المحاضرة (11)

- **<u>مسائل</u>**
- جد كل الحلول x ،حيث $0\leq x<15$ ، للمعادلة $3x\equiv 6 \pmod{15}$.
- صف تجزئة Z المعينة بالأعداد الصحيحة معيار 5 .
- اثبت ان الزوج $A=(\{0,4,8,12\},+_{16})$ هو زمرة .

- **<u>الزمرة الجزئية:</u>**
- لتكن $(G,*)$ زمرة و $H\subseteq G$ هي مجموعة جزئية غير خالية لـ G .
- الزوج $(H,*)$يقال لها زمرة جزئية subgroup لـ $(G,*)$اذا كانت $(H,*)$نفسها زمرة.
- كل زمرة $(G,*)$ لها زمرتان جزئيتان .لأنه اذا كان $e\in G$هو العنصر المحايد للزمرة $(G,*)$،فان كلا من $(\{e\},*)$, $(G,*)$ زمرتان جزئيتان من $(G,*)$.هاتان الزمرتان الجزئيتان غالبا ما يعزى لهما كزمرتين جزئيتين تافهتين (trivial) من $(G,*)$.اية زمرة جزئية تختلف عن $(G,*)$ تدعى زمرة جزئية فعلية (proper) .

- **<u>مثال:</u>**
- اذا كانت Z_e و Z_o تمثلان مجموعتي الاعداد الصحيحة الزوجية والفردية على الترتيب ، فان $(Z_e,+)$ هي زمرة جزئية من الزمرة $(Z,+)$ ، في حين ان $(Z_o,+)$ليست كذلك .

- **<u>مبرهنة:</u>**
- لتكن $(G,*)$زمرة و $\varphi \neq H \subseteq G$ فان $(H,*)$زمرة جزئية لـ $(G,*)$اذا وفقط اذا كان $a , b \in H$ يؤدي الى ان $a*b^{-1}\in H$.
- **البرهان**
- نفرض ان $(H,*)$ هي زمرة جزئية لـ $(G,*)$
- Let $a ,b \in H$
- بما ان $(H,*)$ هي زمرة جزئية و $b \in H$
- $\therefore$ $b^{-1}\in H$
- بما ان H مغلقة بالنسبة لـ $*$
- $\therefore a*b^{-1}\in H$

المحاضرة (12)

- **<u>تعريف:</u>**
- مركز Centerالزمرة (G,*)يرمز له بـ CentG هو المجموعة : $CentG = \{ c \in G \mid c*x=x*c , \forall x \in G \}$ اي ان Cent G يتكون من جميع العناصر التي تتبادل مع كل عنصر من عناصر G .
- **<u>مبرهنة:</u>**
- الزوج (centG,*) هو زمرة جزئية لكل زمرة (G,*) .

- **البرهان**
- نلاحظ اولا ان $(centG,*)$ مجموعة غير خالية ، لأنه على الاقل $e \in centG$.
- ليكن $a, b \in centG$ ،لذلك يكون $a*x=x*a$ و $b*x=x*b$ لكل عنصر $x \in G$.
- وهكذا اذا كانت $x \in G$ فان ،
- $(a*b^{-1})*x=a*(b^{-1}*x)$
- $=a*(x^{-1}*b)^{-1}$
- $=a*(b*x^{-1})^{-1}$
- $=a*(x*b^{-1})$
- $=(a*x)*b^{-1}$
- $=(x*a)*b^{-1}=x*(a*b^{-1})$
- والتي تؤدي الى ان $a*b^{-1} \in G$ $\therefore$ $(centG,*)$ زمرة جزئية لـ $(G,*)$.

- **<u>مبرهنة:</u>**
- اذا كانت $(H_i,*)$ حشدا مرقما اختياريا لزمرة جزئية للزمرة $(G,*)$ ، فان $(\cap H_i,*)$ هو ايضا زمرة جزئية .
- **البرهان**
- بما ان H_i تحتوي على العنصر المحايد لـ $(G,*)$ فان
- $\cap H_i \neq \varphi$ لان $e \in \cap H_i \quad \forall\ i$
- Let $a , b \subseteq \cap H_i \quad \forall\ i$
- $\therefore a , b \in H_i \quad \forall\ i$
- $\because H_i \quad \forall\ i$ زمرة جزئية لـ $(G,*)$
- $\therefore (a*b^{-1}) \in H_i \quad \forall\ i$
- $\therefore a*b^{-1} \in \cap H_i \quad \forall\ i$
- $\therefore (\cap H_i,*)$ زمرة جزئية لـ $(G,*)$

المحاضرة (13)

- **تعريف:**
- اذا كانت $(G,*)$ زمرة اختيارية و $\varphi \neq S \subseteq G$ فان الرمز (S) سيمثل المجموعة : $\{(H,*)$ زمرة جزئية لـ $(G,*)$, $S \subseteq H\}$ $(S) = \cap\{H$ |
- الزوج $((S),*)$ هو زمرة جزئية لـ $(G,*)$ يعرف بالزمرة الجزئية المولدة بالمجموعة S .
- **ملاحظة** عندما تكون S متكونة من عنصر واحد a فنكتب (S) بالشكل (a) وتسمى الزمرة الجزئية الدوارة المولدة بالعنصر a وهي : $(a)=\{a^n \mid n \in Z\}$
- مثلا الزمرة الجزئية الدوارة المولدة بـ 3 في Z_{12} هي $\{0,3,6,9\}$ لان
- $(3)=\{3n(mod12) \mid n \in Z\}$

- **تعريف:**
- الزمرة المنتهية finite group انها زمرة مجموعة عناصرها هي مجموعة منتهية .
- **تعريف:**
- مرتبة (order)الزمرة المنتهية تعرف بانها عدد عناصرها .اي ان الزمرة التي عدد عناصرها منته تكون رتبتها منتهية والتي عناصرها غير منتهية يقال ان مرتبتها غير منتهية

- **<u>تعريف:</u>**مرتبة a
- اذا كان aعنصرا من الزمرة (G,*)تعرف مرتبة a انها مرتبة الزمرة الجزئية الدوارة ((a),*)المولدة بـ aاي ان مرتبة aهي اصغر عدد صحيح موجب n بشرط وجوده بحيث $a^n=e$.

المحاضرة (14)

- **<u>تعريف:</u>**
- لتكن $(G,*)$ زمرة و K , H مجموعتين جزئيتين غير خاليتين لـ G فان جداء
- H , K هو المجموعة :
- $H*K=\{h*k \mid h\in H, k\in K\}$

- **<u>مبرهنة:</u>**
- اذا كانت $(H,*)$, $(K,*)$ زمرتين جزئيتين للزمرة $(G,*)$ بحيث ان $H*K=K*H$ فان الزوج $(H*K,*)$هو زمرة جزئية .
- **البرهان**
- $H*K \neq \varphi$ لان $e=e*e \in H*K$
- نفرض ان $a,b \in H*K$
- $\therefore a=h*k \quad , \quad b=h_1*k_1 \quad h,h_1 \in H \ , \ k,k_1 \in K$
- $\therefore a*b^{-1}=(h*k)*(h_1*k_1)^{-1}$
- $=(h*k)*(k_1^{-1}*h_1^{-1})$

- $=h*((k*k_1^{-1})*h_1^{-1})$
- العنصر $k*k_1^{-1}\in K$ لان K مغلقة بالنسبة للعملية $*$
- $(k*k_1^{-1})*h_1^{-1}\in K*H$
- $\because\ H*K=K*H$
- $\therefore$ يوجد $k_2\in K\ ,\ h_2\in H$
- بحيث $(k*k_1^{-1})*h_1^{-1}=h_2*k_2$
- $\therefore\ a*b^{-1}=h*(h_2*k_2)$
- $=(h*h_2)*k_2\in H*K$
- $\therefore\ a*b^{-1}\in H*K$
- $\therefore$ $(H*K,*)$ زمرة جزئية لـ $(G,*)$

- **نتيجة:**
- اذا كانت $(H,*)$, $(K,*)$ زمرتين جزئيتين للزمرة التبديلية $(G,*)$ فان $(H*K,*)$ زمرة جزئية .
- **تعريف:**
- لتكن $(H,*)$زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$ ولتكن $a\in G$ المجموعة :
- $a*H=\{a*h \ : \ h\in H \}$
- تدعى المجموعة $a*H$ مجموعة مصاحبة يسارية لـ H في G والعنصر aهو ممثل لـ $a*H$وبنفس الطريقة تعرف $H*a$ المجموعة المصاحبة اليمينية
- $H*a=\{h*a \ : h\in H \}$

المحاضرة (15)

- **مبرهنة:**
- اذا كانت $(H,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$فان $a*H=H$ اذا وفقط اذا كانت $a\in H$.
- **مبرهنة:**
- اذا كانت $(H,*)$زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$ فان
- $a*H=b*H$ اذا وفقط اذا كان $a^{-1}*b \in H$

- **البرهان:** نفرض ان $a*H=b*H$
- اذا كان $a*h_1 \in a*H$ فيوجد عنصر مثل $h_2 \in H$ بحيث ان
- $a*h_1=b*h_2 \quad , h_1 ,h_2 \in H$
- بضرب الطرفين بـ a^{-1} نحصل على

$$a^{-1}*(a*h_1)=a^{-1}*(b*h_2)$$

- لان * تجميعية $\therefore (a^{-1}*a)*h_1=(a^{-1}*b)*h_2$
- $\therefore \quad e*h_1=(a^{-1}*b)*h_2$
- $*h_2^{-1} \qquad [h_1=(a^{-1}*b)*h_2]$ نحصل على

- $h_1 * h_2^{-1} = (a^{-1} * b) * (h_2 * h_2^{-1})$
- $h_1 * h_2^{-1} = a^{-1} * b$
- $\therefore \; a^{-1} * b \in H$
- العكس: نفرض ان $a^{-1} * b \in H$
- حسب مبرهنة سابقة $(a^{-1} * b) * H = H$
- $\therefore$ يوجد $h_1, h_2 \in H$ بحيث ان
- $(a^{-1} * b) * h_1 = h_2$

- لان * تجميعية $a^{-1}*(b*h_1)=h_2$
- بضرب الطرفين بـ a من جهة اليسار نحصل على $b*h_1=a*h_2$
- اي ان $b*H=a*H$
- **<u>مبرهنة:</u>**
- اذا كانت $(H,*)$ زمرة جزئية لـ $(G,*)$ فإما ان تكون المجموعتان المصاحبتان $a*H , b*H$ منفصلتين او $a*H=b*H$
- البرهان: نفرض ان $a*H , b*H$ ليست منفصلة
- $\therefore (a*H)\cap(b*H)\neq\varphi$

- $\therefore$ يوجد على الاقل عنصر مثل c ينتمي الى كلا منهما ،اي ان
- $c \in a*H$ $\therefore$ يوجد $h_1 \in H$ بحيث $c=a*h_1$
- كذلك $c \in b*H$ $\therefore$ يوجد $h_2 \in H$ بحيث $c=a*h_2$
- $\therefore\ a*h_1=b*h_2$
- اي ان $a^{-1}*b=h_1*h_2^{-1}$
- $\therefore\ a^{-1}*b \in H$
- وبذلك يكون $a*H=b*H$ حسب مبرهنة سابقة

جامعة تلعفر
كلية التربية الاساسية
قسم الرياضيات / المرحلة الثالثة

محاضرات نظرية الزمر

اعداد
م.م. محمد عون مصطفى

المحاضرة الاولى

<u>تعريف</u>:لتكن $S \neq \varphi$ **فان اية دالة من الجداء الديكارتي** $S\times S$ الى S تدعى عملية ثنائية (Binary operation) على S وعادة يرمز للعملية الثنائية بـ $*$ اي ان

$*:S\times S\rightarrow S$ $\qquad$ $S\times S=\{(a , b) : a \in S , B\in S \}$

اي ان كل زوج مرتب $(a , b)\in S\times S$ له صوره في S يرمز لها بالرمز $a * b$

مثلا اذا كانت $S=N$ و $*$ هي عملية الجمع فان $+:N\times N\rightarrow N$

اي ان الزوج المرتب $(a , b)\in N\times N$ له صوره في N هي $a + b$

مثلا $(3,4))\in N\times N \Rightarrow 3+4=7 \quad \therefore (3,4)\rightarrow 7$

- **تعريف:** لتكن $*$ عمليه ثنائيه على المجموعه S و $A \subseteq S$ فان المجموعة الجزئية **A** يقال لها مغلقه close بفعل العمليه $*$ بشرط ان $a * b \in S \quad \forall\, a , b \in S$
- **مثال:**
- الطرح الاعتيادي هو عمليه ثنائيه على مجموعة الاعداد الصحيحة Z بينما المجموعة الجزئية Z_+ للأعداد الصحيحة الموجبه ليست مغلقه بفعل الطرح .
- $- : Z \times Z \rightarrow Z \quad \forall\, (a , b) \in Z \times Z \rightarrow a - b \in Z$
- $(-2,5) \in Z \times Z \rightarrow (-2)-(5)=-7 \in Z$
- $\therefore$ - عملية ثنائية

المحاضرة التاسعة

- مبرهنة: ليكن n عددا صحيحا موجبا ثابتا و a ,b , c اعددا صحيحة اختيارية ،فان
- $A \equiv a \pmod{n}$
- اذا كانت $a \equiv b \pmod{n}$ ، فان $b \equiv a \pmod{n}$
- اذا كانت $a \equiv b \pmod{n}$ ، $b \equiv c \pmod{n}$ فان $a \equiv c \pmod{n}$
- اذا كانت $a \equiv b \pmod{n}$ ، $c \equiv d \pmod{n}$ فان $a+c = b+d \pmod{n}$ ، $ac \equiv db \pmod{n}$
- اذا كانت $a \equiv b \pmod{n}$ ،فان $ac \equiv bc \pmod{n}$
- اذا كانت $a \equiv b \pmod{n}$ ،فان $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ لكل عدد صحيح موجب k .

- تعريف:
- لعدد صحيح اختياري a ،افرض ان [a] تمثل مجموعة كل الاعداد الصحيحة المتطابقة مع a معيار n :
- $[a]= \{ x \in Z \mid x \equiv a(\mathrm{mod} n)\}$
- $=\{ x \in Z \mid x = a+kn$, k لبعض عدد صحيح}
- نطلق على [a] بصف التطابق معيار n المعين بـ a ويسمى aممثل لهذا الصف .

- وللتوضيح ، افرض اننا نتعامل مع التطابق معيار 3 فان
- $[0]=\{x \in Z \mid x=3k$, لبعض $k \in Z\}$
- $=\{\ldots,-9,-6,-3,0,3,6,9,\ldots\}$.
- $[1]=\{x \in Z \mid x=1+3k$, لبعض $k \in Z\}$
- $=\{\ldots,-8,-5,-2,1,4,7,10,\ldots\}$.
- $[2]=\{x \in Z \mid x=2+3k$, k لبعض $\in Z\}$
- $=\{\ldots,-7,-4,-1,2,5,8,11,\ldots\}$.
- لاحظ ان كل عدد صحيح يقع في واحد من هذه الصفوف الثلاثة.

- المجموعة التي تضم كل صفوف التطابق معيار n يرمز لها بالرمز Z_n
- $\therefore\ Z_n=\{[0],[1],[3],[4],\ldots[n-1]\}$
- تسمى هذه المجموعة ، مجموعة الاعداد الصحيحة معيار n .
- مبرهنة: ليكن nعددا صحيحا موجبا و Z_n مجموعة الاعداد الصحيحة معيار n فان :
- 1)لكل $[a]\in Z_n$ ،فان $[a]\neq\varphi$
- 2)اذا كانت , $b\in[a]$,$[a]\in Z_n$ فان $[a]=[b]$،اي ان ، ان اي عنصر من صف [a]يعين الصف .
- 3)لاي $[a],[b]\in Z_n$حيث $[a]\neq[b]$ فان $[a]\cap[b]=\varphi$
- 4) $\cup\{[a]\ \mid\ a\in Z\}=Z$

المحاضرة الثالثة

- **تعريف:** يقال للعملية * المعرفة على المجموعة S انها تجميعية (associative) اذا كان
- $\forall\ a , b \in S$

  $(a*b)*c=a*(b*c)$
-
- **مثال:** عملية الطرح على مجموعة الاعداد الحقيقية $R^{\#}$ غير تجميعية لان
- $(a-b)-c \neq a-(b-c)$

مثل

$(9-5)-2 \neq 9-(5-2)$

- **<u>مثال:</u>** لتكن * عملية ثنائية معرفه على Z بالشكل التالي :
  $a*b=a+b=a+b+ab$ فهل ان *عملية تجميعية على Z
- الحل
- $(a*b)*c = (a+b+ab)*c$
- $=(a+b+ab)+c+(a+b+ab)c$
  $=a+b+ab+c+bc+$
  $bc+abc$

- $a*(b*c)=a*(b+c+bc)$
- $=a+b+c+bc+a(b+c+bc)$
- $=a+b+c+bc+ab+ac+abc$
- $\therefore$ * عملية تجميعية على Z

شبه الزمرة

- **<u>تعريف</u>:**شبه الزمرة Semi-group :هي الزوج $(S,*)$ المتكون من مجموعة غير خالية Sوعملية ثنائية $*$ تجميعية معرفة على Sاي ان $(S,*)$شبه زمرة اذا تحققت الشروط التالية:
- S مغلقة بالنسبة للعملية $*$ اي ان $a * b \in S \quad \forall\, a ,b \in S$
- $*$ تجميعية اي ان $\forall\, a ,b ,c \in S$ $(a*b)*c=a*(b*c)$

- **<u>مثال:</u>** عرف العملية * على الاعداد الحقيقية بالقاعدة
  $a*b=\max\{a ,b\}$ $a ,b \in R^{\#}$
- أي أن ، $a*b$ هي أكبر العددين a ,b او احدهما اذا كانت $a=b$.
- **بين ان $(R^{\#},*)$** شبه زمره .
- $R^{\#}$ مغلقه بالنسبة للعملية * $a*b=\max\{a ,b \}\in R^{\#}$
  $\forall\ a ,b \in R^{\#}$
- * تجميعيه $a*(b*c)=a*\max\{b ,c \} =\max\{a ,b ,c \}$
  $\forall\ a ,b ,c \in R^{\#}$
- $(a*b)*c=\max(a ,b) *c=\max\{a ,b ,c \}$
- $(R^{\#},*)$ ∴ شبه زمره .

- **<u>مثال</u>:** Z_+ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة فان $(Z_+ , +)$ و $(Z_+ ,.)$ تمثل شبه زمر . الحل للنظام $(Z_+ , +)$
- $Z_+ \neq \varphi$ ، وان Z_+ مغلقة بالنسبة لعملية الجمع لان حاصل جمع اي عددين موجبين يعطينا عدد موجب .
- + عملية تجميعية على Z_+ لان $\forall\, a, b, c \in Z_+$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

- **<u>مثال:</u>** لأية مجموعة X ،فان كلا من النظامين $(P(X),\cup)$ $(P(X),\cap)$,يكون شبه زمرة.
- الحل لـ $(P(X),\cup)$
- $P(X)$مغلقة بالنسبة لـ $\cup$ لان $A\cup B\in P(X)$ $\forall A,B\in P(X)$
- $\cup$ تجميعية من خواص المجموعات

$$\forall A,B,C\in P(X) \quad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

- $(P(X),\cup)$ $\therefore$ يكون شبه زمرة.

المحاضرة الثامنة

- مبرهنة: اذا كانت $(G,*)$ زمرة $a, b \in G$, فان $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$
- البرهان: حسب تعريف المعكوس $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$
- $\therefore$ يجب اثبات ان $(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=e$ وكذلك $(b^{-1}*a^{-1})*(a*b)=e$
- حسب المأخوذة $(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=$
- لان b^{-1} معكوس b $a*((b*b^{-1})*a^{-1})=$
- لان e عنصر محايد $a*(e*a^{-1}) =a*a^{-1}=e$
- وبنفس الطريقة نثبت ان $(b^{-1}*a^{-1})*(a*b)=e$
- $\therefore \ (a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$

- مبرهنة:قانون الاختصار في الزمر
- اذا كانت a, b, c عناصر من الزمرة $(G,*)$ بحيث اما $a*c=b*c$ او $c*a=c*b$ فان $a=b$.
- البرهان : let $a*c=b*c$
- $(G,*)$ زمرة , $c \in G$
- $\therefore\ c^{-1} \in G$
- نضرب طرفي المعادلة من جهة اليمين بـ c^{-1} نحصل على
- $(a*c)*c^{-1}=(b*c)*c^{-1}$
- $\therefore a*(c*c^{-1})=b*(c*c^{-1})$
- $\therefore a*e=b*e$ $\therefore a=b$
- وبنفس الطريقة اذا كانت $c*a=c*b$ نحصل على $a=b$

- تعريف: في اية زمرة $(G,*)$ القوى العددية للعنصر $a \in G$ تعرف بـ
- $a^k = a*a*\ldots*a$ من العوامل k
- $a^0 = e$
- $a^{-k} = (a^{-1})^k$ حيث $k \in Z$
- مبرهنة: لتكن $(G,*)$ زمرة و $a \in G$ و $m, n \in Z$
- قوى a تخضع لقوانين الاسس الاتية :
- $a^n * a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m * a^n$
- $(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn} = (a^m)^n$
- $a^{-n} = (a^n)^{-1}$
- $e^n = e$

- تعريف:لتكن n عددا صحيحا موجبا ثابتا .العددان الصحيحان a, b يقال لهما متطابقان معيار n (congrent modulo n) ،وتكتب a ≡ b(modn) اذا وفقط اذا كان الفرق a-b يقبل القسمة على n يعني ان :
- a ≡ b(modn) اذا وفقط اذا كان a-b= kn لعدد صحيح مثل k .
- وكمثال ، اذا كانت n=7 ،فيكون لدينا
- 3≡24(mod7) ,
- -5≡2(mod7)
- -8≡-50(mod7)
- اذا كانت a-b لا يقبل القسمة على n ، فنقول ان a غير متطابقة مع b معيار n .

المحاضرة الثانية

- **تعريف:** النظام الرياضي :نعني بالنظام الرياضي (البناء الرياضي) انه مجموعة غير خالية من العناصر مع واحدة او اكثر من العمليات الثنائية المعرفة على المجموعة اي ان النظام الرياضي يتكون من * و $S \neq \varphi$ او o,* عمليتين ثنائيتين ويرمز له بالرمز (S,*) او (S,*,o) .
- **مثال:** الزوج (S,.) حيث $S=\{1,-1,i,-i\}$ والعملية هي عملية الضرب الاعتيادي ،يكون نظاما رياضيا عندما
- نعرف $i^2=-1$.

- **مثال:** لتكن Z_o , Z_e تمثلان الاعداد الصحيحة الزوجية والفردية ،على الترتيب ، فان $(Z_e,+,.)$ يشكل نظاما رياضيا،في حين ان $(Z_o,+,.)$ لا يشكل نظاما رياضيا.
- الحل
- $(Z_e,+,.)$ يشكل نظاما رياضيا لان
- $Z_e \neq \varphi$
- + عملية ثنائية على Z_e لان حاصل جمع اي عددين من الاعداد الصحيحة الزوجية يعطينا عدد زوجي ،كذلك عملية الضرب عملية ثنائية على Z_e لان حاصل ضرب اي عددين من الاعداد الصحيحة الزوجية يعطينا عدد زوجي .

- بينما $(Z_o, +, .)$ ليس كذلك لان
- $Z_o \neq \varphi$
- + ليست عملية ثنائية على Z_o لان حاصل جمع اي عددين من الاعداد الصحيحة الفردية يعطينا عدد زوجي ،كذلك عملية الضرب ليست عملية ثنائية على Z_o لان حاصل ضرب اي عددين من الاعداد الصحيحة الفردية يعطينا عدد زوجي .

المحاضرة الخامسة

- **تعريف**: ليكن $(S,*)$ نظاما رياضيا بعنصر محايد (e) ،العنصر $a \in S$ يقال ان له معكوس من الجهتين تحت العملية * اذا وجد عنصر ما مثل a' بحيث ان $a*a'=a'*a=e$ العنصر a' يدعى معكوس a (inverse) ويرمز له بالرمز (a^{-1}) .
- **مثال**: لتكن S مجموعة كل الازواج المرتبة للأعداد الحقيقة غير الصفرية والعملية الثنائية * معرفة بـ $(a,b)*(c,d)=(ac, bd)$
- برهن ان النظام $(S,*)$ شبه زمرة تبديليه بمحايد وكل عنصر يمتلك معكوس .
- **مثال**: لتكن S مجموعة كل الازواج المرتبة للأعداد الحقيقة غير الصفرية والعملية الثنائية * معرفة بـ $(a,b)*(c,d)=(ac, bd)$
- برهن ان النظام $(S,*)$ شبه زمرة تبديلية بمحايد وكل عنصر يمتلك معكوس .

المحاضرة الرابعة

- **تعريف:** يقال للعملية * المعرفة على المجموعة S انها تبديلية (commutative) اذا كان
- $\forall\ a, b \in S$

  $a*b = b*a$
- **تعريف:** النظام $(S,*)$ يقال ان له عنصرا محايدا(من الجهتين) بالنسبة للعملية * اذا وجد عنصر مثل e في S بحيث ان

  $a*e=e*a=a \quad \forall\ a \in S$
- العنصر e الذي يمتلك هذه الصفه يسمى عنصرا محايدا (identity element) (عنصر ا لوحدة ،عنصر متعادل) لـ $(S,*)$.
- في $(Z,+)$ العنصر المحايد هو 0
- في $(Z_+,.)$ العنصر المحايد هو 1

- **<u>مبرهنة:</u>** النظام الرياضي $(S,*)$ له على الاكثر عنصر محايد واحد .
- البرهان :
- نفرض ان للنظام عنصرين محايدين هما e , e'
- بما ان $a*e=e*a=a \quad \forall\, a \in S$ وبصورة خاصة $e*e=e$
- اذا كان e محايد فان $e*e'=e'$
- اذا كان e' محايد فان $e'*e=e$
- $\therefore\ e=e'*e=e*e'=e'$
- $\therefore$ يوجد عنصر محايد واحد فقط للنظام الرياضي $(S,*)$

- **تعريف:** يقال لشبه الزمرة $(S,*)$ انها شبه زمرة Semi group بعنصر محايد اذا وجد عنصر محايد وحيد للعملية $*$.
- **مثال:** شبه الزمرة $(Z_+,+)$ لا تمتلك عنصر محايد لان $0 \notin Z_+$ لكن شبه الزمرة $(Z_+,.)$ تمتلك عنصر محايد هو (1) .
- **مثال:** شبه الزمرة $(P(X),\cup)$ تمتلك عنصر محايد هو φ لان

$$\forall A \in (P(X) \quad A \cup \varphi = \varphi \cup A = A$$

شبه الزمرة $(P(X),\cap)$ تمتلك عنصر محايد هو المجموعة الشامله X لان

$$\forall A \in (P(X) \quad A \cap X = X \cap A = A$$

المحاضرة السابعة

- **<u>بعض المبرهنات الاولية:</u>**
- **<u>مبرهنة</u>**:العنصر المحايد للزمرة $(G,*)$وحيد وكل عنصر من الزمرة له بالتحديد معكوس واحد .
- البرهان: العنصر المحايد للزمرة $(G,*)$وحيد تم اثباته في مبرهنة سابقة .
- لاثبات ان المعكوس واحد فقط : let $a \in G$
- نفرض ان لـ a معكوسان مختلفان هما $a`_1$ ,$a`_2$
- حسب تعريف المعكوس $a* a`_1= a`_1*a=e$

- كذلك $a * a`_2 = a`_2 * a = e$
- بما ان e وحيد
- $\therefore\ a * a`_1 = a * a`_2$
- بضرب طرفي المعادلة بـ $a`_1$ من جهة اليسار
- $a`_1 * (a * a`_1) = a`_1 * (a * a`_2)$
- $(a`_1 * a) * a`_1 = (a`_1 * a) * a`_2$
- $\therefore\ e * a`_1 = e * a`_2$
- $\therefore\ a`_1 = a`_2$

- كذلك بضرب طرفي المعادلة بـ $a`_2$ من جهة اليمين نحصل على نفس النتيجة
- ∴ المعكوس وحيد
- نتيجة : $(a^{-1})^{-1}=a$ لان
- $a^{-1}*(a^{-1})^{-1}=(a^{-1})^{-1}*a^{-1}=e$

- مأخوذة: اذا كانت $(G,*)$, $a, b, c, d \in G$ شبه زمرة فان
- $(a*b)*(c*d)=a*((b*c)*d)$
- البرهان:
- Let $c*d=x$
- $\therefore\ a*((b*c)*d)=a*(b*(c*d)$ لان * تجميعية
- $=a*(b*x)=(a*b)*x$ لان *تجميعية
- $=(a*b)*(c*d)$

المحاضرة السادسة

- **تعريف**:الزمرة (Group)هي الزوج المرتب $(G,*)$المتكون من مجموعة غير خالية G وعملية ثنائية * معرفة على Gوتحقق الشروط التالية :
- 1- Gمغلقة بالنسبة للعملية * اي ان $\forall a,b \in G \quad a * b \in S$
- 2- * تجميعية اي ان $\forall a, b, c \in G \quad (a*b)*c=a*(b*c)$
- 3 G -تمتلك عنصر محايد eبالنسبة للعملية * اي ان
- $\forall a \in G \quad a*e=e*a=a$
- كل عنصر $a \in G$ يمتلك معكوس هو a^{-1}بالنسبة للعملية * اي ان
- $\forall a \in G \quad \exists \; a^{-1} \ni a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$
- **ملاحظة**: اذا كانت * تبديليه فيقال ان $(G,*)$ زمرة تبديلية .

- **مثال**:ليكن a عددا حقيقيا لا يساوي صفرا . ولتكن مجموعة المضاعفات العددية لـ a : $G=\{ na \mid n \in Z \}$

- برهن ان (G,+) زمرة تبديليه .
- الحل:
- 1 - G مغلقة بالنسبة لعمليه +
- Let $na, ma \in G$, $n, m \in Z$
- $na + ma = (n + m)a \in G$
- $\therefore$ G مغلقة بالنسبة لعملية +

- 2- +تجميعية
- Let na , ma, $ka \in G$, n , m , $k \in Z$
- $(na + ma)+ka = na +(ma + ka)$
- $(na +ma)+ka =(n + m)a + ka=[(n + m)+k]a$
- $=[n+(m + k)]a= na + (m + k)a=na+(ma + ka)$
- $\therefore$ +تجميعية
- 3-العنصر المحايد هو $0=0a\in G$ لان
- $\forall\ na \in G \quad na+0a=(n+0)a=(0+n)a+0n+na=na$

- 4-المعكوس let $na \in G$
- معكوس na هو $-(na)$
لان
- $na+(-na)=(n+(-n))a=0a=(-n + n)a+-na + na$
- + تبديلية let $na ,ma \in G$
- $na + ma = (n +m)a =(m + n)a=ma+na$
- $\therefore$ (G,+) زمرة تبديلية .

المحاضرة العاشرة

- **<u>تعريف :</u>**
- العملية الثنائية $+_n$ تعرف على Z_n كما يأتي :
- لكل $[a],[b] \in Z_n$ $[a]+_n[b]= [a + b] \in Z_n$
- مبرهنة:لكل عدد صحيح موجب n ، النظام الرياضي $(Z_n ,+_n)$ يشكل زمرة تبديلية تعرف بزمرة الاعداد الصحيحة معيار n .

- البرهان:
- Z_n مغلقة بالنسبة للعملية $+_n$
- $\forall\ [a],[b]\in Z \qquad [a]+_n[b]=[a+b]\in Z_n$

- $+_n$ تجميعية $\qquad \forall [a],[b],[c]\in Z_n$
- $[a] +_n([b] +_n[c])=([a] +_n[b]) +_n[c]$
- $[a] +_n([b] +_n[c])=[a] +_n([b+c])$
- $=[a+(b+c)]$
- لان الجمع تحميعية $\qquad =[(a+b)+c]$
- $=[(a+b] +_n[c]$
- $=([a] +_n[b]) +_n[c]$

- العنصر المحايد هو صف التطابق [0] لان
- $\forall [a] \in Z_n \quad [a] +_n [0] = [a+0] = [a] = [0+a]$
- $+_n$ تبديليه $\forall [a],[b] \in Z_n$
- $[a] +_n [b] = [a+b] = b+a] = [b] +_n [a]$
- 5) المعكوس اذا كان $[a] \in Z_n$ فان $[n-a] \in Z_n$ و
- $[a] +_n [n-a] = [a+(n-a)] = [n] = [0]$
- وهكذا فان $[a]^{-1} = [n-a]$
- $\therefore \quad (Z_n, +_n)$ هي زمرة تبديليه .
- للتبسيط يمكن كتابة Z_n بالشكل : $Z_n = \{0,1,2,3,\ldots n-1\}$