یا $\chi \in \Xi$. بنا بر فرض استقرا، یا $\mathfrak{M} \not\models \psi$ یا $\mathfrak{M} \not\models \chi$. بنا بر تعریف $\mathfrak{M} \models$، داریم $\mathfrak{M} \not\models \psi \wedge \chi$.

3. حالت‌های $\varphi \equiv \neg\psi$، $\varphi \equiv \psi \vee \chi$ و $\varphi \equiv \psi \to \chi$ مشابه‌اند و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

4. فرض کنید $\varphi \in \Theta$ و $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$. برای یک n داریم $\Pi_n = \Pi'_n, \exists x\, \psi(x)^i$. $\Pi_{n+1} \Rightarrow \Lambda_{n+1}$ مقدمهٔ متناظر $\exists\mathrm{L}$ است؛ یعنی $\Pi_{n+1} = \Pi'_n, \psi(c)^{k+1}$ برای یک c. در نتیجه $\psi(c) \in \Theta$ و $c \in C$. بنا بر فرض استقرا $\mathfrak{M} \models \psi(c)$. بنا بر تعریف $\mathfrak{M} \models$، داریم $\mathfrak{M} \models \exists x\, \psi(x)$.

5. فرض کنید $\varphi \in \Xi$ و $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$. برای یک n داریم $\Lambda_n = \Lambda'_n, \exists x\, \psi(x)^i$. هر بار که $\exists x\, \psi(x)$ کاهش می‌یابد، با اندیسی تازه در سمت راست مقدمه باقی می‌ماند؛ بنابراین اگر در شاخهٔ شکست در سمت راست رخ دهد، بی‌نهایت بار در آن سمت کاهش می‌یابد. هر ترم $t \in |\mathfrak{M}|$ سرانجام در شاخهٔ شکست «نخستین ترمی خواهد بود که تنها شامل ثابت‌های C_n است و پیش‌تر در کاهش راست $\exists x\, \psi(x)$ به کار نرفته است». پس برای هر $t \in |\mathfrak{M}|$، برای یک n داریم $\psi(t) \in \Lambda_n$ و در نتیجه $\psi(t) \in \Xi$. بنا بر فرض استقرا، برای همهٔ $t \in |\mathfrak{M}|$ داریم $\mathfrak{M} \not\models \psi(t)$. بنا بر تعریف $\mathfrak{M} \models$، نتیجه می‌شود $\mathfrak{M} \not\models \exists x\, \psi(x)$.

6. حالت‌های $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ مشابه‌اند و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند. □

نتیجه 4.8. *الگوریتم جست‌وجوی برهان برای* **G3c** *کامل است: اگر متوقف شود یا هرگز پایان نیابد، دنبالهٔ آغازین* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *معتبر نیست و بنابراین هیچ برهانی ندارد.*

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اثبات. اگر الگوریتم متوقف شود یا هرگز پایان نیابد، شاخهٔ شکستی وجود دارد که می‌توان $\mathfrak{M}$ را از آن تعریف کرد. بنا بر لم 4.7، برای همهٔ $\varphi \in \Gamma$ داریم $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ و برای همهٔ $\varphi \in \Delta$ داریم $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$. (به یاد آورید $\Pi_0 = \Gamma$ و $\Lambda_0 = \Delta$؛ پس $\Gamma \subseteq \Theta$ و $\Delta \subseteq \Xi$.) بنابراین $\Gamma \Rightarrow \Delta$ معتبر نیست. بنا بر درستی **G3c**، $\Gamma \Rightarrow \Delta$ هیچ برهانی ندارد. □

نتیجه 4.9. **G3c** *کامل است: اگر* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *معتبر باشد،* $\mathbf{G3c} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

اثبات. عکس نقیض را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $\mathbf{G3c} \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. چون هیچ برهانی برای یافتن وجود ندارد، الگوریتم جست‌وجوی برهان باید متوقف شود یا هرگز پایان نیابد. بنا بر نتیجه 4.8، $\Gamma \Rightarrow \Delta$ معتبر نیست. □

4.6 مقدمه

اصول و قواعد استنتاج دستگاه‌های برهان مانند **G3c** یا **N1i** تعیین می‌کنند چه درخت‌هایی از دنباله‌ها یا فرمول‌ها برهان‌ها درست به شمار می‌آیند. اگر چنین درختی از دنباله‌ها یا فرمول‌ها به ما داده شود—شاید همراه با اطلاعات افزوده، مانند اینکه در هر گام چه قاعده‌ای اعمال شده، یا برچسب‌های فرض‌ها و قواعد استنتاجی که آن‌ها را مرخص می‌کنند—تعریف اصول و قواعد به ما اجازه می‌دهد بررسی کنیم آیا درخت داده‌شده برهان درستی است یا نه. مسئله‌ای متفاوت، و معمولاً دشوارتر، آن است که برهان برای دنباله‌ای معین، یا برای فرمولی معین از فرض‌هایی داده‌شده، بیابیم. این همان مسئلهٔ جست‌وجوی برهان است.

روشی بسیار ساده‌انگارانه برای جست‌وجوی برهان وجود دارد. می‌توان فرمول‌ها را دنباله‌هایی از نمادهای یک الفبای متناهی دانست. دنباله‌ها و درخت‌های دنباله‌ها یا فرمول‌ها را نیز می‌توان دنباله‌هایی از فرمول‌ها دانست (شاید با پرانتزهای ویژه برای نمایش شاخه‌شدن درخت). اصول و قواعد به ما امکان می‌دهند به‌طور مکانیکی بررسی کنیم آیا دنباله‌ای از نمادها یک برهان درست را بازنمایی می‌کند یا نه. در نتیجه می‌توانیم همهٔ برهان‌ها درست ممکن را به‌طور مکانیکی تولید کنیم: همهٔ دنباله‌های نمادهای الفبای بازنمایی برهان‌ها را تولید می‌کنیم و برای هر دنبالهٔ نامزد می‌سنجیم آیا برهان درستی را بازنمایی می‌کند. روش ساده‌انگارانهٔ

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

جست‌وجوی برهان چنین است: همهٔ برهان‌ها درست را تولید کنید تا یکی را بیابید که برهان دنبالهٔ داده‌شده باشد (یا برهانی برای فرمول داده‌شده که فرض‌های بازش در میان فرض‌های داده‌شده باشند).

روش بهتر، استفاده از همان شیوهٔ ساده‌ای است که برای یافتن دستی برهان به کار می‌برید: با دنبالهٔ پایانی آغاز می‌کنید، فرمولی برمی‌گزینید و قاعده‌ای استنتاجی را «وارونه» اعمال می‌کنید تا یک یا چند مقدمه تولید شود؛ مقدماتی که اگر برهان‌ها داشتند، با آخرین استنتاج ترکیب می‌شدند و برهانی برای دنبالهٔ داده‌شده می‌ساختند. برای یافتن برهان در دستگاه استنتاج طبیعی نیز روشی مشابه، هرچند پیچیده‌تر، به کار می‌رود.

اما این روش خطاناپذیر نیست: اگر قاعدهٔ نادرست یا فرمول‌ها را به ترتیب نادرست برگزینید، ممکن است به بن‌بست برسید. همچنین روش کاملاً مشخص نشده است: در هر نقطه شاید بیش از یک فرمول ممکن برای انتخاب یا بیش از یک قاعده برای اعمال وارونه وجود داشته باشد. الگوریتم جست‌وجوی برهان روشی کاملاً مشخص است که اگر برهانی وجود داشته باشد آن را می‌یابد؛ یعنی خطاناپذیر است.

برخی دستگاه‌های برهان برای الگوریتم‌های ساده‌تر جست‌وجوی برهان مناسب‌تر از دستگاه‌های دیگرند. در دستگاه‌های دنباله‌ای، عملگر اصلی یک فرمول و اینکه در چپ یا راست رخ داده است، قاعده‌ای را که باید وارونه اعمال شود تعیین می‌کند. برای نمونه، اگر بخواهید برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$ بیابید که در آن $\varphi \wedge \psi$ در راست رخ می‌دهد، باید $\wedge\mathrm{R}$ را وارونه اعمال کنید و دو مقدمهٔ متناظر $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ را بسازید. اما اگر دستگاه شما **G1c** باشد، حضور انقباض کار را دشوارتر می‌کند، زیرا گزینه‌های بیشتری می‌دهد: می‌توانید CR را نیز وارونه اعمال کنید و مقدمهٔ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi$ را بسازید؛ سپس مقدمه‌ای با سه نسخه از $\varphi \wedge \psi$، و به همین ترتیب. در **G2c** وضع حتی بدتر است. اعمال وارونهٔ $\wedge\mathrm{R}$ مستلزم حدس‌زدن Γ_1 و Γ_2 چنان است که $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$، و Δ_1 و Δ_2 چنان که $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$؛ سپس باید شانس خود را با مقدمات $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \varphi$ و $\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, \psi$ بیازمایید. حدس نادرست ممکن است بعدتر شما را به بن‌بست برساند؛ آن‌گاه باید به آغاز بازگردید و Γ_1، Γ_2، Δ_1 و Δ_2 دیگری برگزینید. اگر فرمول برابر $\varphi \vee \psi$ باشد، باید یکی از دو صورت $\vee\mathrm{R}$ را برگزینید و یکی از دو مقدمهٔ ممکن $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ یا $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ را تولید کنید. انتخاب نادرست باز هم شما را ناگزیر به پس‌گرد می‌کند.

دستگاه **G3c** این مشکلات را ندارد. قاعدهٔ ساختاری ندارد و انتخاب قاعدهٔ استنتاج با عملگر اصلی و سمتی که فرمول در آن رخ می‌دهد تعیین می‌شود.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

ازاین‌رو **G3c** برای جست‌وجوی برهان مناسب‌تر از **G1c** یا **G2c** است. جست‌وجوی موفق برهانی در **G3c** به دست می‌دهد و سپس می‌توان آن برهان را به **G1c** یا **G2c** (و حتی **N1c**) ترجمه کرد. پس داشتن الگوریتم جست‌وجوی برهان برای **G3c** و الگوریتم‌های ترجمهٔ برهان‌ها **G3c** به برهان‌ها دستگاه‌های دیگر، مسئلهٔ جست‌وجوی برهان را برای آن دستگاه‌ها نیز حل می‌کند.

از کجا می‌دانیم الگوریتم جست‌وجوی برهان خطاناپذیر است؟ باید نشان دهیم اگر الگوریتم نتواند برهانی بیابد، هیچ برهانی نمی‌تواند وجود داشته باشد. اگر الگوریتم بدی برگزینیم، ممکن است حتی با وجود برهان نیز در یافتن آن شکست بخورد. الگوریتم ساده‌انگارانه چنین مشکلی ندارد، زیرا همهٔ برهان‌ها ممکن را جست‌وجو می‌کند. اما الگوریتم جست‌وجوی برهان باید کارآمد باشد و کمترین تلاش لازم را صرف کند.

ایدهٔ اصلی برای اثبات خطاناپذیری الگوریتم جست‌وجوی برهان این است که نشان دهیم اگر الگوریتم شکست بخورد، از شیوهٔ شکست آن می‌توان نتیجه گرفت که دنباله امکان ندارد برهانی داشته باشد. برای نشان‌دادن این امر، اثبات می‌کنیم دنباله معتبر نیست. در منطق مرتبهٔ اول کلاسیک، دنبالهٔ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ معتبر است اگر و تنها اگر هر ساختار دست‌کم یک فرمول در Γ را کاذب یا دست‌کم یک فرمول در Δ را صادق سازد. **G3c** درست است؛ یعنی تنها دنباله‌های معتبر را اثبات می‌کند. این مطلب با استقرا بر برهان‌ها ثابت می‌شود: اصول آشکارا معتبرند و اگر مقدمات قاعده‌ای معتبر باشند، نتیجهٔ آن نیز معتبر است. برای اثبات خطاناپذیری الگوریتم نشان می‌دهیم اگر جست‌وجوی برهان برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ شکست بخورد، می‌توانیم ساختاری تعریف کنیم که در آن همهٔ فرمول‌ها موجود در Γ صادق و همهٔ فرمول‌ها موجود در Δ کاذب‌اند. این کار همچنین تمامیت **G3c** را اثبات می‌کند: اگر $\Gamma \Rightarrow \Delta$ معتبر باشد، یک **G3c**-برهان برای آن وجود دارد. چون هر جست‌وجوی ناموفق نشان می‌دهد $\Gamma \Rightarrow \Delta$ نامعتبر است، هر جست‌وجوی برهان برای یک دنبالهٔ معتبر باید موفق شود.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

فصل 5

جست‌وجوی برهان

5.1 الگوریتم جست‌وجو برای G3c

الگوریتمی برای جست‌وجوی برهان در **G3c** توصیف می‌کنیم. این تنها الگوریتم ممکن و حتی کارآمدترین الگوریتم نیست، اما درست است: اگر دنبالهٔ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ دارای برهان باشد، الگوریتم سرانجام متوقف می‌شود و برهانی می‌یابد. همچنین خطاناپذیر است: اگر بی‌آنکه برهانی یافته باشد متوقف شود، یا هرگز متوقف نشود، آنگاه $\Gamma \Rightarrow \Delta$ از آغاز معتبر نبوده است.

ویژگی ضروری الگوریتم این است که تضمین کند هر فرمول در $\Gamma \Rightarrow \Delta$، یا در دنباله‌ای که هنگام جست‌وجوی برهان تولید می‌شود، «کاهش» یابد؛ یعنی به‌عنوان فرمول اصلی قاعده‌ای استنتاجی که وارونه اعمال می‌شود به کار رود، و این کار هرچند بار که لازم است انجام گیرد. این ویژگی را *انصاف* می‌نامیم.

الگوریتم مرحله‌به‌مرحله عمل می‌کند. خروجی هر مرحله درختی از دنباله‌هاست و خروجی مرحلهٔ بعد با کاهش فرمول در هر دنبالهٔ بالایی که از پیش اصل نیست تولید می‌شود.

در مرحلهٔ 0 با $\Gamma \Rightarrow \Delta$ آغاز می‌کنیم. برای تضمین انصاف، عددهایی را همچون اندیس به فرمول‌ها موجود در Γ و Δ اختصاص می‌دهیم، به‌گونه‌ای که فرمول‌ها متفاوت عددهای متفاوت بگیرند. برای نمونه، می‌توان فرمول‌ها را از چپ به راست شمرد. عددها را به‌صورت بالانویس می‌نویسیم. مثلاً اگر در پی برهانی برای $\varphi, \psi \Rightarrow \chi$ باشیم، خروجی مرحلهٔ 0 برابر $\varphi^1, \psi^2 \Rightarrow \chi^3$ است. بزرگ‌ترین n که در چنین دنبالهٔ اندیس‌داری به‌صورت بالانویس رخ دهد، *اندیس بیشینهٔ* آن است (در مثال، 3).

اگر دنباله سور داشته باشد، باید بدانیم هنگام کاهش $\exists x\, \varphi(x)$ در راست یا $\forall x\, \varphi(x)$ در چپ از چه ترم‌هایی استفاده کنیم. تنها به ترم‌هایی نیاز داریم

که از ثابت‌ها c_0، c_1، c_2، ...، و نمادهای تابعی رخ‌داده در Γ و Δ ساخته می‌شوند. فرض می‌کنیم مجموعهٔ همهٔ این ترم‌ها به ترتیبی ثابت شمارش شده باشد، تا بتوانیم مثلاً از «نخستین ثابت که در $\Gamma \Rightarrow \Delta$ رخ نمی‌دهد» سخن بگوییم. هر دنبالهٔ اندیس‌دار در درخت تولیدی الگوریتم، مجموعه‌ای متناظر از ثابت‌ها دارد. مجموعهٔ ثابت‌ها اختصاص‌یافته به دنباله در مرحلهٔ 0 مجموعهٔ همهٔ ثابت‌ها رخ‌داده در آن است، اگر چنین ثابتی وجود داشته باشد؛ و اگر هیچ‌یک از ثابت‌ها را نداشته باشد، $\{c_0\}$ است.

فرض کنید الگوریتم در مرحلهٔ n درختی از دنباله‌های اندیس‌دار با مجموعه‌های متناظر ثابت‌ها تولید کرده است. در مرحلهٔ $n+1$ برای هر دنبالهٔ بالایی کار زیر را انجام می‌دهیم.

اگر فرمول φ هم در چپ و هم در راست دنباله رخ دهد، یا سمت چپ شامل $\bot$ باشد، کاری نمی‌کنیم: چنین دنباله‌ای در **G3c** دارای برهان‌ها است و برای این دنبالهٔ بالایی خاص کاری باقی نمانده است.

اگر هیچ فرمول غیراتمی‌ای در دنباله نباشد، الگوریتم را متوقف می‌کنیم. برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ برهانی وجود ندارد.

در غیر این صورت، فرمول غیراتمی φ با کوچک‌ترین اندیس i را برمی‌گزینیم. دنبالهٔ بالایی موردنظر یا $\varphi^i, \Pi \Rightarrow \Lambda$ است یا $\Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi^i$. بگذارید k اندیس بیشینهٔ دنباله باشد و C مجموعهٔ ثابت‌ها اختصاص‌یافته به آن باشد.

φ^i را «کاهش» می‌دهیم؛ یعنی دنباله‌های بالایی تازه‌ای را برحسب قاعدهٔ استنتاجی تعیین‌شده به‌وسیلهٔ عملگر اصلی φ و برحسب اینکه φ^i در چپ یا راست ظاهر شده است، تولید می‌کنیم.

1. اگر $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$ و در چپ رخ دهد، یک دنبالهٔ بالایی تازه بالای $(\psi \wedge \chi)^i, \Pi \Rightarrow \Lambda$ می‌افزاییم:

$$\frac{\psi^{k+1}, \chi^{k+2}, \Pi \Rightarrow \Lambda}{(\psi \wedge \chi)^i, \Pi \Rightarrow \Lambda} \wedge\mathrm{L}$$

مجموعهٔ ثابت‌ها اختصاص‌یافته به دنبالهٔ تازه C است.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

2. اگر $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$ و در راست رخ دهد، دو دنبالهٔ بالایی تازه بالای $\Pi \Rightarrow \Lambda, (\psi \wedge \chi)^i$ می‌افزاییم:

$$\frac{\Pi \;\Rightarrow\; \Lambda, \psi^{k+1} \qquad \Pi \;\Rightarrow\; \Lambda, \chi^{k+1}}{\Pi \;\Rightarrow\; \Lambda, (\psi \wedge \chi)^i} \wedge\mathrm{R}$$

مجموعهٔ ثابت‌ها اختصاص‌یافته به دنباله‌های تازه C است.

3. حالت‌های $\varphi \equiv \neg\psi$، $\varphi \equiv \psi \vee \chi$ و $\varphi \equiv \psi \rightarrow \chi$ مشابه‌اند و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

4. اگر $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ و در چپ رخ دهد، یک دنبالهٔ بالایی تازه بالای $\exists x\, \psi(x)^i, \Pi \Rightarrow \Lambda$ می‌افزاییم:

$$\frac{\psi(c)^{k+1}, \Pi \;\Rightarrow\; \Lambda}{\exists x\, \psi(x)^i, \Pi \;\Rightarrow\; \Lambda} \exists\mathrm{L}$$

که در آن c نخستین ثابت ناموجود در C است. مجموعهٔ ثابت‌ها اختصاص‌یافته به دنبالهٔ تازه $C \cup \{c\}$ است.

5. اگر $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ و در راست رخ دهد، یک دنبالهٔ بالایی تازه بالای $\Pi \Rightarrow \Lambda, \exists x\, \psi(x)$ می‌افزاییم:

$$\frac{\Pi \;\Rightarrow\; \Lambda, \exists x\, \psi(x)^{k+1}, \psi(t)^{k+2}}{\Pi \;\Rightarrow\; \Lambda, \exists x\, \psi(x)^i} \exists\mathrm{R}$$

که در آن t نخستین ترمی است که تنها شامل ثابت‌ها موجود در C است و پیش‌تر در کاهش $\exists x\, \psi(x)$ در سمت راست، زیر این دنباله، به کار نرفته است؛ و اگر همهٔ چنین ترم‌هایی به کار رفته باشند، نخستین ترم ساخته‌شده از C را دوباره به کار می‌بریم. مجموعهٔ ثابت‌ها اختصاص‌یافته به دنبالهٔ تازه C است.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

6. حالت‌های $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ مشابه‌اند و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

اگر در مرحلهٔ $n+1$ بالای هیچ دنبالهٔ بالایی، دنبالهٔ تازه‌ای نیفزوده باشیم، الگوریتم با موفقیت پایان می‌یابد. در این حالت برهانی برای $\Gamma \Rightarrow \Delta$ یافته‌ایم که با پاک‌کردن همهٔ اندیس‌ها از درخت مرحلهٔ $n+1$ حاصل می‌شود. همهٔ دنباله‌های بالایی به شکل $\varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi$ یا $\bot, \Pi \Rightarrow \Lambda$ هستند. همهٔ استنتاج‌ها استنتاج‌های درست **G3c**اند. این امر برای استنتاج‌های گزاره‌ای آشکار است. توجه کنید که در هر گام مجموعهٔ C از ثابت‌ها اختصاص‌یافته به یک دنباله، همهٔ ثابت‌ها رخ‌داده در آن دنباله را در بر دارد. بنابراین، در کاهش با $\exists$L و $\forall$R، شرط متغیر ویژه برقرار است: چون متغیر ویژهٔ c ثابتی نبود که در مجموعهٔ C اختصاص‌یافته به نتیجه باشد، در نتیجه نیز رخ نمی‌داد. پس داریم:

گزاره 5.1. *الگوریتم جست‌وجوی برهان برای* **G3c** *درست است: اگر با موفقیت پایان یابد، دنبالهٔ آغازین* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *دارای برهان است.*

5.2 تابلوها

دستگاه‌های تابلو، دستگاه‌های برهانی‌اند که ارتباط نزدیکی با حساب‌های دنباله‌ای دارند و به‌ویژه برای جست‌وجوی برهان، چه دستی و چه پیاده‌سازی‌شده در نرم‌افزار، مناسب‌اند. در تابلوها به جای ساختن درخت‌هایی از دنباله‌ها، برهان درختی از فرمول‌ها است. اما برخلاف استنتاج طبیعی، قواعد آن‌ها بازتاب قواعد حساب دنباله‌ای‌اند. یک برهان تابلویی در اصل جست‌وجویی صریح برای یک مدل است. ازاین‌رو گاه آن‌ها را *تابلوهای معنایی* یا *درخت‌های صدق* می‌نامند.

یک تابلوی *نشاندار* درختی از فرمول‌ها نشاندار است که می‌توانند به شکل $\mathbb{T}\ \varphi$ یا $\mathbb{F}\ \varphi$ باشند. درخت‌ها رو به پایین رشد می‌کنند. آن‌ها با فرمول‌ها آغاز می‌شوند که آنچه را می‌خواهیم اثبات کنیم مشخص می‌سازند. برای نمونه، برای اثبات دنبالهٔ $\varphi, \psi \Rightarrow \chi, \theta$، تابلو با $\mathbb{T}\ \varphi, \mathbb{T}\ \psi, \mathbb{F}\ \chi, \mathbb{F}\ \theta$ آغاز می‌شود. ساختار که φ و ψ را صادق و χ و θ را کاذب سازد، ساختاری است که نشان می‌دهد $\varphi, \psi \Rightarrow \chi, \theta$ معتبر نیست.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

گره برگ (پایین‌ترین گره) تابلو را می‌توان با قواعد گسترش شاخه توسعه داد؛ این قواعد یا گره‌های دیگری به همان شاخه می‌افزایند، یا دو گرهٔ هم‌نیا را در پایین می‌افزایند و شاخه را به دو شاخهٔ تازه تقسیم می‌کنند. قواعد را می‌توان بر هر فرمول نشاندار بالای گره در همان شاخه اعمال کرد. قواعد گسترش شاخه برای دستگاه تابلویی کلاسیک **Tc** در جدول 5.1 آمده‌اند.

همان‌گونه که می‌بینید، این قواعد همان قواعد **G3c** وارونه‌اند و نشان‌های $\mathbb{T}$ و $\mathbb{F}$ مشخص می‌کنند که فرمول به‌ترتیب در سمت چپ یا راست یک دنباله فرمول اصلی است.

یک شاخهٔ تابلو بسته است اگر شامل $\mathbb{T}\ \bot$ باشد، یا هم $\mathbb{T}\ \varphi$ و هم $\mathbb{F}\ \varphi$ را در بر داشته باشد. اگر همهٔ شاخه‌ها بسته باشند، کل تابلو را بسته می‌نامیم. برای نمونه، تابلوی بستهٔ زیر برای $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ است؛ یعنی با $\mathbb{T}\ \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ و $\mathbb{F}\ (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ آغاز می‌شود:

$$\neg\mathbb{F}\,\frac{\mathbb{F}\ \ \neg\varphi}{\mathbb{T}\ \ \varphi} \qquad \neg\mathbb{T}\,\frac{\mathbb{T}\ \ \neg\varphi}{\mathbb{F}\ \ \varphi}$$

$$\wedge\mathbb{F}\,\frac{\mathbb{F}\ \ \varphi\wedge\psi}{\mathbb{F}\ \ \varphi \quad | \quad \mathbb{F}\ \ \psi} \qquad \wedge\mathbb{T}\,\frac{\mathbb{T}\ \ \varphi\wedge\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\ \ \varphi\\ \mathbb{T}\ \ \psi\end{array}}$$

$$\vee\mathbb{F}\,\frac{\mathbb{F}\ \ \varphi\vee\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{F}\ \ \varphi\\ \mathbb{F}\ \ \psi\end{array}} \qquad \vee\mathbb{T}\,\frac{\mathbb{T}\ \ \varphi\vee\psi}{\mathbb{T}\ \ \varphi \quad | \quad \mathbb{T}\ \ \psi}$$

$$\rightarrow\mathbb{F}\,\frac{\mathbb{F}\ \ \varphi\rightarrow\psi}{\begin{array}{c}\mathbb{T}\ \ \varphi\\ \mathbb{F}\ \ \psi\end{array}} \qquad \rightarrow\mathbb{T}\,\frac{\mathbb{T}\ \ \varphi\rightarrow\psi}{\mathbb{F}\ \ \varphi \quad | \quad \mathbb{T}\ \ \psi}$$

$$\forall\mathbb{F}\,\frac{\mathbb{F}\ \ \forall x\,\varphi(x)}{\mathbb{F}\ \ \varphi(a)} \qquad \forall\mathbb{T}\,\frac{\mathbb{T}\ \ \forall x\,\varphi(x)}{\mathbb{T}\ \ \varphi(t)}$$

$$\exists\mathbb{F}\,\frac{\mathbb{F}\ \ \exists x\,\varphi(x)}{\mathbb{F}\ \ \varphi(t)} \qquad \exists\mathbb{T}\,\frac{\mathbb{T}\ \ \exists x\,\varphi(x)}{\mathbb{T}\ \ \varphi(a)}$$

جدول 5.1: قواعد **Tc**. در $\forall\mathbb{F}$ و $\exists\mathbb{T}$، ثابت a نباید در شاخهٔ بالایی رخ دهد؛ یعنی باید در آن شاخه تازه باشد.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

Assumption	$\mathbb{T}\ \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ ✓				.1
Assumption	$\mathbb{F}\ (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ ✓				.2
$\vee\mathbb{T}\,1$	$\mathbb{T}\ \psi \wedge \chi$ ✓		$\mathbb{T}\ \varphi$		.3
$\wedge\mathbb{F}\,2$	$\mathbb{F}\ \varphi \vee \chi$ ✓	$\mathbb{F}\ \varphi \vee \psi$ ✓	$\mathbb{F}\ \varphi \vee \chi$ ✓	$\mathbb{F}\ \varphi \vee \psi$ ✓	.4
$\vee\mathbb{F}\,4$			$\mathbb{F}\ \varphi$	$\mathbb{F}\ \varphi$	.5
$\vee\mathbb{F}\,4$			$\mathbb{F}\ \chi$	$\mathbb{F}\ \psi$	.6
$\wedge\mathbb{T}\,3$	$\mathbb{T}\ \psi$	$\mathbb{T}\ \psi$	$\otimes$	$\otimes$	.7
$\wedge\mathbb{T}\,3$	$\mathbb{T}\ \chi$	$\mathbb{T}\ \chi$			.8
$\vee\mathbb{F}\,4$	$\mathbb{F}\ \varphi$	$\mathbb{F}\ \varphi$			.9
$\vee\mathbb{F}\,4$	$\mathbb{F}\ \chi$	$\mathbb{F}\ \psi$			.10
	$\otimes$	$\otimes$			

علامت‌های تیک نشان می‌دهند قاعدهٔ متناظر بر فرمول در همهٔ شاخه‌های زیر آن اعمال شده است. نماد $\otimes$ بسته‌بودن شاخه را نشان می‌دهد. شمارهٔ خط پس از هر قاعده مشخص می‌کند قاعده بر کدام فرمول‌ها نشاندار اعمال شده است (یعنی فرمول همان شاخه در خط مشخص‌شده).

جست‌وجوی برهان در تابلوها آسان است. تابلو را مرحله‌به‌مرحله تولید می‌کنیم. در مرحلهٔ 0 تنها فرمول‌ها آغازین را در بالا می‌نویسیم. در مرحلهٔ $n+1$ برای هر گره برگ روی یک شاخهٔ باز چنین می‌کنیم: نخستین (بالاترین) فرمول نشاندار غیراتمی را که هنوز تیک نخورده است بیابید و قاعدهٔ گسترش شاخه را بر آن

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اعمال کنید. وقتی قاعده در هر شاخهٔ بازی که آن فرمول نشاندار را شامل می‌شود اعمال شد، بر آن تیک بزنید. بنابراین فقط فرمول‌های غیراتمی در شاخه‌های باز که نباید تکرار شوند تیک می‌خورند. (مثال بالا با همین الگوریتم تولید شده است.)

فرمول‌ها نشاندار به شکل $\forall\ \mathbb{T}$ و $\exists\ \mathbb{F}$ هرگز تیک نمی‌خورند و باید جداگانه بررسی شوند. اگر حاضر باشند، باید تضمین کنیم قواعد $\forall\mathbb{T}$ و $\exists\mathbb{F}$ سرانجام برای همهٔ ترم‌های قابل اعمال به کار روند. برای نمونه، می‌توان در هر مرحله آن‌ها را بر همهٔ چنین فرمول‌هایی در هر شاخه اعمال کرد، پس از رسیدگی به بالاترین فرمول نشانداری که از این دو صورت نیست. ترم t نخستین ترمی است که می‌توان آن را از ثابت‌ها از پیش رخ‌داده در شاخه (یا c_0 اگر هیچ ثابتی رخ نداده باشد) و تابع‌ها رخ‌داده در فرمول‌ها آغازین ساخت، به‌گونه‌ای که فرمول نشاندار متناظر $\mathbb{T}\ \psi(t)$ یا $\mathbb{F}\ \psi(t)$ از پیش در شاخه رخ نداده باشد. اگر برای یک قاعده همهٔ ترم‌های قابل ساخت از پیش نمونه‌ای در شاخه داشته باشند، آن قاعده در آن مرحله گره تازه‌ای نمی‌افزاید.

اگر این جست‌وجوی برهان تابلوی بسته‌ای تولید نکند، یا شاخهٔ باز متناهی‌ای دارد که همهٔ فرمول‌ها غیراتمی آن بررسی شده‌اند، یا جست‌وجو درختی نامتناهی و متناهی‌شاخه تولید می‌کند که باید شاخه‌ای نامتناهی داشته باشد. درست مانند بخش 4.5، می‌توانیم ساختار $\mathfrak{M}$ را چنان تعریف کنیم که اگر $\mathbb{T}\ \varphi$ در شاخه رخ دهد، $\mathfrak{M} \vDash \varphi$؛ و اگر $\mathbb{F}\ \varphi$ رخ دهد، $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$. (بگذارید $\Theta = \{\varphi : \mathbb{T}\ \varphi$ در شاخه$\}$ و $\Xi = \{\varphi : \mathbb{F}\ \varphi$ در شاخه$\}$.)

تابلوهایی که با این روش جست‌وجوی برهان تولید می‌شوند را می‌توان به‌آسانی با اختصاص دنباله‌ای به هر گره، به برهان‌های **G3c** ترجمه کرد. اگر فرمول‌های آغازین متناظر با دنبالهٔ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ باشند، هر یک از فرمول‌های آغازین را با $\Gamma \Rightarrow \Delta$ برچسب بزنید. اگر شاخه با اعمال قاعده‌ای گسترشی بر فرمول نشاندار $\mathbb{T}\ \varphi$ توسعه یابد، برگ با $\varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ برچسب می‌خورد؛ و اگر قاعده بر فرمول نشاندار $\mathbb{F}\ \varphi$ اعمال شود، برگ با $\Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi$ برچسب می‌خورد. هر جا تابلو قاعدهٔ $\star\mathbb{T}$ را اعمال می‌کند، قاعدهٔ $\star\mathrm{L}$ را بر دنباله (با φ همچون فرمول اصلی) اعمال کنید؛ و هر جا قاعدهٔ $\star\mathbb{F}$ را اعمال می‌کند، $\star\mathrm{R}$ را به کار برید. مقدمات قاعده همان دنباله‌هایی هستند که گره‌های متناظر افزوده‌شده به تابلو را برچسب می‌زنند. وقتی تابلو با $\mathbb{T}\ \varphi$ و $\mathbb{F}\ \varphi$ بسته می‌شود، برچسب گره برگ پایانی دنباله‌ای به شکل $\varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda, \varphi$ خواهد بود. اگر شاخه با $\mathbb{T}\ \bot$ بسته شود، برچسب برگ پایانی دنباله‌ای با $\bot$ در مقدم است؛ این نیز اصل **G3c**

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

است. برخی گره‌های پیاپی تابلو دنبالهٔ یکسانی می‌گیرند؛ موارد تکراری را حذف کنید. برای نمونه، تابلوی بالا به برهان زیر ترجمه می‌شود:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{

بخش I
نظریهٔ برهان

مطالب نظریهٔ برهان ناتمام و آزمایشی‌اند و هنوز در ساخت اصلی PDF گنجانده نشده‌اند.

5.3 مقدمه

حساب لامبدا مدلی ساده از محاسبه است که بر ترم‌های ساخته‌شده از متغیرها عمل می‌کند. اگر N و M ترم باشند، (NM) نیز ترم است («اعمال N بر M»). اگر N ترم باشد، $\lambda x.\, N$ نیز ترم است. اگر N شامل متغیر x باشد، وقوع‌های متناظر x در $\lambda x.\, N$ به‌وسیلهٔ عملگر λx مقید می‌شوند و دیگر آزاد نیستند. می‌گوییم ترمی به شکل $(\lambda x.\, NM)$ با یک گام β به $N[M/x]$ منقبض می‌شود؛ یعنی به حاصل جایگزینی هر وقوع آزاد x در N با M. اگر N' با انقباض β یک زیرترم از N حاصل شود، می‌گوییم N در یک گام β به N' کاهش می‌یابد و می‌نویسیم $N \to N'$. محاسبه‌ای در حساب λ دنباله‌ای چون $N \to N_1 \to N_2 \to \ldots$ است. اگر این دنباله به ترم N_k ختم شود و هیچ زیرترم N_k قابل انقباض β نباشد، N_k را بهنجار یا یک صورت بهنجار N می‌نامیم. محاسبه در حساب λ را چنین دنباله‌هایی در نظر بگیرید. محاسبه هنگامی متوقف می‌شود که به صورت بهنجار برسد، و صورت بهنجار نتیجهٔ محاسبه است. این مدل سادهٔ محاسبه تورینگ‌کامل است: هر تابع بازگشتی جزئی را می‌توان با ترمی در حساب λ محاسبه کرد.

هاسکل کِری و ویلیام هاوارد مستقل از یکدیگر شباهتی نزدیک میان استنتاج طبیعی و حساب λ کشف کردند. به‌طور شهودی، ترم $\lambda x.\, N$ یک تابع است: x آرگومان آن است و N می‌گوید مقدار را با داشتن x چگونه محاسبه کنیم. ترم $(\lambda x.\, NM)$ اعمال تابع $\lambda x.\, N$ بر آرگومان M است و انقباض β می‌گوید

آن را چگونه ارزیابی کنیم: x را در N با M جایگزین کنید و ارزیابی ترم حاصل را ادامه دهید. اکنون این‌ها را تابع‌هایی با دامنه و برد ثابت در نظر بگیرید. اگر دامنهٔ $\lambda x.\, N$ برابر A و بردش B باشد، باید متغیر x را تنها پذیرای آرگومان‌هایی از A و N را تولیدکنندهٔ مقادیر B بدانیم. در نتیجه، $(\lambda x.\, NM)$ تنها هنگامی معنادار است که $\lambda x.\, N$ تابعی $A \to B$ و $M \in A$ باشد. افزودن این اطلاعات به حساب λ، حساب λ نوع‌دار را به دست می‌دهد. در حساب λ نوع‌دار هر عبارت $(\lambda x.\, NM)$ مجاز نیست؛ تنها عبارت‌هایی مجازند که «نوع» $\lambda x.\, N$ و M با هم سازگار باشد: $\lambda x.\, N$ نوع $A \to B$ و M نوع A داشته باشد. نوع $\lambda x.\, N$ تنها هنگامی $A \to B$ است که نوع x برابر A و نوع N برابر B باشد. در حالت کلی، هر عبارت (M_1M_2) مجاز نیست. تنها ترم‌هایی از این شکل مجازند که M_1 نوع $A \to B$ و M_2 نوع A داشته باشد؛ در این صورت (M_1M_2) نوع B دارد.

اکنون این قواعد نوع‌دهی آشکارا با اشتقاق‌ها استنتاج طبیعی متناظرند؛ نوع‌ها با فرمول‌ها و خود اشتقاق‌ها با ترم‌های λ بازنمایی می‌شوند. برای نمونه، اشتقاق برای $\varphi \to \psi$ با ترم $\lambda x^{\varphi}.\, N$ متناظر است که نوع تابعی $\varphi \to \psi$ دارد. قواعد استنتاج طبیعی با قواعد نوع‌دهی در حساب لامبدای نوع‌دار متناظرند؛ برای نمونه:

$$\to\text{Intro}\ \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,x \qquad \text{متناظر است با} \qquad \dfrac{N : \psi x : \varphi \ \Rightarrow}{\lambda x^{\varphi}.\, N : \varphi \to \psi \ \Rightarrow}$$

قاعدهٔ سمت راست می‌گوید اگر x نوع φ و N نوع ψ داشته باشد، آنگاه $\lambda x^{\varphi}.\, N$ نوع $\varphi \to \psi$ دارد.

قاعدهٔ $\to$Elim با قاعدهٔ نوع‌دهی برای ترم‌های کاربرد متناظر است:

$$\dfrac{\Rightarrow\ M_1 : \varphi \to \psi \qquad \Rightarrow\ M_2 : \varphi}{\Rightarrow\ (M_1M_2) : \psi} \qquad \text{متناظر است با} \qquad \dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ \to\text{Elim}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اگر یک قاعدهٔ $\to$Intro بی‌درنگ در پی یک قاعدهٔ $\to$Elim بیاید، می‌توان اشتقاق را ساده کرد:

$$\dfrac{x\,\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^x\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\to\text{Intro}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\psi}\to\text{Elim}\qquad\to\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}$$

که با انقباض β ترم‌های لامبدا متناظر است:

$$(\lambda x^{\varphi}.\,NM)\quad\to\quad N[M/x].$$

تناظرهای مشابهی میان قواعد $\wedge$ و نوع‌های «ضرب»، و میان قواعد $\vee$ و نوع‌های «جمع» برقرارند.

این تناظر میان ترم‌های حساب لامبدای ساده‌نوع‌دار و اشتقاق‌ها استنتاج طبیعی، تناظر «کِری–هاوارد»، «برهان‌ها به‌مثابهٔ برنامه‌ها» یا «گزاره‌ها به‌مثابهٔ نوع‌ها» نامیده می‌شود. علاوه بر تناظر فرمول‌ها (گزاره‌ها) با نوع‌ها و برهان‌ها با ترم‌ها، می‌توان تناظرها را چنین خلاصه کرد:

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

منطق	برنامه
گزاره/فرمول	نوع
برهان	ترم
فرض	متغیر
فرض مرخص‌شده	متغیر مقید
فرض مرخص‌نشده	متغیر آزاد
$\varphi \to \psi$	نوع تابعی
$\varphi \wedge \psi$	نوع ضرب
$\varphi \vee \psi$	نوع جمع
$\bot$	نوع تهی

تناظر کِری–هاوارد یکی از سنگ‌بناهای دستیارهای خودکار اثبات و نوع‌سنج‌های برنامه است، زیرا بررسی برهانی که گواه یک گزاره است—همان کاری که در بالا کردیم—هم‌ارز بررسی این است که آیا برنامه (ترم) نوع اعلام‌شده را دارد یا نه.

5.4 نرمال‌سازی

در این بخش نتیجهٔ نرمال‌سازی را برای ترم‌های برهان درست و نوع‌دار بیان می‌کنیم: هر چنین ترمی از راه یک ترتیب کاهش مناسب به صورت بهنجار می‌رسد. این ویژگی خاصیت *نرمال‌سازی* نام دارد. از تناظر گزاره‌ها به‌مثابهٔ نوع‌ها استفاده می‌کنیم: نرمال‌شدن ترم‌های برهان، نرمال‌شدن اشتقاق‌ها استنتاج طبیعی را نتیجه می‌دهد.

نخست تابع‌هایی را تعریف می‌کنیم که پیچیدگی ترم‌ها را می‌سنجند. اگر φ فرمول باشد، طول $\mathsf{len}(\varphi)$ آن چنین تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
\mathsf{len}(p) &= 0\\
\mathsf{len}(\bot) &= 0\\
\mathsf{len}(\varphi \wedge \psi) &= \mathsf{len}(\varphi) + \mathsf{len}(\psi) + 1\\
\mathsf{len}(\varphi \vee \psi) &= \mathsf{len}(\varphi) + \mathsf{len}(\psi) + 1\\
\mathsf{len}(\varphi \to \psi) &= \mathsf{len}(\varphi) + \mathsf{len}(\psi) + 1.
\end{aligned}$$

پیچیدگی یک ردکس M با رتبهٔ برش $\mathsf{cr}(M)$ آن سنجیده می‌شود:

$$\begin{aligned}
\mathsf{cr}((\lambda x^{\varphi}.\, N^{\psi})Q) &= \mathsf{len}(\varphi) + \mathsf{len}(\psi) + 1\\
\mathsf{cr}(\mathsf{p}_i(\langle M^{\varphi}, N^{\psi}\rangle)) &= \mathsf{len}(\varphi) + \mathsf{len}(\psi) + 1\\
\mathsf{cr}(\mathsf{case}(\mathsf{in}_i^{\varphi_i}(M^{\varphi_i}), x_1^{\varphi_1}.N_1^{\chi}, x_2^{\varphi_2}.N_2^{\chi})) &= \mathsf{len}(\varphi_1) + \mathsf{len}(\varphi_2) + 1.
\end{aligned}$$

پیچیدگی یک ترم برهان با پیچیده‌ترین ردکس در آن سنجیده می‌شود و اگر ترم بهنجار باشد برابر 0 است:

$$\mathsf{mr}(M) = \max\big(\{\mathsf{cr}(N) \mid N \text{ زیرترم ردکسِ } M \text{ است}\} \cup \{0\}\big).$$

لم 5.2. *اگر $M[N^{\varphi}/x^{\varphi}]$ یک ردکس و $M \not\equiv x$ باشد، یکی از حالت‌های زیر برقرار است:*

1. *خود M یک ردکس است؛ یا*

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

2. M به شکل $\mathrm{p}_i(x)$ و N به شکل $\langle P_1, P_2\rangle$ است؛

3. M به شکل $\mathrm{case}(x, x_1.P_1, x_2.P_2)$ و N به شکل $\mathrm{in}_i(Q)$ است؛

4. M به شکل xQ و N به شکل $\lambda y.\, P$ است.

در حالت نخست $\mathrm{cr}(M[N/x]) = \mathrm{cr}(M)$؛ در حالت‌های دیگر $\mathrm{cr}(M[N/x]) = \mathrm{len}(\varphi)$.

اثبات. بر M استقرا می‌کنیم.

1. اگر M تنها متغیر y و $y \not\equiv x$ باشد، $y[N/x]$ همان y است و بنابراین ردکس نیست.

2. اگر M به شکل $\langle N_1, N_2\rangle$، یا $\lambda x.\, N$، یا $\mathrm{in}_i^{\varphi}(N)$ باشد، $M[N^{\varphi}/x^{\varphi}]$ نیز همان شکل را دارد و ازاین‌رو خودِ ترم حاصل ردکس نیست.

3. اگر M به شکل $\mathrm{p}_i(P)$ باشد، دو حالت را بررسی می‌کنیم.

   a) اگر P به شکل $\langle P_1, P_2\rangle$ باشد، آنگاه $M \equiv \mathrm{p}_i(\langle P_1, P_2\rangle)$ ردکس است و آشکارا

$$M[N/x] \equiv \mathrm{p}_i(\langle P_1[N/x], P_2[N/x]\rangle)$$

نیز ردکس است. رتبه‌های برش برابرند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

b) اگر P تنها یک متغیر باشد، برای ردکس‌شدن جایگذاری باید همان x باشد و N باید به شکل $\langle P_1, P_2\rangle$ باشد. اکنون

$$M[N/x] \equiv \mathrm{p}_i(x)[\langle P_1, P_2\rangle/x]$$

را در نظر بگیرید که برابر $\mathrm{p}_i(\langle P_1, P_2\rangle)$ است. رتبهٔ برش آن برابر $\mathrm{len}(\varphi)$ است.

حالت‌های $\mathrm{case}(P, x_1.N_1, x_2.N_2)$ و PQ مشابه‌اند. □

لم 5.3. *فرض کنید M یک ردکس باشد، $M \to M'$ با انقباض ردکسِ ریشه حاصل شود، و برای هر زیرترم ردکس سرهٔ N از M داشته باشیم $\mathrm{cr}(M) > \mathrm{cr}(N)$. آنگاه $\mathrm{cr}(M) > \mathrm{mr}(M')$.*

اثبات. با جداسازی حالت‌ها.

1. اگر M به شکل $\mathrm{p}_i(\langle M_1, M_2\rangle)$ باشد، M' همان M_i است. چون هر زیرترم M_i زیرترم سرهٔ M نیز هست، ادعا برقرار است.

2. اگر M به شکل $(\lambda x^{\varphi}.\, N)Q^{\varphi}$ باشد، M' برابر $N[Q^{\varphi}/x^{\varphi}]$ است. یک ردکس در M' را در نظر بگیرید. یا این ردکس از ردکسی در N یا Q به ارث رسیده است و رتبهٔ برش متناظر آن بنا بر فرض کمتر از $\mathrm{cr}(M)$ است؛ یا بر اثر جایگذاری پدید آمده و رتبهٔ برشش $\mathrm{len}(\varphi)$ است، که بنا بر تعریف از $\mathrm{cr}((\lambda x^{\varphi}.\, N)Q)$ کمتر است.

3. اگر M به شکل

$$\mathrm{case}(\mathrm{in}_i(N^{\varphi_i}), x_1^{\varphi_1}.N_1^{\chi}, x_2^{\varphi_2}.N_2^{\chi})$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

باشد، $M' \equiv N_i[N/x_i^{\varphi_i}]$. یک ردکس در M' را در نظر بگیرید. یا این ردکس از ردکسی در N_i یا در ترم محمولهٔ N به ارث رسیده و همان رتبهٔ برش را دارد، که بنا بر فرض از $\mathrm{cr}(M)$ کمتر است؛ یا رتبهٔ برش آن $\mathrm{len}(\varphi_i)$ است، که بنا بر تعریف از رتبهٔ برش ردکس نمایشی بالا کمتر است. □

قضیه 5.4. *هر ترم برهان درست و نوع‌دار یک دنبالهٔ کاهش متناهی به صورت بهنجار دارد؛ و هر اشتقاق‌ها نوع‌دار را می‌توان به اشتقاق‌ها بهنجار کاهش داد.*

اثبات. استقرای رتبهٔ بیشینه در متن منبع، اثبات معتبری برای این قضیه نیست:

1. آن استقرا پیشنهاد می‌کند ردکسی با رتبهٔ بیشینه و بدون زیرردکس هم‌رتبه انتخاب و تعداد ردکس‌های دارای آن رتبه شمرده شود.
2. اما این شمارش به دو دلیل تضمین‌شده کاهش نمی‌یابد:
   a) انقباض می‌تواند ردکس تازه‌ای بسازد که سراسر بافت پیرامون و ترمِ حاصل را در بر می‌گیرد و لم پیشین آن را کنترل نمی‌کند؛
   b) کاهش حذف جمع می‌تواند با جایگذاری، ردکسی با رتبه‌ای حتی بالاتر پدید آورد.

بنابراین استقرای منبع را به‌عنوان اثبات بازنمی‌آوریم. اثبات درست معمولاً با نامزدهای کاهش‌پذیری یا استدلالی هم‌ارز انجام می‌شود، اما چنین اثباتی در اینجا ارائه نشده است؛ پس قضیه در این بخش بدون اثبات باقی می‌ماند. □

نتیجهٔ نرمال‌سازی ضعیف، پس از اثبات درست، می‌گوید هر ترم نوع‌دار دست‌کم یک دنبالهٔ کاهش پایان‌پذیر و یک صورت بهنجار دارد. اگر کاهش ترم‌های λ را اجرای محاسبه و صورت بهنجار را مقدار محاسبه بدانیم، این نتیجه تنها وجود یک راهبرد محاسبهٔ پایان‌پذیر را تضمین می‌کند، نه پایان‌یافتن هر ترتیب دلخواه

از کاهش‌ها. حفظ نوع نیز تضمین می‌کند مقدار نوع درست داشته باشد. برای نمونه، اگر N نوع $\varphi \to \psi$ داشته باشد و آن را بر ترم M از نوع φ اعمال کنیم، راهبرد نرمال‌ساز (NM) را به ترمی چون N' از نوع ψ کاهش می‌دهد.

ادعای قوی‌تر، *نرمال‌سازی قوی*، قضیه‌ای جداگانه است: هیچ دنبالهٔ نامتناهی $N \to N_1 \to N_2 \to \ldots$ از کاهش‌های یک‌گامی برای ترم نوع‌دار وجود ندارد. این ادعا از برهان بالا نتیجه نمی‌شود و در اینجا نیز برای آن اثبات یا ارجاعی عرضه نشده است. پس نباید نتیجه گرفت هر شیوهٔ انتخاب زیرترم‌ها سرانجام پایان می‌یابد.

از کجا می‌دانیم شیوه‌های متفاوت اجرای محاسبه همان مقدار را تولید می‌کنند؟ حفظ نوع فقط می‌گوید همهٔ مقدارهای حاصل نوع یکسانی دارند. خاصیت مهم دیگر حساب λ نوع‌دار همگرایی یا خاصیت چرچ–راسر است. اگر $N \twoheadrightarrow N_1$ و $N \twoheadrightarrow N_2$، ترمی چون N' وجود دارد که $N_1 \twoheadrightarrow N'$ و $N_2 \twoheadrightarrow N'$. به یاد آورید $N \twoheadrightarrow N'$ یعنی N' با صفر یا چند گام کاهش $\to$ از N حاصل می‌شود. اگر N_1 بهنجار باشد، تنها ترم N' که $N_1 \twoheadrightarrow N'$ همان N_1 است (با صفر گام). بنابراین اگر N_1 و N_2 هر دو بهنجار و رابطه همگرا باشد، هر دو برابرند. در صورت داشتن نرمال‌سازی قوی و همگرایی، هر ترتیب کاهش پایان می‌یابد و صورت بهنجار، مستقل از شیوهٔ محاسبه، یکتا است.

اثبات همگرایی یک رابطه معمولاً دشوار است. بااین‌حال، شرط محلی ضعیف‌تر زیر را می‌توان مستقیماً بررسی کرد:

گزاره 5.5 (خاصیت ضعیف چرچ–راسر). *اگر $N \to N_1$ و $N \to N_2$، ترمی چون N' وجود دارد که $N_1 \twoheadrightarrow N'$ و $N_2 \twoheadrightarrow N'$.*

اثبات. دو انقباض را که به N_1 و N_2 می‌انجامند در نظر بگیرید. اگر همان وقوع ردکس را منقبض کنند، $N_1 = N_2$ و ادعا فوری است. اگر دو وقوع در جایگاه‌های جدا از هم باشند، انقباض‌ها جابه‌جا می‌شوند: با انجام انقباض باقی‌مانده در هر یک از N_1 و N_2 به یک ترم مشترک می‌رسیم.

فقط حالت تودرتو باقی می‌ماند. برحسب قاعدهٔ ردکس بیرونی بررسی می‌کنیم. برای یک تصویر مانند $\pi_1(\langle O_1, O_2\rangle)$، اگر ردکس در مؤلفهٔ نگه‌داشته‌شده باشد و $O_1 \to O_1'$، دو مسیر به O_1' می‌رسند؛ اگر در مؤلفهٔ حذف‌شده باشد، هر دو مسیر به O_1 می‌رسند. حالت تصویر دوم مشابه است. در ردکس $(\lambda x.\, P)Q$، ردکس درونی یا در P است یا در Q. سازگاری جایگذاریِ بی‌گرفتاری با کاهش نشان می‌دهد در حالت نخست با کاهش باقیمانده در

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

$P[Q/x]$، و در حالت دوم با کاهش همهٔ نسخه‌های باقیماندهٔ محموله در جایگذاری، به همان حاصل می‌رسیم؛ نسخهٔ پاک‌شده به هیچ گامی نیاز ندارد. برای حذف جمع نیز همین استدلال برقرار است: باقیماندهٔ شاخهٔ نگه‌داشته‌شده بعداً منقبض می‌شود، شاخهٔ حذف‌شده گامی نمی‌خواهد، و همهٔ نسخه‌های یک ردکس تکثیرشده در جایگذاری منقبض می‌شوند. پس در همهٔ حالت‌های همسان، جدا و تودرتو یک حاصل مشترک وجود دارد. □

لم 5.6 (لم نیومن). *اگر رابطهٔ یک‌گامی $\to$ نرمال‌ساز قوی و دارای خاصیت ضعیف چرچ–راسر باشد، بستار بازتابی–تعدی آن، یعنی $\twoheadrightarrow$، همگرا است.*

اثبات. چون $\to$ نرمال‌ساز قوی است، هر ترم دست‌کم یک صورت بهنجار دارد. فرض کنید برخلاف ادعا ترمی چون N دو صورت بهنجار متمایز U و V داشته باشد. چون $U \neq V$، هیچ‌یک از دو مسیر نمی‌تواند هم‌زمان مسیر صفرگامی مشترک باشد؛ نخستین گام‌ها را جدا می‌کنیم:

$$N \to N_1 \twoheadrightarrow U,$$
$$N \to N_2 \twoheadrightarrow V.$$

خاصیت ضعیف چرچ–راسر ترمی چون P می‌دهد که $N_1 \twoheadrightarrow P$ و $N_2 \twoheadrightarrow P$. به‌سبب نرمال‌سازی قوی، P به یک صورت بهنجار W کاهش می‌یابد. در نتیجه N_1 صورت‌های بهنجار U و W را دارد و N_2 صورت‌های بهنجار V و W را. چون $U \neq V$، دست‌کم یکی از $U \neq W$ یا $V \neq W$ برقرار است. پس از ترمی با دو صورت بهنجار متمایز، در یک گام به ترم دیگری با دو صورت بهنجار متمایز رسیده‌ایم. تکرار این استدلال دنباله‌ای نامتناهی از گام‌های $\to$ می‌سازد، که با نرمال‌سازی قوی ناسازگار است.

بنابراین صورت بهنجار هر ترم یکتا است. اگر $N \twoheadrightarrow N'$ و $N \twoheadrightarrow N''$، نرمال‌سازی قوی N' و N'' را به صورت‌های بهنجار می‌رساند؛ یکتایی نشان می‌دهد این صورت‌ها یکی‌اند و در نتیجه N' و N'' به یک ترم مشترک کاهش می‌یابند. پس $\twoheadrightarrow$ همگرا است. □

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

5.5 ترم‌های برهان

فرض‌ها را در **N1i** با متغیرهایی (برای نمونه، φ^x) به‌عنوان برچسب ترخیص نشانه‌گذاری می‌کنیم. در **N2i**، هر دنبالهٔ $\Gamma \Rightarrow \varphi$ در بافت سمت چپ Γ فهرستی از جفت‌های متغیر–فرمول دارد. بنابراین در **N2i** هر دنباله در برهان نه‌تنها اطلاعاتی دربارهٔ اینکه برهان تا آن نقطه چه چیزی را اثبات کرده است (یعنی φ)، بلکه اطلاعات فرض‌های باز در هر نقطه (یعنی Γ) را نیز حمل می‌کند. اگر اطلاعات مربوط به اینکه φ چگونه اثبات شده است نیز در هر دنباله درج شود چه؟ برای این منظور می‌توان دستگاه برچسب‌خورده با ترم **tN2i** را تعریف کرد که دنباله‌هایش به شکل $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ هستند. Γ و φ مانند پیش‌اند: مجموعه‌ای از جفت‌های $x : \psi$ و فرمولیی که زیر-برهان منتهی به دنباله نشان داده از فرض‌های Γ نتیجه می‌شود. N ترمی ویژه است که برهان منتهی به دنباله را رمزگذاری می‌کند.

ترم‌هایی که به هر دنباله اختصاص می‌دهیم از متغیرهای x، y، ...، و با نمادهای تابعی رمزگذار استنتاج‌های انجام‌شده تا آن نقطه ساخته می‌شوند. برای هر قاعدهٔ استنتاج به نماد تابعی جداگانه‌ای نیاز داریم. نمادهای تابعی متناظر با قواعد معرفی «سازنده» و نمادهای متناظر با قواعد حذف «ویرانگر» نامیده می‌شوند. هر نماد تابع به تعداد مقدمات قاعده آرگومان می‌گیرد. برای نمونه، نمادهای تابعی $\wedge$Intro و $\wedge$Elim$_1$ می‌توانند به‌ترتیب $c^\wedge$ (دوموضعی) و $d_1^\wedge$ (تک‌موضعی) باشند. این قواعد در **tN2i** چنین می‌شوند:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow N : \varphi \quad \Gamma_2 \Rightarrow M : \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow c^\wedge(N, M) : \varphi \wedge \psi} \wedge\text{Intro} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow N : \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow d_1^\wedge(N) : \varphi} \wedge\text{Elim}_1$$

اگر قاعده‌ای استنتاجی فرضی را مرخص کند—یعنی مقدمه‌ای داشته باشد که در آن فرمول برچسب‌دار $x : \varphi$ آمده ولی این فرمول در بافت نتیجه نباشد—باید این امر را در ترم برهان نیز نشان دهیم. نمادهای تابعی وابسته به چنین قواعدی، متغیرهای متناظر را مقید می‌کنند. برای نمونه، قاعدهٔ $\to$Intro از مقدمهٔ $x : \varphi, \Gamma \Rightarrow \psi$ به نتیجهٔ $\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi$ می‌رود. سازندهٔ $c^\to$ یک آرگومان می‌گیرد، اما باید نشان دهد که متغیر x مقید می‌شود. این راه بیانِ ترم برهان برای مرخص‌شدن فرض دارای برچسب x است. برای نمونه، اگر ترم برهان مقدمه N باشد، می‌توانیم ترم برهان نتیجه را $c^\to([x]N)$ و قاعده را چنین بنویسیم:

$$\frac{x : \varphi, \Gamma \Rightarrow N : \psi}{\Gamma \Rightarrow c^\to([x]N) : \varphi \to \psi} \to\text{Intro}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

برای آنکه بتوانیم برهان را به‌طور کامل بازسازی کنیم، به اطلاعات بیشتری نیاز داریم. اگر فرمول‌ها مقدمهٔ یک قاعده فرمول نتیجه را کاملاً تعیین نکنند، باید آن اطلاعات را به ترم بیفزاییم. این وضع در $\to$Intro رخ می‌دهد، پس $c^{\to}([x:\varphi]N)$ می‌نویسیم. در $\vee$Intro و $\bot_I$نیز چنین است؛ بنابراین از نمادهای تابعی‌ای استفاده می‌کنیم که آن اطلاعات را حمل کنند، برای نمونه:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow N:\varphi}{\Gamma \Rightarrow c_1^{\vee\psi}(N):\varphi\vee\psi}\vee\text{Intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow N:\bot}{\Gamma \Rightarrow d_\varphi^{\bot}(N):\varphi}\bot_I$$

با این ایده‌ها می‌توان دستگاه استنتاج طبیعی به سبک دنباله‌ای ساخت که هر دنبالهٔ آن به شکل $\Gamma \Rightarrow N:\varphi$ باشد و در آن N یک ترم برهان است.

میان چنین ترم‌های برهانی و ترم‌های حساب لامبدای نوع‌دار ارتباط نزدیکی وجود دارد. برای رعایت این ارتباط، به جای نمادهای عمومی سازنده و ویرانگر بالا از نمادهای رایج در ادبیات حساب لامبدا استفاده می‌کنیم. برای نمونه، به جای $c^{\to}([x:\varphi]N)$ می‌نویسیم $\lambda x^{\varphi}.\,N$، به جای $d^{\to}(N,M)$ می‌نویسیم (NM)، به جای $c^{\wedge}(N,M)$ می‌نویسیم $\langle N,M\rangle$، و به جای $d_i^{\wedge}(N)$ می‌نویسیم $\pi_i(N)$.

تعریف 5.7. ترم‌های برهان با قواعد زیر به‌طور استقرایی ساخته می‌شوند:

1. هر متغیر x یک ترم برهان است (اصول).
2. اگر x متغیر، φ فرمول و N ترم برهان باشد، $\lambda x^{\varphi}.\,N$ نیز ترم برهان است ($\to$Intro).
3. اگر N و M ترم برهان باشند، (NM) نیز ترم برهان است ($\to$Elim).
4. اگر N و M ترم برهان باشند، $\langle N,M\rangle$ ترم برهان است ($\wedge$Intro).
5. اگر N ترم برهان باشد، $\pi_i(N)$ نیز ترم برهان است، که در آن i برابر 1 یا 2 است ($\wedge\text{Elim}_i$).

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

6. اگر N ترم برهان و φ یک فرمول باشد، $\iota_i^{\varphi}(N)$ ترم برهان است، که در آن i برابر 1 یا 2 است ($\vee\text{Intro}_i$).

7. اگر M، N_1 و N_2 ترم برهان، و x_1 و x_2 متغیر باشند، $\delta\, M\, x_1.N_1\, x_2.N_2$ ترم برهان است ($\vee\text{Elim}$).

8. اگر N ترم برهان و φ فرمول باشد، $\varepsilon^{\varphi}(N)$ یک ترم برهان است ($\bot_I$).

هر ترم برهانی ترم برهان یک برهان نیست. برای نمونه، ترم $\langle N, M\rangle$ برهانی را رمزگذاری می‌کند که به استنتاج $\wedge\text{Intro}$ پایان می‌یابد، پس فرمول پایانی آن یک عطف $\varphi \wedge \psi$ است. این فرمول نمی‌تواند مقدمهٔ اصلی قاعدهٔ $\rightarrow\text{Elim}$ باشد؛ بنابراین $(\langle N, M\rangle P)$ نمی‌تواند ترم برهان یک برهان درست باشد. تنها ترم‌های برهانی که از قواعد **tN2i** پیروی می‌کنند ترم‌های برهان درست‌اند. این قواعد در جدول 5.3 آمده‌اند.

اصول:

$$x : \varphi \Rightarrow x : \varphi$$

قواعد استنتاج:

$$\rightarrow\text{Intro}\ \frac{N : \psi x : \varphi, \Gamma \ \Rightarrow}{\lambda x^{\varphi}.\, N : \varphi \rightarrow \psi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\rightarrow\text{Elim}\ \frac{M : \varphi \Gamma_2 \ \Rightarrow \qquad N : \varphi \rightarrow \psi \Gamma_1 \ \Rightarrow}{(NM) : \psi \Gamma_1, \Gamma_2 \ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Intro}\,\frac{N_2 : \psi\Gamma_2 \;\Rightarrow \qquad N_1 : \varphi\Gamma_1 \;\Rightarrow}{\langle N_1, N_2\rangle : \varphi \wedge \psi\Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Elim}_2\,\frac{N : \varphi \wedge \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\pi_2(N) : \psi\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \wedge\text{Elim}_1\,\frac{N : \varphi \wedge \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\pi_1(N) : \varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\vee\text{Intro}_2\,\frac{N : \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\iota_2^{\varphi}(N) : \varphi \vee \psi\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \vee\text{Intro}_1\,\frac{N : \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\iota_1^{\psi}(N) : \varphi \vee \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\vee\text{Elim}\,\frac{N_2 : \chi y : \psi, \Gamma_3 \;\Rightarrow \qquad N_1 : \chi x : \varphi, \Gamma_2 \;\Rightarrow \qquad M : \varphi \vee \psi\Gamma_1 \;\Rightarrow}{\delta\, M\, x.N_1\, y.N_2 : \chi\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \;\Rightarrow}$$

$$\bot_I\,\frac{N : \bot\Gamma \;\Rightarrow}{\varepsilon^{\varphi}(N) : \varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

جدول 5.3: قواعد دستگاه استنتاج طبیعی شهودی گزاره‌ایِ برچسب‌خورده با ترم **tN2ip**.

5.6 تبدیل اشتقاق‌ها به ترم‌های برهان

فرایند تبدیل برهان‌ها استنتاج طبیعی به ترم‌های برهان، یعنی ترجمهٔ برهان‌ها **N2i** به برهان‌ها **tN2i**، بسیار ساده است. کافی است در سمت چپ هر فرمول واقع در راست یک دنباله در اشتقاق، ترم برهانی بنویسیم؛ در نتیجه دنباله‌هایی به شکل $\Gamma \Rightarrow M : \varphi$ حاصل می‌شوند. سپس می‌گوییم M در بافت Γ گواه φ است. قواعد **tN2i** ترم برهانی را که باید نوشته شود کاملاً تعیین می‌کنند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

گزاره 5.8. *هر برهان δ برای $\Gamma \Rightarrow \varphi$ در **N2i** با برهان δ' برای $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ در **tN2i** متناظر است. ترم برهان N به‌طور یکتا با δ تعیین می‌شود.*

اثبات. بر ارتفاع δ استقرا می‌کنیم. اگر δ اصل $x : \varphi \Rightarrow \varphi$ باشد، δ' اصل $x : \varphi \Rightarrow x : \varphi$ است. اگر δ با قاعده‌ای استنتاجی پایان یابد، فرض استقرا برای هر مقدمه ترم برهانی و برای دنبالهٔ شامل آن ترم، برهان‌ها در **tN2i** فراهم می‌کند که با آن مقدمه متناظر است. قاعدهٔ متناظر **tN2i** را اعمال می‌کنیم؛ قاعدهٔ استنتاج **tN2i** ترم برهان متناظر را تعیین می‌کند. □

مثال 5.9. برهان بسیار سادهٔ زیر را در **N1i** برای $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$ در نظر بگیرید:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\psi}\,\wedge\mathrm{Elim}_2 \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]^x}{\varphi}\,\wedge\mathrm{Elim}_1}{\psi \wedge \varphi}\,\wedge\mathrm{Intro}}{(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,{\scriptstyle x}\,\to\mathrm{Intro}$$

این برهان در **N2i** چنین است:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \psi}\,\wedge\mathrm{Elim}_2 \quad \dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \varphi}\,\wedge\mathrm{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \psi \wedge \varphi}\,\wedge\mathrm{Intro}}{\Rightarrow\; (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,\to\mathrm{Intro}$$

ترم‌های برهان را از بالا به پایین اختصاص می‌دهیم. ترم‌های برهان اصول همان متغیر موجود در بافت، یعنی x، هستند. ترم‌های برهان متناظر با $\wedge\mathrm{Elim}_i$ سپس به صورت $\pi_2(x)$ و $\pi_1(x)$ تعیین می‌شوند. با اعمال $\wedge\mathrm{Intro}$ این دو ترم را ترکیب می‌کنیم: $\langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle$. سرانجام، قاعدهٔ $\to\mathrm{Intro}$ یک انتزاع λ اعمال می‌کند، x را مقید می‌سازد و ثبت می‌کند که x فرض $\varphi \wedge \psi$ را برچسب زده بود: $\lambda x^{\varphi \wedge \psi}. \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle$. آنگاه برهان در **tN2i**

چنین است:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; x:\varphi\wedge\psi}{x:\varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x):\psi}\wedge\mathrm{Elim}_2 \qquad \dfrac{x:\varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; x:\varphi\wedge\psi}{x:\varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x):\varphi}\wedge\mathrm{Elim}_1}{x:\varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \langle\pi_2(x),\pi_1(x)\rangle:\psi\wedge\varphi}\wedge\mathrm{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\,\langle\pi_2(x),\pi_1(x)\rangle:(\varphi\wedge\psi)\to(\psi\wedge\varphi)}\to\mathrm{Intro}$$

فصل 6

گزاره‌ها به‌مثابهٔ نوع‌ها

این پیش‌نویس فصلی دربارهٔ تناظر کِری–هاوارد، بسیار آزمایشی است. به توضیح و انگیزه‌بخشی بیشتری نیاز دارد و احتمالاً خطاها و افتادگی‌هایی در آن هست. اثبات نرمال‌سازی باید بازبینی و گسترش یابد. برای نوع ضرب مثالی وجود ندارد. تبدیل‌های جایگشتی و ساده‌سازی پوشش داده نشده‌اند. وقتی مطالبی دربارهٔ حساب لامبدای (نوع‌دار)، که اساساً در اینجا مفروض گرفته شده است، افزوده شود، متن بسیار معنادارتر خواهد شد. با احتیاط فراوان استفاده شود.

6.1 کاهش

در اشتقاق‌ها استنتاج طبیعی، اگر معرفی بلافاصله با حذف دنبال شود، انحرافی پدید می‌آید که می‌توان آن را «کاهش» داد. برای نمونه، یک $\wedge$Intro که پس از آن $\wedge$Elim بیاید «خنثی می‌شود»، زیرا نتیجهٔ $\wedge$Elim همواره یکی از دو مؤلفهٔ عطفی است که $\wedge$Intro می‌سازد و مقدمات $\wedge$Intro نیز همان

دو مؤلفه‌اند. پس اگر به اشتقاق برای یکی از دو مؤلفه نیاز داشته باشیم، می‌توانیم همان اشتقاق را مستقیماً به کار ببریم و از معرفی عطف و سپس حذف آن صرف‌نظر کنیم. داریم

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta_1\\ \varphi_1\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\delta_2\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1\wedge\varphi_2}\,\wedge\mathrm{Intro}}{\varphi_i}\,\wedge\mathrm{Elim}_i \quad\to\quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta_i\\ \varphi_i\end{array}$$

می‌توان رابطهٔ کاهش مشابهی را بر ترم‌های برهان متناظر، که این ساده‌سازی پیشنهاد می‌کند، در نظر گرفت. اگر N_1 ترم برهان δ_1 و N_2 ترم برهان δ_2 باشد، می‌گوییم ترم برهانِ برهان سمت چپ در یک گام به ترم برهانِ برهان سمت راست کاهش می‌یابد:

$$\pi_i(\langle N_1, N_2\rangle) \to N_i$$

در حساب لامبدای نوع‌دار، این قاعدهٔ کاهش *بتا* برای نوع ضرب است.

در استنتاج طبیعی، جفتی از استنتاج‌ها مانند $\wedge$Intro و $\wedge$Elim پس از آن، یعنی جفتی که می‌توان آن را کاهش داد، برش نامیده می‌شود. در حساب لامبدای نوع‌دار، ترم سمت چپ $\to$ را ردکس و ترم سمت راست را حاصل کاهش می‌نامند. برخلاف حساب لامبدای بی‌نوع، که در آن فقط $(\lambda x.\, N)Q$ ردکس به شمار می‌آید، نحو حساب لامبدای نوع‌دار به ترم‌های شامل $\langle N, M\rangle$، $\pi_i(N)$، $\iota_i^{\varphi}(N)$، $\delta\, N\, x_1.M_1\, x_2.M_2$ و $\varepsilon^{\varphi}(N)$ گسترش یافته است و ردکس‌های متناظر نیز دارد.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

برای فصل نیز کاهش مشابهی داریم:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,\vee\text{Intro} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_1]^{x_1}\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_2]^{x_2}\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi\end{array}}{\chi}\,\vee\text{Elim}^{\,x_1,x_2} \quad \to \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\\ \vdots\,\delta_i\\ \chi\end{array}$$

این تبدیل با کاهش زیر بر ترم‌های برهان متناظر است:

$$\delta\, \iota_i^{\varphi_{3-i}}(M)\, x_1.N_1\, x_2.N_2 \to N_i[M/x_i]$$

که در آن M ترم برهان δ و N_i ترم برهان δ_i است. این قاعدهٔ کاهش بتا برای نوع‌های جمع است. در اینجا $N_i[M/x_i]$ یعنی جایگزین‌کردن همهٔ وقوع‌های آزاد متغیر x_i در N_i با M.

کاهش نوع تابعی متناظر با حذف انحرافی است که از $\to$Intro و سپس $\to$Elim تشکیل شده است.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^{x}\\ \vdots\,\delta\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,\to\text{Intro}^{\,x} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\delta'\\ \varphi\end{array}}{\psi}\,\to\text{Elim} \quad \to \quad \begin{array}{c}\vdots\,\delta'\\ \varphi\\ \vdots\,\delta\\ \psi\end{array}$$

برای ترم‌های برهان، این همان کاهش بتای معمولی است:

$$(\lambda x^{\varphi}.\, NM) \to N[M/x]$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

افزون بر تبدیل‌های کاهشی بر برهان‌ها، می‌توان تبدیل‌های جایگشتی را نیز در نظر گرفت. این تبدیل‌ها بر (زیر)برهان‌های اعمال می‌شوند که با $\vee$Elim پایان می‌یابند و سپس یک قاعدهٔ حذف دیگر می‌آید؛ برای نمونه:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,\vee\text{Intro} \quad \begin{array}{c}[\varphi_1]^{x_1}\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi_1 \wedge \chi_2\end{array} \quad \begin{array}{c}[\varphi_2]^{x_2}\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi_1 \wedge \chi_2\end{array}}{\chi_1 \wedge \chi_2}\,x_1, x_2\,\vee\text{Elim}}{\chi_i}\,\wedge\text{Elim}_i \quad \rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\delta\\ \varphi_i\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,\vee\text{Intro} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_1]^{x_1}\\ \vdots\,\delta_1\\ \chi_1 \wedge \chi_2\end{array}}{\chi_i}\,\wedge\text{Elim}_i \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_2]^{x_2}\\ \vdots\,\delta_2\\ \chi_1 \wedge \chi_2\end{array}}{\chi_i}\,\wedge\text{Elim}_i}{\chi_i}\,x_1, x_2\,\vee\text{Elim}$$

اگر ترم‌های برهان δ، δ_1 و δ_2 به‌ترتیب M، N_1 و N_2 باشند، قاعدهٔ کاهش متناظر برای ترم‌های برهان، یعنی ترم‌های λ، چنین است:

$$\pi_i(\delta\, M\, x_1.N_1\, x_2.N_2) \rightarrow \delta\, M\, x_1.\pi_i(N_1)\, x_2.\pi_i(N_2)$$

البته انحراف‌ها را نه‌فقط در انتهای برهان‌ها، بلکه درون برهان‌ها نیز می‌توان حذف کرد: کافی است تبدیل کاهشی را بر زیر-برهانی که با یک انحراف پایان می‌یابد اعمال کنیم. به همین ترتیب، کاهش β بر زیرترم‌های ترم‌های λ اعمال می‌شود. اگر N زیرترمی از M و $N \rightarrow N'$ باشد، می‌توانیم زیرترم N را در M با N' جایگزین کنیم و M' را به دست آوریم؛ در این حالت نیز می‌نویسیم $M \rightarrow M'$. اگر دنباله‌ای $M = M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow \ldots \rightarrow M_k = M'$ وجود داشته باشد، شامل حالت $k = 1$ یعنی $M = M'$، می‌نویسیم $M \twoheadrightarrow M'$.

یک برهان که در هیچ زیر-برهان آن نتوان تبدیلی اعمال کرد بهنجار نامیده می‌شود. به همین ترتیب، ترم λای که در هیچ زیرترمش نتوان تبدیلی اعمال کرد بهنجار است. ترم λ بهنجار را صورت بهنجار نیز می‌نامند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

6.2 استنتاج طبیعی دنباله‌ای

اگر یک اشتقاق استنتاج طبیعی با Γ به‌عنوان فرض‌های رفع‌نشده و φ به‌عنوان نتیجه وجود داشته باشد، می‌نویسیم $\Gamma \Rightarrow \varphi$؛ و اگر Γ تهی باشد، می‌نویسیم $\Rightarrow \varphi$.

برای $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ می‌نویسیم $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$، و برای $\Gamma \cup \Delta$ می‌نویسیم Γ, Δ.

توجه کنید وقتی $\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi$ را داریم، یعنی اشتقاق با Γ به‌عنوان فرض‌های رفع‌نشده و $\varphi \wedge \psi$ به‌عنوان فرمول پایانی داریم، با اعمال $\wedge$Elim در پایین می‌توانیم اشتقاق با همان فرض‌های رفع‌نشده و φ به‌عنوان نتیجه به دست آوریم. به بیان دیگر، اگر $\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi$، آنگاه $\Gamma \Rightarrow \varphi$.

$$\wedge\text{Elim}\,\frac{\varphi \wedge \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\psi\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \wedge\text{Elim}\,\frac{\varphi \wedge \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

برچسب $\wedge$Elim پیوند این قاعده را با قاعدهٔ هم‌نام آن در استنتاج طبیعی یادآوری می‌کند.

به همین ترتیب، فرض کنید $\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi$؛ یعنی اشتقاق با فرض‌های رفع‌نشده Γ, φ و فرمول پایانی ψ داریم. اگر قاعدهٔ $\rightarrow$Intro را اعمال کنیم، اشتقاق با Γ به‌عنوان فرض‌های رفع‌نشده و $\varphi \rightarrow \psi$ به‌عنوان فرمول پایانی خواهیم داشت؛ یعنی $\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$. توجه کنید که این صورت، رفع فرض‌ها را صریح‌تر کرده است.

$$\rightarrow\text{Intro}\,\frac{\psi\Gamma, \varphi \;\Rightarrow}{\varphi \rightarrow \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

از قواعد دیگر نیز به همین شیوه می‌توان نتیجه گرفت؛ صورت کامل آن‌ها چنین است:

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \qquad \Delta \;\Rightarrow\; \psi}{\Gamma, \Delta \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}\,\wedge\text{Intro}$$

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi}\,\wedge\text{Elim}_1 \qquad \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \varphi \wedge \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \psi}\,\wedge\text{Elim}_2$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi}\vee\text{Intro}_1 \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi}\vee\text{Intro}_2$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \vee \psi \quad \Delta, \varphi \Rightarrow \chi \quad \Delta', \psi \Rightarrow \chi}{\Gamma, \Delta, \Delta' \Rightarrow \chi}\vee\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi}\to\text{Intro} \qquad \frac{\Delta \Rightarrow \varphi \to \psi \quad \Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \psi}\to\text{Elim}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\bot_I$$

هر فرض به‌تنهایی اشتقاق از φ بر پایهٔ φ است؛ یعنی همیشه $\varphi \Rightarrow \varphi$ را داریم.

$$\frac{}{\varphi \Rightarrow \varphi}$$

این قواعد را در کنار هم می‌توان حسابی دربارهٔ وجود اشتقاق‌ها استنتاج طبیعی دانست. همچنین می‌توان آن‌ها را گونه‌ای نمادگذاری برای استنتاج طبیعی شمرد که هر گام در آن نه‌فقط فرمول اشتقاق‌شده، بلکه فرض‌های رفع‌نشده‌ی را نیز ثبت می‌کند که آن فرمول از آن‌ها اشتقاق شده است.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi\varphi \Rightarrow}}{\varphi \vee (\varphi \to \bot)\varphi \Rightarrow} \quad \psi\psi \Rightarrow}{\bot\varphi, \psi \Rightarrow}}{\varphi \to \bot\psi \Rightarrow}}{\varphi \vee (\varphi \to \bot)\psi \Rightarrow} \quad \psi\psi \Rightarrow}{\bot\psi \Rightarrow}}{\psi \to \bot \Rightarrow}$$

که در آن ψ کوتاه‌شدهٔ $(\varphi \vee (\varphi \to \bot)) \to \bot$ است.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

6.3 بازیابی اشتقاق‌ها از ترم‌های برهان

اکنون جهت دیگر را در نظر بگیریم: ترجمهٔ یک ترم برهان درست و نوع‌پذیر N به برهان در **N2i**. این بازسازی تنها نسبت به بافتی ممکن است که برای هر متغیر x آزاد در ترم برهان داده‌شده، جفتی به‌شکل $x : \varphi$ در بر داشته باشد. یک ترم خام که در چنین بافتی نوع‌پذیر نباشد لزوماً هیچ برهانی را رمزگذاری نمی‌کند. با نمونه‌ای بدون متغیر آزاد آغاز می‌کنیم، یعنی ترم

$$\lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\,\langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle$$

این ترم به شکل $\lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\,N_1$ است. چون تنها قاعدهٔ **tN2i** که ترمی از این شکل می‌سازد $\to$Intro است، می‌دانیم برهان رمزگذاری‌شده به‌وسیلهٔ N باید با $\to$Intro پایان یابد؛ یعنی پایان آن چنین است:

$$\dfrac{x : \varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : \chi}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\,\langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : (\varphi\wedge\psi)\to\chi}\;\to\text{Intro}$$

هنوز نمی‌دانیم χ چیست، اما می‌دانیم مقدم شرطی $\varphi\wedge\psi$ است و بافت مقدمه باید $x : \varphi\wedge\psi$ را در بر داشته باشد.

اکنون ترم برهان متناظر با مقدمه از پیش تعیین شده است: $\langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle$. برهانی که این ترم رمزگذاری می‌کند باید با $\wedge$Intro پایان یابد. هنوز نمی‌دانیم χ چیست، اما چون نتیجهٔ $\wedge$Intro است، باید عطف باشد؛ یعنی $\chi \equiv (\chi_1\wedge\chi_2)$. بازسازی را ادامه می‌دهیم:

$$\dfrac{\dfrac{x : \varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \chi_1 \qquad x : \varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \chi_2}{x : \varphi\wedge\psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : \chi_1\wedge\chi_2}\;\wedge\text{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\,\langle \pi_2(x), \pi_1(x)\rangle : (\varphi\wedge\psi)\to(\chi_1\wedge\chi_2)}\;\to\text{Intro}$$

ترم برهان $\pi_2(x)$ نشان می‌دهد دنبالهٔ بالایی سمت چپ با $\wedge\mathrm{Elim}_2$ به دست آمده و بنابراین مقدمه به شکل $\theta \wedge \chi_1$ است. در سمت راست می‌توان تعیین کرد استنتاج منتهی به χ_2 باید $\wedge\mathrm{Elim}_1$ باشد و مقدمه به شکل $\chi_2 \wedge \alpha$ باشد.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \theta \wedge \chi_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \chi_1}\wedge\mathrm{Elim}_2 \qquad \dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \chi_2 \wedge \alpha}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \chi_2}\wedge\mathrm{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : \chi_1 \wedge \chi_2}\wedge\mathrm{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : (\varphi \wedge \psi) \to (\chi_1 \wedge \chi_2)}\to\mathrm{Intro}$$

چون ترم‌های برهان دنباله‌های بالایی اکنون متغیرند، می‌دانیم آن دنباله‌ها باید اصل باشند. این امر χ_1، χ_2، θ و α را تعیین می‌کند: باید $\theta \equiv \varphi$ و $\chi_1 \equiv \psi$ باشد، وگرنه دنبالهٔ چپ اصل نیست؛ و باید $\chi_2 \equiv \varphi$ و $\alpha \equiv \psi$ باشد، وگرنه دنبالهٔ راست اصل نیست. اکنون برهان را کاملاً بازیابی کرده‌ایم:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_2(x) : \psi}\wedge\mathrm{Elim}_2 \qquad \dfrac{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; x : \varphi \wedge \psi}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \pi_1(x) : \varphi}\wedge\mathrm{Elim}_1}{x : \varphi \wedge \psi \;\Rightarrow\; \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : \psi \wedge \varphi}\wedge\mathrm{Intro}}{\Rightarrow\; \lambda x^{\varphi\wedge\psi}.\, \langle \pi_2(x), \pi_1(x) \rangle : (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)}\to\mathrm{Intro}$$

6.4 حفظ نوع

تبدیل‌های کاهشی و جایگشتیِ بررسی‌شده را می‌توان مستقیماً برای دستگاه‌های **tN2i** و **tN3i** نیز تعریف کرد. دستگاه **tN3i** نوع ترم λایِ N را نسبت به بافت Γ، فرمول φ تعریف می‌کند هرگاه $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ در **tN3i** برهان داشته باشد. این واقعیت که قواعد کاهش بتای یک‌گامی برای ترم‌های λ دقیقاً بازتاب تبدیل‌های کاهشی و جایگشتیِ برهان‌ها هستند پیامد مهمی دارد: نوع ترم λ نسبت به بافت Γ پس از یک گام کاهش بتا ثابت می‌ماند. این ویژگی را *حفظ نوع* می‌نامند.

گزاره 6.1. *اگر N نسبت به Γ نوع φ داشته باشد و $N \to N'$، آنگاه N' نیز نسبت به Γ نوع φ دارد.*

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اثبات. با استقرا بر N و ارتفاع برهان‌ها δ از $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$ به‌آسانی مطلب زیر را ثابت می‌کنیم: اگر M زیرترمی از N باشد، آنگاه δ شامل زیر-برهانی چون δ_1 است که به $\Gamma' \Rightarrow M : \psi$ پایان می‌یابد. اگر M ردکس باشد، تبدیلی بر δ_1 اعمال می‌شود. با اعمال کاهش بر δ_1، برهان δ_1' از $\Gamma' \Rightarrow M' : \psi$ به دست می‌آوریم. با وارسی تبدیل‌های **tN3i** می‌بینیم M' حاصل کاهش M است. جایگزین‌کردن δ_1 در δ با δ_1'، برهان δ' از $\Gamma \Rightarrow N' : \varphi$ می‌دهد، که در آن N' از جایگزین‌کردن زیرترم M در N با M' حاصل شده است.

برای نمونه، تبدیل کاهشیِ $\wedge$Intro و سپس $\wedge$Elim را در نظر بگیرید:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow N_1 : \psi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow N_2 : \psi_2\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \langle N_1, N_2\rangle : \psi_1 \wedge \psi_2}\,\wedge\text{Intro}}{\Gamma \Rightarrow \pi_i(\langle N_1, N_2\rangle) : \psi_i}\,\wedge\text{Elim}_i \quad \to \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Rightarrow N_i : \psi_i\end{array}$$

می‌بینیم ترم برهانِ برهان سمت راست، یعنی δ_1'، همان N_i است. این دقیقاً حاصل اعمال یک گام کاهش بتا بر ترم برهان $\pi_i(\langle N_1, N_2\rangle)$ متعلق به برهان سمت چپ، یعنی δ_1، است.

یا استنتاج $\to$Intro و سپس $\to$Elim و تبدیل کاهشیِ اعمال‌شده بر آن را در نظر بگیرید:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\delta_2\\ \vdots\\ x : \psi_1, \Gamma \Rightarrow N : \psi_2\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \lambda x^{\psi_1}.\, N : \psi_1 \to \psi_2}\,\to\text{Intro} \quad \begin{array}{c}\delta_3\\ \vdots\\ \Gamma \Rightarrow M : \psi_1\end{array}}{\Gamma \Rightarrow (\lambda x^{\psi_1}.\, NM) : \psi_2}\,\to\text{Elim} \quad \to$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

$$\begin{array}{l} \vdots\,\delta_3 \\ \Gamma \Rightarrow M : \psi_1 \\ \vdots\,\delta_2[\delta_3/x : \psi_1] \\ \Gamma \Rightarrow N[M/x] : \psi_2 \end{array}$$

باز هم ترم برهانِ برهان سمت راست دقیقاً حاصل کاهش بتای یک‌گامیِ ترم برهانِ برهان سمت چپ است. البته باید با دقت و با استقرا بر ارتفاع δ_2 بررسی کرد که جایگزین‌کردن همهٔ اصول به‌شکل $\Gamma' \Rightarrow x : \psi_1$ در δ_2 با برهان δ_3 از $\Gamma \Rightarrow M : \psi_1$، واقعاً برهان $\delta_2[\delta_3/x : \psi_1]$ از $\Gamma \Rightarrow N[M/x] : \psi_2$ به دست می‌دهد. $\square$

تناظر نزدیک میان برهان‌ها و ترم‌های λ پیامد دیگری نیز دارد. خاصیت پیشرفت را باید برای ترم‌های بسته و درست‌نوع‌دار بیان کرد: چنین ترمی یا یک مقدار، یعنی صورت متعارف مناسب نوعش، است یا در یک گام کاهش بتا به ترم دیگری می‌رسد. صورت‌های متعارف بسته برای نوع تابعی، عطفی و فصلی به‌ترتیب لامبدا، جفت و تزریق‌اند؛ برای $\bot$ صورت متعارف بسته‌ای وجود ندارد. این ادعا با استقرا بر اشتقاق نوع‌دهی و لم صورت‌های متعارف اثبات می‌شود. اگر ترم بستهٔ N مقدار نباشد، وارسی آخرین قاعدهٔ نوع‌دهی یک ردکس M در آن آشکار می‌کند؛ زیر-برهان متناظر در برهان **tN3i** را می‌توان تبدیل کرد. اگر $N \to N'$ با جایگزین‌کردن M با حاصل کاهش آن به دست آید، نتیجه برهان از $\Gamma \Rightarrow N' : \varphi$ است.

پیشرفت همراه با حفظ نوع تضمین می‌کند کاهش بتای ترم‌های بسته و درست‌نوع‌دار «گیر نمی‌کند»: اگر ترم مقدار نباشد، به ترم درست‌نوع‌دار دیگری با همان نوع کاهش می‌یابد.

6.5 نوع‌ها

ترم برهانی مانند (MN) به‌تنهایی برهانی را که ترم آن است به‌طور یکتا تعیین نمی‌کند. علت این است که متغیرهای آزاد، یعنی ترم‌های برهان اصول، فرمول‌ها موجود در اصول متناظر را مشخص نمی‌کنند. اما اگر این اطلاعات را در بافتی چون Γ تعیین کنیم، برهان، در صورت وجود، یکتا تعیین می‌شود.

تعریف 6.2. یک بافت برای ترم برهان N مجموعه‌ای چون Γ است که برای هر متغیر آزاد x در N دقیقاً یک جفت $x : \varphi$ در بر دارد.

توجه کنید تعریف لازم نمی‌داند Γ فقط برای متغیرهای آزاد N جفت $x : \varphi$ داشته باشد. بنابراین، برای نمونه، $\Gamma = \{x : \varphi, y : \psi, z : \chi\}$ بافتی برای $\langle x, y\rangle$ است.

تعریف 6.3. فرض کنید Γ بافتی برای N باشد. نوع N نسبت به Γ با بندهای استقرایی زیر تعریف می‌شود:

1. نوع x برابر φ است اگر و تنها اگر $x : \varphi \in \Gamma$.
2. اگر N نسبت به φ, Γ : x نوع ψ داشته باشد، نوع $\lambda x^{\varphi}.\, N$ برابر $\varphi \to \psi$ است.
3. اگر N نوع $\varphi \to \psi$ و M نوع φ داشته باشد، آنگاه (NM) نوع ψ دارد.
4. اگر N نوع φ و M نوع ψ داشته باشد، آنگاه $\langle N, M\rangle$ نوع $\varphi \wedge \psi$ دارد.
5. اگر N نوع $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ داشته باشد، آنگاه $\pi_i(N)$ نوع φ_i دارد.
6. اگر N نوع φ داشته باشد، آنگاه $\iota_i^{\psi}(N)$ برای $i = 1$ نوع $\varphi \vee \psi$ و برای $i = 2$ نوع $\psi \vee \varphi$ دارد.

7. اگر M نوع $\varphi \vee \psi$، و N_1 نسبت به $x_1 : \varphi, \Gamma$ نوع χ و N_2 نسبت به $x_2 : \psi, \Gamma$ نوع χ داشته باشند، آنگاه $\delta\, M\, x_1.N_1\, x_2.N_2$ نوع χ دارد.

8. اگر N نوع $\bot$ داشته باشد، آنگاه $\varepsilon^{\varphi}(N)$ نوع φ دارد.

گزاره 6.4. *نسبت به هر بافت Γ برای N، ترم برهان N حداکثر یک نوع دارد؛ یعنی اگر نوعی برای آن وجود داشته باشد، آن نوع یکتا است.*

اثبات. بر N استقرا می‌کنیم. □

اگر نوع N نسبت به Γ برابر φ باشد، می‌نویسیم $\Gamma \Rightarrow N : \varphi$. بندهای تعریف 6.3 باید آشنا به نظر برسند: آن‌ها دقیقاً قواعد **tN2i** هستند، با یک تفاوت کوچک؛ بافت Γ در سراسر استنتاج یکسان است. می‌توانیم تعریف را به‌صورت حساب **tN3i** با قواعد مندرج در جدول 6.2 صورت‌بندی کنیم.

اصول:

$$\Gamma \Rightarrow x : \varphi \quad \text{اگر} \quad x : \varphi \in \Gamma$$

قواعد استنتاج:

$$\rightarrow\text{Intro}\ \frac{N : \psi x : \varphi, \Gamma \ \Rightarrow}{\lambda x^{\varphi}.\, N : \varphi \rightarrow \psi \Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\to\text{Elim}\ \frac{M : \varphi\Gamma \ \Rightarrow \qquad N : \varphi \to \psi\Gamma \ \Rightarrow}{(NM) : \psi\Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Intro}\ \frac{N_2 : \psi\Gamma \ \Rightarrow \qquad N_1 : \varphi\Gamma \ \Rightarrow}{\langle N_1, N_2\rangle : \varphi \wedge \psi\Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\wedge\text{Elim}_2\ \frac{N : \varphi \wedge \psi\Gamma \ \Rightarrow}{\pi_2(N) : \psi\Gamma \ \Rightarrow} \qquad \wedge\text{Elim}_1\ \frac{N : \varphi \wedge \psi\Gamma \ \Rightarrow}{\pi_1(N) : \varphi\Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\vee\text{Intro}_2\ \frac{N : \varphi\Gamma \ \Rightarrow}{\iota_2^{\psi}(N) : \psi \vee \varphi\Gamma \ \Rightarrow} \qquad \vee\text{Intro}_1\ \frac{N : \varphi\Gamma \ \Rightarrow}{\iota_1^{\psi}(N) : \varphi \vee \psi\Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\vee\text{Elim}\ \frac{N_2 : \chi y : \psi, \Gamma \ \Rightarrow \qquad N_1 : \chi x : \varphi, \Gamma \ \Rightarrow \qquad M : \varphi \vee \psi\Gamma \ \Rightarrow}{\delta\, M\, x.N_1\, y.N_2 : \chi\Gamma \ \Rightarrow}$$

$$\bot_I\ \frac{N : \bot\Gamma \ \Rightarrow}{\varepsilon^{\varphi}(N) : \varphi\Gamma \ \Rightarrow}$$

جدول 6.2: قواعد دستگاه استنتاج طبیعی شهودی گزاره‌ایِ برچسب‌خورده با ترم **tN3ip**، به‌منزلهٔ دستگاه انتساب نوع.

ترم‌های برهان، ترم‌های گونه‌ای از حساب λ به نام حساب λ *نوع‌دار با ضرب‌ها، جمع‌ها و نوع تهی* هستند. حساب λ کلاسیک تنها ترم‌هایی دارد که از متغیرها، *انتزاع‌های* λ مانند $\lambda x.\, N$ و اعمال (MN) ساخته شده‌اند؛ و حاشیه‌نویسی φ در انتزاع نوع‌دار $\lambda x^{\varphi}.\, N$ را ندارد. حساب λ مدلی تورینگ‌کامل از محاسبه است؛ یعنی هر تابع جزئی محاسبه‌پذیر را می‌توان با ترمی در آن بازنمایی کرد. گونه‌ای از حساب λ که ترم‌های برهان و قواعد نوع‌دهی می‌سازند مدلی

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

محدودتر از محاسبه است، اما اندیشه‌های اصلی همان‌اند. انتساب نوع آن را محدود می‌کند: تنها ترم‌های درست‌نوع‌دار، یعنی ترم‌های برهانی که نسبت به بافتی چون Γ نوع دارند، ترم‌های مجازند. برای نمونه، $\lambda x.\,(xx)$ در حساب λ کلاسیک بی‌نوع مجاز است، اما $\lambda x^{\varphi}.\,(xx)$ برای هیچ φ درست‌نوع‌دار نیست. زیرا قواعد نوع‌دهی برای نوع‌داشتن (xx) ایجاب می‌کنند نخستین x نوع $\varphi \to \psi$ و دومین x نوع φ داشته باشد؛ این ناممکن است، چون φ یک زیر-فرمول سرهٔ $\varphi \to \psi$ است.

به‌طور شهودی می‌توان نوع‌ها را گونهٔ چیزی دانست که ترمی از آن نوع می‌نامد. پس ترمی از نوع $\varphi \wedge \psi$ جفتی را برمی‌گزیند که مؤلفهٔ نخستش نوع φ و مؤلفهٔ دومش نوع ψ دارد؛ یعنی عضو از ضرب $\varphi \times \psi$. ترمی از نوع $\varphi \to \psi$ تابعی از چیزهای نوع φ به چیزهای نوع ψ است. ترمی از نوع $\varphi \vee \psi$ یا چیزی از نوع φ است یا چیزی از نوع ψ، همراه با اطلاعاتی که مشخص می‌کند کدام‌یک است. این همانند اجتماع مجزای دو مجموعهٔ φ و ψ است که چنین تعریف می‌شود: $\{\langle i, x\rangle : i = 1 \text{ اگر } x \in \varphi,\ i = 2 \text{ یا } x \in \psi \text{ اگر } i = 2\}$. نوع $\bot$ مجموعهٔ تهی است؛ یعنی ترمی با این نوع نمی‌تواند چیزی را بنامد. چون استنتاج طبیعی، از جمله **tN3i**، سازگار است، هیچ برهانی از $\bot$ بدون فرض‌های باز وجود ندارد؛ پس هیچ ترم برهان بسته‌ای، یعنی ترمی بدون متغیر آزاد، نوع $\bot$ ندارد.

عملگرهای حساب λ نوع‌دار ترم‌هایی می‌سازند که، به‌طور شهودی، چیزهایی از گونهٔ درست را می‌نامند، مشروط بر آنکه ترم‌های ورودی‌شان چیزهای معینی را بنامند. برای نمونه، «اگر $N_1 : \varphi$ و $N_2 : \psi$، آنگاه $\langle N_1, N_2\rangle : \varphi \wedge \psi$» می‌گوید اگر N_1 چیزی از نوع φ و N_2 چیزی از نوع ψ را بنامد، آنگاه $\langle N_1, N_2\rangle$ چیزی از نوع $\varphi \wedge \psi$ را می‌نامد.

6.6 قواعد پذیرفتنی و مشتق‌شدنی

بسیاری از نتایج نظریهٔ برهان به این پرسش مربوط‌اند ـ یا از نتایجی دربارهٔ آن استفاده می‌کنند ـ که آیا هر آنچه با قاعده‌ای معین می‌توان اثبات کرد، بدون آن قاعده نیز اثباتشدنی است یا نه. قضیهٔ حذف برش شناخته‌شده‌ترین نمونه است. این قضیه نشان می‌دهد هر دنباله‌ای را که با قواعد یک دستگاه دنباله‌ایِ شامل Cut بتوان اثبات کرد، بدون Cut نیز می‌توان اثبات کرد. چون این‌گونه ویژگی بسیار مهم است، نامی ویژه دارد.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

تعریف 6.5. قاعدهٔ R در یک دستگاه دنباله‌ای پذیرفتنی است هرگاه هر دنباله‌ای را که در آن دستگاه همراه با قاعدهٔ R بتوان اثبات کرد، بدون R نیز بتوان اثبات کرد.

مثال 6.6. قاعدهٔ $\wedge\mathrm{L}$ در **G1c** و **G3c** صورت‌های متفاوتی دارد. در **G1c** دو نسخه از قاعده هست: یکی با مؤلفهٔ عطفی چپ φ از فرمول اصلی $\varphi\wedge\psi$ در مقدمه، و دیگری با مؤلفهٔ عطفی راست ψ:

$$\frac{\varphi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\wedge\mathrm{L}_1 \qquad \frac{\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\wedge\mathrm{L}_2$$

در مقابل، **G3c** تنها یک قاعده دارد:

$$\frac{\varphi,\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\wedge\mathrm{L}_3$$

اکنون می‌توان پرسید: «آیا قاعدهٔ $\wedge\mathrm{L}_3$ در **G3c**، در **G1c** پذیرفتنی است؟» پاسخ مثبت است: هر استنتاج با $\wedge\mathrm{L}_3$ را می‌توان مستقیماً و تنها با قواعد **G1c** شبیه‌سازی کرد. افزون بر $\wedge\mathrm{L}_1$ و $\wedge\mathrm{L}_2$، به قاعدهٔ ساختاری CL نیز نیاز داریم:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi,\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi\wedge\psi,\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\wedge\mathrm{L}_1}{\varphi\wedge\psi,\varphi\wedge\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\wedge\mathrm{L}_2}{\varphi\wedge\psi,\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}\mathrm{CL}$$

شبیه‌سازیِ استنتاجی با یک قاعده به‌وسیلهٔ قواعد دیگر، یکی از راه‌های نشان‌دادن پذیرفتنی‌بودن قاعده است؛ اما تنها راه نیست و برخی قواعد پذیرفتنی‌اند، بی‌آنکه چنین شبیه‌سازی‌ای برایشان ممکن باشد. قواعدی را که می‌توان بدین‌سان شبیه‌سازی کرد مشتق‌شدنی می‌نامند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

تعریف 6.7. قاعدهٔ R،

$$\frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S}\,R$$

در یک دستگاه مشتق‌شدنی نامیده می‌شود هرگاه برهان طرح‌واره‌ای از دنبالهٔ S وجود داشته باشد که در آن، قواعد و اصول موضوعهٔ دستگاه همراه با دنباله‌های آغازیِ اضافی به صورت‌های S_1، ...، S_n به کار رفته باشند.

برهان داده‌شده در مثال 6.6 نشان می‌دهد $\wedge\mathrm{L}_3$ قاعده‌ای مشتق‌شدنی در **G1c** است، زیرا آن برهان، برهان طرح‌واره‌ای از نتیجهٔ $\wedge\mathrm{L}_3$ بر پایهٔ مقدمات $\wedge\mathrm{L}_3$ به‌عنوان دنباله‌های آغازی و با استفادهٔ صرف از قواعد **G1c** است. (هیچ‌یک از اصول موضوعهٔ **G1c** در آن به کار نرفته است.)

گزاره 6.8. *قواعد* $\wedge\mathrm{L}$ *و* $\vee\mathrm{R}$ *در* **G3c**، *در* **G1c** *مشتق‌شدنی‌اند.*

اثبات. برهان $\wedge\mathrm{L}$ در مثال 6.6 داده شد. برهان $\vee\mathrm{R}$ به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود. □

نشان دهید قاعدهٔ $\vee\mathrm{R}$ در **G3c**، در **G1c** مشتق‌شدنی است.

فرض کنید $\leftrightarrow$ عملگر تعریف‌شده باشد: $\varphi \leftrightarrow \psi$ کوتاه‌شدهٔ $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ است. نشان دهید قواعد

1. $$\leftrightarrow\mathrm{L}\,\frac{\Delta, \varphi, \psi\Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta\Gamma, \varphi, \psi \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \leftrightarrow \psi, \Gamma \;\Rightarrow}$$

2. $$\leftrightarrow\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi\psi, \Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta, \psi\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \leftrightarrow \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

در (الف) **G1c** و (ب) **G3c** مشتق‌شدنی‌اند.

مثال 6.9. قاعدهٔ WR در **G1c**،

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,\mathrm{WR}$$

در **G3c** پذیرفتنی است. اندیشهٔ برهان ساده است: فرض کنید در **G3c** برهان به نام π از مقدمهٔ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ وجود دارد. فرمول φ را به تالیِ هر دنباله در π بیفزایید. اصول همچنان اصل می‌مانند و استنتاج‌های درست همچنان درست‌اند؛ همهٔ فرمولهای پیشین نیز حفظ می‌شوند. دنبالهٔ پایانیِ برهان جدید $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ است.

بااین‌حال، قاعدهٔ WR در **G3c** مشتق‌شدنی نیست. زیرا فرض کنید چنین بود؛ یعنی می‌شد با اصول و قواعد **G3c**، و احتمالاً دنبالهٔ آغازیِ اضافی $\Gamma \Rightarrow \Delta$، برهان از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ یافت. اگر این برهان، آن‌گونه که برای مشتق‌شدنی‌بودن WR لازم است، کاملاً طرح‌واره‌ای باشد، با حذف Γ و Δ می‌توان آن را به برهان از $\Rightarrow \varphi$ تبدیل کرد. در این صورت دنباله‌های آغازیِ اضافی $\Gamma \Rightarrow \Delta$ به دنبالهٔ تهی $\Rightarrow$ بدل می‌شوند. چون دنبالهٔ تهی اصلاً هیچ فرمولی ندارد، ولی همهٔ قواعد **G3c** دست‌کم یک فرمول فعال در مقدماتشان می‌طلبند، دنبالهٔ تهی نمی‌تواند مقدمهٔ هیچ استنتاجی در این برهان طرح‌واره‌ای باشد. در نتیجه، این برهان تنها در صورتی طرح‌واره‌ای است که در واقع دنبالهٔ اضافی $\Gamma \Rightarrow \Delta$ را به‌عنوان دنبالهٔ آغازی به کار نبرد. به بیان دیگر، اشتقاقی طرح‌واره‌ای از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ تنها با اصول و قواعد **G3c** می‌بود و نشان می‌دادیم هر دنباله‌ای به این صورت در **G3c** برهان دارد. اما این ناممکن است، زیرا **G3c** درست است و فقط دنباله‌هایی را می‌تواند اثبات کند که در هر ساختار صادق‌اند. با گرفتن $\Gamma = \Delta = \emptyset$ و $\varphi \equiv \bot$، دستگاه **G3c** ناگزیر می‌بود، برای مثال، دنبالهٔ $\Rightarrow \bot$ را اثبات کند، حال آنکه چنین نمی‌کند.

اکنون برهانی استقرایی و خوش‌ساخت برای پذیرفتنی‌بودن تضعیف در **G3c** می‌دهیم. در واقع، همان‌گونه که استدلال شهودی نشان می‌دهد، نتیجه‌ای اندکی قوی‌تر برقرار است: افزودن φ به سمت راست هر دنبالهٔ π ساختار برهان و، به‌ویژه، ارتفاع آن را تغییر نمی‌دهد. چون این نکته مهم است، تعریفی ویژه می‌طلبد.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

تعریف 6.10. قاعدهٔ R،

$$\frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S}\,R$$

در یک دستگاه پذیرفتنی با حفظ ارتفاع (یا *hp*-پذیرفتنی) است هرگاه، اگر $\vdash_{h_i} S_i$ برای $i = 1$، ...، n، آنگاه $\vdash_m S$ برای عددی m چنان‌که $m \leq \max(h_1, \dots, h_n)$.

برای پذیرفتنی با حفظ ارتفاع بودنِ قاعده کافی است هرگاه مقدمات S_i دارای برهان‌ها π_i با ارتفاع $h_i = \mathrm{ht}(\pi_i)$ باشند، برهان π از نتیجه با ارتفاع $\mathrm{ht}(\pi)$ وجود داشته باشد که این ارتفاع از بیشینهٔ h_iها بیشتر نباشد. به‌ویژه، اگر تنها یک مقدمهٔ S_1 باشد، کافی است $\mathrm{ht}(\pi) \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$. در مورد WR و WL حتی $\mathrm{ht}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1)$ داریم، اما برابری لازم نیست.

گزاره 6.11. *قواعد* WR *و* WL *در* **G1c**، *در* **G3c** *با حفظ ارتفاع پذیرفتنی‌اند.*

اثبات. باید نشان دهیم اگر $\mathbf{G3c} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ با برهان π از ارتفاع $\mathrm{ht}(\pi) = n$، آنگاه در **G3c** برهان π' از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ وجود دارد که $\mathrm{ht}(\pi') = n$. بر n استقرا می‌کنیم. اگر $n = 0$، آنگاه π یک اصل $\Gamma \Rightarrow \Delta$ است: یا یک χ اتمی هم در Γ و هم در Δ رخ می‌دهد، یا دنباله اصلی از نوع اصلِ $\bot$ در چپ است. در هر دو حالت $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ نیز اصل است. اگر $n = \mathrm{ht}(\pi) > 0$، برهان π استنتاج پایانی دارد. بر حسب قاعدهٔ به‌کاررفته حالت‌بندی می‌کنیم. تنها یک نمونه را می‌آوریم: فرض کنید استنتاج پایانی $\wedge$R باشد. آنگاه $\Delta = \Delta', \psi \wedge \chi$ و زیر-برهان‌ها بی‌واسطهٔ π_1 و π_2 در آن استنتاج، به‌ترتیب دنباله‌های پایانی $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi$ را دارند. یعنی π چنین است:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

همچنین $n = \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1$. پس $\mathrm{ht}(\pi_1) < n$ و $\mathrm{ht}(\pi_2) < n$ و فرض استقرا اعمال می‌شود: برهان‌ها π'_1 و π'_2 به‌ترتیب از $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$ وجود دارند. با قاعدهٔ $\wedge\mathrm{R}$، برهان π' از $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$ به دست می‌آوریم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi}\ \wedge\mathrm{R}$$

داریم $\mathrm{ht}(\pi') = \max(\mathrm{ht}(\pi'_1), \mathrm{ht}(\pi'_2)) + 1 \leq \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1 = \mathrm{ht}(\pi)$. حالت‌های دیگرِ قاعدهٔ پایانی به همین روش‌اند، و برهان تضعیف چپ نیز متقارن است. □

گزاره 6.11 بسیار سودمند است. برای کاربرد مکرر آن نمادی معرفی می‌کنیم: اگر π برهان از $\Gamma \Rightarrow \Delta$ باشد، $\pi[\Pi \Rightarrow \Lambda]$ حاصلِ اعمال پذیرفتنی‌بودن تضعیف چپ با همهٔ فرمول‌ها موجود در Π و پذیرفتنی‌بودن تضعیف راست با همهٔ فرمول‌ها موجود در Λ است. این برهان از $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$ است.

6.7 تفسیر قواعد

تفسیر یک دنباله را به یاد آورید: دنبالهٔ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در ساختار $\mathfrak{M}$ صادق است هرگاه دست‌کم یک $\varphi \in \Gamma$ کاذب باشد یا دست‌کم یک $\varphi \in \Delta$ صادق باشد. می‌توان قواعد منطقیِ **G3c** را صورت‌بندیِ شرایط صدقِ فرمول‌های اصلیِ آن‌ها دانست. قاعدهٔ $\to\mathrm{R}$ را در نظر بگیرید. فرمولِ اصلیِ آن $\varphi \to \psi$ است. این فرمول هنگامی صادق است که یا φ کاذب باشد یا ψ صادق باشد. ازاین‌رو، دنبالهٔ $\Rightarrow \varphi \to \psi$ صادق است اگر و تنها اگر $\varphi \Rightarrow \psi$ صادق باشد. اگر فرمول‌های بافتِ Γ و Δ را به‌ترتیب به مقدم و تالیِ این دنباله‌ها بیفزاییم، دقیقاً نتیجه و مقدمهٔ قاعدهٔ $\to\mathrm{R}$ به دست می‌آید. وضع برای $\to\mathrm{L}$ نیز مشابه است. $\varphi \to \psi$ هنگامی کاذب است که φ صادق و ψ کاذب باشد. بنابراین، $\varphi \to \psi \Rightarrow$ صادق است اگر و تنها اگر هر دو دنبالهٔ $\Rightarrow \varphi$ و $\psi \Rightarrow$

صادق باشند. نتیجهٔ $\to$L هم‌ارزِ عطفِ مقدمات آن است. این الگو تضمین می‌کند که قواعد **G3c** درست‌اند (اگر همهٔ مقدمات صادق باشند، نتیجه نیز صادق است). همچنین تمامیت را تضمین می‌کند.

در واقع، شرایط صدقِ هر رابطِ تابع‌ارزشی را می‌توان بدین شیوه با مجموعه‌ای از دنباله‌ها توصیف کرد. دلیل آن این است که هر تابع صدق در منطق کلاسیک را می‌توان با فرمول در صورت نرمال عطفی توصیف کرد: عطفی از فصل‌های فرمول‌های اتمی و نقیضِ اتمی. برای نمونه، فرض کنید $\varphi \oplus \psi$ هنگامی صادق باشد که دقیقاً یکی از φ و ψ صادق باشد؛ یعنی «یای انحصاری». آنگاه $\varphi \oplus \psi$ صادق است اگر و تنها اگر $(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ صادق باشد، و هنگامی کاذب است که $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$ صادق باشد. پس می‌توان قواعد حساب دنباله‌ایِ $\oplus$ را چنین معرفی کرد:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi \qquad \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \oplus \psi} \oplus\mathrm{R}$$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\varphi \oplus \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \oplus\mathrm{L}$$

این قواعد نیز درست و کامل خواهند بود. نتیجهٔ هر قاعده صادق است اگر و تنها اگر همهٔ مقدمات آن صادق باشند.

فرض کنید $\varphi \downarrow \psi$ هنگامی صادق باشد که نه φ و نه ψ صادق نباشند («NOR» یا «نقیضِ یا»). قواعد آن در **G3c** چه خواهند بود؟ (دو دنباله بیابید که هم‌زمان صادق‌اند اگر و تنها اگر $\varphi \downarrow \psi$ صادق باشد؛ این دو، قاعدهٔ $\downarrow$R را به دست می‌دهند. سپس یک دنباله بیابید که صادق است اگر و تنها اگر $\varphi \downarrow \psi$ کاذب باشد؛ این دنباله قاعدهٔ $\downarrow$L را به دست می‌دهد.)

در **G3c**، هر رابط و هر سور دقیقاً دو قاعده دارد: یک قاعدهٔ چپ و یک قاعدهٔ راست. اما در **G1c** دو قاعدهٔ $\wedge$L و دو قاعدهٔ $\vee$R وجود دارد. علت آن است که دستگاه اصلی گنتسن، یعنی **LK** که **G1c** بر الگوی آن ساخته شده است، گونه‌ای به نام **LJ** برای منطق غیرکلاسیک مهمی، یعنی منطق شهودی، داشت. برای به‌دست‌آوردن دستگاهی درست و کامل برای منطق شهودی، تالیِ هر دنباله در **LJ** به داشتن حداکثر یک فرمول محدود می‌شود. ازاین‌رو نمی‌توان قاعدهٔ $\vee$R در **G3c** را به کار برد، زیرا تالیِ مقدمهٔ آن هم φ و هم ψ را در بر دارد. بنابراین گنتسن برای **LJ** یک جفت قاعدهٔ $\vee$R به کار برد و همان‌ها را برای **LK** نیز برگزید. نسخهٔ شهودی **G1i** نیز همان **G1c** است با این محدودیت که همهٔ تالی‌ها حداکثر یک فرمول داشته باشند. (**G3c** نیز نسخه‌ای

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

شهودی دارد، اما برخی قواعد آن با قواعد متناظر در **G3c** متفاوت‌اند؛ برای مثال، آن دستگاه نیز از یک جفت قاعدهٔ $\vee$R استفاده می‌کند.)

درستیِ قواعد ساختاریِ **G1c** به‌آسانی دیده می‌شود. برای مثال، اگر $\Gamma \Rightarrow \Delta$ فرمولی کاذب در سمت چپ یا فرمولی صادق در سمت راست داشته باشد، $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ نیز همان فرمول را دارد؛ صادق یا کاذب‌بودن φ در این استدلال اثری ندارد. پس اگر مقدمهٔ WR صادق باشد، نتیجهٔ آن نیز صادق است. توجه کنید که عکس این گزاره درست نیست. ممکن است نتیجه به سبب صادق‌بودن φ صادق باشد؛ در این صورت صادق‌بودن مقدمه تضمین نمی‌شود.

اصلاً چرا قواعد ساختاری داشته باشیم؟ برای نمونه، انقباض (CR و CL) لازم است تا بتوان $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$ را اثبات کرد. اگر از $\varphi \Rightarrow \varphi$ آغاز کنید، نخست با $\neg$R به $\Rightarrow \varphi, \neg\varphi$ می‌رسید. سپس می‌توانید دو نسخهٔ $\vee$R را پی‌درپی به کار ببرید: یک بار برای به‌دست‌آوردن $\varphi \vee \neg\varphi$ از $\neg\varphi$ و بار دیگر برای به‌دست‌آوردن $\varphi \vee \neg\varphi$ از φ. حاصل $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi$ است. بنابراین، برای رسیدن به $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$ در **G1c** باید بتوان دو رخداد از یک فرمول را در برهان «منقبض» کرد:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}\,\neg\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}\,\vee\mathrm{R}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi}\,\mathrm{CR}$$

در واقع، دنباله‌های معتبری وجود دارند که بدون تضعیف یا انقباض نمی‌توان آن‌ها را در **G1c** اثبات کرد. برای مثال، برهان از دنبالهٔ $\varphi \Rightarrow \psi \to \varphi$ در **G1c** باید به $\to$R ختم شود (زیرا تنها $\psi \to \varphi$ می‌تواند اصلی باشد)، و این امر دنبالهٔ $\psi, \varphi \Rightarrow \varphi$ را به‌عنوان مقدمه می‌طلبد. این مقدمه نیز به WL نیاز دارد تا از اصل $\varphi \Rightarrow \varphi$ به دست آید:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\psi, \varphi \Rightarrow \varphi}\,\mathrm{WL}}{\varphi \Rightarrow \psi \to \varphi}\,\to\mathrm{R}$$

در **G3c** اصلاً به قواعد انقباض و تضعیف نیاز نیست. تضعیف در خود اصول گنجانده شده است. از انقباض نیز عمدتاً می‌توان با یکی‌کردن دو نسخهٔ بافتِ Γ و Δ در قواعد دومقدمه‌ای پرهیز کرد. هم **G1c** و هم **G3c** چنین قواعد «اشتراک بافتی» دارند. در قواعد تک‌مقدمه‌ای، انقباض فقط برای $\vee$R،

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

$\wedge$L، $\exists$R و $\forall$L لازم است. صورت این قواعد در **G3c** انقباض را کاملاً زائد می‌کند. دستگاهی به نام **G2c** نیز وجود دارد (نگاه کنید به جدول 6.4) که در آن قواعد دومقدمه‌ای بافت‌های مستقلی دارند. در **G2c** انقباض حتی از **G1c** نیز مهم‌تر است.

اصول

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

قواعد ساختاری

$$\mathrm{WL}\,\frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \mathrm{WR}\,\frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\mathrm{CL}\,\frac{\Delta\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \mathrm{CR}\,\frac{\Delta, \varphi, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}$$

قواعد منطقی

$$\neg\mathrm{L}\,\frac{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \neg\mathrm{R}\,\frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \neg\varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \wedge\mathrm{R}\,\frac{\Delta_2, \psi\Gamma_2 \Rightarrow \qquad \Delta_1, \varphi\Gamma_1 \Rightarrow}{\Delta_1, \Delta_2, \varphi \wedge \psi\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{L}\,\frac{\Delta_2\psi, \Gamma_2 \;\Rightarrow \qquad \Delta_1\varphi, \Gamma_1 \;\Rightarrow}{\Delta_1, \Delta_2\varphi \vee \psi, \Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\to\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \to \psi\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \to\mathrm{L}\,\frac{\Delta_2\psi, \Gamma_2 \;\Rightarrow \qquad \Delta_1, \varphi\Gamma_1 \;\Rightarrow}{\Delta_1, \Delta_2\varphi \to \psi, \Gamma_1, \Gamma_2 \;\Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi(a)\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \forall x\, \varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(t), \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\forall x\, \varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi(t)\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \exists x\, \varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\exists x\, \varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow}$$

جدول 6.4: قواعد **G2c**. در قواعد $\forall$R و $\exists$L، ثابت a نباید در دنبالهٔ نتیجه رخ دهد. Γ و Δ چندمجموعه‌هایی از فرمول‌ها هستند.

6.8 مقدمه

حساب‌های دنباله‌ای دستگاه‌های برهان هستند که گرهارد گنتسن در دههٔ ۱۹۳۰ معرفی کرد. هدف اصلی از آن‌ها فراهم‌کردن روشی عملی برای اثبات نبود. گنتسن آن‌ها را به کار گرفت تا بتواند نتایجی دربارهٔ ساختارهای ممکنِ برهان‌ها و ویژگی‌های آن‌ها اثبات کند. این‌گونه پرسش‌ها دقیقاً موضوع نظریهٔ برهان‌اند.

حساب‌های دنباله‌ای، چنان‌که نامشان نشان می‌دهد، بر *دنباله‌ها* عمل می‌کنند، نه بر فرمول‌ها. هر دنباله جفتی از رشته‌ها یا چندمجموعه‌های فرمول‌ها است. دستگاه‌های اصلی گنتسن (**LK** و **LJ**) از رشته‌ها استفاده می‌کردند؛ نظریه‌پردازان برهان امروزه چندمجموعه‌ها را ترجیح می‌دهند. چندمجموعه مانند مجموعه

است، با این تفاوت که می‌تواند عضو را بیش از یک بار در بر داشته باشد. بااین‌حال، همانند مجموعه‌ها، ترتیب اعضا اهمیتی ندارد. پس عبارت‌های $\{\varphi, \varphi, \psi\}$ و $\{\varphi, \psi, \varphi\}$ یک چندمجموعه را وصف می‌کنند، اما آن چندمجموعه با $\{\varphi, \psi\}$ و $\{\varphi, \varphi, \psi, \psi\}$ متفاوت است، زیرا تعداد رخدادهای φ و ψ در آن‌ها متفاوت است.

در نظریهٔ برهان، چندمجموعه‌های فرمول‌ها را به‌طور سنتی با حروف بزرگ یونانی می‌نویسند. پس Γ، Δ، Π، Λ یا Θ را چندمجموعه‌هایی از فرمول‌ها منطق مورد بحث می‌گیریم. همچنین به‌جای نوشتن $\langle \Gamma, \Delta \rangle$، دو مؤلفه را به‌طور سنتی با نماد دنباله جدا می‌کنند؛ ما از $\Rightarrow$ استفاده می‌کنیم.

تعریف 6.12 (دنباله). یک *دنباله* عبارتی به صورت

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

است که در آن Γ و Δ چندمجموعه‌های متناهی (و احتمالاً تهی) از فرمول‌ها هستند. Γ را *مقدم* و Δ را *تالی* می‌نامند.

فرض کنید γ عطفِ فرمول‌ها موجود در Γ باشد (و عطف تهی را $\top$ بگیریم) و θ فصلِ فرمول‌ها موجود در Δ باشد (و فصل تهی را $\bot$ بگیریم). آنگاه دنبالهٔ $\Gamma \Rightarrow \Delta$ در ساختاری چون $\mathfrak{M}$ صادق است اگر و تنها اگر $\gamma \to \theta$ صادق باشد. در منطق کلاسیک، این همان است که یا یکی از فرمول‌ها موجود در Γ کاذب باشد یا یکی از فرمول‌ها موجود در Δ صادق.

اگر Γ چندمجموعه‌ای از فرمول‌ها باشد، Γ, φ (یا φ, Γ) را برای حاصل افزودن φ به Γ می‌نویسیم. اگر Δ نیز چندمجموعه‌ای از فرمول‌ها باشد، Γ, Δ اجتماع چندمجموعه‌ایِ آن دو است: اگر Γ، φ را با چندگانگی n در بر داشته باشد (یعنی n نسخه از φ داشته باشد) و Δ، φ را با چندگانگی m در بر داشته باشد، آنگاه Γ, Δ، φ را با چندگانگی $n + m$ در بر دارد. اگر چندمجموعهٔ یک سوی دنباله تهی باشد، معمولاً جای آن را خالی می‌گذاریم. برای نمونه، $\Rightarrow \varphi$ دنباله‌ای با مقدم تهی و تالی‌ای است که φ را با چندگانگی 1 در بر دارد.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

برهان در حساب دنباله‌ای درختی از دنباله‌هاست که دنباله‌های بالایی (یا آغازی) آن اصول دستگاه مورد نظرند، و هر دنباله‌ای که زیر یک یا دو دنبالهٔ دیگر قرار گیرد باید به‌درستی با قاعده‌ای استنتاجی در دستگاه از آن‌ها به دست آید. نخست دو دستگاه دنباله‌ای متفاوت برای منطق کلاسیک، **G1c** و **G3c**، را بررسی می‌کنیم. اصول و قواعد آن‌ها در جدول‌ها 6.7 and 6.6 آمده‌اند. (دستگاه اصلی گنتسن **LK** در فصل 19 شرح داده شده است.)

اصول

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

قواعد ساختاری

$$\mathrm{WL}\,\frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \mathrm{WR}\,\frac{\Delta\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\mathrm{CL}\,\frac{\Delta\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \mathrm{CR}\,\frac{\Delta, \varphi, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}$$

قواعد منطقی

$$\neg\mathrm{L}\,\frac{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \neg\mathrm{R}\,\frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \neg\varphi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \wedge \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\rightarrow\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta, \varphi \rightarrow \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \rightarrow\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi(a)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \forall x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(t), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi(t)\Gamma \Rightarrow}{\Delta, \exists x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow}$$

جدول 6.6: قواعد **G1c**. در قواعد $\forall\mathrm{R}$ و $\exists\mathrm{L}$، ثابت a نباید در دنبالهٔ نتیجه رخ دهد. Γ و Δ چندمجموعه‌هایی از فرمول‌ها هستند.

دو دستگاه تفاوت‌هایی ظریف دارند و همین تفاوت‌ها ویژگی‌های نظریه‌برهانی آن‌ها را متفاوت می‌کند. اصول **G1c** به صورت $\varphi \Rightarrow \varphi$ هستند و هیچ فرمول دیگری در آن‌ها مجاز نیست. اصول **G3c** به صورت $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ هستند و Γ و Δ می‌توانند فرمول‌ها «جانبی» دلخواه داشته باشند، اما فرمول χ که در هر دو سو می‌آید باید *اتمی* باشد. **G1c** از قواعد $\wedge\mathrm{L}$ و $\vee\mathrm{R}$ هر یک دو نسخه دارد، حال آنکه **G3c** از هر یک تنها یک نسخه دارد. همچنین **G1c**

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اصول

$$\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

قواعد منطقی

$$\neg\mathrm{L}\,\frac{\Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \neg\mathrm{R}\,\frac{\Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \neg\varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi, \psi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \wedge \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi, \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\to\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \to \psi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \to\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \to \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(t), \forall x\,\varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\forall x\,\varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi(a)\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \forall x\,\varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\exists x\,\varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \exists x\,\varphi(x), \varphi(t)\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \exists x\,\varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow}$$

جدول 6.7: قواعد **G3c**. در قواعد $\forall\mathrm{R}$ و $\exists\mathrm{L}$، ثابت a نباید در دنبالهٔ نتیجه رخ دهد. Γ و Δ چندمجموعه‌هایی از فرمول‌ها هستند. در اصول، فرمول χ باید اتمی باشد.

قواعد ساختاری اضافیِ «انقباض» (CL، CR) و «تضعیف» (WL، WR) را دارد.

اتفاقاً هر دو دستگاه **G1c** و **G3c** برای منطق کلاسیک درست و کامل هستند. به بیان دیگر، هر دنبالهٔ اثبات‌پذیر در این دستگاه‌ها در هر ساختار صادق است، و هر دنباله‌ای که در هر ساختار صادق باشد برهان دارد. پس پرسش از اینکه *آیا* دنباله‌ای برهان دارد، با روش‌های دیگر منطق، برای مثال روش‌های نظریهٔ مدل، نیز پاسخ‌پذیر است. و چون هر دو دستگاه دقیقاً دنباله‌هایی را اثبات می‌کنند که در هر ساختار صادق‌اند، به‌ویژه همان دنباله‌ها را اثبات می‌کنند.

بااین‌حال، نظریهٔ برهان تنها به این نمی‌پردازد که *آیا* چیزی اثبات‌پذیر است، بلکه می‌پرسد چگونه. نظریه‌پردازان برهان پرسش‌هایی از این دست را بررسی می‌کنند: «آیا همیشه می‌توان از قاعده‌ای معین پرهیز کرد؟»، «آیا می‌توان این قاعده را بی‌آنکه دنباله‌های تازه‌ای اثبات‌پذیر شوند به دستگاه افزود؟» یا «آیا می‌توان برهان‌ها یک دستگاه را به برهان‌ها دستگاهی دیگر تبدیل کرد؟» اگر پاسخ چنین پرسشی مثبت باشد، اثبات آن غالباً با استقرا بر پیچیدگی برهان‌ها، یا هم‌ارز آن، با استقرا بر ساختار برهان‌ها انجام می‌شود. این کار نه‌فقط برهانی برای واقعیت مورد نظر (مثلاً اینکه اگر **G1c** دنباله‌ای را اثبات کند، **G3c** نیز همان را اثبات می‌کند)، بلکه روالی نیز به دست می‌دهد (مثلاً برای تبدیل برهان‌ها در **G1c** به برهان‌ها در **G3c**).

یکی از نتایج مرکزی نظریهٔ برهان قضیهٔ حذف برش است. این قضیه نشان می‌دهد می‌توان قاعدهٔ برش

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\,\mathrm{Cut}$$

را بی‌آنکه دنباله‌های اثبات‌پذیر تغییر کنند به دستگاه‌های دنباله‌ای افزود. افزون بر این، برهان قضیه روشی به دست می‌دهد که هر برهان با قواعد **G1c** (یا **G3c**) همراه با Cut را به برهانی تبدیل می‌کند که تنها قواعد **G1c** (یا **G3c**) را به کار می‌برد. به بیان دیگر، این روش قاعدهٔ Cut را از برهان‌های که آن را به کار برده‌اند «حذف» می‌کند؛ ازاین‌رو نام قضیه چنین است.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

6.9 وارون‌پذیری قواعد

تعریف 6.13. قاعدهٔ R،

$$\frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S}\,R$$

در یک دستگاه وارون‌پذیر است هرگاه از $\vdash S$ بتوان برای هر $i = 1$، ...، n نتیجه گرفت که $\vdash S_i$. این قاعده در دستگاه وارون‌پذیر با حفظ ارتفاع (یا *hp*-وارون‌پذیر) است هرگاه از $\vdash_n S$ بتوان برای هر $i = 1$، ...، n نتیجه گرفت که $\vdash_n S_i$.

لم 6.14. قواعد **G3c** برای $\neg$، $\wedge$، $\vee$ و $\rightarrow$ با حفظ ارتفاع وارون‌پذیرند؛ یعنی:

1. $\neg$R: اگر $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi$، آنگاه $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
2. $\neg$L: اگر $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta$، آنگاه $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$.
3. $\wedge$R: اگر $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$، آنگاه $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ و $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$.
4. $\wedge$L: اگر $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta$، آنگاه $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
5. $\vee$R: اگر $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$، آنگاه $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi$.
6. $\vee$L: اگر $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$، آنگاه $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ و $\mathbf{G3c} \vdash_n \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
7. $\rightarrow$R: اگر $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$، آنگاه $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

8. $\to$L: اگر $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$، آنگاه $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ و $\mathbf{G3c} \vdash_n \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

اثبات. باید نشان دهیم برای هر قاعدهٔ R در **G3c**، اگر برهان π از نتیجهٔ S قاعدهٔ R وجود داشته باشد، برهان‌ها π_i از مقدمات S_i نیز وجود دارند، به‌طوری‌که $\mathrm{ht}(\pi_i) \leq \mathrm{ht}(\pi)$. قاعدهٔ $\wedge$L را در نظر بگیرید: فرض کنید برهان π با دنبالهٔ پایانی به صورت $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ وجود دارد. باید نشان دهیم برهان π' از $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ وجود دارد که $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$. بر $n = \mathrm{ht}(\pi)$ استقرا می‌کنیم.

اگر $n = 0$، π تنها از یک اصل $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ تشکیل می‌شود. اصول **G3c** یا از صورت $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ با χ اتمی‌اند، یا اصلِ دارای $\bot$ در سمت چپ‌اند. در صورت نخست، χ نمی‌تواند $\varphi \wedge \psi$ باشد؛ پس یک χ اتمی عضو از هر دو Γ و Δ است و $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ نیز اصل است. در صورت دوم نیز افزودن φ و ψ آن اصل را حفظ می‌کند. بنابراین برهان π' را یافته‌ایم که آن هم ارتفاع 0 دارد.

اگر $n > 0$، π به استنتاجی ختم می‌شود. باید ادعا را برای n ثابت کنیم، اما می‌توانیم در مورد هر برهان با ارتفاع کمتر از n، حتی با بافتی متفاوت، آن را فرض کنیم. به بیان دیگر، برای هر $k < n$ و هر Π و Λ، اگر $\varphi \wedge \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ برهان با ارتفاع k داشته باشد، آنگاه $\varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ برهان با ارتفاع $\leq k$ دارد.

دو حالت داریم: یا $\varphi \wedge \psi$ در سمت چپ اصلی است یا نیست. اگر اصلی باشد، استنتاج پایانی $\wedge$L است و زیر-برهان بی‌واسطهٔ π_1 به $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ ختم می‌شود. در این حالت نتیجه برقرار است، زیرا $\mathrm{ht}(\pi_1) < \mathrm{ht}(\pi)$.

اگر $\varphi \wedge \psi$ اصلی نباشد، فرمول دیگری اصلی است و $\varphi \wedge \psi$ در بافتِ استنتاج پایانی قرار دارد. در این صورت فرض استقرا بر زیر-برهان‌ها بی‌واسطهٔ قاعدهٔ پایانی R اعمال می‌شود و یک برهان π'_1 یا دو برهان‌ها π'_1 و π'_2 می‌دهد که ارتفاع آن‌ها از ارتفاع زیر-برهان‌ها بی‌واسطهٔ π بیشتر نیست. دنباله‌های پایانی π'_1 و π'_2 به‌جای $\varphi \wedge \psi$ در بافت چپ، φ, ψ دارند. با اعمال قاعدهٔ R، برهان π' را به دست می‌آوریم. برای نمونه، فرض کنید π به $\to$L ختم شود:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \varphi \wedge \psi, \Gamma', \theta \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma', \chi \to \theta \Rightarrow \Delta} \to\mathrm{L}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

در اینجا $\chi \to \theta$ در سمت چپ اصلی است و بافت چپ $\varphi \wedge \psi, \Gamma'$ است؛ یعنی $\Gamma = \Gamma', \chi \to \theta$. فرض استقرا به‌ترتیب برهان‌ها π'_1 و π'_2 را از $\varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \chi$ و $\varphi, \psi, \Gamma', \theta \Rightarrow \Delta$ می‌دهد. این دو دنباله بار دیگر مقدمات قاعدهٔ $\to$L می‌شوند تا π' به دست آید:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \varphi, \psi, \Gamma', \theta \Rightarrow \Delta\end{array}}{\varphi, \psi, \Gamma', \chi \to \theta \Rightarrow \Delta}\ \to\mathrm{L}$$

داریم

$$\mathrm{ht}(\pi) = \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1$$
$$\mathrm{ht}(\pi') = \max(\mathrm{ht}(\pi'_1), \mathrm{ht}(\pi'_2)) + 1$$

طبق تعریف، و

$$\mathrm{ht}(\pi'_1) \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$$
$$\mathrm{ht}(\pi'_2) \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$$

طبق فرض استقرا. پس

$$\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi).$$

□

برهان لم 6.14 را برای $\to$R ارائه کنید.

لم 6.15. قواعد $\forall$R و $\exists$L به معنای زیر با حفظ ارتفاع وارون‌پذیرند:

1. اگر $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)$، آنگاه $\mathbf{G3c} \vdash_n \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)$؛ و
2. اگر $\mathbf{G3c} \vdash_n \exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$، آنگاه $\mathbf{G3c} \vdash_n \varphi(c), \Gamma \Rightarrow \Delta$،

برای هر c که به‌ترتیب در Γ، Δ و فرمول کمیت‌گذاری‌شدهٔ $\forall x\, \varphi(x)$ یا $\exists x\, \varphi(x)$ رخ ندهد.

اثبات. بند (1) را نشان می‌دهیم و بند (2) را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم. استدلال شبیه برهان لم 6.14 است. در گام استقرا باز دو حالت داریم. اگر $\forall x\, \varphi(x)$ اصلی باشد، کار سریع است: مقدمهٔ آخرین استنتاج $\forall$R به صورت مطلوب $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)$ است و زیر-برهان بی‌واسطهٔ π_1 که به آن ختم می‌شود، $\mathrm{ht}(\pi_1) < \mathrm{ht}(\pi)$ دارد. افزون بر این، شرط متغیر ویژه می‌گوید a در Γ، Δ یا $\forall x\, \varphi(x)$ رخ نمی‌دهد. چون می‌توان فرض کرد π_1 منظم است، بنا بر لم 6.21، $\pi_1[c/a]$ برهان با همان ارتفاع از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)$ است.

در حالت دوم، $\forall x\, \varphi(x)$ در استنتاج پایانی اصلی نیست و فرمول دیگری اصلی است. بار دیگر یک حالت را به‌عنوان نمونه بررسی می‌کنیم. فرض کنید استنتاج پایانی $\wedge$R باشد. فرمولی در Δ به صورت $\psi \wedge \chi$ و اصلی است. برهان π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \forall x\, \varphi(x), \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

که در آن $\Delta = \Delta', \psi \wedge \chi$. ثابت c را چنان برگزینید که در Γ، Δ و $\forall x\, \varphi(x)$ رخ ندهد؛ پس به‌روشنی در Δ', ψ و Δ', χ نیز رخ نمی‌دهد. بنابراین فرض استقرا بر π_1 و π_2 اعمال می‌شود؛ برهان‌ها π'_1 و π'_2 داریم که $\mathrm{ht}(\pi'_1) \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ و $\mathrm{ht}(\pi'_2) \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$. برهان مطلوب π' از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

چنین است:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi(c), \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi(c), \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi(c), \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

و $\mathrm{ht}(\pi') = \max(\mathrm{ht}(\pi'_1), \mathrm{ht}(\pi'_2)) + 1 \leq \mathrm{ht}(\pi)$. □

لم 6.14 در برهان قضیهٔ حذف برش نقش مهمی دارد، اما برای نشان‌دادن نتیجهٔ زیر نیز به کار می‌رود:

گزاره 6.16. *قواعد انقباض* CL و CR در **G1c**، در **G3c** *با حفظ ارتفاع پذیرفتنی‌اند.*

اثبات. استدلال CR و CL را هم‌زمان می‌آوریم. فرض کنید π در **G3c** برهان از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$ یا $\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ باشد. باید نشان دهیم برهان **G3c** به نام π' به‌ترتیب از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ یا $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ وجود دارد که $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$. بر $n = \mathrm{ht}(\pi)$ استقرا می‌کنیم.

اگر $n = 0$، π فقط یک اصل است. اگر $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$ اصل **G3c** باشد، $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ نیز اصل است: یا یک χ اتمی عضو از هر دو Γ و Δ است، یا φ اتمی و عضو از Γ است، یا مقدم دارای $\bot$ است. همین استدلال برای دنبالهٔ پایانی $\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ نیز برقرار است.

اگر $n > 0$، π به قاعده‌ای چون R ختم می‌شود. اگر φ در این استنتاج پایانی اصلی نباشد، همانند برهان لم 6.14، برهان π' را با اعمال فرض استقرا بر زیر-برهان‌ها بی‌واسطهٔ π و سپس اعمال همان قاعدهٔ R بر برهان(s) حاصل به دست می‌آوریم. فرض استقرا این است که اگر $k < n$ و برهان با ارتفاع k از $\Pi \Rightarrow \Lambda, \theta, \theta$ یا $\theta, \theta, \Pi \Rightarrow \Lambda$ وجود داشته باشد، آنگاه به‌ترتیب برهان با ارتفاع $\leq k$ از $\Pi \Rightarrow \Lambda, \theta$ یا $\theta, \Pi \Rightarrow \Lambda$ وجود دارد. (توجه کنید فرض استقرا حتی وقتی بافت‌ها یا فرمول منقبض‌شونده با Γ، Δ یا φ متفاوت‌اند نیز اعمال می‌شود.)

برای نمونه، فرض کنید R همان $\wedge\mathrm{R}$ باشد و π چنین پایان یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi, \varphi}\ \wedge\mathrm{R}$$

که در آن $\Delta = \Delta', \psi \wedge \chi$. فرض استقرا برهان‌ها π'_1 و π'_2 را به‌ترتیب از $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$ می‌دهد، با $\mathrm{ht}(\pi'_1) \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ و $\mathrm{ht}(\pi'_2) \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$. برهان π' چنین است:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi'_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi}\ \wedge\mathrm{R}$$

اگر φ در استنتاج پایانی اصلی باشد، لم وارون‌سازی (لم 6.14) را بر زیر-برهان‌ها بی‌واسطهٔ π اعمال می‌کنیم، سپس فرض استقرا و بعد دوباره قاعدهٔ R را. برای نمونه، فرض کنید π دنبالهٔ $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$ را اثبات کند، $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ باشد و در استنتاج پایانی اصلی باشد. آنگاه π چنین است:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi}\ \wedge\mathrm{R}$$

با اعمال لم 6.14 بر π_1، برهان π'_1 از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \psi$ می‌گیریم. (این لم برهانی از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \chi, \psi$ نیز می‌دهد که به آن نیاز نداریم.) به همین ترتیب، اعمال لم 6.14 بر π_2، برهان π'_2 از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \chi, \chi$ می‌دهد. چون وارون‌سازی $\wedge\mathrm{R}$ ارتفاع را حفظ می‌کند، $\mathrm{ht}(\pi'_1) \leq \mathrm{ht}(\pi_1) < \mathrm{ht}(\pi)$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

و $\mathrm{ht}(\pi_2') \leq \mathrm{ht}(\pi_2) < \mathrm{ht}(\pi)$. پس فرض استقرا بر π_1' و π_2' اعمال می‌شود: برهان‌ها π_1'' و π_2'' به‌ترتیب از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ و $\Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ وجود دارند، با $\mathrm{ht}(\pi_1'') \leq \mathrm{ht}(\pi_1') \leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ و $\mathrm{ht}(\pi_2'') \leq \mathrm{ht}(\pi_2') \leq \mathrm{ht}(\pi_2)$. آنگاه برهان π' چنین است:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi_2''\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}$$

و $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$.

در حالت‌هایی که فرمول کمیت‌گذار و اصلی است باید دقت ویژه‌ای به خرج دهیم.

فرض کنید $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ در سمت راست اصلی باشد. آنگاه π چنین پایان می‌یابد:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x), \psi(a)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x), \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

بنا بر لم 6.15، برای هر c که در Γ، Δ، $\forall x\, \psi(x)$ و $\psi(a)$ رخ ندهد، برهان π_1' از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c), \psi(a)$ با ارتفاع $\leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ وجود دارد. می‌توان فرض کرد π_1' منظم است؛ پس بنا بر لم 6.21، برهان $\pi_1'[a/c]$، برهان از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(a), \psi(a)$ با ارتفاع $\leq \mathrm{ht}(\pi_1)$ است. اکنون فرض استقرا اعمال می‌شود و برهان π_1'' از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(a)$ می‌دهد. با قاعدهٔ $\forall\mathrm{R}$، π' را می‌گیریم:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1''\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(a)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

و $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$.

اکنون فرض کنید $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ و در سمت راست اصلی باشد. آنگاه π چنین است:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \exists x\, \psi(x), \exists x\, \psi(x), \psi(t)\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \exists x\, \psi(x), \exists x\, \psi(x)}\ \exists\mathrm{R}$$

فرض استقرا بر π_1 اعمال می‌شود و برهان π_1' از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \psi(x), \psi(t)$ وجود دارد. (اینجا به هیچ لم وارون‌سازی نیاز نیست.) آنگاه برهان π' چنین است:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1'\\ \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \exists x\, \psi(x), \psi(t)\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \exists x\, \psi(x)}\ \exists\mathrm{R}$$

و $\mathrm{ht}(\pi') \leq \mathrm{ht}(\pi)$. □

برهان گزاره 6.16 را برای CL طرح کنید. حالت‌هایی را شرح دهید که $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ و $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$.

برهان گزاره 6.16 را برای CL در حالت‌های کمیت‌گذارِ باقی‌مانده طرح کنید؛ یعنی وقتی $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ و $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$.

6.10 نمونه‌هایی از برهان

برای ارائهٔ برهان‌ها دنباله‌ها معمولاً مناسب است از دنبالهٔ پایانی به سمت بالا پیش برویم: فرمول از آن را به‌عنوان فرمول فعال برگزینیم، مقدمات قاعدهٔ متناظر را بالای دنباله بنویسیم و این فرایند را تا رسیدن به اصول تکرار کنیم. برای نمونه، فرض کنید می‌خواهیم دنبالهٔ

$$(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)$$

را اثبات کنیم. فرمول $\chi \to (\theta \to \alpha)$ را در نظر بگیرید: به صورت $\varphi \to \psi$ است و در سمت راست دنباله رخ می‌دهد. تطبیق کل دنباله با قاعدهٔ $\to$R در **G1c**،

$$\dfrac{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \to \psi} \to\mathrm{R}$$

پیشنهاد می‌کند $\Gamma = \{(\chi \wedge \theta) \to \alpha\}$، $\Delta = \emptyset$، $\varphi \equiv \chi$ و $\psi \equiv \theta \to \alpha$ بگیریم. پس آخرین استنتاجِ یک برهان می‌تواند چنین باشد:

$$\dfrac{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \theta \to \alpha}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

اگر همین اندیشه را با تمرکز بر $\theta \to \alpha$ به‌عنوان فرمول فعال تکرار کنیم، به این می‌رسیم:

$$\dfrac{\dfrac{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \alpha}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \theta \to \alpha} \to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

اکنون باید بر $(\chi \wedge \theta) \to \alpha$ تمرکز کنیم و قاعدهٔ $\to$L در **G1c** را به کار ببریم:

$$\dfrac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta} \to\mathrm{L}$$

این کار ما را به اینجا می‌رساند:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\theta, \chi \;\Rightarrow\; \alpha, \chi \wedge \theta \qquad \theta, \chi, \alpha \;\Rightarrow\; \alpha}{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \alpha} \to\mathrm{L}}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \theta \to \alpha} \to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \;\Rightarrow\; \chi \to (\theta \to \alpha)} \to\mathrm{R}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

با گرفتن فرمول $\chi \wedge \theta$ در دنبالهٔ بالاییِ سمت چپ به‌عنوان فرمول اصلی و به‌کاربردن قاعدهٔ $\wedge$R، داریم:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \quad \theta, \chi \Rightarrow \alpha, \theta}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \wedge \theta}\wedge\mathrm{R} \qquad \theta, \chi, \alpha \Rightarrow \alpha}{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \alpha}\to\mathrm{L}}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha}\to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)}\to\mathrm{R}$$

تا اینجا همه‌چیز درست است. توجه کنید همهٔ کارهای انجام‌شده در **G3c** نیز معتبرند، زیرا قواعدی که تاکنون به کار برده‌ایم در **G1c** و **G3c** یکسان‌اند. به پاره‌ای از برهان رسیده‌ایم که در همهٔ دنباله‌های بالایی‌اش فرمول یکسانی در چپ و راست آمده است، اما این دنباله‌ها هنوز دقیقاً اصل نیستند.

در **G1c** باید برای دنباله‌های بالایی از اصولی به صورت $\varphi \Rightarrow \varphi$، برهان‌ها ارائه کنیم. این کار با قواعد تضعیف آسان است؛ برای مثال، دنبالهٔ بالاییِ سمت چپ $\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi$ را می‌توان چنین اثبات کرد:

در مجموع، در **G1c** برهان به صورت زیر داریم:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi}\mathrm{WL}}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi}\mathrm{WR} \quad \dfrac{\dfrac{\theta \Rightarrow \theta}{\theta, \chi \Rightarrow \theta}\mathrm{WL}}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \theta}\mathrm{WR}}{\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi \wedge \theta}\wedge\mathrm{R} \quad \dfrac{\dfrac{\alpha \Rightarrow \alpha}{\chi, \alpha \Rightarrow \alpha}\mathrm{WL}}{\theta, \chi, \alpha \Rightarrow \alpha}\mathrm{WL}}{\theta, \chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \alpha}\to\mathrm{L}}{\chi, (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \theta \to \alpha}\to\mathrm{R}}{(\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha)}\to\mathrm{R}$$

ساختار این برهان، به‌ویژه ارتفاع آن، مستقل از چیستیِ فرمول‌ها χ، θ و α است. می‌توان این نمادها را در برهان بالا با هر فرمول‌ها دلخواه جایگزین کرد و حاصل همچنان برهان در **G1c** خواهد بود. این برهان در **G1c** *طرح‌واره‌ای* است.

در **G3c** اصول دنباله‌هایی به صورت $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ هستند که در آن‌ها φ باید اتمی باشد. پس هرچند $\theta, \chi \Rightarrow \alpha, \chi$ شبیه اصلی از **G3c** است ($\Gamma = \{\theta\}$؛ $\Delta = \{\alpha\}$)، تنها هنگامی *واقعاً* اصل است که χ اتمی باشد. پاره‌برهان ما تنها در صورتی برهان کامل در **G3c** است که χ، θ و α همگی فرمول‌ها اتمی باشند.

اگرچه، به معنای دقیق، هنوز نشان نداده‌ایم که

$$\mathbf{G3c} \vdash (\chi \wedge \theta) \to \alpha \Rightarrow \chi \to (\theta \to \alpha),$$

در عمل همین تمام کاری است که لازم است ـ و می‌توانیم ـ انجام دهیم. زیرا هر دنباله به صورت $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ در **G3c** اثبات‌پذیر است، حتی اگر خود φ اتمی نباشد. این را می‌توان با استقرا بر عمق $\mathrm{dp}(\varphi)$ فرمول φ نشان داد.

تعریف 6.17. عمق $\mathrm{dp}(\varphi)$ یک فرمول به صورت زیر تعریف می‌شود:

1. اگر φ اتمی باشد، $\mathrm{dp}(\varphi) = 0$.
2. اگر $\varphi \equiv \neg\psi$، $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ یا $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$، آنگاه $\mathrm{dp}(\varphi) = \mathrm{dp}(\psi) + 1$.
3. اگر $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$، $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ یا $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$، آنگاه $\mathrm{dp}(\varphi) = \max(\mathrm{dp}(\psi), \mathrm{dp}(\chi)) + 1$.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اثبات اینکه $\mathrm{dp}(\varphi(x)) = \mathrm{dp}(\varphi(t))$ برای هر ترم t دشوار نیست. واقعیت مهم برای ما این است که در هر قاعده، عمق فرمول اصلی همواره از عمق فرمول‌ها فعال بیشتر است. برای نمونه:

$$\begin{aligned}\mathrm{dp}(P(x)) = \mathrm{dp}(P(a)) &= 0,\\ \mathrm{dp}(\forall x\, P(x)) &= 1,\\ \mathrm{dp}((\forall x\, P(x) \to P(a))) &= \max(1,0) + 1 = 2.\end{aligned}$$

می‌توانیم از این واقعیت برای اثبات نتایجی با استقرا بر $\mathrm{dp}(\varphi)$، مانند نتیجهٔ زیر، استفاده کنیم.

گزاره 6.18. *برای هر φ، در* **G1c** *برهان از $\varphi \Rightarrow \varphi$ وجود دارد که همهٔ اصول آن اتمی‌اند.*

اثبات. بر $\mathrm{dp}(\varphi)$ استقرا می‌کنیم. اگر $\mathrm{dp}(\varphi) = 0$، آنگاه φ اتمی است و $\varphi \Rightarrow \varphi$ خود برهان در **G1c** به صورت مطلوب است. اگر $\mathrm{dp}(\varphi) > 0$، φ از فرمول‌های با عمق کمتر ساخته شده است؛ برای نمونه، $\varphi \equiv \neg\psi$، $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ یا $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$. فرض استقرا می‌گوید برای هر θ با $\mathrm{dp}(\theta) < \mathrm{dp}(\varphi)$، $\mathbf{G1c} \vdash \theta \Rightarrow \theta$ از اصول اتمی.

اگر $\varphi \equiv \neg\psi$، آنگاه $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\varphi)$ و بنا بر فرض استقرا، در **G1c** برهان π_1 از اصول اتمی برای $\psi \Rightarrow \psi$ وجود دارد. می‌توان آن را به برهان از $\neg\psi \Rightarrow \neg\psi$ چنین گسترش داد:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\neg\psi, \psi \;\Rightarrow\;}\,\neg\mathrm{L}}{\neg\psi \;\Rightarrow\; \neg\psi}\,\neg\mathrm{R}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اگر $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$، آنگاه $\mathrm{dp}(\psi) < \mathrm{dp}(\varphi)$ و $\mathrm{dp}(\chi) < \mathrm{dp}(\varphi)$. بنا بر فرض استقرا، در **G1c** برهان‌ها π_1 و π_2 از اصول اتمی، به‌ترتیب برای $\psi \Rightarrow \psi$ و $\chi \Rightarrow \chi$، وجود دارند. آن‌ها را می‌توان به برهان از $\psi \wedge \chi \Rightarrow \psi \wedge \chi$ چنین گسترش داد:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\psi \Rightarrow \psi}}{\psi, \chi \Rightarrow \psi}\,\mathrm{WL}}{\psi \wedge \chi, \chi \Rightarrow \psi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi \Rightarrow \psi}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_2}{\chi \Rightarrow \chi}}{\psi, \chi \Rightarrow \chi}\,\mathrm{WL}}{\psi \wedge \chi, \chi \Rightarrow \chi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi \Rightarrow \chi}\,\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi \Rightarrow \psi \wedge \chi}\,\wedge\mathrm{R}}{\psi \wedge \chi \Rightarrow \psi \wedge \chi}\,\mathrm{CL}
$$

اکنون فرض کنید $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$. ثابت c را چنان برگزینید که در $\forall x\, \psi(x)$ رخ ندهد. آنگاه $\mathrm{dp}(\psi(c)) = \mathrm{dp}(\psi(x)) < \mathrm{dp}(\varphi)$ و بنا بر فرض استقرا، در **G1c** برهان π_1 از اصول اتمی برای $\psi(c) \Rightarrow \psi(c)$ وجود دارد. آن را می‌توان چنین به برهان از $\forall x\, \psi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x)$ گسترش داد:

$$
\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\psi(c) \Rightarrow \psi(c)}}{\forall x\, \psi(x) \Rightarrow \psi(c)}\,\forall\mathrm{L}
\Bigg{\over}
\forall x\, \psi(x) \Rightarrow \forall x\, \psi(x)\,\forall\mathrm{R}
$$

حالت‌های باقی‌مانده به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند. □

برهان گزاره 6.18 را با انجام حالت‌های $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$، $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$ و $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ کامل کنید.

برای مقصود ما، در حالت $\varphi \equiv \neg\psi$ می‌شد از برهان زیر نیز استفاده کرد:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi \;\Rightarrow\; \psi\end{array}}{\Rightarrow\; \psi, \neg\psi}\,\neg\mathrm{R}}{\neg\psi \;\Rightarrow\; \neg\psi}\,\neg\mathrm{L}$$

اما دستگاه‌های دنباله‌ای‌ای وجود دارند که این روش در آن‌ها کار نمی‌کند. حساب دنباله‌ای شهودی **G1i** مانند **G1c** است، جز آنکه همهٔ دنباله‌ها را به داشتن حداکثر یک فرمول در سمت راست محدود می‌کند. اگر $\Delta = \emptyset$ باشد، برهان نخست در **G1i** نیز برهان خواهد بود، اما دومی نه، زیرا یکی از دنباله‌های آن هم ψ و هم $\neg\psi$ را در سمت راست دارد.

توجه کنید حتی در **G1c** نیز در حالت $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$ نمی‌شد قواعد را با ترتیبی جایگزین به کار برد. عبارت زیر برهان نیست:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi(c) \;\Rightarrow\; \psi(c)\end{array}}{\psi(c) \;\Rightarrow\; \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{R}}{\forall x\, \psi(x) \;\Rightarrow\; \forall x\, \psi(x)}\,\forall\mathrm{L}$$

زیرا شرط متغیر ویژهٔ $\forall\mathrm{R}$ نقض شده است.

گزاره 6.19. *هر دنباله‌ای به صورت $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$، که در آن φ لزوماً اتمی نیست، در* **G3c** *اثبات‌پذیر است.*

اثبات. برهان بسیار شبیه برهان گزاره 6.18 است، اما باید در صورت‌بندی فرض استقرا دقت کنیم. حالت $n = \mathrm{dp}(\varphi) = 0$ باز آسان است. اگر $n = 0$، φ اتمی و $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ اصلی از **G3c** است.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اکنون فرض کنید $n > 0$. باز حالت‌بندی می‌کنیم. فرض استقرا چنین است: برای هر θ با $\mathrm{dp}(\theta) < n$، و هر Π و Λ، $\mathbf{G3c} \vdash \theta, \Pi \Rightarrow \Lambda, \theta$.
حالت $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ چنین است. فرض استقرا را دو بار به کار می‌بریم: یک بار با $\theta = \psi$، $\Pi = \chi, \Gamma$ و $\Lambda = \Delta$ تا برهان π_1 از $\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ بگیریم؛ و بار دیگر با $\theta = \chi$، $\Pi = \psi, \Gamma$ و $\Lambda = \Delta$ تا برهان π_2 از $\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ بگیریم. برهان $\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi$ چنین است:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi\end{array}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}\wedge\mathrm{L} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi\end{array}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi}\wedge\mathrm{L}}{\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi}\wedge\mathrm{R}$$

برای $\varphi \equiv \forall x\, \psi(x)$، ثابت c را چنان برگزینید که در $\forall x\, \psi(x)$، Γ یا Δ رخ ندهد. فرض استقرا را برای $\theta = \psi(c)$، $\Pi = \forall x\, \psi(x), \Gamma$ و $\Lambda = \Delta$ به کار ببرید. از این راه برهان π_1 از $\psi(c), \forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)$ به دست می‌آید و سپس داریم:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ \psi(c), \forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)\end{array}}{\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}\forall\mathrm{L}}{\forall x\, \psi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \psi(x)}\forall\mathrm{R}$$

شیوهٔ انتخاب c شرط متغیر ویژهٔ $\forall\mathrm{R}$ را برآورده می‌کند. □

برهان گزاره 6.19 را با انجام حالت‌های $\varphi \equiv (\psi \to \chi)$ و $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x)$ ادامه دهید.

6.11 برهان‌های منظم و جانشینی

قواعد سورها به‌سبب «شرط‌های متغیر ویژه» که بر قواعد $\exists$L و $\forall$R حاکم‌اند، پیچیدگی‌هایی پدید می‌آورند. بیشتر این پیچیدگی‌ها را می‌توان با این تضمین رفع کرد که ثابت a در این استنتاج‌ها دوباره به کار نرود. تعریف زیر را در نظر می‌گیریم.

تعریف 6.20. برهان π در **G1c** یا **G3c** را منظم می‌نامیم هرگاه:

1. هیچ متغیر ویژه‌ای چون a در بیش از یک استنتاج $\exists$L یا $\forall$R به‌عنوان متغیر ویژه به کار نرفته باشد؛ و
2. اگر a متغیر ویژهٔ یک استنتاج $\exists$L یا $\forall$R باشد، در π فقط بالای همان استنتاج رخ دهد.

لم 6.21. *اگر π منظم باشد و به $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ختم شود، c ثابت باشد که در π متغیر ویژه نیست، و t جمله‌ای باشد که هیچ متغیر ویژهٔ π را در بر ندارد، آنگاه $\pi[t/c]$، که با جایگزین‌کردن هر رخداد c با t در π حاصل می‌شود، برهانی منظم است. دنبالهٔ پایانی آن $\Gamma[t/c] \Rightarrow \Delta[t/c]$ است؛ در اینجا $\Gamma[t/c]$ چندمجموعه‌ای است که با جایگزینی c با t در هر رخداد فرمولیِ Γ، با حفظ همهٔ رخدادها و چندگانگی‌هایشان، به دست می‌آید.*

اثبات. بر $\mathrm{ht}(\pi)$ استقرا می‌کنیم. اگر $\mathrm{ht}(\pi) = 0$، π فقط از یک اصل تشکیل شده است. در این صورت $\pi[t/c]$ نیز اصل است، زیرا هر فرمول $\varphi(c)$ در آن به $\varphi(t)$ تبدیل می‌شود.

اگر $\mathrm{ht}(\pi) > 0$ باشد، بر حسب آخرین استنتاج π حالت‌بندی می‌کنیم. حالت‌های قواعد ساختاری (در **G1c**) و قواعد منطقیِ رابط‌های گزاره‌ای آسان‌اند و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند. حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که π به استنتاجی سورمند ختم می‌شود.

1. اگر آخرین استنتاج $\forall$R باشد، π به صورت زیر است:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'\\ \Gamma(c) \;\Rightarrow\; \Delta'(c), \varphi(a,c)\end{array}}{\Gamma(c) \;\Rightarrow\; \Delta'(c), \forall x\, \varphi(x,c)}\,\forall\mathrm{R}$$

بنا بر فرض استقرا، $\pi'[t/c]$ برهانی منظم از $\Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t), \varphi(a,t)$ است. چون a متغیر ویژهٔ π است، در t رخ نمی‌دهد. پس آخرین استنتاج در $\pi[t/c]$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'[t/c]\\ \Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t), \varphi(a,t)\end{array}}{\Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t), \forall x\, \varphi(x,t)}\,\forall\mathrm{R}$$

درست است: نتیجه شامل a نیست.

2. اگر آخرین استنتاج $\forall$L در **G3c** باشد، π به صورت

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'\\ \varphi(s(c),c), \forall x\, \varphi(x,c), \Gamma(c) \;\Rightarrow\; \Delta'(c)\end{array}}{\forall x\, \varphi(x,c), \Gamma(c) \;\Rightarrow\; \Delta'(c)}\,\forall\mathrm{L}$$

است. بنا بر فرض استقرا، $\pi'[t/c]$ برهانی منظم از $\varphi(s(t),t), \forall x\, \varphi(x,t), \Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t)$ است. آخرین استنتاج در $\pi[t/c]$،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi'[t/c]\\ \varphi(s(t),t), \forall x\, \varphi(x,t), \Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t)\end{array}}{\forall x\, \varphi(x,t), \Gamma(t) \;\Rightarrow\; \Delta'(t)}\,\forall\mathrm{L}$$

درست است. حالت $\forall$L در **G1c** مشابه، اما اندکی ساده‌تر است.

3. اگر آخرین استنتاج $\exists$R یا $\exists$L باشد، بررسی آن تمرین است.

در هر حالت، دنباله‌ای به پایان یک برهان منظم (یا در قواعد دومقدمه‌ای به برهان‌ها منظم) افزوده‌ایم. در هر حالت، استنتاج‌های متغیر ویژه تغییر نمی‌کنند. چون c متغیر ویژه نبود و t هیچ متغیر ویژهٔ π را در بر ندارد، جانشینی هیچ متغیر ویژه‌ای را پایین‌تر از استنتاج ویژهٔ آن وارد نمی‌کند؛ فرض‌های استقرا نیز منظمی را حفظ می‌کنند. بنابراین $\pi[t/c]$ منظم است. □

گزاره 6.22. *اگر π برهان در* **G1c** *یا* **G3c** *باشد، برهانی منظم چون π' با همان ساختار (و به‌ویژه همان ارتفاع) وجود دارد که فقط در جایگزینی متغیرهای ویژه با π تفاوت دارد.*

اثبات. فقط برای این برهان، استنتاج متغیر ویژه‌ای از π را پاک می‌نامیم اگر متغیر ویژهٔ آن، متغیر ویژهٔ هیچ استنتاج دیگری نباشد و در π جز در برهان بی‌واسطهٔ آن استنتاج رخ ندهد؛ در غیر این صورت آن را *ناپاک* می‌نامیم. فرض کنید n شمار استنتاج‌های ناپاک متغیر ویژه در π باشد. با استقرا بر n نشان می‌دهیم که π را می‌توان به برهان منظم مطلوب π' تبدیل کرد. اگر $n = 0$ باشد، همهٔ استنتاج‌های متغیر ویژه در π پاک‌اند؛ پس π منظم است و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. در غیر این صورت، بالاترین استنتاج ناپاک متغیر ویژه را برمی‌گزینیم؛ فرض کنیم استنتاجی با $\forall$R باشد. زیربرهان π_1 که به آن ختم می‌شود، به صورت

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(c)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

است. چون c متغیر ویژه است، در Γ، Δ یا $\forall x\, \varphi(x)$ رخ نمی‌دهد. برهان π_2 منظم است، زیرا هر استنتاج متغیر ویژهٔ بالای استنتاج برگزیده پاک است. فرض کنید a ثابت باشد که در π رخ نمی‌دهد. به موجب لم 6.21، $\pi_2[a/c]$ برهانی منظم از $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)$ است و می‌توان $\forall$R را بر آن اعمال

کرد. اگر π_1 را در π با برهان π_1'،

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2[a/c]\\ \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi(a)\end{array}}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \forall x\, \varphi(x)}\,\forall\mathrm{R}$$

جایگزین کنیم، متغیر ویژهٔ تازهٔ a را جایگزین c کرده‌ایم. برهان حاصل اکیداً کمتر از n استنتاج ناپاک متغیر ویژه دارد، زیرا این تغییر نام ممکن است بیش از یک استنتاج را پاک کند. اکنون نتیجه از فرض استقرا به دست می‌آید. حالت‌های دیگر قواعد متغیر ویژه مشابه‌اند. □

از گزاره‌ای که همین اکنون اثبات شد صریحاً استفاده نخواهیم کرد، اما فرض می‌کنیم همهٔ برهان‌ها مورد بررسی منظم‌اند؛ اگر چنین نباشند، همیشه می‌توان متغیرهای ویژه را جایگزین کرد و آن‌ها را منظم ساخت.

اصول

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

قواعد ساختاری

$$\mathrm{WL}\,\dfrac{\Delta\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad\qquad \mathrm{WR}\,\dfrac{\Gamma \;\Rightarrow}{\varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\mathrm{CL}\,\dfrac{\Delta\varphi, \varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

قواعد منطقی

$$\neg\mathrm{R}\,\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\neg\varphi\Gamma \Rightarrow} \qquad \neg\mathrm{L}\,\frac{\varphi\Gamma \Rightarrow}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{R}\,\frac{\psi\Gamma \Rightarrow \qquad \varphi\Gamma \Rightarrow}{\varphi \wedge \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\varphi\Gamma \Rightarrow}{\varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\psi\Gamma \Rightarrow}{\varphi \vee \psi\Gamma \Rightarrow}$$

$$\rightarrow\mathrm{R}\,\frac{\psi\varphi, \Gamma \Rightarrow}{\varphi \rightarrow \psi\Gamma \Rightarrow} \qquad \rightarrow\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \Rightarrow \qquad \varphi\Gamma \Rightarrow}{\Delta\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{R}\,\frac{\varphi(a)\Gamma \Rightarrow}{\forall x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(t), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{R}\,\frac{\varphi(t)\Gamma \Rightarrow}{\exists x\, \varphi(x)\Gamma \Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \Rightarrow}{\Delta\exists x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow}$$

جدول 6.9: قواعد **G1i** برای منطق شهودی. در قواعد $\forall\mathrm{R}$ و$\exists\mathrm{L}$، ثابت a نباید در دنبالهٔ نتیجه رخ دهد. Γ چندمجموعه‌ای از فرمول‌ها است و Δ می‌تواند

تهی باشد یا یک فرمول داشته باشد. قاعدهٔ CR وجود ندارد. دستگاه **G1m** همان **G1i** بدون WR و بدون اصول $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$ است.

اصول

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad\qquad \bot \Rightarrow$$

قواعد ساختاری

$$\mathrm{WL}\,\frac{\Delta\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad\qquad \mathrm{WR}\,\frac{\Delta\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\mathrm{CL}\,\frac{\Delta\varphi, \varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad\qquad \mathrm{CR}\,\frac{\Delta, \varphi, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\mathrm{XL}\,\frac{\Delta\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \;\Rightarrow}{\Delta\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \;\Rightarrow} \qquad\qquad \mathrm{XR}\,\frac{\Delta, \varphi, \psi, \Lambda\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \psi, \varphi, \Lambda\Gamma \;\Rightarrow}$$

قواعد منطقی

$$\neg\mathrm{L}\,\frac{\Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad\qquad \neg\mathrm{R}\,\frac{\Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \neg\varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12(9620cc7)

$$\wedge\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \wedge \psi\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\rightarrow\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \rightarrow \psi\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \rightarrow\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi(a)\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \forall x\, \varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(t), \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\forall x\, \varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi(t)\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \exists x\, \varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\exists x\, \varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow}$$

جدول 6.12: قواعد **LK**. در قواعد $\forall\mathrm{R}$ و $\exists\mathrm{L}$، ثابت a نباید در دنبالهٔ نتیجه رخ دهد. Γ، Δ، Π و Λ دنباله‌هایی از فرمول‌ها هستند.

6.12 قواعد وبرهان‌ها

با چند تعریف و تثبیت برخی اصطلاحات آغاز می‌کنیم.

اصول

$$\chi, \Gamma \Rightarrow \chi \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

قواعد منطقی

$$\neg\mathrm{L}\,\frac{\varphi\neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \neg\mathrm{R}\,\frac{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\neg\varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi, \psi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{R}\,\frac{\psi\Gamma \;\Rightarrow \qquad \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\varphi \wedge \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{R}\,\frac{\varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\varphi \vee \psi\Gamma \;\Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{R}\,\frac{\psi\Gamma \;\Rightarrow}{\varphi \vee \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\to\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \;\Rightarrow \qquad \varphi\varphi \to \psi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \to \psi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \to\mathrm{R}\,\frac{\psi\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\varphi \to \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(t), \forall x\,\varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\forall x\,\varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{R}\,\frac{\varphi(a)\Gamma \;\Rightarrow}{\forall x\,\varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\exists x\,\varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{R}\,\frac{\varphi(t)\Gamma \;\Rightarrow}{\exists x\,\varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow}$$

جدول 6.10: قواعد **G3i** برای منطق شهودی. در قواعد $\forall\mathrm{R}$ و$\exists\mathrm{L}$، ثابت a نباید در دنبالهٔ نتیجه رخ دهد. Γ چندمجموعه‌ای از فرمول‌ها است و Δ می‌تواند تهی باشد یا یک فرمول داشته باشد. در اصول، فرمول χ باید اتمی باشد. دستگاه **G3m** همان **G3i** بدون اصول $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$ است.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اصول

$$\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

قواعد منطقی

$$\neg\mathrm{L}\,\frac{\Delta, \varphi\neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\neg\varphi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \neg\mathrm{R}\,\frac{\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \neg\varphi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\wedge\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi, \psi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \wedge \psi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \wedge\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \psi\Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \wedge \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\vee\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \vee \psi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \vee\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \varphi, \psi\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \vee \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\to\mathrm{L}\,\frac{\Delta\psi, \Gamma \;\Rightarrow \qquad \Delta, \varphi\varphi \to \psi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\varphi \to \psi, \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \to\mathrm{R}\,\frac{\psi\varphi, \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \varphi \to \psi\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\forall\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(t), \forall x\,\varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\forall x\,\varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \forall\mathrm{R}\,\frac{\varphi(a)\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \forall x\,\varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow}$$

$$\exists\mathrm{L}\,\frac{\Delta\varphi(a), \Gamma \;\Rightarrow}{\Delta\exists x\,\varphi(x), \Gamma \;\Rightarrow} \qquad \exists\mathrm{R}\,\frac{\Delta, \exists x\,\varphi(x), \varphi(t)\Gamma \;\Rightarrow}{\Delta, \exists x\,\varphi(x)\Gamma \;\Rightarrow}$$

جدول 6.13: قواعد دستگاه چندنتیجه‌ای **mG3i** برای منطق شهودی. در قواعد $\forall$R و$\exists$L، ثابت a نباید در دنبالهٔ نتیجه رخ دهد. Γ و Δ چندمجموعه‌هایی از فرمول‌ها هستند. در اصول، فرمول χ باید اتمی باشد. دستگاه **mG3m** همان **mG3i** بدون اصول $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$ است.

برای نمونه، دو قاعدهٔ **G3c** را در نظر بگیرید که اثبات دنباله‌های شامل $\varphi \wedge \psi$ را از دنباله‌های شامل φ و ψ ممکن می‌کنند:

$$\frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge\mathrm{R}$$

دنباله‌های بالای خط را *مقدمات* و دنبالهٔ زیر خط را *نتیجه* می‌نامند. فرمول‌ها موجود در Γ و Δ در هر قاعده *بافت* یا *فرمول‌ها جانبی* نام دارند. فرمولی که در نتیجه بخشی از بافت نیست، فرمول *اصلی* نامیده می‌شود؛ و فرمول‌ها موجود در مقدمات که در بافت نیستند، فرمول‌ها *فعال* (یا *کمکی*) نام دارند.

قواعد سورها کمی پیچیده‌ترند. برای مثال قواعد $\forall$ در **G1c** چنین‌اند:

$$\frac{\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)} \forall\mathrm{R}$$

در قاعدهٔ $\forall\mathrm{L}$، فرمول فعال $\varphi(t)$ است؛ در اینجا t جمله‌ای بسته، یعنی جمله‌ای بدون متغیر، است. چنین استنتاجی درست است— یعنی با طرح قاعدهٔ $\forall\mathrm{L}$ مطابقت دارد—اگر فرمولی چون φ، متغیری چون x و جملهٔ بسته‌ای چون t وجود داشته باشند، به‌گونه‌ای که فرمول اصلی در نتیجه $\forall x\, \varphi$ و فرمول فعال در مقدمه $\varphi[t/x]$ باشد. قاعدهٔ $\forall\mathrm{R}$ نیز همان‌گونه کار می‌کند، جز اینکه به‌جای جملهٔ دلخواه t، فرمول فعال باید $\varphi[a/x]$ باشد، که در آن a ثابت است. این ثابت را *متغیر ویژهٔ* استنتاج $\forall\mathrm{R}$ می‌نامند. استنتاج تنها زمانی درست است که دنبالهٔ پایین a را در بر نداشته باشد؛ یعنی a در Γ، Δ یا φ رخ ندهد. این را *شرط متغیر ویژه* می‌نامند.

دستگاه‌های دنباله‌ای مانند **G1c** و **G3c** از مجموعه‌ای از چنین قواعد طرح‌وار و شماری دنبالهٔ طرح‌وار که اصل به شمار می‌آیند تشکیل می‌شوند. برهان‌ها در چنین دستگاهی درخت‌های متناهیِ دنباله‌ها هستند که به‌طور استقرایی از اصول و با کاربرد قواعد استنتاج تعریف می‌شوند. هر برگ یک اصل است و هر دنبالهٔ دیگر با یکی از قواعد استنتاج دستگاه از دنباله‌های بلافاصله بالای خود به دست می‌آید.

تعریف 6.23. برهان‌ها در یک دستگاه دنباله‌ای، درخت‌های متناهیِ دنباله‌ها هستند که چنین به‌طور استقرایی تعریف می‌شوند:

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

1. هر اصل برهان است.

2. اگر π_1 برهان باشد که به دنبالهٔ S_1 ختم می‌شود، و S دنباله‌ای باشد که با قاعدهٔ تک‌مقدمه‌ای R از S_1 نتیجه می‌شود، آنگاه

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ S_1\end{array}}{S}\,R$$

برهان است.

3. اگر π_1 و π_2 برهان‌ها باشند که به‌ترتیب به S_1 و S_2 ختم می‌شوند، و S دنباله‌ای باشد که با قاعدهٔ دومقدمه‌ای R از S_1 و S_2 نتیجه می‌شود، آنگاه

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi_1\\ S_1\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\,\pi_2\\ S_2\end{array}}{S}\,R$$

برهان است.

تعریف 6.23، برهان‌ها را درخت‌هایی از دنباله‌ها تعریف می‌کند. این درخت‌ها را «رو به بالا» رونده تصور می‌کنیم. گره‌های بالایی (برگ‌ها) اصل‌اند و *دنباله‌های آغازی* نامیده می‌شوند. پایین‌ترین دنباله *دنبالهٔ پایانی* است. اگر π برهان با دنبالهٔ پایانی S باشد، می‌نویسیم $\pi \vdash S$. اگر برهانی برای دنبالهٔ S وجود داشته باشد، می‌نویسیم $\vdash S$؛ گاهی دستگاه را نیز در سمت چپ نماد $\vdash$ مشخص می‌کنیم، مثلاً $\mathbf{G1c} \vdash \varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$. هر دنباله در برهان، جز دنباله‌های آغازی، نتیجهٔ استنتاجی با قاعدهٔ R است. یک یا دو دنباله‌ای که بلافاصله بالای دنباله‌ای در برهان قرار دارند (یعنی والدهای گره)، مقدمات استنتاج نامیده می‌شوند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

برهان‌ها به‌کاررفته در ساخت استقرایی برهان، زیربرهان‌ها آن نام دارند. زیربرهان‌های که به مقدمات یک استنتاج ختم می‌شوند، زیربرهان‌ها بی‌واسطهٔ آن استنتاج‌اند.

اغلب لازم است پیچیدگی برهان‌ها را با عددی طبیعی بسنجیم. می‌توان تعداد دنباله‌های موجود در برهان را شمرد، اما سنجه‌ای که غالباً سودمندتر است ارتفاع برهان است: بیشترین شمار گام‌های استنتاج، یا یال‌ها، در شاخه‌ای از دنبالهٔ پایانی تا یک دنبالهٔ آغازی. می‌توان تعریفی استقرایی نیز ارائه کرد.

تعریف 6.24. *ارتفاع* $\mathrm{ht}(\pi)$ برای برهان π چنین به‌طور استقرایی تعریف می‌شود:

1. اگر π تنها از یک اصل تشکیل شده باشد، $\mathrm{ht}(\pi) = 0$.
2. اگر π به استنتاجی تک‌مقدمه‌ای با زیربرهان بی‌واسطهٔ π_1 ختم شود، $\mathrm{ht}(\pi) = \mathrm{ht}(\pi_1) + 1$.
3. اگر π به استنتاجی دومقدمه‌ای با زیربرهان‌ها بی‌واسطهٔ π_1 و π_2 ختم شود، $\mathrm{ht}(\pi) = \max(\mathrm{ht}(\pi_1), \mathrm{ht}(\pi_2)) + 1$.

اگر دنبالهٔ S برهانی با ارتفاع $\leq n$ داشته باشد، می‌نویسیم $\vdash_n S$.

مثال 6.25. در **G3c**، هر دنباله به صورت $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ اصل است، مشروط به اینکه χ اتمی باشد. فرض کنید θ و α جمله‌هایی اتمی باشند. آنگاه $\theta, \alpha \Rightarrow \theta$ و $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$ نمونه‌هایی از اصل $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ هستند. برای مثال، با انتخاب $\chi \equiv \alpha$، $\Gamma = \{\theta\}$ و $\Delta = \emptyset$ دقیقاً دنبالهٔ $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$ را به دست می‌آوریم. (به یاد داشته باشید که با چندمجموعه‌ها سروکار داریم؛ پس $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$ و $\alpha, \theta \Rightarrow \alpha$ همان دنباله‌اند.)

چون $\theta, \alpha \Rightarrow \theta$ نمونه‌ای از یک اصل **G3c** است، به‌تنهایی برهانی در **G3c** به شمار می‌آید؛ و بنا بر تعریف 6.23(1)، $\theta, \alpha \Rightarrow \alpha$ نیز چنین است. آن‌ها را π_1 و π_2 می‌نامیم. بنا بر (3)، می‌توان این دو برهان‌ها را با قاعدهٔ دومقدمه‌ای $\wedge\mathrm{R}$ به برهان تازهٔ π_3 تبدیل کرد:

$$\dfrac{\theta, \alpha \Rightarrow \theta \qquad \theta, \alpha \Rightarrow \alpha}{\theta, \alpha \Rightarrow \theta \wedge \alpha}\,\wedge\mathrm{R}$$

سپس از π_3، برهان π_4 را به دست می‌آوریم:

$$\pi_3\left\{\dfrac{\dfrac{\theta,\alpha \Rightarrow \theta \qquad \theta,\alpha \Rightarrow \alpha}{\theta,\alpha \Rightarrow \theta\wedge\alpha}\wedge\mathrm{R}}{\theta\wedge\alpha \Rightarrow \theta\wedge\alpha}\wedge\mathrm{L}\right\}\pi_4$$

که در آن قاعدهٔ تک‌مقدمه‌ای $\wedge\mathrm{L}$ را به کار برده‌ایم (تعریف 6.23(2)). زیربرهان بی‌واسطهٔ آخرین استنتاج در π_4، π_3 است. زیربرهان‌ها بی‌واسطهٔ استنتاج $\wedge\mathrm{R}$، π_1 و π_2 هستند. زیربرهان‌ها π_4 شامل π_1، π_2، π_3 و خود π_4 می‌شوند. داریم $\mathrm{ht}(\pi_1)=\mathrm{ht}(\pi_2)=0$، $\mathrm{ht}(\pi_3)=1$ و $\mathrm{ht}(\pi_4)=2$.
پس برای هر θ و α اتمی نشان داده‌ایم که $\mathbf{G3c}\vdash_2 \theta\wedge\alpha \Rightarrow \theta\wedge\alpha$.

فصل 7

حساب دنباله‌ها

7.1 ترجمه میان G1c وG3c

گفتیم که **G1c** و **G3c** هر دو برای منطق کلاسیک درست و کامل‌اند؛ یعنی هر یک همهٔ دنباله‌هایی را اثبات می‌کند که در هر ساختار صادق‌اند و فقط همان‌ها را. پس این دو دستگاه دنباله‌های یکسانی را اثبات می‌کنند. اکنون می‌توانیم این واقعیت را، بی‌آنکه از راه قضیه‌های درستی و کامل‌بودن بگذریم، با ابزارهایی کاملاً نظریه‌برهانی اثبات کنیم. چنین برهانی تبدیل‌هایی از برهان‌ها در **G1c** به برهان‌ها در **G3c** و برعکس فراهم می‌کند.

گزاره 7.1. *اگر* $\mathbf{G1c}\vdash S$، *آنگاه* $\mathbf{G3c}\vdash S$.

اثبات. نشان می‌دهیم اگر π برهان در **G1c** باشد، برهانی چون π' برای S در **G3c** وجود دارد. بر $n=\mathrm{ht}(\pi)$ استقرا می‌کنیم.

اگر $n = 0$ باشد، π یک اصل است. اصل $\bot \Rightarrow$ در **G3c** نیز اصل است (بافت‌های Γ و Δ را تهی بگیرید). در **G1c** اصول $\varphi \Rightarrow \varphi$ برای φ دلخواه مجازند؛ در **G3c** تنها اصول همانیِ اتمی اصل‌اند، اما در گزاره 6.19 ثابت کردیم که هر دنبالهٔ $\varphi \Rightarrow \varphi$ در **G3c** اثبات‌پذیر است.

اگر $n > 0$ باشد، π به قاعدهٔ R ختم می‌شود. فرض استقرا وجود برهان‌ها مقدمات آن قاعده را در **G3c** تضمین می‌کند؛ یعنی زیربرهان‌ها بی‌واسطه در **G3c** ترجمه دارند. اگر R قاعده‌ای در **G3c** نیز باشد، آن را بر برهان‌ها ترجمه‌شدهٔ مقدمات اعمال می‌کنیم. چهار قاعده‌ای که میان دو دستگاه تفاوت دارند چنین شبیه‌سازی می‌شوند: پیش از اعمال قاعدهٔ **G3c**، با تضعیف مجاز گزاره 6.11 فرمول فعالِ مفقود را در حالت‌های $\wedge$L و $\vee$R، یا رخداد نگه‌داشته‌شدهٔ فرمول اصلی را در حالت‌های $\forall$L و $\exists$R می‌افزاییم. اگر R قاعدهٔ تضعیف **G1c** باشد، همان نتیجهٔ پذیرش تضعیف را به کار می‌بریم؛ و اگر قاعدهٔ انقباض باشد، از گزاره 6.16 استفاده می‌کنیم. □

گزاره 7.2. اگر $\mathbf{G3c} \vdash S$، آنگاه $\mathbf{G1c} \vdash S$.

اثبات. بار دیگر بر ارتفاع برهان π از S استقرا می‌کنیم. هر اصل **G3c** را می‌توان در **G1c** با آغاز از یک اصل و سپس چند کاربرد از قواعد WL و WR اثبات کرد:

$$\begin{array}{rcl} \chi & \Rightarrow & \chi \\ & \vdots & \mathrm{WL} \\ \chi, \Gamma & \Rightarrow & \chi \\ & \vdots & \mathrm{WR} \\ \chi, \Gamma & \Rightarrow & \Delta, \chi \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \bot & \Rightarrow & \\ & \vdots & \mathrm{WL} \\ \bot, \Gamma & \Rightarrow & \\ & \vdots & \mathrm{WR} \\ \bot, \Gamma & \Rightarrow & \Delta \end{array}$$

اگر π به قاعدهٔ R ختم شود، فرض استقرا برهان‌ها مقدمات را در **G1c** به دست می‌دهد و می‌توان همان R را بر آن برهان‌ها اعمال کرد. استثناها قواعد $\wedge$L،

$\vee$R، $\forall$L و $\exists$R هستند که در دو دستگاه صورت‌های متفاوتی دارند. دو قاعدهٔ نخستِ **G3c** در **G1c** چنین مشتق می‌شوند:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\wedge\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\wedge\mathrm{L}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{CL} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi, \psi}\vee\mathrm{R}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi, \varphi \vee \psi}\vee\mathrm{R}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\mathrm{CR}$$

دو قاعدهٔ سوری نیز چنین مشتق می‌شوند:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(t), \forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\, \varphi(x), \forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\forall\mathrm{L}}{\forall x\, \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\mathrm{CL} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x), \varphi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x), \exists x\, \varphi(x)}\exists\mathrm{R}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x)}\mathrm{CR}$$

□

7.2 کامل‌بودن منطق گزاره‌ای

تعریف 7.3. مجموعهٔ Γ از فرمول‌ها را بیشینه‌سازگار می‌نامیم اگر سازگار باشد و هرگاه Δ مجموعه‌ای سازگار و $\Gamma \subseteq \Delta$ باشد، آنگاه $\Gamma = \Delta$.

لم 7.4 (لم صدق). فرض کنید Γ بیشینه‌سازگار باشد؛ آنگاه:

1. $\varphi \in \Gamma$ اگر و تنها اگر $\neg\varphi \notin \Gamma$؛
2. $\Gamma \vdash \varphi$ اگر و تنها اگر $\varphi \in \Gamma$؛
3. $\varphi \to \psi \in \Gamma$ اگر و تنها اگر یا $\varphi \notin \Gamma$ یا $\psi \in \Gamma$.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اثبات. 1. فرض کنید $\varphi \in \Gamma$. سازگاری نتیجه می‌دهد که $\neg\varphi \notin \Gamma$. برعکس، فرض کنید $\varphi \notin \Gamma$ و $\neg\varphi \notin \Gamma$. در این صورت هیچ‌یک در Γ نیست؛ بنا بر گزاره 12.25 یکی از $\Gamma \cup \{\varphi\}$ و $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ امتدادی درست و سازگار از Γ است، که با بیشینگی آن تناقض دارد. پس $\varphi \in \Gamma$.

2. اگر $\varphi \in \Gamma$، آشکار است که $\Gamma \vdash \varphi$. از سوی دیگر، فرض کنید $\Gamma \vdash \varphi$. اگر $\varphi \notin \Gamma$ باشد، بنا بر (1) داریم $\neg\varphi \in \Gamma$. پس هم $\Gamma \vdash \varphi$ و هم $\Gamma \vdash \neg\varphi$، که تناقض است.

3. تمرین. □

جهت چپ‌به‌راستِ لم 7.4(2) نشان می‌دهد که Γ استنتاجاً بسته است؛ یعنی اگر $\Gamma \vdash \varphi$، آنگاه $\varphi \in \Gamma$، برای هر φ.
برهان لم 7.4 را کامل کنید.

قضیه 7.5 (کامل‌بودن). *اگر Γ سازگار باشد، ارضاپذیر است.*

اثبات. فرض کنید $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ فهرستی فراگیر از همهٔ فرمول‌ها زبان باشد. دنباله‌ای افزایشی از مجموعه‌های فرمول‌ها، یعنی $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$، را با قرار دادن موارد زیر به‌طور بازگشتی تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{اگر } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ سازگار باشد؛} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

سپس تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma^* = \bigcup_{0 \leq n} \Gamma_n.$$

اکنون برهان با اثبات پیاپیِ واقعیت‌های زیر ادامه می‌یابد:

1. برای هر n، مجموعهٔ Γ_n سازگار است (با استقرا بر n و استفاده از گزاره 12.25)؛
2. Γ^* سازگار است؛
3. Γ^* بیشینه است.

سپس ارزش‌گذاری v را با $v(p_i) = \mathbb{T}$ اگر و تنها اگر $p_i \in \Gamma^*$ تعریف می‌کنیم. با استقرا بر φ نشان می‌دهیم که برای جمله‌ها پیچیده‌تر نیز عضویت در Γ^* با صدق بر حسب v منطبق است: $\overline{v}(\varphi) = \mathbb{T}$ اگر و تنها اگر $\varphi \in \Gamma^*$. به‌ویژه، v مجموعهٔ Γ^* را ارضا می‌کند؛ و چون $\Gamma \subseteq \Gamma^*$، Γ نیز ارضاپذیر است، چنان‌که می‌خواستیم. □

نتیجه 7.6. اگر $\Gamma \vDash \varphi$، آنگاه $\Gamma \vdash \varphi$.

اثبات. اگر $\Gamma \nvdash \varphi$، بنا بر گزاره 12.23 مجموعهٔ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ سازگار است. پس به موجب قضیهٔ کامل‌بودن، $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ارضاپذیر است و $\Gamma \nvDash \varphi$. □

گزاره 7.7 (قضیهٔ فشردگی). Γ ارضاپذیر است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی Γ_0 از Γ ارضاپذیر باشد.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

اثبات. Γ ارضاناپذیر است اگر و تنها اگر ناسازگار باشد؛ اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌ای متناهی چون Γ_0 از Γ ناسازگار باشد؛ و اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌ای متناهی چون Γ_0 از Γ ارضاناپذیر باشد. □

نتیجه 7.8. *$\Gamma \vDash \varphi$ اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌ای متناهی چون Γ_0 از Γ وجود داشته باشد که $\Gamma_0 \vDash \varphi$.*

7.3 درستی منطق گزاره‌ای

قضیه 7.9 (درستی). *اگر $\Gamma \vdash \varphi$، آنگاه $\Gamma \vDash \varphi$.*

اثبات. بر اشتقاق φ از Γ استقرا می‌کنیم. اگر φ یک اصل باشد، آنگاه $\vDash \varphi$ و بنابراین، به طریق اولی، $\Gamma \vDash \varphi$. همچنین اگر $\varphi \in \Gamma$، آنگاه $\Gamma \vDash \varphi$. برای گام استقرا، فرض کنید φ با وضع مقدم از χ و $\chi \to \varphi$ به دست آمده باشد. فرض‌های استقرا به‌صراحت عبارت‌اند از $\Gamma \vDash \chi$ و $\Gamma \vDash (\chi \to \varphi)$. بند سومِ گزاره 7.19 نتیجهٔ مطلوب را می‌دهد. □

نتیجه 7.10. *اگر Γ ارضاپذیر باشد، سازگار است. ازاین‌رو منطق گزاره‌ای سازگار است.*

7.4 زبان منطق مرتبهٔ دوم

همانند منطق مرتبهٔ اول، عبارت‌های منطق مرتبهٔ دوم از واژگان پایه‌ای ساخته می‌شوند که متغیرها، ثابت‌ها، محمول‌ها و گاه تابع‌ها را در بر می‌گیرد. از آن‌ها، همراه با رابط‌های منطقی، سورها و نشانه‌های سجاوندی مانند پرانتز و ویرگول، ترم‌ها و فرمول‌ها ساخته می‌شوند. تفاوت در این است که منطق مرتبهٔ دوم، افزون بر متغیرهای اشیا، متغیرهایی برای رابطه‌ها و تابع‌ها نیز دارد و کمیت‌گذاری بر آن‌ها را مجاز می‌داند. پس نمادهای منطقیِ منطق مرتبهٔ دوم همان نمادهای منطق مرتبهٔ اول‌اند، به‌اضافهٔ موارد زیر:

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

1. مجموعه‌ای شمارای نامتناهی از متغیرها رابطه‌ای مرتبهٔ دوم با هر مرتبهٔ n: V_0^n، V_1^n، V_2^n، ...

2. مجموعه‌ای شمارای نامتناهی از متغیرها تابعی مرتبهٔ دوم با هر مرتبهٔ n: u_0^n، u_1^n، u_2^n، ...

در منطق مرتبهٔ اول، معمولاً همانی $=$ گنجانده می‌شود. نمادهای غیرمنطقیِ زبانی چون $\mathcal{L}$ در منطق مرتبهٔ اول برای بیان هر مطلب جالبی نقشی اساسی دارند. البته جمله‌های هستند که هیچ نماد غیرمنطقی به کار نمی‌برند، اما تنها با $=$ دشوار است مطلب جالبی گفت. در منطق مرتبهٔ دوم، چون ذخیره‌ای نامحدود از متغیرهای رابطه‌ای و تابعی داریم، حتی بدون ذخیره‌ای ویژه از نمادهای غیرمنطقی می‌توانیم هر آنچه را در یک زبان مرتبهٔ اول بیان می‌کنیم، بیان کنیم.

7.5 هم‌ریختی

یک هم‌ریختی تناظری دوسویی است که ساختار مجموعه‌هایی را که به هم مرتبط می‌کند حفظ می‌کند؛ و ساختار، به رابطه‌های برقرار میان اعضا آن مجموعه‌ها بستگی دارد. دو مجموعهٔ $X = \{1, 2, 3\}$ و $Y = \{4, 5, 6\}$ را در نظر بگیرید. هر دو مجموعه با رابطه‌های جانشینی، کوچک‌تربودن و بزرگ‌تربودن ساختار یافته‌اند. هم‌ریختی میان آن دو مجموعه تناظر دوسویی است که این ساختارها را حفظ کند. پس تابع دوسویی چون $f : X \to Y$ هنگامی هم‌ریختی است که برای همهٔ $i, j \in X$، $i < j$ اگر و تنها اگر $f(i) < f(j)$؛ $i > j$ اگر و تنها اگر $f(i) > f(j)$؛ و j جانشین i باشد اگر و تنها اگر $f(j)$ جانشین $f(i)$ باشد.

تعریف 7.11 (هم‌ریختی). فرض کنید U جفت $\langle X, R\rangle$ و V جفت $\langle Y, S\rangle$ باشد، به‌طوری‌که X و Y مجموعه و R و S به‌ترتیب رابطه‌هایی بر X و Y باشند. تناظر دوسویی f از X به Y، هم‌ریختی‌ای از U به V است اگر و تنها اگر ساختار رابطه‌ای را حفظ کند؛ یعنی برای هر $x_1, x_2 \in X$، $\langle x_1, x_2\rangle \in R$ اگر و تنها اگر $\langle f(x_1), f(x_2)\rangle \in S$.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

مثال 7.12. دو مجموعهٔ $X = \{1, 2, 3\}$ و $Y = \{4, 5, 6\}$ و رابطه‌های کوچک‌تربودن و بزرگ‌تربودن را در نظر بگیرید. تابع $f : X \to Y$ که $f(x) = 7 - x$، هم‌ریختی‌ای میان $\langle X, < \rangle$ و $\langle Y, > \rangle$ است.

7.6 مقدمه

استقرا فن برهانی پرکاربرد در ریاضیات و منطق است. شاید آن را از ریاضیات بشناسید، جایی که بر اعداد طبیعی استقرا می‌کنیم. در واقع، گونه‌های فراوانی از مجموعه‌های اشیای ریاضی و منطقی وجود دارند که برای استقرا مناسب‌اند.

به‌طور کلی، استقرا امکان می‌دهد ادعایی کلی را اثبات کنیم؛ یعنی نشان دهیم هر شیء از نوعی معین ویژگی‌ای دارد. استقرا به‌ویژه هنگامی سودمند است که روش برهانِ «معرفی کلی» بیش از حد پیچیده باشد. استقرا تنها بر اشیای ریاضی‌ای کار می‌کند که به شیوه‌هایی ویژه ساخته شده‌اند: اگر هر عضو مجموعه یا پایه باشد یا از اعضای پایه ساخته شده باشد، می‌توان بر آن استقرا کرد. دقیق‌تر:

تعریف 7.13. مجموعهٔ S تحت تابع n-موضعی f بسته است اگر و تنها اگر هرگاه $x_1, \ldots, x_n \in S$، آنگاه $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$.

برای نمونه، اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) تحت تابع جانشین $f(x) = x + 1$ بسته‌اند. اگر x عددی طبیعی باشد، $x + 1$ نیز طبیعی است. اما اعداد طبیعی تحت تابع پیشین $f(x) = x - 1$ بسته نیستند، زیرا 0 عددی طبیعی است ولی -1 طبیعی نیست.

تعریف 7.14. می‌گوییم ویژگی P تحت تابع n-موضعی f حفظ می‌شود هرگاه برای هر $a_1, \ldots, a_n$ در دامنهٔ f، از $P(a_1), \ldots, P(a_n)$ نتیجه شود $P(f(a_1, \ldots, a_n))$؛ یعنی اگر همهٔ ورودی‌ها ویژگی P را داشته باشند، خروجی f نیز آن را داشته باشد.

ویژگی «زوج‌بودن» تحت تابع $f(x) = x + 2$ حفظ می‌شود، زیرا اگر x زوج باشد، $x + 2$ نیز زوج است. ویژگی زوج‌بودن تحت تابع جانشین حفظ نمی‌شود، زیرا اگر x زوج باشد، $x + 1$ فرد است.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

استقرا بر اعداد طبیعی کار می‌کند، زیرا با تعداد متناهی کاربردِ تابع جانشین می‌توان از 0 به هر عدد طبیعی رسید. این ویژگی هر مجموعه‌ای است که بتوان بر آن استقرا کرد.

تعریف 7.15 (استقرا بر $\mathbb{N}$). اگر 0 ویژگی P را داشته باشد و P تحت تابع جانشین حفظ شود، آنگاه هر عدد طبیعی ویژگی P را دارد.

مثال 7.16. مجموع اعداد طبیعی از 0 تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

حالت پایه. مجموع اعداد طبیعی از 0 تا 0 برابر $\frac{0\cdot 1}{2} = 0$ است.

گام استقرا. فرض کنید ویژگی برای k برقرار باشد. نشان می‌دهیم برای $k+1$ نیز برقرار است. به بیان دیگر، فرض کنید $P(k)$ برقرار باشد؛ یعنی

$$0 + 1 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

با استفاده از فرض $P(k)$ نشان می‌دهیم $P(k+1)$ برقرار است؛ یعنی

$$0 + 1 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

$$0 + 1 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{(فرض)}$$

$$0 + 1 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \qquad \text{(افزودن } k+1 \text{ به دو طرف)}$$

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2+k+2k+2}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}
$$

پس گام استقرا برقرار است و ادعا را اثبات کرده‌ایم.

برای فرمول‌ها، اعضای پایه همان فرمول‌ها اتمی‌اند. فرمول‌ها پیچیده‌تر با پیوندزدن فرمول‌ها ساده‌تر به‌وسیلهٔ عملگرها ساخته می‌شوند. هر عملگر را می‌توان متناظر با تابعی از فرمول‌ها دانست که فرمول تازه‌ای بازمی‌گرداند و ورودی‌ها را با عملگر مورد نظر به هم می‌پیوندد. برای نمونه، تابعی که دو فرمول‌ها φ و ψ را به صورت عطف به هم می‌پیوندد، چنین نوشته می‌شود: $\mathcal{E}_\wedge(\varphi, \psi) = \varphi \wedge \psi$. این‌ها را *توابع فرمول‌ساز* می‌نامیم. مجموعهٔ فرمول‌ها تحت این توابع بسته است: هرگاه φ و ψ، فرمول‌ها باشند، $\neg\varphi$، $\varphi \wedge \psi$ و مانند آن‌ها نیز از همین مجموعه‌اند.

تعریف 7.17 (استقرا بر فرمول‌ها). اگر هر فرمول اتمی ویژگی P را داشته باشد و P تحت توابع فرمول-ساز حفظ شود، آنگاه هر فرمول ویژگی P را دارد.

این تعریف «دستور کاری» برای برهان‌های استقرایی بر فرمول‌ها پیشنهاد می‌کند. اگر خواسته شود نشان دهیم هر فرمول ویژگی P را دارد، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

حالت پایه. فرض کنید φ یک فرمول اتمی باشد. [...] پس φ ویژگی P را دارد.
گام استقرا. فرض کنید φ و ψ دو فرمول‌ها باشند که هر دو ویژگی P را دارند.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

حالت $\neg$: [...] پس $\neg\varphi$ ویژگی P را دارد.

حالت $\wedge$: [...] پس $\varphi \wedge \psi$ ویژگی P را دارد.

حالت $\vee$: [...] پس $\varphi \vee \psi$ ویژگی P را دارد.

حالت $\rightarrow$: [...] پس $\varphi \rightarrow \psi$ ویژگی P را دارد.

حالت $\leftrightarrow$: [...] پس $\varphi \leftrightarrow \psi$ ویژگی P را دارد.

حالت $\forall$: [...] پس $\forall x\varphi$ ویژگی P را دارد.

حالت $\exists$: [...] پس $\exists x\varphi$ ویژگی P را دارد.

بنابراین هر فرمول ویژگی P را دارد.

فصل 8

رابطه‌ها

بخش II

مجموعه‌ها، رابطه‌ها و تابع‌ها

این فایل چهار فصل نخستِ بخش نظریهٔ مجموعه‌های ساده را در نسخهٔ اصلیِ آهسته‌گام در بر می‌گیرد. بخش کامل در sets-functions-relations-complete.tex گنجانده شده است. مطالب این بخش مقدمه‌ای نسبتاً کامل بر نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌های ساده است. مگر آنکه بتوان آشنایی دانشجویان با این مباحث را مفروض گرفت، احتمالاً بهتر است درس با مرور این مطالب، دست‌کم بخش‌های مربوط به مجموعه‌ها، تابع‌ها و رابطه‌ها، آغاز شود. این کار باید تضمین کند همهٔ دانشجویان مهارت پایه در نمادگذاری ریاضی را که برای هر یک از بخش‌های دیگر منطق لازم است، دارند.

8.1 برهان‌هایی دربارهٔ مجموعه‌ها

این بخش با `content/method/proofs` جایگزین شده و در حالت پیش‌فرض از این فصل حذف شده است.

مجموعه‌ها و نمادگذاری‌هایی که تاکنون معرفی کرده‌ایم، صورت‌های کوتاه و مناسبی برای مشخص‌کردن مجموعه‌ها و بیان رابطه‌های میان آن‌ها فراهم می‌کنند. اغلب لازم است ادعاهایی دربارهٔ این رابطه‌ها را نیز اثبات کنیم. اگر با برهان‌های ریاضی آشنا نباشید، این کار ممکن است برایتان تازه باشد. ازاین‌رو نمونه‌ای ساده را گام‌به‌گام بررسی می‌کنیم. ثابت می‌کنیم برای هر دو مجموعهٔ X و Y همواره $X \cap (X \cup Y) = X$. چگونه همانی‌ای میان مجموعه‌ها مانند این را اثبات می‌کنیم؟ به یاد آورید که مجموعه‌ها تنها با اعضا خود تعیین می‌شوند؛ یعنی دو مجموعه همان‌اند اگر و تنها اگر اعضا یکسانی داشته باشند. پس در این مورد باید نشان دهیم (الف) هر عضو از $X \cap (X \cup Y)$، عضوی از X نیز هست و، برعکس، (ب) هر عضو از X، عضوی از $X \cap (X \cup Y)$ نیز هست. به بیان دیگر، هم (الف) $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$ و هم (ب) $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$ را نشان می‌دهیم.

برهان ادعایی کلی مانند «هر عضو z از $X \cap (X \cup Y)$، عضوی از X نیز هست» با این کار آغاز می‌شود که $z \in X \cap (X \cup Y)$ دلخواهی را مفروض بگیریم و از این فرض نتیجه بگیریم $z \in X$. شاید این الگو را با نام «برهان شرطی کلی» بشناسید. در این برهان باید تعریف‌های دخیل در فرض و نتیجه، در اینجا تعریف‌های «$\cap$» و «$\cup$»، را نیز به کار ببریم. پس مورد (الف) چنین استدلال می‌شود:

(الف) نخست می‌خواهیم نشان دهیم $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$؛ یعنی بنا بر تعریف $\subseteq$، برای هر z، اگر $z \in X \cap (X \cup Y)$، آنگاه $z \in X$. پس فرض کنید $z \in X \cap (X \cup Y)$. چون z عضوی از اشتراک دو مجموعه است اگر و تنها اگر عضوی از هر دو باشد، نتیجه می‌گیریم $z \in X$ و نیز $z \in X \cup Y$. به‌ویژه، $z \in X$، و این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

این نیمهٔ نخست برهان را کامل می‌کند. توجه کنید در گام آخر از این واقعیت استفاده کردیم که اگر عطفی ($z \in X$ و $z \in X \cup Y$) از یک فرض نتیجه شود، هر مؤلفهٔ عطفی نیز از همان فرض نتیجه می‌شود. شاید این قاعده را با نام «حذف عطف» یا $\text{Elim}\wedge$ بشناسید. اکنون (ب) را اثبات می‌کنیم:

(ب) اکنون $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$ را اثبات می‌کنیم؛ یعنی بنا بر تعریف $\subseteq$، برای هر z، اگر $z \in X$، آنگاه $z \in X \cap (X \cup Y)$.
فرض کنید $z \in X$. برای نشان‌دادن $z \in X \cap (X \cup Y)$ باید بنا بر تعریف «$\cap$» نشان دهیم (۱) $z \in X$ و نیز (۲) $z \in X \cup Y$.
بند (۱) همان فرض ماست، پس چیز دیگری برای اثبات ندارد. برای (۲)، به یاد آورید که z عضوی از اجتماع مجموعه‌هاست اگر و تنها اگر عضوی از دست‌کم یکی از آن مجموعه‌ها باشد. چون $z \in X$ و $X \cup Y$ اجتماع X و Y است، این شرط در اینجا برقرار است. پس $z \in X \cup Y$. هم (۱) $z \in X$ و هم (۲) $z \in X \cup Y$ را نشان داده‌ایم؛ بنابراین بنا بر تعریف «$\cap$»، $z \in X \cap (X \cup Y)$.

این استدلال قدری طولانی بود، اما چگونگی استدلال دربارهٔ مجموعه‌ها و رابطه‌های میان آن‌ها را نشان می‌دهد. معمولاً تا این اندازه تصریح نمی‌کنیم؛ به‌ویژه، شاید همهٔ تعریف‌ها را تکرار نکنیم. برهان این نتیجه در متنی پیشرفته‌تر بسیار فشرده‌تر است و ممکن است چنین باشد.

گزاره 8.1 (جذب). *برای همهٔ مجموعه‌های X و Y،*

$$X \cap (X \cup Y) = X$$

اثبات. (الف) فرض کنید $z \in X \cap (X \cup Y)$. آنگاه $z \in X$؛ پس $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$.
(ب) اکنون فرض کنید $z \in X$. آنگاه $z \in X \cup Y$ و در نتیجه $z \in X \cap (X \cup Y)$. پس $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$. □

با جزئیات ثابت کنید $X \cup (X \cap Y) = X$. سپس برهانی کوتاه و فشرده ارائه کنید. (راهنمایی: برای جهت $X \cup (X \cap Y) \subseteq X$ به برهان بر حسب حالت‌ها، یا $\text{Elim}\vee$، نیاز دارید.)

بازبینی منبع: 2026-07-12 (9620cc7)

فصل 9

اندازهٔ مجموعه‌ها

این فصل برشماری‌ها، شمارایی و ناشمارایی را بررسی می‌کند. متن برای چند بخش دو نسخه دارد: نسخه‌ای مقدماتی‌تر و نسخه‌ای پیشرفته‌تر برای هنگامی که نظریهٔ مجموعه‌ها با تفصیل بیشتری بررسی می‌شود. این فایل تنها نسخه‌های مقدماتی را در بر می‌گیرد. نسخه‌های پیشرفته‌تر در `size-of-sets-complete` گنجانده شده‌اند.