# फलनांचे आलेख

स्रोताच्या क्रमातील स्वतंत्र PDF वाचन-मसुदा. मूळ शिकवणी, सोडवलेली उदाहरणे, विभाग-सराव, धड्याची उजळणी, सराव चाचणी, स्रोत-उत्तरे आणि उत्तर नसलेल्या प्रश्नांच्या स्पष्ट नोंदी येथे एकत्र आहेत. दुरुस्त्या व जोडस्पष्टीकरणे स्वतंत्र लेखक-भूमिकेत राहतात. ही आशय आणि मांडणी तपासण्यासाठीची PDF प्रत आहे; संपूर्ण पुस्तक किंवा पाच-पुस्तकांचा कार्यप्रवाह पूर्ण झाल्याचा दावा नाही.

**मूळ इंग्रजी शीर्षक:** Graphs of Functions

**इंडोनेशियन शीर्षक:** Grafik Fungsi

**स्रोत दस्तऐवज:** m81374

**स्रोत UUID:** 4b2bbf1b-2df7-4b9a-9933-dd70d1fd8ada

घटक 12–22 मधील स्थिर, स्वतंत्रपणे स्रोत/गणित तपासलेले मसुदे वापरले आहेत. घटकांतील स्थानिक प्रश्न व उदाहरण क्रमांक मूळ पुस्तकाचे जागतिक क्रमांक मानू नयेत; 1,366 मूळ ओळखचिन्हे, स्रोतक्रम आणि उतरंड हे निश्चित संदर्भ आहेत. वारंवार आलेला धडा-उजळणी आवरण एकदाच ठेवून त्याचे सहा विषयगट मूळ क्रमाने जोडले आहेत.

## या विभागाची उद्दिष्टे

या विभागाच्या शेवटी तुम्हाला पुढील गोष्टी करता येतील:

Source: A20:m81374#para-00001

- उभ्या रेषेची कसोटी वापरणे.
- मूलभूत फलनांचे आलेख ओळखणे.
- फलनाच्या आलेखातून माहिती वाचणे.

Source: A20:m81374#list-00001

वाचनसूचना: येथे प्रांत म्हणजे वापरता येणाऱ्या x-मूल्यांचा संच आणि मूल्यसंच म्हणजे प्रत्यक्ष मिळणाऱ्या f(x)-मूल्यांचा संच. दोन्ही संच वास्तव संख्यांचे आहेत. $(-\infty, \infty)$ म्हणजे सर्व वास्तव संख्या; $[0, \infty)$ मध्ये 0 आणि सर्व धन वास्तव संख्या येतात. $\infty$ ही वास्तव संख्या किंवा समाविष्ट होणारे टोक नाही. आकृतीत दिसणाऱ्या अक्षांची मर्यादा म्हणजे फलनाच्या प्रांताची किंवा मूल्यसंचाची मर्यादा नव्हे.

मूळ आकृत्या बदललेल्या नाहीत. त्यांतील इंग्रजी शब्दांची किल्ली: Domain = प्रांत; Range = मूल्यसंच; slope = उतार; y-intercept = y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य. प्रत्येक आवश्यक सूत्र आणि तक्ता खाली मराठीतही वाचता येईल. बाण आलेख पुढे चालू असल्याचे दर्शवतात.

सुरुवात करण्यापूर्वी ही पूर्वतयारी चाचणी सोडवा.

### पूर्वतयारी 1

मूल्य काढा: (a) $2^3$ (b) $3^2$. हा प्रश्न चुकला असेल, तर क्रियांचा क्रम आणि घात यांचे स्रोत-उदाहरण पुन्हा पाहा.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a) 8; (b) 9.

जोडलेल्या पायऱ्या: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$. घातांक आणि पाया यांची अदलाबदल केल्यावर मूल्य तेच राहील असे नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167826157468

## पूर्वतयारी 2

मूल्य काढा: (a) $|7|$ (b) $|-3|$. हा प्रश्न चुकला असेल, तर स्रोताने दिलेले पुनरावलोकन-उदाहरण पाहा.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a) 7; (b) 3.

जोडलेले स्पष्टीकरण: संख्येचे **केवल मूल्य** म्हणजे संख्यारेषेवर तिचे 0 पासूनचे अंतर. 7 चे अंतर 7 आणि −3 चे अंतर 3 आहे; अंतर ऋण नसते. म्हणून $|7| = 7$ आणि $|-3| = 3$.

प्रश्नाकडे परत

स्रोत-दुव्याबद्दल नोंद: इंग्रजी आणि इंडोनेशियन मूळ मजकुरातील वरील अचूक लक्ष्य जतन केले आहे. त्या लक्ष्यावर पूर्णांकांच्या बेरजेचे उदाहरण आहे, केवल मूल्याचे नाही. दुवा शांतपणे बदललेला नाही; केवल मूल्याचे आवश्यक स्पष्टीकरण या उत्तरातच दिले आहे.

Source: A20:m81374#fs-idm664502240

## पूर्वतयारी 3

मूल्य काढा: (a) $\sqrt{4}$ (b) $\sqrt{16}$. हा प्रश्न चुकला असेल, तर वर्गमूळ काढण्याचे स्रोत-उदाहरण पुन्हा पाहा.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a) 2; (b) 4.

जोडलेल्या पायऱ्या: $2^2 = 4$ आणि $4^2 = 16$. दोन्ही उत्तरे धन आहेत. $\sqrt{}$ हे चिन्ह शून्य किंवा धन वर्गमूळ दर्शवते; म्हणून $\sqrt{4} = 2$ आणि $\sqrt{16} = 4$. येथे ± अशी दोन मूल्ये लिहायची नाहीत.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-idm263727344

वरील तीन पुनरावलोकन-दुवे मूळ इंग्रजी पुस्तकाकडे जातात; त्यासाठी इंटरनेट लागते. या घटकातील प्रश्न, उत्तरे आणि मूळ आकृत्या ऑफलाइन वाचकासाठी ठेवली आहेत.

## उभ्या रेषेची कसोटी वापरा

मागील विभागात संबंध फलन आहे का हे ठरवायला शिकलो. ते संबंध क्रमित जोड्यांचा संच, प्रतिचित्रण किंवा समीकरण या रूपांत दिले होते. आता एखादा आलेख फलनाचा आलेख आहे का हे कसे ठरवायचे ते पाहू.

Source: A20:m81374#fs-id1167829579930

क्रमित जोडीतील x आणि y यांची मूल्ये रेषीय समीकरणात ठेवल्यावर समीकरण सत्य ठरत असेल, तर ती (x, y) क्रमित जोडी त्या समीकरणाची उकल असते.

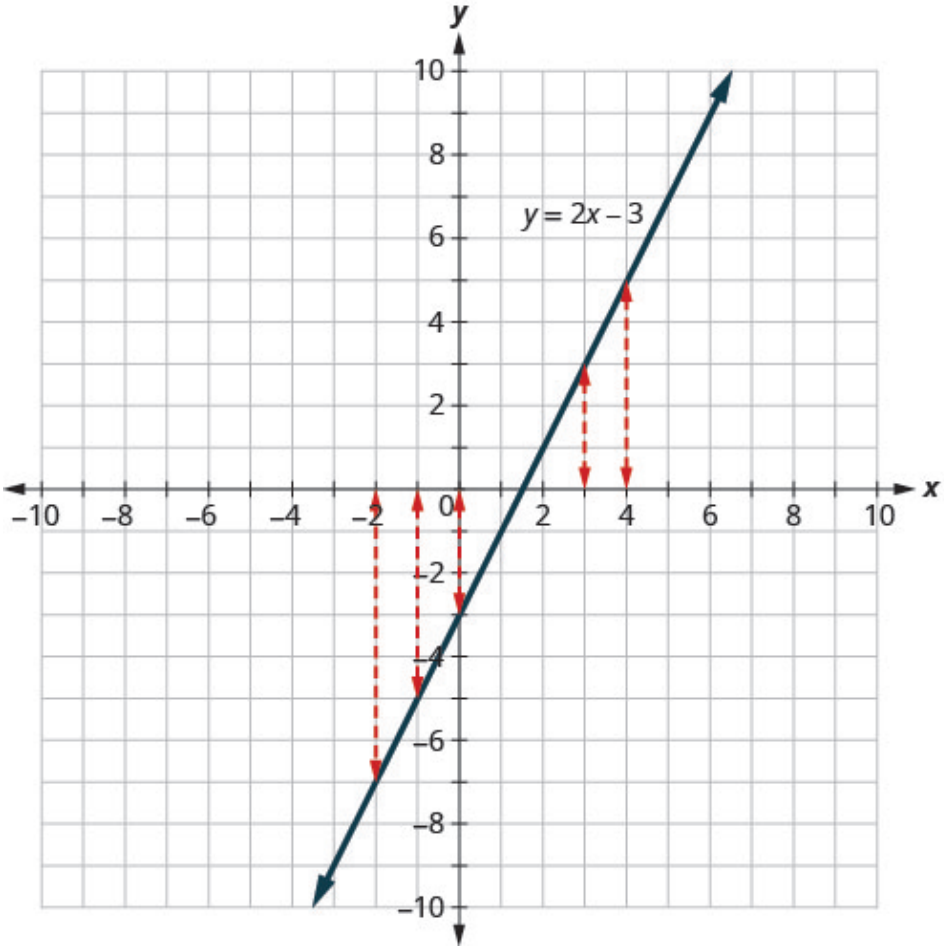
Source: A20:m81374#fs-id1167836691995

रेषीय समीकरणाचा आलेख सरळ रेषा असतो. या रेषेवरील प्रत्येक बिंदू त्या समीकरणाची उकल दर्शवतो आणि त्या समीकरणाची प्रत्येक उकल या रेषेवरील बिंदू असते.

Source: A20:m81374#fs-id1167829924871

आकृती 1 मध्ये $y = 2x - 3$ या समीकरणाच्या आलेखावर प्रत्येक x-मूल्यासाठी एकच y-मूल्य आहे, हे दिसते. सोबतच्या तक्त्यातही हे दाखवले आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836625879




| $y = 2x - 3$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
| –2 | –7 | (–2, –7) |
| –1 | –5 | (–1, –5) |
| 0 | –3 | (0, –3) |
| 3 | 3 | (3, 3) |
| 4 | 5 | (4, 5) |

आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावरील y = 2x − 3 ही सरळ रेषा (0, −3), (1, −1), (2, 1) यांतून जाते. दोन्ही अक्षांवर −10 ते 10 खुणा आहेत. लाल तुटक उभे बाण x-अक्षावरील −2, −1, 0, 3, 4 या मूल्यांना अनुक्रमे (−2, −7), (−1, −5), (0, −3), (3, 3), (4, 5) या रेषेवरील बिंदूंशी जोडतात. सोबतच्या तीन स्तंभांच्या तक्त्यात शीर्षक y = 2x − 3, स्तंभांची नावे x, y, (x, y) आणि हीच पाच नोंदी अशा सात ओळी आहेत. रेषेच्या दोन्ही टोकांवरील बाण ती पुढे चालू असल्याचे दर्शवतात.

आकृती 1 · प्रत्येक निवडलेल्या x-मूल्यासाठी रेषेवर एक y-मूल्य. मूळ इंग्रजी आकृती अपरिवर्तित आहे.

## मूळ आकृतीतील तक्त्याची वाचनीय प्रत; ही पाच स्वतंत्र उदाहरणे नाहीत.

y = 2x − 3

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| −2 | −7 | (−2, −7) |
| −1 | −5 | (−1, −5) |
| 0 | −3 | (0, −3) |
| 3 | 3 | (3, 3) |
| 4 | 5 | (4, 5) |

तक्त्यात काही निवडलेली मूल्ये दाखवली आहेत; आलेख फक्त या पाच बिंदूंपुरता मर्यादित नाही. दिसणाऱ्या अक्षांची चौकट म्हणजेच पूर्ण प्रांत असेही नाही.

Source: A20:m81374#CNX_IntAlg_Figure_03_06_001

प्रांतातील प्रत्येक घटकाला मूल्यसंचातील नेमके एक मूल्य जोडले असेल, तर तो संबंध फलन असतो. म्हणून $y = 2x - 3$ या समीकरणाने दिलेला संबंध फलन आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836547061

आलेख पाहिल्यावर प्रत्येक तुटक उभी रेषा त्या तिरप्या रेषेला एकाच बिंदूत छेदते, असे दिसते. हे फलनाच्या व्याख्येशी जुळते: प्रत्येक x-मूल्यासाठी एकच y-मूल्य असते.

Source: A20:m81374#fs-id1167829717392

उभी रेषा आलेखाला दोन वेगळ्या बिंदूंमध्ये छेदत असेल, तर त्या एकाच x-मूल्याला दोन y-मूल्ये जोडली जातील. त्यामुळे तो आलेख फलन दर्शवणार नाही.

Source: A20:m81374#fs-id1167836600350

यावरून उभ्या रेषेची कसोटी मिळते. आयताकार सहनिर्देशक पद्धतीतील बिंदूंच्या संचाला प्रत्येक उभी रेषा जास्तीत जास्त एका बिंदूत छेदत असेल, तर तो संच फलनाचा आलेख असतो. एखादी जरी उभी रेषा आलेखाला एकापेक्षा जास्त बिंदूंमध्ये छेदत असेल, तर तो आलेख फलन दर्शवत नाही.

Source: A20:m81374#fs-id1167836293137

## उभ्या रेषेची कसोटी · Vertical Line Test

आयताकार सहनिर्देशक पद्धतीतील बिंदूंच्या संचाला प्रत्येक उभी रेषा जास्तीत जास्त एका बिंदूत छेदत असेल, तर तो संच फलनाचा आलेख असतो.

एखादी जरी उभी रेषा आलेखाला एकापेक्षा जास्त बिंदूंमध्ये छेदत असेल, तर तो आलेख फलन दर्शवत नाही.

Source: A20:m81374#fs-id1167833386905

## “जास्तीत जास्त एक” याचा अर्थ

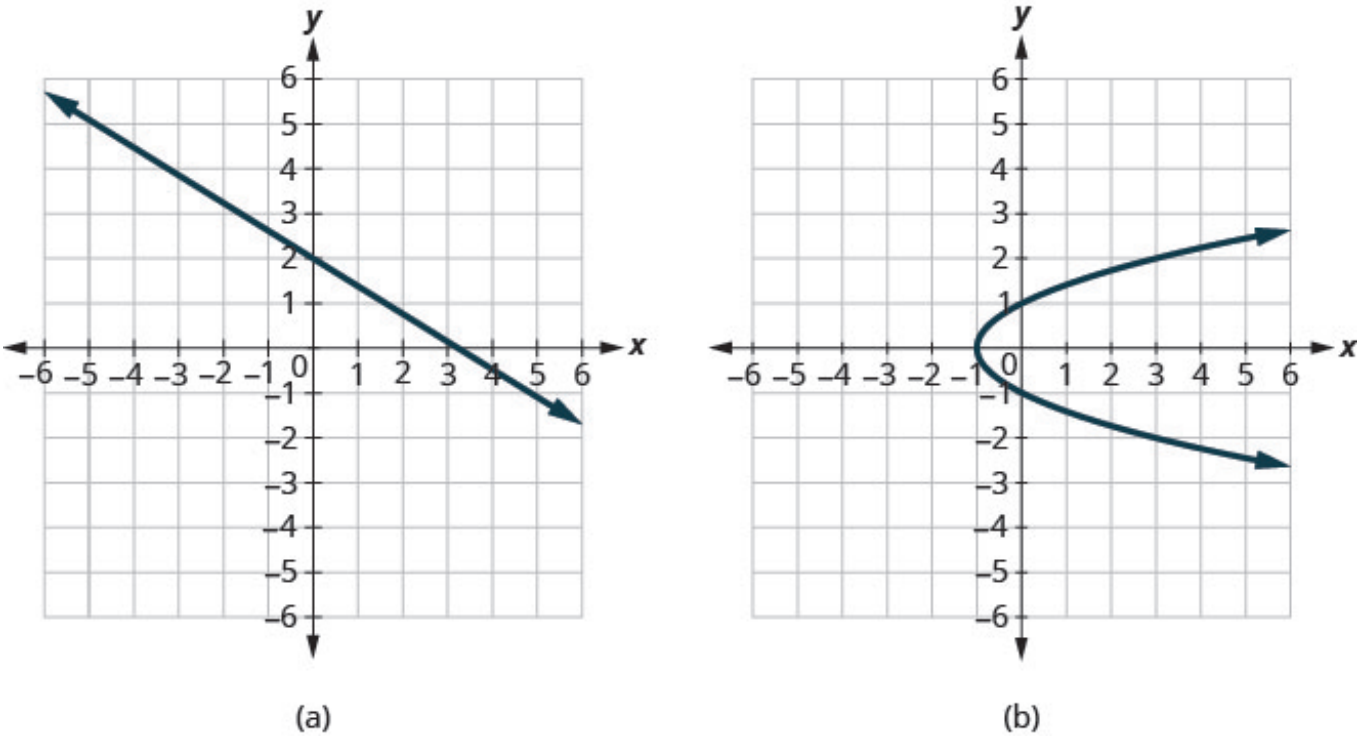
येथे उभी रेषा म्हणजे y-अक्षाला समांतर रेषा; तिच्यावरील सर्व बिंदूंचे x-मूल्य एकच असते. तिला आलेखावर शून्य किंवा एक छेदनबिंदू मिळणे चालते, पण दोन किंवा अधिक मिळणे चालत नाही. येथे प्रांत म्हणजे आलेखावर प्रत्यक्ष असलेल्या बिंदूंच्या x-मूल्यांचा संच. एखाद्या x-मूल्यावर बिंदू नसेल, तर ते मूल्य या प्रांतात नाही. प्रांत आधीच वेगळा दिला असेल, तर त्यातील प्रत्येक x-मूल्यासाठी एक बिंदू असण्याची अटही तपासावी लागते.

ही उभ्या रेषेची कसोटी आहे, आडव्या रेषेची नाही. दोन वेगळ्या x-मूल्यांसाठी समान y-मूल्य असणे फलनाला चालते. केवळ काही निवडलेल्या उभ्या रेषा तपासून सर्व रेषांबद्दल निष्कर्ष काढू नका.

## सोडवलेले उदाहरण 1 · दोन आलेख

आकारांची नावे: अन्वस्त म्हणजे parabola; लंबवर्तुळाला विवृत्त (ellipse) असेही म्हणतात. या प्रश्नात वक्राची समीकरणे शोधायची नाहीत; उभ्या रेषेची कसोटी वापरायची आहे.

प्रत्येक आलेख फलनाचा आलेख आहे का ते ठरवा.




आकृतीचे वर्णन: दोन आलेख; दोन्हींच्या x आणि y अक्षांवर −6 ते 6 खुणा आहेत. (a) (0, 2), (3, 0), (6, −2) या बिंदूंमधून जाणारी खाली उतरणारी सरळ रेषा, दोन्ही टोकांवर बाण. (b) (−1, 0) पासून उजवीकडे उघडणारा अन्वस्त. तो (0, 1), (0, −1), (3, 2), (3, −2) या बिंदूंमधून जातो; दोन्ही शाखांना पुढे जाणारे बाण आहेत.

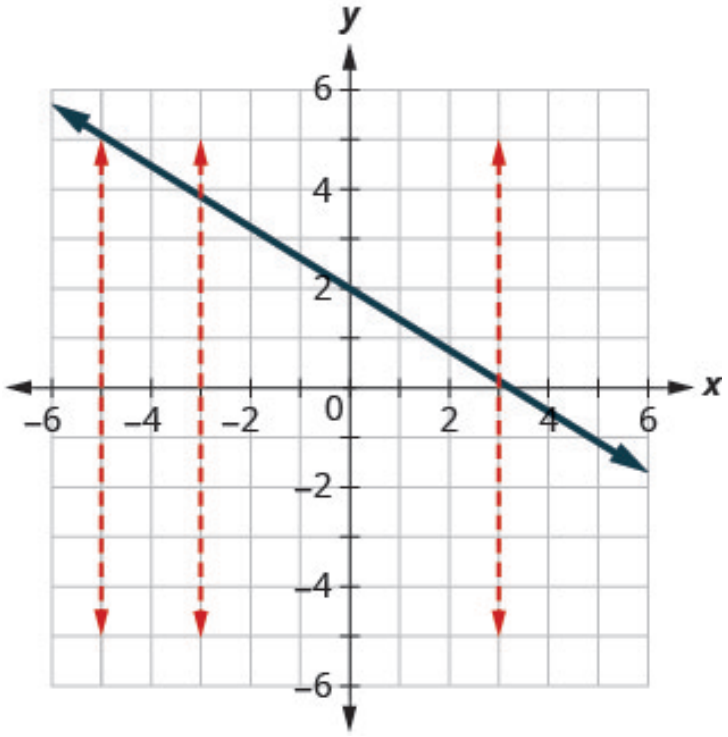
मूळ दोन आलेख: (a) तिरपी रेषा; (b) उजवीकडे उघडणारा अन्वस्त.

वर्णन-दुरुस्ती: दोन्ही स्रोतांच्या पर्यायी मजकुरात (a) च्या अक्षांवर −10 ते 10 म्हटले आहे; प्रत्यक्ष मूळ आकृतीत −6 ते 6 खुणा आहेत. वरील मराठी वर्णन प्रत्यक्ष आकृतीनुसार आहे.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील सोडवणूक

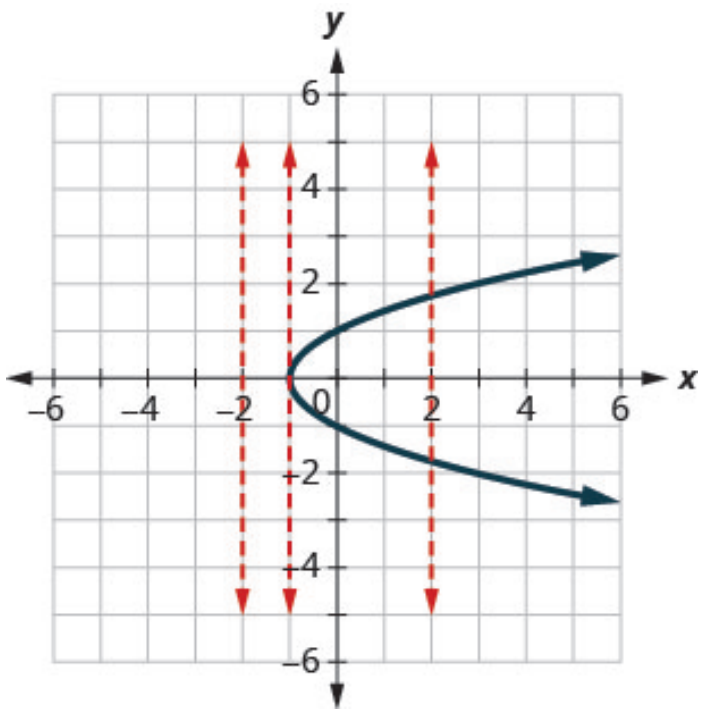
(a) कोणतीही उभी रेषा आलेखाला जास्तीत जास्त एका बिंदूत छेदते. म्हणून हा आलेख फलनाचा आलेख आहे.




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −6 ते 6 खुणा असलेल्या प्रतलात (0, 2), (3, 0), (6, −2) यांतून जाणारी तिरपी रेषा. x = −5, x = −3 आणि x = 3 येथे लाल तुटक उभ्या रेषा आहेत. प्रत्येक उभी रेषा तिरप्या रेषेला एकाच बिंदूत छेदते.

(a) दाखवलेल्या तिन्ही उभ्या रेषांना प्रत्येकी एक छेदनबिंदू मिळतो.

(b) आलेखावर दाखवलेल्या उभ्या रेषांपैकी एक रेषा त्याला दोन बिंदूंमध्ये छेदते. हा आलेख फलन दर्शवत नाही.




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −6 ते 6 खुणा. उजवीकडे उघडणाऱ्या अन्वस्ताचे डावे टोक (−1, 0) येथे आहे; तो (0, 1), (0, −1), (3, 2), (3, −2) यांतून जातो. लाल तुटक उभ्या रेषा x = −2, x = −1 आणि x = 2 येथे आहेत. x = −2 रेषेला छेदनबिंदू नाही; x = −1 रेषेला एक छेदनबिंदू आहे; x = 2 रेषेला दोन वेगळे छेदनबिंदू आहेत.

(b) एकाच उभ्या रेषेला दोन छेदनबिंदू मिळणे कसोटी अपयशी ठरण्यास पुरेसे आहे.

वर्णन-दुरुस्त्या: (a) च्या या सोडवणुकीतील मूळ आकृतीतही अक्षांच्या खुणा −6 ते 6 आहेत; दोन्ही स्रोतांचे −10 ते 10 हे वर्णन दुरुस्त केले आहे. (b) च्या इंग्रजी पर्यायी मजकुराच्या शेवटच्या वाक्यात x = 3 म्हटले आहे; प्रत्यक्ष तुटक रेषा x = 2 येथे आहे. इंडोनेशियन वर्णनातही 2 आहे. मूळ प्रतिमा बदललेल्या नाहीत.

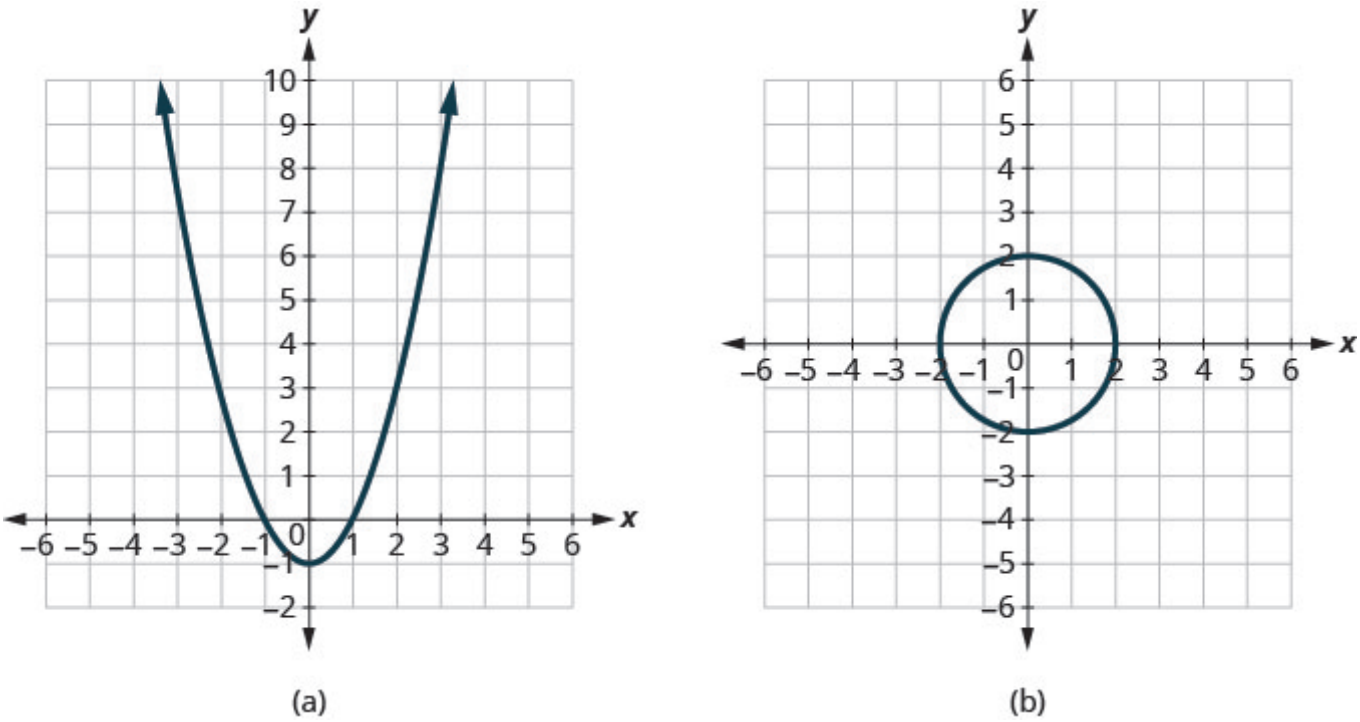
जोडलेले स्पष्टीकरण: (a) सरळ रेषा उभी नसल्यामुळे एकाच x-मूल्याला दोन बिंदू मिळू शकत नाहीत; निष्कर्ष फक्त दाखवलेल्या तीन तपासण्यांवर अवलंबून नाही. (b) मध्ये (0, 1) आणि (0, −1) हे दोन बिंदूही एकाच x-मूल्यासाठी दोन वेगळी y-मूल्ये दाखवतात.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836731467

## स्वतः सोडवा 1

प्रत्येक आलेख फलनाचा आलेख आहे का ते ठरवा.




आकृतीचे वर्णन: दोन आलेख. (a) x-अक्षावर −6 ते 6 आणि y-अक्षावर −2 ते 10 खुणा. वर उघडणारा अन्वस्त (0, −1), (−1, 0), (1, 0), (−2, 3), (2, 3) यांतून जातो; वरच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत. (b) दोन्ही अक्षांवर −6 ते 6 खुणा. (−2, 0), (2, 0), (0, −2), (0, 2) यांतून जाणारे वर्तुळ.

मूळ आलेख: (a) वर उघडणारा अन्वस्त; (b) वर्तुळ.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तर

(a) होय. (b) नाही.

### जोडलेली कारणे

(a) वर उघडणाऱ्या या अन्वस्ताला कोणतीही उभी रेषा जास्तीत जास्त एका बिंदूत छेदते. डावीकडील आणि उजवीकडील शाखांवर समान उंचीचे बिंदू असले, तरी त्यांची x-मूल्ये वेगळी असतात.

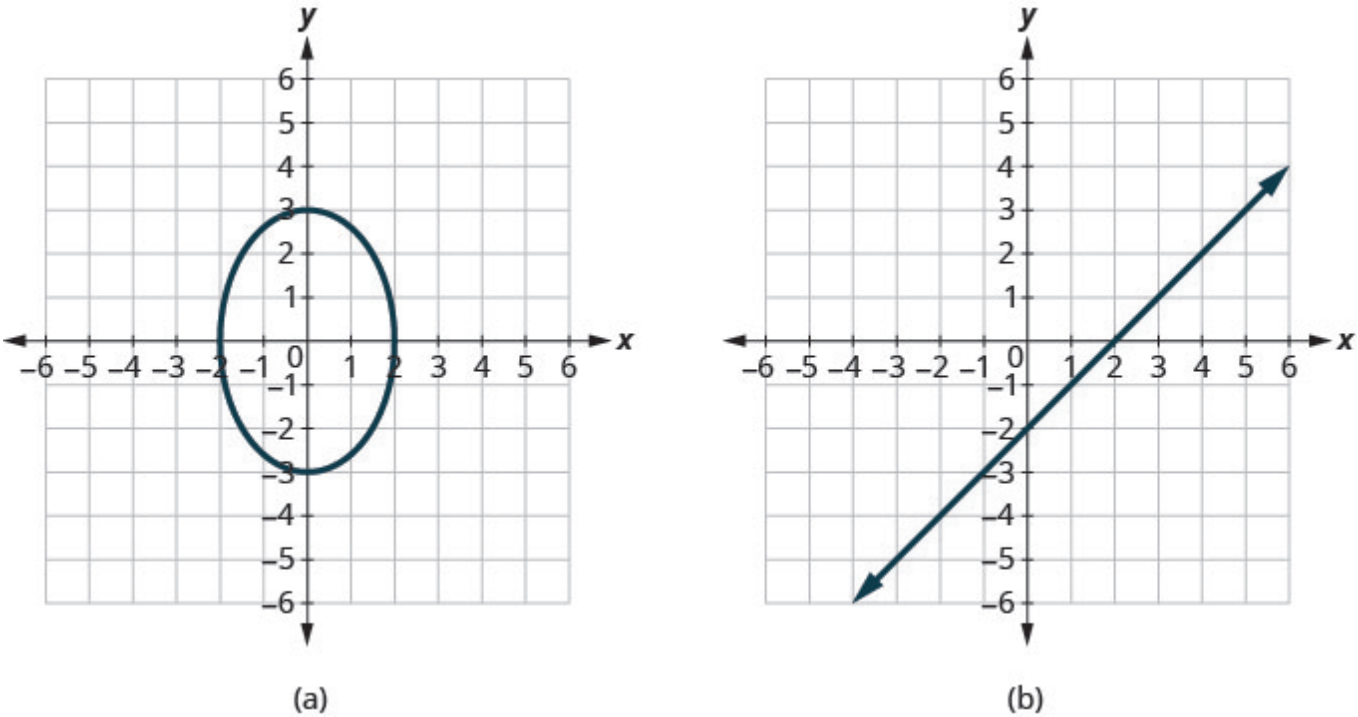
(b) वर्तुळावर (0, 2) आणि (0, −2) आहेत. त्यामुळे x = 0 ही उभी रेषा आलेखाला दोन बिंदूंमध्ये छेदते; तो फलनाचा आलेख नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836289482

## स्वतः सोडवा 2

प्रत्येक आलेख फलनाचा आलेख आहे का ते ठरवा.




आकृतीचे वर्णन: दोन आलेख; दोन्हींच्या x आणि y अक्षांवर −6 ते 6 खुणा आहेत. (a) (0, −3), (−2, 0), (2, 0), (0, 3) यांतून जाणारे लंबवर्तुळ. (b) (0, −2), (2, 0), (4, 2) यांतून जाणारी वर चढणारी सरळ रेषा, दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आलेख: (a) लंबवर्तुळ; (b) तिरपी रेषा.

वर्णन-दुरुस्ती: (b) च्या दोन्ही स्रोत-वर्णनांत अक्षांवर −12 ते 12 म्हटले आहे; प्रत्यक्ष आकृतीत −6 ते 6 खुणा आहेत. वरील वर्णन त्या खुणांनुसार आहे; गणिती आलेख बदललेला नाही.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a) नाही. (b) होय.

### जोडलेली कारणे

(a) लंबवर्तुळावर (0, 3) आणि (0, −3) हे दोन बिंदू आहेत. $x = 0$ ही उभी रेषा त्या दोन्ही बिंदूंमधून जाते; त्यामुळे तो फलनाचा आलेख नाही.

(b) ही सरळ रेषा उभी नाही. प्रत्येक उभी रेषा तिला एकाच बिंदूत छेदते, म्हणून हा फलनाचा आलेख आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836537878

## मूलभूत फलनांचे आलेख ओळखा

उभ्या रेषेची कसोटी समजून घेताना आपण $y = 2x - 3$ हे समीकरण आणि त्याचा आलेख वापरला. $y = 2x - 3$ या समीकरणाने दिलेला संबंध फलन आहे, असे आपण ठरवले.

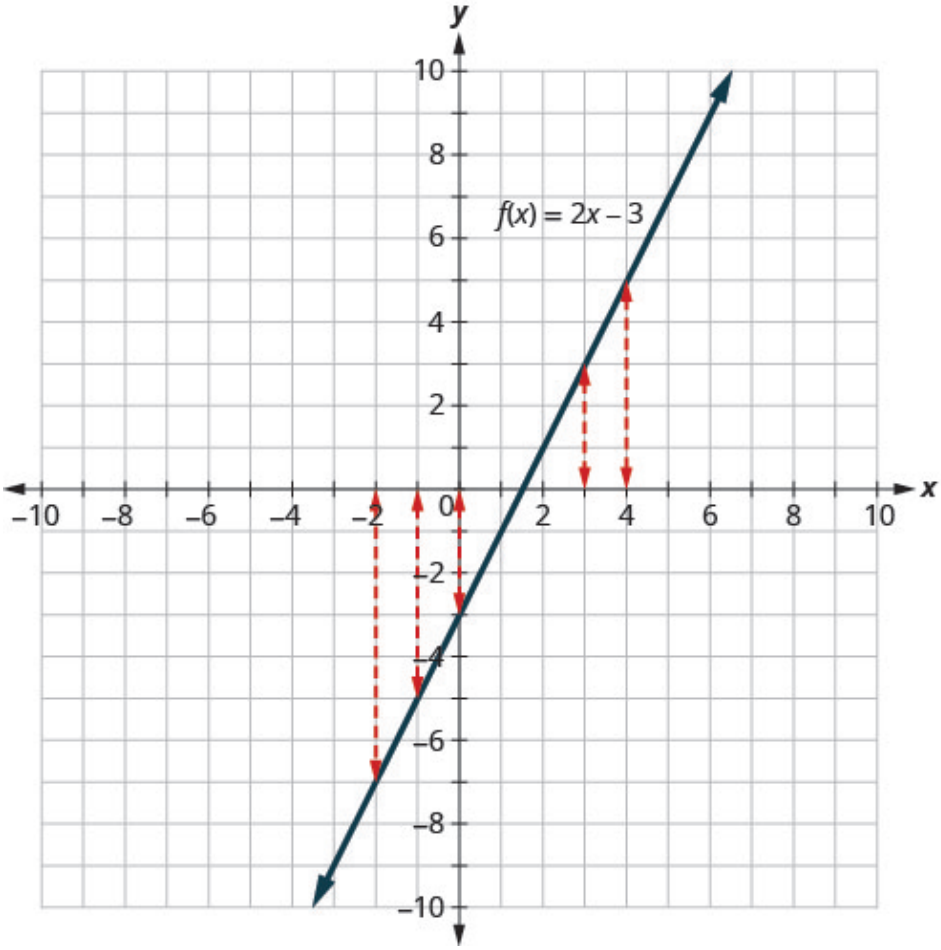
Source: A20:m81374#fs-id1167836293187

फलनाच्या संकेतलेखनात हेच $f(x) = 2x - 3$ असे लिहिता येते. अर्थ तोच राहतो. या फलनाचा आलेख म्हणजे $y = f(x)$ असलेल्या सर्व $(x, y)$ क्रमित जोड्यांचा आलेख. म्हणून त्या जोड्या $(x, f(x))$ अशाही लिहिता येतात. लेखन वेगळे दिसले, तरी आलेख तोच आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167833020798

मागील आकृतीतील $y = 2x - 3$ चा आलेख आणि या आकृतीतील $f(x) = 2x - 3$ चा आलेख यांची तुलना करा. संकेतलेखनाशिवाय काहीही बदललेले नाही.

Source: A20:m81374#fs-id1167836685520




| $f(x) = 2x - 3$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $f(x)$ | $(x, f(x))$ |
| –2 | –7 | (–2, –7) |
| –1 | –5 | (–1, –5) |
| 0 | –3 | (0, –3) |
| 3 | 3 | (3, 3) |
| 4 | 5 | (4, 5) |

आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −10 ते 10 खुणा असलेल्या प्रतलात f(x) = 2x − 3 ही सरळ रेषा. लाल तुटक उभे बाण x-अक्षावरील −2, −1, 0, 3, 4 या मूल्यांना रेषेवरील अनुक्रमे (−2, −7), (−1, −5), (0, −3), (3, 3), (4, 5) या बिंदूंशी जोडतात. उजवीकडे त्याच पाच क्रमित जोड्यांचा तक्ता आहे.

आकृतीतील तक्त्याची वाचनसुलभ प्रत खाली दिली आहे. f(x) हेच क्रमित जोडीतील दुसरे मूल्य आहे.

### स्रोतातील तक्ता: f(x) = 2x − 3

| x | f(x) | (x, f(x)) |
|---|---|---|
| −2 | −7 | (−2, −7) |
| −1 | −5 | (−1, −5) |
| 0 | −3 | (0, −3) |
| 3 | 3 | (3, 3) |
| 4 | 5 | (4, 5) |

Source: A20:m81374#CNX_IntAlg_Figure_03_06_007

## फलनाचा आलेख

फलनाचा आलेख म्हणजे $y = f(x)$ असलेल्या त्याच्या सर्व $(x, y)$ क्रमित जोड्यांचा, किंवा फलनाच्या संकेतलेखनात $(x, f(x))$ जोड्यांचा, आलेख.

संकेतांचा अर्थ

| | |
|---|---|
| **f** | फलनाचे नाव |
| **x** | क्रमित जोडीचा x-सहनर्दिशक |
| **f(x)** | क्रमित जोडीचा y-सहनर्दिशक |

Source: A20:m81374#fs-id1167829598148

पुढील अभ्यासासाठी काही मूलभूत फलनांचे आलेख परिचयाचे असणे आणि ते ओळखता येणे उपयोगी ठरेल.

Source: A20:m81374#fs-id1167836321563

आधीच्या अभ्यासातून रेषीय समीकरणांचे आलेख आपल्याला माहीत आहेत. $y = 2x - 3$ हे फलन दर्शवते का हे ठरवण्यासाठी वापरलेली पद्धत सर्व रेषीय समीकरणांना लागू होते. उभी नसलेली प्रत्येक सरळ रेषा फलनाचा आलेख असते. उभी रेषा फलनाचा आलेख नसते, कारण तिच्यावरील एकाच x-मूल्यासाठी अनंत y-मूल्ये असतात.

Source: A20:m81374#fs-id1167836665565

आपण रेषीय समीकरणे अनेक रूपांत लिहिली आहेत; येथे उतार आणि y-अक्षावरील छेद दाखवणारे रूप सर्वाधिक उपयोगी आहे. ते रूप $y = mx + b$ असे आहे. फलनाच्या संकेतलेखनात हे रेषीय फलन $f(x) = mx + b$ असे लिहितात. येथे m हा रेषेचा उतार आणि b हे y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य आहे.

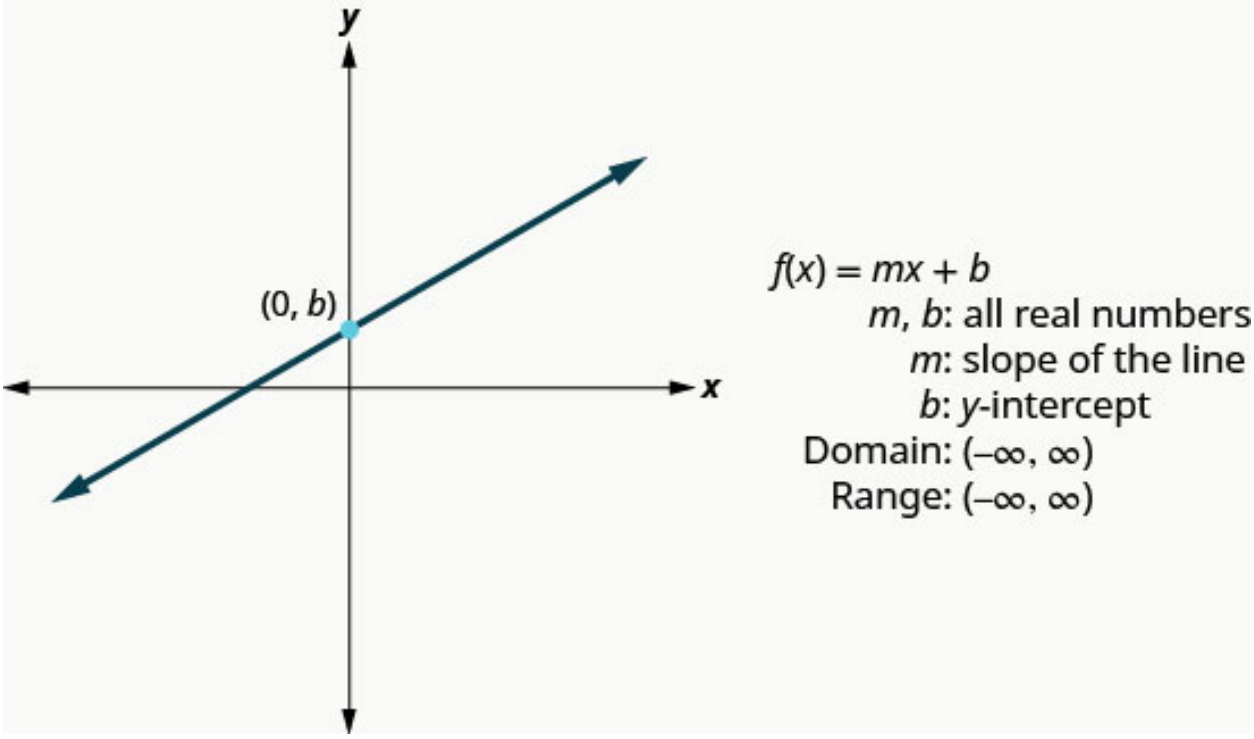
Source: A20:m81374#fs-id1167836480334

स्रोतात प्रांत सर्व वास्तव संख्यांचा संच आणि मूल्यसंचही सर्व वास्तव संख्यांचा संच आहे, असे म्हटले आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836692114

आवश्यक अट: वरील मूल्यसंचाचे विधान $m \neq 0$ असताना खरे आहे. $m = 0$ असल्यास फलन स्थिर होते आणि त्याचा मूल्यसंच $\{b\}$ असतो. प्रांत मात्र दोन्ही प्रकरणांत सर्व वास्तव संख्या असतो. b ही संख्या आहे; छेदनबिंदू $(0, b)$ आहे.

## रेषीय फलन · Linear Function




आकृतीचे वर्णन: (0, b) मधून जाणारी वर चढणारी सरळ रेषा. बाजूला f(x) = mx + b; m आणि b वास्तव संख्या; m उतार; b y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य; प्रांत व मूल्यसंच (−∞, ∞) अशी इंग्रजी नोंद आहे. मूळ इंग्रजी चित्रात आवश्यक m ≠ 0 ही अट नाही; ती सोबतच्या दुरुस्तीमध्ये दिली आहे.

आकृतीतील माहिती: f(x) = mx + b; m आणि b वास्तव संख्या; m रेषेचा उतार; b हे y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य. प्रांत: (−∞, ∞). चित्रात दिलेला मूल्यसंच: (−∞, ∞).

स्रोत-दुरुस्ती: इंग्रजी आकृतीतील मूल्यसंचाला m ≠ 0 ही अट जोडावी. इंडोनेशियन पुनर्मांडणीतील आकृती आणि तिचे वर्णन ही अट स्पष्ट करतात; दोन्ही भाषांतील आधीच्या गद्यवाक्यात मात्र ती नाही. येथे इंग्रजी मूळ प्रतिमा कायम ठेवून अट वेगळी स्पष्ट केली आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167833049966

आता ही मूलभूत फलने रेखाटण्यासाठी आधी शिकलेल्या आलेख काढण्याच्या पद्धती वापरू.

Source: A20:m81374#fs-id1167836755080

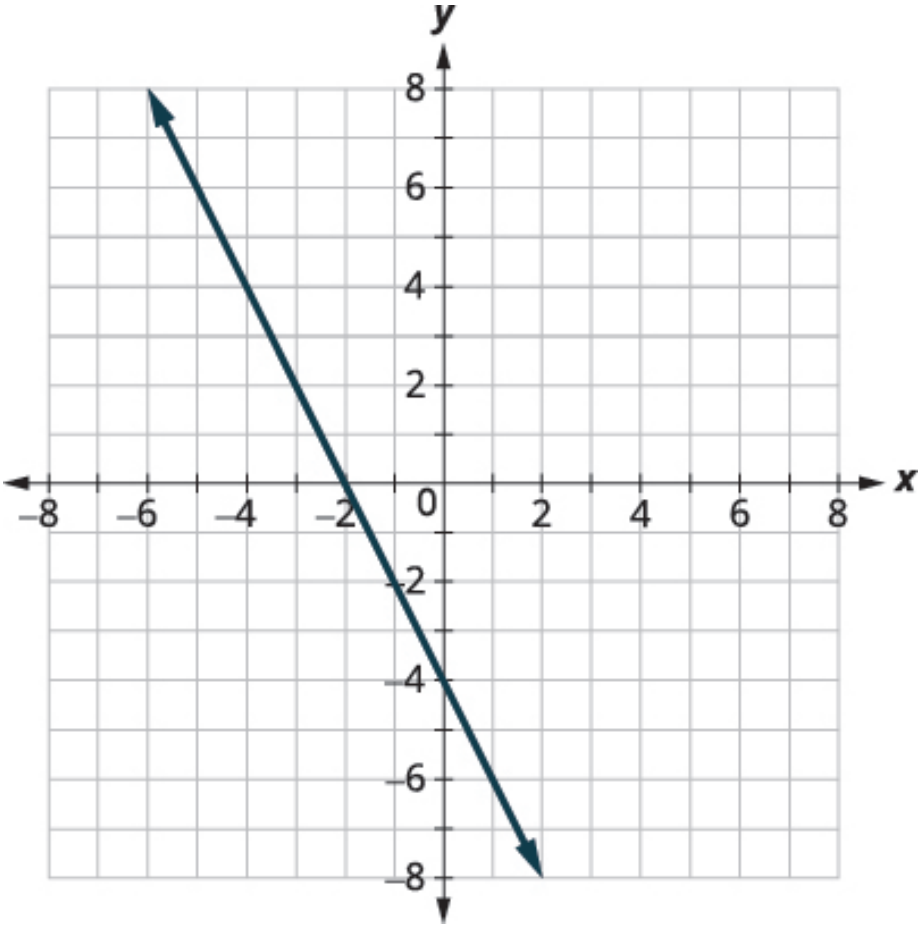
## सोडवलेले उदाहरण 1 · रेषीय फलन

आलेख काढा: f(x) = −2x − 4.

सोडवणूक पाहा

### स्रोतातील सोडवणूक

f(x) = −2x − 4. हे रेषीय फलन आहे. उतार आणि y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य शोधा: m = −2, b = −4. त्यांचा वापर करून आलेख काढा.




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−2, 0), (−1, −2), (0, −4) यांतून जाणारी खाली उतरणारी सरळ रेषा; दोन्ही टोकांवर बाण आहेत.

मूळ सोडवणुकीतील आलेख. स्रोताच्या तक्ता-वर्णनातील −6 ते 6 ऐवजी प्रत्यक्ष अक्षांवर −8 ते 8 खुणा आहेत.

प्रश्नाकडे परत

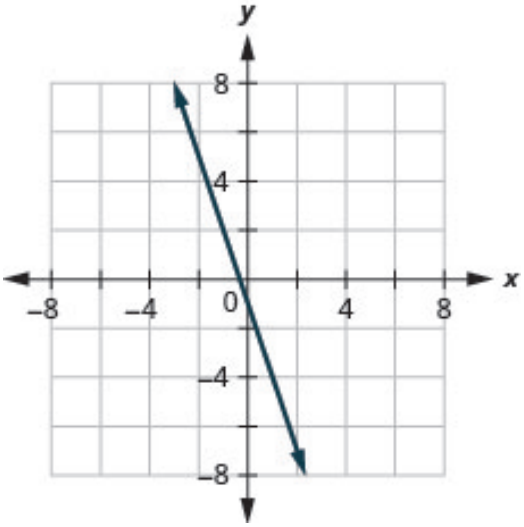
Source: A20:m81374#fs-id1167825091753

## स्वतः सोडवा 1

आलेख काढा: $f(x) = -3x - 1$.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−1, 2), (0, −1), (1, −4) यांतून जाणारी खाली उतरणारी सरळ रेषा; दोन्ही टोकांवर बाण.

f(x) = −3x − 1 चा मूळ आलेख. स्रोत-वर्णनातील −6 ते 6 ही अक्षांची मर्यादा प्रत्यक्ष खुणांनुसार दुरुस्त केली आहे.

प्रश्नाकडे परत

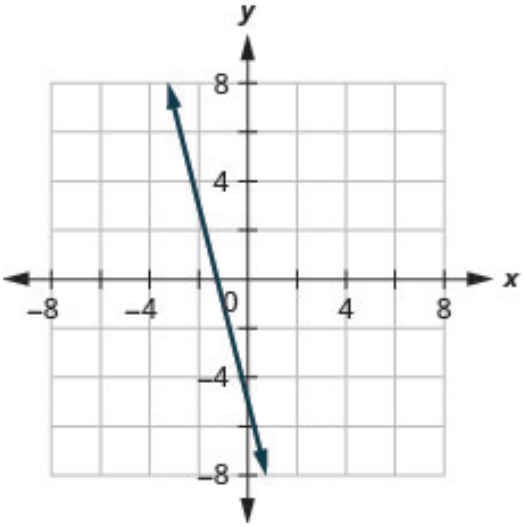
Source: A20:m81374#fs-id1167829754438

## स्वतः सोडवा 2

आलेख काढा: f(x) = −4x − 5.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−2, 3), (−1, −1), (0, −5) यांतून जाणारी खाली उतरणारी सरळ रेषा; दोन्ही टोकांवर बाण.

f(x) = −4x − 5 चा मूळ आलेख. स्रोत-वर्णनातील −6 ते 6 ऐवजी प्रत्यक्ष खुणा −8 ते 8 आहेत.

### प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833128828

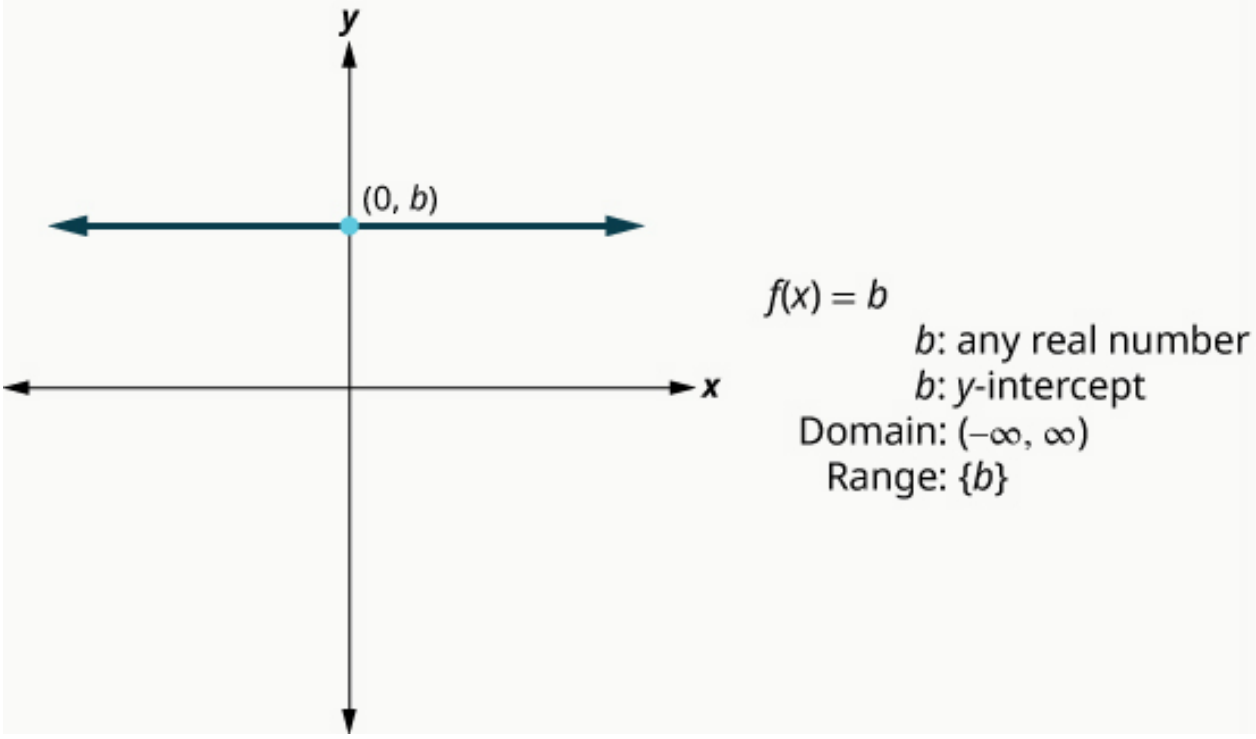
पुढील प्रकाराला स्थिर फलन म्हणतात. त्याचे समीकरण f(x) = b असे असते; येथे b ही कोणतीही वास्तव संख्या आहे. f(x) च्या जागी y लिहिल्यास y = b मिळते. ही y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य b असलेली आडवी रेषा आहे. f(x) = b या फलनाचाही आलेख तीच आडवी रेषा असतो.

Source: A20:m81374#fs-id1167833054733

फलनात कोणतीही वास्तव संख्या ठेवली, तरी फलनाचे मूल्य b मिळते. म्हणून मूल्यसंचात एकच मूल्य, b, आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836602424

## स्थिर फलन · Constant Function




आकृतीचे वर्णन: (0, b) मधून जाणारी आडवी सरळ रेषा. बाजूला f(x) = b; b कोणतीही वास्तव संख्या आणि y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य; प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच {b} असे लिहिले आहे.

आकृतीतील माहिती: f(x) = b; b कोणतीही वास्तव संख्या आणि y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य. प्रांत: (−∞, ∞); मूल्यसंच: {b}.

महिरपी कंसातील {b} हा एक घटक असलेला संच आहे. इंग्रजी स्रोताच्या पर्यायी वर्णनात कंस गाळलेले असले, तरी प्रत्यक्ष इंग्रजी आकृती आणि इंडोनेशियन वर्णन दोन्ही {b} देतात.

Source: A20:m81374#fs-id1167836494179

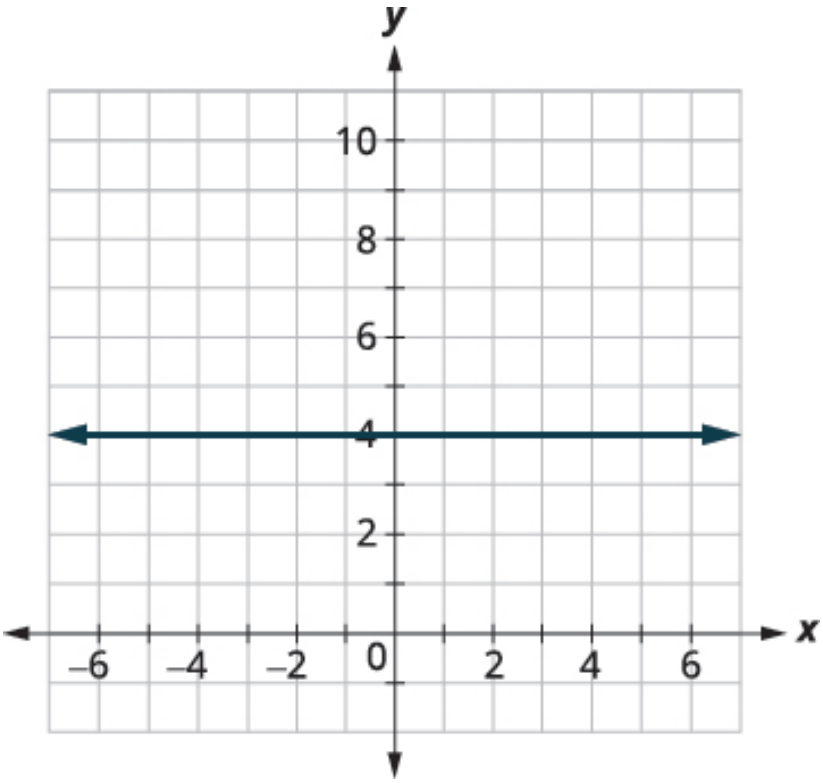
## सोडवलेले उदाहरण 2 · स्थिर फलन

आलेख काढा: f(x) = 4.

सोडवणूक पाहा

### स्रोतातील सोडवणूक

f(x) = 4. हे स्थिर फलन आहे. त्याचा आलेख (0, 4) मधून जाणारी आडवी रेषा असेल.




आकृतीचे वर्णन: y = 4 ही आडवी रेषा संपूर्ण प्रतलात दोन्हीकडे चालू राहते. ती (−2, 4), (0, 4), (1, 4) यांतून जाते. x-अक्षावरील छापील संख्यांक −6 ते 6 आणि y-अक्षावरील 0 ते 10 आहेत; जाळी त्यांच्यापलीकडेही जाते.

मूळ आडवी रेषा. स्रोताच्या दोन वर्णनांतील परस्परविरोधी अक्ष-मर्यादांऐवजी पर्यायी मजकुरात प्रत्यक्ष छापील खुणा आणि जाळी यांतील फरक स्पष्ट केला आहे.

प्रश्नाकडे परत

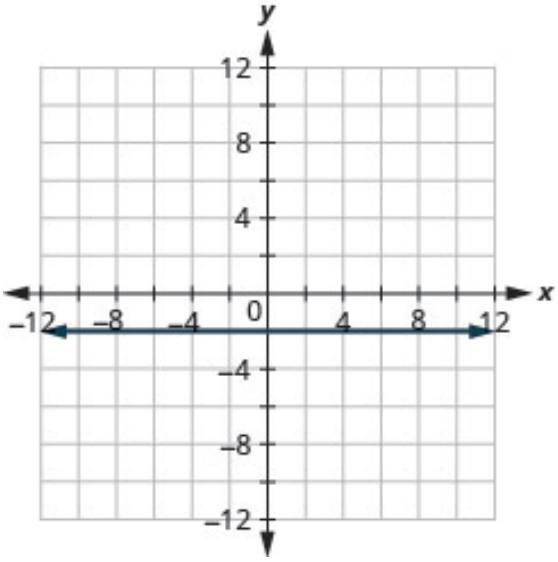
Source: A20:m81374#fs-id1167833142741

## स्वतः सोडवा 3

आलेख काढा: f(x) = −2.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −12 ते 12 खुणा. y = −2 ही आडवी रेषा (0, −2), (1, −2), (2, −2) यांतून जाते; दोन्ही टोकांवर बाण.

स्थिर मूल्य −2 असलेला मूळ आलेख.

प्रश्नाकडे परत

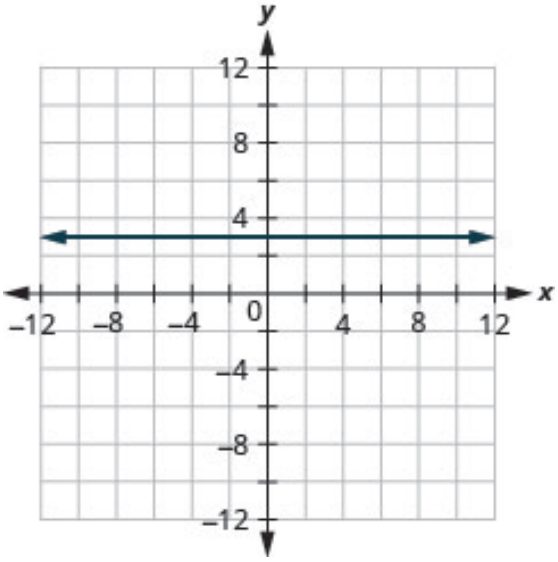
Source: A20:m81374#fs-id1167836481166

## स्वतः सोडवा 4

आलेख काढा: f(x) = 3.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −12 ते 12 खुणा. y = 3 ही आडवी रेषा (0, 3), (1, 3), (2, 3) यांतून जाते; दोन्ही टोकांवर बाण.

स्थिर मूल्य 3 असलेला मूळ आलेख.

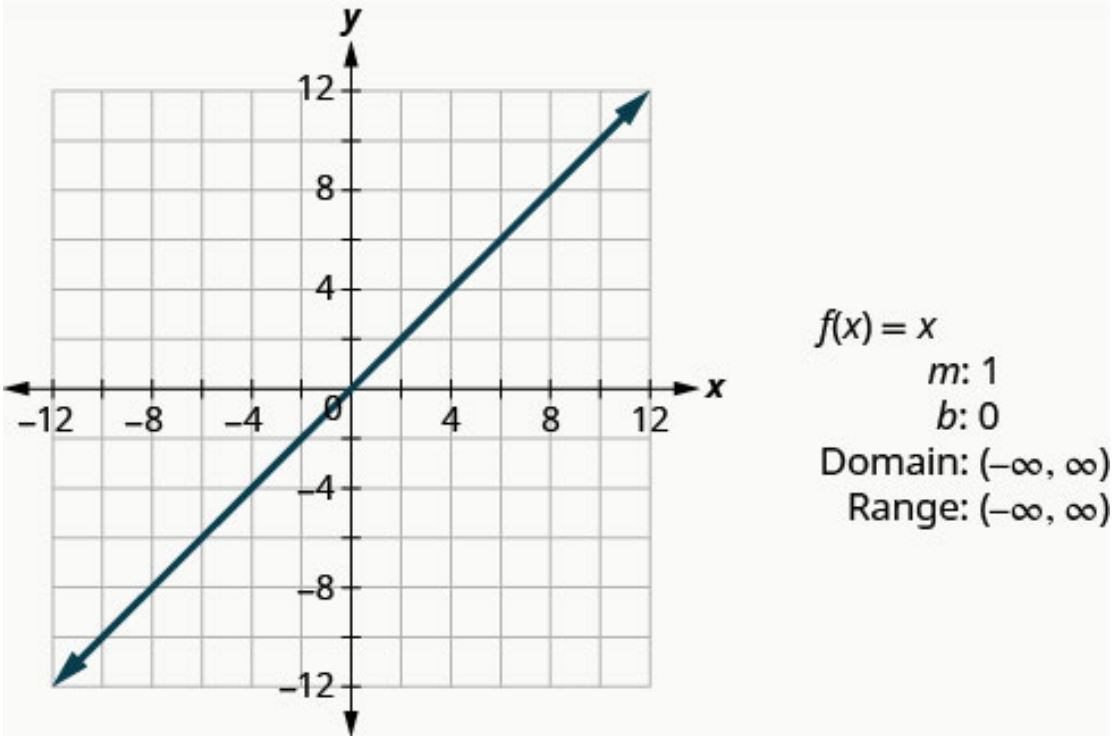
### प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836558185

प्रत्येक संख्या तशीच देणारे फलन (identity function), f(x) = x, हा रेषीय फलनाचा विशेष प्रकार आहे. ते f(x) = 1x + 0 असे लिहिल्यास उतार 1 आणि y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य 0 असल्याचे दिसते.

Source: A20:m81374#fs-id1167836528178

## प्रत्येक संख्या तशीच देणारे फलन · Identity Function




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −12 ते 12 खुणा. आदिबिंदूतून जाणारी y = x ही सरळ रेषा (1, 1), (2, 2) यांतूनही जाते. बाजूला f(x) = x; m = 1; b = 0; प्रांत आणि मूल्यसंच (−∞, ∞) असे लिहिले आहे.

आकृतीतील माहिती: f(x) = x; m = 1; b = 0; प्रांत आणि मूल्यसंच दोन्ही (−∞, ∞).

Source: A20:m81374#fs-id1167824674086

पुढील फलन रेषीय नाही, म्हणून त्याचा आलेख सरळ रेषा नाही. आतापर्यंत शिकलेल्या पद्धतींपैकी बिंदू मांडण्याची पद्धत येथे वापरू. हे फलन नवीन असल्यामुळे x साठी काही धन, काही ऋण मूल्ये आणि 0 निवडू.

Source: A20:m81374#fs-id1167826171267

बिंदू मांडताना प्रत्येक निवडलेल्या x साठी सूत्रातून f(x) काढा. येथे दिलेली वर्ग, घन, वर्गमूळ आणि केवल मूल्याची फलने त्यांच्या प्रांतावर संतत आहेत. काही बिंदू हे संपूर्ण आलेखाचे नमुने आहेत; तेच सर्व बिंदू नव्हेत. वर्ग आणि घन फलनांचे बिंदू सरळ तुकड्यांनी जोडून कोनीय रेषा बनवू नका; सूत्राशी जुळणारा गुळगुळीत वक्र काढा. केवल मूल्याचा आलेख मात्र दोन सरळ किरणांनी बनतो.

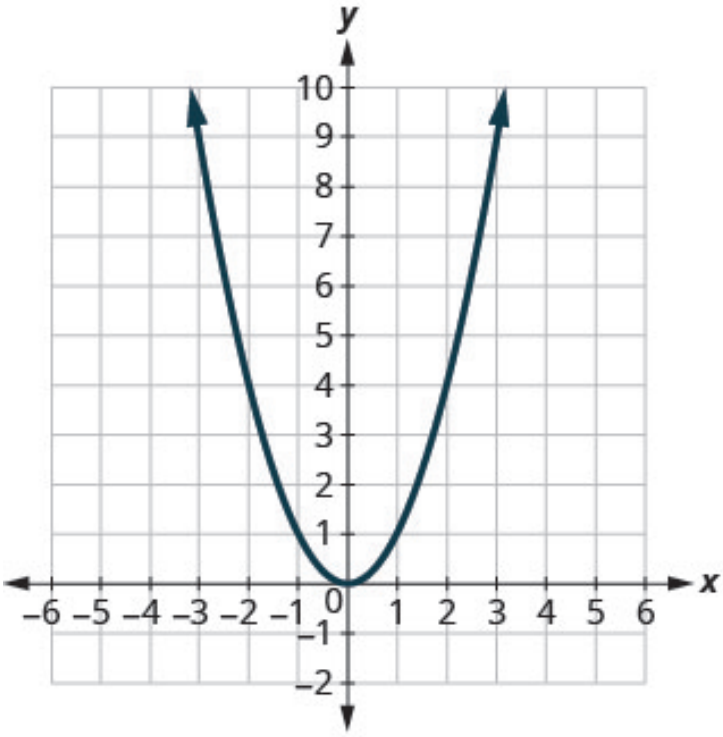
## सोडवलेले उदाहरण 3 · वर्ग फलन

आलेख काढा: $f(x) = x^2$.

सोडवणूक पाहा

### स्रोतातील सोडवणूक

x ची काही मूल्ये निवडू. ती सूत्रात ठेवून खाली दाखवलेला तक्ता तयार करू.




| $x$ | $f(x) = x^2$ | $(x, f(x))$ |
|---|---|---|
| –3 | 9 | (–3, 9) |
| –2 | 4 | (–2, 4) |
| –1 | 1 | (–1, 1) |
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 1 | (1, 1) |
| 2 | 4 | (2, 4) |
| 3 | 9 | (3, 9) |

आकृतीचे वर्णन: वर उघडणारा अन्वस्त आणि सात जोड्यांचा तक्ता. आलेखाच्या x-अक्षावर −6 ते 6 आणि y-अक्षावर −2 ते 10 खुणा आहेत. वक्र (−3, 9), (−2, 4), (−1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9) यांतून जातो. तक्त्यात त्याच जोड्या आहेत.

स्रोत-वर्णनातील अक्ष-मर्यादा प्रत्यक्ष मूळ चित्रानुसार दुरुस्त केल्या आहेत. तक्त्याची वाचनसुलभ प्रत:

## स्रोत-आकृतीतील $f(x) = x^2$ चा तक्ता

| **x** | **$f(x) = x^2$** | **(x, f(x))** |
|---|---|---|
| −3 | 9 | (−3, 9) |
| −2 | 4 | (−2, 4) |
| −1 | 1 | (−1, 1) |
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 1 | (1, 1) |
| 2 | 4 | (2, 4) |
| 3 | 9 | (3, 9) |

## प्रश्नाकडे परत

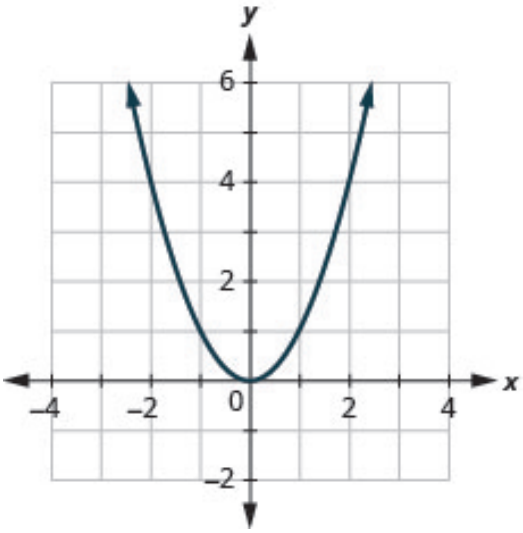
Source: A20:m81374#fs-id1167836683384

## स्वतः सोडवा 5

आलेख काढा: $f(x) = x^2$.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: वर उघडणारा अन्वस्त (−2, 4), (−1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4) यांतून जातो. x-अक्षावर −4 ते 4 आणि y-अक्षावर −2 ते 6 खुणा. ही एकच आलेख-प्रतिमा आहे; बाजूला तक्ता नाही.

मूळ आलेख; स्रोत-वर्णनातील तक्त्याचा उल्लेख आणि अक्ष-मर्यादा दुरुस्त केल्या आहेत.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836310060

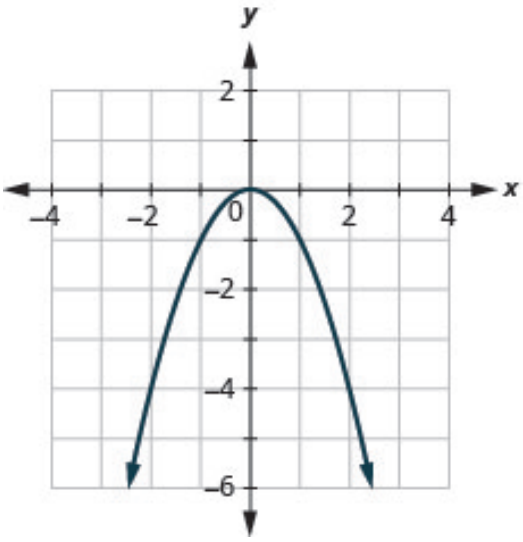
## स्वतः सोडवा 6

जोडलेली सूचना: आधीप्रमाणे आलेख काढा. दोन्ही स्रोतांत येथे केवळ सूत्र दिले आहे.

$f(x) = -x^2$

उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: खाली उघडणारा अन्वस्त (−2, −4), (−1, −1), (0, 0), (1, −1), (2, −4) यांतून जातो. x-अक्षावर −4 ते 4 आणि y-अक्षावर −6 ते 2 खुणा. तक्ता नाही.

स्रोत-दुरुस्ती: दोन्ही पर्यायी वर्णनांतील “वर उघडणारा”, तक्त्याचा उल्लेख आणि अक्ष-मर्यादा प्रत्यक्ष मूळ आकृतीशी जुळत नाहीत. आकृती बदललेली नाही; ती खाली उघडते.

चिन्हांची काळजी: $-x^2 = -(x^2)$. हे $(-x)^2 = x^2$ यासारखे नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829624689

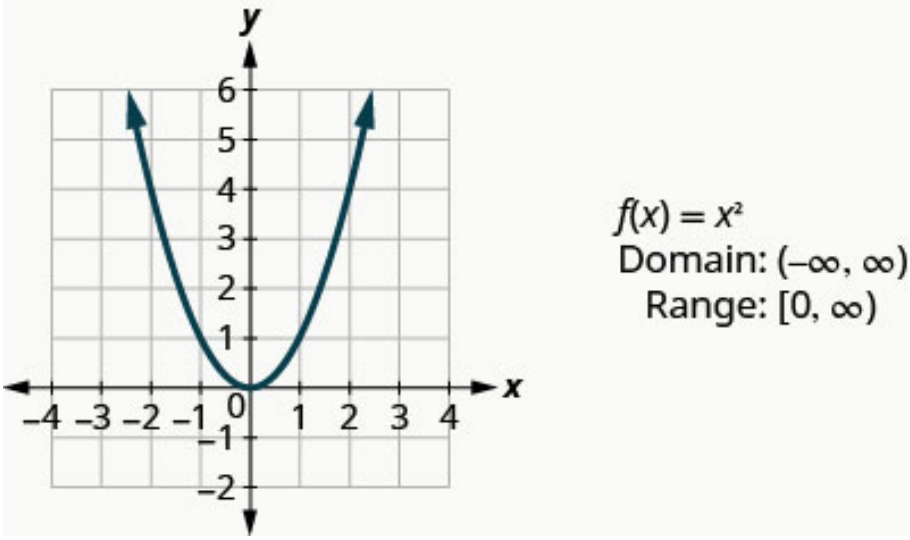
वर्ग फलनाच्या उदाहरणातील निष्कर्षांवरून त्याची वैशिष्ट्ये एकत्र मांडू. या आलेखाला अन्वस्त (parabola) म्हणतात. x साठी कोणतीही वास्तव संख्या वापरता येते. म्हणून प्रांत सर्व वास्तव संख्यांचा संच आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167829783193

मूल्यसंच मात्र सर्व वास्तव संख्यांचा संच नाही. y चे मूल्य कधीही शून्यापेक्षा कमी होत नाही, कारण संख्येचा वर्ग ऋण असू शकत नाही. म्हणून या वर्ग फलनाचा मूल्यसंच सर्व ऋणेतर वास्तव संख्यांचा संच आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167829853073

## वर्ग फलन · Square Function




आकृतीचे वर्णन: वर उघडणारा $y = x^2$ हा अन्वस्त. x-अक्षावर −4 ते 4 आणि y-अक्षावर −2 ते 6 खुणा. दिसणाऱ्या वक्रावर (−2, 4), (−1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4) आहेत. बाजूला $f(x) = x^2$; प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच [0, ∞) अशी नोंद.

आकृतीतील माहिती: $f(x) = x^2$; प्रांत: (−∞, ∞); मूल्यसंच: [0, ∞).

“ऋणेतर” म्हणजे 0 किंवा धन. प्रत्येक ऋणेतर y साठी $x = \sqrt{y}$ घेतल्यास $x^2 = y$ मिळते; म्हणून सर्व ऋणेतर मूल्ये खरोखर मिळतात. येथे विधान $f(x) = x^2$ या विशिष्ट फलनाचे आहे; प्रत्येक द्विघाती फलनाचा मूल्यसंच हाच असेल असे नाही.

Source: A20:m81374#fs-id1167824617137

पुढील फलनही रेषीय नाही, म्हणून त्याचा आलेख सरळ रेषा नाही. पुन्हा बिंदू मांडू; x साठी काही धन, काही ऋण मूल्ये आणि 0 निवडू.

Source: A20:m81374#fs-id1167829738598

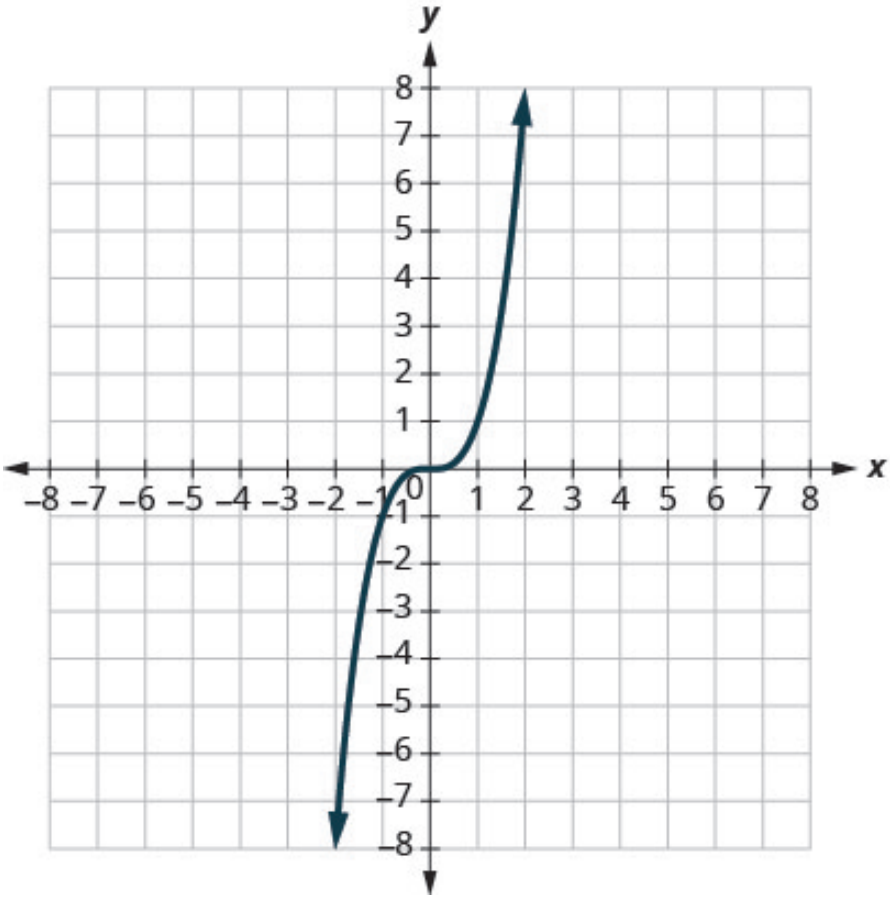
## सोडवलेले उदाहरण 4 · घन फलन

आलेख काढा: $f(x) = x^3$.

सोडवणूक पाहा

### स्रोतातील सोडवणूक

x ची काही मूल्ये निवडू. ती सूत्रात ठेवून तक्ता तयार करू.




| $x$ | $f(x) = x^3$ | $(x, f(x))$ |
|---|---|---|
| –2 | –8 | (–2, –8) |
| –1 | –1 | (–1, –1) |
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 1 | (1, 1) |
| 2 | 8 | (2, 8) |

आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा असलेला $x^3$ चा वक्र आणि पाच जोड्यांचा तक्ता. वक्र (−2, −8), (−1, −1), (0, 0), (1, 1), (2, 8) यांतून जातो; तक्त्यात त्याच जोड्या आहेत.

स्रोत-वर्णनातील −4 ते 4 ऐवजी या आकृतीच्या दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा आहेत. तक्त्याची प्रत:

### स्रोत-आकृतीतील $f(x) = x^3$ चा तक्ता

| **x** | **$f(x) = x^3$** | **(x, f(x))** |
|---|---|---|
| −2 | −8 | (−2, −8) |
| −1 | −1 | (−1, −1) |
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 1 | (1, 1) |
| 2 | 8 | (2, 8) |

## प्रश्नाकडे परत

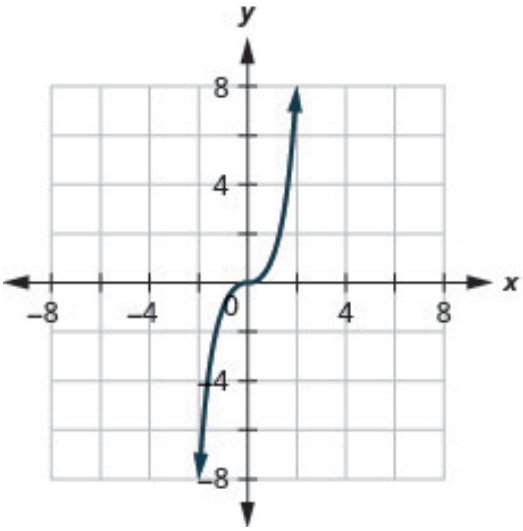
Source: A20:m81374#fs-id1167832966170

## स्वतः सोडवा 7

आलेख काढा: $f(x) = x^3$.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. $x^3$ चा वक्र (−2, −8), (−1, −1), (0, 0), (1, 1), (2, 8) यांतून जातो; खालून डावीकडून वर उजवीकडे चढतो.

स्रोत-वर्णनातील −6 ते 6 ऐवजी प्रत्यक्ष खुणा −8 ते 8 आहेत.

प्रश्नाकडे परत

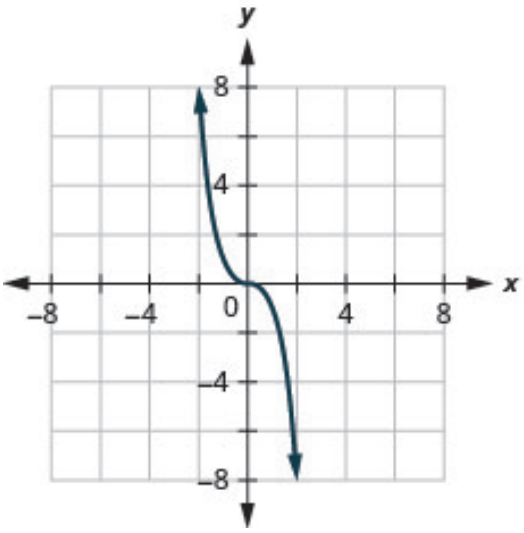
Source: A20:m81374#fs-id1167836485775

## स्वतः सोडवा 8

आलेख काढा: $f(x) = -x^3$.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. $-x^3$ चा वक्र (−2, 8), (−1, 1), (0, 0), (1, −1), (2, −8) यांतून जातो; वर डावीकडून खाली उजवीकडे उतरतो.

स्रोत-वर्णनातील −6 ते 6 ऐवजी प्रत्यक्ष खुणा −8 ते 8 आहेत.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167832982045

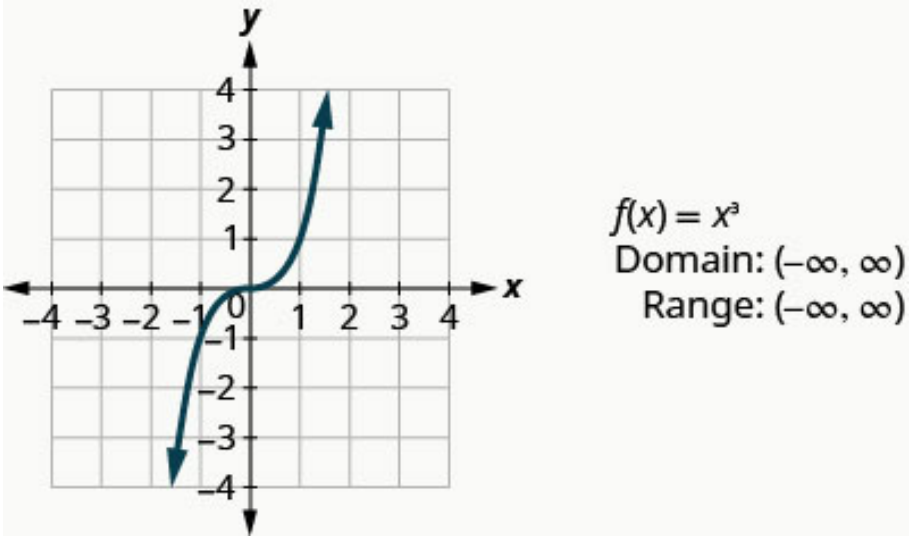
घन फलनाच्या उदाहरणातील निष्कर्षांवरून त्याची वैशिष्ट्ये एकत्र मांडू. x साठी कोणतीही वास्तव संख्या वापरता येते; म्हणून प्रांत सर्व वास्तव संख्यांचा संच आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836598078

मूल्यसंचही सर्व वास्तव संख्यांचा संच आहे. शून्येतर संख्येचा घन त्या संख्येनुसार धन किंवा ऋण असू शकतो. म्हणून या घन फलनाचा मूल्यसंच सर्व वास्तव संख्यांचा संच आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836787693

### घन फलन · Cube Function




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −4 ते 4 खुणा असलेल्या छोट्या खिडकीत $x^3$ चा वक्र. दिसणाऱ्या भागात (−1, −1), (0, 0), (1, 1) आहेत. (−2, −8) आणि (2, 8) हे फलनाचे बिंदू या खिडकीबाहेर आहेत. बाजूला $f(x) = x^3$; प्रांत व मूल्यसंच (−∞, ∞).

आकृतीतील माहिती: $f(x) = x^3$; प्रांत: (−∞, ∞); मूल्यसंच: (−∞, ∞).

जोडलेले कारण: फक्त धन आणि ऋण मूल्ये मिळतात एवढ्यावरून सर्व वास्तव मूल्ये मिळतात हे सिद्ध होत नाही. कोणत्याही वास्तव y चे वास्तव घनमूळ x घेतल्यास $x^3 = y$ मिळते; 0 साठी x = 0 चालते. म्हणून 0 सहित सर्व वास्तव मूल्ये मिळतात.

Source: A20:m81374#fs-id1167829687218

पुढील फलनात दिलेल्या संख्येचा वर्ग किंवा घन न करता तिचे वर्गमूळ घेतो.

Source: A20:m81374#fs-id1167833023152

$f(x) = \sqrt{x}$ या फलनाचा आलेख काढून त्याची वैशिष्ट्ये एकत्र मांडू. वास्तव संख्यांमध्ये ऋणेतर संख्येचेच वर्गमूळ घेता येते; म्हणून त्याचा प्रांत ऋणेतर वास्तव संख्यांचा संच आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836512756

## सोडवलेले उदाहरण 5 · वर्गमूळ फलन

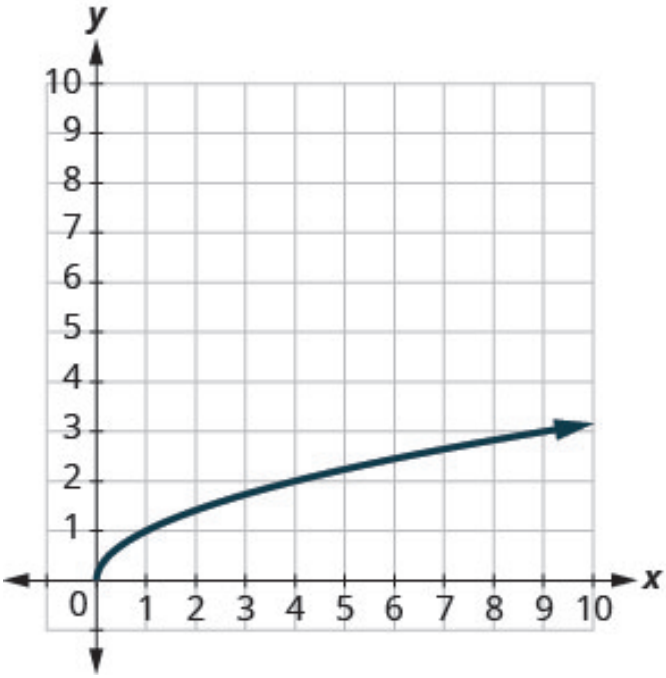
जोडलेली सूचना: पुढील फलनाचा आलेख काढा. मूळ प्रश्नात केवळ सूत्र आहे.

$f(x) = \sqrt{x}$

सोडवणूक पाहा

### स्रोतातील सोडवणूक

x ची काही मूल्ये निवडू. वर्गमूळ घ्यायचे असल्यामुळे गणना सोपी होण्यासाठी पूर्ण वर्ग निवडू. ती मूल्ये सूत्रात ठेवून तक्ता तयार करू.




| $x$ | $f(x) = \sqrt{x}$ | $(x, f(x))$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 1 | (1, 1) |
| 4 | 2 | (4, 2) |
| 9 | 3 | (9, 3) |

आकृतीचे वर्णन: (0, 0) पासून उजवीकडे वर जाणारा वर्गमूळाचा वक्र; दोन्ही अक्षांवर 0 ते 10 खुणा. तो (1, 1), (4, 2), (9, 3) यांतून जातो. बाजूला (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3) या चार जोड्यांचा तक्ता.

स्रोत-वर्णनातील 0 ते 8 ऐवजी या आकृतीत खुणा 0 ते 10 आहेत. तक्त्याची प्रत:

स्रोत-आकृतीतील $f(x) = \sqrt{x}$ चा तक्ता

| **x** | **f(x) = √x** | **(x, f(x))** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 1 | (1, 1) |
| 4 | 2 | (4, 2) |
| 9 | 3 | (9, 3) |

पूर्ण वर्ग ही सोयीची निवड आहे, प्रांतावरील बंधन नाही. 2, 1/2 अशा इतर ऋणेतर वास्तव संख्याही प्रांतात आहेत. $\sqrt{x}$ हे चिन्ह एकच ऋणेतर वर्गमूळ देते; येथे $\pm\sqrt{x}$ लिहायचे नाही.

प्रश्नाकडे परत

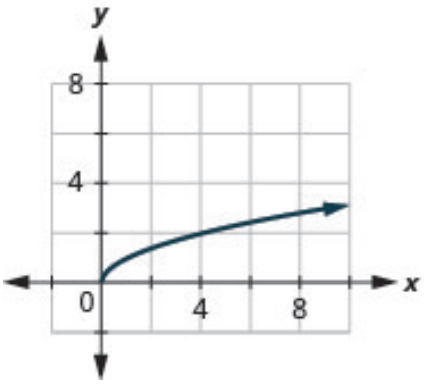
Source: A20:m81374#fs-id1167829930477

## स्वतः सोडवा 9

आलेख काढा: $f(x) = \sqrt{x}$.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: (0, 0) पासून उजवीकडे वर जाणारा √x चा वक्र (1, 1), (4, 2), (9, 3) यांतून जातो. चित्रातील जाळी x साठी −2 ते 10 आणि y साठी −2 ते 8 पर्यंत आहे; आलेख मात्र x आणि y ऋणेतर असलेल्या भागातच आहे.

जाळीची खिडकी आणि फलनाचा प्रांत वेगळे आहेत. स्रोत-वर्णनातील दोन्ही अक्षांसाठी 0 ते 10 हे वर्णन प्रत्यक्ष जाळीशी जुळत नाही.

प्रश्नाकडे परत

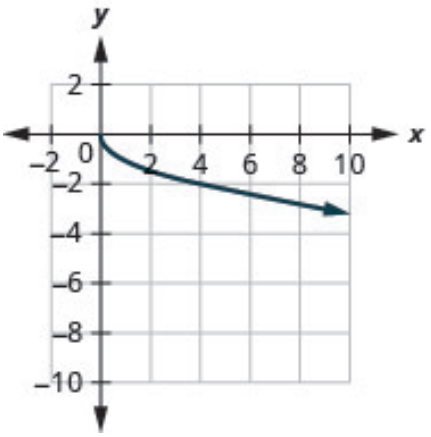
Source: A20:m81374#fs-id1167836341594

## स्वतः सोडवा 10

आलेख काढा: $f(x) = -\sqrt{x}$.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तर



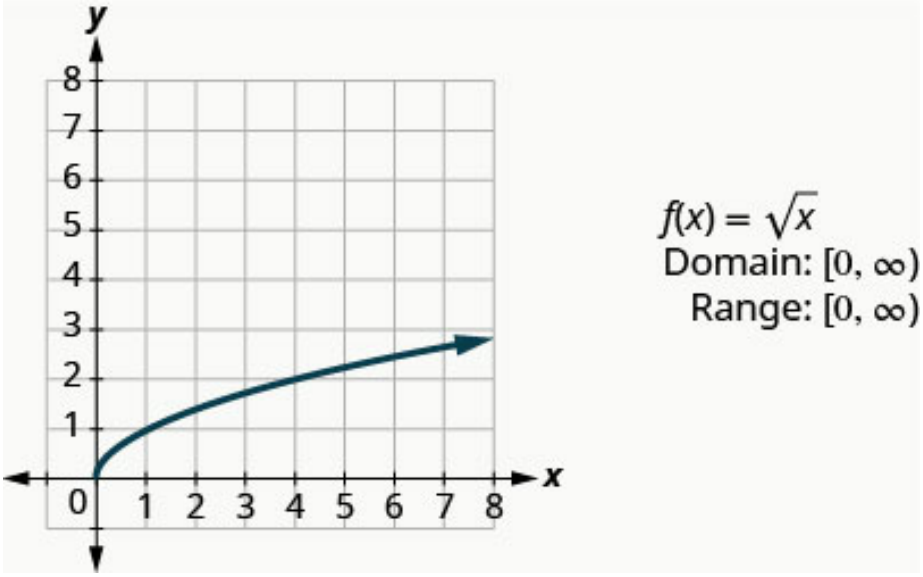

आकृतीचे वर्णन: (0, 0) पासून उजवीकडे खाली जाणारा −√x चा वक्र (1, −1), (4, −2), (9, −3) यांतून जातो. जाळी x साठी −2 ते 10 आणि y साठी −10 ते 2 आहे. वक्र x ऋणेतर आणि y शून्य किंवा ऋण असलेल्या भागात आहे.

मूळ आलेख; वर्णनात जाळीची पूर्ण खिडकी दिली आहे. $-\sqrt{x} = -(\sqrt{x})$ आहे; $\sqrt{(-x)}$ नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836650089

## वर्गमूळ फलन · Square Root Function




आकृतीचे वर्णन: (0, 0) पासून उजवीकडे वर जाणारा √x चा वक्र; दोन्ही अक्षांवर 0 ते 8 खुणा. दिसणाऱ्या वक्रावर (1, 1), (4, 2) आहेत. बाजूला f(x) = √x; प्रांत [0, ∞); मूल्यसंच [0, ∞) अशी नोंद.

आकृतीतील माहिती: f(x) = √x; प्रांत: [0, ∞); मूल्यसंच: [0, ∞).

Source: A20:m81374#fs-id1167836664843

शेवटचे मूलभूत फलन म्हणजे केवल मूल्य फलन, f(x) = |x|. संख्येचे केवल मूल्य म्हणजे तिचे शून्यापासूनचे अंतर, हे आठवा. अंतर ऋण संख्येने मोजत नाही; म्हणून या फलनाच्या मूल्यसंचात ऋण संख्या येत नाहीत.

Source: A20:m81374#fs-id1167836299963

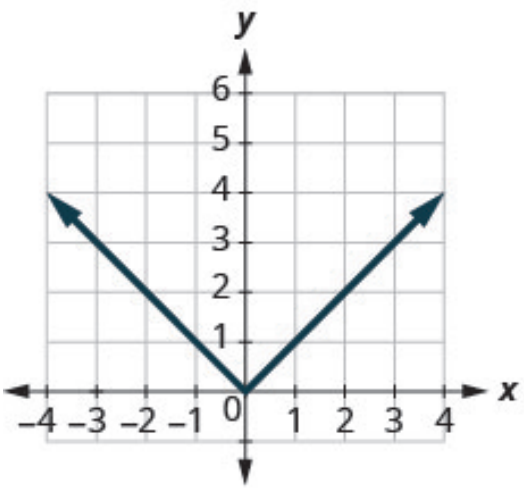
## सोडवलेले उदाहरण 6 · केवल मूल्य फलन

आलेख काढा: f(x) = |x|.

सोडवणूक पाहा

### स्रोतातील सोडवणूक

x ची काही मूल्ये निवडू. ती सूत्रात ठेवून तक्ता तयार करू.




| $x$ | $f(x) = \lvert x \rvert$ | $(x, f(x))$ |
|---|---|---|
| –3 | 3 | (–3, 3) |
| –2 | 2 | (–2, 2) |
| –1 | 1 | (–1, 1) |
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 1 | (1, 1) |
| 2 | 2 | (2, 2) |
| 3 | 3 | (3, 3) |

आकृतीचे वर्णन: वर उघडणारा V आकाराचा |x| चा आलेख; दोन सरळ किरण (0, 0) येथे भेटतात. x-अक्षावर −4 ते 4 आणि y-अक्षावर 0 ते 6 छापील खुणा; जाळी y = −1 पर्यंत खाली जाते. सोबत तक्त्यात (−3, 3), (−2, 2), (−1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) या सात जोड्या.

मूळ आलेख आणि तक्त्याची वाचनसुलभ प्रत:

स्रोत-आकृतीतील f(x) = |x| चा तक्ता

| **x** | **f(x) = \|x\|** | **(x, f(x))** |
|---|---|---|
| −3 | 3 | (−3, 3) |
| −2 | 2 | (−2, 2) |
| −1 | 1 | (−1, 1) |
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 1 | (1, 1) |
| 2 | 2 | (2, 2) |
| 3 | 3 | (3, 3) |

प्रश्नाकडे परत

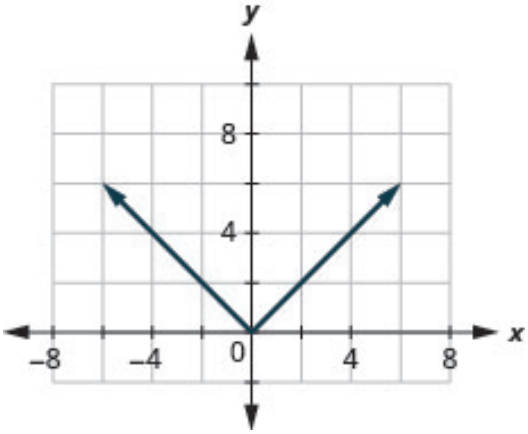
Source: A20:m81374#fs-id1167829879306

## स्वतः सोडवा 11

आलेख काढा: f(x) = |x|.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: आदिबिंदूवर भेटणारे दोन सरळ किरण V आकार बनवतात. आलेख (−3, 3), (−2, 2), (−1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) यांतून जातो. जाळी x साठी −8 ते 8 आणि y साठी −2 ते 10 पर्यंत आहे.

स्रोत-वर्णनातील x साठी −6 ते 6 ऐवजी प्रत्यक्ष जाळी −8 ते 8 आहे.

प्रश्नाकडे परत

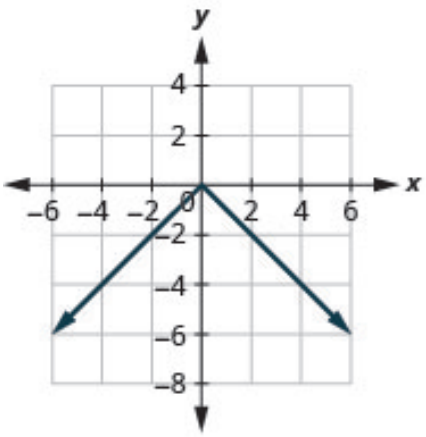
Source: A20:m81374#fs-id1167833350872

## स्वतः सोडवा 12

आलेख काढा: f(x) = −|x|.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर



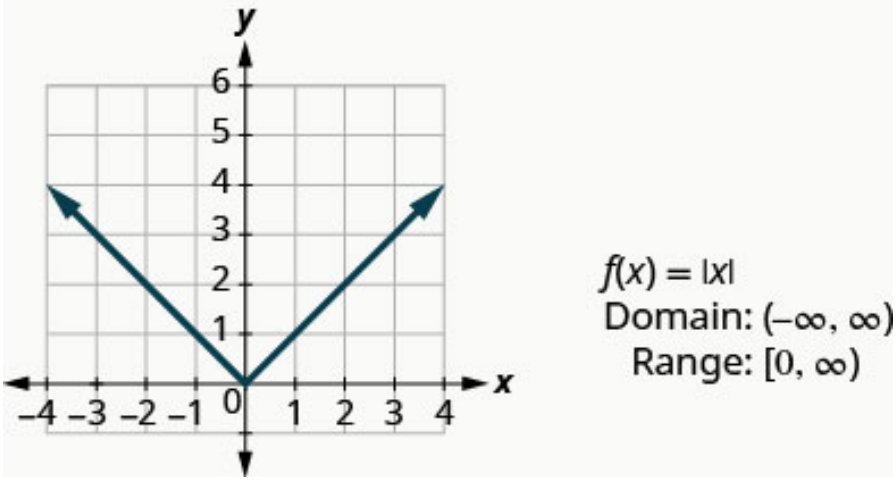

आकृतीचे वर्णन: खाली उघडणारा उलटा V आकार. दोन सरळ किरण (0, 0) येथे भेटतात आणि (−3, −3), (−2, −2), (−1, −1), (1, −1), (2, −2), (3, −3) यांतून जातात. x-अक्षावर −6 ते 6 आणि y-अक्षावर −8 ते 4 खुणा.

मूळ −|x| चा आलेख. केवल मूल्य घेतल्यानंतर बाहेरचे ऋणचिन्ह लागू होते; f(x) कधीही धन होत नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836625638

## केवल मूल्य फलन · Absolute Value Function




आकृतीचे वर्णन: वर उघडणारा V आकाराचा |x| चा आलेख. दोन सरळ किरण आदिबिंदू (0, 0) येथे भेटतात; तेथे उतार बदलतो. x-अक्षावर −4 ते 4, y-अक्षावर 0 ते 6 छापील खुणा; जाळी खाली y = −1 पर्यंत जाते. बाजूला f(x) = |x|; प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच [0, ∞) अशी नोंद.

आकृतीतील माहिती: f(x) = |x|; प्रांत: (−∞, ∞); मूल्यसंच: [0, ∞). स्रोताच्या वर्णनात, उतार बदलतो त्या (0, 0) बिंदूला शिरोबिंदू (vertex) म्हटले आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836389848

# फलनाच्या आलेखातून माहिती वाचणे

विज्ञान आणि व्यवसाय या क्षेत्रांत अनेकदा माहिती गोळा करून तिचा आलेख काढला जातो. आलेखाचे विश्लेषण करून त्यातून माहिती मिळवली जाते आणि त्या माहितीच्या आधारे अनेकदा पुढील अंदाज बांधले जातात.

Source: A20:m81374#fs-id1167833022366

सुरुवातीला आपण फलनाच्या आलेखावरून त्याचा प्रांत आणि मूल्यसंच वाचू.

Source: A20:m81374#fs-id1167836620724

लक्षात ठेवा: फलनातील क्रमित जोड्यांमधील सर्व x-मूल्यांचा संच म्हणजे **प्रांत.** प्रांत शोधण्यासाठी आलेखावर बिंदू असलेली सर्व x-मूल्ये शोधतो. x-अक्षावरील एखाद्या मूल्यापासून उभ्या दिशेने वर किंवा खाली जा. फलनाचा आलेख भेटला, तर ते x-मूल्य प्रांतात आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836514287

लक्षात ठेवा: फलनातील क्रमित जोड्यांमधील सर्व y-मूल्यांचा संच म्हणजे **मूल्यसंच.** मूल्यसंच शोधण्यासाठी आलेखावर बिंदू असलेली सर्व y-मूल्ये शोधतो. y-अक्षावरील एखाद्या मूल्यापासून आडव्या दिशेने डावीकडे किंवा उजवीकडे जा. फलनाचा आलेख भेटला, तर ते y-मूल्य मूल्यसंचात आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167825884739

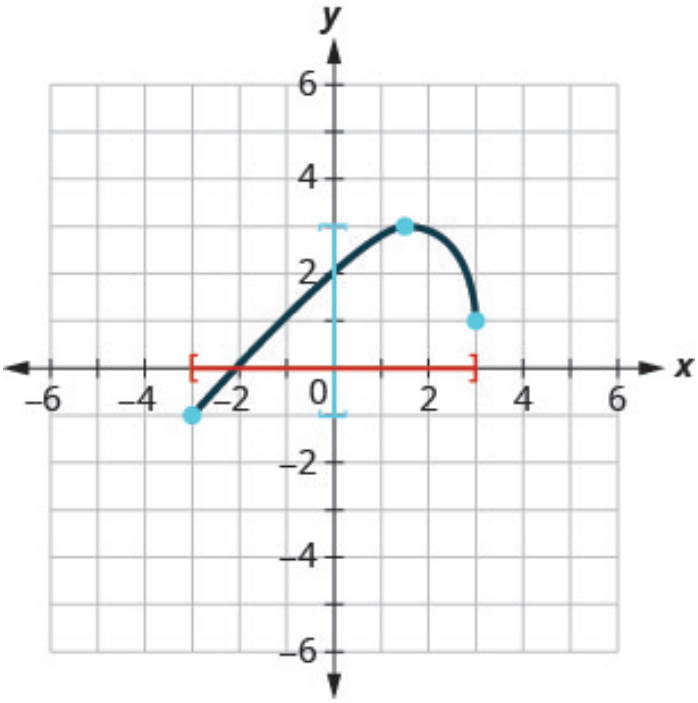
## जोडलेली आठवण: अंतराल आणि सहनिर्देशक

[a, b] या अंतरालात a आणि b या दोन्ही टोकांसह त्यांच्या मधील सर्व वास्तविक संख्या येतात. चौकोनी कंस टोक समाविष्ट असल्याचे दर्शवतात. (−∞, ∞) म्हणजे सर्व वास्तविक संख्या; ∞ ही समाविष्ट करता येणारी वास्तविक संख्या नसल्याने तिच्याजवळ गोल कंस वापरतो. येथे वापरलेले “अंतराल-संकेतलेखन” हे interval notation साठी निवडलेले मराठी रूप आहे.

क्रमित जोडीतील पहिला सहनिर्देशक x आणि दुसरा y असतो. अक्षांवरील संपूर्ण खुणा म्हणजे फलनाचा प्रांत किंवा मूल्यसंच असे नव्हे; प्रत्यक्ष आलेखावर येणारी मूल्ये पाहावी लागतात. पुढील आकृत्यांतील लाल आडवी खूण प्रांत दाखवते आणि निळसर-हिरवी उभी खूण मूल्यसंच दाखवते.

## सोडवलेले उदाहरण 1: प्रांत आणि मूल्यसंच

फलनाचा आलेख वापरून त्याचा प्रांत आणि मूल्यसंच शोधा. दोन्ही अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −6 ते 6 खुणा. वक्राचा डावा समाविष्ट टोकबिंदू (−3, −1), सर्वोच्च बिंदू (1.5, 3) आणि उजवा समाविष्ट टोकबिंदू (3, 1). वक्र (0, 2) मधूनही जातो. लाल आडवी खूण [−3, 3] आणि निळसर-हिरवी उभी खूण [−1, 3] दाखवते. तीन ठळक बिंदू भरलेले आहेत.

मूळ आकृती 021: प्रांत आडव्या दिशेने आणि मूल्यसंच उभ्या दिशेने वाचा.

वर्णन-दुरुस्ती: इंग्रजी व इंडोनेशियन स्रोतांच्या पर्यायी वर्णनांत दोन्ही अक्षांवर −4 ते 4 म्हटले आहे. मूळ चित्रातील खुणा प्रत्यक्षात −6 ते 6 आहेत. वरील वर्णन चित्रानुसार दुरुस्त केले आहे; आलेख किंवा त्याची उत्तरे बदललेली नाहीत.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील संपूर्ण उत्तर

प्रांत शोधण्यासाठी आलेखावरील बिंदूंशी संगत असलेली सर्व x-मूल्ये शोधतो. आलेखावर प्रांत लाल रंगात ठळक केला आहे. प्रांत [−3, 3] आहे.

मूल्यसंच शोधण्यासाठी आलेखावरील बिंदूंशी संगत असलेली सर्व y-मूल्ये शोधतो. आलेखावर मूल्यसंच निळ्या रंगात ठळक केला आहे. मूल्यसंच [−1, 3] आहे.

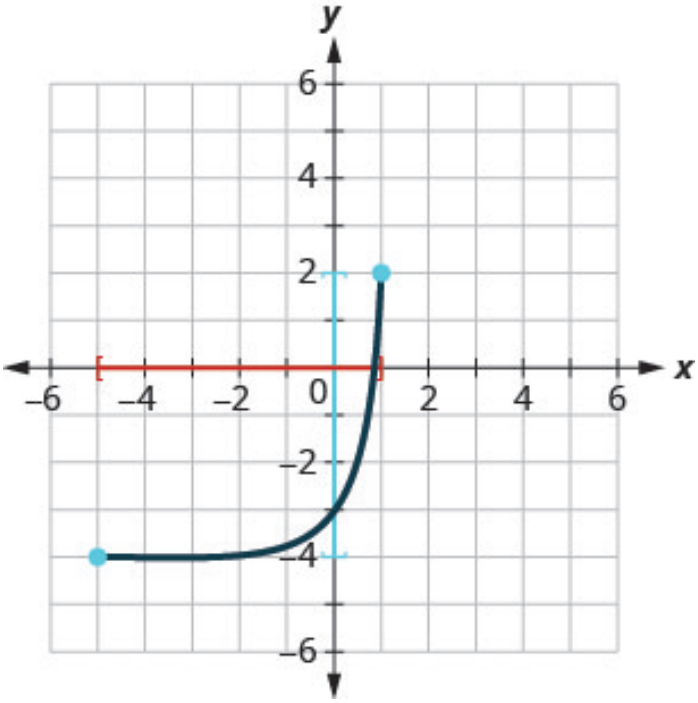
जोडलेले स्पष्टीकरण: भरलेले टोकबिंदू आलेखात समाविष्ट आहेत. x ची सर्वांत लहान आणि मोठी मूल्ये −3 व 3 आहेत. y चे सर्वांत लहान मूल्य −1 आणि सर्वांत मोठे मूल्य 3 आहे; मोठे y-मूल्य उजव्या टोकावरच असेल असे नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829756085

## स्वतः सोडवा 1

फलनाचा आलेख वापरून त्याचा प्रांत आणि मूल्यसंच शोधा. दोन्ही अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −6 ते 6 खुणा. वक्र (−5, −4) या भरलेल्या टोकबिंदूपासून (0, −3) मधून (1, 2) या भरलेल्या टोकबिंदूपर्यंत चढतो. लाल आडवी खूण [−5, 1] आणि निळसर-हिरवी उभी खूण [−4, 2] दाखवते.

मूळ आकृती 022: दोन्ही टोकबिंदू समाविष्ट आहेत.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

प्रांत [−5, 1] आहे. मूल्यसंच [−4, 2] आहे.

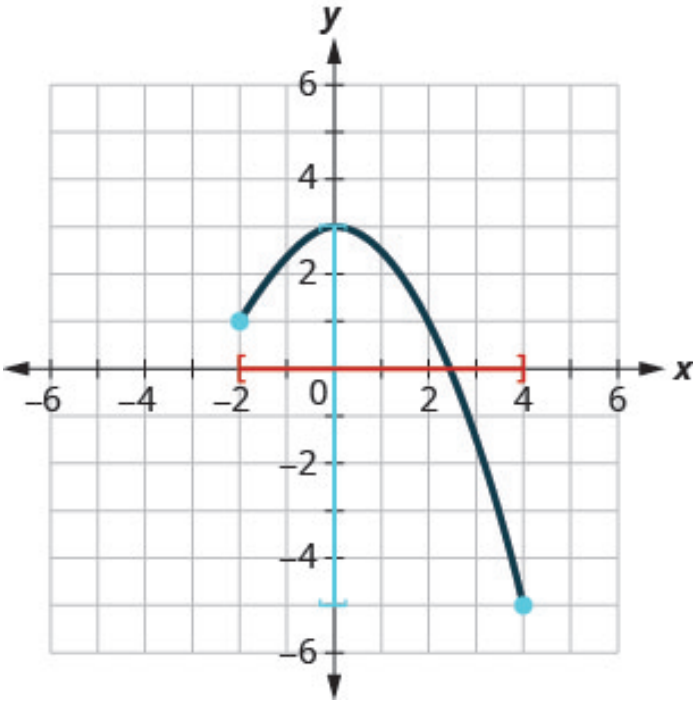
जोडलेले कारण: वक्रावरील x-मूल्ये −5 पासून 1 पर्यंत आणि y-मूल्ये −4 पासून 2 पर्यंत आहेत. दोन्ही टोकांची मूल्ये आलेखात येतात, म्हणून चारही टोकांजवळ चौकोनी कंस आहेत.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836529485

## स्वतः सोडवा 2

फलनाचा आलेख वापरून त्याचा प्रांत आणि मूल्यसंच शोधा. दोन्ही अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −6 ते 6 खुणा. वक्र (−2, 1) या भरलेल्या टोकबिंदूपासून (0, 3) या सर्वोच्च बिंदूपर्यंत चढतो, मग (4, −5) या भरलेल्या टोकबिंदूपर्यंत उतरतो. लाल आडवी खूण [−2, 4] आणि निळसर-हिरवी उभी खूण [−5, 3] दाखवते.

मूळ आकृती 023: सर्वोच्च बिंदू आणि दोन्ही टोकबिंदू तपासा.

वर्णन-दुरुस्ती: दोन्ही स्रोत-वर्णनांत x-अक्ष −4 ते 5 आणि y-अक्ष −6 ते 4 असा दिला आहे; प्रत्यक्ष चित्रात दोन्ही अक्षांवर −6 ते 6 खुणा आहेत. वरील पर्यायी वर्णन मूळ चित्राशी जुळते.

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

प्रांत [−2, 4] आहे. मूल्यसंच [−5, 3] आहे.

जोडलेले कारण: डावे आणि उजवे x-मूल्य अनुक्रमे −2 व 4 आहेत. सर्वांत खालचे y-मूल्य उजव्या टोकावर −5 आहे, तर सर्वांत वरचे मूल्य मधल्या शिखरावर 3 आहे. सर्व टोकांची मूल्ये समाविष्ट आहेत.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833060073

आता आपण पुढील गणिताच्या वर्गांत भेटू शकणाऱ्या आलेखातून माहिती वाचणार आहोत.

Source: A20:m81374#fs-id1167836515910

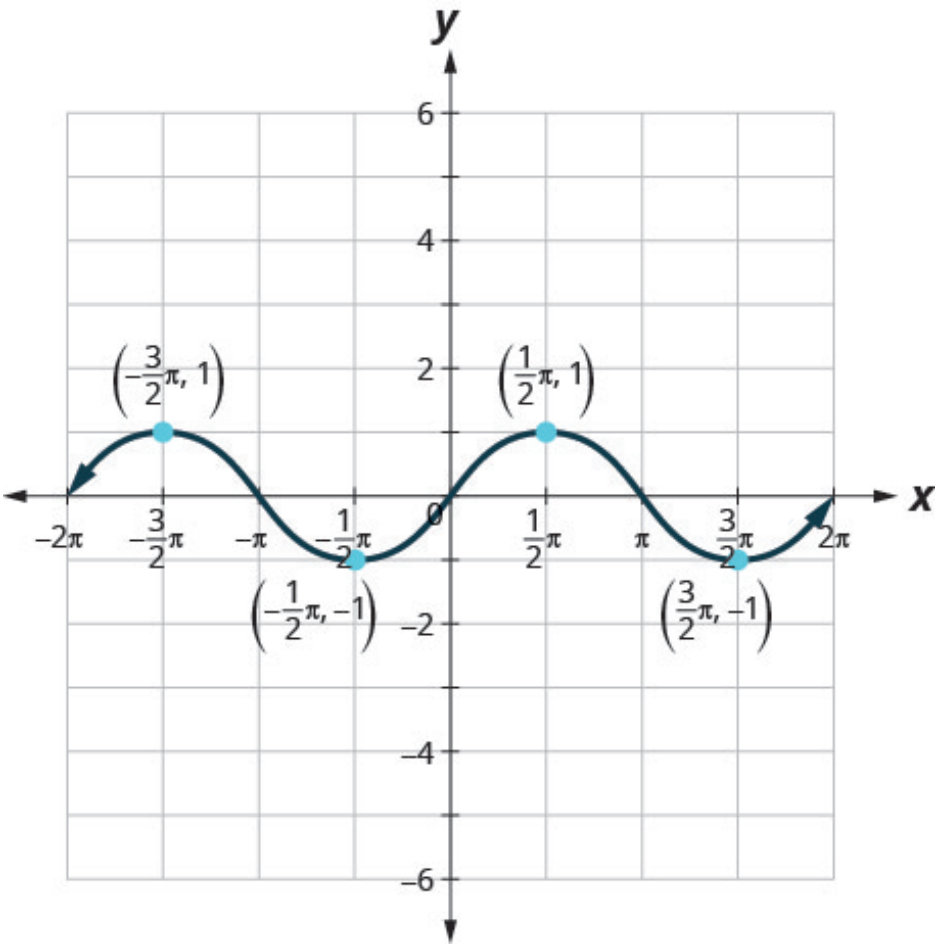
## जोडलेली वाचन-सूचना

पुढील आलेखांच्या x-अक्षावरील खुणा π च्या पटीत आहेत. $(1/2)\pi = \pi/2$ आणि $(3/2)\pi = 3\pi/2$. फलनाचे मूल्य शोधताना दिलेल्या x पासून आलेखावरील बिंदूपर्यंत उभ्या दिशेने जाऊन त्याचे y-मूल्य वाचा. x-अक्षाला छेदणाऱ्या बिंदूवर y = 0; y-अक्षाला छेदणाऱ्या बिंदूवर x = 0 असते. केवळ एक सहनिर्देशक नव्हे, तर संपूर्ण बिंदू मागितला आहे का हे पाहा.

आकृती 024 आणि 026 यांबद्दल स्रोत सांगतो की तोच नमुना डावीकडे व उजवीकडे अमर्याद चालू राहतो. आकृती 025 बाबत मात्र आलेख दोन्हीकडे अमर्याद वाढवलेला आहे एवढेच वर्णन आहे; तोच नमुना पुनरावृत्त होतो असे स्पष्टपणे म्हटलेले नाही. बाण विस्तार दाखवतात; दिसणारा मर्यादित भाग म्हणजे संपूर्ण प्रांत नव्हे. 025 च्या पुढील नोंदीत तोच लहरी नमुना पुढेही पुनरावृत्त होतो ही स्वतंत्र, जोडलेली गृहीतधारणा स्पष्ट केली आहे. केवळ काही बिंदू किंवा बाण पाहून पुनरावृत्ती सिद्ध केल्याचा दावा नाही.

## सोडवलेले उदाहरण 2: लहरी आलेखातील माहिती

फलनाचा आलेख वापरून मागितलेली मूल्ये शोधा.




आकृतीचे वर्णन: x-अक्षावर −2π ते 2π आणि y-अक्षावर −6 ते 6 खुणा. दोन्ही दिशांना बाण असलेला लहरी आलेख (−2π, 0), (−3π/2, 1), (−π, 0), (−π/2, −1), (0, 0), (π/2, 1), (π, 0), (3π/2, −1), (2π, 0) मधून जातो. (−3π/2, 1) व (π/2, 1) ही शिखरे; (−π/2, −1) व (3π/2, −1) हे तळबिंदू. या चार बिंदूंची लेबले चित्रात आहेत. स्रोताच्या वर्णनानुसार तोच नमुना दोन्हीकडे अमर्याद चालू राहतो.

मूळ आकृती 024: उंची 1 आणि −1 यांदरम्यान बदलते.

वर्णन-दुरुस्ती: EN आणि ID पर्यायी वर्णनांत y-अक्ष −4 ते 4 म्हटला आहे; चित्रातील खुणा −6 ते 6 आहेत. y-मूल्यांची ही अक्षमर्यादा आणि फलनाचा मूल्यसंच वेगळे आहेत.

(a) $f(0)$ शोधा.
(b) $f(3\pi/2)$ शोधा.
(c) $f(-\pi/2)$ शोधा.
(d) $f(x) = 0$ असताना $x$ ची मूल्ये शोधा.
(e) $x$-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.
(f) $y$-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.
(g) प्रांत शोधून अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.
(h) मूल्यसंच शोधून अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील संपूर्ण उत्तर

(a) $x = 0$ असताना फलनाचा आलेख $y$-अक्षाला 0 येथे छेदतो. म्हणून $f(0) = 0$.
(b) $x = 3\pi/2$ असताना फलनाचे $y$-मूल्य $-1$ आहे. म्हणून $f(3\pi/2) = -1$.
(c) $x = -\pi/2$ असताना फलनाचे $y$-मूल्य $-1$ आहे. म्हणून $f(-\pi/2) = -1$.
(d) $(-2\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$ या बिंदूंवर फलनाचे मूल्य 0 आहे. $f(x) = 0$ असताना स्रोतात दिलेली $x$-मूल्ये $-2\pi$, $-\pi$, 0, $\pi$, $2\pi$ आहेत.
(e) $y = 0$ असताना आलेख $x$-अक्षाला छेदतो. म्हणजे $f(x) = 0$ असताना हे छेदबिंदू मिळतात. स्रोतात दिलेले $x$-अक्षावरील छेदबिंदू $(-2\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$ आहेत.
(f) $x = 0$ असताना आलेख $y$-अक्षाला छेदतो. त्या बिंदूचे $y$-मूल्य $f(0)$ आहे. $y$-अक्षावरील छेदबिंदू $(0, 0)$ आहे.
(g) या फलनाला प्रत्येक वास्तविक $x$-मूल्यासाठी मूल्य आहे. म्हणून अंतराल-संकेतलेखनात प्रांत $(-\infty, \infty)$ आहे.
(h) या फलनाची मूल्ये, म्हणजे $y$-मूल्ये, $-1$ ते 1 पर्यंत आहेत. म्हणून अंतराल-संकेतलेखनात मूल्यसंच $[-1, 1]$ आहे.

## स्रोताच्या उत्तराची व्याप्ती स्पष्ट करणारी नोंद

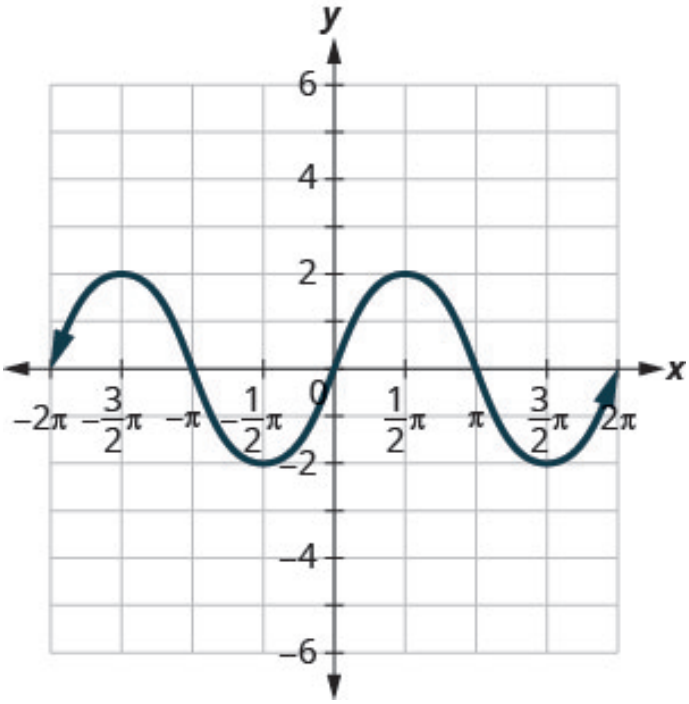
मूळ (d) आणि (e) प्रश्नांत मर्यादित अंतराल दिलेला नाही; तरी मूळ उत्तरांत फक्त चित्रात दिसणाऱ्या $[-2\pi, 2\pi]$ भागातील पाच मूल्ये व पाच बिंदू दिले आहेत. वरील याद्या त्या दिसणाऱ्या भागापुरत्या बरोबर आहेत; त्या अमर्याद चालू राहणाऱ्या आलेखाची संपूर्ण यादी नाहीत. स्रोताने सांगितलेला पुनरावृत्तीचा नमुना पुढे चालू ठेवल्यास सर्व शून्य-मूल्यांची $x$-मूल्ये $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ आणि सर्व $x$-अक्षावरील छेदबिंदू $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ असे लिहिता येतात. येथे $\mathbb{Z}$ म्हणजे सर्व पूर्णांक. ही विस्ताराची नोंद जोडलेली आहे; मूळ मर्यादित उत्तर लपवून बदललेले नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836731462

## स्वतः सोडवा 3

फलनाचा आलेख वापरून मागितलेली मूल्ये शोधा.




आकृतीचे वर्णन: x-अक्षावर −2π ते 2π आणि y-अक्षावर −6 ते 6 खुणा. दोन्ही दिशांना बाण असलेला लहरी आलेख (−2π, 0), (−3π/2, 2), (−π, 0), (−π/2, −2), (0, 0), (π/2, 2), (π, 0), (3π/2, −2), (2π, 0) मधून जातो. शिखरांची उंची 2, तळबिंदूंची उंची −2. स्रोताचे वर्णन आलेखाचा डावीकडे व उजवीकडे अमर्याद विस्तार सांगते; पुनरावृत्तीची स्पष्ट अट त्यात नाही.

मूळ आकृती 025: x-अक्षावरील खुणा आणि शिखरांची उंची नीट वाचा.

(a) f(0) शोधा.

(b) f(π/2) शोधा.

(c) f(−3π/2) शोधा.

(d) [−2π, 2π] या अंतरालात f(x) = 0 असताना x ची मूल्ये शोधा.

(e) x-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.

(f) y-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.

(g) प्रांत शोधून अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

(h) मूल्यसंच शोधून अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तरे — (b), (c) चे संकेतलेखन दुरुस्त करून

(a) f(0) = 0.

(b) f(π/2) = 2.

(c) f(−3π/2) = 2.

(d) x = −2π, −π, 0, π, 2π असताना f(x) = 0.

(e) स्रोतात दिलेले छेदबिंदू: (−2π, 0), (−π, 0), (0, 0), (π, 0), (2π, 0).

(f) (0, 0).

(g) प्रांत: (−∞, ∞).

(h) मूल्यसंच: [−2, 2].

स्रोत-दुरुस्ती: इंग्रजी आणि इंडोनेशियन उत्तरांत (b), (c) मध्ये अनुक्रमे “f = (π/2) = 2” आणि “f = (−3π/2) = 2” असे चुकीचे संकेतलेखन आहे. येथे f च्या पुढचे पहिले समानचिन्ह काढून कंसातील संख्या फलनाचा आदान (input) म्हणून लिहिली आहे. आलेखावरून दोन्ही फलनमूल्ये 2 मिळतात; संख्यात्मक उत्तरे बदललेली नाहीत.

### जोडलेली कारणे आणि व्याप्ती

(a) आलेख आदिबिंदूतून जातो. (b), (c) दिलेल्या x-मूल्यांवर तो 2 उंचीच्या शिखरांवर आहे. (d) मागितलेल्या बंद अंतरालातील पाच x-अक्ष छेद वाचा; दोन्ही टोकांवरील शून्येही समाविष्ट आहेत. (f) x = 0 वरील बिंदू आदिबिंदू आहे. (g) स्रोत आलेखाचा दोन्हीकडील अमर्याद विस्तार सांगतो आणि उत्तरात सर्व वास्तव संख्यांचा प्रांत देतो. (h) स्रोतातील मूल्यसंचाचे उत्तर वर जसेच्या तसे ठेवले आहे; चित्रात y ची मूल्ये −2 पासून 2 पर्यंत येतात. दिसणारा तोच लहरी नमुना पुढेही पुनरावृत्त होतो असे गृहीत धरल्यास हा मूल्यसंच संपूर्ण विस्तारासाठी मिळतो. ही पुनरावृत्तीची गृहीतधारणा येथे जोडलेली आहे, स्रोताने स्पष्टपणे दिलेली अट नाही.

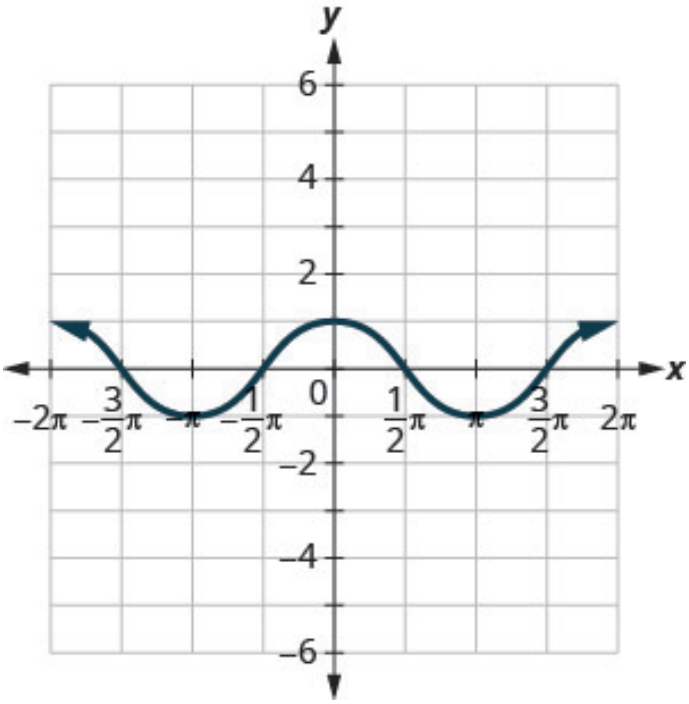
(e) मधील मूळ पाच बिंदू चित्रात दिसणाऱ्या भागातील आहेत. प्रश्नात (e) साठी स्वतंत्र मर्यादा दिलेली नाही. तोच नमुना पुढेही पुनरावृत्त होतो असे गृहीत धरल्यास संपूर्ण विस्तारातील x-अक्षावरील छेदबिंदू (nπ, 0), n ∈ ℤ असे मिळतात. हे सशर्त स्पष्टीकरण आहे; केवळ बाणांवरून ही अमर्याद यादी ठरवलेली नाही. (d) चा मात्र स्पष्टपणे दिलेला मर्यादित अंतराल कायम ठेवला आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836507624

## स्वतः सोडवा 4

फलनाचा आलेख वापरून मागितलेली मूल्ये शोधा.




आकृतीचे वर्णन: x-अक्षावर −2π ते 2π आणि y-अक्षावर −6 ते 6 खुणा. दोन्ही दिशांना बाण असलेला लहरी आलेख (−2π, 1), (−3π/2, 0), (−π, −1), (−π/2, 0), (0, 1), (π/2, 0), (π, −1), (3π/2, 0), (2π, 1) मधून जातो. सर्वांत मोठे y-मूल्य 1 आणि सर्वांत लहान −1. स्रोताच्या वर्णनानुसार तोच नमुना दोन्हीकडे अमर्याद चालू राहतो.

मूळ आकृती 026: y-अक्षावरील बिंदू आदिबिंदू नाही.

(a) f(0) शोधा.

(b) f(π) शोधा.

(c) f(−π) शोधा.

(d) [−2π, 2π] या अंतरालात f(x) = 0 असताना x ची मूल्ये शोधा.

(e) x-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.

(f) y-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.

(g) प्रांत शोधून अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

(h) मूल्यसंच शोधून अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तरे

(a) f(0) = 1.

(b) f(π) = −1.

(c) f(−π) = −1.

(d) x = −3π/2, −π/2, π/2, 3π/2 असताना f(x) = 0.

(e) स्रोतात दिलेले छेदबिंदू: (−3π/2, 0), (−π/2, 0), (π/2, 0), (3π/2, 0).

(f) (0, 1).

(g) प्रांत: (−∞, ∞).

(h) मूल्यसंच: [−1, 1].

### जोडलेली कारणे आणि व्याप्ती

(a) $x = 0$ येथे आलेखाची उंची 1 आहे. (b), (c) $x = \pi$ आणि $x = -\pi$ येथे उंची $-1$ आहे. (d) दिलेल्या अंतरालात आलेख x-अक्षाला चार वेळा छेदतो; $-2\pi$ आणि $2\pi$ या टोकांवर उंची 1 आहे, 0 नाही. (f) म्हणून y-अक्षावरील छेदबिंदू (0, 1) आहे. (g) स्रोताने तोच नमुना दोन्हीकडे अमर्याद चालू राहतो असे सांगितले आहे. (h) प्रत्येक पुनरावृत्तीत सर्व y-मूल्ये $-1$ आणि 1 यांदरम्यान येतात आणि दोन्ही टोकांची मूल्ये गाठली जातात.

(e) मधील मूळ चार बिंदू चित्रात दिसणाऱ्या भागातील आहेत. प्रश्नात (e) साठी स्वतंत्र मर्यादा दिलेली नाही. सांगितलेल्या पुनरावृत्तीच्या संपूर्ण विस्तारात x-अक्षावरील छेदबिंदू $(\pi/2 + n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ आहेत. ही जोडलेली स्पष्टता आहे; (d) मधील मर्यादित उत्तर बदललेले नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829999559

## अधिक अभ्यासासाठी स्रोत-दुवा

फलनांच्या आलेखांबद्दल अधिक मार्गदर्शन आणि सराव मिळवण्यासाठी हा ऑनलाइन स्रोत पाहा.

- प्रांत आणि मूल्यसंच शोधा

हा मूळ बाह्य दुवा जतन केला आहे. तो उघडण्यासाठी इंटरनेट लागते; त्याच्या गंतव्यावरील मजकूर या घटकात अनुवादित किंवा तपासलेला नाही. वरील सर्व प्रश्न, उत्तरे आणि मूळ आकृत्या स्वतंत्र ऑफलाइन वाचकासाठी आहेत.

Source: A20:m81374#fs-id1167832982157

# मुख्य संकल्पना

## उभ्या रेषेची कसोटी

- काटकोनी सहनिर्देशक पद्धतीतील बिंदूंचा संच हा फलनाचा आलेख असतो, जर प्रत्येक उभी रेषा त्या आलेखाला जास्तीत जास्त एका बिंदूत छेदत असेल.
- कोणतीही एक उभी रेषा आलेखाला एकापेक्षा जास्त बिंदूंमध्ये छेदत असेल, तर तो आलेख फलन दर्शवत नाही.

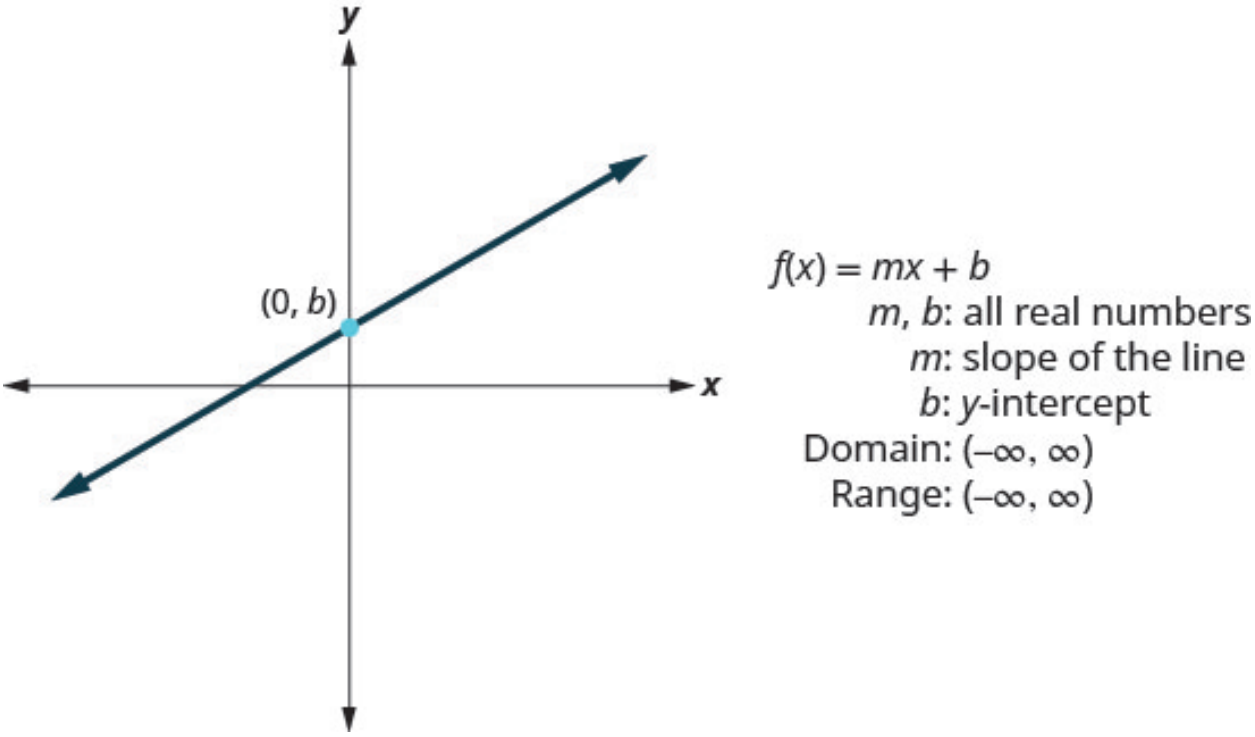
## फलनाचा आलेख

- फलनातील सर्व क्रमित जोड्यांचा आलेख म्हणजे त्या फलनाचा आलेख. जोड्या (x, y) किंवा फलनाच्या संकेतलेखनात (x, f(x)) अशा लिहितो; येथे $y = f(x)$ आहे.

फलनाच्या संकेतलेखनातील भागांचा अर्थ

| | |
|---|---|
| **f** | फलनाचे नाव |
| **x** | क्रमित जोडीचा x-सहनिर्देशक |
| **f(x)** | क्रमित जोडीचा y-सहनिर्देशक |

## रेषीय फलन

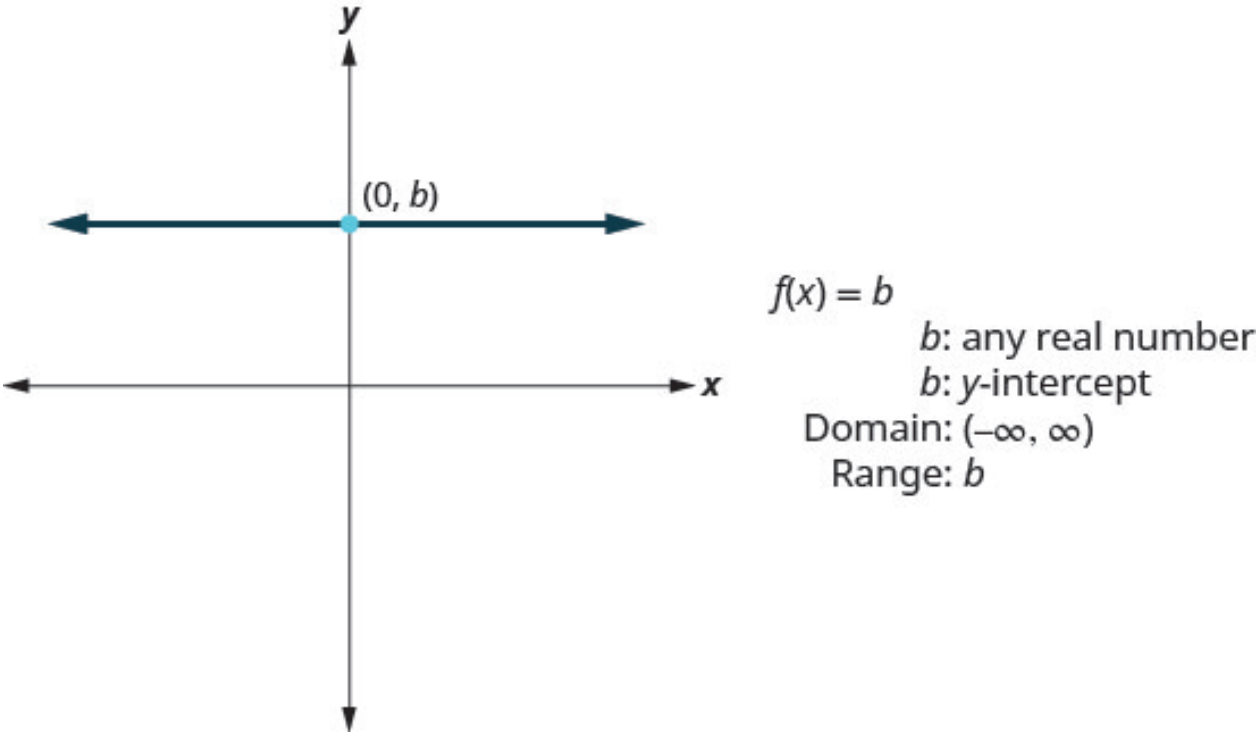



आकृतीचे वर्णन: (0, b) मधून जाणारी तिरपी सरळ रेषा, दोन्ही टोकांना बाण. मूळ इंग्रजी चित्रात f(x)=mx+b; m,b सर्व वास्तविक संख्या; m रेषेचा उतार; b हा y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य; प्रांत व मूल्यसंच दोन्ही (−∞,∞) असे लिहिले आहे. m=0 च्या अपवादाची स्वतंत्र दुरुस्ती पुढे दिली आहे.

मूळ चित्रातील मजकूर: f(x) = mx + b; m व b कोणत्याही वास्तविक संख्या; m म्हणजे रेषेचा उतार, b म्हणजे y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य. प्रांत (−∞, ∞); चित्रात दिलेला मूल्यसंच (−∞, ∞).

स्रोत-दुरुस्ती: मूल्यसंच सर्व वास्तविक संख्या असण्यासाठी m ≠ 0 आवश्यक आहे. m = 0 असेल तर हे स्थिर फलन होते आणि मूल्यसंच {b} असतो. इंडोनेशियन पुनर्रेखाटनात m ≠ 0 ही अट दिली आहे; मूळ इंग्रजी चित्रात ती नाही. इंग्रजी चित्र बदललेले नाही. छेदबिंदूची पूर्ण क्रमित जोडी (0, b) आहे; b हा तिचा y-सहनर्दिशक आहे.

## स्थिर फलन

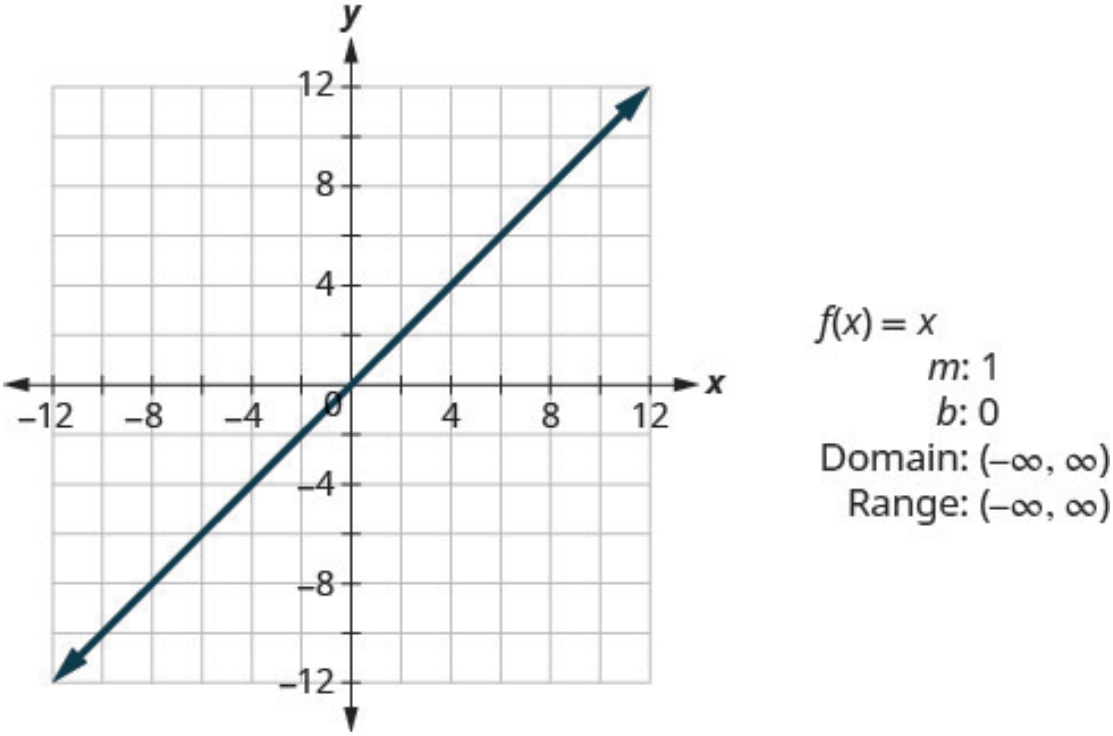



आकृतीचे वर्णन: (0, b) मधून जाणारी आडवी सरळ रेषा, दोन्ही टोकांना बाण. चित्रातील मजकूर: f(x)=b; b कोणतीही वास्तविक संख्या व y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य; प्रांत (−∞,∞); इंग्रजी चित्रात Range:b. संचाचे स्पष्ट रूप {b} आहे.

f(x) = b; b कोणतीही वास्तविक संख्या आणि y-अक्षावरील छेदाचे मूल्य. प्रांत (−∞, ∞). इंग्रजी चित्रात मूल्यसंचासाठी फक्त b असे लिहिले आहे.

संकेतलेखनाची स्पष्टता: मूल्यसंच हा एका घटकाचा संच {b} आहे, केवळ b ही संख्या नव्हे. इंडोनेशियन चित्रात महिरपी कंसांसह {b} दिले आहे. प्रत्येक आदानाला एकच समान प्रदान मिळते.

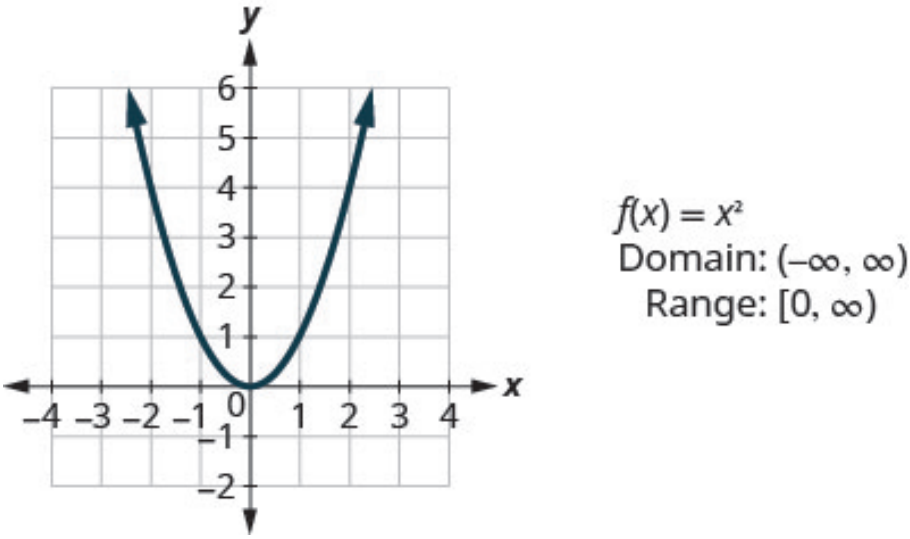
## प्रत्येक संख्या तशीच देणारे फलन (identity function)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −12 ते 12 खुणा. आदिबिंदू, (1,1), (2,2) मधून जाणारी वर चढणारी सरळ रेषा. मजकूर: f(x)=x; m=1; b=0; प्रांत आणि मूल्यसंच (−∞,∞).

f(x) = x; m = 1; b = 0; प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच (−∞, ∞).

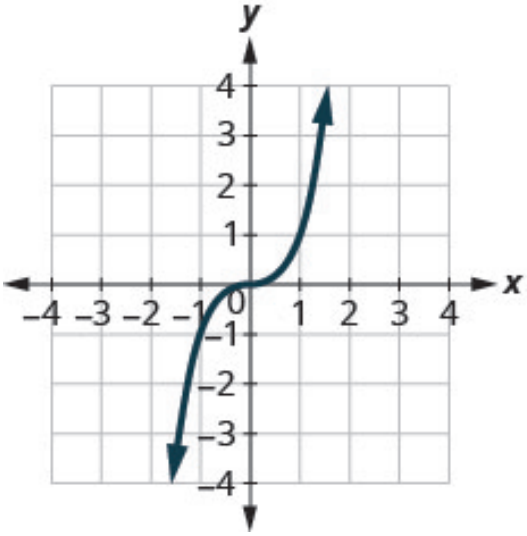
## वर्ग फलन




आकृतीचे वर्णन: x-अक्षावर −4 ते 4 आणि जाळीत y=−2 ते 6. वर उघडणारा अन्वस्त (−2,4),(−1,1),(0,0),(1,1),(2,4) मधून जातो. सूत्र $f(x)=x^2$; प्रांत (−∞,∞), मूल्यसंच [0,∞).

$f(x) = x^2$; प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच [0, ∞).

## घन फलन



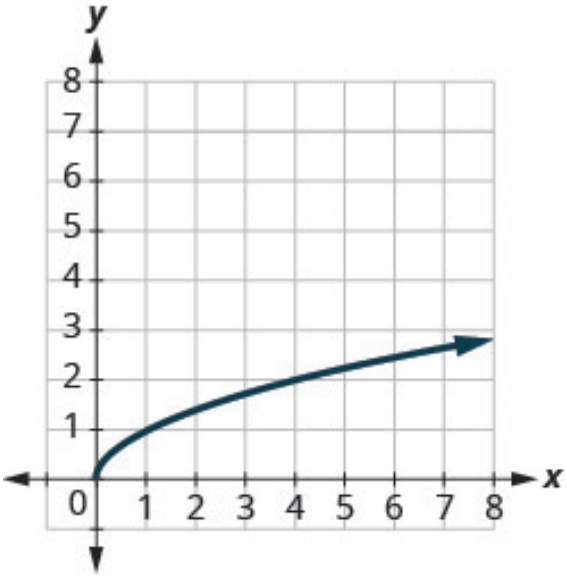

$f(x) = x^3$
Domain: $(-\infty, \infty)$
Range: $(-\infty, \infty)$

आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −4 ते 4 खुणा. वाढणारा वक्र (−1,−1),(0,0),(1,1) मधून जातो आणि दोन्ही टोकांना बाण आहेत. सूत्र $f(x)=x^3$; प्रांत आणि मूल्यसंच (−∞,∞). सूत्रातील (−2,−8),(2,8) हे बिंदू या दृश्य चौकटीच्या बाहेर आहेत.

$f(x) = x^3$; प्रांत $(-\infty, \infty)$; मूल्यसंच $(-\infty, \infty)$.

वर्णनाची स्पष्टता: दोन्ही स्रोत-वर्णनांत आलेले (−2, −8) आणि (2, 8) हे सूत्राच्या पूर्ण आलेखावरचे बिंदू आहेत; चित्रातील −4 ते 4 या उंचीच्या चौकटीत ते दिसत नाहीत.

## वर्गमूळ फलन

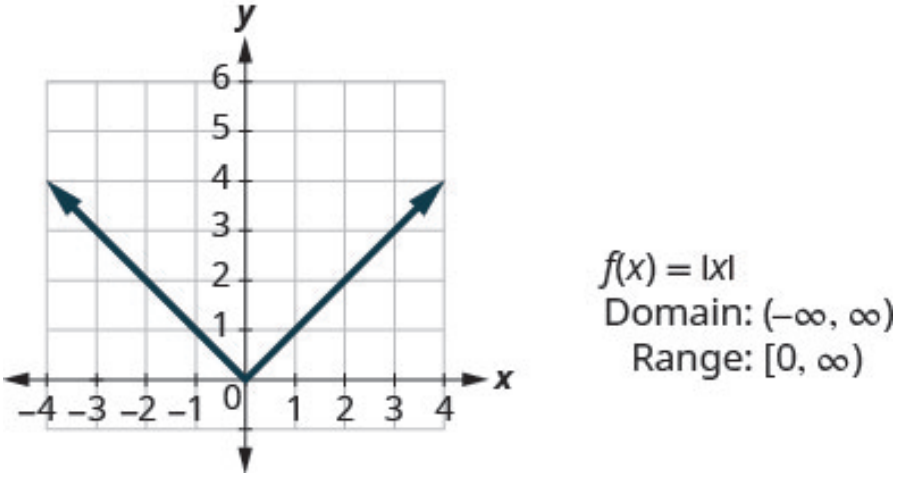



$f(x) = \sqrt{x}$
Domain: $[0, \infty)$
Range: $[0, \infty)$

आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर 0 ते 8 धन खुणा. वक्र (0,0) पासून (1,1),(4,2) मधून उजवीकडे चढतो; उजवीकडे बाण. सूत्र $f(x)=\sqrt{x}$; प्रांत आणि मूल्यसंच $[0,\infty)$.

$f(x) = \sqrt{x}$; प्रांत $[0, \infty)$; मूल्यसंच $[0, \infty)$.

## केवल मूल्य फलन




आकृतीचे वर्णन: x-अक्षावर −4 ते 4, जाळीत y=−1 ते 6. V-आकाराच्या रेषेचा शिरोबिंदू (0,0); रेषा (−3,3),(−2,2),(−1,1),(1,1),(2,2),(3,3) मधून जाते. सूत्र f(x)=|x|; प्रांत (−∞,∞), मूल्यसंच [0,∞).

f(x) = |x|; प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच [0, ∞). रेषेचा उतार बदलतो तो (0, 0) हा शिरोबिंदू आहे.

वरील मूळ संक्षिप्त चित्रांचे सर्व सूत्र-मजकूर मराठीत दिले आहेत. प्रत्येक सूत्रातील अक्षरांचा अर्थ बदललेला नाही. अनंत हा समाविष्ट करण्यासारखा वास्तविक संख्येचा टोकबिंदू नसल्याने ∞ जवळ गोल कंस वापरले आहेत. स्थिर फलनाचा मूल्यसंच एका घटकाचा संच म्हणून लिहिला आहे; [b, b] हे समतुल्य बंद-अंतराल रूपही शक्य आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836597228

# विभाग-सराव

खालील प्रश्नक्रमांक या घटकातील वाचनासाठी दिले आहेत; मूळ स्रोताची सर्व ओळखचिन्हे जतन केली आहेत. प्रश्नांना दिलेल्या गटसूचना त्या गटातील प्रत्येक प्रश्नाला लागू आहेत. “स्रोतातील उत्तर” आणि “जोडलेली नोंद” वेगळी ओळखा.

## सरावाने प्रावीण्य

### उभ्या रेषेची कसोटी वापरा

Source: A20:m81374#fs-id1167829833896

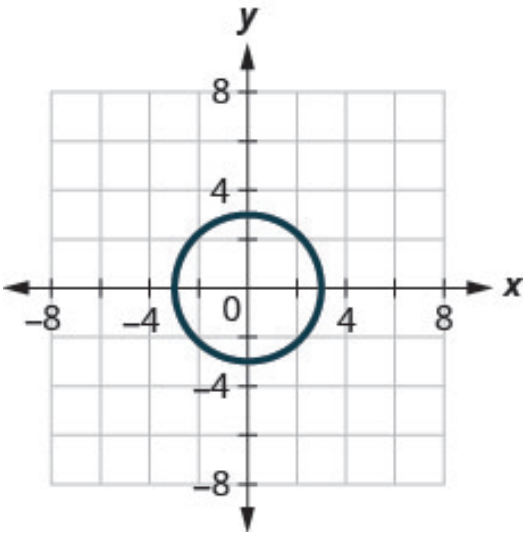
पुढील प्रश्नांत प्रत्येक आलेख फलनाचा आलेख आहे का ते ठरवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833181234

चित्र-वर्णन दुरुस्ती: आकृत्या 201–208 यांच्या दोन्ही स्रोत-वर्णनांत अक्षांच्या काही मर्यादा चुकल्या आहेत. प्रत्यक्ष आठही चित्रांत दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा आहेत; येथे त्या चित्रांनुसार लिहिल्या आहेत.

**प्रश्न 1**

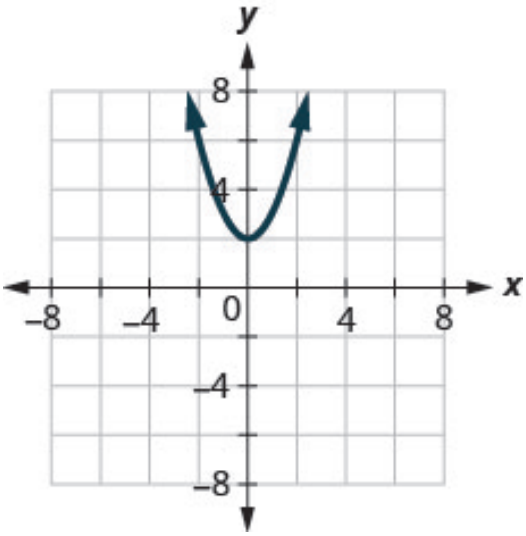
(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−3,0),(3,0),(0,−3),(0,3) मधून जाणारे वर्तुळ.

मूळ आकृती 201. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−3,0),(3,0),(0,−3),(0,3) मधून जाणारे वर्तुळ.

(b)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. वर उघडणारा अन्वस्त (−2,6),(−1,3),(0,2),(1,3),(2,6) मधून जातो; शिरोबिंदू (0,2).

मूळ आकृती 202. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. वर उघडणारा अन्वस्त (−2,6),(−1,3),(0,2),(1,3),(2,6) मधून जातो; शिरोबिंदू (0,2).

स्रोत-वर्णनाची नोंद: इंग्रजी पर्यायी वर्णनातील आकृती 202 च्या बिंदूंच्या यादीत (1, 3) दोनदा आहे; डावीकडील सममित बिंदू (−1, 3) हवा. इंडोनेशियन वर्णन आणि प्रत्यक्ष चित्रात तो बरोबर आहे. येथील वर्णनात ऋण चिन्ह जतन केले आहे.

उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

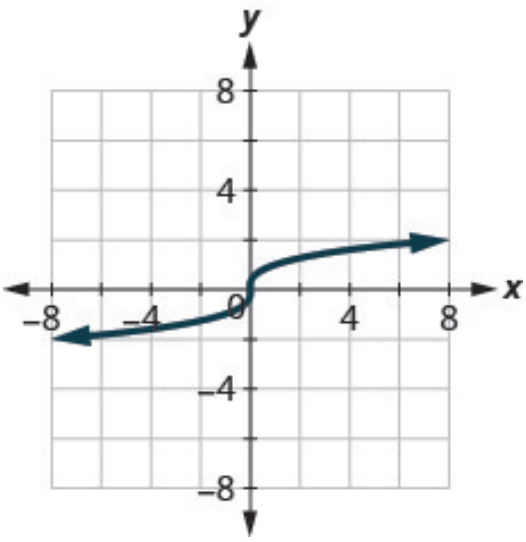
(a) नाही. (b) होय.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833256037

**प्रश्न 2**

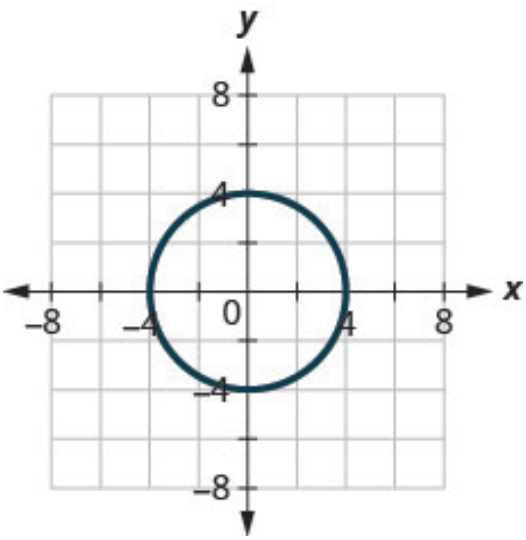
(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. आडव्या S-सारखा चढता वक्र (−1,−1),(0,0),(1,1) मधून जातो, दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 203. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. आडव्या S-सारखा चढता वक्र (−1,−1),(0,0),(1,1) मधून जातो, दोन्ही टोकांना बाण.

(b)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−4,0),(4,0),(0,−4),(0,4) मधून जाणारे वर्तुळ.

मूळ आकृती 204. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−4,0),(4,0),(0,−4),(0,4) मधून जाणारे वर्तुळ.

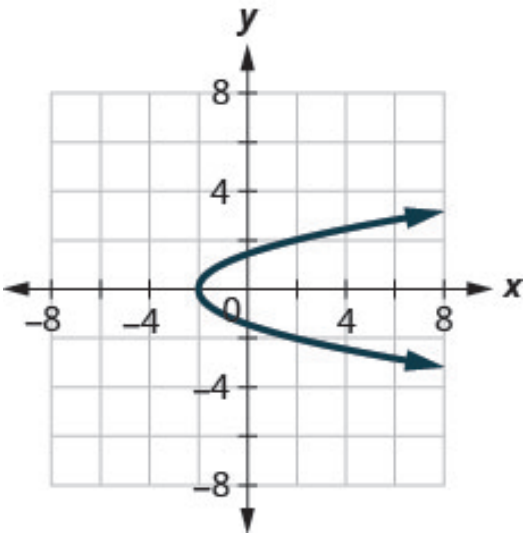
स्रोत-वर्णनाची नोंद: आकृती 203 च्या इंग्रजी पर्यायी वर्णनात (−1, 1) दिले आहे; प्रत्यक्ष चित्र व इंडोनेशियन वर्णनानुसार तो (−1, −1) आहे. येथे ते दुरुस्त केले आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167833059978

**प्रश्न 3**

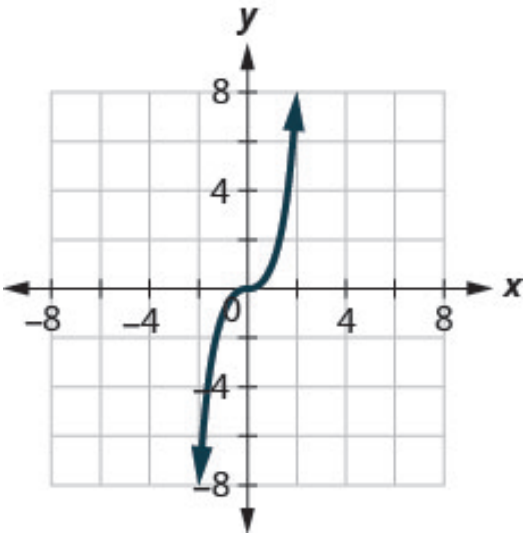
(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. उजवीकडे उघडणारा अन्वस्त, शिरोबिंदू (−2,0); (−1,1),(−1,−1),(2,2),(2,−2) मधून जाणाऱ्या दोन शाखा.

मूळ आकृती 205. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. उजवीकडे उघडणारा अन्वस्त, शिरोबिंदू (−2,0); (−1,1),(−1,−1),(2,2),(2,−2) मधून जाणाऱ्या दोन शाखा.

(b)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. घन फलनाचा वाढता वक्र (−1,−1),(0,0),(1,1) मधून जातो; दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 206. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. घन फलनाचा वाढता वक्र (−1,−1),(0,0),(1,1) मधून जातो; दोन्ही टोकांना बाण.

स्रोत-वर्णनाची नोंद: आकृती 205 च्या इंग्रजी पर्यायी वर्णनात (−2, 2) चुकीने दिले आहे. प्रत्यक्ष उजवीकडील शाखांवर (2, 2) आणि (2, −2) आहेत; इंडोनेशियन वर्णनात हे दुरुस्त आहे. येथे चित्रानुसार दोन्ही बिंदू दिले आहेत.

उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

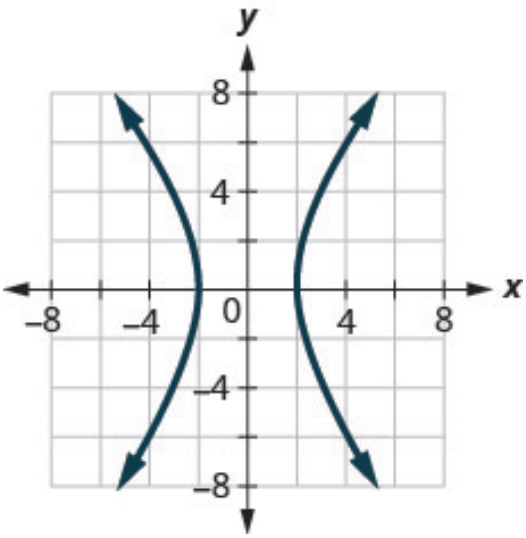
(a) नाही. (b) होय.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836628720

**प्रश्न 4**

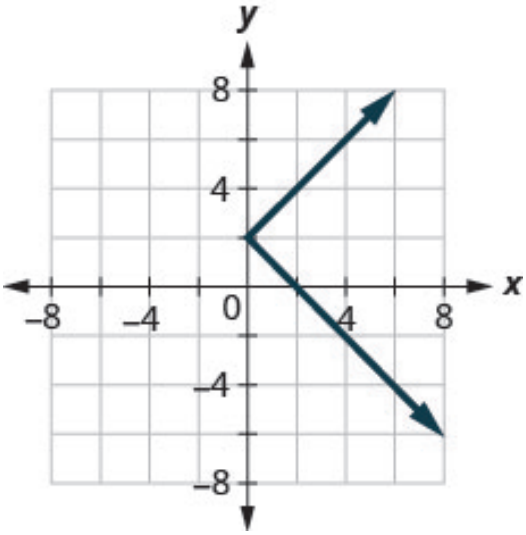
(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावी शाखा (−2,0) येथे वळते आणि (−4,5),(−4,−5) जवळून जाते. उजवी शाखा (2,0) येथे वळते आणि (4,5),(4,−5) जवळून जाते; चारही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 207. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावी शाखा (−2,0) येथे वळते आणि (−4,5),(−4,−5) जवळून जाते. उजवी शाखा (2,0) येथे वळते आणि (4,5),(4,−5) जवळून जाते; चारही टोकांना बाण.

(b)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. उजवीकडे उघडणाऱ्या V-आकाराच्या रेषेचा शिरोबिंदू (0,2). वरची शाखा (1,3),(2,4), खालची शाखा (1,1),(2,0) मधून जाते.

मूळ आकृती 208. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. उजवीकडे उघडणाऱ्या V-आकाराच्या रेषेचा शिरोबिंदू (0,2). वरची शाखा (1,3),(2,4), खालची शाखा (1,1),(2,0) मधून जाते.

स्रोत-वर्णनाची नोंद: आकृती 208 ला मूळ पर्यायी वर्णनात बाजूला वळलेले केवल मूल्य फलन म्हटले आहे. येथे फक्त V-आकार असे वर्णन केले आहे; ते फलन आहे की नाही हे या प्रश्नात ठरवायचे आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836362052

## मूलभूत फलनांचे आलेख ओळखा

Source: A20:m81374#fs-id1167833377170

पुढील प्रश्नांत (a) प्रत्येक फलनाचा आलेख काढा, (b) त्याचा प्रांत आणि मूल्यसंच सांगा. प्रांत आणि मूल्यसंच अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836356048

जोडलेली संकेत-सूचना: मूळ उत्तरांतील D म्हणजे प्रांत आणि R म्हणजे मूल्यसंच; येथे पूर्ण मराठी शब्द वापरले आहेत. स्थिर फलनासाठी मूळ उत्तरातील एकघटकी संच महिरपी कंसांत ठेवला आहे; तो एका संख्येपुरता मर्यादित असतो. प्रश्न 23, 25, 27 च्या इंग्रजी उत्तरांत पहिल्या अंतरालापुढे D हे लेबल सुटले आहे; इंडोनेशियन आवृत्तीत ते आहे. येथे त्या अंतरालाला स्पष्टपणे प्रांत म्हटले आहे.

अक्ष-वर्णन दुरुस्ती: आकृत्या 313, 315, 317, 319, 323, 337, 339 मध्ये दोन्ही अक्ष ±8 पर्यंत आहेत; स्रोत-वर्णनांत ±6 आहे. आकृत्या 329, 331, 333, 335, 345, 347 मध्ये x-अक्ष ±8 पर्यंत आहे, ±6 नाही. आकृत्या 341, 343 मध्ये जाळी x = −2 ते 10, y = −2 ते 8 आहे; दोन्ही स्रोत-वर्णने दोन्ही अक्षांसाठी 0 ते 10 म्हणतात. चित्रे बदललेली नाहीत; मराठी वर्णने प्रत्यक्ष चित्रांनुसार आहेत.

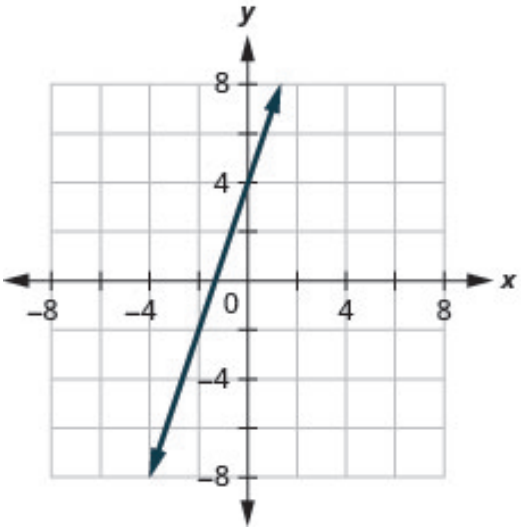
**प्रश्न 5**

f(x)=3x+4

उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. सरळ रेषा (−2,−2),(−1,1),(0,4) मधून जाते; दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 313. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. सरळ रेषा (−2,−2),(−1,1),(0,4) मधून जाते; दोन्ही टोकांना बाण.

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच (−∞, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836665073

**प्रश्न 6**

f(x)=2x+5

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167829936987

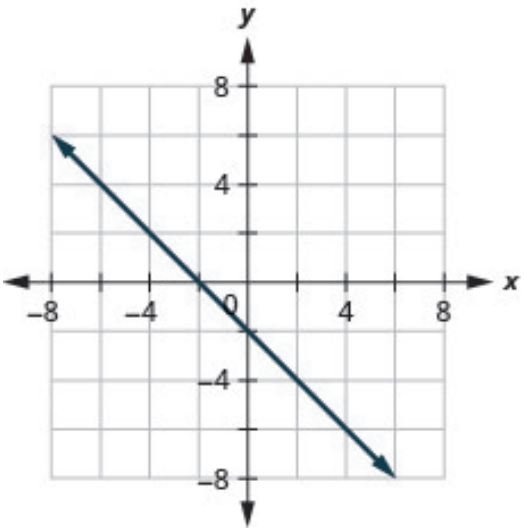
**प्रश्न 7**

f(x)=−x−2

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. सरळ रेषा (−2,0),(0,−2),(2,−4) मधून जाते; दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 315. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. सरळ रेषा (−2,0),(0,−2),(2,−4) मधून जाते; दोन्ही टोकांना बाण.

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच (−∞, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167824736142

### प्रश्न 8

$f(x) = -4x - 3$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167829624127

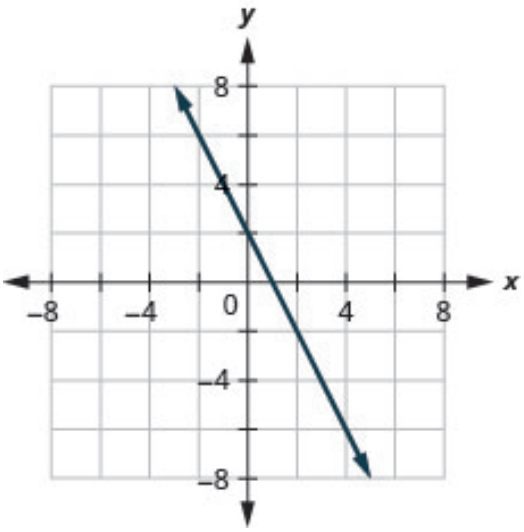
### प्रश्न 9

$f(x) = -2x + 2$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. सरळ रेषा (−2,6),(0,2),(1,0),(2,−2) मधून जाते; प्रश्नातील f(x)=−2x+2 शी जुळते. मूळ पर्यायी वर्णनातील वेगळे बिंदू चुकीचे आहेत.

मूळ आकृती 317. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. सरळ रेषा (−2,6),(0,2),(1,0),(2,−2) मधून जाते; प्रश्नातील f(x)=−2x+2 शी जुळते. मूळ पर्यायी वर्णनातील वेगळे बिंदू चुकीचे आहेत.

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच (−∞, ∞).

स्रोत-दुरुस्ती: दोन्ही पर्यायी वर्णनांतील (−2, 2), (−1, 0), (0, −2) हे बिंदू −2x − 2 या वेगळ्या रेषेचे आहेत. प्रश्नातील सूत्र व प्रत्यक्ष आकृती 317 मात्र −2x + 2 चे आहेत. चित्र बदललेले नाही; येथे (−2, 6), (0, 2), (1, 0), (2, −2) अशी जुळणारी वर्णने दिली आहेत.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836694784

### प्रश्न 10

f(x)=−3x+3

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836418803

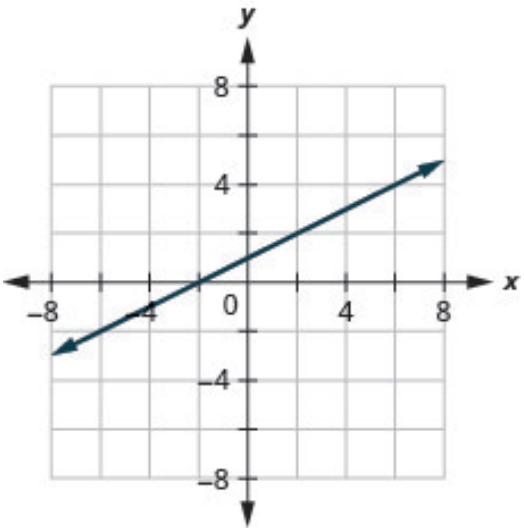
### प्रश्न 11

f(x)=(1/2)x+1

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. सरळ रेषा (−2,0),(0,1),(2,2) मधून जाते; दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 319. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. सरळ रेषा (−2,0),(0,1),(2,2) मधून जाते; दोन्ही टोकांना बाण.

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच (−∞, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833128830

### प्रश्न 12

f(x)=(2/3)x−2

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167824658727

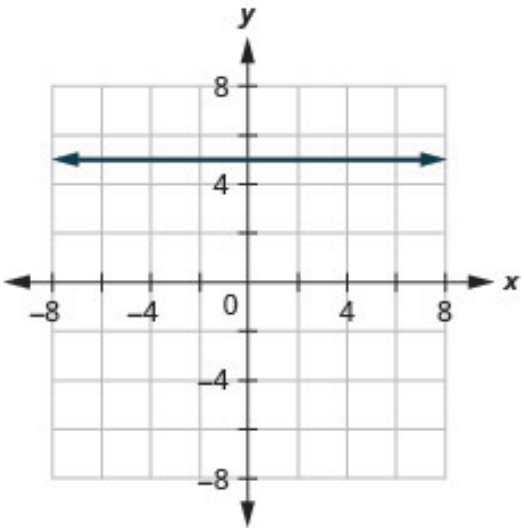
### प्रश्न 13

f(x)=5

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−2,5),(−1,5),(0,5) मधून जाणारी आडवी रेषा; दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 321. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−2,5),(−1,5),(0,5) मधून जाणारी आडवी रेषा; दोन्ही टोकांना बाण.

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच {5}.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836544127

### प्रश्न 14

f(x)=2

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836429353

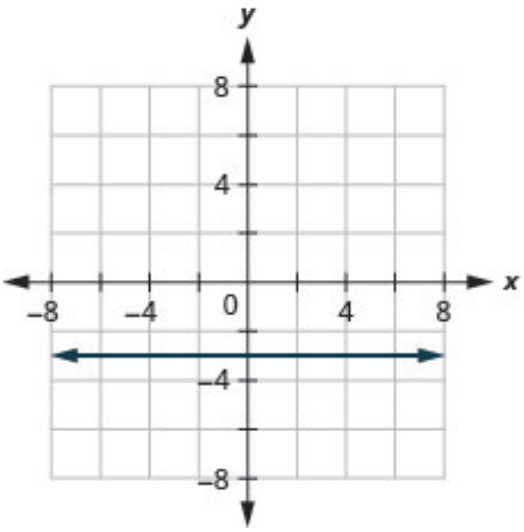
### प्रश्न 15

f(x)=−3

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (0,−3),(1,−3),(2,−3) मधून जाणारी आडवी रेषा; दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 323. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (0,−3),(1,−3),(2,−3) मधून जाणारी आडवी रेषा; दोन्ही टोकांना बाण.

(b) प्रांत $(-\infty, \infty)$; मूल्यसंच $\{-3\}$.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829745945

### प्रश्न 16

$f(x) = -1$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167829719517

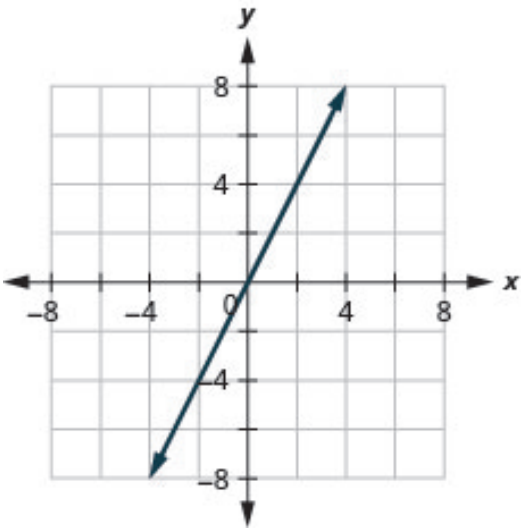
### प्रश्न 17

$f(x) = 2x$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−2,−4),(0,0),(2,4) मधून जाणारी सरळ रेषा; दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 325. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. (−2,−4),(0,0),(2,4) मधून जाणारी सरळ रेषा; दोन्ही टोकांना बाण.

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच (−∞, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836731888

### प्रश्न 18

f(x)=3x

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836626104

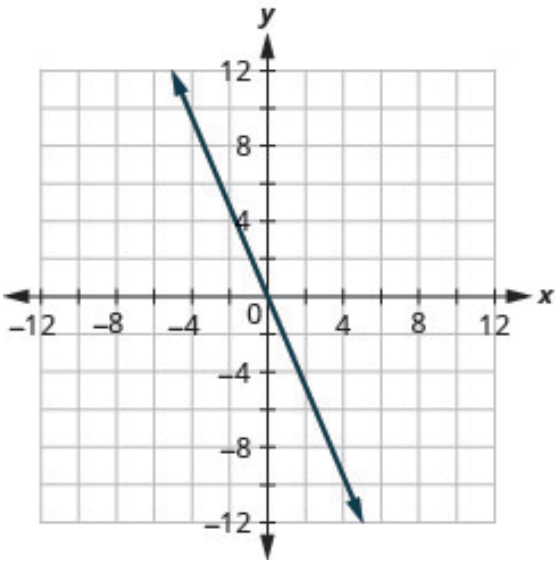
### प्रश्न 19

f(x)=−2x

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −12 ते 12 खुणा. (−1,2),(0,0),(1,−2) मधून जाणारी सरळ रेषा; दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 327. दोन्ही अक्षांवर −12 ते 12 खुणा. (−1,2),(0,0),(1,−2) मधून जाणारी सरळ रेषा; दोन्ही टोकांना बाण.

(b) प्रांत $(-\infty, \infty)$; मूल्यसंच $(-\infty, \infty)$.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836621812

### प्रश्न 20

$f(x)=-3x$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167829599925

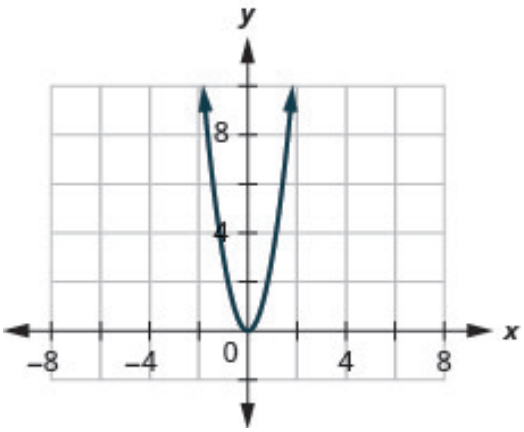
### प्रश्न 21

$f(x)=3x^2$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−8 ते 8, y=−2 ते 10. वर उघडणारा अन्वस्त (−1,3),(0,0),(1,3) मधून जातो; सर्वांत खालचा बिंदू (0,0).

मूळ आकृती 329. जाळीत x=−8 ते 8, y=−2 ते 10. वर उघडणारा अन्वस्त (−1,3),(0,0),(1,3) मधून जातो; सर्वांत खालचा बिंदू (0,0).

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच [0, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836698477

### प्रश्न 22

$f(x)=2x^2$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836481202

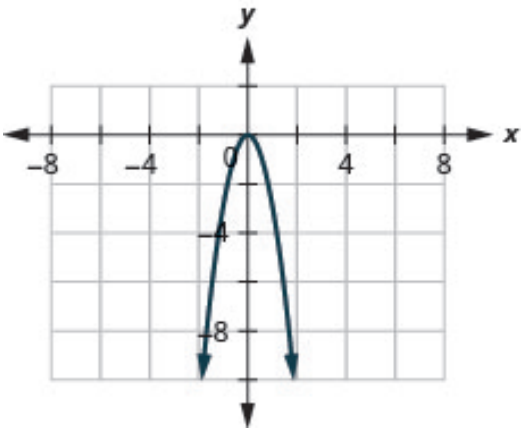
### प्रश्न 23

$f(x)=-3x^2$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−8 ते 8, y=−10 ते 2. खाली उघडणारा अन्वस्त (−1,−3),(0,0),(1,−3) मधून जातो; सर्वांत वरचा बिंदू (0,0).

मूळ आकृती 331. जाळीत x=−8 ते 8, y=−10 ते 2. खाली उघडणारा अन्वस्त (−1,−3),(0,0),(1,−3) मधून जातो; सर्वांत वरचा बिंदू (0,0).

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच (−∞, 0].

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836722566

### प्रश्न 24

$f(x)=-2x^2$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836549919

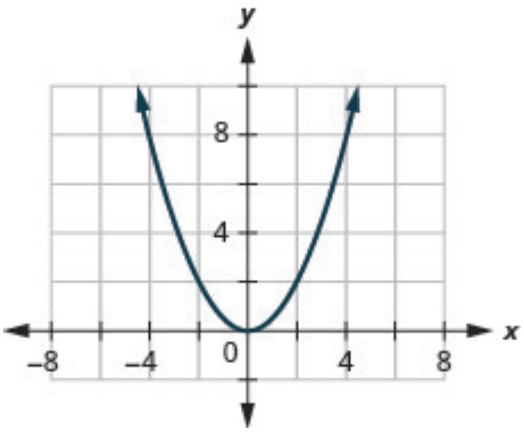
### प्रश्न 25

$f(x)=(1/2)x^2$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−8 ते 8, y=−2 ते 10. वर उघडणारा अन्वस्त (−4,8),(−2,2),(0,0),(2,2),(4,8) मधून जातो; सर्वांत खालचा बिंदू (0,0).

मूळ आकृती 333. जाळीत x=−8 ते 8, y=−2 ते 10. वर उघडणारा अन्वस्त (−4,8),(−2,2),(0,0),(2,2),(4,8) मधून जातो; सर्वांत खालचा बिंदू (0,0).

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच [0, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836321873

### प्रश्न 26

$f(x)=(1/3)x^2$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836560949

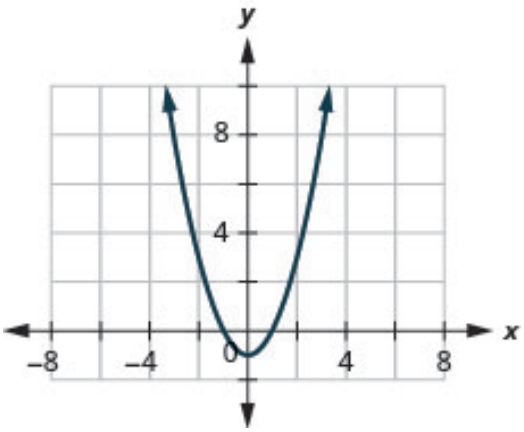
### प्रश्न 27

$f(x)=x^2-1$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−8 ते 8, y=−2 ते 10. वर उघडणारा अन्वस्त (−2,3),(−1,0),(0,−1),(1,0),(2,3) मधून जातो; सर्वांत खालचा बिंदू (0,−1).

मूळ आकृती 335. जाळीत x=−8 ते 8, y=−2 ते 10. वर उघडणारा अन्वस्त (−2,3),(−1,0),(0,−1),(1,0),(2,3) मधून जातो; सर्वांत खालचा बिंदू (0,−1).

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच [−1, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833310065

### प्रश्न 28

$f(x)=x^2+1$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836662424

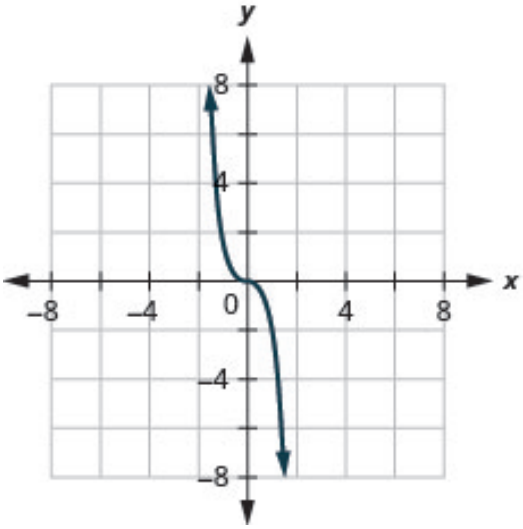
### प्रश्न 29

$f(x)=-2x^3$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. घन राशीचा उतरता वक्र (−1,2),(0,0),(1,−2) मधून जातो; दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 337. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. घन राशीचा उतरता वक्र (−1,2),(0,0),(1,−2) मधून जातो; दोन्ही टोकांना बाण.

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच (−∞, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829650694

### प्रश्न 30

$f(x)=2x^3$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836693431

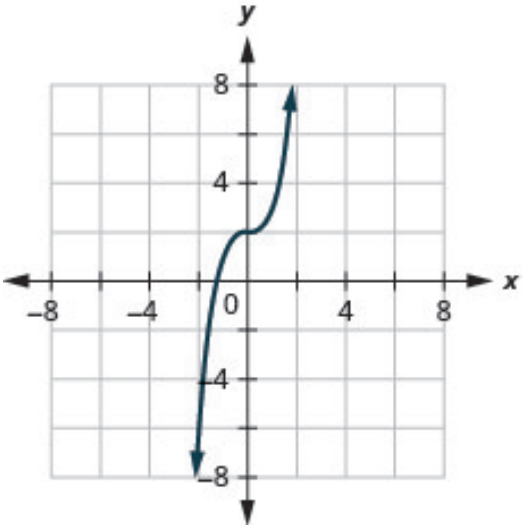
### प्रश्न 31

$f(x)=x^3+2$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. घन राशीचा वाढता वक्र (−1,1),(0,2),(1,3) मधून जातो; दोन्ही टोकांना बाण.

मूळ आकृती 339. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. घन राशीचा वाढता वक्र (−1,1),(0,2),(1,3) मधून जातो; दोन्ही टोकांना बाण.

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच (−∞, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836341365

### प्रश्न 32

$f(x)=x^3-2$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836415699

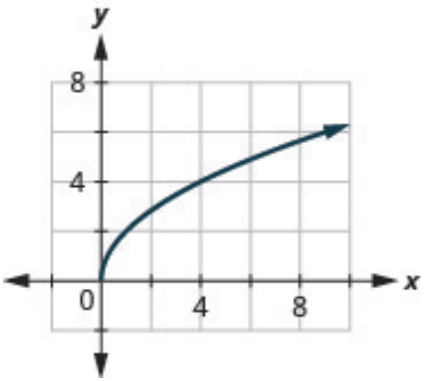
### प्रश्न 33

$f(x)=2\sqrt{(x)}$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−2 ते 10, y=−2 ते 8. वर्गमूळाचा वक्र (0,0) पासून (1,2),(4,4) मधून उजवीकडे चढतो; पुढे जाणारा बाण.

मूळ आकृती 341. जाळीत x=−2 ते 10, y=−2 ते 8. वर्गमूळाचा वक्र (0,0) पासून (1,2),(4,4) मधून उजवीकडे चढतो; पुढे जाणारा बाण.

(b) प्रांत [0, ∞); मूल्यसंच [0, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836481043

### प्रश्न 34

$f(x)=-2\sqrt{(x)}$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167833054162

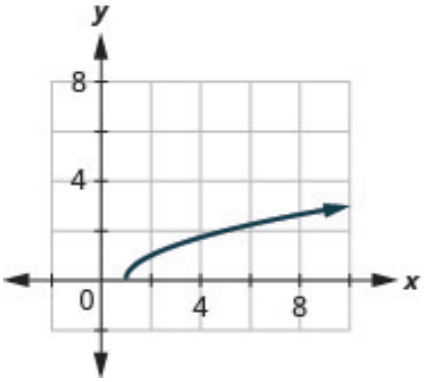
### प्रश्न 35

$f(x)=\sqrt{(x-1)}$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−2 ते 10, y=−2 ते 8. वर्गमूळाचा वक्र (1,0) पासून (2,1),(5,2) मधून उजवीकडे चढतो; पुढे जाणारा बाण.

मूळ आकृती 343. जाळीत x=−2 ते 10, y=−2 ते 8. वर्गमूळाचा वक्र (1,0) पासून (2,1),(5,2) मधून उजवीकडे चढतो; पुढे जाणारा बाण.

(b) प्रांत [1, ∞); मूल्यसंच [0, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836510676

### प्रश्न 36

$f(x)=\sqrt{(x+1)}$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167829589762

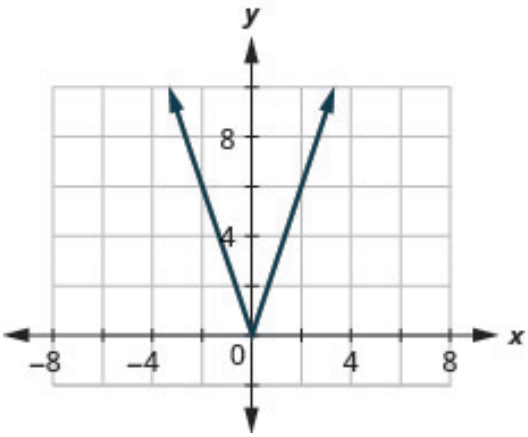
### प्रश्न 37

$f(x)=3|x|$

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−8 ते 8, y=−2 ते 10. V-आकाराचा आलेख (−1,3),(0,0),(1,3) मधून जातो; शिरोबिंदू (0,0).

मूळ आकृती 345. जाळीत x=−8 ते 8, y=−2 ते 10. V-आकाराचा आलेख (−1,3),(0,0),(1,3) मधून जातो; शिरोबिंदू (0,0).

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच [0, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829923887

### प्रश्न 38

f(x)=−2|x|

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167829789446

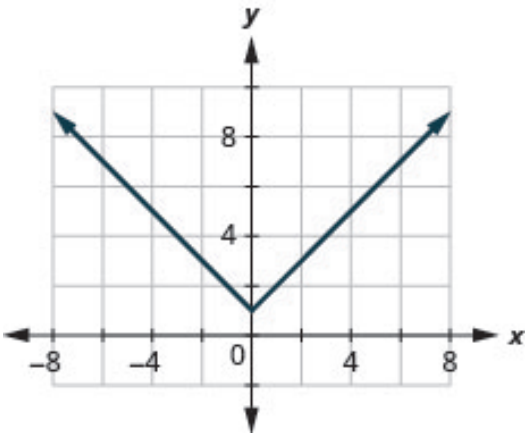
### प्रश्न 39

f(x)=|x|+1

उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

(a)




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−8 ते 8, y=−2 ते 10. V-आकाराचा आलेख (−1,2),(0,1),(1,2) मधून जातो; शिरोबिंदू (0,1).

मूळ आकृती 347. जाळीत x=−8 ते 8, y=−2 ते 10. V-आकाराचा आलेख (−1,2),(0,1),(1,2) मधून जातो; शिरोबिंदू (0,1).

(b) प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच [1, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836393413

### प्रश्न 40

f(x)=|x|−1

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836601960

## फलनाच्या आलेखातून माहिती वाचा

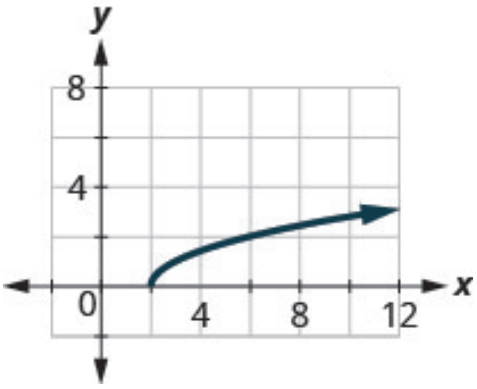
Source: A20:m81374#fs-id1167836686005

पुढील प्रश्नांत फलनाच्या आलेखाचा वापर करून त्याचा प्रांत आणि मूल्यसंच शोधा. प्रांत आणि मूल्यसंच अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836579171

अक्ष-वर्णन दुरुस्ती: आकृत्या 209, 210, 211, 212, 213, 217, 218 यांच्या मूळ पर्यायी वर्णनांतील जाळीच्या मर्यादा प्रत्यक्ष चित्रांशी पूर्ण जुळत नाहीत. येथील वर्णनांत मूळ चित्रांवरील खुणा वापरल्या आहेत. आकृत्या 214–216 चे मूळ प्रमाण तसेच ठेवले आहे.

**प्रश्न 41**




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−2 ते 12, y=−2 ते 8. वर्गमूळाचा वक्र (2,0) पासून (3,1),(6,2) मधून उजवीकडे चढतो; पुढे जाणारा बाण.

मूळ आकृती 209. जाळीत x=−2 ते 12, y=−2 ते 8. वर्गमूळाचा वक्र (2,0) पासून (3,1),(6,2) मधून उजवीकडे चढतो; पुढे जाणारा बाण.

उत्तर पाहा

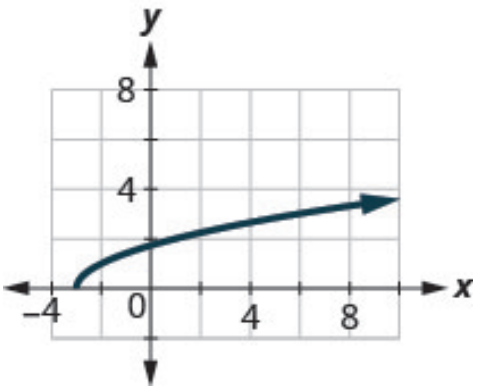
**स्रोतातील उत्तर**

प्रांत [2, ∞); मूल्यसंच [0, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836580012

**प्रश्न 42**



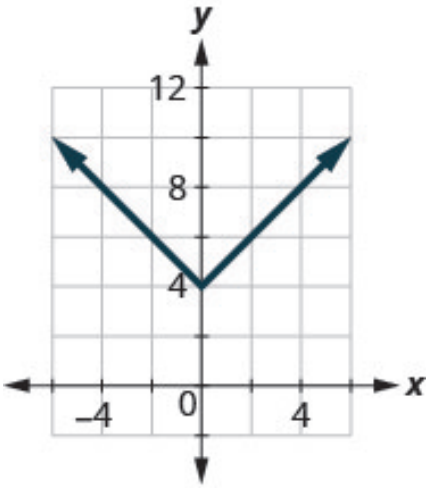

आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−4 ते 10, y=−2 ते 8. वर्गमूळाचा वक्र (−3,0) पासून (−2,1),(1,2) मधून उजवीकडे चढतो; पुढे जाणारा बाण.

मूळ आकृती 210. जाळीत x=−4 ते 10, y=−2 ते 8. वर्गमूळाचा वक्र (−3,0) पासून (−2,1),(1,2) मधून उजवीकडे चढतो; पुढे जाणारा बाण.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836442468

**प्रश्न 43**




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−6 ते 6, y=−2 ते 12. V-आकाराचा आलेख (−2,6),(0,4),(2,6) मधून जातो; शिरोबिंदू (0,4).

मूळ आकृती 211. जाळीत x=−6 ते 6, y=−2 ते 12. V-आकाराचा आलेख (−2,6),(0,4),(2,6) मधून जातो; शिरोबिंदू (0,4).

उत्तर पाहा

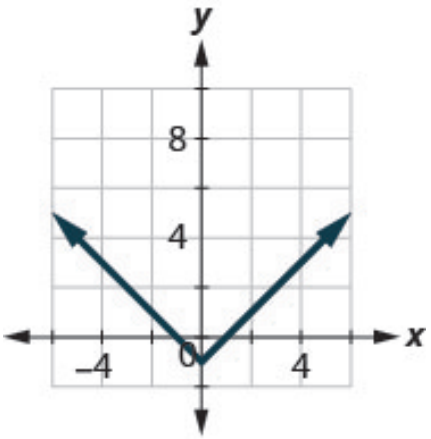
**स्रोतातील उत्तर**

प्रांत (−∞, ∞); मूल्यसंच [4, ∞).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836692203

**प्रश्न 44**



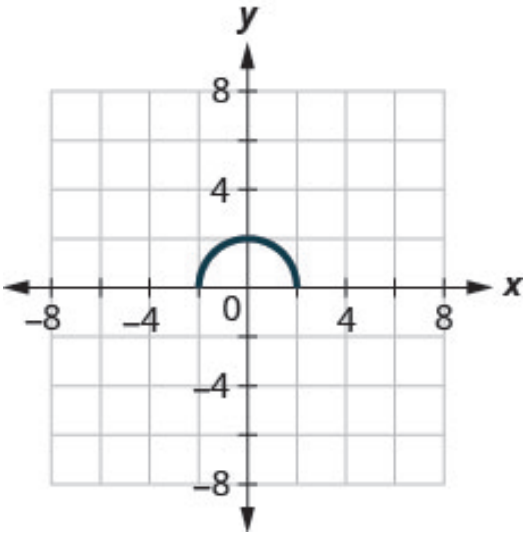

आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−6 ते 6, y=−2 ते 10. V-आकाराचा आलेख (−1,0),(0,−1),(1,0) मधून जातो; शिरोबिंदू (0,−1).

मूळ आकृती 212. जाळीत x=−6 ते 6, y=−2 ते 10. V-आकाराचा आलेख (−1,0),(0,−1),(1,0) मधून जातो; शिरोबिंदू (0,−1).

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167836361313

**प्रश्न 45**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. अर्धवर्तुळाचा वरचा भाग (−2,0) पासून (0,2) मधून (2,0) पर्यंत जातो.

मूळ आकृती 213. दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. अर्धवर्तुळाचा वरचा भाग (−2,0) पासून (0,2) मधून (2,0) पर्यंत जातो.

उत्तर पाहा

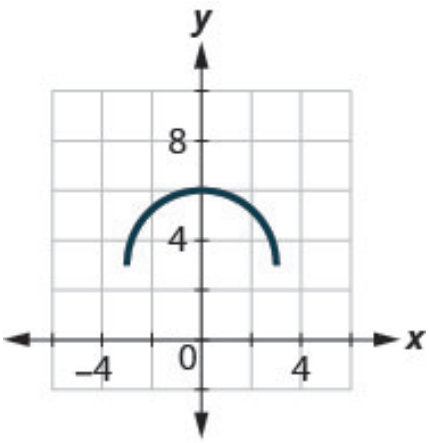
**स्रोतातील उत्तर**

प्रांत [−2, 2]; मूल्यसंच [0, 2].

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836609509

**प्रश्न 46**




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−6 ते 6, y=−2 ते 10. अर्धवर्तुळाचा वरचा भाग (−3,3) पासून (0,6) मधून (3,3) पर्यंत जातो.

मूळ आकृती 214. जाळीत x=−6 ते 6, y=−2 ते 10. अर्धवर्तुळाचा वरचा भाग (−3,3) पासून (0,6) मधून (3,3) पर्यंत जातो.

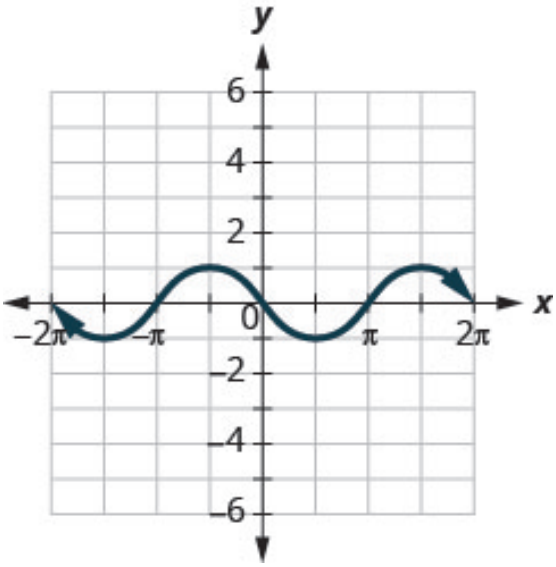
स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167833007602

पुढील प्रश्नांत फलनाच्या आलेखाचा वापर करून मागितलेली मूल्ये शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836621052

**प्रश्न 47**




आकृतीचे वर्णन: x-अक्षावर $-2\pi$ ते $2\pi$; y-अक्षावर $-6$ ते 6. लहरी आलेख $(-2\pi,0),(-3\pi/2,-1),(-\pi,0),(-\pi/2,1),(0,0),(\pi/2,-1),(\pi,0),(3\pi/2,1),(2\pi,0)$ मधून जातो. शिखरे $y=1$, तळ $y=-1$. स्रोताच्या वर्णनानुसार तोच नमुना दोन्हीकडे अमर्याद चालू राहतो; दोन्ही बाजूंना बाण.

मूळ आकृती 215. x-अक्षावर $-2\pi$ ते $2\pi$; y-अक्षावर $-6$ ते 6. लहरी आलेख $(-2\pi,0),(-3\pi/2,-1),(-\pi,0),(-\pi/2,1),(0,0),(\pi/2,-1),(\pi,0),(3\pi/2,1),(2\pi,0)$ मधून जातो. शिखरे $y=1$, तळ $y=-1$. स्रोताच्या वर्णनानुसार तोच नमुना दोन्हीकडे अमर्याद चालू राहतो; दोन्ही बाजूंना बाण.

(a) $f(0)$ शोधा.

(b) $f(\pi/2)$ शोधा.

(c) $f(-3\pi/2)$ शोधा.

(d) $f(x) = 0$ असताना x ची मूल्ये शोधा.

(e) x-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.

(f) y-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.

(g) प्रांत शोधा. अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

(h) मूल्यसंच शोधा. अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

(a) $f(0) = 0$.

(b) $f(\pi/2) = -1$.

(c) $f(-3\pi/2) = -1$.

(d) स्रोतात $f(x) = 0$ साठी दिलेली मूल्ये: $x = -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$.

(e) स्रोतात दिलेले छेदबिंदू: $(-2\pi, 0), (-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0)$.

(f) $(0, 0)$.

(g) $(-\infty, \infty)$.

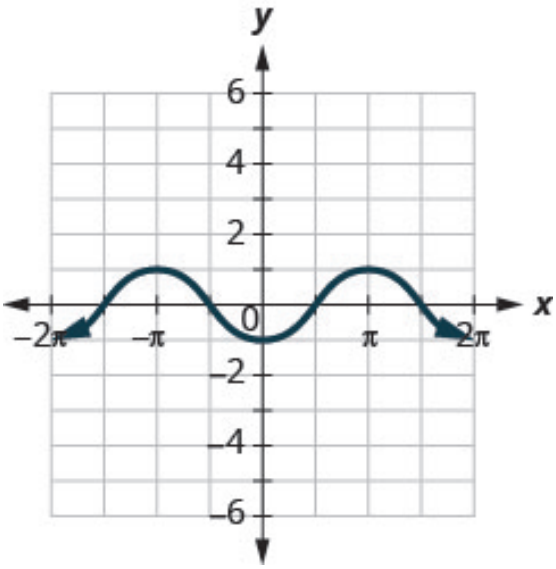
(h) $[-1, 1]$.

व्याप्तीची स्पष्टता: मूळ प्रश्न (d), (e) मध्ये मर्यादित अंतराल दिलेला नाही, पण उत्तरात फक्त चित्रातील $[-2\pi, 2\pi]$ भागाची यादी आहे. स्रोताच्या वर्णनानुसार तोच नमुना अमर्याद चालू राहतो. त्या सांगितलेल्या विस्तारात सर्व शून्य-मूल्यांची आदाने $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ आणि x-अक्षावरील सर्व छेदबिंदू $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ आहेत. $\mathbb{Z}$ म्हणजे सर्व पूर्णांक. ही स्वतंत्र जोडलेली नोंद आहे; मूळ पाच बिंदूंची यादी संपूर्ण अमर्याद यादी असल्याचे म्हटलेले नाही. केवळ काही बिंदूंच्या नमुन्यावरून सार्वत्रिक आवर्तन सिद्ध केल्याचा दावा नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829831353

**प्रश्न 48**




आकृतीचे वर्णन: x-अक्षावर $-2\pi$ ते $2\pi$; y-अक्षावर $-6$ ते 6. लहरी आलेख $(-2\pi,-1),(-3\pi/2,0),(-\pi,1),(-\pi/2,0),(0,-1),(\pi/2,0),(\pi,1),(3\pi/2,0),(2\pi,-1)$ मधून जातो. शिखरे $y=1$, तळ $y=-1$. स्रोताच्या वर्णनानुसार तोच नमुना दोन्हीकडे अमर्याद चालू राहतो; दोन्ही बाजूंना बाण.

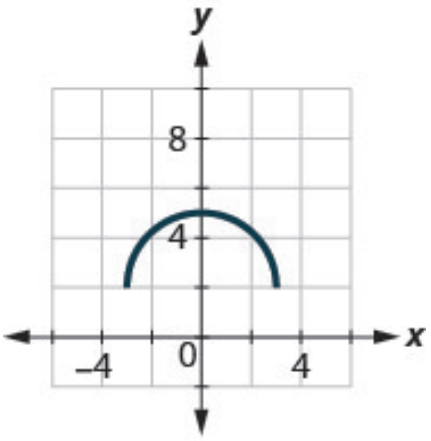
मूळ आकृती 216. x-अक्षावर $-2\pi$ ते $2\pi$; y-अक्षावर $-6$ ते 6. लहरी आलेख $(-2\pi,-1),(-3\pi/2,0),(-\pi,1),(-\pi/2,0),(0,-1),(\pi/2,0),(\pi,1),(3\pi/2,0),(2\pi,-1)$ मधून जातो. शिखरे $y=1$, तळ $y=-1$. स्रोताच्या वर्णनानुसार तोच नमुना दोन्हीकडे अमर्याद चालू राहतो; दोन्ही बाजूंना बाण.

(a) f(0) शोधा.
(b) f(π) शोधा.
(c) f(−π) शोधा.
(d) f(x) = 0 असताना x ची मूल्ये शोधा.
(e) x-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.
(f) y-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.
(g) प्रांत शोधा. अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.
(h) मूल्यसंच शोधा. अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167832950981

**प्रश्न 49**




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−6 ते 6, y=−2 ते 10. अर्धवर्तुळाचा वरचा भाग (−3,2) पासून (0,5) मधून (3,2) पर्यंत जातो. सर्वांत वरचा बिंदू (0,5); दोन्ही टोकांची उंची 2.

मूळ आकृती 217. जाळीत x=−6 ते 6, y=−2 ते 10. अर्धवर्तुळाचा वरचा भाग (−3,2) पासून (0,5) मधून (3,2) पर्यंत जातो. सर्वांत वरचा बिंदू (0,5); दोन्ही टोकांची उंची 2.

(a) f(0) शोधा.
(b) f(−3) शोधा.
(c) f(3) शोधा.
(d) f(x) = 0 असताना x ची मूल्ये शोधा.
(e) x-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.
(f) y-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.
(g) प्रांत शोधा. अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.
(h) मूल्यसंच शोधा. अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

(a) 5.

(b) 2.

(c) 2.

(d) कोणत्याही x साठी f(x) = 0 होत नाही.

(e) असे छेदबिंदू नाहीत.

(f) (0, 5).

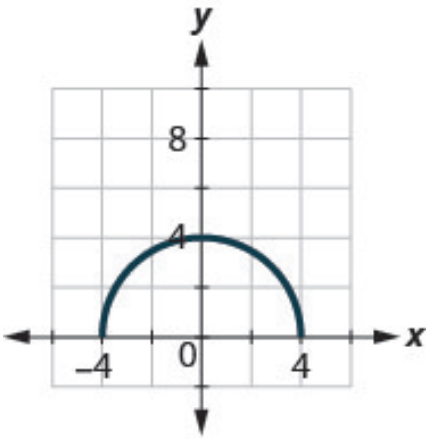
(g) [−3, 3].

(h) [2, 5].

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836573407

**प्रश्न 50**




आकृतीचे वर्णन: जाळीत x=−6 ते 6, y=−2 ते 10. अर्धवर्तुळाचा वरचा भाग (−4,0) पासून (0,4) मधून (4,0) पर्यंत जातो. सर्वांत वरचा बिंदू (0,4); दोन्ही टोके x-अक्षावर.

मूळ आकृती 218. जाळीत x=−6 ते 6, y=−2 ते 10. अर्धवर्तुळाचा वरचा भाग (−4,0) पासून (0,4) मधून (4,0) पर्यंत जातो. सर्वांत वरचा बिंदू (0,4); दोन्ही टोके x-अक्षावर.

(a) f(0) शोधा.

(b) f(x) = 0 असताना x ची मूल्ये शोधा.

(c) x-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.

(d) y-अक्षाला छेदणारे बिंदू शोधा.

(e) प्रांत शोधा. अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

(f) मूल्यसंच शोधा. अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. हा प्रश्न स्वतः सोडवण्यासाठी जतन केला आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167829859771

## लेखनप्रश्न

### प्रश्न 51

आलेखावरून प्रांत कसा शोधायचा हे स्वतःच्या शब्दांत स्पष्ट करा.

स्रोतात या लेखनप्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. तुमचे स्पष्टीकरण स्वतः लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836629192

### प्रश्न 52

आलेखावरून मूल्यसंच कसा शोधायचा हे स्वतःच्या शब्दांत स्पष्ट करा.

स्रोतात या लेखनप्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. तुमचे स्पष्टीकरण स्वतः लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167830004585

### प्रश्न 53

उभ्या रेषेची कसोटी कशी वापरायची हे स्वतःच्या शब्दांत स्पष्ट करा.

स्रोतात या लेखनप्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. तुमचे स्पष्टीकरण स्वतः लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836790091

### प्रश्न 54

वर्ग फलन आणि घन फलन यांच्या आलेखांची ढोबळ रेखाटने काढा. या आलेखांत कोणती साम्ये आणि कोणते फरक आहेत?

स्रोतात या लेखनप्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. तुमचे स्पष्टीकरण स्वतः लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833381224

## स्वमूल्यांकन

(a) प्रश्न सोडवल्यानंतर, या विभागातील उद्दिष्टे कितपत साध्य झाली हे तपासण्यासाठी ही सूची वापरा.

| I can... | Confidently | With some help | No-I don't get it! |
|---|---|---|---|
| use the vertical line test. | | | |
| identify graphs of basic functions. | | | |
| read information from a graph. | | | |

आकृतीचे वर्णन: चार स्तंभ आणि चार ओळींचा स्वमूल्यांकन तक्ता. स्तंभ: मला हे करता येते; आत्मविश्वासाने; थोडी मदत घेऊन; नाही—अजून समजले नाही. तीन उद्दिष्टे: उभ्या रेषेची कसोटी वापरणे; मूलभूत फलनांचे आलेख ओळखणे; आलेखातून माहिती वाचणे. तीन मूल्यांकन-स्तंभांतील सर्व नऊ चौकटी रिकाम्या आहेत.

मूळ इंग्रजी स्वमूल्यांकन तक्ता अपरिवर्तित ठेवला आहे. त्याची रिकाम्या चौकटींसह मराठी प्रत खाली आहे; कोणतीही पातळी आधीच निवडलेली नाही.

स्वतः नोंद करण्यासाठी मराठी प्रत

| मला हे करता येते... | आत्मविश्वासाने | थोडी मदत घेऊन | नाही—अजून समजले नाही! |
|---|---|---|---|
| उभ्या रेषेची कसोटी वापरणे. | | | |
| मूलभूत फलनांचे आलेख ओळखणे. | | | |
| आलेखातून माहिती वाचणे. | | | |

(b) ही सूची तपासल्यानंतर, सर्व उद्दिष्टांबाबत आत्मविश्वास मिळवण्यासाठी तुम्ही काय कराल?

Source: A20:m81374#fs-id1167833057322

# धड्याची उजळणी: सरावप्रश्न

## दोन चलांतील रेषीय समीकरणांचे आलेख

वरील मूळ संदर्भ m81369 या इंग्रजी शिकवणी-विभागाकडे जातो; त्यासाठी इंटरनेट लागते. त्या विभागाचा पूर्ण मराठी अनुवाद येथे नाही.

काटकोनी सहनिर्देशक पद्धतीत x-अक्ष आडवा आणि y-अक्ष उभा असतो. क्रमित जोडीतील पहिला सहनिर्देशक x आणि दुसरा y असतो. फक्त दिलेले स्वतंत्र बिंदू दाखवायचे असतील, तर ते आपोआप जोडू नका. रेषीय समीकरणाचा आलेख काढताना मात्र त्या समीकरणाच्या सर्व उकलींची सरळ रेषा दाखवायची आहे; आकृतीतील बाण रेषा पुढे चालू असल्याचे दर्शवतात.

स्रोतात 14 प्रश्नांची उत्तरे आहेत; ती मूळ उत्तरांच्या ओळखचिन्हांसह दिली आहेत. उरलेल्या 13 प्रश्नांना स्रोत-उत्तर नाही; तशी स्पष्ट नोंद केली आहे. त्या रिकाम्या जागांना अनुवादित उत्तर मानलेले नाही.

### काटकोनी सहनिर्देशक पद्धतीत बिंदू दाखवा

Source: A20:m81374#fs-id1167836689070

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक बिंदू काटकोनी सहनिर्देशक पद्धतीत दाखवा.

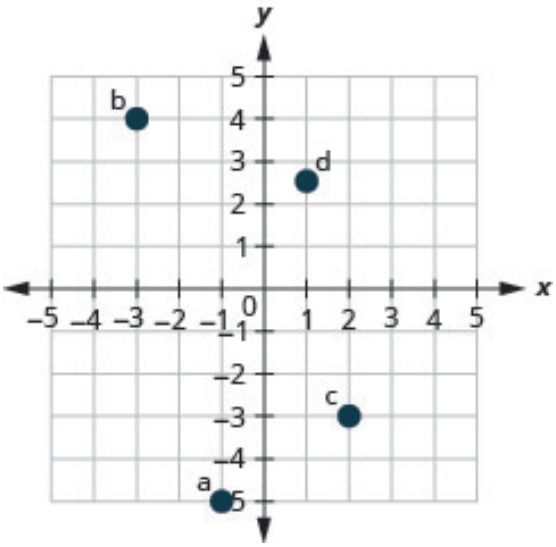
Source: A20:m81374#fs-id1167833059130

**प्रश्न 1**

ⓐ (−1, −5) · ⓑ (−3, 4) · ⓒ (2, −3) · ⓓ (1, 5/2)

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: x आणि y या दोन्ही अक्षांवर −5 ते 5 खुणा. चार स्वतंत्र ठळक बिंदू: a हा (−1, −5), b हा (−3, 4), c हा (2, −3), d हा (1, 5/2). a तिसऱ्या, b दुसऱ्या, c चौथ्या आणि d पहिल्या चतुर्थांशात आहे. बिंदू जोडलेले नाहीत.

मूळ उत्तर-आकृती 349. चित्रातील a, b, c, d ही नावे अनुक्रमे प्रश्नातील ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ भागांना जुळतात.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836560058

### प्रश्न 2

ⓐ (−2, 0) · ⓑ (0, −4) · ⓒ (0, 5) · ⓓ (3, 0)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836729981

पुढील प्रश्नांत दिलेल्या समीकरणाची उकल कोणत्या क्रमित जोड्या आहेत ते ठरवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836408579

### प्रश्न 3

5x + y = 10; ⓐ (5, 1) · ⓑ (2, 0) · ⓒ (4, −10)

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

ⓑ, ⓒ.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836728880

**प्रश्न 4**

$y = 6x - 2$; ⓐ (1, 4) · ⓑ (1/3, 0) · ⓒ (6, −2)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829644642

## बिंदू दाखवून रेषीय समीकरणाचा आलेख काढा

Source: A20:m81374#fs-id1167836667122

पुढील प्रश्नांत बिंदू दाखवून आलेख काढा.

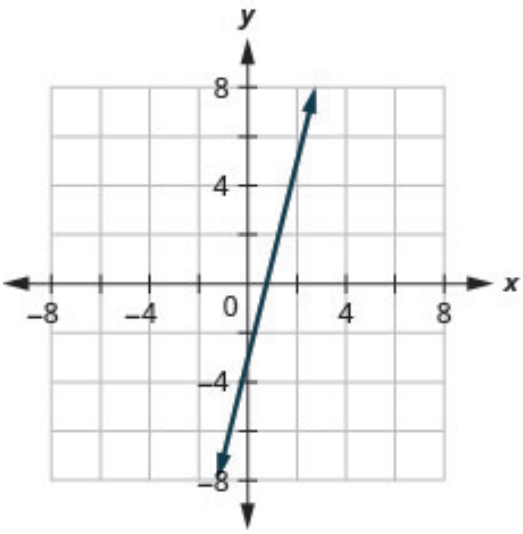
Source: A20:m81374#fs-id1167829785046

**प्रश्न 5**

$y = 4x - 3$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा (−1, −7), (0, −3), (1, 1) आणि (2, 5) या बिंदूंमधून जाते. रेषेच्या दोन्ही टोकांना पुढे चालू असल्याचे बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 351 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

पर्यायी वर्णनाची दुरुस्ती: EN आणि ID स्रोत-वर्णनांत (1, −1), (2, 3) अशा चुकीच्या जोड्या आहेत. मूळ समीकरण आणि प्रत्यक्ष चित्रानुसार योग्य जोड्या (1, 1), (2, 5) आहेत. चित्र किंवा प्रश्नाचे समीकरण बदललेले नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836423872

**प्रश्न 6**

$y = -3x$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

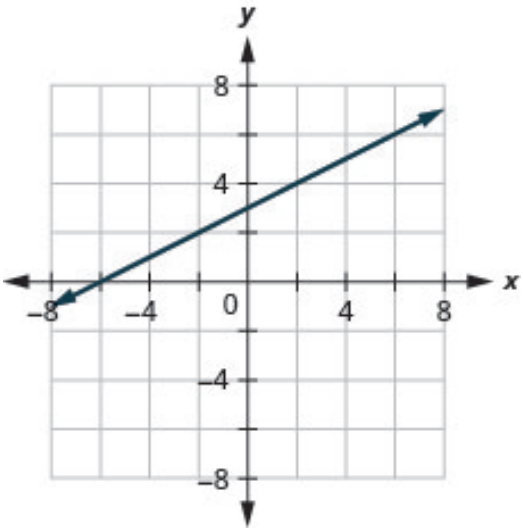
Source: A20:m81374#fs-id1167833326537

**प्रश्न 7**

y = (1/2)x + 3

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा (−6, 0), (0, 3), (2, 4) आणि (4, 5) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांवरील बाण रेषा पुढे चालू असल्याचे दर्शवतात.

मूळ उत्तर-आकृती 353.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829859281

**प्रश्न 8**

y = −(4/5)x − 1

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

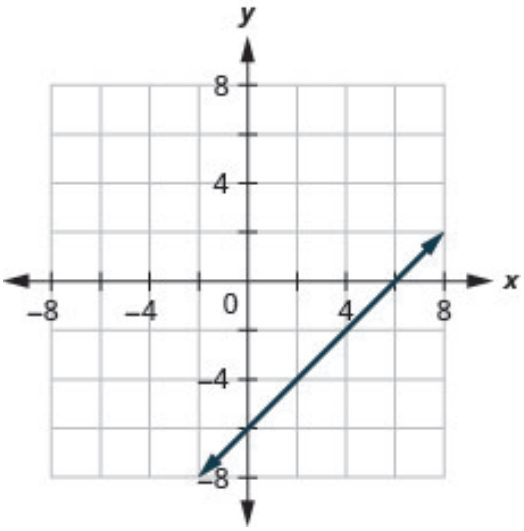
Source: A20:m81374#fs-id1167836624857

**प्रश्न 9**

x − y = 6

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा (−1, −7), (0, −6), (3, −3) आणि (6, 0) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 355.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167826169944

### प्रश्न 10

$2x + y = 7$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

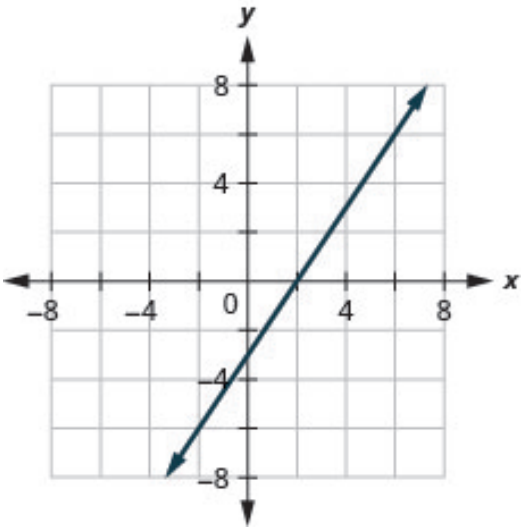
Source: A20:m81374#fs-id1167836705576

### प्रश्न 11

$3x - 2y = 6$

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा (−2, −6), (0, −3), (2, 0) आणि (4, 3) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 357.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829688321

## उभ्या आणि आडव्या रेषांचे आलेख काढा

Source: A20:m81374#fs-id1167836296637

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक समीकरणाचा आलेख काढा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833019205

### प्रश्न 12

$y = -2$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

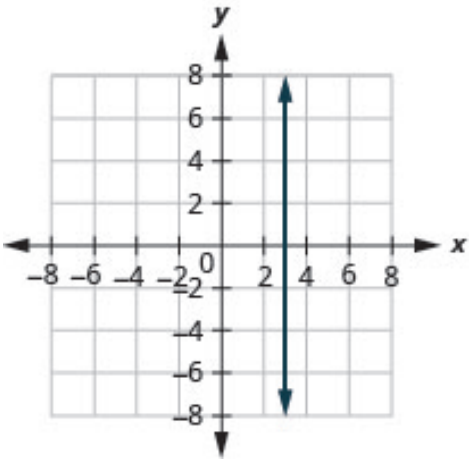
Source: A20:m81374#fs-id1167829861802

### प्रश्न 13

$x = 3$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. x = 3 येथे उभी सरळ रेषा असून ती (3, −1), (3, 0) आणि (3, 1) या बिंदूंमधून जाते. तिच्या वरच्या आणि खालच्या टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 359.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836698868

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक समीकरण-जोडीचे दोन्ही आलेख एकाच काटकोनी सहनिर्देशक पद्धतीत काढा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833207874

**प्रश्न 14**

$y = -2x$ आणि $y = -2$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

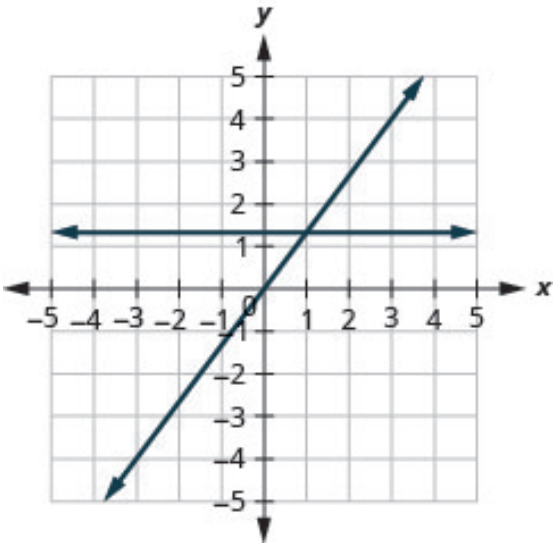
Source: A20:m81374#fs-id1167836611473

**प्रश्न 15**

$y = (4/3)x$ आणि $y = 4/3$

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −5 ते 5 खुणा. एक आडवी रेषा (0, 4/3), (1, 4/3), (2, 4/3) या बिंदूंमधून जाते. दुसरी चढणारी तिरपी रेषा (0, 0), (1, 4/3), (2, 8/3) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही रेषांना पुढे चालू असल्याचे बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 361: दोन्ही समीकरणांचे आलेख एकाच अक्षांवर.

## प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836407159

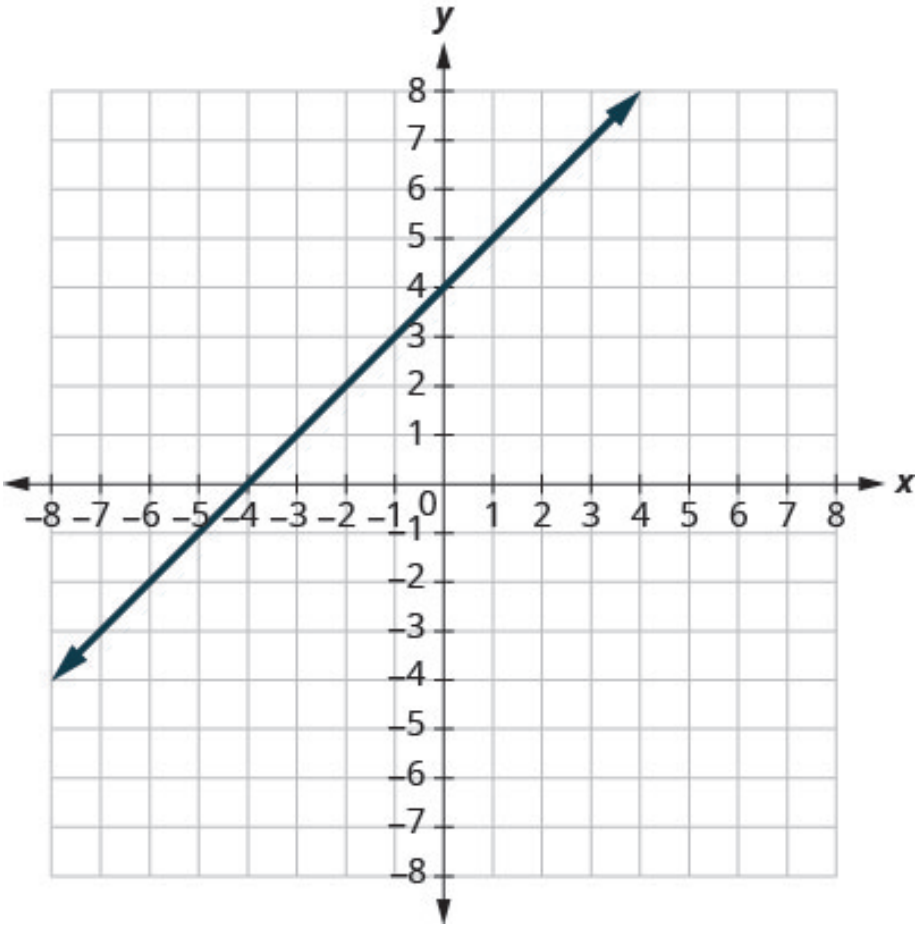
### x-अक्ष आणि y-अक्ष यांवरील छेदबिंदू शोधा

Source: A20:m81374#fs-id1167824578489

पुढील प्रश्नांत x-अक्ष आणि y-अक्ष यांवरील छेदबिंदू शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836340022

**प्रश्न 16**



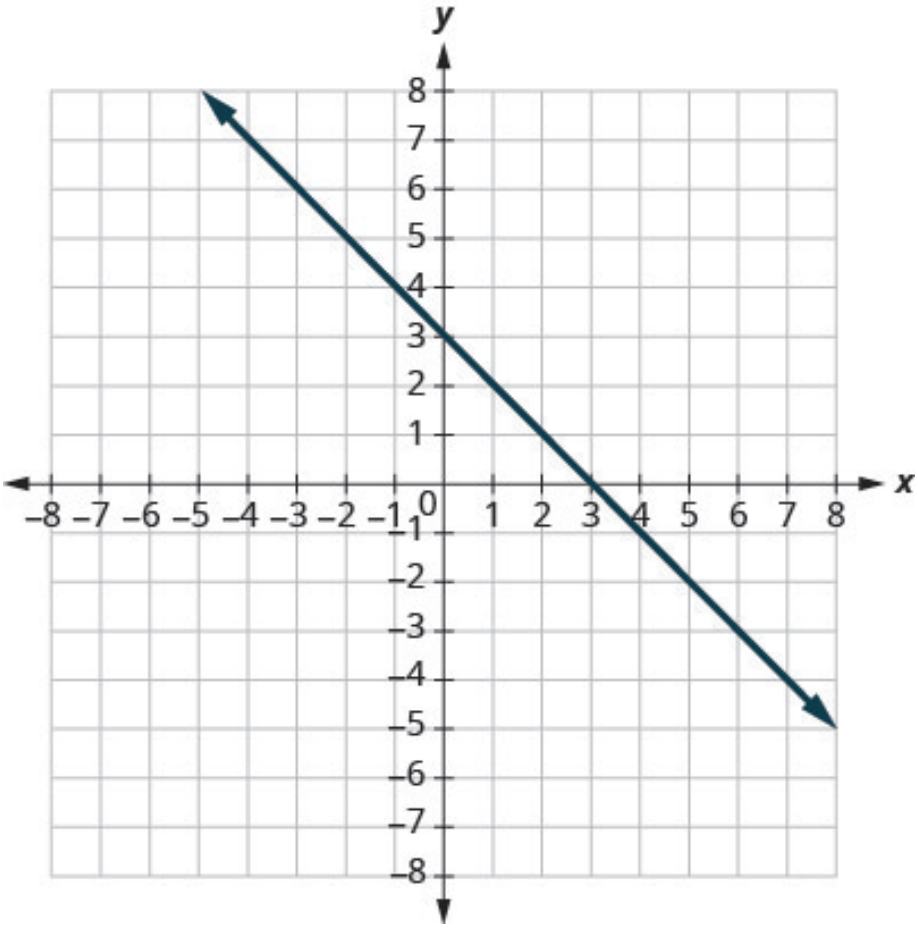

आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा (−6, −2), (−4, 0), (−2, 2), (0, 4), (2, 6) आणि (4, 8) या बिंदूंमधून जाते. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 220.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836692041

**प्रश्न 17**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे उतरणारी सरळ रेषा (−2, 5), (−1, 4), (0, 3), (3, 0) आणि (6, −3) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 221.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

(0, 3), (3, 0).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829751646

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक समीकरणाच्या आलेखाचे अक्षांवरील छेदबिंदू शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833369799

**प्रश्न 18**

$x - y = -1$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836627814

**प्रश्न 19**

$x + 2y = 6$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

(6, 0), (0, 3).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836514020

**प्रश्न 20**

$2x + 3y = 12$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836697400

**प्रश्न 21**

$y = (3/4)x - 12$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

(16, 0), (0, −12).

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167824737382

**प्रश्न 22**

$y = 3x$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836537272

## अक्षांवरील छेदबिंदू वापरून रेषेचा आलेख काढा

Source: A20:m81374#fs-id1167829595359

पुढील प्रश्नांत अक्षांवरील छेदबिंदू वापरून आलेख काढा.

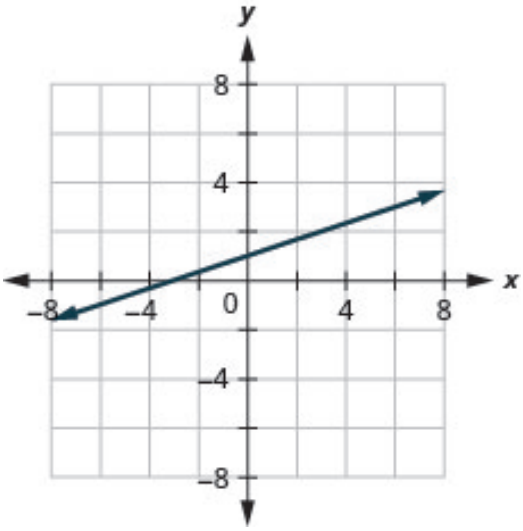
Source: A20:m81374#fs-id1167829906596

**प्रश्न 23**

$-x + 3y = 3$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा (−3, 0), (0, 1), (3, 2) आणि (6, 3) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 362.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829877972

**प्रश्न 24**

$x - y = 4$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

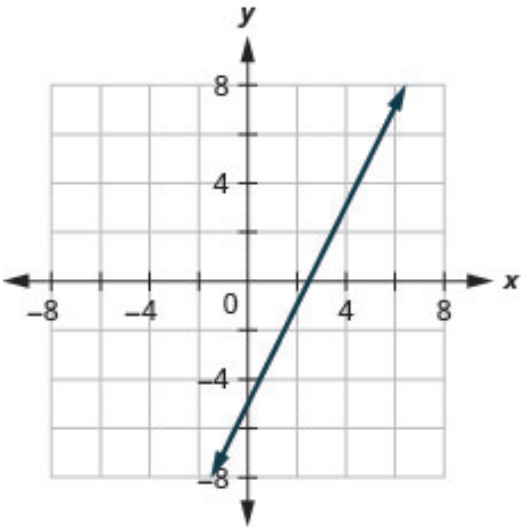
Source: A20:m81374#fs-id1167833057045

**प्रश्न 25**

$2x - y = 5$

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा (0, −5), (1, −3), (2, −1) आणि (3, 1) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 364.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167824648910

### प्रश्न 26

$2x - 4y = 8$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

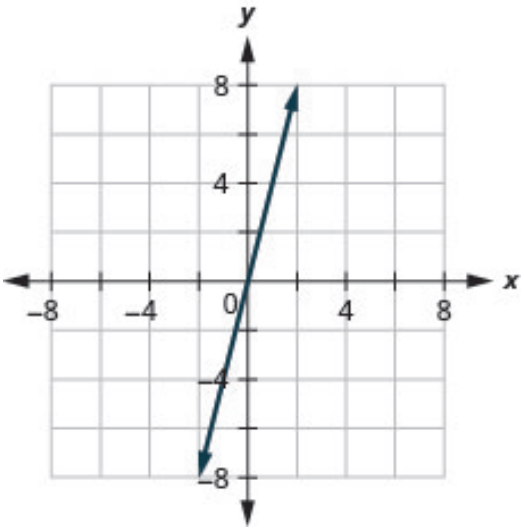
Source: A20:m81374#fs-id1167836509101

### प्रश्न 27

$y = 4x$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा (−1, −4), (0, 0) आणि (1, 4) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांवरील बाण रेषा पुढे चालू असल्याचे दर्शवतात.

मूळ उत्तर-आकृती 366 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

पर्यायी वर्णनाची दुरुस्ती: EN आणि ID स्रोत-वर्णनांत (−1, 4), (1, −4) अशा विरुद्ध दिशेच्या रेषेवरील जोड्या दिल्या आहेत. मूळ समीकरण आणि प्रत्यक्ष चढत्या रेषेनुसार त्या (−1, −4), (1, 4) असायला हव्यात. चित्र किंवा प्रश्नाचे समीकरण बदललेले नाही.

जोडलेले स्पष्टीकरण: येथे दोन्ही अक्षांवरील छेदबिंदू एकच आदिबिंदू (0, 0) आहे. एका बिंदूवरून एकच रेषा ठरत नाही. म्हणून आणखी एक उकल (1, 4) वापरा; समीकरणात ही मूल्ये ठेवल्यास 4 = 4 · 1 मिळते. या दोन वेगवेगळ्या बिंदूंमधून जाणारी सरळ रेषा काढा. ही पद्धत-नोंद नव्याने जोडलेली आहे; स्रोताने फक्त वरील उत्तर-आकृती दिली आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836626758

## रेषेचा उतार

वरील मूळ संदर्भ m81370 या इंग्रजी शिकवणी-विभागाकडे जातो आणि त्यासाठी इंटरनेट लागते. त्या पूर्ण विभागाचा मराठी अनुवाद येथे नाही.

क्रमित जोडीतील पहिला सहनिर्देशक x आणि दुसरा y असतो. उभ्या नसलेल्या रेषेचा उतार धन, ऋण किंवा शून्य असू शकतो; उभ्या रेषेचा उतार परिभाषित नसतो. “उतार” हा शब्द केवळ खाली उतरणाऱ्या रेषेसाठी नाही. y = mx + b या रूपात m हा उतार आणि b हे y-अक्षावरील छेदाचे y-मूल्य आहे; त्याचा छेदबिंदू (0, b) आहे. या दोन मांडण्या वेगळ्या ओळखा.

स्रोतात 18 प्रश्नांची उत्तरे आहेत; ती मूळ ओळखचिन्हांसह दिली आहेत. उरलेल्या 18 प्रश्नांची स्रोत-उत्तरे नाहीत, आणि तशी स्पष्ट नोंद केली आहे. येथे त्यांच्यासाठी नवीन उत्तरे तयार केलेली नाहीत.

### रेषेचा उतार शोधा

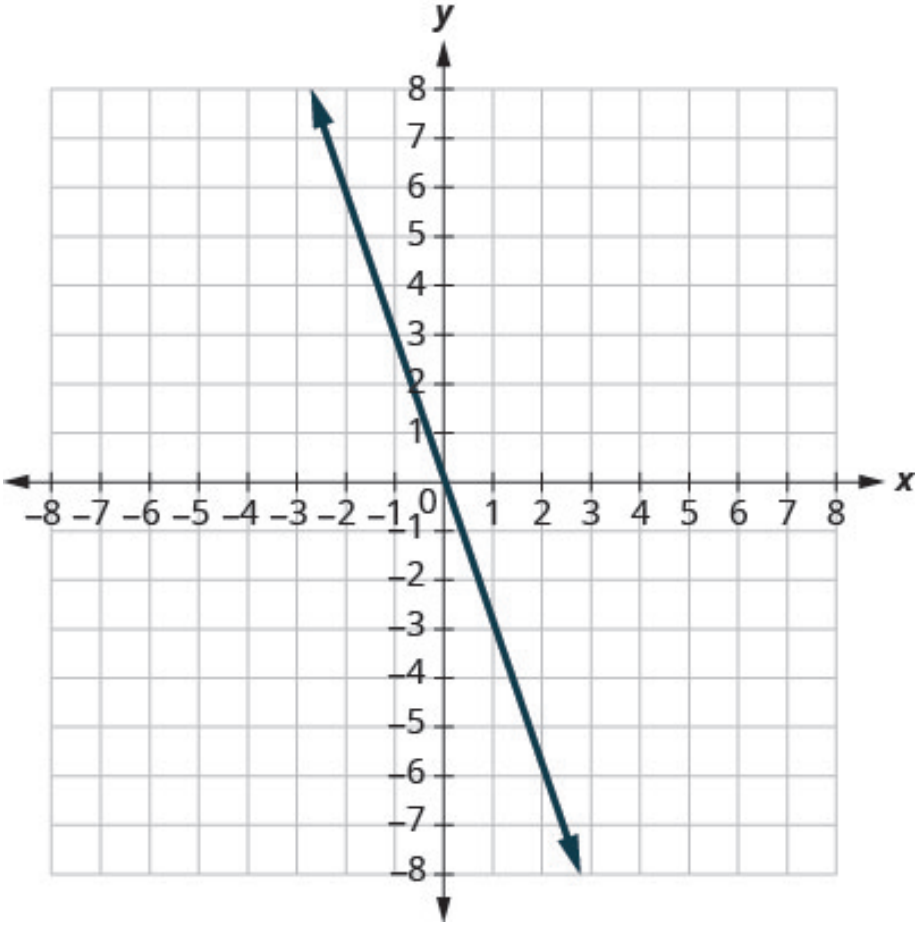
Source: A20:m81374#fs-id1167833047231

पुढील प्रश्नांत दाखवलेल्या प्रत्येक रेषेचा उतार शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836540143

पर्यायी वर्णनांची दुरुस्ती: पुढील 222–225 या चार मूळ आकृत्यांच्या EN आणि ID वर्णनांत दोन्ही अक्षांच्या खुणा −6 ते 6 म्हटल्या आहेत. प्रत्यक्ष चारही चित्रांत त्या −8 ते 8 आहेत. मराठी वर्णने चित्रांनुसार दुरुस्त केली आहेत; मूळ प्रश्न, बिंदू किंवा चित्रे बदललेली नाहीत.

**प्रश्न 1**



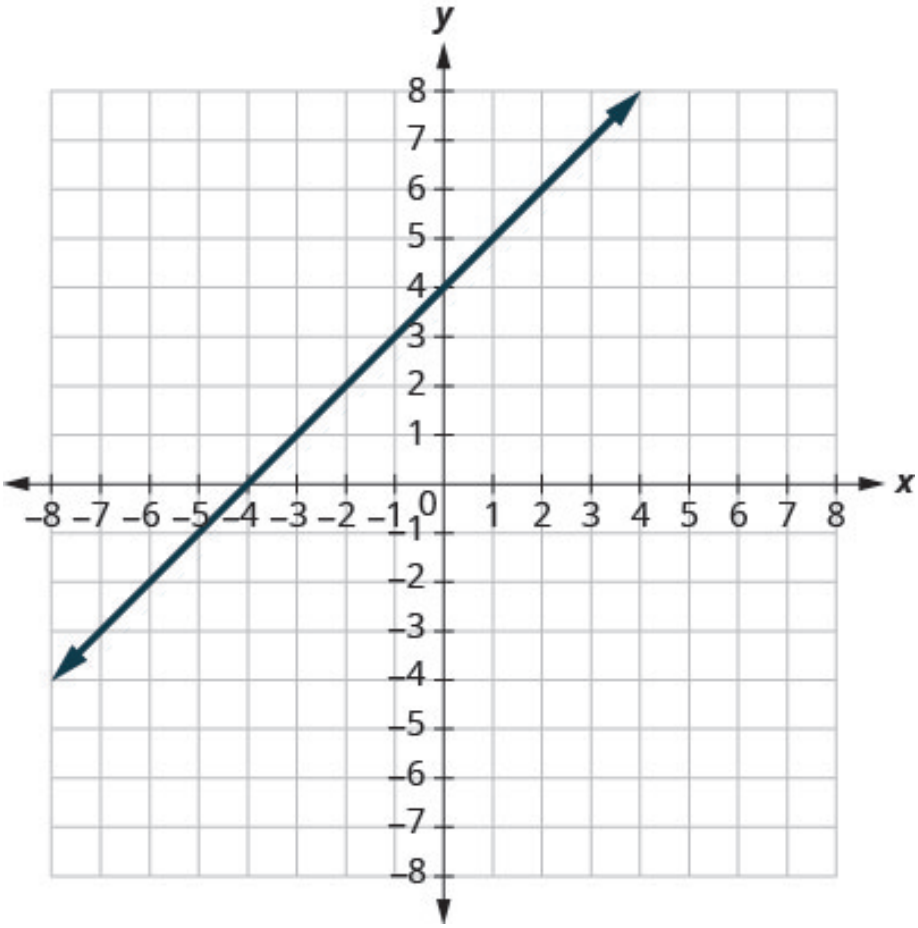

आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे उतरणारी सरळ रेषा (0, 0) आणि (1, −3) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना पुढे चालू असल्याचे बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 222 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836366545

**प्रश्न 2**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा (−4, 0) आणि (0, 4) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 223 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

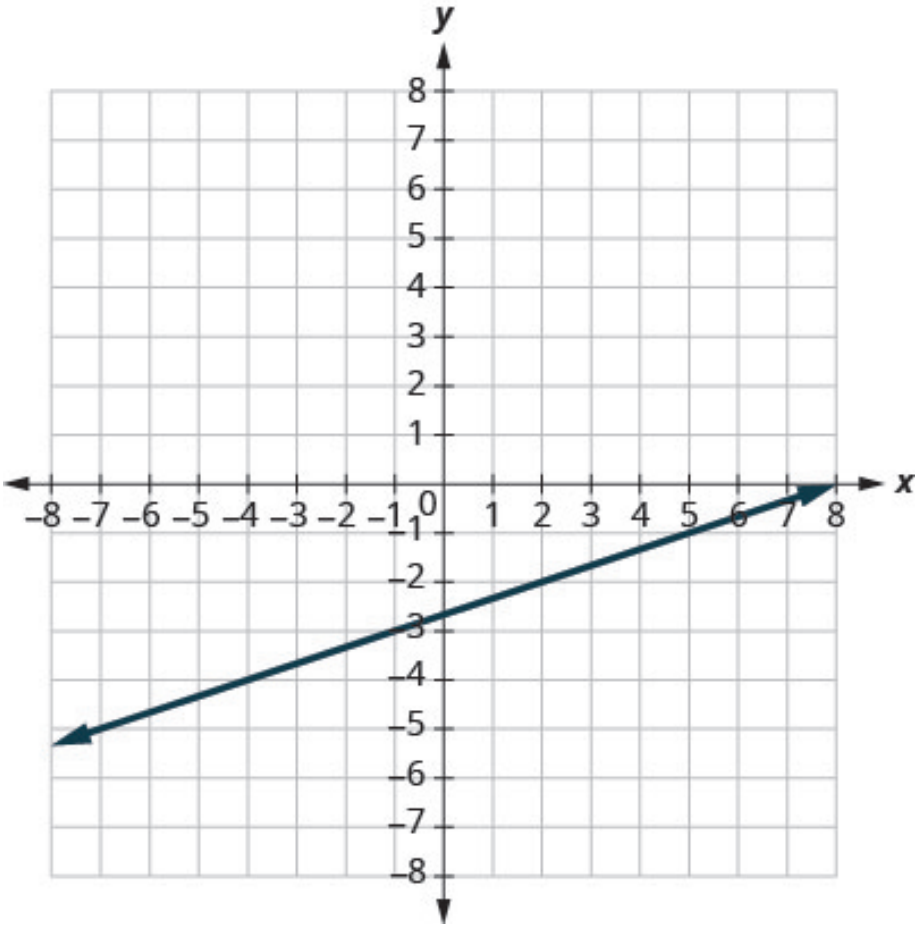
**स्रोतातील उत्तर**

1

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829691193

**प्रश्न 3**



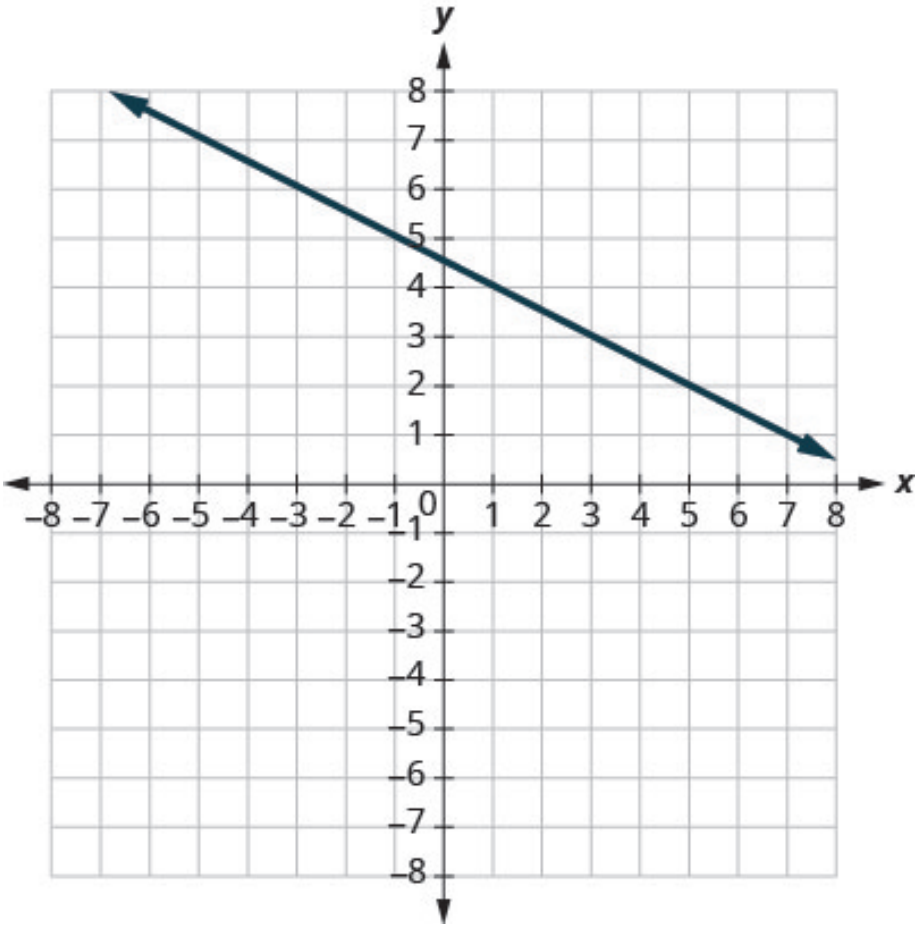

आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे हळूहळू चढणारी सरळ रेषा (−4, −4) आणि (2, −2) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 224 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836790118

**प्रश्न 4**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे उतरणारी सरळ रेषा (1, 4) आणि (5, 2) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 225 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

−(1/2)

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836623132

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक रेषेचा उतार शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836738035

**प्रश्न 5**

y = 2

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833086454

**प्रश्न 6**

$x = 5$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

उतार परिभाषित नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836399770

**प्रश्न 7**

$x = -3$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836398874

**प्रश्न 8**

$y = -1$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

0

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829578786

## उताराचे सूत्र वापरून दोन बिंदूंमधून जाणाऱ्या रेषेचा उतार शोधा

Source: A20:m81374#fs-id1167829586801

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक बिंदू-जोडीमधून जाणाऱ्या रेषेचा उतार शोधण्यासाठी उताराचे सूत्र वापरा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829931428

**प्रश्न 9**

$(-1, -1), (0, 5)$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167824734049

**प्रश्न 10**

(3, 5), (4, −1)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

−6

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836322980

**प्रश्न 11**

(−5, −2), (3, 2)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836738195

**प्रश्न 12**

(2, 1), (4, 6)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

(5/2)

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836391480

## एक बिंदू आणि उतार दिलेला असताना रेषेचा आलेख काढा

Source: A20:m81374#fs-id1167836387581

पुढील प्रश्नांत दिलेल्या बिंदूमधून जाणाऱ्या आणि दिलेला उतार असलेल्या प्रत्येक रेषेचा आलेख काढा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829714127

**प्रश्न 13**

(2, −2); m = (5/2)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

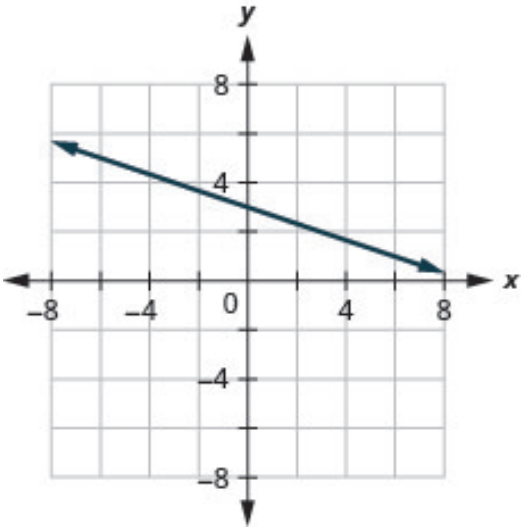
Source: A20:m81374#fs-id1167836620933

**प्रश्न 14**

(−3, 4); m = −(1/3)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे उतरणारी सरळ रेषा (−3, 4) आणि (0, 3) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 368 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829717719

**प्रश्न 15**

x-अक्षावरील छेदाचे x-मूल्य −4; m = 3.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

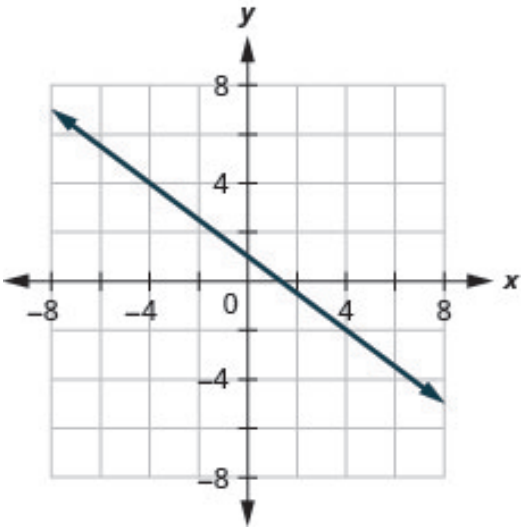
Source: A20:m81374#fs-id1167829878927

**प्रश्न 16**

y-अक्षावरील छेदाचे y-मूल्य 1; m = −(3/4).

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8 खुणा. डावीकडून उजवीकडे उतरणारी सरळ रेषा (0, 1) आणि (4, −2) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 370 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836536584

## उतार आणि अक्षावरील छेद वापरून रेषेचा आलेख काढा

Source: A20:m81374#fs-id1167829783830

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक रेषेचा उतार आणि y-अक्षावरील छेदबिंदू ओळखा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836717185

### प्रश्न 17

$y = -4x + 9$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836524200

### प्रश्न 18

$y = (5/3)x - 6$

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

$m = (5/3)$; $(0, -6)$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836434016

**प्रश्न 19**

$5x + y = 10$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836507861

**प्रश्न 20**

$4x - 5y = 8$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

$m = (4/5); (0, -(8/5))$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829741996

पुढील प्रश्नांत उतार आणि y-अक्षावरील छेदबिंदू वापरून प्रत्येक समीकरणाच्या रेषेचा आलेख काढा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836312931

**प्रश्न 21**

$y = 2x + 3$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

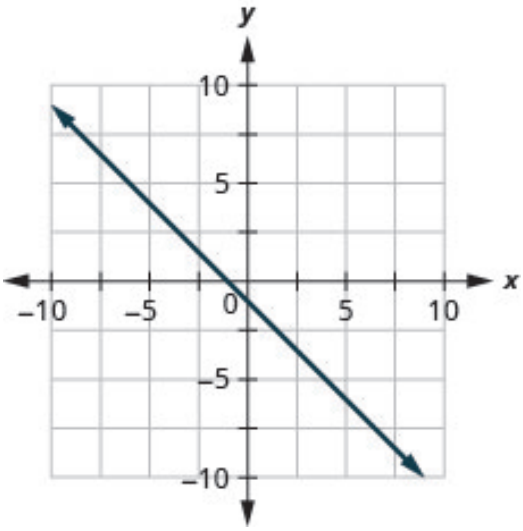
Source: A20:m81374#fs-id1167836558639

**प्रश्न 22**

$y = -x - 1$

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −10 ते 10 खुणा. डावीकडून उजवीकडे उतरणारी सरळ रेषा (0, −1) आणि (1, −2) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 372 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836533072

### प्रश्न 23

$y = -(2/5)x + 3$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

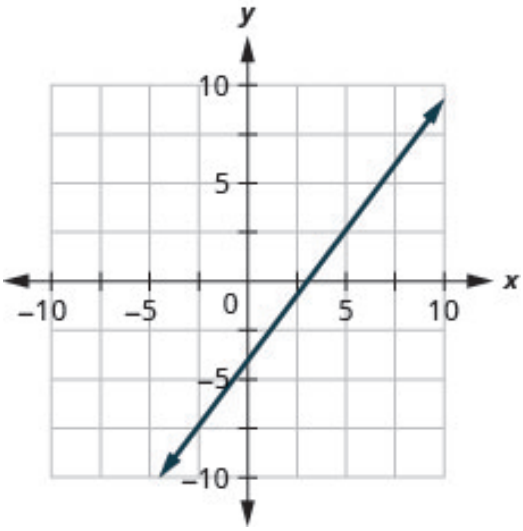
Source: A20:m81374#fs-id1167833227116

### प्रश्न 24

$4x - 3y = 12$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**




आकृतीचे वर्णन: दोन्ही अक्षांवर −10 ते 10 खुणा. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा (0, −4) आणि (3, 0) या बिंदूंमधून जाते. दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 374 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836628505

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक रेषेचा आलेख काढण्यासाठी सर्वांत सोयीची पद्धत कोणती ते ठरवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836558141

“सर्वांत सोयीची” पद्धत निवडताना एकापेक्षा अधिक योग्य मार्ग असू शकतात. खाली दिलेली स्रोत-उत्तरे त्या स्रोताची निवड आहेत; इतर अचूक आलेख-पद्धती अशक्य असल्याचा दावा नाही.

**प्रश्न 25**

$x = 5$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836509786

**प्रश्न 26**

$y = -3$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

आडवी रेषा काढा.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829952812

**प्रश्न 27**

$2x + y = 5$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833060079

**प्रश्न 28**

$x - y = 2$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

अक्षांवरील छेदबिंदू वापरा.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833059952

**प्रश्न 29**

$y = (2/2)x + 2$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833019834

लेखन-नोंद: दोन्ही पिन केलेल्या स्रोतांत x चा सहगुणक अपूर्णांक 2/2 असा आहे. तो येथे तसाच ठेवला आहे; तो 22 किंवा 2 असा वाचू नका.

**प्रश्न 30**

$y = (3/4)x - 1$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

बिंदू दाखवून आलेख काढा.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836525357

## उतार-खंड रूपातील समीकरणांचे व्यावहारिक उपयोग: आलेख काढा आणि अर्थ स्पष्ट करा

Source: A20:m81374#fs-id1167836527756

पुढील पहिल्या प्रश्नात m हे भोजनांची संख्या दर्शवते; आधीच्या उतारासाठी वापरलेल्या m शी ते गोंधळू नका. प्रत्येक प्रश्नातील अक्षराचा त्या प्रश्नात दिलेला अर्थ वापरा. भोजनांची संख्या ही ऋण नसलेली पूर्णसंख्या मानली आहे; हे मोजणीसाठी जोडलेले स्पष्टीकरण आहे.

**प्रश्न 31**

कॅथरीन वैयक्तिक ग्राहकांसाठी आचारी म्हणून काम करते. $C = 6.5m + 42$ हे समीकरण तिचा डॉलरमधील आठवड्याचा खर्च C आणि त्या आठवड्यात तिने पुरवलेल्या भोजनांची संख्या m यांतील संबंधाचे प्रतिरूप आहे.

ⓐ तिने एकही भोजन पुरवले नाही अशा आठवड्याचा खर्च शोधा.
ⓑ तिने 14 भोजने पुरवली अशा आठवड्याचा खर्च शोधा.
ⓒ समीकरणातील उतार आणि C-अक्षावरील छेदाचा अर्थ स्पष्ट करा.
ⓓ समीकरणाचा आलेख काढा.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167826211804

**प्रश्न 32**

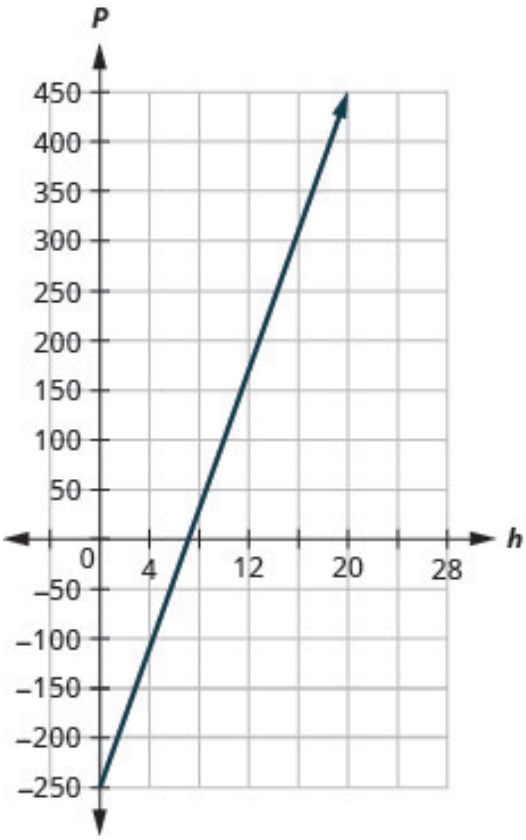
मार्जरी पियानो शिकवते. $P = 35s - 250$ हे समीकरण तिचा डॉलरमधील आठवड्याचा नफा P आणि त्या आठवड्यात विद्यार्थ्यांना तिने दिलेल्या धड्यांची संख्या s यांतील संबंधाचे प्रतिरूप आहे.

ⓐ तिने एकही धडा शिकवला नाही अशा आठवड्याचा नफा शोधा.
ⓑ तिने 20 धडे शिकवले अशा आठवड्याचा नफा शोधा.
ⓒ समीकरणातील उतार आणि P-अक्षावरील छेदाचा अर्थ स्पष्ट करा.
ⓓ समीकरणाचा आलेख काढा.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ −250 डॉलर.
ⓑ 450 डॉलर.
ⓒ उतार 35 याचा अर्थ: प्रत्येक अतिरिक्त धड्यासाठी मार्जरीचा आठवड्याचा नफा P हा 35 डॉलरने वाढतो. P-अक्षावरील छेदाचा अर्थ: धड्यांची संख्या शून्य असताना मार्जरीला 250 डॉलर तोटा होतो.
ⓓ




आकृतीचे वर्णन: मूळ चित्रातील आडव्या अक्षाला h आणि उभ्या अक्षाला P अशी नावे आहेत. आडवी जाळी −4 ते 28 आणि उभ्या अक्षावरील खुणा −250 ते 450 आहेत. चढणारी सरळ रेषा (0, −250) आणि (20, 450) या बिंदूंमधून जाते; वरच्या टोकाला बाण आहे. प्रश्नातील धड्यांची संख्या s आणि चित्रातील h यांचा फरक खाली स्पष्ट केला आहे.

मूळ उत्तर-आकृती 376 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

अक्ष-नावाची नोंद: EN आणि ID या दोन्ही मूळ चित्रांत आडव्या अक्षाला h असे लिहिले आहे; प्रश्नात धड्यांची संख्या s आहे. या उत्तराचा संदर्भ वाचताना चित्रातील आडवे मूल्य हे s मानावे. अक्षांना सर्वसाधारण x, y म्हणणारे स्रोत-वर्णन येथे प्रत्यक्ष h, P नावे सांगून स्पष्ट केले आहे. मूळ चित्र बदललेले नाही.

मोजणीची नोंद: विद्यार्थ्यांची संख्या आणि शिकवलेल्या धड्यांची संख्या या वेगळ्या गोष्टी आहेत. येथे s म्हणजे धड्यांची संख्या; ती ऋण नसलेली पूर्णसंख्या असते. मूळ सलग रेषा सूत्राचा आलेख दाखवते; ऋण किंवा अपूर्णांक धडे प्रत्यक्ष शिकवले जातात असा त्याचा अर्थ नाही. चित्राची चौकट ही संपूर्ण परवानगी असलेल्या मोजणीची मर्यादा नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829709310

## उतार वापरून समांतर आणि लंब रेषा ओळखा

Source: A20:m81374#fs-id1167833350392

पुढील प्रश्नांत उतार आणि y-अक्षावरील छेदबिंदू वापरून रेषा समांतर आहेत, लंब आहेत की यांपैकी कोणतेही नाही ते ठरवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836705885

### प्रश्न 33

$4x - 3y = -1$; $y = (4/3)x - 3$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836730415

**प्रश्न 34**

$y = 5x - 1$; $10x + 2y = 0$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

समांतरही नाहीत आणि लंबही नाहीत.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836499090

**प्रश्न 35**

$3x - 2y = 5$; $2x + 3y = 6$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836717592

**प्रश्न 36**

$2x - y = 8$; $x - 2y = 4$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

समांतरही नाहीत आणि लंबही नाहीत.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836792421

## रेषेचे समीकरण शोधा

वरील मूळ संदर्भ m81371 या इंग्रजी शिकवणी-विभागाकडे जातो आणि त्यासाठी इंटरनेट लागते. त्या पूर्ण विभागाचा मराठी अनुवाद येथे नाही.

स्वतंत्र स्मरणसूचना: उभ्या नसलेल्या रेषेसाठी $y = mx + b$ हे उतार–खंड रूप (slope–intercept form) वापरता येते. येथे $m$ हा उतार आणि $b$ हे $y$-अक्षावरील छेदाचे $y$-मूल्य आहे; छेदबिंदू $(0, b)$ आहे. क्रमित जोडीतील पहिला सहनिर्देशक $x$ आणि दुसरा $y$ असतो.

दिलेला उतार $m$ आणि रेषेवरील बिंदू $(x_1, y_1)$ यांवरून $y - y_1 = m(x - x_1)$ हे बिंदु–उतार रूप (point–slope form) वापरता येते. त्याच मूल्यांचे प्रतिस्थापन केल्यास $b = y_1 - mx_1$ मिळते. समीकरणाची मांडणी बदलताना दोन्ही बाजूंवर समान क्रिया करा; भागाकार करताना भाजक शून्येतर असला पाहिजे.

दोन वेगळ्या बिंदूंचे x-सहनर्दिशक भिन्न असतील, म्हणजे $x_2 \neq x_1$ असेल, तर $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ वापरता येते. दोन्ही रेषांचे उतार परिभाषित असताना समांतर रेषांचे उतार समान असतात. दोन्ही उतार परिभाषित आणि शून्येतर असताना लंब रेषांसाठी $m_1 m_2 = -1$ असते. आडवी व उभी रेषा ही लंब रेषांची वेगळी जोडी आहे; उभ्या रेषेचा उतार परिभाषित नसतो.

स्रोतात 12 प्रश्नांची उत्तरे आहेत; ती मूळ ओळखचिन्हांसह दिली आहेत. उरलेल्या 12 प्रश्नांची स्रोत-उत्तरे नाहीत, आणि तशी स्पष्ट नोंद केली आहे. येथे त्यांच्यासाठी नवीन उत्तरे तयार केलेली नाहीत.

## उतार आणि y-अक्षावरील छेद दिला असताना रेषेचे समीकरण शोधा

Source: A20:m81374#fs-id1167836613250

पुढील प्रश्नांत दिलेला उतार आणि y-अक्षावरील छेदबिंदू असलेल्या रेषेचे समीकरण शोधा. समीकरण उतार–खंड रूपात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829861813

### प्रश्न 1

उतार (1/3) आणि y-अक्षावरील छेदबिंदू (0, −6)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167832937076

### प्रश्न 2

उतार −5 आणि y-अक्षावरील छेदबिंदू (0, −3)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

$y = -5x - 3$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833334748

### प्रश्न 3

उतार 0 आणि y-अक्षावरील छेदबिंदू (0, 4)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829597408

### प्रश्न 4

उतार −2 आणि y-अक्षावरील छेदबिंदू (0, 0)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

$y = -2x$

प्रश्नाकडे परत

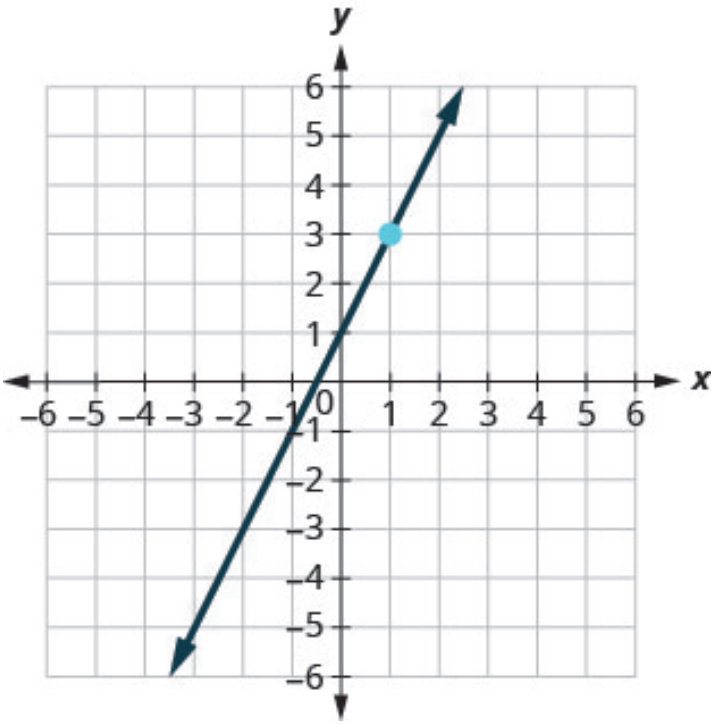
Source: A20:m81374#fs-id1167824732674

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक आलेखात दाखवलेल्या रेषेचे समीकरण शोधा. समीकरण उतार–खंड रूपात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829744040

पर्यायी वर्णनांची दुरुस्ती: पुढील 226–229 या चार आकृत्यांच्या EN आणि ID वर्णनांत अक्षांवरील खुणा −10 ते 10 म्हटल्या आहेत. प्रत्यक्ष चारही मूळ चित्रांत त्या −6 ते 6 आहेत. आकृती 228 च्या स्रोत-वर्णनातील (8, 4) हा रेषेवरील बिंदू चित्राच्या चौकटीबाहेर आहे. मराठी वर्णनांत प्रत्यक्ष चौकट, दिसणारा छेद आणि ठळक बिंदू वापरले आहेत; मूळ चित्रे बदललेली नाहीत.

**प्रश्न 5**



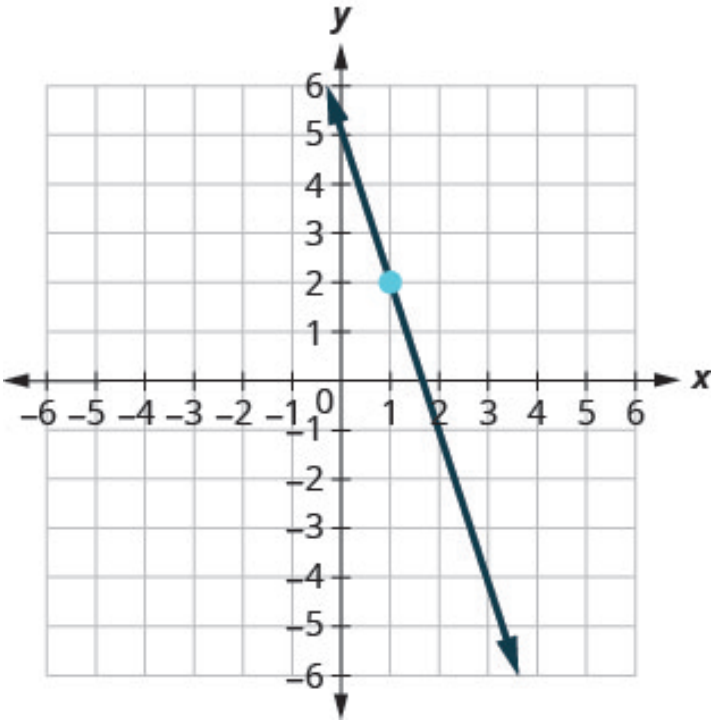

आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −6 ते 6 खुणा आहेत. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा y-अक्षाला (0, 1) येथे छेदते आणि ठळक दाखवलेल्या (1, 3) या बिंदूमधून जाते. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 226 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833025723

**प्रश्न 6**




आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −6 ते 6 खुणा आहेत. डावीकडून उजवीकडे उतरणारी सरळ रेषा y-अक्षाला (0, 5) येथे छेदते आणि ठळक दाखवलेल्या (1, 2) या बिंदूमधून जाते. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 227 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

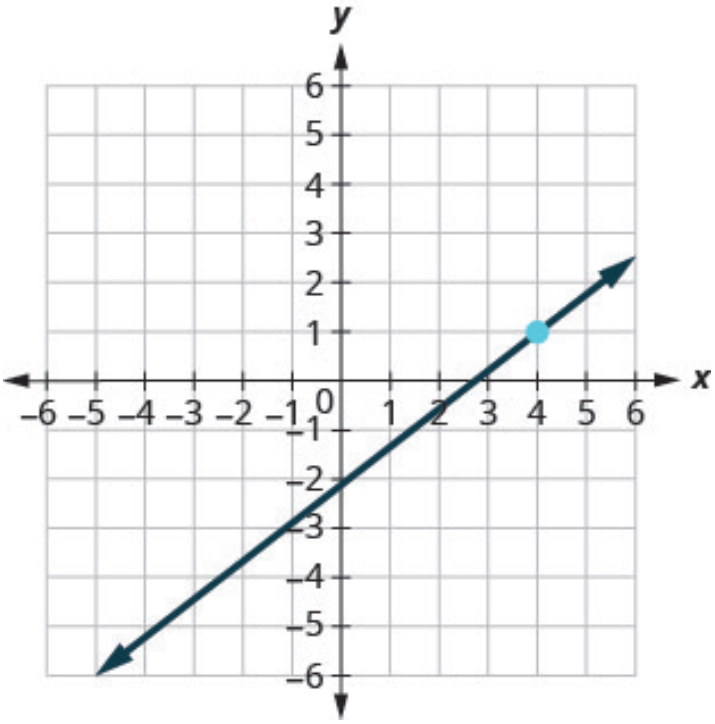
**स्रोतातील उत्तर**

$y = -3x+5$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167824733731

**प्रश्न 7**



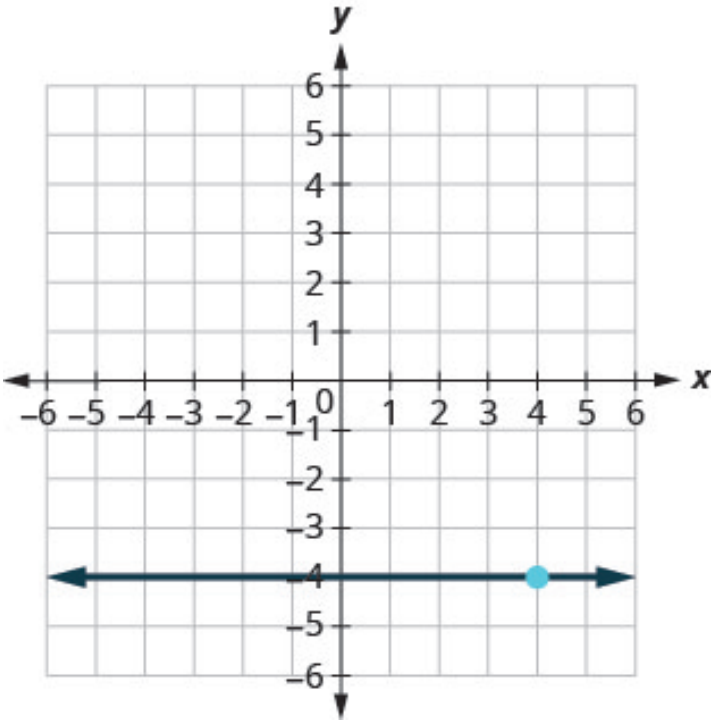

आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −6 ते 6 खुणा आहेत. डावीकडून उजवीकडे चढणारी सरळ रेषा y-अक्षाला (0, −2) येथे छेदते आणि ठळक दाखवलेल्या (4, 1) या बिंदूमधून जाते. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 228 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829597335

**प्रश्न 8**




आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −6 ते 6 खुणा आहेत. आडवी सरळ रेषा y-अक्षाला (0, −4) येथे छेदते आणि ठळक दाखवलेल्या (4, −4) या बिंदूमधून जाते. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 229 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

y = −4

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829921267

## उतार आणि एक बिंदू दिला असताना रेषेचे समीकरण शोधा

Source: A20:m81374#fs-id1167833346720

पुढील प्रश्नांत दिलेला उतार असलेल्या आणि दिलेल्या बिंदूमधून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण शोधा. समीकरण उतार–खंड रूपात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829718877

**प्रश्न 9**

m = −(1/4), बिंदू (−8, 3)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836701331

**प्रश्न 10**

m = (3/5), बिंदू (10, 6)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

y = (3/5)x

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829596447

**प्रश्न 11**

पुढील बिंदूमधून जाणारी आडवी रेषा: (−2, 7)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836518808

**प्रश्न 12**

m = −2, बिंदू (−1, −3)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

y = −2x−5

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829756252

## दोन बिंदू दिले असताना रेषेचे समीकरण शोधा

Source: A20:m81374#fs-id1167829752166

पुढील प्रश्नांत दिलेल्या बिंदूंमधून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण शोधा. समीकरण उतार–खंड रूपात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833086732

स्रोत-सूचनेची मर्यादा: “उतार–खंड रूपात लिहा” ही वरील सूचना उभ्या रेषेला लागू होत नाही. प्रश्न 15, 19 आणि 23 मध्ये उभी रेषा मिळते. अशा वेळी तिचे समीकरण x = c या रूपात लिहा; येथे c हा त्या रेषेवरील सर्व बिंदूंचा समान x-सहनर्दिशक आहे. त्या प्रश्नांची उत्तरे स्रोतात दिलेली नाहीत; ही नोंद त्या सूचनेचे स्पष्टीकरण आहे, स्रोत-उत्तर नाही.

**प्रश्न 13**

(2, 10) आणि (−2, −2)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836550894

**प्रश्न 14**

(7, 1) आणि (5, 0)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

$y = (1/2)x-(5/2)$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167826169452

**प्रश्न 15**

(3, 8) आणि (3, −4)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829749597

**प्रश्न 16**

(5, 2) आणि (−1, 2)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

$y = 2$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167824734798

## दिलेल्या रेषेला समांतर असलेल्या रेषेचे समीकरण शोधा

Source: A20:m81374#fs-id1167829596630

पुढील प्रश्नांत दिलेल्या रेषेला समांतर असलेल्या आणि दिलेल्या बिंदूमधून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण शोधा. समीकरण उतार–खंड रूपात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836366759

**प्रश्न 17**

रेषा $y = -3x+6$, बिंदू (1, −5)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829784008

**प्रश्न 18**

रेषा $2x+5y = -10$, बिंदू (10, 4)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

$y = -(2/5)x+8$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836535046

**प्रश्न 19**

रेषा $x = 4$, बिंदू (−2, −1)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836538320

**प्रश्न 20**

रेषा $y = -5$, बिंदू (−4, 3)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

$y = 3$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829930155

## दिलेल्या रेषेला लंब असलेल्या रेषेचे समीकरण शोधा

Source: A20:m81374#fs-id1167833129252

पुढील प्रश्नांत दिलेल्या रेषेला लंब असलेल्या आणि दिलेल्या बिंदूमधून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण शोधा. समीकरण उतार–खंड रूपात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167824585096

**प्रश्न 21**

रेषा $y = -(4/5)x+2$, बिंदू (8, 9)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167824734676

**प्रश्न 22**

रेषा $2x-3y = 9$, बिंदू $(-4, 0)$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

$y = -(3/2)x-6$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836687826

**प्रश्न 23**

रेषा $y = 3$, बिंदू $(-1, -3)$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167824739288

**प्रश्न 24**

रेषा $x = -5$ बिंदू $(2, 1)$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

$y = 1$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836686948

## दोन चलांतील रेषीय असमांचे आलेख काढा

वरील मूळ संदर्भ m81372 या इंग्रजी शिकवणी-विभागाकडे जातो आणि त्यासाठी इंटरनेट लागते. त्या पूर्ण विभागाचा मराठी अनुवाद येथे नाही. येथे असमा म्हणजे राशींमधील असमान संबंध (inequality); रेषीय असमा हा linear inequality साठी वापरलेला शब्दप्रयोग आहे.

स्वतंत्र स्मरणसूचना: असमेच्या उकली असणाऱ्या सर्व बिंदूंचा संच म्हणजे तिचा आलेख. क्रमित जोडीतील पहिला सहनिर्देशक $x$ आणि दुसरा $y$ असतो. सीमेवरील समता समाविष्ट असेल, म्हणजे $\le$ किंवा $\ge$ चिन्ह असेल, तर सीमारेषा सलग दाखवा. $<$ किंवा $>$ चिन्ह असल्यास समता समाविष्ट नसते; सीमारेषा तुटक दाखवा.

कुठली बाजू छायांकित करायची हे ठरवण्यासाठी सीमारेषेवर नसलेला चाचणीबिंदू निवडा. तो असमेची पूर्तता करत असेल तर त्याच्या बाजूचे अर्धप्रतल छायांकित करा; अन्यथा दुसऱ्या बाजूचे. आदिबिंदू $(0, 0)$ सीमारेषेवर असेल, तर बाजू निवडण्यासाठी दुसरा बिंदू घ्या. याचा अर्थ सीमेवरील बिंदूची उकल म्हणून तपासणी करता येत नाही असा नाही: समता समाविष्ट आहे की नाही हे त्यासाठी निर्णायक असते.

असमेच्या दोन्ही बाजूंमध्ये एकच संख्या मिळवली किंवा वजा केली तरी चिन्हाची दिशा बदलत नाही. दोन्ही बाजूंना धन संख्येने गुणले किंवा भागले तरी दिशा बदलत नाही; ऋण संख्येने गुणले किंवा भागले तर चिन्हाची दिशा उलटते. शून्याने भागाकार करता येत नाही. समीकरणांसाठीच्या समान-क्रिया नियमाचा अर्थ असमांसाठी नेहमीच चिन्ह तसेच ठेवावे असा घेऊ नका.

स्रोतात सात प्रश्नांची उत्तरे आहेत; त्यात तीन केवळ आकृत्यांत, तीन केवळ मजकुरात आणि एक मजकूर व आकृती अशा मिश्र रूपात आहे. इतर सात प्रश्नांची स्रोत-उत्तरे नाहीत. त्यांच्यासाठी नवीन उत्तरे येथे तयार केलेली नाहीत.

## दोन चलांतील असमेच्या उकलांची पडताळणी करा

Source: A20:m81374#fs-id1167832951212

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक क्रमित जोडी दिलेल्या असमेची उकल आहे का ते ठरवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833272639

### प्रश्न 1

प्रत्येक क्रमित जोडी पुढील असमेची उकल आहे का ते ठरवा — $y < x-3$:

ⓐ (0, 1) ⓑ (−2, −4) ⓒ (5, 2) ⓓ (3, −1)
ⓔ (−1, −5)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833052460

### प्रश्न 2

प्रत्येक क्रमित जोडी पुढील असमेची उकल आहे का ते ठरवा — $x+y > 4$:

ⓐ (6, 1) ⓑ (−3, 6) ⓒ (3, 2) ⓓ (−5, 10) ⓔ (0, 0)

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ होय ⓑ नाही ⓒ होय ⓓ होय; ⓔ नाही

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833379473

## असमेच्या उकली आणि तिचा आलेख यांतील संबंध ओळखा

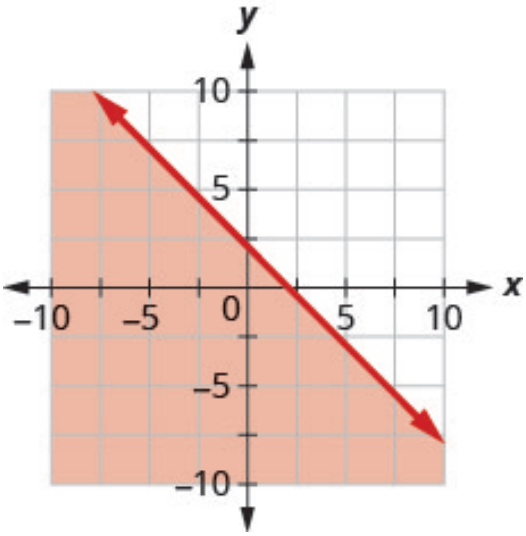
Source: A20:m81374#fs-id1167833057530

पुढील प्रश्नांत छायांकित भागाने दर्शवलेली असमा लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836312912

### प्रश्न 3

पुढील सीमारेषा असलेल्या आलेखाने दर्शवलेली असमा लिहा — $y = -x+2$.




आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −10 ते 10 खुणा आहेत. सलग लाल सीमारेषा (0, 2) आणि (2, 0) या बिंदूंमधून जाते. रेषेखालील, डाव्या बाजूकडील अर्धप्रतल गुलाबी छायांकित आहे; सीमारेषाही उकलसंचात समाविष्ट आहे. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

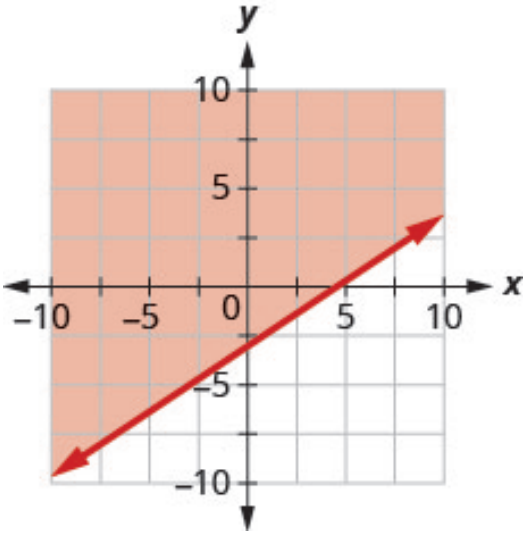
मूळ प्रश्न-आकृती 230 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167824841358

**प्रश्न 4**

पुढील सीमारेषा असलेल्या आलेखाने दर्शवलेली असमा लिहा — y = (2/3)x−3.




आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −10 ते 10 खुणा आहेत. सलग लाल सीमारेषा (0, −3), (3, −1) आणि (6, 1) या बिंदूंमधून जाते. रेषेच्या वरच्या बाजूचे, डावीकडील अर्धप्रतल गुलाबी छायांकित आहे; सीमारेषाही उकलसंचात समाविष्ट आहे. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 231 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

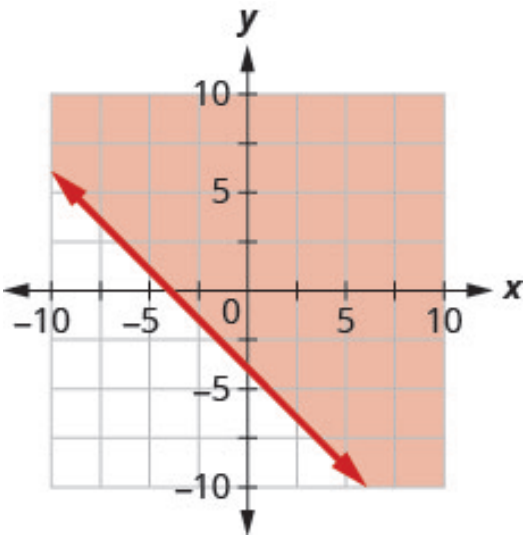
$y \geq (2/3)x - 3$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836515439

**प्रश्न 5**

पुढील सीमारेषा असलेल्या आलेखातील छायांकित भागाने दर्शवलेली असमा लिहा — $x+y = -4$.




आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −10 ते 10 खुणा आहेत. सलग लाल सीमारेषा (0, −4) आणि (−4, 0) या बिंदूंमधून जाते. रेषेच्या वरच्या बाजूचे, उजवीकडील अर्धप्रतल गुलाबी छायांकित आहे; सीमारेषाही उकलसंचात समाविष्ट आहे. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

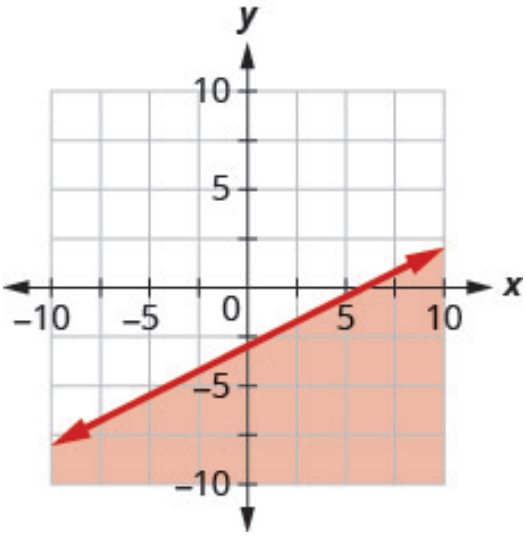
मूळ प्रश्न-आकृती 232 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829688943

**प्रश्न 6**

पुढील सीमारेषा असलेल्या आलेखातील छायांकित भागाने दर्शवलेली असमा लिहा — $x-2y = 6$.




आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −10 ते 10 खुणा आहेत. सलग लाल सीमारेषा (0, −3), (2, −2) आणि (6, 0) या बिंदूंमधून जाते. रेषेखालील, उजव्या बाजूकडील अर्धप्रतल गुलाबी छायांकित आहे; सीमारेषाही उकलसंचात समाविष्ट आहे. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ प्रश्न-आकृती 233 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

$x-2y \geq 6$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167832982202

## दोन चलांतील रेषीय असमांचे आलेख काढा

Source: A20:m81374#fs-id1167836509955

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक रेषीय असमेचा आलेख काढा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829921248

### प्रश्न 7

पुढील रेषीय असमेचा आलेख काढा — $y > (2/5)x-4$.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

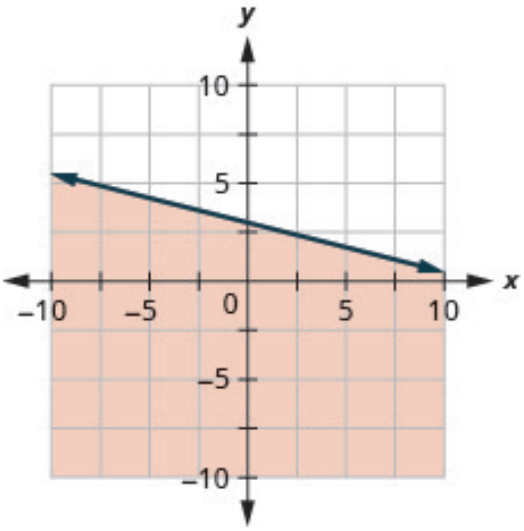
Source: A20:m81374#fs-id1167829921251

### प्रश्न 8

पुढील रेषीय असमेचा आलेख काढा — $y \leq -(1/4)x+3$.

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −10 ते 10 खुणा आहेत. सलग निळी सीमारेषा (0, 3), (4, 2) आणि (8, 1) या बिंदूंमधून जाते. रेषेखालील अर्धप्रतल गुलाबी छायांकित आहे; सीमारेषाही उकलसंचात समाविष्ट आहे. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 378 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

प्रश्नाकडे परत

स्रोत-वर्णनाची दुरुस्ती: आकृती 378 च्या EN पर्यायी वर्णनात सीमारेषा तुटक म्हटली आहे. प्रत्यक्ष EN आणि ID चित्रांत ती सलग आहे; ID वर्णनात तुटक असा शब्द नाही. प्रश्नातील समता-समावेशक चिन्हाला सलग सीमारेषाच योग्य आहे. मूळ चित्र बदललेले नाही.

Source: A20:m81374#fs-id1167833237777

### प्रश्न 9

पुढील रेषीय असमेचा आलेख काढा — $x-y \leq 5$.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

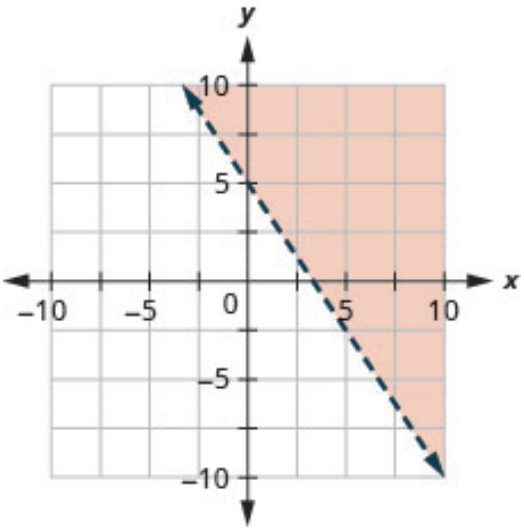
Source: A20:m81374#fs-id1167832940646

### प्रश्न 10

पुढील रेषीय असमेचा आलेख काढा — $3x+2y > 10$.

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −10 ते 10 खुणा आहेत. तुटक निळी सीमारेषा (0, 5), (2, 2) आणि (4, −1) या बिंदूंमधून जाते. रेषेच्या वरच्या बाजूचे, उजवीकडील अर्धप्रतल गुलाबी छायांकित आहे; सीमारेषा उकलसंचात समाविष्ट नाही. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 380 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

प्रश्नाकडे परत

वर्णनाचे स्पष्टीकरण: या मूळ EN आणि ID चित्रांत सीमारेषा तुटक आहे. EN वर्णनात ते स्पष्ट आहे; ID वर्णनात तुटकपणाचा उल्लेख नाही. मराठी वर्णन प्रत्यक्ष चित्रानुसार हा भेद स्पष्ट करते.

Source: A20:m81374#fs-id1167836341917

### प्रश्न 11

पुढील रेषीय असमेचा आलेख काढा — $y \leq -3x$.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

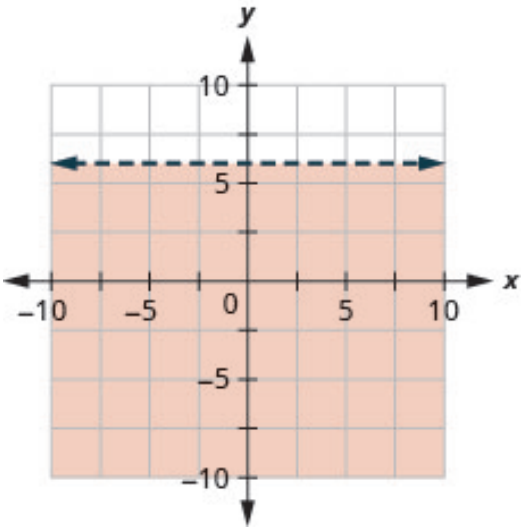
Source: A20:m81374#fs-id1167836497114

### प्रश्न 12

पुढील रेषीय असमेचा आलेख काढा — $y < 6$.

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −10 ते 10 खुणा आहेत. y = 6 या उंचीवर आडवी तुटक निळी सीमारेषा आहे. तिच्याखालील अर्धप्रतल गुलाबी छायांकित आहे; सीमारेषा उकलसंचात समाविष्ट नाही. रेषेच्या दोन्ही टोकांना बाण आहेत.

मूळ उत्तर-आकृती 382 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

प्रश्नाकडे परत

वर्णनाचे स्पष्टीकरण: या मूळ EN आणि ID चित्रांत सीमारेषा तुटक आहे. EN वर्णनात ते स्पष्ट आहे; ID वर्णनात तुटकपणाचा उल्लेख नाही. मराठी वर्णन प्रत्यक्ष चित्रानुसार हा भेद स्पष्ट करते.

Source: A20:m81374#fs-id1167833237757

## दोन चलांतील रेषीय असमा वापरून व्यावहारिक प्रश्न सोडवा

Source: A20:m81374#fs-id1167824734423

व्यावहारिक संदर्भाची स्वतंत्र नोंद: पुढील दोन प्रश्नांत x आणि y हे वेळेचे कालावधी आहेत, म्हणून $x \geq 0$ आणि $y \geq 0$ या अटी लागू होतात. वेळ फक्त पूर्णांकातच असावी अशी अट स्रोतात नाही. त्यामुळे उकलसंचाचा संदर्भ पहिल्या चतुर्थांशाशी, अक्षांवरील पात्र बिंदूंसह, संबंधित आहे. प्रश्न 13 मधील चल तास दर्शवतात; प्रश्न 14 मधील चल मिनिटे दर्शवतात. डॉलरची रक्कम मूळ स्रोतानुसारच ठेवली आहे.

### प्रश्न 13

शांतीला (Shanthie) महाविद्यालयाचा खर्च भागवण्यासाठी उन्हाळ्याच्या सुट्टीत आठवड्याला किमान $500 मिळवावे लागतात. ती दोन ठिकाणी काम करते. पोहण्याची प्रशिक्षक म्हणून तिला तासाला $10 मिळतात, तर वकिलांच्या कार्यालयात प्रशिक्षणार्थी म्हणून तासाला $25 मिळतात. आठवड्याला किमान $500 मिळवण्यासाठी शांतीने प्रत्येक कामावर किती तास काम करावे?

ⓐ ती पोहणे शिकवते त्या तासांची संख्या x आणि प्रशिक्षणार्थी म्हणून काम करते त्या तासांची संख्या y मानू. या परिस्थितीचे गणितीय मॉडेल दर्शवणारी असमा लिहा.
ⓑ त्या असमेचा आलेख काढा.
ⓒ असमेच्या उकली असतील अशा तीन क्रमित जोड्या (x, y) शोधा. त्या जोड्यांचा शांतीच्या कामाच्या वेळेबाबत काय अर्थ होतो ते स्पष्ट करा.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836567301

**प्रश्न 14**

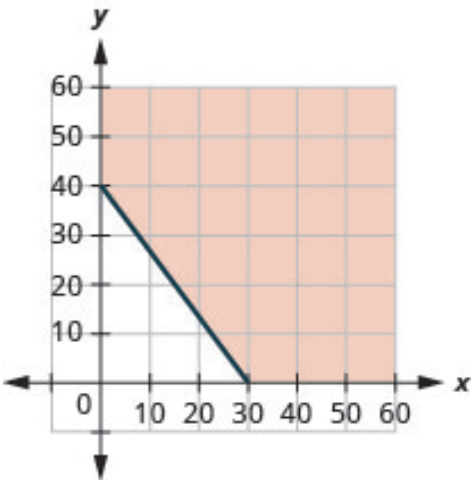
अत्सुशीला (Atsushi) दररोज 600 कॅलरी खर्च होतील इतका व्यायाम करायचा आहे. धावणे किंवा सायकल चालवणे त्याला पसंत आहे. धावताना तो दर मिनिटाला 20 कॅलरी आणि सायकल चालवताना दर मिनिटाला 15 कॅलरी खर्च करतो.

ⓐ अत्सुशी धावतो त्या मिनिटांची संख्या x आणि सायकल चालवतो त्या मिनिटांची संख्या y असेल, तर या परिस्थितीचे गणितीय मॉडेल दर्शवणारी असमा शोधा.
ⓑ त्या असमेचा आलेख काढा.
ⓒ असमेच्या तीन उकली लिहा. या उकलींमुळे अत्सुशीला व्यायामाचे कोणते पर्याय मिळतात?

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ $20x+15y \geq 600$
ⓑ




आकृतीचे वर्णन: पहिल्या चतुर्थांशातील दाखवलेल्या x व y अक्षांवर 0 ते 60 खुणा आहेत. सलग निळी सीमारेषा (0, 40) आणि (30, 0) या बिंदूंना जोडते. पहिल्या चतुर्थांशातील रेषेच्या वरच्या बाजूचा व उजवीकडील भाग गुलाबी छायांकित आहे; सीमारेषाही उकलसंचात समाविष्ट आहे. x हा धावण्याचा आणि y हा सायकल चालवण्याचा मिनिटांतील कालावधी आहे.

मूळ उत्तर-आकृती 384 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

ⓒ उत्तरे वेगवेगळी असू शकतात.

प्रश्नाकडे परत

मॉडेलची स्वतंत्र नोंद: स्रोत-उत्तरातील ≥ चिन्ह लक्ष्याइतक्या किंवा त्याहून अधिक कॅलरी दर्शवते. दिलेले मॉडेल धावणे व सायकल चालवणे यांचे वेळेचे संयोगही मान्य करते; फक्त एकच क्रिया करायची असेल तर दुसऱ्या क्रियेचा कालावधी शून्य ठेवा. ⓒ साठी स्रोतात “उत्तरे वेगवेगळी असू शकतात” एवढेच म्हटले आहे; येथे नवीन तीन उत्तरे जोडलेली नाहीत.

आकृती 384 च्या EN आणि ID पर्यायी वर्णनांत अक्षांवरील खुणा 0 ते 50 म्हटल्या आहेत; प्रत्यक्ष चित्रांत त्या 0 ते 60 आहेत. मराठी वर्णन दुरुस्त केले आहे; मूळ चित्र बदललेले नाही. चित्रातील 60 ही मॉडेलमधील वेळेची कमाल मर्यादा नाही. चित्राबाहेरही असमा आणि वेळ ऋण नसण्याच्या अटी पूर्ण करणाऱ्या उकली असू शकतात.

Source: A20:m81374#fs-id1167836409564

## संबंध आणि फलने

वरील मूळ संदर्भ m81373 या इंग्रजी शिकवणी-विभागाकडे जातो आणि त्यासाठी इंटरनेट लागते. त्या विभागाचा स्वतंत्र मराठी मसुदा असला तरी हा दुवा स्थानिक जोडणी असल्याचा दावा नाही.

स्वतंत्र स्मरणसूचना: (x, y) या क्रमित जोडीतील पहिला सहनिर्देशक x आणि दुसरा y असतो. येथे दिलेल्या संबंधाचा प्रांत म्हणजे प्रत्यक्ष येणाऱ्या पहिल्या सहनिर्देशकांचा संच; मूल्यसंच म्हणजे प्रत्यक्ष येणाऱ्या दुसऱ्या सहनिर्देशकांचा संच. संचात एकच मूल्य पुन्हा पुन्हा लिहावे लागत नाही. स्रोत-उत्तरांतील D हे प्रांतासाठी आणि R हे मूल्यसंचासाठी आहे. मूल्यसंच हा सहप्रांताशी आपोआप समान नसतो.

प्रांतातील प्रत्येक घटकाला नेमका एक निर्गम जोडला असेल तर संबंध फलन असतो. भिन्न आदानांना एकच निर्गम मिळू शकतो. बाण ज्या नोंदीपर्यंत पोहोचतो तीच त्याची संगत नोंद घ्या; समोरासमोरच्या ओळींची जोडी असेलच असे मानू नका. आलेखात फक्त स्वतंत्र बिंदू दिले असतील तर ते रेषांनी जोडू नका. दाखवलेल्या अक्षांची चौकट म्हणजे संबंधाचा संपूर्ण प्रांत किंवा मूल्यसंच नव्हे.

फलनाचे मूल्य काढणे आणि समीकरण सोडवणे या भिन्न क्रिया आहेत. दिलेल्या आदानाचे योग्य ठिकाणी प्रतिस्थापन करा; ऋण आदानासाठी कंस वापरा. |u| हे u चे केवल मूल्य दर्शवते. f, F, g, h ही वेगवेगळी नावे आहेत; मोठे F आणि लहान f यांचा भेद जपा. अंश व छेद यांच्या एकत्रित राशींना कंस लावून अपूर्णांक वाचा; छेद शून्य होणारे आदान फलनासाठी ग्राह्य नसते.

स्रोतात दहा प्रश्नांची उत्तरे दिली आहेत; ती मूळ ओळखचिन्हांसह ठेवली आहेत. उरलेल्या अकरा प्रश्नांची स्रोत-उत्तरे नाहीत आणि तशी स्पष्ट नोंद केली आहे. येथे त्यांच्यासाठी नवीन उत्तरे तयार केलेली नाहीत.

### संबंधाचा प्रांत आणि मूल्यसंच शोधा

Source: A20:m81374#fs-id1167836486019

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक संबंधासाठी ⓐ त्याचा प्रांत शोधा; ⓑ त्याचा मूल्यसंच शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833365925

### प्रश्न 1

{(5, −2), (5, −4), (7, −6),
(8, −8), (9, −10)}

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833056137

**प्रश्न 2**

{(−3, 7), (−2, 3), (−1, 9),
(0, −3), (−1, 8)}

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ D: {−3, −2, −1, 0}
ⓑ R: {7, 3, 9, −3, 8}

प्रश्नाकडे परत

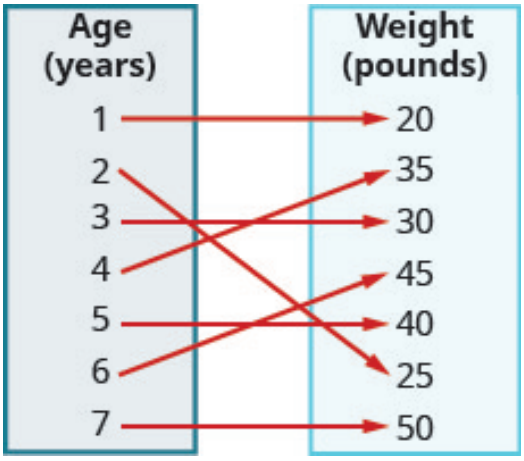
Source: A20:m81374#fs-id1167833053062

पुढील प्रश्नात संबंधाच्या बाण-आकृतीवरून ⓐ संबंधाच्या क्रमित जोड्या लिहा; ⓑ त्याचा प्रांत शोधा; ⓒ त्याचा मूल्यसंच शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833346961

**प्रश्न 3**

खालील बाण-आकृतीत मुलाचे वयानुसार सरासरी वजन दाखवले आहे.




आकृतीचे वर्णन: डाव्या स्तंभाचे शीर्षक Age (years), म्हणजे वय वर्षांत, आणि नोंदी 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 आहेत. उजव्या स्तंभाचे शीर्षक Weight (pounds), म्हणजे वजन पाउंडमध्ये; वरून खाली नोंदी 20, 35, 30, 45, 40, 25, 50 आहेत. बाण 1→20, 2→25, 3→30, 4→35, 5→40, 6→45, 7→50 अशा जोड्या दाखवतात.

मूळ प्रश्न-आकृती 234 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

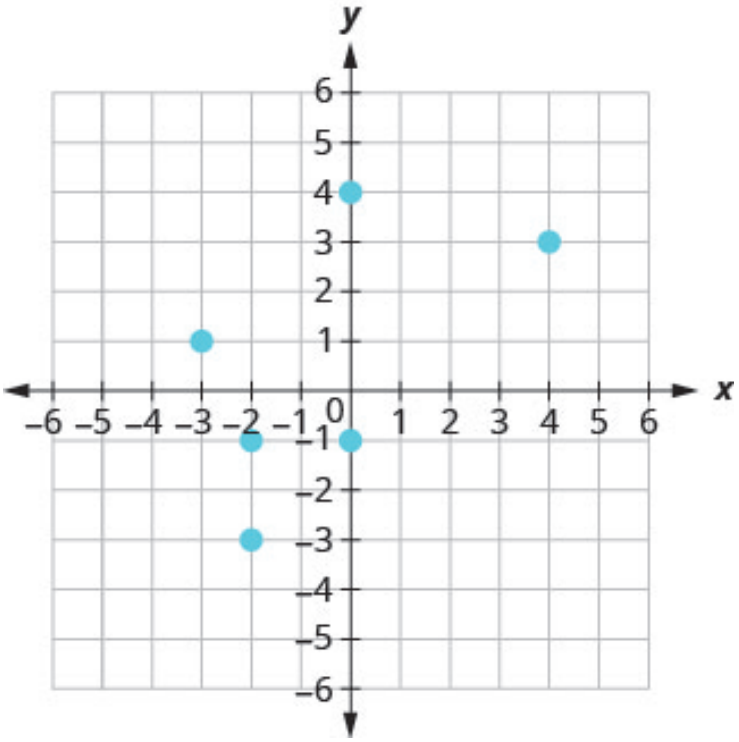
आकृतींची स्वतंत्र तुलना: मूळ EN आकृती 234 मध्ये वजनाच्या नोंदी चढत्या क्रमात नाहीत. ID आकृतीत त्या चढत्या क्रमात पुन्हा मांडल्या आहेत, पण बाणांनी दाखवलेला संबंध तोच आहे. येथे EN आकृती आणि तिच्या मूळ ओळींचा क्रम जतन केला आहे. वजनाचे एकक पाउंडच आहे; किलोग्रॅममध्ये रूपांतर केलेले नाही. हे स्रोताचे सरावचित्र आहे, बालवजनाची अद्ययावत वैद्यकीय मार्गदर्शक सारणी नाही.

Source: A20:m81374#fs-id1167836325788

पुढील प्रश्नात संबंधाच्या आलेखावरून ⓐ संबंधाच्या क्रमित जोड्या लिहा; ⓑ त्याचा प्रांत शोधा; ⓒ त्याचा मूल्यसंच शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836597962

**प्रश्न 4**




आकृतीचे वर्णन: x व y अक्षांवर −6 ते 6 खुणा आहेत. स्वतंत्र बिंदू (−3, 1), (−2, −1), (−2, −3), (0, −1), (0, 4), (4, 3) दाखवले आहेत. या सहा बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषा नाहीत.

मूळ प्रश्न-आकृती 235 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ (4, 3), (−2, −3), (−2, −1), (−3, 1), (0, −1), (0, 4),

ⓑ D: {−3, −2, 0, 4}

ⓒ R: {−3, −1, 1, 3, 4}

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836368154

## संबंध फलन आहे का ते ठरवा

Source: A20:m81374#fs-id1167836691409

पुढील प्रश्नांत क्रमित जोड्यांच्या संचावरून ⓐ संबंध फलन आहे का ते ठरवा; ⓑ संबंधाचा प्रांत शोधा; ⓒ संबंधाचा मूल्यसंच शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836543349

**प्रश्न 5**

{(9, −5), (4, −3), (1, −1),
(0, 0), (1, 1), (4, 3), (9, 5)}

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836571217

**प्रश्न 6**

{(−3, 27), (−2, 8), (−1, 1),
(0, 0), (1, 1), (2, 8), (3, 27)}

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ होय ⓑ {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}
ⓒ {0, 1, 8, 27}

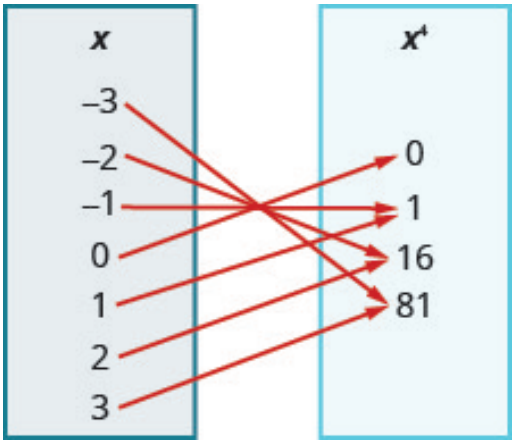
प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836319254

पुढील प्रश्नांत बाण-आकृतीवरून ⓐ संबंध फलन आहे का ते ठरवा; ⓑ फलनाचा प्रांत शोधा; ⓒ फलनाचा मूल्यसंच शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836560861

**प्रश्न 7**



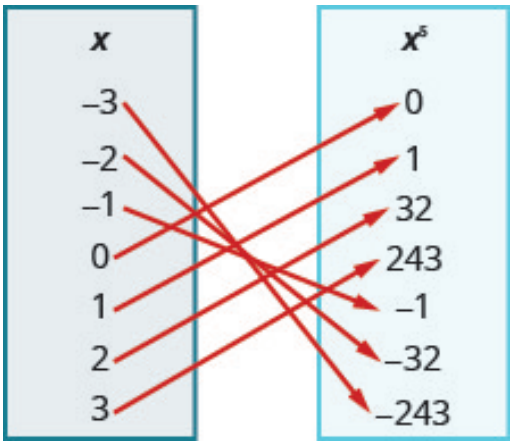

आकृतीचे वर्णन: डावा स्तंभ x: −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3. उजवा स्तंभ $x^4$: वरून खाली 0, 1, 16, 81. बाण −3→81, −2→16, −1→1, 0→0, 1→1, 2→16, 3→81 अशा जोड्या दाखवतात.

मूळ प्रश्न-आकृती 236 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833054561

**प्रश्न 8**




आकृतीचे वर्णन: डावा स्तंभ x: −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3. उजवा स्तंभ $x^5$: वरून खाली 0, 1, 32, 243, −1, −32, −243. बाण −3→−243, −2→−32, −1→−1, 0→0, 1→1, 2→32, 3→243 अशा जोड्या दाखवतात.

मूळ प्रश्न-आकृती 237 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ होय

ⓑ {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}

ⓒ {−243, −32, −1, 0, 1, 32, 243}

प्रश्नाकडे परत

स्रोत-वर्णनाची दुरुस्ती: आकृती 237 च्या EN पर्यायी वर्णनात −1 पासून 1 कडे बाण जातो असे म्हटले आहे. प्रत्यक्ष EN आणि ID चित्रांत −1 → −1 असा बाण आहे; ID वर्णन आणि स्रोत-उत्तरातील मूल्यसंचही याला जुळतात. मराठी वर्णन प्रत्यक्ष चित्रानुसार दुरुस्त केले आहे; मूळ चित्र बदललेले नाही.

Source: A20:m81374#fs-id1167824585099

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक समीकरण फलन दर्शवते का ते ठरवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167824736070

प्रश्नाचा अर्थ स्पष्ट करणारी स्वतंत्र नोंद: पुढील समीकरणांत y हे x चे फलन ठरते का ते पाहायचे आहे—प्रत्येक ग्राह्य x साठी y चे नेमके एक मूल्य मिळते का? x हे y चे फलन आहे का, असा उलटा प्रश्न येथे विचारलेला नाही.

**प्रश्न 9**

$2x+y = -3$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836628928

**प्रश्न 10**

$y = x^2$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

होय

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833048649

**प्रश्न 11**

$y = 3x-5$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829930429

**प्रश्न 12**

$y = x^3$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

होय

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836730447

**प्रश्न 13**

$2x+y^2 = 4$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836600124

## फलनाचे मूल्य शोधा

Source: A20:m81374#fs-id1167826092388

पुढील प्रश्नांत फलनाची ही मूल्ये काढा:

Source: A20:m81374#fs-id1167833386365

ⓐ $f(-2)$ ⓑ $f(3)$ ⓒ $f(a)$.

Source: A20:m81374#fs-id1167833386368

**प्रश्न 14**

$f(x) = 3x-4$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ $f(-2) = -10$ ⓑ $f(3) = 5$ ⓒ $f(a) = 3a-4$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833396868

**प्रश्न 15**

$f(x) = -2x+5$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836606040

**प्रश्न 16**

$f(x) = x^2-5x+6$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ $f(-2) = 20$ ⓑ $f(3) = 0$ ⓒ $f(a) = a^2-5a+6$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829720100

**प्रश्न 17**

$f(x) = 3x^2-2x+1$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836389935

पुढील प्रश्नांत फलनाचे दिलेल्या ठिकाणचे मूल्य काढा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836614042

**प्रश्न 18**

$g(x) = 3x^2-5x$; $g(2)$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

2

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836614045

**प्रश्न 19**

$F(x) = 2x^2-3x+1$;
$F(-1)$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836560606

**प्रश्न 20**

$h(t) = 4|t-1|+2$; $h(-3)$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

18

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167826171731

**प्रश्न 21**

$f(x) = ((x+2)/(x-1))$; $f(3)$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

प्रांताबद्दल स्वतंत्र नोंद: या अपूर्णांकाच्या संपूर्ण छेदाची रास $x-1$ आहे, म्हणून $x \neq 1$ ही अट लागू होते. प्रश्नात विचारलेले आदान या अटीत बसते. स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर नाही; ही अट स्पष्ट करणे म्हणजे नवीन स्रोत-उत्तर जोडणे नव्हे.

Source: A20:m81374#fs-id1167829786785

## फलनांचे आलेख

वरील मूळ संदर्भ m81374 या इंग्रजी शिकवणी-विभागाकडे जातो आणि त्यासाठी इंटरनेट लागते. आधीच्या मराठी घटकांत त्याची शिकवण असली तरी हा दुवा स्थानिक जोडणी असल्याचा दावा नाही.

स्वतंत्र स्मरणसूचना: प्रांतातील प्रत्येक $x$ साठी नेमके एक $y$-मूल्य मिळणे आवश्यक आहे. आलेखाला एखादी उभी रेषा दोन किंवा अधिक बिंदूंवर छेदत असेल तर तो $y$ हे $x$ चे फलन असल्याचा आलेख नाही. उभी रेषा कोणताही छेद देत नसेल तर ते $x$-मूल्य प्रांतात नसते. ही “उभ्या रेषेची कसोटी” अशी मराठी कार्यसंज्ञा वापरली आहे.

प्रांत म्हणजे ग्राह्य आदानांचा संच; मूल्यसंच म्हणजे प्रत्यक्ष मिळणाऱ्या निर्गमांचा संच. तो सहप्रांताशी आपोआप समान नसतो. D आणि R हे स्रोत-उत्तरांत अनुक्रमे प्रांत व मूल्यसंच यांसाठी आहेत. आलेखाच्या दृश्य चौकटीचा विस्तार आणि फलनाचा संपूर्ण प्रांत/मूल्यसंच वेगळे असू शकतात; बाण, टोकांचे स्वरूप आणि दिलेली सूत्रे लक्षात घ्या. छेदनबिंदू हे क्रमित जोड्यांनी द्यायचे असतात; आदानांची मूल्ये आणि बिंदू यांचा भेद जपा.

गोल कंस टोक वगळतो आणि चौकोनी कंस टोक समाविष्ट करतो. $-\infty$, $\infty$ यांना समाविष्ट टोक-मूल्ये मानू नका. वर्गमूळाच्या चिन्हाखालील संपूर्ण रास वाचा; येथे वर्गमूळाचे मूल्य ऋण नसते. उभ्या दोन दंडांतील रास केवल मूल्य दर्शवते. चित्रवर्णनांतील अन्वस्त या संज्ञेचा इंग्रजी पर्याय parabola आहे.

स्रोतात बारा प्रश्नांची उत्तरे आहेत; ती मूळ ओळखचिन्हांसह ठेवली आहेत. उरलेल्या बारा प्रश्नांची स्रोत-उत्तरे नाहीत आणि तशी स्पष्ट नोंद केली आहे. येथे त्या रिकाम्या जागांसाठी नवीन उत्तरे तयार केलेली नाहीत. मूळ चित्रे बदललेली नाहीत; स्रोत-वर्णनातील चुका दिसल्यास प्रत्यक्ष जाळीनुसार मराठी वर्णन आणि स्पष्ट दुरुस्ती-नोंद दिली आहे.

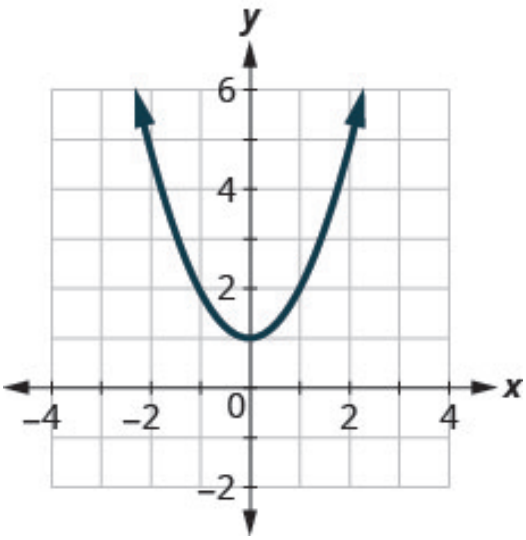
## उभ्या रेषेची कसोटी वापरा

Source: A20:m81374#fs-id1167836597214

पुढील प्रश्नांत प्रत्येक आलेख फलनाचा आलेख आहे का ते ठरवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836664665

### प्रश्न 1




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर वर उघडणारा अन्वस्त. दृश्य जाळी x: −4 ते 4 आणि y: −2 ते 6; दोन्ही अक्षांवर प्रत्येक चौकट एक एकक. सर्वांत खालचा बिंदू (0, 1); वक्र (−2, 5), (−1, 2), (1, 2), (2, 5) मधून जातो. दोन्ही वरच्या टोकांवरील बाण वक्र पुढे चालू असल्याचे दाखवतात.

मूळ EN आकृती 238 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील x: −6 ते 6, y: −2 ते 10 ऐवजी येथे प्रत्यक्ष चित्रातील चौकट वर्णनात दिली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

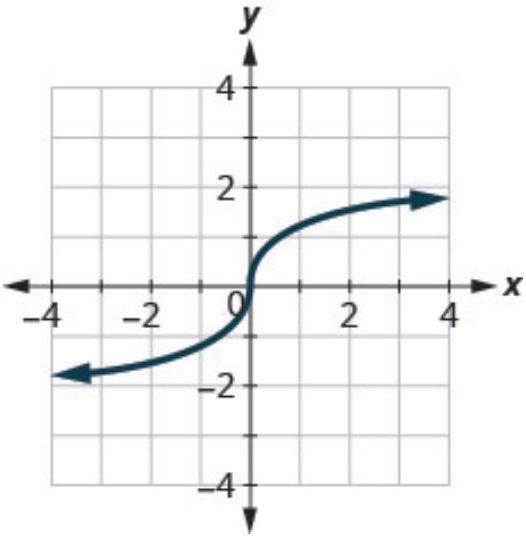
**स्रोतातील उत्तर**

होय.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836664668

**प्रश्न 2**



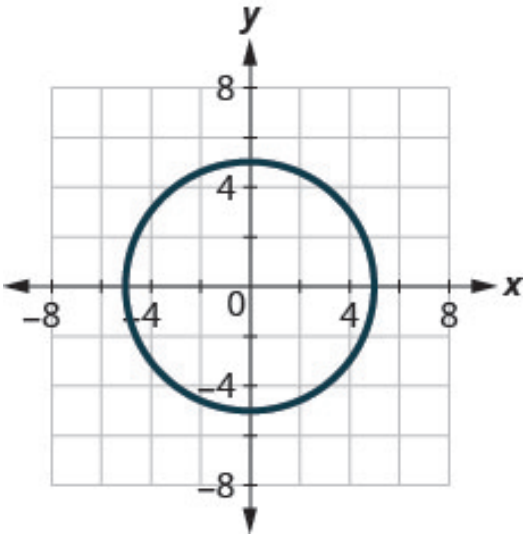

आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर आडवे पसरलेला S-आकाराचा वाढता वक्र (−1, −1), (0, 0), (1, 1) मधून जातो. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −4 ते 4, प्रत्येक चौकट एक एकक. डाव्या खालच्या व उजव्या वरच्या टोकांवर पुढे चालू राहण्याचे बाण आहेत.

मूळ EN आकृती 239 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील दोन्ही अक्षांची −6 ते 6 ही मर्यादा प्रत्यक्ष −4 ते 4 अशी आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167832925451

**प्रश्न 3**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर आदिबिंदूकेंद्रित वर्तुळ (−5, 0), (5, 0), (0, −5), (0, 5) मधून जाते. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके.

मूळ EN आकृती 240 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील दोन्ही अक्षांची −6 ते 6 ही मर्यादा प्रत्यक्ष −8 ते 8 अशी आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

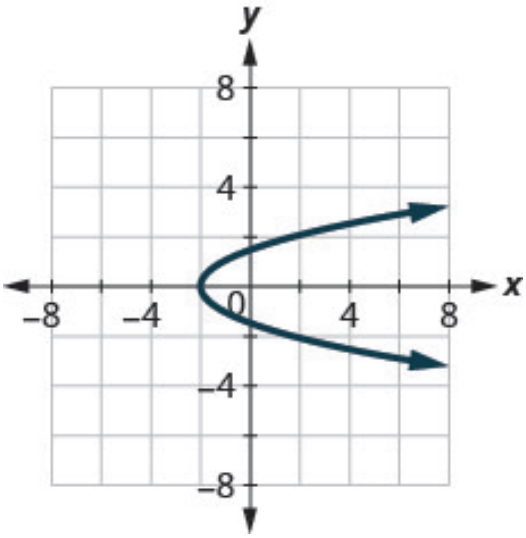
**स्रोतातील उत्तर**

नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833082044

**प्रश्न 4**



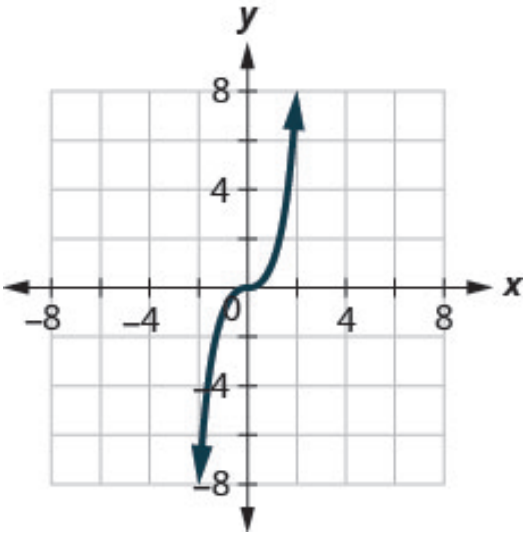

आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर उजवीकडे उघडणारा अन्वस्त. सर्वांत डावा बिंदू (−2, 0); वक्र (−1, 1), (−1, −1), (2, 2), (2, −2) मधून जातो. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके. उजवीकडील दोन्ही शाखांवर पुढे चालू राहण्याचे बाण आहेत.

मूळ EN आकृती 241 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील x: −6 ते 6, y: −2 ते 10 या मर्यादा प्रत्यक्ष चित्राशी जुळत नाहीत; वर्णनात प्रत्यक्ष चौकट दिली आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836599515

**प्रश्न 5**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर घन फलनाचा उभा S-आकाराचा वाढता वक्र (−1, −1), (0, 0), (1, 1) मधून जातो. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके. खाली व वर पुढे चालू राहण्याचे बाण आहेत.

मूळ EN आकृती 242 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील दोन्ही अक्षांची −6 ते 6 ही मर्यादा प्रत्यक्ष −8 ते 8 अशी आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

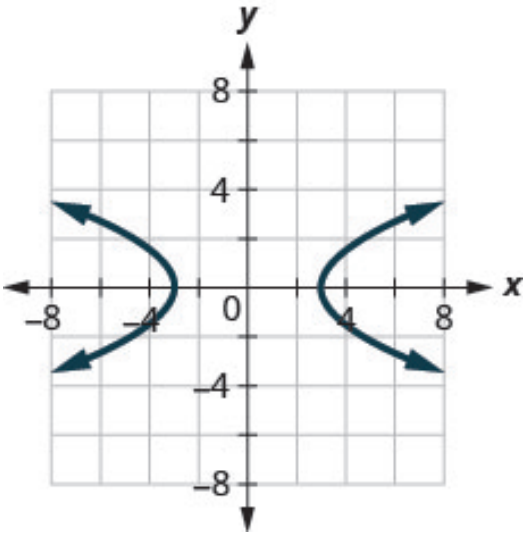
**स्रोतातील उत्तर**

होय.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836433992

**प्रश्न 6**



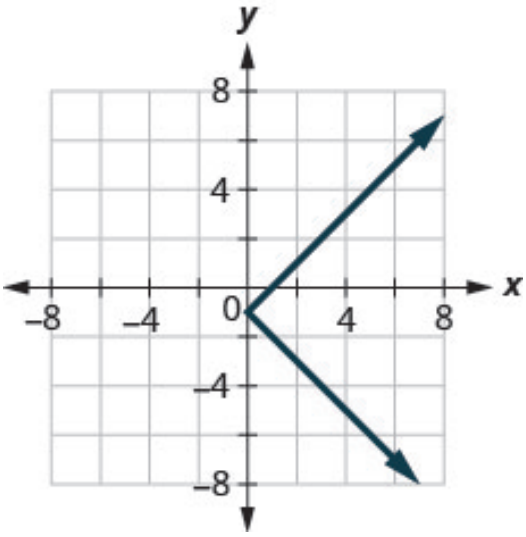

आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर दोन बाजूंना उघडणाऱ्या वक्र शाखा. डाव्या शाखेचा सर्वांत उजवा बिंदू (−3, 0), उजव्या शाखेचा सर्वांत डावा बिंदू (3, 0). डावी शाखा (−4, 2), (−4, −2) आणि उजवी शाखा (4, 2), (4, −2) मधून जाते. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके. चारही दूरच्या टोकांवर बाण आहेत.

मूळ EN आकृती 243 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील दोन्ही अक्षांची −6 ते 6 ही मर्यादा प्रत्यक्ष −8 ते 8 अशी आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833329645

**प्रश्न 7**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर उजवीकडे उघडणाऱ्या V-आकाराच्या दोन सरळ शाखा (0, −1) येथे मिळतात. वरची शाखा (1, 0), (2, 1) आणि खालची शाखा (1, −2), (2, −3) मधून जाते. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके. दोन्ही उजव्या टोकांवर बाण आहेत.

मूळ EN आकृती 244 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील दोन्ही अक्षांची −6 ते 6 ही मर्यादा प्रत्यक्ष −8 ते 8 अशी आहे. स्रोत या बाजूला वळलेल्या आकृतीला केवल मूल्याचे फलन म्हणतो; येथे ती V-आकाराच्या दोन शाखा म्हणून वर्णिली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836606084

## मूलभूत फलनांचे आलेख ओळखा

Source: A20:m81374#fs-id1167836326095

पुढील प्रश्नांत ⓐ प्रत्येक फलनाचा आलेख काढा; ⓑ त्याचा प्रांत आणि मूल्यसंच लिहा. प्रांत व मूल्यसंच अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167826205174

**प्रश्न 8**

$f(x) = 5x+1$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167832925596

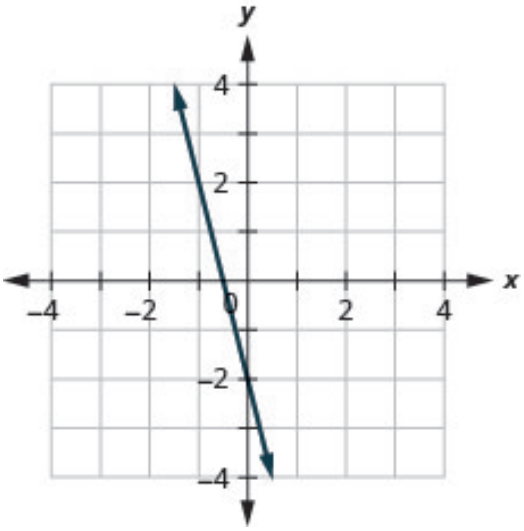
### प्रश्न 9

f(x) = −4x−2

स्रोत-उत्तर पाहा

#### स्रोतातील उत्तर

ⓐ




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर f(x)=−4x−2 चा उतरता सरळ आलेख. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −4 ते 4; प्रत्येक चौकट एक एकक. रेषा (−1, 2), (0, −2) मधून जाते आणि दोन्ही टोकांवर बाण आहेत. सूत्रातील (−2, 6) हा बिंदू या दृश्य चौकटीबाहेर आहे.

मूळ EN आकृती 386 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील −6 ते 6 ऐवजी प्रत्यक्ष चौकट −4 ते 4 आहे; (−2, 6) हा सूत्राशी जुळणारा पण चौकटीबाहेरचा बिंदू आहे.

ⓑ D: (−∞, ∞); R: (−∞, ∞)

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836552974

### प्रश्न 10

f(x) = ((2)/(3))x−1

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829832341

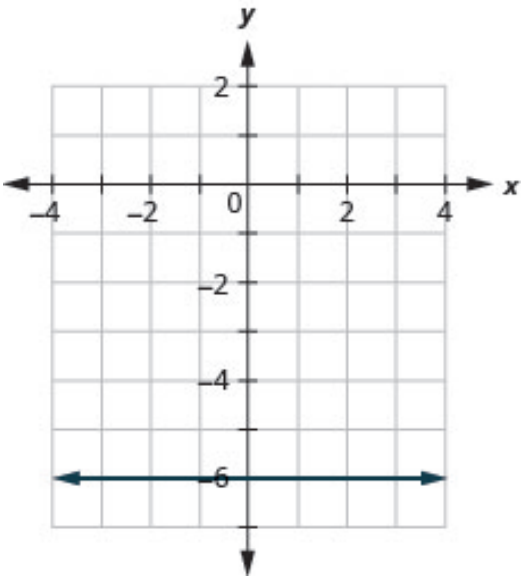
### प्रश्न 11

f(x) = −6

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर — खाली नमूद केलेल्या दुरुस्त्यांसह**

ⓐ




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर y=−6 ही आडवी रेषा; ती (0, −6), (1, −6), (2, −6) मधून जाते आणि दोन्ही टोकांवर बाण आहेत. दृश्य जाळी x: −4 ते 4 आणि y: −7 ते 2; प्रत्येक चौकट एक एकक.

मूळ EN आकृती 388 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील x: −6 ते 6, y: −8 ते 4 ऐवजी वर्णनात प्रत्यक्ष जाळी दिली आहे.

ⓑ D: $(-\infty, \infty)$; R: $\{-6\}$

प्रश्नाकडे परत

स्रोत-उत्तराची दुरुस्ती: प्रश्न आणि मूळ EN/ID चित्रे आडवी रेषा $y = -6$ दाखवतात. EN उत्तरात R: (6), तर ID उत्तरात R: {6} आहे. दोन्ही ठिकाणी ऋणचिन्ह सुटले आहे; EN मधील एकाच मूल्याभोवतीची गोल कंसांची मांडणीही योग्य संच-संकेतन नाही. म्हणून वर योग्य मूल्यसंच दिला आहे. अंतराल-संकेतलेखनात तो [−6, −6] असाही लिहिता येतो; या दोन्ही टोकांतील एकच मूल्य समाविष्ट होते.

Source: A20:m81374#fs-id1167836551845

**प्रश्न 12**

$f(x) = 2x$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836556410

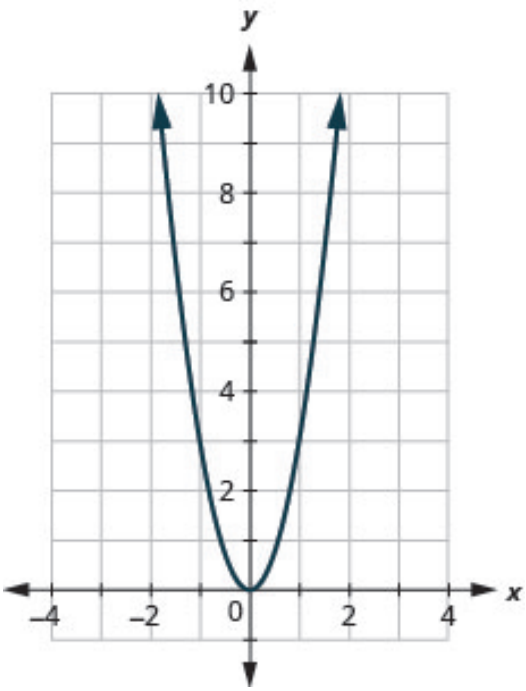
**प्रश्न 13**

$f(x) = 3x^2$

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

ⓐ




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर $f(x)=3x^2$ चा वर उघडणारा अन्वस्त. सर्वांत खालचा बिंदू (0, 0); वक्र (−1, 3), (1, 3) मधून जातो. दृश्य जाळी x: −4 ते 4 आणि y: −1 ते 10; प्रत्येक चौकट एक एकक. वरच्या दोन्ही टोकांवर बाण आहेत.

मूळ EN आकृती 390 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील x: −6 ते 6, y: −2 ते 10 ऐवजी वर्णनात प्रत्यक्ष जाळी दिली आहे.

ⓑ D: (−∞, ∞); R: [0, ∞)

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836523927

### प्रश्न 14

$f(x) = -((1)/(2))x^2$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836598112

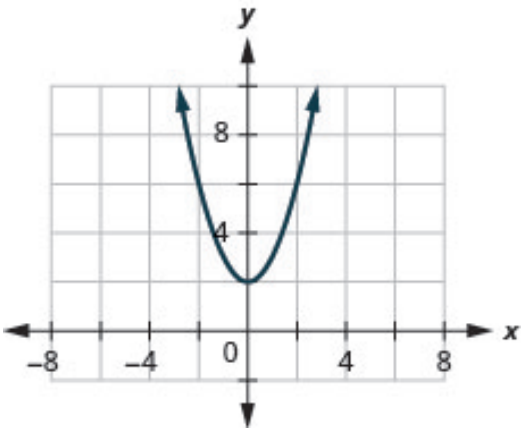
### प्रश्न 15

$f(x) = x^2+2$

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

ⓐ




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर $f(x)=x^2+2$ चा वर उघडणारा अन्वस्त. सर्वांत खालचा बिंदू (0, 2); वक्र (−2, 6), (−1, 3), (1, 3), (2, 6) मधून जातो. दृश्य जाळी x: −8 ते 8 आणि y: −2 ते 10; प्रत्येक चौकट दोन एकके. वरच्या दोन्ही टोकांवर बाण आहेत.

मूळ EN आकृती 392 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील x: −6 ते 6, y: −4 ते 8 ऐवजी वर्णनात प्रत्यक्ष जाळी दिली आहे.

ⓑ D: (−∞, ∞); R: [2, ∞)

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829580140

### प्रश्न 16

$f(x) = x^3 - 2$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167826206199

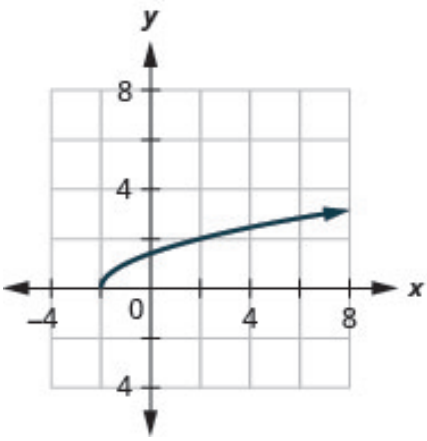
### प्रश्न 17

$f(x) = \sqrt{(x+2)}$

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

ⓐ




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर f(x)=√(x+2) चा वक्र (−2, 0) पासून सुरू होऊन (−1, 1), (2, 2) मधून जातो. उजवीकडे पुढे चालू राहण्याचा बाण आहे; हा सरळ किरण नाही. दृश्य जाळी x: −4 ते 8 आणि y: −4 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके.

मूळ EN आकृती 394 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील y: −2 ते 10 ऐवजी प्रत्यक्ष −4 ते 8 आहे. स्रोताने म्हटलेला half-line/setengah garis हा प्रत्यक्ष वक्र आहे, सरळ किरण नाही.

ⓑ D: [−2, ∞); R: [0, ∞)

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836522697

### प्रश्न 18

f(x) = −|x|

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167830093271

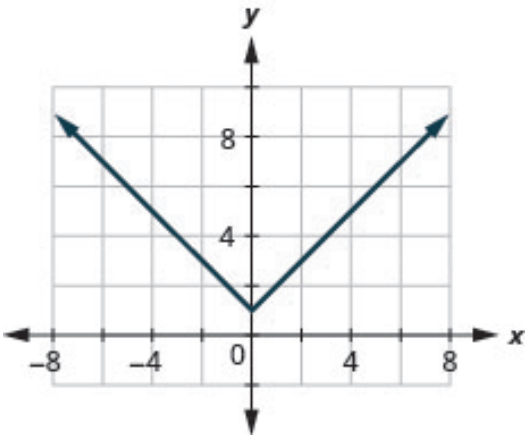
### प्रश्न 19

f(x) = |x|+1

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर

ⓐ




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर f(x)=|x|+1 या केवल मूल्याच्या फलनाचा वर उघडणारा V-आकाराचा आलेख. शिरोबिंदू (0, 1); रेषा (−1, 2), (1, 2) मधून जातात. दृश्य जाळी x: −8 ते 8 आणि y: −2 ते 10; प्रत्येक चौकट दोन एकके. दोन्ही वरच्या टोकांवर बाण आहेत.

मूळ EN आकृती 396 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील x: −6 ते 6 ऐवजी प्रत्यक्ष −8 ते 8 आहे.

ⓑ D: (−∞, ∞); R: [1, ∞)

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836282824

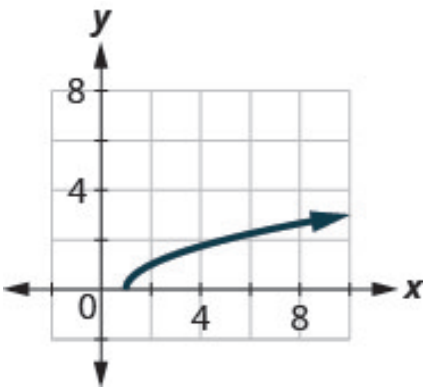
### फलनाच्या आलेखावरून माहिती वाचा

Source: A20:m81374#fs-id1167836406656

पुढील प्रश्नांत फलनाच्या आलेखावरून त्याचा प्रांत व मूल्यसंच शोधा. प्रांत व मूल्यसंच अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836310456

### प्रश्न 20



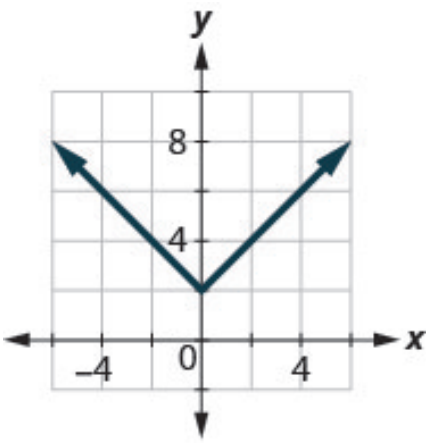

आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर वर्गमूळाचा वक्र (1, 0) पासून सुरू होऊन (2, 1), (5, 2) मधून जातो. उजवीकडे पुढे चालू राहण्याचा बाण आहे; हा सरळ किरण नाही. दृश्य जाळी x: −2 ते 10 आणि y: −2 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके.

मूळ EN आकृती 245 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनात दोन्ही अक्ष 0 ते 10 म्हटले आहेत; वर्णनात प्रत्यक्ष जाळी दिली आहे. स्रोताने म्हटलेला half-line/setengah garis हा प्रत्यक्ष वक्र आहे, सरळ किरण नाही.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829580264

**प्रश्न 21**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर वर उघडणारा V-आकाराचा आलेख; शिरोबिंदू (0, 2). रेषा (−1, 3), (1, 3) मधून जातात. दृश्य जाळी x: −6 ते 6 आणि y: −2 ते 10; प्रत्येक चौकट दोन एकके. दोन्ही वरच्या टोकांवर बाण आहेत.

मूळ EN आकृती 246 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

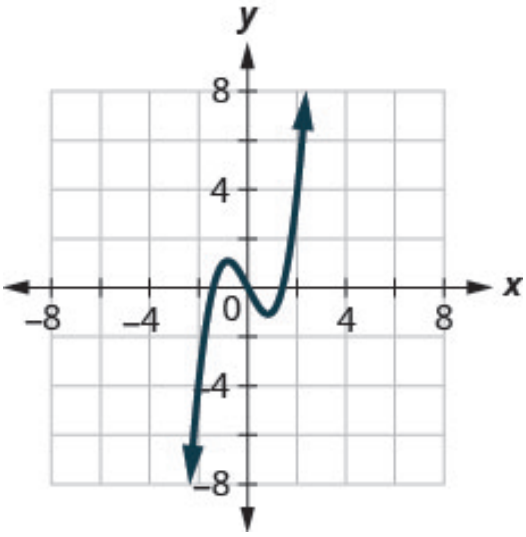
**स्रोतातील उत्तर**

D: (−∞, ∞); R: [2, ∞)

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836611953

**प्रश्न 22**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर खाली डावीकडून वर उजवीकडे जाणारा घन फलनाचा वक्र (−2, −4), (0, 0), (2, 4) मधून जातो. आदिबिंदूच्या डावीकडे स्थानिक उंचवटा आणि उजवीकडे स्थानिक खोलगट भाग दिसतो. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके. दोन्ही दूरच्या टोकांवर बाण आहेत.

मूळ EN आकृती 247 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील दोन्ही अक्षांची −6 ते 6 ही मर्यादा प्रत्यक्ष −8 ते 8 अशी आहे.

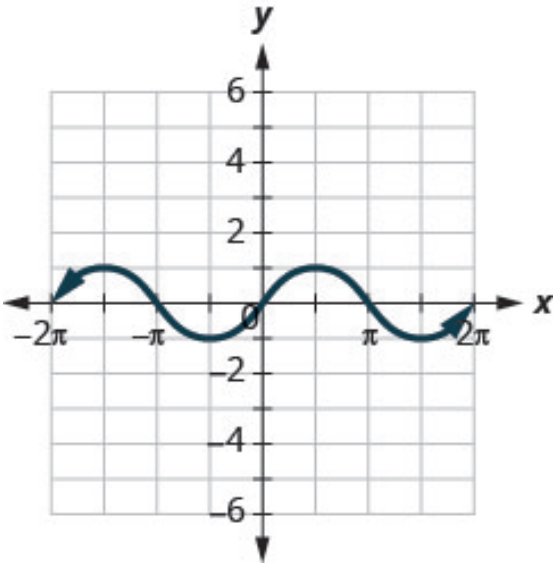
स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167829984307

पुढील प्रश्नांत फलनाच्या आलेखावरून विचारलेली मूल्ये शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167826077068

**प्रश्न 23**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर लहरी वक्र. दृश्य जाळी x: −2π ते 2π आणि y: −6 ते 6; x-दर्शितील प्रत्येक चौकट π/2 आणि y-दर्शितील प्रत्येक चौकट एक एकक. वक्र (−2π, 0), (−3π/2, 1), (−π, 0), (−π/2, −1), (0, 0), (π/2, 1), (π, 0), (3π/2, −1), (2π, 0) मधून जातो. दृश्य कमाल उंची 1 व किमान −1; हा नमुना दोन्ही दिशांना अमर्याद चालू राहतो, असे स्रोत-वर्णन व टोकांचे बाण दर्शवतात.

मूळ EN आकृती 248 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

ⓐ f(0) शोधा.
ⓑ f(π/2) शोधा.
ⓒ f(−3π/2) शोधा.
ⓓ f(x) = 0 असताना x ची मूल्ये शोधा.
ⓔ x-अक्षावरील छेदनबिंदू शोधा.
ⓕ y-अक्षावरील छेदनबिंदू शोधा.
ⓖ प्रांत शोधा. तो अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.
ⓗ मूल्यसंच शोधा. तो अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर — खाली नमूद केलेल्या दुरुस्त्यांसह**

ⓐ f(0) = 0
ⓑ f(π/2) = 1
ⓒ f(−3π/2) = 1
ⓓ f(x) = 0 यासाठी स्रोताने दिलेली, दृश्य चौकटीतील मूल्ये: x = −2π, −π, 0, π, 2π
ⓔ स्रोताने दिलेले, दृश्य चौकटीतील छेदनबिंदू: (−2π, 0), (−π, 0), (0, 0), (π, 0), (2π, 0)
ⓕ (0, 0)
ⓖ (−∞, ∞)
ⓗ [−1, 1]

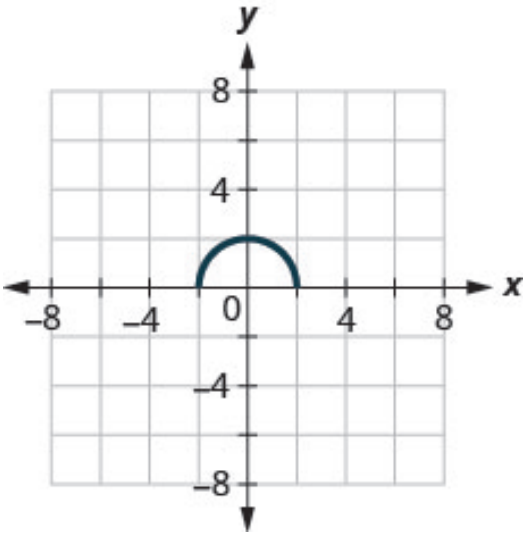
प्रश्नाकडे परत

स्रोत-उत्तरातील स्पष्ट दुरुस्त्या: ⓐ मध्ये EN आणि ID दोन्ही ठिकाणी f(x)=0 छापले आहे; विचारलेल्या आदानासाठी ते f(0)=0 केले आहे. ⓖ मध्ये दोन्ही स्रोतांतील MathML [−∞,∞] असे बंद कंस देते; अनंत ही समाविष्ट करता येणारी वास्तविक टोक-मूल्ये नसल्याने वर गोल कंस केले आहेत. ⓓ–ⓔ मधील स्रोताची पाच मूल्ये/बिंदू वगळलेले नाहीत; ती दृश्य चौकटीपुरती यादी आहे हे स्पष्ट केले आहे.

पुढील व्याप्तीबद्दल स्वतंत्र, सशर्त स्पष्टीकरण: स्रोत-वर्णन नमुना दोन्ही दिशांना अमर्याद पुढे जातो असे सांगते; पण नेमके सूत्र किंवा आवर्तनाची अट दिलेली नाही. केवळ टोकांचे बाण पाहून शून्य-मूल्यांचा अमर्याद संच सिद्ध होत नाही. जर दिसणारी शून्य-मूल्यांची आदाने प्रत्येक $\pi$ अंतराने दोन्ही दिशांना याच रीतीने येत राहतात आणि त्यांखेरीज इतर शून्य-मूल्ये येत नाहीत, अशी अतिरिक्त अट घेतली, तर सर्व शून्य-मूल्यांची आदाने $x = k\pi$ आणि सर्व x-अक्षावरील छेदनबिंदू $(k\pi, 0)$ असतील; येथे k कोणताही पूर्णांक आहे. ही अतिरिक्त अटीवरची लेखकनिर्मित भर आहे, स्रोताने दिलेले सूत्र किंवा मर्यादित चित्रावरून सिद्ध केलेला निष्कर्ष नाही. अतिरिक्त अटीशिवाय स्रोतातील पाच दृश्य नोंदींच्या पलीकडील अचूक शून्य-मूल्ये या चित्रावरून एकटीच ठरत नाहीत.

Source: A20:m81374#fs-id1167836445033

**प्रश्न 24**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर वरचे अर्धवर्तुळ (−2, 0) पासून सुरू होऊन (0, 2) मधून (2, 0) पर्यंत जाते. सर्वांत वरचा बिंदू (0, 2); टोकांना पुढे जाणारे बाण किंवा रिकामी वर्तुळे नाहीत. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके.

मूळ EN आकृती 249 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाची दुरुस्ती: स्रोत-वर्णनातील दोन्ही अक्षांची −6 ते 6 ही मर्यादा प्रत्यक्ष −8 ते 8 अशी आहे.

ⓐ f(0) शोधा.
ⓑ f(x) = 0 असताना x ची मूल्ये शोधा.
ⓒ x-अक्षावरील छेदनबिंदू शोधा.
ⓓ y-अक्षावरील छेदनबिंदू शोधा.
ⓔ प्रांत शोधा. तो अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.
ⓕ मूल्यसंच शोधा. तो अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167832994434

# सराव चाचणी

स्वतंत्र स्मरणसूचना: क्रमित जोडीतील पहिला सहनिर्देशक x आणि दुसरा y आहे. अक्षांची मापनखूण व चौकटीचा आकार पाहून बिंदू वाचा; सर्व चित्रांत एक चौकट एकच एकक असेल असे नाही. स्वतंत्र बिंदू दिले असतील तर त्यांना रेषांनी जोडू नका.

रेषेच्या y = mx+b या रूपातील m हा उतार आणि b हा y-अक्षछेदाचा सहनिर्देशक आहे. बिंदू व सहनिर्देशक-मूल्य यांचा भेद ठेवा. उभ्या रेषेचा उतार परिभाषित नसतो; तो शून्य नाही. उत्तर तपासताना दिलेल्या बिंदूचे समीकरणात प्रतिस्थापन करा. उतार–y-अक्षछेद रूप ही येथे वापरलेली मराठी कार्यमांडणी आहे.

असमेच्या आलेखात सलग सीमारेषा समाविष्ट असते; तुटक सीमारेषा वगळलेली असते. छायांकित अर्धप्रतलातील बिंदूंनी असमा पूर्ण झाली पाहिजे. तपासणीसाठी सीमारेषेवर नसलेला बिंदू निवडा. असमेच्या दोन्ही बाजूंना ऋण संख्येने गुणल्यास किंवा भागल्यास असमा-चिन्हाची दिशा उलटते; समीकरणासाठीचा समान क्रियेचा नियम तसाच न वापरता हा भेद जपा.

फलनासाठी प्रत्येक ग्राह्य आदानाला नेमके एक निर्गम असते. मूल्यसंच म्हणजे प्रत्यक्ष मिळणाऱ्या निर्गमांचा संच; तो सहप्रांताशी आपोआप समान नाही. प्रांत आणि मूल्यसंचासाठी अंतराल-संकेतलेखन वापरताना समाविष्ट टोकासाठी चौकोनी कंस आणि वगळलेल्या टोकासाठी गोल कंस वापरा; अनंताला समाविष्ट टोक समजू नका. उभ्या दंडांनी केवल मूल्य दर्शवले जाते. अन्वस्त या संज्ञेचा इंग्रजी पर्याय parabola आहे.

स्रोतात तेरा प्रश्नांची उत्तरे आहेत; ती मूळ ओळखचिन्हांसह ठेवली आहेत. उरलेल्या बारा प्रश्नांची स्रोत-उत्तरे नाहीत आणि तशी स्पष्ट नोंद केली आहे. त्यांच्यासाठी नवीन उत्तरे येथे तयार केलेली नाहीत. मूळ चित्रांमध्ये बदल केलेले नाहीत; मराठी वर्णनातील स्रोतापेक्षा वेगळ्या तपशीलांची कारणे स्वतंत्र नोंदीत दिली आहेत.

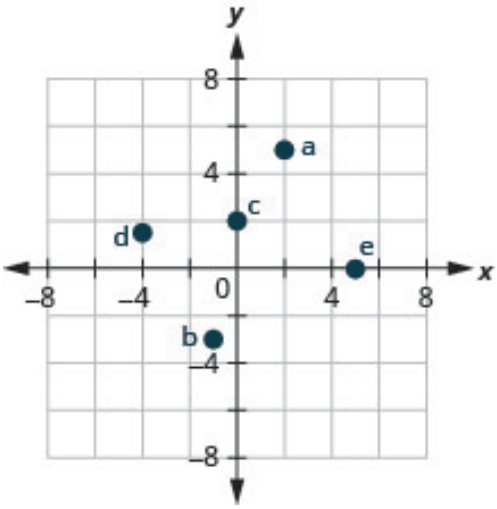
**प्रश्न 1**

प्रत्येक बिंदू आयताकार सहनिर्देशक पद्धतीत दाखवा.

ⓐ (2,5)
ⓑ (−1,−3)
ⓒ (0,2)
ⓓ (−4,((3)/(2)))
ⓔ (5,0)

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर पाच स्वतंत्र बिंदू दाखवले आहेत: a=(2,5) पहिल्या चतुर्थांशात; b=(−1,−3) तिसऱ्या चतुर्थांशात; c=(0,2) हा y-अक्षावर; d=(−4,1.5) दुसऱ्या चतुर्थांशात; e=(5,0) हा x-अक्षावर. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके. बिंदू एकमेकांना रेषांनी जोडलेले नाहीत.

मूळ EN आकृती 397 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाविषयी नोंद: दोन्ही स्रोत-वर्णनांतील −10 ते 10 ऐवजी प्रत्यक्ष अक्ष-जाळी −8 ते 8 आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833142400

### प्रश्न 2

दिलेल्या क्रमित जोड्यांपैकी कोणत्या जोड्या $3x - y = 6$ या समीकरणाच्या उकली आहेत?

ⓐ (3,3) ⓑ (2,0) ⓒ (4,−6)

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

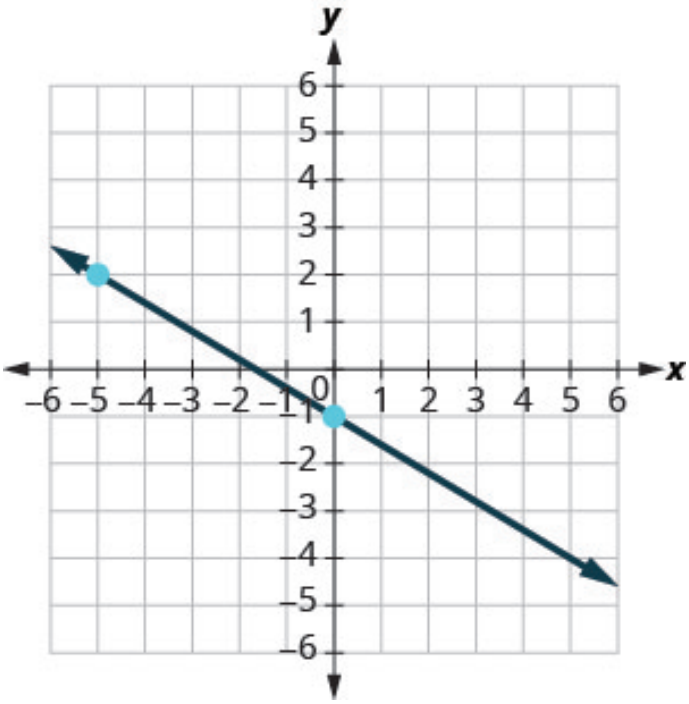
Source: A20:m81374#fs-id1167836556753

दाखवलेल्या प्रत्येक रेषेचा उतार शोधा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836476746

**प्रश्न 3**

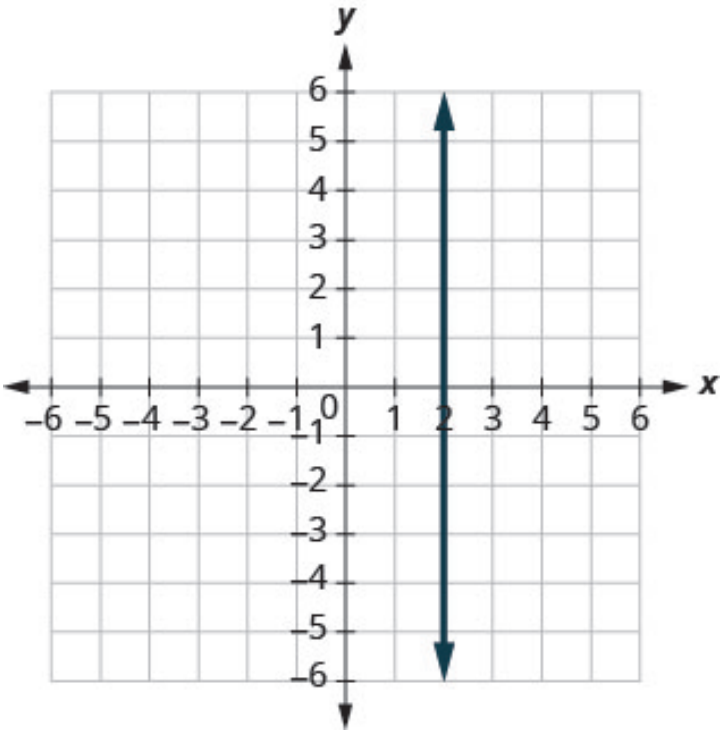
ⓐ




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर उतरती सरळ रेषा (−5,2), (0,−1), (5,−4) मधून जाते. (−5,2) आणि (0,−1) हे बिंदू स्वतंत्रपणे ठळक केले आहेत. दोन्ही टोकांवर पुढे चालू राहण्याचे बाण. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −6 ते 6; प्रत्येक चौकट एक एकक.

मूळ EN आकृती 250 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाविषयी नोंद: दोन्ही स्रोत-वर्णनांतील −10 ते 10 ऐवजी प्रत्यक्ष अक्ष-जाळी −6 ते 6 आहे.

ⓑ




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर x=2 ही उभी सरळ रेषा (2,0), (2,−1), (2,1) मधून जाते. वर व खाली पुढे चालू राहण्याचे बाण. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −6 ते 6; प्रत्येक चौकट एक एकक.

मूळ EN आकृती 251 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाविषयी नोंद: दोन्ही स्रोत-वर्णनांतील −10 ते 10 ऐवजी प्रत्यक्ष अक्ष-जाळी −6 ते 6 आहे.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ −((3)/(5)); ⓑ उतार परिभाषित नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836476749

**प्रश्न 4**

(5,2) आणि (−1,−4) या बिंदूंमधून जाणाऱ्या रेषेचा उतार शोधा.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

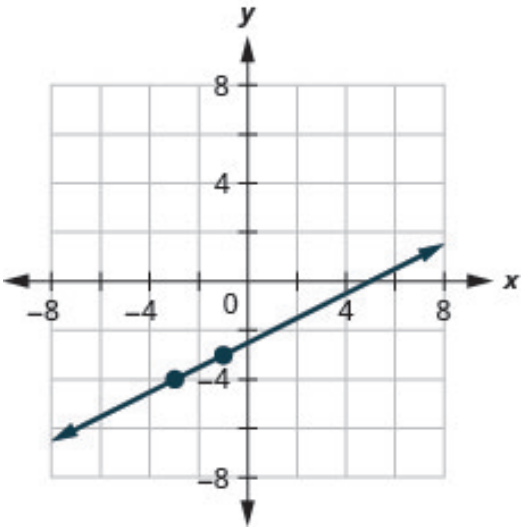
Source: A20:m81374#fs-id1167836499109

**प्रश्न 5**

उतार ((1)/(2)) असलेली आणि (−3,−4) या बिंदूतून जाणारी रेषा काढा.

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर चढती सरळ रेषा (−3,−4), (−1,−3), (1,−2) मधून जाते. पहिल्या दोन बिंदूंवर ठळक खुणा आहेत. दोन्ही टोकांवर बाण. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके.

मूळ EN आकृती 398 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाविषयी नोंद: दोन्ही स्रोत-वर्णनांतील −10 ते 10 ऐवजी प्रत्यक्ष अक्ष-जाळी −8 ते 8 आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833227002

### प्रश्न 6

4x+2y = −8 या रेषेचे अक्षांवरील छेदनबिंदू शोधा आणि तिचा आलेख काढा.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833048332

## पुढील प्रत्येक समीकरणाचा रेषीय आलेख काढा.

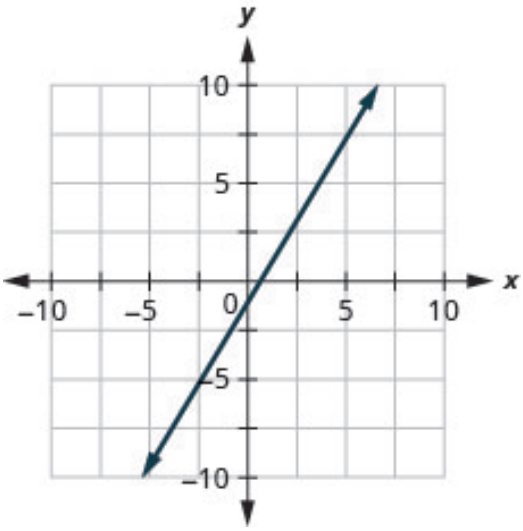
Source: A20:m81374#fs-id1167833345913

### प्रश्न 7

y = ((5)/(3))x−1

स्रोत-उत्तर पाहा

### स्रोतातील उत्तर




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर चढती सरळ रेषा (−3,−6), (0,−1), (3,4) मधून जाते. दोन्ही टोकांवर बाण. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −10 ते 10; प्रत्येक चौकट 2.5 एकके.

मूळ EN आकृती 400 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836514485

### प्रश्न 8

$y = -x$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

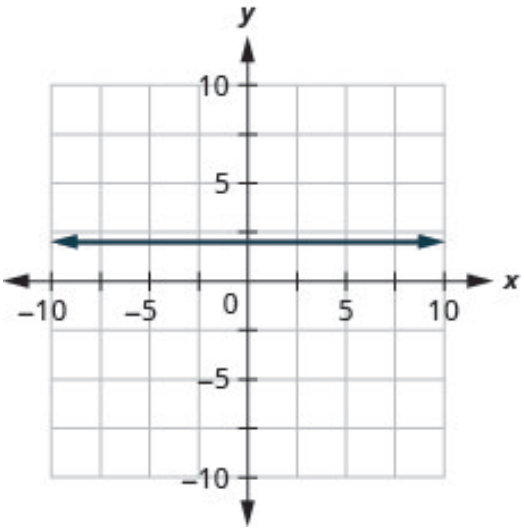
Source: A20:m81374#fs-id1167836663988

### प्रश्न 9

$y = 2$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर y=2 ही आडवी सरळ रेषा (−1,2), (0,2), (1,2) मधून जाते. दोन्ही टोकांवर बाण. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −10 ते 10; प्रत्येक चौकट 2.5 एकके.

मूळ EN आकृती 402 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836628686

प्रत्येक रेषेचे समीकरण शोधा. ते उतार–y-अक्षछेद रूपात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836792029

**प्रश्न 10**

उतार −((3)/(4)) आणि y-अक्षावरील छेदनबिंदू (0,−2).

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836792032

**प्रश्न 11**

m = 2, बिंदू (−3,−1).

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

y = 2x+5

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829614537

**प्रश्न 12**

(10,1) आणि (6,−1) या बिंदूंमधून जाणारी रेषा.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836574822

**प्रश्न 13**

y = ((5)/(4))x+2, या रेषेला लंब आणि (−10,3) या बिंदूतून जाणारी रेषा.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

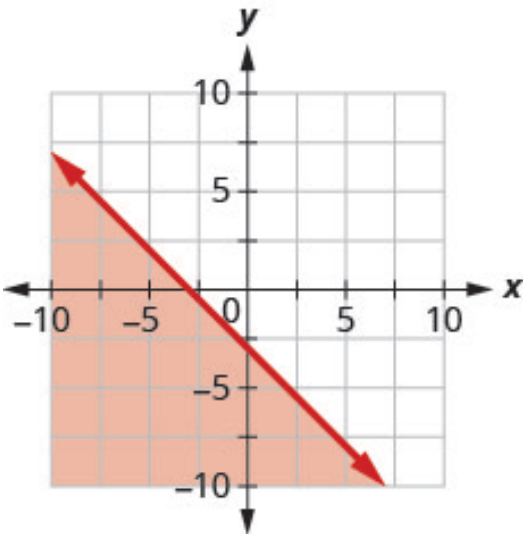
y = −((4)/(5))x−5

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167824652819

**प्रश्न 14**

सीमारेषा y = −x−3 असलेल्या खालील आलेखाने दाखवलेली असमा लिहा.




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर y=−x−3 ही सलग लाल सीमारेषा (−3,0), (0,−3), (1,−4) मधून जाते. तिच्या खालचा-डावीकडचा अर्धप्रतल गुलाबी छायांकित आहे; सीमारेषाही उकलसंचात समाविष्ट आहे. दोन्ही टोकांवर बाण. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −10 ते 10; प्रत्येक चौकट 2.5 एकके.

मूळ EN आकृती 252 अपरिवर्तित ठेवली आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836375941

प्रत्येक रेषीय असमेचा आलेख काढा.

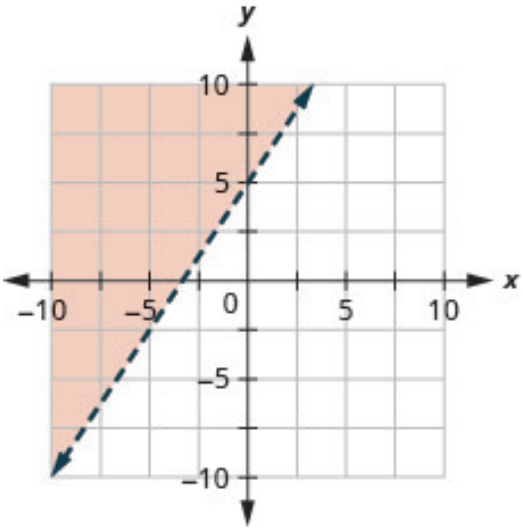
Source: A20:m81374#fs-id1167829859341

**प्रश्न 15**

y>((3)/(2))x+5

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर तुटक गडद निळी सीमारेषा (−2,2), (0,5), (2,8) मधून जाते. तिच्या वरचा-डावीकडचा अर्धप्रतल गुलाबी छायांकित आहे; तुटक सीमारेषा उकलसंचात समाविष्ट नाही. दोन्ही टोकांवर बाण. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −10 ते 10; प्रत्येक चौकट 2.5 एकके.

मूळ EN आकृती 403 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाविषयी नोंद: EN वर्णन सीमारेषा तुटक असल्याचे स्पष्ट करते; ID वर्णनात तो गुण स्पष्ट नाही. दोन्ही प्रत्यक्ष चित्रांत रेषा तुटक आहे; मराठी वर्णनात तो भेद जपला आहे.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167836622063

**प्रश्न 16**

x−y≥−4

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

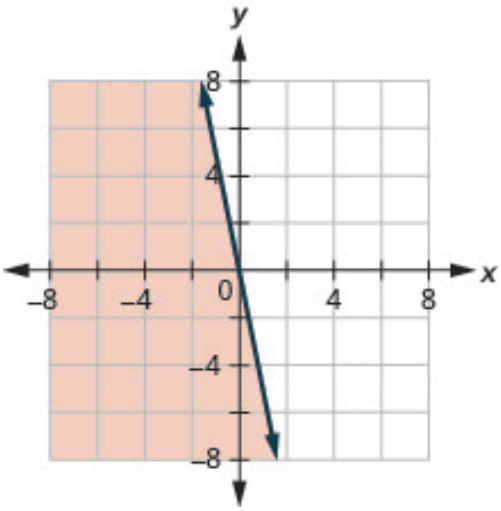
Source: A20:m81374#fs-id1167836575646

**प्रश्न 17**

y≤−5x

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर सलग गडद निळी सीमारेषा (−1,5), (0,0), (1,−5) मधून जाते. तिच्या खालचा-डावीकडचा अर्धप्रतल गुलाबी छायांकित आहे; सलग सीमारेषाही उकलसंचात समाविष्ट आहे. दोन्ही टोकांवर बाण. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके.

मूळ EN आकृती 405 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाविषयी नोंद: दोन्ही स्रोत-वर्णनांत सीमारेषाही लाल म्हटली आहे. प्रत्यक्ष ती गडद निळी आणि सलग आहे; छायांकन गुलाबी आहे. सीमारेषेचा उकलसंचातील समावेश बदललेला नाही.

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833369817

**प्रश्न 18**

आठवड्याच्या किमान 450 डॉलरच्या आर्थिक जबाबदाऱ्या भागवण्यासाठी पुरेसे पैसे मिळावेत म्हणून हिरो दोन अर्धवेळ नोकऱ्या करते. मॉलमधील नोकरीत तिला ताशी 10 डॉलर मिळतात आणि महाविद्यालयाच्या परिसरात प्रशासकीय सहाय्यक म्हणून केलेल्या नोकरीत ताशी 15 डॉलर मिळतात. किमान 450 डॉलर मिळवण्यासाठी हिरोने प्रत्येक नोकरीत किती तास काम करावे?

ⓐ मॉलमध्ये ती काम करते त्या तासांची संख्या x आणि प्रशासकीय सहाय्यक म्हणून ती काम करते त्या तासांची संख्या y मानू. ही परिस्थिती दर्शवणारी असमा लिहा.
ⓑ त्या असमेचा आलेख काढा.
ⓒ असमेच्या उकली असतील अशा तीन क्रमित जोड्या (x,y) शोधा. नंतर त्या जोड्यांचा हिरोसाठी काय अर्थ होतो ते स्पष्ट करा.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

परिस्थितीच्या अटींबद्दल स्वतंत्र नोंद: तासांची संख्या ऋण असू शकत नाही, म्हणून $x \geq 0$ आणि $y \geq 0$ या अटी लागू होतात. स्रोताने तास पूर्णांकच असावेत किंवा कामाच्या कमाल तासांची मर्यादा दिलेली नाही; अशा अतिरिक्त अटी गृहीत धरू नका. मूळ रकमा डॉलरमध्येच ठेवल्या आहेत, रुपयांत बदललेल्या नाहीत. ही अट स्पष्ट करणारी नोंद आहे; स्रोताने न दिलेली असमेची उकल किंवा तीन जोड्यांचे उत्तर येथे भरलेले नाही.

Source: A20:m81374#fs-id1167833327182

**प्रश्न 19**

क्रमित जोड्यांचा संच वापरून ⓐ संबंध फलन आहे का ते ठरवा; ⓑ संबंधाचा प्रांत शोधा; ⓒ संबंधाचा मूल्यसंच शोधा.

$\{(-3,27),(-2,8),(-1,1),(0,0),$
$(1,1),(2,8),(3,27)\}$

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ होय. ⓑ $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$; ⓒ $\{0, 1, 8, 27\}$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833369856

**प्रश्न 20**

फलनाची पुढील मूल्ये काढा: ⓐ $f(-1)$; ⓑ $f(2)$; ⓒ $f(c)$

$f(x) = 4x^2-2x-3$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833386954

**प्रश्न 21**

$h(y) = 3|y-1|-3$, या फलनासाठी $h(-4)$ काढा.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

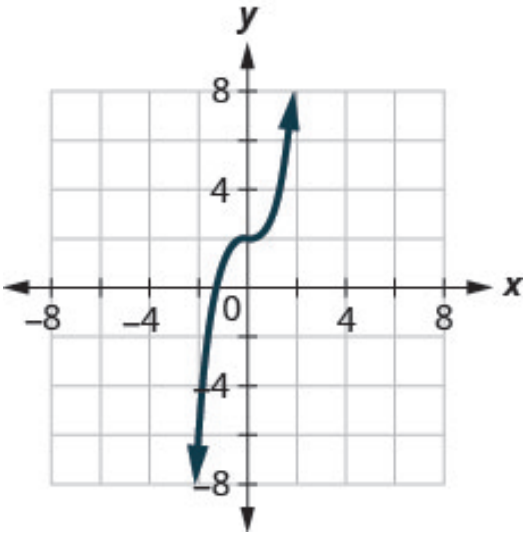
12

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167833240317

**प्रश्न 22**

हा आलेख फलनाचा आलेख आहे का ते ठरवा. तुमच्या उत्तराचे स्पष्टीकरण द्या.




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर वरच्या दिशेने सरकवलेला घन-आकाराचा S-वक्र (−1,1), (0,2), (1,3) मधून जातो. खालच्या आणि वरच्या टोकांवर पुढे चालू राहण्याचे बाण आहेत. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके.

मूळ EN आकृती 253 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाविषयी नोंद: दोन्ही स्रोत-वर्णनांतील −6 ते 6 ऐवजी प्रत्यक्ष अक्ष-जाळी −8 ते 8 आहे. प्रश्नाचे उत्तर आधीच गृहीत न धरता वर्णनात वक्राचा दिसणारा आकार दिला आहे.

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167836554217

पुढील प्रश्नांत ⓐ प्रत्येक फलनाचा आलेख काढा; ⓑ त्याचा प्रांत व मूल्यसंच लिहा.
प्रांत व मूल्यसंच अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833223602

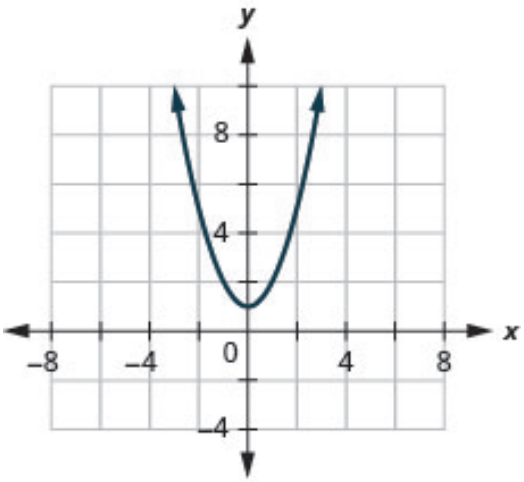
**प्रश्न 23**

$f(x) = x^2+1$

स्रोत-उत्तर पाहा

## स्रोतातील उत्तर

ⓐ




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर $f(x)=x^2+1$ चा वर उघडणारा अन्वस्त. सर्वांत खालचा बिंदू (0,1); वक्र (−2,5), (−1,2), (1,2), (2,5) मधून जातो. दोन्ही वरच्या टोकांवर बाण. दृश्य जाळी x: −8 ते 8 आणि y: −4 ते 10; प्रत्येक चौकट दोन एकके.

मूळ EN आकृती 407 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाविषयी नोंद: दोन्ही स्रोत-वर्णनांतील x: −6 ते 6, y: −2 ते 10 ऐवजी मराठी वर्णनात प्रत्यक्ष जाळी दिली आहे.

ⓑ D: $(-\infty, \infty)$; R: $[1, \infty)$

प्रश्नाकडे परत

Source: A20:m81374#fs-id1167829831137

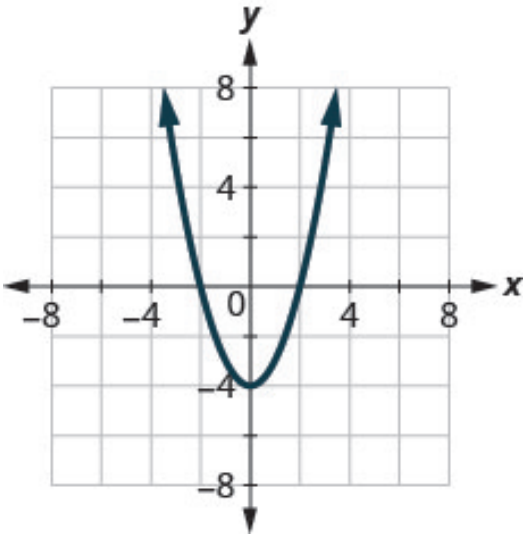
### प्रश्न 24

$f(x) = \sqrt{(x+1)}$

स्रोतात या प्रश्नाचे उत्तर दिलेले नाही. स्वतः सोडवा.

Source: A20:m81374#fs-id1167833380258

**प्रश्न 25**




आकृतीचे वर्णन: x-y प्रतलावर वर उघडणारा अन्वस्त (−2,0), (−1,−3), (0,−4), (1,−3), (2,0) मधून जातो. सर्वांत खालचा बिंदू (0,−4); वरच्या दोन्ही टोकांवर बाण. दृश्य जाळी दोन्ही अक्षांवर −8 ते 8; प्रत्येक चौकट दोन एकके.

मूळ EN आकृती 254 अपरिवर्तित ठेवली आहे. वर्णनाविषयी नोंद: दोन्ही स्रोत-वर्णनांतील −6 ते 6 ऐवजी प्रत्यक्ष अक्ष-जाळी −8 ते 8 आहे.

ⓐ x-अक्षावरील छेदनबिंदू शोधा.
ⓑ y-अक्षावरील छेदनबिंदू शोधा.
ⓒ f(−1) शोधा.
ⓓ f(1) शोधा.
ⓔ प्रांत शोधा. तो अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.
ⓕ मूल्यसंच शोधा. तो अंतराल-संकेतलेखनात लिहा.

स्रोत-उत्तर पाहा

**स्रोतातील उत्तर**

ⓐ x = −2,2; ⓑ y = −4
ⓒ f(−1) = −3; ⓓ f(1) = −3
ⓔ D: (−∞, ∞); ⓕ R: [−4, ∞)

प्रश्नाकडे परत

उत्तराच्या संकेतनाबद्दल स्वतंत्र स्पष्टीकरण: स्रोताच्या ⓐ–ⓑ उत्तरांत छेदनबिंदूंचे अनुक्रमे x आणि y सहनिर्देशक दिले आहेत. प्रश्नात बिंदू विचारले असल्याने त्यांची पूर्ण क्रमित-जोडी मांडणी अशी: x-अक्षावरील (−2, 0), (2, 0); y-अक्षावरील (0, −4). स्रोताने दिलेली सहनिर्देशक-मूल्ये वर ठेवली आहेत; पूर्ण बिंदू लिहिण्याची ही स्पष्टपणे जोडलेली मांडणी आहे.

Source: A20:m81374#fs-id1167832940626

# स्रोत, श्रेय आणि मर्यादा

OpenStax, Intermediate Algebra 2e: Lynn Marecek आणि Andrea Honeycutt Mathis; प्रकाशक OpenStax, Rice University. पिन केलेला इंग्रजी m81374 स्रोत आणि इंडोनेशियन v0.3.0-wip समांतर आवृत्ती त्यांच्या मूळ नोंदींसह वापरली आहे. अनुवाद व एकत्रीकरण: वापरकर्त्याच्या सूचनेवरील Codex-सहाय्यति मराठी कार्यप्रवाह.

निवडक स्रोत व मराठी अनुकूलन: CC BY-NC-SA 4.0; स्वतंत्र घटक/तृतीय-पक्ष सूचना कायम लागू आहेत. पिन केलेले परवाना व श्रेय-साक्षी या एकत्रीकरणाच्या पावतीतील पुनर्बांधणी इनपुटमध्ये आहेत.

149 मूळ इंग्रजी स्रोत-आकृत्या त्यांच्या स्थिर घटक-assets संचिकांतून अचूक हॅशसह जोडल्या आहेत. दोन स्रोत-गणना तक्ते आधीच्या तपासलेल्या मसुद्यातील रेषीय परिच्छेद-अनुकूलन म्हणून राहतात; सात स्रोत-रांगा व चौदा नोंदींची स्वतंत्र पावती आहे. दुरुस्त पर्यायी वर्णने, संदर्भ-अटी, पुरवलेली स्रोत-उत्तरे आणि स्पष्ट उत्तर-उणीव या भूमिका बदललेल्या नाहीत.

ही जतन केलेल्या स्रोत-संरचनेवरून तयार केलेली PDF वाचन-प्रत आहे. PDF रचना आणि पानांच्या दृश्य तपासणीची स्वतंत्र नोंद सोबत दिली आहे. यावरून PDF/UA प्रवेशयोग्यता, मातृभाषिक किंवा गणित-शिक्षकांची मान्यता, संपूर्ण A20 पुस्तक किंवा संपूर्ण पाच-पुस्तकांचे काम पूर्ण झाल्याचा दावा होत नाही. पुढील m81375 आणि उर्वरित नियुक्तीचे उत्पादन या प्रतीत समाविष्ट नाही. PDF पुनर्प्राप्ती व मांडणी: OpenAI Codex gpt-5.6-sol, Ultra; वापरकर्त्याच्या सूचनेनुसार.

# XML identity index

Every source and local XML ID is retained below and as a named PDF destination. The exact UTF-8 XML is attached. This separate XML reading copy does not certify HTML rendering, PDF/UA accessibility, or native-teacher review.


A20-m81374
para-00001
assembly-content
fs-id1167830095706
fs-idm256117632
fs-idm674925792
fs-idm664502240
fs-idm266315424
fs-idm260165584
fs-idm263727344
fs-idm221017600
fs-idm214674176
fs-id1167836579284
fs-id1167836691995
fs-id1167836625879
fs-id1167836424063
fs-id1167829717392
fs-id1167836293137
fs-id1167836608668
fs-id1167836731467
fs-id1167836730567
fs-id1167836552272
fs-id1167836542012
fs-id1167833339591
fs-id1167830123185
fs-id1167836333903
fs-id1167833061214
fs-id1167836537878
fs-id1167836526902
fs-id1167836299681
fs-id1167829693572
fs-id1167836293187
fs-id1167836685520
fs-id1167836415144
fs-id1167836692382
fs-id1167836321563
fs-id1167836480334
fs-id1167833049966
fs-id1167836755080
fs-id1167833056074
fs-id1167836612024
fs-id1167836618853
fs-id1167829746004
fs-id1167836406766
fs-id1167833051555
fs-id1167836660083
fs-id1167833128828
fs-id1167836554322
fs-id1167829719238
fs-id1167833328995
assembly-objectives
list-00001
fs-id1167826157468
fs-idm218640736
fs-idm218576736
fs-idm239514896
fs-idm222104752
fs-idm276126800
fs-idm245234768
fs-idm257335392
fs-idm228515616
fs-idm276098368
fs-id1167829579930
fs-id1167829924871
CNX_IntAlg_Figure_03_06_001
fs-id1167836547061
fs-id1167836600350
fs-id1167833386905
fs-id1167836608075
fs-id1167836579319
fs-id1167836646294
fs-id1167833102413
fs-id1167836557713
fs-id1167836289482
fs-id1167836439913
fs-id1167836728309
fs-id1167829879758
fs-id1167836519221
fs-id1167836626524
fs-id1167836700357
fs-id1167836522816
fs-id1167833020798
CNX_IntAlg_Figure_03_06_007
fs-id1167829598148
fs-id1167829719082
fs-id1167836665565
fs-id1167836692114
fs-id1167829790631
fs-id1167825091753
fs-id1167836513618
fs-id1167836546655
fs-id1167836688758
fs-id1167829754438
fs-id1167836601239
fs-id1167836579562
fs-id1167836688878
fs-id1167824781336
fs-id1167836406990
fs-id1167832925581
fs-id1167833054733

fs-id1167836602424
fs-id1167836684877
fs-id1167836525068
fs-id1167836433572
fs-id1167836574261
fs-id1167836514168
fs-id1167824736254
fs-id1167824764946
fs-id1167836399311
fs-id1167836558185
fs-id1167836552606
fs-id1167836501611
fs-id1167836409269
fs-id1167824674086
fs-id1167826171267
fs-id1167836646170
fs-id1167836650008
fs-id1167833339306
fs-id1167836310060
fs-id1167836294992
fs-id1167836768461
fs-id1167833139707
fs-id1167829930524
fs-id1167833051245
fs-id1167836288172
fs-id1167829783193
fs-id1167824617137
fs-id1167829738598
fs-id1167836572855
fs-id1167836800401
fs-id1167836415391
fs-id1167836485775
fs-id1167833060462
fs-id1167836544330
fs-id1167833056490
fs-id1167833196697
fs-id1167823012200
fs-id1167829984244
fs-id1167836598078
fs-id1167829687218
fs-id1167833023152
fs-id1167829930477
fs-id1167836569057
fs-id1167833326611
fs-id1167829686050
fs-id1167836378266
fs-id1167836730489
fs-id1167836525446
fs-id1167836650089
fs-id1167836610583
fs-id1167830077318
fs-id1167824733299
fs-id1167836292233
fs-id1167829879306
fs-id1167836531216
fs-id1167836707251
fs-id1167836494179
fs-id1167833142741
fs-id1167824764495
fs-id1167833060151
fs-id1167836560655
fs-id1167836481166
fs-id1167836557139
fs-id1167829878652
fs-id1167829851276
fs-id1167836487148
fs-id1167825091690
fs-id1167833053412
fs-id1167836528178
fs-id1167836355755
fs-id1167836683384
fs-id1167833345125
fs-id1167833396805
fs-id1167836295348
fs-id1167836530814
fs-id1167829860129
fs-id1167836731140
fs-id1167829624689
fs-id1167829695062
fs-id1167833237691
fs-id1167833197255
fs-id1167829853073
fs-id1167829744925
fs-id1167832966170
fs-id1167824701409
fs-id1167829756525
fs-id1167833020710
fs-id1167836553231
fs-id1167836743450
fs-id1167836519057
fs-id1167832982045
fs-id1167829907663
fs-id1167836775118
fs-id1167836434321
fs-id1167836787693
fs-id1167836496942
fs-id1167836512756
fs-id1167833350001
fs-id1167833019425
fs-id1167829921787
fs-id1167836341594
fs-id1167836623811
fs-id1167836335402
fs-id1167829595237
fs-id1167836510334
fs-id1167836602315
fs-id1167833139590
fs-id1167836664843
fs-id1167836299963
fs-id1167836417983
fs-id1167836544266
fs-id1167836282463

fs-id1167836614974
fs-id1167836623976
fs-id1167836376954
fs-id1167836511265
fs-id1167836625638
fs-id1167836595957
fs-id1167830123030
fs-id1167833023118
fs-id1167836335262
fs-id1167833022366
fs-id1167836514287
fs-id1167829756085
fs-id1167829688185
fs-id1167836538244
fs-id1167833158804
fs-id1167836529485
fs-id1167829790459
fs-id1167829597137
fs-id1167825702858
fs-id1167829718932
fs-id1167836613378
fs-id1167829807801
fs-id1167836515910
fs-id1167836552428
fs-id1167836323347
fs-id1167836377545
fs-id1167836507194
fs-id1167829685616
fs-id1167833007616
fs-id1167836418791
fs-id1167836550513
fs-id1167836510817
fs-id1167833240128
fs-id1167836526481
fs-id1167836612647
fs-id1167836362135
fs-id1167836597228
fs-id1167836612581
fs-id1167836706023
fs-id1167836699152
fs-id1167836612513
fs-id1167833245744
fs-id1167836310305
fs-id1167829833896
fs-id1167833256037
fs-id1167836620309
fs-id1167836315012
fs-id1167836361332
fs-id1167829579698
fs-id1167836341027
fs-id1167836628720
fs-id1167836621660
fs-id1167833379683
fs-id1167836548512
fs-id1167836612768
fs-id1167836322912
fs-id1167833350872
fs-id1167836441074
fs-id1167836520875
fs-id1167833014880
fs-id1167833378973
fs-id1167836349492
fs-id1167836787910
fs-id1167836389848
fs-id1167836386547
fs-id1167836620724
fs-id1167825884739
fs-id1167833047462
fs-id1167833057048
fs-id1167836513079
fs-id1167836611195
fs-id1167836547429
fs-id1167833316764
fs-id1167836525200
fs-id1167833060073
fs-id1167836515516
fs-id1167833128692
fs-id1167836576127
fs-id1167836731462
fs-id1167836450768
fs-id1167836493218
fs-id1167836289629
fs-id1167836507624
fs-id1167836547928
fs-id1167836539761
fs-id1167829753187
fs-id1167829999559
fs-id1167836511411
fs-id1167836287943
fs-id1167836378109
fs-id1167832982157
fs-id1167836509634
fs-id1167833036726
fs-id1167836386300
fs-id1167833240439
fs-id1167826129331
fs-id1167833380845
fs-id1167836602267
fs-id1167836300671
fs-id1167833181234
fs-id1167829644953
fs-id1167832998983
fs-id1167836410565
fs-id1167833059978
fs-id1167829720945
fs-id1167829713245
fs-id1167836529276
fs-id1167836662706
fs-id1167836665260
fs-id1167836362052
fs-id1167829589830
fs-id1167836730830

fs-id1167833377170
fs-id1167836665073
fs-id1167836330144
fs-id1167829849369
fs-id1167829936987
fs-id1167833058860
fs-id1167824649348
fs-id1167833350800
fs-id1167836530065
fs-id1167833082143
fs-id1167836694784
fs-id1167836615461
fs-id1167833269954
fs-id1167836418803
fs-id1167829931393
fs-id1167829880227
fs-id1167836516066
fs-id1167832936324
fs-id1167836361338
fs-id1167836544127
fs-id1167824732917
fs-id1167836649918
fs-id1167836429353
fs-id1167836282751
fs-id1167836520136
fs-id1167836510430
fs-id1167836513491
fs-id1167829807022
fs-id1167836731888
fs-id1167836712402
fs-id1167836550226
fs-id1167836626104
fs-id1167836552854
fs-id1167833310489
fs-id1167836330168
fs-id1167836691433
fs-id1167829851557
fs-id1167836698477
fs-id1167836533854
fs-id1167829830462
fs-id1167836481202
fs-id1167833021907
fs-id1167836730654
fs-id1167832976376
fs-id1167833186678
fs-id1167836326911
fs-id1167836321873
fs-id1167836319029
fs-id1167836510523
fs-id1167836560949
fs-id1167836329509
fs-id1167826169717
fs-id1167836362657
fs-id1167833025407
fs-id1167833082497
fs-id1167829650694
fs-id1167836356048
fs-id1167836477133
fs-id1167836296139
fs-id1167836356672
fs-id1167832945825
fs-id1167824736142
fs-id1167836560312
fs-id1167836299759
fs-id1167829624127
fs-id1167836362620
fs-id1167836312665
fs-id1167826025216
fs-id1167836717417
fs-id1167833128282
fs-id1167833128830
fs-id1167836732495
fs-id1167836628122
fs-id1167824658727
fs-id1167833256412
fs-id1167836319404
fs-id1167836407696
fs-id1167829878394
fs-id1167836310954
fs-id1167829745945
fs-id1167836546248
fs-id1167836706859
fs-id1167829719517
fs-id1167836635569
fs-id1167836685446
fs-id1167836545379
fs-id1167836447279
fs-id1167836662613
fs-id1167836621812
fs-id1167833135075
fs-id1167836539196
fs-id1167829599925
fs-id1167826177592
fs-id1167836625081
fs-id1167836296574
fs-id1167829719707
fs-id1167836613666
fs-id1167836722566
fs-id1167836361907
fs-id1167836522879
fs-id1167836549919
fs-id1167836492164
fs-id1167836627175
fs-id1167824765152
fs-id1167829749853
fs-id1167824732033
fs-id1167833310065
fs-id1167829878789
fs-id1167836556201
fs-id1167836662424
fs-id1167829689678
fs-id1167836791239

fs-id1167836390020
fs-id1167833346213
fs-id1167836693431
fs-id1167836526432
fs-id1167833056424
fs-id1167836717043
fs-id1167829688798
fs-id1167836699822
fs-id1167836481043
fs-id1167836375975
fs-id1167836310146
fs-id1167833054162
fs-id1167836322682
fs-id1167836624651
fs-id1167826170204
fs-id1167836511382
fs-id1167836368147
fs-id1167829923887
fs-id1167836409493
fs-id1167829715758
fs-id1167829789446
fs-id1167836556358
fs-id1167829899539
fs-id1167836608457
fs-id1167833024700
fs-id1167836608052
fs-id1167836686005
fs-id1167836580012
fs-id1167832999715
fs-id1167836561278
fs-id1167829624940
fs-id1167836692203
fs-id1167836706806
fs-id1167824590509
fs-id1167836363597
fs-id1167836609509
fs-id1167836610897
fs-id1167836574099
fs-id1167829684137
fs-id1167836621052
fs-id1167829590096
fs-id1167836645558
fs-id1167836441031
fs-id1167829849533
fs-id1167829696672
fs-id1167836432065
fs-id1167836609689
fs-id1167829714553
fs-id1167833057178
fs-id1167836409782
fs-id1167836629192
fs-id1167833060329
fs-id1167836613527
fs-id1167836790091
fs-id1167833057205
fs-id1167833049694
fs-id1167829695009
fs-id1167833051204
fs-id1167836602619
fs-id1167836341365
fs-id1167829750112
fs-id1167824584281
fs-id1167836415699
fs-id1167836701108
fs-id1167826132631
fs-id1167833142040
fs-id1167836510096
fs-id1167836521944
fs-id1167836510676
fs-id1167836455857
fs-id1167836514110
fs-id1167829589762
fs-id1167836628623
fs-id1167824766922
fs-id1167833186644
fs-id1167836774098
fs-id1167833397067
fs-id1167836393413
fs-id1167829936852
fs-id1167836550967
fs-id1167836601960
fs-id1167829712186
fs-id1167836579171
fs-id1167836524810
fs-id1167836524162
fs-id1167836442468
fs-id1167836285461
fs-id1167836504168
fs-id1167836293141
fs-id1167836361313
fs-id1167829717427
fs-id1167836557691
fs-id1167836688268
fs-id1167833007602
fs-id1167836545772
fs-id1167829831353
fs-id1167836570194
fs-id1167829712368
fs-id1167832950981
fs-id1167836626610
fs-id1167836573407
fs-id1167829747450
fs-id1167836544041
fs-id1167829859771
fs-id1167836525312
fs-id1167836602786
fs-id1167829599508
fs-id1167830004585
fs-id1167832977072
fs-id1167836514007
fs-id1167833381224
fs-id1167829849522

fs-id1167833057322
fs-id1167830077412
fs-id1167836729385
fs-id1167824674139
fs-id1167833059130
fs-id1167836560060
fs-id1167836300056
fs-id1167829621293
fs-id1167833329338
fs-id1167836408579
fs-id1167833271954
fs-id1167833020246
fs-id1167829644642
fs-id1167836614945
fs-id1167829785046
fs-id1167836523530
fs-id1167829628246
fs-id1167829850431
fs-id1167836686054
fs-id1167829859281
fs-id1167824648946
fs-id1167829890837
fs-id1167836624857
fs-id1167833378492
fs-id1167829919797
fs-id1167836495112
fs-id1167833208030
fs-id1167836705579
fs-id1167829688321
fs-id1167833050658
fs-id1167829880329
fs-id1167836296637
fs-id1167829861802
fs-id1167826131104
fs-id1167832999780
fs-id1167836628586
fs-id1167829853783
fs-id1167836611473
fs-id1167836429500
fs-id1167829596805
fs-id1167836619820
fs-id1167829810794
fs-id1167836340022
fs-id1167836692043
fs-id1167829751646
fs-id1167833056929
fs-id1167836356293
fs-id1167836627814
fs-id1167836391526
fs-id1167836514023
fs-id1167836729649
fs-id1167836697400
fs-id1167833004921
fs-id1167824737384
fs-id1167836386913
fs-id1167836537272
fs-id1167829599017
MR-BRIDGE-015--MR-BRIDGE-015-self-rating
fs-id1167836524742
fs-id1167836689070
fs-id1167836560058
fs-id1167829595121
fs-id1167829621292
fs-id1167836729981
fs-id1167829785790
fs-id1167836728880
fs-id1167833271956
fs-id1167833020249
fs-id1167836549257
fs-id1167836667122
fs-id1167836423872
fs-id1167836523532
fs-id1167829850430
fs-id1167833326537
fs-id1167836686056
fs-id1167829859283
fs-id1167829890835
fs-id1167833138261
fs-id1167836624859
fs-id1167826169944
fs-id1167833379178
fs-id1167836495114
fs-id1167836705576
fs-id1167836529723
fs-id1167836689329
fs-id1167829750436
fs-id1167829880330
fs-id1167833019205
fs-id1167826131102
fs-id1167836698868
fs-id1167832999782
fs-id1167829853782
fs-id1167833207874
fs-id1167836429498
fs-id1167836407159
fs-id1167829596808
fs-id1167836619822
fs-id1167824578489
fs-id1167836692041
fs-id1167829840769
fs-id1167829751648
fs-id1167833024082
fs-id1167833369799
fs-id1167829586489
fs-id1167836514020
fs-id1167836691368
fs-id1167836729651
fs-id1167836697402
fs-id1167824737382
fs-id1167829720692
fs-id1167836386915
fs-id1167833407393

fs-id1167833407395
fs-id1167829906596
fs-id1167824737270
fs-id1167833339919
fs-id1167836559721
fs-id1167824731739
fs-id1167824648910
fs-id1167829586204
fs-id1167829597298
fs-id1167836509101
fs-id1167836423883
fs-id1167836507734
fs-id1167836513855
fs-id1167829755848
fs-id1167833047231
fs-id1167836366545
fs-id1167836620205
fs-id1167829788714
fs-id1167833175418
fs-id1167836790118
fs-id1167832980890
fs-id1167836623134
fs-id1167829690312
fs-id1167836738035
fs-id1167833036675
fs-id1167836399770
fs-id1167832945666
fs-id1167836356549
fs-id1167836606570
fs-id1167829578786
fs-id1167836554347
fs-id1167833224570
fs-id1167829931428
fs-id1167836664452
fs-id1167836322980
fs-id1167829790349
fs-id1167836455885
fs-id1167836738198
fs-id1167836391480
fs-id1167833310349
fs-id1167836673410
fs-id1167829714127
fs-id1167836620935
fs-id1167829717719
fs-id1167832980874
fs-id1167836408865
fs-id1167829878927
fs-id1167836557402
fs-id1167836536586
fs-id1167836540579
fs-id1167836540582
fs-id1167836717185
fs-id1167833369422
fs-id1167836434016
fs-id1167836392639
fs-id1167836575633
fs-id1167829595359
fs-id1167829877972
fs-id1167824737272
fs-id1167833339921
fs-id1167833057045
fs-id1167829905654
fs-id1167825702449
fs-id1167829851580
fs-id1167829597299
fs-id1167836423881
fs-id1167836626758
fs-id1167833380731
fs-id1167829755847
fs-id1167829740806
fs-id1167836540143
fs-id1167836620203
fs-id1167829691193
fs-id1167829788716
fs-id1167833366014
fs-id1167836790120
fs-id1167836623132
fs-id1167829905380
fs-id1167829690314
fs-id1167833086454
fs-id1167833036677
fs-id1167836399772
fs-id1167836512350
fs-id1167836398874
fs-id1167836606572
fs-id1167829578789
fs-id1167836652641
fs-id1167829586801
fs-id1167824734049
fs-id1167836664454
fs-id1167836322982
fs-id1167833049600
fs-id1167836738195
fs-id1167825766169
fs-id1167836391482
fs-id1167836673408
fs-id1167836387581
fs-id1167836620933
fs-id1167829685902
fs-id1167832980872
fs-id1167836408863
fs-id1167836408866
fs-id1167836557400
fs-id1167836536584
fs-id1167829693217
fs-id1167836540581
fs-id1167829783830
fs-id1167836524200
fs-id1167833369424
fs-id1167836434018
fs-id1167836575631
fs-id1167836507861

fs-id1167833256025
fs-id1167829741996
fs-id1167829619884
fs-id1167836526730
fs-id1167836558639
fs-id1167836408215
fs-id1167832982331
fs-id1167836375314
fs-id1167833270225
fs-id1167836598001
fs-id1167836628505
fs-id1167836535020
fs-id1167836493580
fs-id1167836558141
fs-id1167836509788
fs-id1167829952812
fs-id1167825766097
fs-id1167836597619
fs-id1167833060081
fs-id1167833059952
fs-id1167829715877
fs-id1167829787194
fs-id1167836575255
fs-id1167836525357
fs-id1167824766879
fs-id1167833138015
fs-id1167826211804
fs-id1167836717304
fs-id1167829709310
fs-id1167829694607
fs-id1167830123744
fs-id1167833050702
fs-id1167836705885
fs-id1167836730417
fs-id1167836499090
fs-id1167833408067
fs-id1167829833844
fs-id1167836717594
fs-id1167836792421
fs-id1167836575517
fs-id1167836601369
fs-id1167836613250
fs-id1167832937076
fs-id1167836536614
fs-id1167829597265
fs-id1167826212238
fs-id1167829597408
fs-id1167829716068
fs-id1167832999808
fs-id1167836327049
fs-id1167829744040
fs-id1167829746479
fs-id1167824733731
fs-id1167836599999
fs-id1167829751092
fs-id1167829693762

fs-id1167833256027
fs-id1167829741998
fs-id1167833054991
fs-id1167836312931
fs-id1167836408213
fs-id1167836533072
fs-id1167832982333
fs-id1167833270224
fs-id1167833227116
fs-id1167836598003
fs-id1167836535018
fs-id1167833340136
fs-id1167836493581
fs-id1167836509786
fs-id1167824578768
fs-id1167825766095
fs-id1167836597617
fs-id1167833060079
fs-id1167836732331
fs-id1167833059954
fs-id1167836697072
fs-id1167833019834
fs-id1167836575257
fs-id1167836525359
fs-id1167833138013
fs-id1167836527756
fs-id1167826211806
fs-id1167836440780
fs-id1167829709313
fs-id1167836433912
fs-id1167830123746
fs-id1167833350392
fs-id1167836730415
fs-id1167833060992
fs-id1167836499092
fs-id1167829833842
fs-id1167836717592
fs-id1167833239045
fs-id1167836575515
fs-id1167836601367
fs-id1167836526512
fs-id1167829861813
fs-id1167836536612
fs-id1167833334748
fs-id1167829597267
fs-id1167826212240
fs-id1167829597410
fs-id1167824732674
fs-id1167832999810
fs-id1167836327051
fs-id1167833025723
fs-id1167829746482
fs-id1167836599996
fs-id1167836512155
fs-id1167829597335
fs-id1167829693765

fs-id1167829921267
fs-id1167836434331
fs-id1167833086867
fs-id1167829718877
fs-id1167833041788
fs-id1167829596447
fs-id1167833175513
fs-id1167836645862
fs-id1167836684568
fs-id1167829756252
fs-id1167829756256
fs-id1167836439632
fs-id1167833086732
fs-id1167836550896
fs-id1167826169452
fs-id1167830093794
fs-id1167836613350
fs-id1167829749599
fs-id1167824734798
fs-id1167824734802
fs-id1167833021593
fs-id1167836366759
fs-id1167829784010
fs-id1167836535046
fs-id1167833339172
fs-id1167829713371
fs-id1167836538322
fs-id1167829930155
fs-id1167833345935
fs-id1167833340114
fs-id1167824585096
fs-id1167829743856
fs-id1167836687826
fs-id1167825003616
fs-id1167829693415
fs-id1167824739290
fs-id1167836686948
fs-id1167829627592
fs-id1167829721212
fs-id1167832951212
fs-id1167833052460
fs-id1167833052465
fs-id1167833379473
fs-id1167836622804
fs-id1167836621307
fs-id1167833057530
fs-id1167824841358
fs-id1167824841363
fs-id1167836515439
fs-id1167836694224
fs-id1167836432878
fs-id1167829688943
fs-id1167836326696
fs-id1167832982202
fs-id1167829720638
fs-id1167836701518
fs-id1167836434329
fs-id1167836549401
fs-id1167833346720
fs-id1167836701331
fs-id1167833041790
fs-id1167829596449
fs-id1167836645860
fs-id1167836518808
fs-id1167836684570
fs-id1167829756254
fs-id1167836439630
fs-id1167829752166
fs-id1167836550894
fs-id1167829789152
fs-id1167830093792
fs-id1167836614917
fs-id1167829749597
fs-id1167829749601
fs-id1167824734800
fs-id1167833021591
fs-id1167829596630
fs-id1167829784008
fs-id1167829784012
fs-id1167833339170
fs-id1167829713369
fs-id1167836538320
fs-id1167836538324
fs-id1167829930157
fs-id1167833340112
fs-id1167833129252
fs-id1167824734676
fs-id1167829743859
fs-id1167836687828
fs-id1167829693413
fs-id1167824739288
fs-id1167825857164
fs-id1167829627590
fs-id1167829721210
fs-id1167836570304
fs-id1167833272639
fs-id1167833052463
fs-id1167824732303
fs-id1167833379475
fs-id1167836792019
fs-id1167836621309
fs-id1167836312912
fs-id1167824841360
fs-id1167833381869
fs-id1167836515442
fs-id1167836621666
fs-id1167833136729
fs-id1167829688945
fs-id1167833361642
fs-id1167832982205
fs-id1167836535109
fs-id1167836701520

fs-id1167836509955
fs-id1167829921251
fs-id1167836392056
fs-id1167833237779
fs-id1167833212949
fs-id1167832937170
fs-id1167836495549
fs-id1167836341917
fs-id1167829783814
fs-id1167836729454
fs-id1167836497114
fs-id1167836497118
fs-id1167829719800
fs-id1167829747740
fs-id1167836530484
fs-id1167836567301
fs-id1167836567305
fs-id1167836409564
fs-id1167836553948
fs-id1167829704678
fs-id1167829594005
fs-id1167836486019
fs-id1167833056137
fs-id1167836717056
fs-id1167833053064
fs-id1167829908245
fs-id1167833346961
fs-id1167836325790
fs-id1167829685523
fs-id1167836368154
fs-id1167824617025
fs-id1167833290238
fs-id1167836543349
fs-id1167836487361
fs-id1167836319254
fs-id1167833008455
fs-id1167836570181
fs-id1167833054561
fs-id1167836502048
fs-id1167824585102
fs-id1167833057444
fs-id1167824736070
fs-id1167836628930
fs-id1167833048649
fs-id1167824781611
fs-id1167829624646
fs-id1167829930432
fs-id1167836730447
fs-id1167833060682
fs-id1167836600119
fs-id1167833059199
fs-id1167826092388
fs-id1167833386368
fs-id1167833396870
fs-id1167833309935
fs-id1167836606040
fs-id1167829921248
fs-id1167836392054
fs-id1167833237777
fs-id1167833237782
fs-id1167832937169
fs-id1167832940646
fs-id1167836495551
fs-id1167836341919
fs-id1167836620995
fs-id1167836729455
fs-id1167836497116
fs-id1167833237757
fs-id1167829719802
fs-id1167836530483
fs-id1167824734423
fs-id1167836567303
fs-id1167824734612
fs-id1167836409567
fs-id1167836553953
fs-id1167829704681
fs-id1167826172554
fs-id1167833365925
fs-id1167833056139
fs-id1167833053062
fs-id1167836408010
fs-id1167829908247
fs-id1167836325788
fs-id1167836325792
fs-id1167836597962
fs-id1167836368156
fs-id1167833290236
fs-id1167836691409
fs-id1167836571217
fs-id1167836487363
fs-id1167836319256
fs-id1167829695005
fs-id1167836560861
fs-id1167833054563
fs-id1167824585099
fs-id1167829715306
fs-id1167824578479
fs-id1167836628928
fs-id1167836628932
fs-id1167824781609
fs-id1167836409422
fs-id1167829930429
fs-id1167829930434
fs-id1167833060680
fs-id1167836731997
fs-id1167836600124
fs-id1167833059202
fs-id1167833386365
fs-id1167833396868
fs-id1167833396872
fs-id1167833309937
fs-id1167833272058

fs-id1167833272060
fs-id1167829720102
fs-id1167832951156
fs-id1167836389935
fs-id1167824734628
fs-id1167836614045
fs-id1167836484624
fs-id1167836533821
fs-id1167836560608
fs-id1167826171731
fs-id1167826171735
fs-id1167829580281
fs-id1167829786787
fs-id1167836699953
fs-id1167836664665
fs-id1167833224393
fs-id1167836449375
fs-id1167832925451
fs-id1167832925456
fs-id1167833082046
fs-id1167836391903
fs-id1167836599515
fs-id1167836620286
fs-id1167833350356
fs-id1167836595548
fs-id1167833329645
fs-id1167833025419
fs-id1167836606086
fs-id1167836407234
fs-id1167836326095
fs-id1167832925596
fs-id1167836376384
fs-id1167836518717
fs-id1167836688775
fs-id1167829627499
fs-id1167833020320
fs-id1167836551845
fs-id1167836551849
fs-id1167829693240
fs-id1167836556410
fs-id1167836556414
fs-id1167836523929
fs-id1167836429710
fs-id1167829692102
fs-id1167836598114
fs-id1167829580140
fs-id1167829580145
fs-id1167836387844
fs-id1167826206199
fs-id1167829899546
fs-id1167836522699
fs-id1167833279763
fs-id1167829614418
fs-id1167836599284
fs-id1167836282824
fs-id1167836282828
fs-id1167829720100
fs-id1167824720473
fs-id1167829741589
fs-id1167824734626
fs-id1167836614042
fs-id1167836614047
fs-id1167836533819
fs-id1167836560606
fs-id1167829741858
fs-id1167826171733
fs-id1167829751601
fs-id1167829786785
fs-id1167829786789
fs-id1167836597214
fs-id1167836664668
fs-id1167833224396
fs-id1167829579813
fs-id1167832925454
fs-id1167833082044
fs-id1167833082048
fs-id1167836391905
fs-id1167836599517
fs-id1167836433992
fs-id1167833350358
fs-id1167833329639
fs-id1167833025417
fs-id1167836606084
fs-id1167836606088
fs-id1167836407236
fs-id1167826205174
fs-id1167836376381
fs-id1167836552974
fs-id1167836518719
fs-id1167836688777
fs-id1167829832341
fs-id1167833020322
fs-id1167836551847
fs-id1167836706786
fs-id1167836525999
fs-id1167836556412
fs-id1167836523927
fs-id1167830093968
fs-id1167836429712
fs-id1167836598112
fs-id1167824764197
fs-id1167829580143
fs-id1167836387842
fs-id1167836530760
fs-id1167826206202
fs-id1167836522697
fs-id1167836539799
fs-id1167833279765
fs-id1167830093271
fs-id1167836599286
fs-id1167836282826
fs-id1167829693686

fs-id1167829693688
fs-id1167836406656
fs-id1167829580264
fs-id1167836613537
fs-id1167836611955
fs-id1167829596916
fs-id1167829984307
fs-id1167836697843
fs-id1167836445033
fs-id1167829748062
fs-id1167824720940
fs-id1167832994434
fs-id1167836439607
fs-id1167836628671
fs-id1167829590736
fs-id1167829590742
fs-id1167836499083
fs-id1167836556753
fs-id1167836300560
fs-id1167836476746
fs-id1167833019700
fs-id1167836738269
fs-id1167833412506
fs-id1167836499109
fs-id1167836616462
fs-id1167833227005
fs-id1167829785561
fs-id1167829893484
fs-id1167824725990
fs-id1167833345913
fs-id1167836295471
fs-id1167836700038
fs-id1167836512979
fs-id1167829905989
fs-id1167836628686
fs-id1167836673510
fs-id1167836393104
fs-id1167836792029
fs-id1167829790514
fs-id1167829614537
fs-id1167832925252
fs-id1167833138135
fs-id1167836574824
fs-id1167824652819
fs-id1167824652824
fs-id1167836706979
fs-id1167836375944
fs-id1167836447243
fs-id1167836622063
fs-id1167829893255
fs-id1167833053640
fs-id1167836575646
fs-id1167836575650
fs-id1167833369819
fs-id1167836556454
fs-id1167829877506
fs-id1167829696612
fs-id1167836310456
fs-id1167829580266
fs-id1167836611953
fs-id1167822971454
fs-id1167829596918
fs-id1167836697841
fs-id1167826077068
fs-id1167836445035
fs-id1167836622098
fs-id1167824720942
fs-id1167832994436
fs-id1167832926094
fs-id1167833142400
fs-id1167829590739
fs-id1167836499081
fs-id1167836499084
fs-id1167836556755
fs-id1167836648593
fs-id1167836476749
fs-id1167833019702
fs-id1167836688572
fs-id1167833412508
fs-id1167836616459
fs-id1167833227002
fs-id1167829716790
fs-id1167829893483
fs-id1167833048332
fs-id1167824725992
fs-id1167836514485
fs-id1167836295473
fs-id1167836512978
fs-id1167836663988
fs-id1167829905991
fs-id1167836673508
fs-id1167836393101
fs-id1167836393105
fs-id1167836792032
fs-id1167829790516
fs-id1167829614539
fs-id1167829756405
fs-id1167836574822
fs-id1167836574826
fs-id1167824652822
fs-id1167836706977
fs-id1167836375941
fs-id1167836375946
fs-id1167829859341
fs-id1167829893253
fs-id1167836477414
fs-id1167833053641
fs-id1167836575648
fs-id1167833369817
fs-id1167824781662
fs-id1167836556456
fs-id1167833327182

fs-id1167836418794
fs-id1167832951073
fs-id1167833369858
fs-id1167833310998
fs-id1167836476901
fs-id1167833239798
fs-id1167829811921
fs-id1167829692772
fs-id1167832940387
fs-id1167836554217
fs-id1167836554221
fs-id1167833223602
fs-id1167829590101
fs-id1167833350601
fs-id1167832971403
fs-id1167833380261
fs-id1167832940626
fs-id1167832940630
fs-id1167829831564
credits
fs-id1167836418796
fs-id1167833369856
fs-id1167833369860
fs-id1167836476899
fs-id1167833386954
fs-id1167833239800
fs-id1167833240317
fs-id1167829692774
fs-id1167836571262
fs-id1167836554219
fs-id1167829715554
fs-id1167829831137
fs-id1167829590103
fs-id1167836531082
fs-id1167833380258
fs-id1167833380263
fs-id1167832940628
fs-id1167836629848
fs-id1167833071738