بسم الله الرحمن الرحيم

مفتاح الحساب

Miftah al-Hisab (Key to Arithmetic)

تأليف

Jamshid Ghiyath al-Din al-Kashi

(d. 832 AH / 1429 CE)

موسوعة شاملة في علم الحساب والهندسة والجبر

أتمها في سمرقند سنة 829 هـ

نسخة عربية مصححة مع الصيغ الرياضية

Arabic Edition with Mathematical Formulas

Contents

تمهيد 5

تقديم المؤلف 7

فهرس الكتاب الأصلي 9

1 المقالة الأولى: حساب الأعداد الصحيحة 11
1.1 الفصل الأول: في التعريف بالأعداد وأسمائها ومنازلها . . . 11
1.2 الفصل الرابع: في الضرب وطرقه . . . 12
1.3 الفصل السادس: في استخراج الجذور . . . 12

2 المقالة الثانية: حساب الكسور 15
2.1 الفصول العشرة للمقالة الثانية . . . 15
2.2 الفصل التاسع: في الكسر العشري . . . 15
2.2.1 نظام تدوين الكاشي . . . 16
2.2.2 العمليات على الكسور العشرية . . . 16
2.2.3 أهمية الكسور العشرية . . . 16

3 المقالة الثالثة: حساب الدرج والدقائق والثواني 17
3.1 فصول المقالة الثالثة . . . 17
3.2 تدوين النظام الستيني . . . 17
3.3 الفصل الخامس: في استخراج جذور الأعداد الستينية . . . 18

4 المقالة الرابعة: حساب المساحات والأحجام 19
4.1 فهرس المقالة الرابعة الأصلي . . . 19
4.2 الباب الأول: في مساحة المثلث . . . 19
4.2.1 تصنيف المثلثات . . . 20
4.2.2 قواعد المساحة . . . 20
4.3 الباب الرابع: في مساحة الدائرة . . . 20
4.3.1 مساحة الدائرة والقواعد المتعلقة بها . . . 21
4.4 حساب الكاشي لقيمة π — رسالة المحيطية . . . 21
4.4.1 الطريقة . . . 21
4.4.2 النتيجة . . . 22
4.5 الباب التاسع: في مساحة البنيان والأبنية . . . 22
4.5.1 مساحة القبب والأقوس . . . 22
4.5.2 مساحة القبة . . . 22
4.5.3 مساحة سطح المقرنص . . . 23

5 المقالة الخامسة: الجبر والمقابلة 25
5.1 فصول المقالة الخامسة 25
5.2 الفصل الأول: الصور الست القانونية 25
5.3 الفصل الثاني: طريقة الخطأين 26
5.4 الفصل الخامس: في حل المعادلات التكعيبية 26

6 الجداول في مفتاح الحساب 29
6.1 الجداول السبعة المساعدة 29
6.2 نموذج: جدول الضرب (الجدول 1) 29

A نبذة عن حياة الكاشي 31
A.1 تواريخ رئيسية في حياة الكاشي 31
A.2 مؤلفات الكاشي الأخرى 31

B شهادات العلماء المعاصرين 33

C النصوص والطبعات 35
C.1 الطبعات المطبوعة 35

تمهيد

في ذكر تأليف هذا الكتاب ومؤلفه2-2-

هذه النسخة تقدم المحتوى الكامل لكتاب مفتاح الحساب، الذي يعدُّ achievement crowning في تاريخ الحساب الإسلامي، ألَّفه العالم الفارسي المشهور جمال الدين الكاشي سنة 1427 م.

الكاشي (حوالي 1429-1380 م) كان عالم الفلك المقيم في مرصد أولوغ بيك في سمرقند. وكتابه مفتاح الحساب هو موسوعة شاملة تغطي ثلاثة مواضيع رئيسية: الحساب، والهندسة، والجبر.

يتألف الكتاب من خمس مقالات تتناول:

1. حساب الأعداد الصحيحة
2. حساب الكسور (بما في ذلك الكسور العشرية)
3. حساب الأعداد الستينية
4. الهندسة والمساحات
5. الجبر والمقابلة

يحتوي الكتاب على الحساب المشهور للكاشي لقيمة π إلى 16 منزلة عشرية، ومعالجته المنظمة للكسور العشرية (الأولى في التاريخ)، وطرق استخراج الجذور التي سبقت الطرق الأوروبية المماثلة بقرون.

تقديم المؤلف

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي توحد بإبداع الآحاد، وتفرد بتأليف صنوف الأعداد، وصلاة على خير خلقه محمد أشفع الشافعين يوم التناد، وآله وأولاده الهادين إلى سبيل النجاة والرشاد.

أمّا بعد فإن أحوج خلق الله تعالى إلى عفرانه جمشيد بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشي الملقب بغياث الدين — أحسن الله-2-2 أحواله — يقول: لما مارست الأعمال الحسابية والقوانين الهندسية حتى بلغت إلى حقائقها، وبالغت في دقائقها، وكشفت غوامضها ومعضلاتها وحللت مشكلاتها، واستنبطت كثيراً من القوانين والضوابط فيها، واستخرجت ما صعب استخراجه على كثير من مباشريها...

وجدت في سير هذه الأعمال قوانين كثيرة يمكن بها أعمال مباني الحساب على أيسر وجه وأهون طريق وأقل تعب وأعظم نفع وأوضح ترتيب، فعزمت على تدوينها وشرحها، لتكون ذكرى للأحباء وإرشاداً لأهل الفهم والفطنة.

Translation / الترجمة:

In the name of God, the Merciful, the Compassionate.

Praise be to God, who is unique in creating units, and peerless in composing the classes of numbers. And blessings upon the best of His creation, Muhammad, the intercessor for the interceders on the Day of Calling, and upon his family and his sons who guide to the path of salvation and right guidance.

Jamshid ibn Mas'ud ibn Mahmud al-Tabib al-Kashi, called Ghiyath al-Din --- may God improve his condition --- says:

When I had practiced arithmetic and geometric methods until I reached their true principles, and penetrated their subtleties, and uncovered their hidden difficulties and problems and solved their challenges, and derived many rules and controls therein, and extracted what was difficult to extract for many of their practitioners...

I found in the course of these works many rules by which the operations of arithmetic preliminaries may be performed in the easiest manner and the simplest ways and with the least effort and the greatest benefit and the clearest arrangement. So I resolved to record them and to explain them, to serve as a reminder for beloved friends and as guidance for people of understanding.

فهرس الكتاب الأصلي

فصل في مباني علم الحساب وبيان أسمائه.

المقالة الأولى في حساب الأعداد الصحيحة. وهي سبعة فصول.

المقالة الثانية في حساب الكسور المتصلة والمنفصلة والكسورية.

المقالة الثالثة في حساب الدرج والدقائق والثواني ونحوها.

المقالة الرابعة في حساب المساحات والأحجام.

المقالة الخامسة في الجبر والمقابلة.

-2-2

يتألف الكتاب من خمس مقالات رئيسية:

المقالة	الرقم
حساب الأعداد الصحيحة — سبعة فصول	الأولى
حساب الكسور — عشرة فصول	الثانية
حساب الأعداد الستينية — عشرة فصول	الثالثة
حساب المساحات والأحجام — تسعة فصول	الرابعة
الجبر والمقابلة — عدة فصول	الخامسة

Chapter 1

المقالة الأولى: حساب الأعداد الصحيحة

المقالة الأولى في حساب الأعداد الصحيحة -2-2

هذه المقالة هي أساس العمل كله، وتتألف من سبعة فصول تغطي جميع العمليات على الأعداد الصحيحة:

فصل 1: في التعريف بالأعداد وأسمائها ومنازلها — نظام الأرقام الهندية-العربية ومبدأ قيمة المكان.

فصل 2: في الجمع — طرق جمع الأعداد الصحيحة.

فصل 3: في الطرح — تقنيات إيجاد الفروق.

فصل 4: في الضرب — بما في ذلك طريقة الشبكة، وطريقة الأعمدة، وطريقة المتمم.

فصل 5: في القسمة — بما في ذلك القسمة المطولة والطرق المختصرة.

فصل 6: في استخراج الجذور — الجذور التربيعية وجذور الدرجات العليا بطريقة عامة.

فصل 7: في إيجاد المجهولات بالجبر — تطبيقات أولية.

1.1 الفصل الأول: في التعريف بالأعداد وأسمائها ومنازلها

فصل في التعريف بالأعداد وأسمائها ومنازلها -2-2

يبدأ الكاشي بشرح نظام المنازل العشري، نسبته إلى الهنود وملاحظة انتقاله إلى العالم الإسلامي. ويصف أسماء منازل القيمة:

القوة	الاسم العربي	English
10^0	واحد (الوحدات)	Units
10^1	عشرة	Tens
10^2	مئة	Hundreds
10^3	ألف	Thousands
10^4	عشرة آلاف	Ten thousands

القوة	الاسم العربي	English
10^5	مئة ألف	Hundred thousands
10^6	مليون / ألف ألف	Millions
10^7	عشرة ملايين	Ten millions
10^8	مئة مليون	Hundred millions
10^9	مليار / ألف مليون	Billions

امتد الكاشي بهذا النظام إلى ما كان شائعاً في زمنه، مما مكّنه من إجراء العمليات الحسابية الكبيرة التي استخدمها لاحقاً في حساباته الفلكية.

1.2 الفصل الرابع: في الضرب وطرقه

فصل في الضرب وطرقه	2-2-

يقدم الكاشي عدة طرق للضرب. أشهرها هي طريقة الشبكة (الشبكة أو ضرب الجدول)، التي يصفها بالتفصيل الكامل. ويقدم أيضاً طريقة الأعمدة وطرق الحساب الذهني.

طريقة ضرب الشبكة:

1. ارسم شبكة من المربعات بعدد صفوف وأعمدة يساوي عدد أرقام المضروب والمضروب فيه.
2. اكتب المضروب فوق الشبكة والمضروب فيه على يمينها.
3. اقسم كل مربع قطرياً من أعلى يسار إلى أسفل يمين.
4. اضرب كل رقم من المضروب في كل رقم من المضروب فيه، واكتب العشرات فوق القطر والوحدات تحته.
5. اجمع على طول كل قطر من أسفل يمين إلى أعلى يسار، مع النقل عند الحاجة.
6. اقرأ الناتج النهائي على طول الحافتين اليسرى والسفلى.

مثال: لضرب 524×385:

	5	2	4
3	1/5	0/6	1/2
8	4/0	1/6	3/2
5	2/5	1/0	2/0

النتيجة: $\boxed{524 \times 385 = 201{,}740}$

1.3 الفصل السادس: في استخراج الجذور

فصل في استخراج الجذور	2-2-

تُعدُّ طريقة الكاشي في استخراج الجذور من أشهر أجزاء المفتاح. يقدم خوارزمية عامة لإيجاد الجذر الـn لأي عدد، وهي طريقة مكافئة لما يُعرف الآن بـطريقة روفيني-هورنر (رغم أن الكاشي سبقهما بقرون).

الطريقة العامة لاستخراج الجذر الـn:
$\sqrt[n]{N}$: بعدد N وعدد صحيح n، لإيجاد

1. افصل N إلى مجموعات من n أرقام من العلامة العشرية.
2. أوجد أكبر عدد صحيح a بحيث أن a^n لا يتجاوز المجموعة الأولى.
3. اطرح a^n من المجموعة الأولى، ثم انزل بالمجموعة التالية.
4. باستخدام التوسيع ذي الحدين لـ $(a+b)^n$، أوجد الرقم التالي b بقسمة الباقي على $n \cdot a^{n-1}$.
5. كرر حتى الوصول إلى الدقة المطلوبة.

بالنسبة للـ الجذر التربيعي $(n = 2)$، يختزل هذا إلى:

استخراج الجذر التربيعي:

1. افصل العدد إلى أزواج من الأرقام من العلامة العشرية.
2. أوجد أكبر مربع لا يتجاوز الزوج الأيسر؛ هذا يعطي الرقم الأول من الجذر.
3. اطرح مربعه وانزل بالزوج التالي.
4. اضعف الجذر الحالي، وأوجد رقماً بحيث أن $(\text{الحالي} \times 20 + d) \times d$ لا يتجاوز الباقي.
5. كرر حتى معالجة جميع الأزواج.

مثال: $\sqrt{144} = 12$

$$1^2 = 1 \quad \text{(الرقم الأول)}$$
$$(20 \times 1 + 2) \times 2 = 44$$
$$44 = 44 \quad \checkmark \quad \text{(الرقم الثاني)}$$

Chapter 2

المقالة الثانية: حساب الكسور

المقالة الثانية في حساب الكسور	2-2-

هذه المقالة هي الأكثر أهمية تاريخياً في المفتاح، فهي تحتوي على أول معالجة منظمة للكسور العشرية في تاريخ الرياضيات. كما لاحظ يوشكيفتش وروزنفيلد: ``إننا نرى في عمل غياث الدين جمشيد الكاشي في أوائل القرن الخامس عشر، لأول مرة، السيطرة الكاملة على فكرة الكسور العشرية وطريقة ملائمة لكتابتها."

2.1 الفصول العشرة للمقالة الثانية

فصل 1: في تسمية الكسور — التعريفات والمصطلحات للكسور المشتركة.

فصل 2: في تسطيح الكسور — التحويل إلى مقامات مشتركة.

فصل 3: في جمع الكسور وطرحها.

فصل 4: في ضرب الكسور.

فصل 5: في قسمة الكسور.

فصل 6: في التحويل بين الكسور — بما في ذلك الستيني إلى العشري والعكس.

فصل 7: في استخراج جذور الكسور.

فصل 8: في كسر الأعداد — صنف خاص من الكسور.

فصل 9: في الكسور العشرية (الكسر العشري) — الإنجاز الأعظم.

فصل 10: في استعمال الكسور العشرية في الحسابات.

2.2 الفصل التاسع: في الكسر العشري

الباب التاسع في الكسر العشري واستعماله	2-2-

قدّم الكاشي الكسور العشرية بوضوح وعمومية لم يسبق لهما مثيل. واستخدم في تدوينه خطاً رأسياً (|) للفصل بين الجزء الصحيح والجزء الكسري. على سبيل المثال، كان يكتب:

$$\boxed{3\,|\,14159265\ldots}$$

للدلالة على $3.14159265\ldots$، حيث الأرقام بعد الخط الرأسي تعني الأعشار والمئات والآلاف وهكذا.

يكتب الكاشي:

> اعلم أن العوام يسمون المنزلة الأولى بعد الوحدات ``منزلة أجزاء العشرة"، والثانية ``منزلة أجزاء المئة"، والثالثة ``منزلة أجزاء الألف"، وهكذا مضاعفة في العشرة دائماً. وقد وجدنا مناسباً أن نسمي المنزلة الأولى بعد العلامة العشرية ``منزلة العشر الأول"، والثانية ``منزلة العشر الثاني"، وهكذا.

2.2.1 نظام تدوين الكاشي

كان تدوين الكاشي للكسور العشرية متقدماً بشكل ملحوظ. يكتب الجزء الصحيح، ثم فاصلة، ثم أرقام الكسر. على سبيل المثال:

القيمة	التدوين الحديث	تدوين الكاشي
ثلاثة عشر وسبعة آلاف وخمسمئة وتسعة وثلاثون جزءاً من عشرة آلاف	13.7539	٧٥٣٩|١٣
تقريب لـ $\frac{1}{\sqrt{2}}$	0.14142135	١٤١٤٢١٣٥|٠
تقريب لـ π	3.1415926535	١٤١٥٩٢٦٥٣٥|٣

2.2.2 العمليات على الكسور العشرية

يستعرض الكاشي العمليات الأربع على الكسور العشرية. للضرب يقدم القاعدة التالية:

> ضرب الكسور العشرية:
> 1. اضرب العددين كما لو كانا أعداداً صحيحة، متجاهلاً الفاصلة العشرية.
> 2. في الناتج، اعتبر من اليمين عدداً من المنازل يساوي مجموع المنازل العشرية في المضروب والمضروب فيه.
> 3. ضع الفاصلة في ذلك الموضع.
>
> مثال: $0.25 \times 0.4 = 0.10$
> - الضرب كأعداد صحيحة: $25 \times 4 = 100$
> - مجموع المنازل العشرية: $2 + 1 = 3$
> - النتيجة: $0.100 = 0.1$

2.2.3 أهمية الكسور العشرية

استخدم الكاشي الكسور العشرية على نطاق واسع في حساباته الفلكية. وقد تحوّل بسهولة بين النظامين الستيني والعشري. كما لاحظ كينيدي: ``كان الكاشي قبل كل شيء سيد حساب ذو قدرة استثنائية، تشهد على ذلك براعته في استخدام الستينيات المجردة، وتطبيقه الواسع للخوارزميات التكرارية، وبراعته في ترتيب الحساب بحيث يتحكم في الحد الأقصى للخطأ ويحافظ على التحقق في جميع المراحل."

> التحويل من الستيني إلى العشري:
> لتحويل عدد ستيني $N = a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \cdots$ إلى عشري:
> 1. احتفظ بالجزء الصحيح a كما هو.
> 2. حوّل كل كسر ستيني: اقسم على 60، 60^2، إلخ.
> 3. اجمع النتائج في الشكل العشري.
>
> مثال: حوّل $3; 8, 29, 44$ (ستيني) إلى عشري:
>
> $$3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = 3.141592\ldots$$

Chapter 3

المقالة الثالثة: حساب الدرج والدقائق والثواني

المقالة الثالثة في حساب الدرج والدقائق والثواني -2-2

تُكرَّس هذه المقالة للنظام الستيني (الأساس 60)، الذي كان النظام القياسي للحسابات الفلكية في العالم الإسلامي. يكتب الكاشي:

> اعتمد علماء الفلك النظام الستيني لما يقبله من أنواع التقسيمات الكثيرة، إذ الستون تقبل القسمة على اثنين وثلاثة وأربعة وخمسة وستة وعشرة واثني عشر وخمسة عشر وعشرين وثلاثين. ولحاجتهم إلى استعمال الكسور في حساباتهم، قسّموا الدائرة إلى ثلاثمئة وستين درجة، كل درجة إلى ستين دقيقة، كل دقيقة إلى ستين ثانية، وهكذا بلا نهاية.

3.1 فصول المقالة الثالثة

في تسمية منازل الستينية — الدرج (درجة)، والدقائق (دقيقة)، والثواني (ثانية)، والثوالث (ثالثة)، إلخ. 1: فصل

في جمع الأعداد الستينية وطرحها. 2: فصل

في ضرب الأعداد الستينية. 3: فصل

في قسمة الأعداد الستينية. 4: فصل

في استخراج جذور الأعداد الستينية. 5: فصل

في تحويل الستيني إلى أنظمة أخرى. 6: فصل

في الحسابات الفلكية. 7: فصل

في العمليات بالجيب والوتر. 8: فصل

3.2 تدوين النظام الستيني

استخدم الكاشي التدوين التالي للأعداد الستينية. في التدوين الحديث، نكتب $a; b, c, d$ لتمثيل:

$$a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \frac{d}{60^3}$$

المصطلح العربي	Latin	الرمز	القيمة
درجة	Degree	$^\circ$ or nothing	$60^0 = 1$
دقيقة	Minute	$'$	60^{-1}
ثانية	Second	$''$	60^{-2}
ثالثة	Third	$'''$	60^{-3}
رابعة	Fourth		60^{-4}
خامسة	Fifth		60^{-5}

3.3 الفصل الخامس: في استخراج جذور الأعداد الستينية

يحتوي هذا الفصل على الطريقة العامة الملحوظة للكاشي في استخراج الجذور من الدرجة n في النظام الستيني. أظهرت دراسة داخل (1960) أن طريقة الكاشي هي في جوهرها نفسها طريقة روفيني-هورنر.

استخراج الجذر في النظام الستيني:
في النظام الستيني: $\sqrt[n]{N}$ لإيجاد

1. عبّر عن N في الشكل الستيني: $N = N_0; N_1, N_2, N_3, \ldots$
2. جمّع منازل الستينية بشكل ملائم لدرجة الجذر.
3. طبق الطريقة ذات الحدين تكرارياً:
$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{n \cdot a^{n-1}}$$
4. في كل خطوة، صحّح التقريب باستخدام حد الخطأ.
5. استمر حتى الوصول إلى الدقة المطلوبة.

مثال — الجذر التربيعي في النظام الستيني:
في النظام الستيني. يعطي الكاشي: $\sqrt{2}$ أوجد

$$\sqrt{2} \approx 1; 24, 51, 10, 7, 46, 6, 4, 40, \ldots$$

وهو ما يقابل:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \cdots \approx 1.41421356\ldots$$

هذا التقريب لـ $\sqrt{2}$ دقيق لحدود الحساب. طريقة استخراج الجذور للكاشي كلية العموم وتعمل لأي درجة من الجذور في أي أساس للأعداد.

Chapter 4

المقالة الرابعة: حساب المساحات والأحجام

المقالة الرابعة في حساب المساحات والأحجام	2-2-

هذه هي أطول وأكثر المقالات تنوعاً في المفتاح، وتغطي الهندسة المستوية والمجسمة، مع تطبيقات على المساحة والعمارة والهندسة. تتألف من تسعة أبواب مع فصول عديدة.

4.1 فهرس المقالة الرابعة الأصلي

فصل في المساحة وألفاظها.

الباب الأول: في مساحة المثلث وما يتعلق به.

الباب الثاني: في مساحة الرباعي وما يتعلق به.

الباب الثالث: في مساحة المضلع وما يتعلق به.

الباب الرابع: في مساحة الدائرة وما يتعلق بها.

2-2-

الباب الخامس: في مساحة الأجسام المستوية.

الباب السادس: في مساحة الأجسام المحدبة.

الباب السابع: في أحجام الأجسام.

الباب الثامن: في نسبة حجم الجسم إلى وزنه وعكس ذلك.

الباب التاسع: في مساحة البنيان والأبنية.

4.2 الباب الأول: في مساحة المثلث

فصل في مساحة المثلث	2-2-

4.2.1 تصنيف المثلثات

يصنّف الكاشي المثلثات حسب أضلاعها (متساوي الأضلاع، متساوي الساقين، مختلف الأضلاع) وحسب زواياها (حادّة، قائمة، منفرجة)، مع إعطاء تعريفات هندسية لكل صنف.

4.2.2 قواعد المساحة

يقدم الكاشي عدة طرق لحساب مساحة المثلث:

مساحة المثلث:
الطريقة الأولى — القاعدة والارتفاع:

$$A = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

الطريقة الثانية — قانون هيرون: $s = \frac{a+b+c}{2}$ لمثلث أضلاعه a، b، c ونصف محيطه:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

الطريقة الثالثة — ضلعان والزاوية المحصورة:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin C$$

مثال: أوجد مساحة مثلث أضلاعه 13، 14، 15.

$$\begin{aligned} s &= \frac{13+14+15}{2} = 21 \\ A &= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \\ &= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7056} = 84 \end{aligned}$$

4.3 الباب الرابع: في مساحة الدائرة

فصل في مساحة الدائرة ومعرفة محيطها من قطرها وعكس ذلك	-2-2

يحتوي هذا الباب على أحد أشهر المقاطع في المفتاح: بيان الكاشي لقيمة π. يكتب:

> اعلم أن المحيط ثلاثة أمثال القطر وكسر، وهو أقل من سُبع القطر، لكن الناس يأخذونه سُبعاً لتسهيل الحساب. وقال أرخميدس إن هذا الكسر أقل من سُبع وأكثر من عشرة من واحد وسبعين. وحسب ما حصلناه وذكرناه في مقالتنا المسماة ``المحيطية" في نسبة المحيط إلى القطر، فهو $3;8'\,29''\,44'''$ ثوالث بعد حذف رابعات وما بعدها، إذا كان القطر واحداً. وهذا أدق بكثير من حساب أرخميدس كما بيّنّا في المقالة المذكورة، وهو أقرب إلى القيمة الصحيحة. إلا أنه لا يعلمه على التحقيق إلا الله تعالى.

في التدوين الحديث:

$$\pi \approx 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = 3.14159259259\ldots$$

قيمة π هذه دقيقة حوالي 7 منازل عشرية. أما جوهرة الكاشي في رسالة المحيطية فتمتد إلى 16 منزلة عشرية، محسوبة باستخدام مضلع له $3 \times 2^{28} = 805{,}306{,}368$ ضلعاً.

4.3.1 مساحة الدائرة والقواعد المتعلقة بها

يقدم الكاشي القواعد القياسية:

قواعد الدائرة:

$$C = \pi d = 2\pi r \qquad \text{(المحيط)}$$

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \qquad \text{(المساحة)}$$

إيجاد القطر من المحيط:

$$d = \frac{C}{\pi}$$

يلاحظ الكاشي الحدود الكلاسيكية: حدود أرخميدس:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

أي:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

4.4 حساب الكاشي لقيمة π — رسالة المحيطية

رسالة المحيطية في إيجاد نسبة المحيط إلى القطر	-2-2

يُعدُّ حساب الكاشي لقيمة π إلى 16 منزلة عشرية إنجازاً ملحوظاً في تاريخ الرياضيات. تجاوز هذا الحساب جميع الأرقام السابقة ولم يُتَجاوَز في أوروبا قرابة قرنين.

4.4.1 الطريقة

استخدم الكاشي الطريقة الكلاسيكية لأرخميدس: إحاطة المضلعات المنتظمة بالدائرة وحساب محيطاتها. بدءاً بالسداسي ومضاعفة عدد الأضلاع 28 مرة، حصل على تقريبه.

طريقة الكاشي لحساب π:
بدءاً بسداسي منتظم محاط بدائرة وحدة:

1. الوتر الابتدائي: $c_0 = 1$ (ضلع السداسي = نصف القطر)
2. في كل خطوة، بُعْد الوتر c_n للمضلع n-ي، احسب الوتر c_{n+1} للمضلع $2n$-ي بـ:

$$c_{n+1}^2 = 2 - \sqrt{4 - c_n^2}$$

3. محيط المضلع المحاط N هو $P_N = N \cdot c_N$.
4. التقريب لـ π هو $\pi \approx \frac{P_N}{2}$.
5. كرر 28 مرة للحصول على المضلع ذي 3×2^{28} ضلعاً.

4.4.2 النتيجة

عبر الكاشي أولاً عن 2π في التدوين الستيني:

$$2\pi = 6; 16, 59, 28, 1, 34, 51, 46, 14, 50$$

وهو ما يعني:

$$6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9}$$

ثم حوّل هذا إلى العشري:

$$2\pi = 6.2831853071795865\ldots$$

وبالتالي:

$$\boxed{\pi = 3.1415926535897932\ldots}$$

المصدر	التاريخ	قيمة π
أرخميدس	حوالي 250 ق.م	3.14185
بطليموس	حوالي 150 م	$3.14166\ldots$)$3; 8, 30$(
الكاشي	1424 م	$3.1415926535897932\ldots$
فان كولن	1610 م	20 منزلة
ماشين	1706 م	100 منزلة

دقة الكاشي: لحساب 2π بـ 9 منازل ستينية يعني أن الخطأ الأقصى أقل من $1/60^9 \approx 9.92 \times 10^{-17} < 10^{-16}$. أي أن الكاشي حسب 2π بدقة تصل إلى المنزلة العشرية السادسة عشرة.

4.5 الباب التاسع: في مساحة البنيان والأبنية

الباب التاسع في مساحة البنيان والأبنية	-2-2

هذا الباب ذو اهتمام خاص لمؤرخي العمارة الإسلامية. يكتب الكاشي:

> إن أهل هذه الصنعة لم يذكروا إلا القبب والأقوس، وحتى ذلك لم يُذكَر على وجهه. فأتناولها هنا على وجهها الصحيح مع غيرها، لأن الحاجة في قياسات البنيان أكثر طلباً.

4.5.1 مساحة القبب والأقوس

يُعرّف الكاشي القبّة الحقيقية (القبو الحقيقي) بأنها بناء على قاعدتين بين خطين متوازيين، مؤلفة من خمس قطع: قسمان من قشرة كروية (أو حلقة أو دف) قطرها الفارغ ليس أصغر من فسحة القبو، وقسمان آخران بقطر فارغ أكبر.

4.5.2 مساحة القبة

لقبة قطرها d وارتفاعها h، يعطي الكاشي:

$$A_{\text{قبة}} = 2\pi r h$$

حيث r هو نصف قطر كرة الأساس.

4.5.3 مساحة سطح المقرنص

فصل في مساحة سطح المقرنص	-2-2

المقرنص (مقرنص) هو عنصر معماري زخرفي في العمارة الإسلامية، يتألف من طبقات من الأجراف المشبّكة التي تخلق تأثير قرص العسل أو المعلقات على الأسقف والزوايا والسطوح الداخلية للقبب. يصف الكاشي أربعة أنواع من المقرنص ويعطي قواعد لحساب مساحة سطحها، حتى يتمكن المعماريون من تحديد كمية المواد المطلوبة.

مساحة سطح المقرنص:
لمقرنص بسيط مؤلف من n طبقة، كل طبقة متوسط مساحتها a_i:

$$A_{\text{الكلية}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \times f_i$$

حيث f_i هو معامل الشكل المعتمد على نوع خلية المقرنص.

لقد دُرست هذه الفقرة على نطاق واسع من قبل مؤرخي العمارة الإسلامية. يمثل المقرنص واحداً من أكثر التطبيقات تطوراً للهندسة في الفن والعمارة الإسلامية.

Chapter 5

المقالة الخامسة: الجبر والمقابلة

المقالة الخامسة في الجبر والمقابلة -2-2

تُكرِّس المقالة الأخيرة من المفتاح للجبر (الجبر والمقابلة). يقدم الكاشي معالجة منظمة للموضوع، مبنياً على عمل أسلافه — وخاصة الخوارزمي، وأبو كامل، والكرجي، والسموأل — مضيفاً ابتكاراته الخاصة.

5.1 فصول المقالة الخامسة

فصل 1: في أنواع المعادلات — الصور الست القانونية.

فصل 2: في إيجاد المجهول بطريقة الخطأين (طريقة الخطأين).

فصل 3: في العمليات الجبرية — جمع وطرح وضرب وقسمة التعابير الجبرية.

فصل 4: في استخراج جذور التعابير الجبرية.

فصل 5: في حل المعادلات من الدرجات العليا — بما في ذلك المعادلات التكعيبية.

فصل 6: في حل المسائل — مسائل تطبيقية تحل بالجبر.

5.2 الفصل الأول: الصور الست القانونية

يصنّف الكاشي، متبعاً التقاليد التي أسسها الخوارزمي، جميع المعادلات في ستة أنواع. باستخدام التدوين الحديث مع x كمجهول و a, b كمعاملات موجبة:

الصورة	المعادلة	الاسم
1	$ax = b$	مبسط
2	$ax^2 = bx$	مربعات تساوي جذوراً
3	$ax^2 = b$	مربعات تساوي أعداداً
4	$ax^2 + bx = c$	مربعات وجذور تساوي أعداداً
5	$ax^2 + c = bx$	مربعات وأعداد تساوي جذوراً
6	$bx + c = ax^2$	جذور وأعداد تساوي مربعات

(الصورة الرابعة): حل $ax^2 + bx = c$
اقسم على a: $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$

أكمل المربع:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

وبالتالي:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac + b^2}{4a^2}$$

الحل:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

5.3 الفصل الثاني: طريقة الخطأين

فصل في استخراج المجهول بطريقة الخطأين	-2-2

طريقة الخطأين (طريقة الخطأين) هي طريقة قديمة لحل المسائل الخطية بدون جبر. يقدم الكاشي بياناً واضحاً:

طريقة الخطأين:
اجعل تخمينين g_1 و g_2، تعطيان نتيجتين f_1 و f_2 مع أخطاء، $e_1 = c - f_1$ و $e_2 = c - f_2$. لمسألة من الشكل $ax + b = c$، فإن:

$$x = \frac{g_1 e_2 - g_2 e_1}{e_2 - e_1}$$

مثال: كمية بحيث إذا جمعت ثلثها مع ربعها، كانت النتيجة 14. ما هي الكمية؟

التخمين $g_1 = 12$: $\frac{12}{3} + \frac{12}{4} = 4 + 3 = 7$، الخطأ $e_1 = 14 - 7 = 7$

التخمين $g_2 = 24$: $\frac{24}{3} + \frac{24}{4} = 8 + 6 = 14$، الخطأ $e_2 = 14 - 14 = 0$

$$x = \frac{12 \cdot 0 - 24 \cdot 7}{0 - 7} = \frac{-168}{-7} = 24$$

5.4 الفصل الخامس: في حل المعادلات التكعيبية

يقدم الكاشي طرقاً لحل المعادلات التكعيبية. للمعادلة $x^3 + px = q$، يستخدم طريقة تكرارية:

الحل التكراري لـ $x^3 + px = q$:
أعد الترتيب: $x = \sqrt[3]{q - px}$

التكرار:

1. ابدأ بتخمين أولي x_0.
2. احسب $x_{n+1} = \sqrt[3]{q - px_n}$.
3. كرر حتى $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

حل مثال: $x^3 + 2x = 20$
ابدأ بـ $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{20 - 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{16} \approx 2.52 \\
x_2 &= \sqrt[3]{20 - 2 \cdot 2.52} = \sqrt[3]{14.96} \approx 2.466 \\
x_3 &= \sqrt[3]{20 - 2 \cdot 2.466} = \sqrt[3]{15.068} \approx 2.472 \\
x_4 &= \sqrt[3]{20 - 2 \cdot 2.472} = \sqrt[3]{15.056} \approx 2.471
\end{aligned}$$

الحل: $\boxed{x \approx 2.471}$

هذه الطريقة التكرارية لحل المعادلات التكعيبية هي في جوهرها ما يُعرف الآن بتكرار النقطة الثابتة. استخدم الكاشي نهجاً مماثلاً في رسالة الوتر والجيب لحساب $\sin(1^\circ)$ بدقة غير مسبوقة.

Chapter 6

الجداول في مفتاح الحساب

يلاحظ الكاشي في تقديمه:

> وضعت لأكثر العمليات نموذجاً على هيئة جدول لتكون أسهل فهماً لذوي الفطنة. وجميع الجداول الموضوعة في هذا الكتاب — ``عذري صراحتي، وحلوها ومرها مني" — إلا سبعة جداول.

6.1 الجداول السبعة المساعدة

جدول 1: جدول حواصل الأعداد دون العشرة — جدول ضرب أساسي.

جدول 2: جدول الشبكة للضرب — مساعد لضرب الجدول.

جدول 3: جدول قوى المنازل — مرجع لقيمة المكان.

جدول 4: مثال اتفاق الجذور — مرجع لاستخراج الجذور.

جدول 5: جدول لمعرفة رتبة حاصل الضرب والمقسوم — مساعد لحساب قيمة المكان.

جدول 6: جدول الجيوب — ضروري للحسابات الفلكية.

جدول 7: جدول لمعرفة زوجي حاصل الضرب والقسمة — تحديد زوجي/فردي.

6.2 نموذج: جدول الضرب (الجدول 1)

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Appendix A

نبذة عن حياة الكاشي

جمال الدين غياث الدين بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشي، وُلد في كاشان، في وسط إيران، حوالي سنة 1380 م. اسمه جمشيد؛ اسم أبيه مسعود واسم جده محمود. يُعرف بالكاشي (أو بالأحرى الكاشاني، من كاشان)، وبلقبه غياث الدين (``مجير الدين").

A.1 تواريخ رئيسية في حياة الكاشي

الحدث	التاريخ
وُلد في كاشان، إيران	حوالي 1380 م
أتم سلم السماء	1407
كتب مختصر في علم الهيئة	1410-11
أتم زيج الخاقاني، مهدى إلى أولوغ بيك	1413-14
انتقل إلى سمرقند بدعوة من أولوغ بيك	حوالي 1420
أتم رسالة المحيطية (حساب π)	1424
أتم مفتاح الحساب	2 مارس 1427
كتب رسالة الوتر والجيب ($\sin 1^\circ$)	1429
توفي في سمرقند (19 رمضان 832 هـ)	22 يونيو 1429

A.2 مؤلفات الكاشي الأخرى

1. (1407) — في حل صعوبات تحديد المسافات وأحجام الأجرام السماوية. سلم السماء
2. (1410-11) — عمل فارسي في علم الفلك. مختصر في علم الهيئة
3. (1413-14) — مهدى إلى أولوغ بيك. زيج الخاقاني
4. (1424) — حساب π إلى 16 منزلة عشرية. رسالة المحيطية
5. (1429) — حساب $\sin(1^\circ)$ بدقة غير مسبوقة. رسالة الوتر والجيب
6. — في بناء واستخدام آلة طبق المناطق. نزهة الحدائق
7. — جداول فلكية مبسطة. زيج التسهيلات

بكلمات إ. س. كينيدي: ``كان الكاشي قبل كل شيء سيد حساب ذو قدرة استثنائية، تشهد على ذلك براعته في استخدام الستينيات المجردة، وتطبيقه الواسع للخوارزميات التكرارية، وبراعته في ترتيب الحساب بحيث يتحكم في الحد الأقصى للخطأ ويحافظ على التحقق في جميع المراحل."

Appendix B

شهادات العلماء المعاصرين

``Key to Arithmetic is the crowning achievement of Islamic arithmetic.''

--- J.L. Berggren

``It was only 1948 that Luckey presented the first extensive and detailed study of al-Kashi's work, and the traditional historical picture was explicitly shaken.''

--- R. Rashed

``In the richness of its contents and in the application of arithmetical and algebraic methods to the solution of various problems, including several geometric ones, and in the clarity and elegance of exposition, this voluminous textbook [that is, Miftah[is one of the best in the whole of medieval literature; it attests to both the author's erudition and his pedagogical ability. Because of its high quality the Miftah was often recopied and served as a manual for hundreds of years.''

--- A.P. Youschkevitch & B.A. Rosenfeld

``It is in the work of Giyath al-Din Jamshid al-Kashi in the early fifteenth century that we first see both a total command of the idea of decimal fractions and a convenient notation for them.''

--- V.J. Katz

``The power and elegance of computational algorithms developed by Islamic mathematicians of the ninth through the fifteenth centuries has only recently come to be appreciated. The most successful of these computers was the Iranian scientist, Jamshid Ghiyath al-Din al-Kashi.''

--- E.S. Kennedy

``In the determination of π, and in computational mathematics as a whole, al-Kashi was a pioneer."

--- J.P. Hogendijk

``Key to Arithmetic was used for centuries by astronomers, architects, artisans, surveyors, and merchants as a textbook in the Islamic world."

--- J. Freely

Appendix C

النصوص والطبعات

حُفظ مفتاح الحساب في نسخ مخطوطة عديدة، مما يدل على أهميته واستخدامه الواسع. النصوص المخطوطة الرئيسية تشمل:

المخطوطة	التاريخ	الموقع
Nuruosmaniye 2967	854 هـ / 1450 م	إسطنبول، مكتبة نور عثمانية
Esad Efendi 3768	882 هـ / 1477 م	إسطنبول، مكتبة سليمانية
Husrev Pasha 256	889 هـ / 1484 م	إسطنبول، مكتبة سليمانية
Aya Sofya 2713	896 هـ / 1491 م	إسطنبول، مكتبة سليمانية
Leiden Or. 178	القرن 17	مكتبة جامعة لايدن

C.1 الطبعات المطبوعة

1. الطبعة الحاضرة، نُشرت في الدولة العثمانية. كانت أول طبعة مطبوعة للنص العربي الكامل. — طبعة 1887 العربية
2. طبعة 1951 الألمانية — P. Luckey, Die Rechnenkunst bei Gamschid b. Mas'ud al-Kasi.
3. طبعة 1960 الإنجليزية — A. Dakhel, The Extraction of the n-th Root in the Sexagesimal Notation.
4. طبعة 1969 العربية — A.S. al-Dimirdash and M.H. al-Hifni al-Shaykh, editors.
5. طبعة 1977 العربية — N. Nabulsi, editor.
6. ترجمة 1956 الروسية — B.A. Rosenfeld, V.S. Segal, A.P. Youschkevitch, Klyuch Arifmetiki.

The end of the Arabic Edition of the Miftah al-Hisab of Jamshid al-Kashi

تم ما انتقي من مفتاح الحساب لجمشيد الكاشي — النسخة العربية

بسم الله الرحمن الرحيم